Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 28 de septiembre de 2021
Actualización: 28/09/2021, hora: 23:59:00

Ejercicio resuelto 1. Hallar los intervalos de monotonía, extremos relativos y asíntotas de la función $f(x) = (x+3)e^{-x}$.

Solución. La función se puede ver (y conveniente) como un cociente de funciones: $f(x) = \frac{x+3}{e^x}$.

1. Hallamos la primera derivada. Como es un cociente,

   $$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - e^x(x+3)}{(e^x)^2} = \frac{-x-2}{e^x}.$$

   Igualamos a cero, es decir, el numerador, luego $x = -2$. Los intervalos de crecimientos son $(-\infty, -2)$ y $(-2, \infty)$. Damos valores, por ejemplo $x = -3$, que sale positivo, y $x = 0$, que es negativo. Por tanto,

   a) En $(-\infty, -2)$, es creciente.

   b) En $(-2, \infty)$, es decreciente.

2. Por tanto, $x = -2$ es un mínimo relativo.

   a) Asíntota vertical no tiene porque el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$.

   b) Para la asíntota horizontal,

   $$\lim_{x\to\pm\infty} (x+3)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

   Usamos la regla de L'Hôpital:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

   $$\lim_{x\to-\infty} (x+3)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

   Luego la asíntota horizontal por la derecha es $y = 0$ y por la izquierda no tiene.

   c) Al tener asíntota horizontal por la derecha, no tiene oblicua. Por la izquierda:

   $$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{xe^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x+3}{x}}{e^x} = \frac{1}{0} = \infty$$

   luego no tiene.

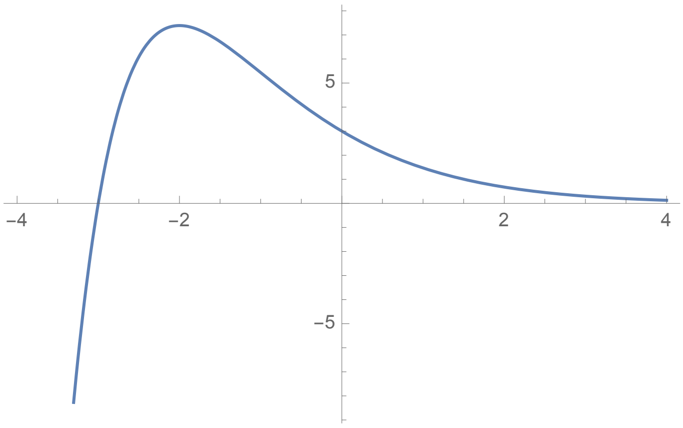

Figura 1: La función $f(x) = (x+3)e^{-x}$.

Ejercicio resuelto 2. Para la función $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$, hallar los intervalos de monotonía, convexidad, extremos relativos y asíntotas.

Solución. El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$ excepto $x = 1$.

1. Se halla la primera derivada y se iguala a cero:

$$f'(x) = \frac{e^2(x-2)}{(x-1)^2} \to x-2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

   Ahora en los intervalos de monotonía, no sólo hay que tener en cuenta el punto $x = 2$, sino también $x = 1$, luego hay cuatro intervalos de monotonía. Por tanto sólo $x = 2$ es un mínimo

	$(-\infty, 1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
signo f'	-	-	+
función	decreciente	decreciente	creciente

   relativo.

2. *a*) Usando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x}{1} = \begin{cases} \infty, & \text{en } +\infty \\ 0, & \text{en } -\infty. \end{cases}$$

   se concluye que hay asíntota horizontal por la izquierda, pero no por la derecha.

   b) Sabemos que no tiene asíntota oblicua por la izquierda. Vemos qué pasa a la derecha.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-x}.$$

Aplicamos dos veces L'Hôpital, :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Por tanto no tiene asíntota oblicua por la derecha.

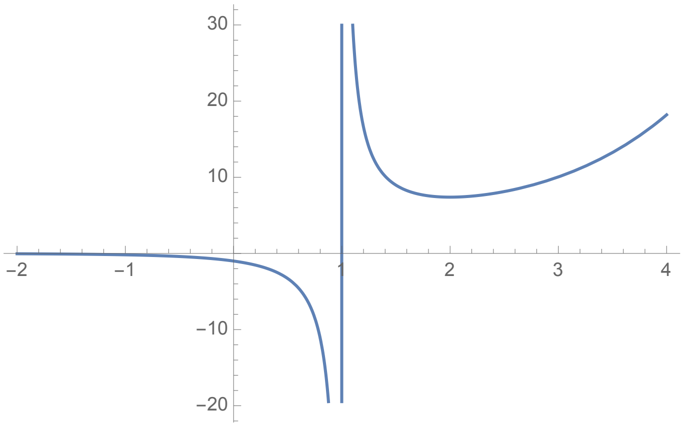

Figura 2: La función $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

Ejercicio resuelto 3. Hallar las asíntotas de

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

Solución.

1. Como la función no está definida en $x = -1$ y
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{1}{0} = \infty,$$
concluimos que $x = -1$ es una asíntota vertical.

2. Para la horizontal,
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \infty,$$
entonces no hay.

3. Si $y = mx + n$ es una asíntota oblicua,
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = 1.$$
Por otro lado,
$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2-x}{x^2+2x+1} = -2.$$
Por tanto, $y = x - 2$ es la asíntota oblicua.

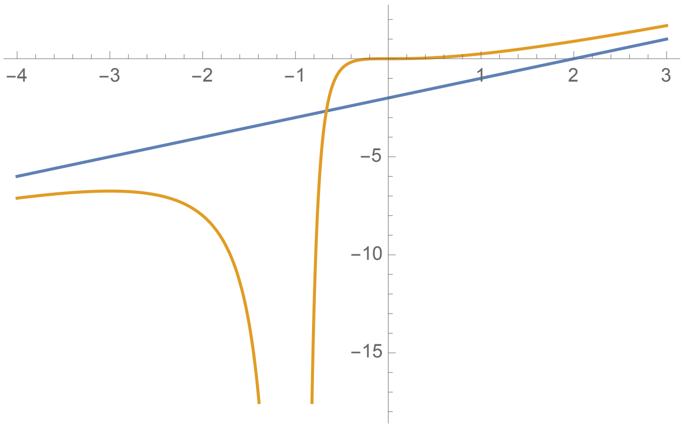

Figura 3: La función $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.