Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 15 de octubre de 2021
Actualización: 15/10/2021, hora: 21:30:35

Ejercicio resuelto 1.

$$\int \frac{1+\cos(e^{-2x})}{e^{2x}}\, dx.$$

Solución. Vemos que no hay relación entre el numerador y el denominador, salvo que se repite e^{2x}. Lo que se va a hacer es romper la suma en la suma de dos integrales:

$$\int \frac{1+\cos(e^{-2x})}{e^{2x}}\, dx = \int \frac{1}{e^{2x}}\, dx + \int \frac{\cos(e^{-2x})}{e^{2x}}\, dx.$$

Hacemos cada integral por separado. La primera la ponemos de la forma $\int e^{-2x}\, dx$. Como la derivada del exponente es -2 que es constante, sugiere que sea inmediata de tipo e^x. En la segunda integral, como aparece e^{-2x} que es el denominador, vamos a sustituir e^{-2x}. Para la primera $t = e^{-2x}$, $dt = -2\, dx$, luego

$$\int \frac{1}{e^{2x}}\, dx = \int e^{-2x}\, dx = \int e^t\, \frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2}e^t + c = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c.$$

Para la segunda,

$$t = e^{-2x} \rightsquigarrow dt = -2e^{-2x}\, dx = -2t\, dx \rightsquigarrow dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{e^{-2x}}\, dt.$$

$$\int \frac{\cos(e^{-2x})}{e^{2x}}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos(t)}{e^{2x}}\frac{1}{e^{-2x}}\, dt = -\frac{1}{2}\int \cos(t)\, dt = -\frac{1}{2}\sin(t) + c = -\frac{1}{2}\sin(e^{-2x}) + c.$$

$\square$

Ejercicio resuelto 2.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\, dx.$$

Solución. La integral parece que es del tipo arco seno. Para ello, el término x^6 es un cuadrado, es decir, es $(x^3)^2$ y falta que la derivada de x^3 aparezca en el numerador. La derivada es $3x^2$, y lo que hay es x^2, es decir, son iguales salvo constantes. Por tanto, sí es de tipo arco seno.

Lo primera es quitar el 16 y poner 1. Para ello dividimos numerador y denominador por 4, quedando

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\, dx = \int \frac{\frac{x^2}{4}}{\sqrt{1-\frac{x^6}{4}}}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(\frac{x^3}{2})^2}}\, dx.$$

Ahora el cambio de variable:

$$t = \frac{x^3}{2} \rightsquigarrow dt = \frac{3}{2}x^2\, dx \rightsquigarrow dx = \frac{2}{3}\frac{1}{x^2}\, dt.$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(\frac{x^3}{2})^2}}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{2}{3}\frac{1}{x^2}\, dt = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{6}\arcsin(t) + c = \frac{1}{6}\arcsin(\frac{x^3}{2}) + c$$

□

Cuando se hace un cambio de variable donde aparece e^x, al derivar vuelve a aparecer dicha función. Lo vemos en la siguiente integral.

Ejercicio resuelto 3.

$$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx.$$

Solución. Podemos intentar con una integral del tipo logaritmo, pero en el numerador no aparece la derivada del denominador. Hacemos el cambio

$$t = e^x \rightsquigarrow dt = e^x\, dx \rightsquigarrow dx = \frac{1}{e^x}\, dt.$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int \frac{1}{t+1}\frac{1}{e^x}\, dt.$$

El cambio es que podemos seguir que aparezca t pues $e^x = t-1$, luego

$$= \int \frac{1}{t+1}\frac{1}{t}\, dt.$$

Todavía no hemos dado las herramientas para resolver este tipo de integral.

Lo que hacemos es sumar y restar el numerador por e^x:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\, dx = \int \frac{1+e^x}{1+e^x}\, dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx = x - \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$$

$$= x - \int \frac{t}{1+t}\frac{1}{e^x}\, dx = x - \int \frac{t}{1+t}\frac{1}{t}\, dx = x - \log(1+t) + c = -x\log(1+e^x) + c.$$

□

Ejercicio resuelto 4.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\log(\sin x)\, dx.$$

Solución. La derivada del seno, que es lo que hay dentro del logaritmo es el coseno, que no es lo que está fuera, aunque aparece el seno que es el cambio de variable. Por otro lado, la derivada de $\cos(x)/\sin(x)$ no es el logaritmo. Finalmente, la derivada de $\log(\sin(x))$ es $\cos x/\sin x$ que es lo que hay fuera. Concluimos pues que la sustitución buena es

$$t = \log(\sin x) \rightsquigarrow dt = \frac{\cos x}{\sin x}\, dx.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \log(\sin x)\, dx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(\log(\sin x))^2}{2} + c.$$

□

Ejercicio resuelto 5.

$$\int \tan^2(x)\, dx, \quad \int \tan^2(2x)\, dx.$$

Solución. En la primera integral nos sale el cuadrado de la tangente. Pero si comparamos con la derivada de la tangente:

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2(x),$$

concluimos que es casi inmediata:

$$\int \tan^2(x)\, dx = \int (\tan x) - 1\, dx = \tan(x) - x + c$$

La segunda integral es parecida. Lo que cambia es que aparece $2x$ en vez de x. Pero haciendo $t = 2x$, nos quedaría como la de antes:

$$t = 2x \rightsquigarrow dt = 2\, dx \rightsquigarrow dx = \frac{1}{2}\, dt.$$

$$\int \tan^2(2x)\, dx = \int \tan^2(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \tan(t)\, dt = \frac{1}{2}(\tan(t) - t) + c = \frac{1}{2}(\tan(2x) - 2x) + c.$$

□