Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 22 de octubre de 2021
Actualización: 22/10/2021, hora: 09:54:05

Ejercicio resuelto 1.

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx.$$

Solución. Calculamos las raíces del denominador. Como es de segundo grado, esto es fácil, obteniendo $x=1$ y $x=-3$. Luego

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+3)}\,dx.$$

Descomponemos de la manera habitual:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}.$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también:

$$1 = A(x+3)+B(x-1).$$

Damos valores $x=1$ y $x=-3$ para obtener A y B, siendo $1=4A$ y $1=-4B$. Por tanto, $A=1/4$ y $B=-1/4$. Entonces:

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+3}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln(x-3) - \frac{1}{4}\ln(x-1)+c.$$

□

Ejercicio resuelto 2. Hallar

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx.$$

Solución. Como el grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador, descomponemos la fracción del integrando en una suma. Para ello, buscamos las raíces del denominador. Como se puede sacar x como factor común,

$$x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6) = x(x+3)(x-2).$$

Por tanto

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2}.$$

Sumamos a la derecha, e igualamos los numeradores:

$$x+1 = A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3).$$

Damos valores $x=-3$, $x=2$ y $x=0$ para hallar los numeradores de la derecha:

$$-2 = 15B, \quad 3 = 10C, \quad 1 = -6A.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx &= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{2}{15}\int \frac{x+3}{}dx + \frac{3}{10}\int \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= -\frac{1}{6}\ln x - \frac{2}{15}\ln(x+3) + \frac{3}{10}\ln(x-2) + c.\end{aligned}$$

$\square$