Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 17 de septiembre de 2021
Actualización: 17/09/2021, hora: 14:30:39

Ejercicio resuelto 1. Hallar

$$\lim_{x\to\pm\infty} x-\sqrt{x^2+2x}.$$

Solución. En primer lugar, hacemos el límite en $+\infty$. Al sustituir, queda $+\infty-+\infty$. Por otro lado, $\sqrt{x^2+2x}\sim\sqrt{x^2}=x$, luego tenemos una indeterminación del tipo $\infty-\infty$:¡hay que mirar también los coeficientes![1] Multiplicamos y dividimos por $x+\sqrt{x^2+2x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+2x})(x+\sqrt{x^2+2x})}{x+\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+2x)}{x+\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+\sqrt{x^2}}=-1.$$

El razonamiento para el límite en $-\infty$ es completamente diferente porque cuando sustituimos directamente en la función, obtenemos el resultado: ¡no es una indeterminación $\infty-\infty$!:

$$\lim_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2+2x}=-\infty-\infty=-\infty.$$

♣ A veces sucede que después de hacer el razonamiento con $+\infty$, el de $-\infty$ es "parecido" y uno se deja llevar haciendo "lo mismo" que en el caso $+\infty$. $\square$

Ejercicio resuelto 2. Hallar

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1+x}{x^2}\right),$$

Solución. Al sustituir queda $\infty-\infty$. Lo que hacemos es sumar las dos fracciones:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1+x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty.$$

Hemos usado que el exponente en el denominador es par.

Ejercicio resuelto 3. Hallar las asíntotas de la función

$$y(x)=\frac{x^3+x}{2x^2+x-1}.$$

[1] Diferente sería los siguientes casos:

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{2x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{2}x=-\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{2x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{2}x=+\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x-\sqrt{2x^2+2x}=-\infty \quad \text{¡directamente!.}$$

Solución. 1. Verticales. Anulamos el denominador, es decir, $2x^2+x-1=0$, cuyas soluciones son -1 y $\frac{1}{2}$. Al sustituir en el numerador estos dos valores no da 0, por tanto,

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x+1}{2x^2+x-1} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{x^2+x+1}{2x^2+x-1} = \infty.$$

Por tanto las rectas verticales $x=-1$ y $x=1/2$ son asíntotas verticales.[2]

2. Horizontales. Son las rectas del tipo $y=c$, donde $c=\lim_{x\to\infty} y(x)$. En este caso, como el grado del numerador es mayor que el del denominador, no hay asíntotas horizontales.

3. Oblícuas. Son las rectas $y=mx+n$, donde

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^3+x}{2x^2+x-1}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x}{2x^3+x^2-x} = \frac{1}{2}.$$

$$n = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x}{2x^2+x-1} - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to +\infty} \frac{2(x^3+x)-x(2x^2+x-1)}{2(2x^2+x-1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-x^2+x}{2(2x^2+x-1)} = -\frac{1}{4}.$$

La *asíntota por la derecha* es

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

El argumento con el límite en $-\infty$ es el mismo, y resulta los mismos límites y la misma asíntota.

Ejercicio resuelto 4. Hallar los límites laterales

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} \frac{x^2+x+1}{2x^2+x-1}$$

Solución. Al sustituir en $x=-1$, nos queda

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x+1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Por tanto sólo hay que ver el signo del denominador a ambos lados de $x=-1$, porque en el numerador es positivo. La mejor forma de hacer esto es factorizando el denominador. Hallando las raíces, queda $x=-1$ y $x=1/2$, por tanto

$$2x^2+x-1 = 2(x+1)(x-\frac{1}{2}).$$

El signo de $2(x-\frac{1}{2})$ alrededor de -1 se obtiene sustituyendo (no era 0). Al ser $2(-1-\frac{1}{2})$, queda negativo (a ambos lados). Por otro lado, el de $x+1$ es conocido: a la derecha de positivo y a la izquierda es negativo. Por tanto:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+x+1}{2x^2+x-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+x+1}{2(x+1)(x-\frac{1}{2})} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x+1}{2x^2+x-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x+1}{2(x+1)(x-\frac{1}{2})} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

[2] En el siguiente ejercicio se calculan los límites laterales.