Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 20 de octubre de 2021
Actualización: 20/10/2021, hora: 22:42:45

Como ya sabemos, la idea de integrar es hacer transformaciones hasta llegar a integrales que sean más fáciles, por tanto:
♣ ¡Importante! No se va a repetir la solución de integrales que ya han salido en días previos.

Ejercicio resuelto 1. Hallar

1. $\int x(x^2+1)^2\,dx$.
2. $\int x(4x^2+3)^3\,dx$.

Solución. 1. Reconocemos que es una integral por sustitución porque el derivada del paréntesis es $2x$, que es lo que está fuera, salvo el 2 que está multiplicando:

$$t=(x^2+1) \rightsquigarrow dt=2x\,dx \rightsquigarrow dx=\frac{1}{2x}dt$$

$$\int x(x^2+1)^2\,dx=\int x\cdot t^2\frac{1}{2x}\,dt=\frac{1}{2}\int t^2\,dt=\frac{1}{2}\frac{t^3}{3}+c=\frac{1}{6}(x^2+1)^3+c.$$

Otra manera es: la derivada de lo del paréntesis es $2x$ y fuera está x, luego multiplico y divido por 2 (para que no cambie la integral), obteniendo entonces una integral inmediata:

$$\int x(x^2+1)^2\,dx=\frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^2=\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^3}{3}+c.$$

Otra manera es desarrollando el cuadrado, obteniendo al final un polinomio e integrando sumando a sumando:

$$\int x(x^2+1)^2\,dx=\int x(x^2+2x+1)\,dx=\int(x^3+2x^2+x)\,dx=\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c.$$

2. De nuevo, la derivada del paréntesis es $8x$ y fuera es x. Podemos hacer $t=(4x^2+3)$, podemos también desarrollar el paréntesis obteniendo un polinomio, pero aquí es más fácil multiplicar y dividir por 8 porque la integral es casi inmediata:

$$\int x(4x^2+3)^3\,dx=\frac{1}{8}\int 8x(4x^2+3)^3\,dx=\frac{1}{8}\frac{(4x^2+3)^4}{4}+c.$$

□

Practicamos ahora con integrales que tienen raíces cuadradas o similares. Varias observaciones que hay que tener presente:

1. No son fáciles a no ser que sean 'casi inmediatas'.

2. No hay un método único para resolver, dependen de la función. A veces, la sustitución

$$\int \sqrt[n]{P(x)}\, dx, \quad t^n = P(x),$$

puede ser útil porque la raíz quedaría sustituida por $P(x)$: el problema se pasa a dx.

3. Pequeñas "variaciones" hacen que la integral pase de resolverse a no resolverse y viceversa.

Ejercicio resuelto 2. 1. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx$.

2. $\int x\sqrt[3]{x+1}\, dx$.

Solución. 1. La derivada del radicando es 2, sin embargo fuera tenemos x, luego la sustitución $t = 2x-1$ parece no viable. Sin embargo vamos a hacerla para ver si es posible:

$$t = 2x-1 \rightsquigarrow dt = 2\, dx \rightsquigarrow dx = \frac{1}{2}\, dt.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Tenemos que cambiar la función de x a función de t. Por la sustitución hecha:

$$x = \frac{t+1}{2}.$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{4}\int \left(\frac{t}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = \frac{1}{4}\int t^{1/2}\, dt + \frac{1}{4}\int t^{-1/2}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{1}{4}\frac{t^{1/2}}{1/2} + c = \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + \frac{1}{2}(2x-1)^{1/2} + c.$$

Otra manera es la siguiente. Hacemos $t^2 = 2x-1$ para que la raíz desaparezca:

$$t^2 = 2x-1 \rightsquigarrow 2t\, dt = 2\, dx \rightsquigarrow dx = t\, dt.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{t^2}}\, dt = \int \frac{x}{t} t\, dt.$$

Quitamos ahora x, que es

$$x = \frac{1}{2}(t^2+1).$$

Comparar con la sustitución de antes, donde x era diferente.

$$\int \frac{x}{t} t\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t} t\, dt = \frac{1}{2}\int (t^2+1)\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} + t\right) + c.$$

Otra diferencia con la sustitución de antes: ahora t es una raíz cuadrada, $t = \sqrt{2x-1} = (2x-1)^{-1/2}$. Entonces queda

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{2x-1})^3}{3} + \sqrt{2x-1}\right) + c.$$

