Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 24 de septiembre de 2021
Actualización: 24/09/2021, hora: 19:18:23

Ejercicio resuelto 1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{\log(x)}{x^2}$.
2. $g(x) = (1-x^3)\cos x$.
3. $h(x) = -5x + \frac{1}{e^x}$.

Solución.

1. Tenemos un cociente de funciones:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\log x)' x^2 - (x^2)' \log x}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (2x) \cdot \log x}{x^4} \\ &= \frac{x - 2x \log x}{x^4} = \frac{1 - 2\log x}{x^3}. \end{aligned}$$

2. Tenemos un producto de funciones:
$$g'(x) = -3x^2 \cos x + (1-x^3) \cdot (-\sin x) = -3x^2 \cos x - (1-x^3)\sin x.$$

3. Tenemos una suma de funciones. Por otro lado, la función $1/e^x$ la escribimos como e^{-x}. Por tanto,
$$h'(x) = -5 - e^{-x}.$$

♣ A continuación, “calcular los intervalos de monotonía”quiere decir en qué intervalos de $\mathbb{R}$ (o del dominio de la función), ésta es creciente o decreciente.

Ejercicio resuelto 2. Calcular los intervalos de monotonía y extremos relativos de $f(x) = x^3/4 - 3x^2 + 9x$.

Solución. Para los intervalos de monotonía hallamos la primera derivada y vemos dónde es positiva y negativa. En primer lugar, la derivada es
$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9.$$

Hallamos los ceros de dicha función:
$$\frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = 0 \to 3x^2 - 24x + 36 = 0 \to x = 2, x = 6.$$

Los intervalos de monotonía son $(-\infty, 2)$, $(2, 6)$ y $(6, \infty)$. Damos valores en puntos intermedios:
$$f'(0) = 9 > 0, \quad f'(4) = -3 < 0, \quad f'(7) > 0.$$

♣ Para los intervalos de los extremos, podemos hallar el límite,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = +\infty,$$

luego en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(6, \infty)$, la derivada es positiva. Conclusión:

1. En $(-\infty, 2)$, la función es creciente.
2. En $(2, 6)$, la función es decreciente.
3. En $(6, \infty)$, la función es creciente.

Deducimos también que $x = 2$ es un máximo relativo, y $x = 6$ es un mínimo relativo.

Ahora hallamos los extremos relativos por el método de la derivada segunda. Primero hallamos la derivada de la función, igualamos a 0, y calculamos en qué puntos sucede esto. Como ya se ha calculado antes, no repetimos y sabemos que $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$ y que se anula en $x = 2$ y $x = 6$. Hallamos ahora la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6.$$

Sustituimos:

1. $f''(2) = -3 < 0 \rightsquigarrow x = 2$ es un máximos relativo.
2. $f''(6) = 3 > 0 \rightsquigarrow x = 6$ es un mínimo relativo.

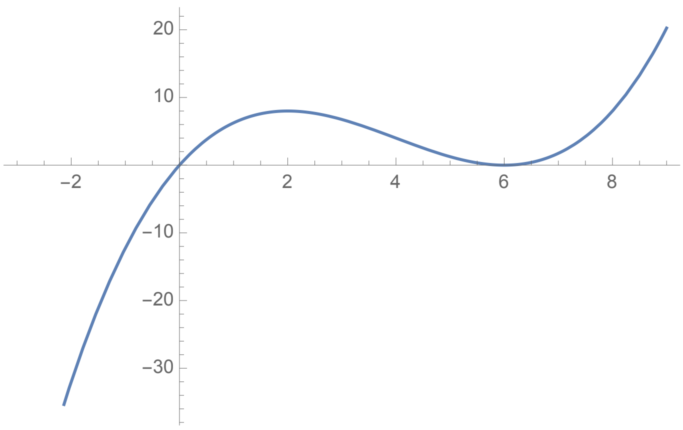

Figura 1: La función $f(x) = x^3/4 - 3x^2 + 9x$.

Ejercicio resuelto 3. Determinar los intervalos de monotonía y los extremos relativos de

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-1}.$$

Solución. Obsérvese que la función no está definida (y es discontinua) en $x = 1$.

