Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 08 de octubre de 2021
Actualización: 08/10/2021, hora: 20:37:03

Ejercicio resuelto 1. Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Solución. Llamamos a uno x y el otro es necesariamente $10-x$. Por tanto su producto es $x(10-x)$ y ésta es la función a la que hallar el máximo. Sea $f(x) = x(10-x) = 10x - x^2$. Entonces $f'(x) = 10-2x$, igualamos a cero, obteniendo $x = 5$. La derivada segunda es $f''(x) = -2$, luego efectivamente es un máximo. Los dos números son 5 y $10-5 = 5$. □

Ejercicio resuelto 2. Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 metro. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

Solución. Al lado de uno lo llamamos x y el otro y. El área del primero es x^2 y el del segundo, y^2. El precio de la primera chapa es $2x^2$ y el de la segunda, $3y^2$. El perímetro del primero es $4x$ y el del segundo, $4y$. Por tanto,

$$4x+4y = 1 \rightsquigarrow y = \frac{1}{4} - x.$$

El coste total es

$$f(x) = 2x^2 + 3(\frac{1}{4} - x)^2 =$$

Derivamos,

$$f'(x) = 4x - 6(\frac{1}{4} - x) \rightsquigarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{20}.$$

La derivada segunda es

$$f''(x) = 4+6 = 10 > 0,$$

luego es un mínimo. La solución es: el lado de la primera chapa es $3/20m = 15cm.$ y el de la segunda $1/10m = 10cm.$. □

Ejercicio resuelto 3. Calcular las asíntotas, los intervalos de monotonía, extremos relativos y convexidad de la función

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}.$$

Solución. 1. *a*) La función no está definida en $x=-2$ y $x=2$. Como el numerador en dichos puntos no es 0, concluimos que

$$\lim_{x\to\pm 2} f(x) = \infty,$$

luego $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales.

b) Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1,$$

entonces la recta horizontal $y = 1$ es una asíntota horizontal por los dos lados.

c) No tiene asíntotas oblícuas porque tiene horizontales.

2. Hallamos la primera derivada e igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-4)-2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2} \rightsquigarrow f'(x) = 0 \rightsquigarrow x = 0.$$

Para los intervalos de monotonía, aparte del punto $x = 0$ hay que tener en cuenta los dos puntos donde la función no está definida. Así tenemos Por tanto, $x = 0$ es un máximo rela-

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
signo f''	+	+	-	-
función	creciente	creciente	decreciente	decreciente

tivo.

3. Hallamos la derivada segunda e igualamos a cero:

$$f''(x) = \frac{-14\cdot(x^2-4)^2+14x\cdot 2\cdot 2x\cdot(x^2-4)}{(x^2-4)^4} = 14\frac{4+3x^2}{(x^2-4)^3}$$

El numerador no se anula, luego sólo hay que tener en cuenta los puntos donde no está definida la función. Además, el numerador siempre es positivo, luego hay que ver el signo del denominador (el exponente es impar), o lo que es lo mismo de x^2-4:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
signo f''	+	-	+
función	convexa	cóncava	convexa

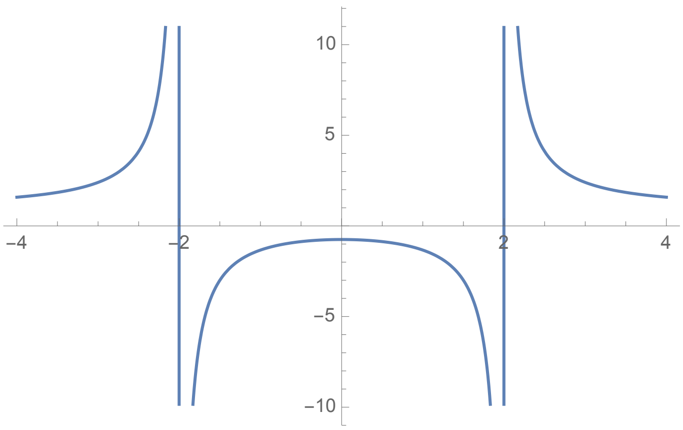

Figura 1: La gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$.