2. La derivada de lo de dentro es 1, que no es múltiplo de x que es lo que está fuera. Podemos hacer $t = x+1$ como antes a ver qué sucede:

$$t = x+1 \rightsquigarrow dt = dx,$$

$$\int x\sqrt[3]{x+1}\,dx = \int x\sqrt[3]{t}\,dt = \int (t+1)\sqrt[3]{t}\,dt = \int t\sqrt[3]{t}\,dt + \int \sqrt[3]{t}\,dt =$$

$$= \int t^{4/3}\,dt + \int t^{1/3}\,dt = \frac{t^{7/3}}{7/3} + \frac{t^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{7}(x+1)^{7/3} + \frac{3}{4}(x+1)^{4/3} + c.$$

La otra manera es hacer t^3 igual a lo de dentro de la raíz:

$$t^3 = x+1 \rightsquigarrow 3t^2\,dt = dx, \quad x = t^3-1, \quad t = (x+1)^{1/3}.$$

$$\int x\sqrt[3]{x+1}\,dx = \int x\sqrt[3]{t^3}3t^2\,dt = \int (t^3-1)\cdot t\cdot 3t^2\,dt = 3\int t^3(t^3-1)\,dt =$$

$$= 3\int (t^6-t^3)\,dt = 3\frac{t^7}{7} - 3\frac{t^4}{4} + c = \frac{3}{7}(x+1)^{7/3} + \frac{3}{4}(x+1)^{4/3} + c.$$

Si observamos las dos integrales, hemos tenido "suerte" de que haya salido bien. □

En el siguiente vemos cómo pequeñas variaciones cambian drásticamente la solución de la integral (se puede).

Ejercicio resuelto 3. 1. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ (versión 1).

2. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ (versión 2).

3. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ (versión 3).

Solución. 1. La derivada del radicando es $-2x$ que es lo que hay fuera, salvo $2x$, luego es claro que es casi inmediata:

$$t = 1-x^2 \rightsquigarrow dt = -2x\,dx \rightsquigarrow -\frac{1}{2x}.$$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int x\sqrt{t}\frac{1}{x}\,dt = -\frac{1}{2}\int t^{1/2}\,dt = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + c.$$

2. Esta integral se explicó en teoría, donde la sustitución válida es $x = \sin(t)$. No repetimos, y quedaba

$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)$$

3. Comparando con el primer ejercicio, tenemos dos posibilidades, $t = 1-x^2$ o $t^2 = 1-x^2$. Veamos la primera:

$$t = 1-x^2 \rightsquigarrow dt = -2xdx \rightsquigarrow dx = -\frac{1}{2}\frac{dt}{x}.$$

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int x\sqrt{t}\,dt$$

Quitamos la x mediante $x=\sqrt{1-t}$,

$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-t}\sqrt{t}\,dt=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t-t^2}\,dt$$

quedando una integral que parece más difícil que la primera.

Cambiamos la sustitución por la segunda posibilidad:

$$t^2=1-x^2\rightsquigarrow 2t=-2x\,dx\rightsquigarrow dx=-\frac{t}{x}\,dt.$$

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=-\int x^2\sqrt{t^2}\frac{t}{x}\,dt=-\int x\cdot t^2\,dt=-\int\sqrt{1-t^2}t^2$$

!quedando la misma integral que al principio!

Probamos ahora, como en la segunda integral, $x=\sin(t)$.

$$x=\sin(t)\rightsquigarrow dx=\cos(t)\,dt.$$

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sin^2(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,dt=\int\sin^2(t)\cos^2(t)\,dt.$$

Esta integral corresponde a la parte de teoría de “integración de funciones trigonométricas”. Vamos a hacerla porque a fin de cuentas es de nuevo por sustitución. Ahora el integrando es par en seno y en coseno, luego se cambia a funciones del ángulo doble. Para ello usamos la identidad

$$\sin(t)\cos(t)=\frac{1}{2}\sin(2t)$$

luego la integral es

$$=\frac{1}{4}\int\sin^2(2t)\,dt$$

Usamos la identidad

$$\sin(t)^2=\frac{1-\cos(2t)}{2},$$

pero reemplazando t por 2:

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos(4t))\,dt$$

cuya integral es inmediata:

$$=\frac{1}{8}(t-\frac{1}{4}\sin(4t))=\frac{1}{8}t-\frac{1}{32}\sin(4t)+c=\frac{1}{8}\arcsin(x)-\frac{1}{32}\sin(4\arcsin(x))+c.$$

Concluimos como habíamos dicho al principio: pequeñas variaciones en la integral hacen que su resolución cambie drásticamente. □