Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 21 de septiembre de 2021
Actualización: 21/09/2021, hora: 15:15:37

Ejercicio resuelto 1. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+3}-\sqrt{5x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x^2+x}.$$

Solución. En ambos casos son indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$, pero ha diferencias. En el primer case, el grado es $1/2$ (de la raíz), pero el coeficiente de la primera es $\sqrt{2}$ y el de la segunda, $\sqrt{5}$. Por tanto, ésta última puede con la primera, es decir, $\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} < \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}$.[1] Por tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+3}-\sqrt{5x} = -\infty,$$

Para el segundo límite, el grado en ambos es $\sqrt{x^2}=x$ y los coeficientes en ambos es $\sqrt{2}$, luego aquí sí tenemos un problema a la hora de hallar el límite.

$$\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x^2+x} = (\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x^2+x})\cdot\frac{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2+x}}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2+x}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2+x}}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x^2+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2+x}} = \frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ejercicio resuelto 2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x)=\frac{\log(x)}{x^2}$.
2. $g(x)=(1-x^3)\cos x$.
3. $h(x)=-5x+\frac{1}{e^x}$.

Solución. 1. Tenemos un cociente de funciones:

$$f'(x) = \frac{(\log x)'x^2-(x^2)'\log x}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(2x)\cdot\log x}{x^4}$$
$$= \frac{x-2x\log x}{x^4} = \frac{1-2\log x}{x^3}.$$

[1] Parecido es

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+3}-\sqrt{5x^2+1} = -\infty$$

porque el grado del primero es $1/2$ y el del segundo 1, o

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+3}-\sqrt{5x} = +\infty$$

donde el grado del primero es 1 y el del segundo $1/2$.

2. Tenemos un producto de funciontes:
$$g'(x) = -3x^2\cos x + (1-x^3)\cdot(-\sin x) = -3x^2\cos x - (1-x^3)\sin x.$$

3. Tenemos una suma de funciones. Por otro lado, la función $1/e^x$ la escribimos como e^{-x}. Por tanto,
$$h'(x) = -5 - e^{-x}.$$

Ejercicio resuelto 3.

Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea continua y, una vez conocida que es continua, para que sea derivable:
$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx-3, & x \le 1 \\ 2bx-4, & x > 1. \end{cases}$$

Solución. Este ejercicio es parecido a otros que se han hecho para funciones continuas, pero ahora hay dos preguntas: una para continuidad y, posteriormente[2] Y sólo hay que verlo en el punto $x = 1$, porque en en el resto de los puntos la función es derivable al ser polinomios. Como el comportamiento de la función a ambos lados de dicho punto es diferente, tenemos que hallar los límites laterales, obteniendo:
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a+b-3, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2b-4.$$
Por tanto, hace falta que $a+b-3 = 2b-4$, luego $a-b = -1$. Obsérvese que hay muchas soluciones de esta ecuación, como por ejemplo: $(a,b) = (-1,0)$, $(a,b) = (3,4)$, etc.

Para ver ahora si es derivable, hacemos el mismo tipo de razonamiento pero para la derivada de la función. Hay que tener en cuenta que a y b no son arbitrarios, sino que deben satisfacer $a-b = -1$ para asegurarnos la continuidad de la función. De nuevo, como la función es a trozos, la derivada es a trozos, luego al ser polinomios,
$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+b, & x \le 1 \\ 2b, & x > 1. \end{cases}$$
Calculamos los límites laterales,
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2a+b, \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2b.$$
Luego coinciden si $2a+b = 2b$, es decir, $2a = b$.

Resumiendo, la función será continua en $x = 1$ si $a-b = -1$, y será derivable en $x = 1$ si, además, $2a-b = 0$. Resolviendo
$$\begin{cases} a-b = -1 \\ 2a-b = 0 \end{cases}$$
tenemos que la solución es $a = 1$, $b = 2$. Si ahora queremos hallar la derivada de la función en $x = 1$, tenemos (da igual por la derecha que por la izquierda):
$$f'(x) = 2ax+b \rightsquigarrow f'(1) = 2a+b = 2\cdot 1+2 = 4.$$

[2] Para que una función sea derivable hace falta que sea continua, es por ello que decimos 'posteriormente'.

Ejercicio resuelto 4. Hallar la derivada de

$$y(x) = \tan(\sin(e^x)).$$

Solución. En este caso tenemos que hallar la derivada de la tangente $((\tan(x))' = 1 + \tan(x)^2)$, pero hay que usar la regla de la cadena <u>dos veces</u>. Por tanto,

$$y'(x) = \left(1 + (\tan(\sin(e^x)))^2\right) \cdot [\sin(e^x)]' = \left(1 + (\tan(\sin(e^x)))^2\right) \cdot \cos(e^x) \cdot e^x.$$