Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 19 de octubre de 2021
Actualización: 20/10/2021, hora: 22:38:35

Ejercicio resuelto 1. Hallar las siguientes integrales:

1. $\int \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 \, dx$.
2. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \, dx$.
3. $\int \frac{1+\sin x}{\cos x} \, dx$.

Solución.

1. Elevamos al cuadrado y desarrollamos, quedando integrales inmediatas
$$= \frac{1}{4} \int (e^{2x} + e^{-2x} + 2) \, dx = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x) + c.$$

2. Ya que aparecen el seno y el coseno y uno es la derivada del otro (salvo signo), se puede hacer una sustitución por el seno o por el coseno. En primer lugar, intentamos
$$t = \sin x \rightsquigarrow dt = \cos x \, dx \rightsquigarrow dx = \frac{1}{\cos x} \, dt.$$
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \, dx = \int \frac{t}{\sqrt{\cos x}} \frac{1}{\cos x} \, dt$$
Intentamos con la segunda posibilidad:
$$t = \cos x \rightsquigarrow dt = -\sin x \, dx \rightsquigarrow dx = -\frac{1}{\sin x} \, dt.$$
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \, dx = -\int \frac{\sin x}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sin x} \, dt = -\int t^{-1/2} \, dt = -\frac{t^{1/2}}{1/2} + c = -2\sqrt{\cos x} + c.$$

3. Como antes, tenemos dos posibilidades:
$$t = \sin x \rightsquigarrow dt = \cos x \, dx \rightsquigarrow dx = \frac{1}{\cos x} \, dt.$$
$$\int \frac{1+\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{1+t}{\cos x} \frac{1}{\cos x} \, dt = \int \frac{1+t}{1-t^2} \, dt = \int \frac{1+t}{(1-t)(1+t)} \, dt$$
$$= \int \frac{\cancel{1+t}}{(1-t)\cancel{(1+t)}} \, dt = -\log(1-t) + c = -\log(1 - \sin x) + c.$$

$\square$

Ejercicio resuelto 2. Hallar:

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\,dx.$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx.$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx.$

Solución. 1. Ya que la derivada de lo de dentro de la raíz es x salvo constante,

$$t=4x^2-1 \rightsquigarrow dt=8x\,dx \rightsquigarrow dx=\frac{1}{8x}\,dt.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\,dx=\int \frac{1}{x\sqrt{t}}\frac{1}{8x}\,dt=\frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{8}\int \frac{4}{(t+1)\sqrt{t}}\,dt$$

Ya que el denominador se ha complicado, volvemos a hacer la integral pero ahora con $t^2=4x^2-1$, porque así desaparecer la raíz:

$$t^2=4x^2-1 \rightsquigarrow 2tdt=8x\,dx \rightsquigarrow dx=\frac{t}{4x}\,dt.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\,dx=\int \frac{1}{x\sqrt{t^2}}\frac{t}{4x}\,dt=\frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2}\,dt=\frac{1}{4}\int \frac{4}{1+t^2}\,dt$$

$$=\arctan(t)+c=\arctan(\sqrt{4x^2-1})+c.$$

2. Completamos cuadrados dentro de la raíz:

$$6x-x^2=-(3-x)^2+9.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{9-(3-x)^2}}\,dx$$

Esta integral se parece al arco seno. Dividimos numerador y denominador por 3:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-(3-x)^2}}\,dx=\int \frac{1/3}{\sqrt{1-(\frac{3-x}{3})^2}}\,dx.$$

$$t=3-x \rightsquigarrow dt=-dx.$$

$$=-\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=-\frac{1}{3}\arcsin(t)+c=-\frac{1}{3}\arcsin(3-x)+c.$$

3. Completamos cuadrados dentro de la raíz:

$$2x-x^2=-(1-x)^2+1.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\,dx$$

$$t=1-x \rightsquigarrow dt=-dx.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\,dx=-\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=-\arcsin(1-x)+c.$$