Óptica y Optometría: curso $1^0$-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 01 de octubre de 2021
Actualización: 03/10/2021, hora: 19:58:31

**Ejercicio resuelto 1.** Hallar los puntos de corte con los ejes de abcisas, intervalos de monotonía, convexidad, extremos relativos, y asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^4+3}{x}$.

**Solución.** La función no está definida en $x = 0$. Este punto hay que tenerlo en cuenta para los intervalos de monotonía y convexidad así como las asíntotas verticales.

1. Hacemos $y = 0$, es decir, $x^4 + 3 = 0$, y no hay solución, luego no tiene intersección con el eje de abcisas. Por otro lado tampoco con el de ordenadas porque la función no está definida en $x = 0$.

2. Hallamos la primera derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^2} \to 3x^4 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

 El punto $x =_1$ es un máximo relativo y $x = 1$ un mínimo relativo.

| | $(-\infty,-1)$ | $(-1,0)$ | $(0,1)$ | $(1,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| signo $f'$ | + | - | - | + |
| función | creciente | decreciente | decreciente | creciente |

3. Hallamos la derivada segunda, igualamos a cero, y damos valores en puntos intermedios, junto con el punto $x = 0$.

$$f''(x) = \frac{6x^4 + 6}{x^3} \to 6x^4 + 6 = 0 \Rightarrow \text{no tiene solución.}$$

| | $(-\infty,0)$ | 0 $(0,\infty)$ |
|---|---|---|
| signo $f''$ | - | + |
| función | cóncava | convexa |

4. *a*) Ya que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+3}{x} = \frac{3}{0} = \infty,$$

 la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

*b*) Para las asíntotas horizontales,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+3}{x} = \infty,$$

luego no tiene.

*c*) Si $y = mx + n$ es una asíntota oblicua (por uno de los lados), entonces

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+3}{x^2} = \infty,$$

luego tampoco tiene.

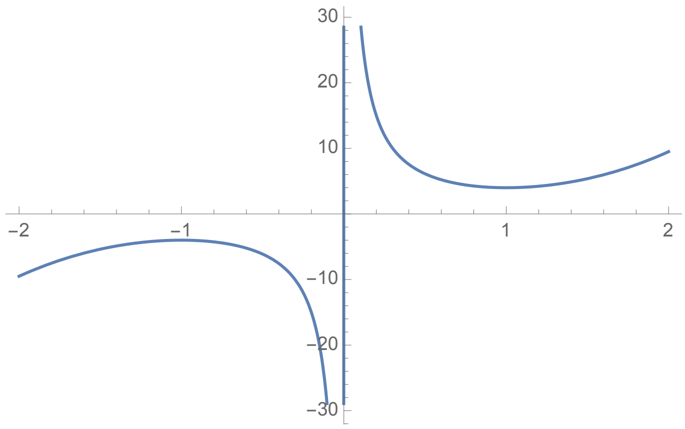


Figura 1: La función $f(x) = \frac{x^4+3}{x}$.

**Ejercicio resuelto 2.** Para la función $f(x) = \log(x^2+1)$, hallar los puntos de corte, simetrías, intervalos de monotonía y convexidad, y extremos relativos y puntos de inflexión. También las asíntotas.

**Solución.** El dominio de la función es $\mathbb{R}$, luego no tiene asíntotas verticales.

1. Si hacemos $y = 0$, entonces $x^2 + 1 = 1$, luego $x = 0$ es el punto de intersección con el eje de abcisas y por tanto, también con de ordenadas.

2. $f(-x) = \log((-x)^2+1) = \log(x^2+1) = f(x)$, luego es simétrica respecto del eje $y$, es decir, es una función par.

3. Hallamos la primera derivada e igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \to 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Los intervalos de monotonía son: Por tanto $x = 0$ es un mínimo relativo.

| | $(-\infty,0)$ | $(0,\infty)$ |
|---|---|---|
| signo $f'$ | - | + |
| función | decreciente | creciente |

4. Hallamos la derivada segunda e igualamos a cero:

$$f''(x) = \frac{2\cdot(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \to -2x^2+2=0 \Rightarrow x=\pm 1.$$

Por tanto, lo intervalos de convexidad son Los puntos de inflexión son $x=1$ y $x=-1$.

| | $(-\infty,-1)$ | $(-1,1)$ | $(1,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| signo $f'$ | - | + | - |
| función | cóncava | convexa | cóncava |

5. Para las asíntotas horizontales,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log(x^2+1) = \log(\infty) = \infty,$$

luego no tiene asíntotas horizontales. Para las oblicuas, y por L'Hôpital,

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = 0,$$

luego no tiene.

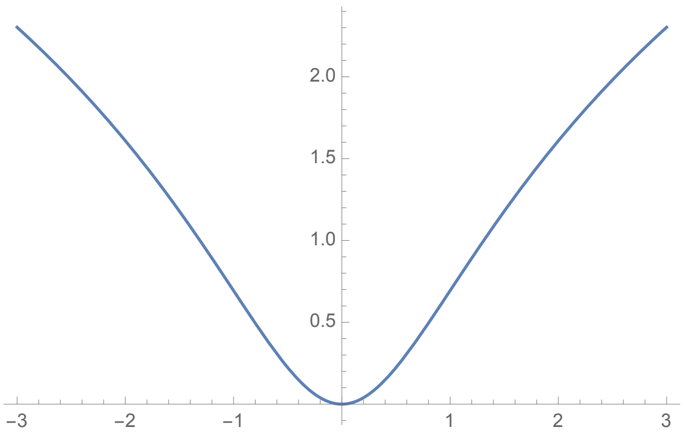


Figura 2: La función $f(x) = \log(x^2+1)$.