Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 05 de octubre de 2021
Actualización: 05/10/2021, hora: 13:38:31

Ejercicio resuelto 1. Hallar los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2, & x < 1 \\ bx + \frac{2}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$, y hallar la derivada en dicho punto. Estudiar la monotonía, convexidad/concavidad y las asíntotas.

Solución. En primer lugar, la función tiene que ser continua. Hallamos los límites laterales en $x = 1$ porque la función tiene diferente comportamiento a izquierda y a derecha,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^3 + ax^2) = 1 + a,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (bx + \frac{2}{x}) = b + 2.$$

Por tanto, es necesario que $1 + a = b + 2$, es decir, $a - b = 1$.

Calculamos la derivada de la función. De nuevo, los diferentes comportamientos de f hace que las cuentas sean diferentes a ambos lados:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax, & x < 1 \\ b - \frac{2}{x^2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (3x^2 + 2ax) = 3 + 2a,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (b - \frac{2}{x^2}) = b - 2.$$

Así, $3 + 2a = b - 2$, es decir, $2a - b = -5$. Esta ecuación, junto la que había salido antes, nos da los valores de a y b que resuelven el ejercicio: $a = -6$ y $b = -7$.

Ahora la función es

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2, & x < 1 \\ -7x + \frac{2}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Hallamos la derivada, la cual es a trozos y ya se había hecho:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12x, & x < 1 \\ -7 - \frac{2}{x^2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Igualamos a 0.

♣ El razonamiento hay que hacerlo para $x <$ y $x > 1$. En $x = 1$ da igual hacerlo por la derecha que por la izquierda, ya que la función es derivable y la derivada coincide tanto por la derecha que por la izquierda (así es como hemos hecho la parte anterior).

De $3x^2 - 12x = 0$, tenemos $x = 0$ y $x = 4$. Éste último no vale pues es mayor que 4. De $-7 - 2/x^2 = 0$, concluimos que no hay soluciones. Dividimos la recta real en lo los puntos donde se anula la derivada.

♣ Obsérvese que la función en $x = 0$ está definida ya que la expresión $\frac{2}{x}$ es para $x \geq 1$.

Luego los intervalos de monotonía son $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Dando valores, concluimos que en el primer intervalo $y' > 0$ y la función es creciente y en $(0, \infty)$, $y < 0$ y la función es decreciente. En particular, la función tiene un máximo relativo en $x = 0$.

Hallamos ahora la derivada segunda:

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 12, & x < 1 \\ \frac{4}{x^3}, & x > 1. \end{cases}$$

La función f'' NO es continua en $x = 1$ (la parte inicial del ejercicio aseguraba la continuidad de $f(x)$ y $f'(x)$, pero con los valores de a y b determinados, concluimos que la función no es continua en $x = 1$. Por tanto, para el razonamiento de la convexidad/concavidad hay que tenerlo presente.

Si $6x - 12 = 0$, entonces $x = 2$ que NO pertenece a $x < 1$. Por otro lado, $4/x^3$ no se anula. Por tanto, no hay puntos de inflexión. Para hallar el signo de y'', separamos el dominio por los puntos de inflexión (que no hay) y los puntos de discontinuidad de f''[1], que en este caso es $x = 1$. Damos cualquier valor en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$, siendo negativo y positivo, respectivamente, luego cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, \infty)$.

Para las asíntotas, no tiene verticales pues la función es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$. Para las horizontales, tenemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -7x + \frac{2}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - 6x^2 = -\infty.$$

Por tanto, no tiene asíntotas horizontales. Para las asíntotas oblicuas,

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 6x^2}{x} = +\infty.$$

Por la izquierda no tiene. Por la derecha,

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-7x + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-7x^2 + 2}{x^2} = -7,$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} f(x) + 7x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Por tanto, la asíntota oblicua por la derecha es $y = -7x$.

[1] En algunos ejercicios ya hechos en clase, la función inicial era discontinua en ciertos puntos $x = a$ lo que implicaba la discontinuidad de todas sus derivadas al no estar definida la función (para que una función sea derivable en un punto, tiene que ser continua en el mismo). En este ejemplo, hay sido 'al revés'. La función era continua, también su primera derivada, pero no así su segunda derivada).

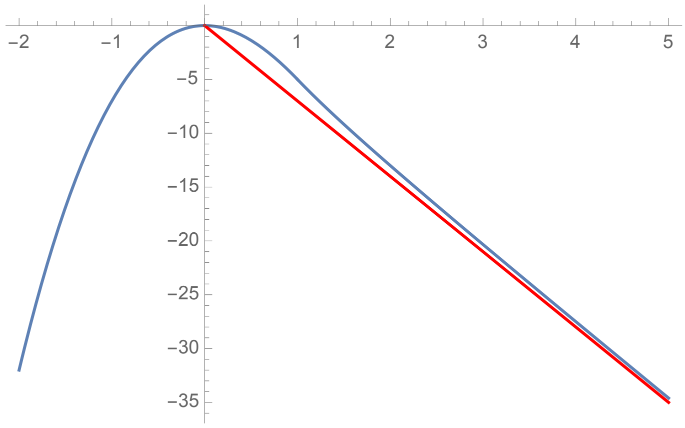

Figura 1: La función del ejercicio 1: en rojo la asíntota oblicua por la derecha.

Ejercicio resuelto 2. De un terreno, se quiere vender un sola rectangular de 12800 metros cuadrados que a su vez se divide en tres parcelas rectangulares igualmente, una al lado de la otra. Si se quiere vallar las lindes de las tres parcelas (el borde de fuera y las separaciones de las parcelas), hallar las dimensiones del solar.

Solución. Se llama x el lado superior del terreno e y el del lado. Ya que el solar se divide a su vez en tres iguales, entonces hacemos divisiones de $x/3$. Por tanto la longitud del solar, así como la de las lindes, es: $2x+2y$ por el borde exterior, y hay que sumarle $2y$ por las dos lindes interiores. Por tanto, es $2x+4y$. Por otro lado la superficie del solar es $xy = 12800$. De aquí, $y = 12800/x$ y la función que determina la longitud es

$$f(x) = 2x+4y = 2x+4\cdot\frac{12800}{x} = 2x+\frac{51200}{x}.$$

La primera derivada es

$$f'(x) = 1-\frac{51200}{x^2},$$

obteniendo $x = \pm 160$. La segunda derivada es

$$f''(x) = \frac{102400}{x^3}.$$

Como el valor $x = -160$ no tiene sentido, sustituimos por $x = 160$, y viendo que $f''(160) > 0$, luego es un mínimo.

Por tanto las medidas son $x = 160$ e $y = 12800/160 = 80$.