♣ ¡¡ Este punto hay que tenerlo en cuenta para estudiar los intervalos de crecimiento!!

Hallamos la derivada,

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (x-1) - 1 \cot 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}.$$

De $f'(x) = 0$, $2x^2 - 4x = 0$, tenemos $x = 0$ y $x = 2$. Para hallar los intervalos de monotonía hay que poner también $x = 1$, el punto donde no está definida la función. Por tanto, estos intervalos son $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ y $(2, \infty)$.

Importante: en este caso el valor $x = 1$ no influye, pues el denominador de $f'(x)$, que es donde aparece, es $(x-1) = 2$, que siempre es positivo. Por tanto, sólo hay que mirar el signo del denominador, lo cual se obtiene dando valores. También se puede usar que es una parábola, luego cerca de $-\infty$ y $+\infty$, es positivo.

Así,

1. En $(-\infty, 0)$, para $x = -1$, es 16, luego es positivo.
2. En $(0,2)$, para $x = ,5$, es negativo.
3. En $(2, \infty)$, para $x = 3$, es positivo.

Por tanto,

1. En $(-\infty, 0)$, la función es creciente.
2. En $(0,2)$, la función es decreciente.
3. En $(2, \infty)$, la función es creciente.

Por tanto, $x = 0$ es un máximo relativo y $x = 2$ es un mínimo relativo.

Hallamos de nuevo los extremos relativos por el método de la derivada segunda. Tenemos:

$$f''(x) = \frac{(4x-4)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2-4x)}{(x-1)^4}.$$

Antes de continuar, dos observaciones:

1. Se puede simplificar por $(x-1)$, quedando:

   $$f''(x) = \frac{(4x-4)(x-1) - 2(2x^2-4x)}{(x-1)^3}.$$

   Nótese que ahora el exponente de denominador es impar, luego puede ser positivo o negativo. Sin embargo, si no hubiéramos simplificado, el denominador es positivo, luego sólo hay que mirar el signo del numerador.

2. Podemos seguir simplificando el numerador, quitando paréntesis y simplificando, si fuera posible. Sin embargo, si lo dejamos tal como está, nótese que aparece el término $(2x^2-4x)$, que es justamente el numerador de $f'(x)$ y era el que se anulaba. Por tanto, si no simplificamos, al sustituir por los dos valores, este término es 0.

Sustituimos. Vamos a dejar el denominador como $(x-1)^4$, para sólo ver el signo del numerador:

1. $f''(0) = -4 < 0 \rightsquigarrow x = 0$ es un máximo relativo.

2. $f''(2) = 4 > 0 \rightsquigarrow x = 2$ es un mínimos relativo.

Ejercicio resuelto 4. Hallar las asíntotas de la función anterior.

Solución. 1. Verticales. Es la recta $x = 1$, pues

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2}{x-1} = \infty.$$

2. Horizontales. No tiene, pues

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \infty.$$

3. Oblícuas. Es la recta $y = mx + n$, donde

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-x} = 2.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x-1} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = 2.$$

Luego la asíntota es $y = 2x + 2$.

Una gráfica de la función realizada por ordenador da:

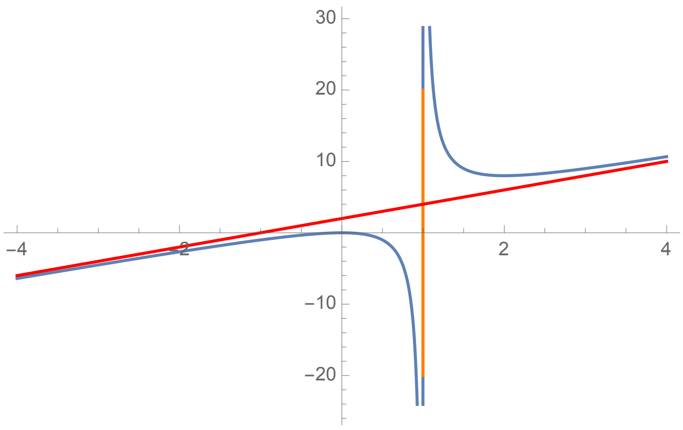

Figura 2: La función $y(x) = \frac{2x^2}{x-1}$.