Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 15 de septiembre de 2021
Actualización: 16/09/2021, hora: 11:16:31

Ejercicio resuelto 1. Hallar
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right).$$

Solución. Al sustituir por $x=1$, nos queda $\infty-\infty$. Lo que hacemos es "simplificar"la expresión. Ya que $x^2-1=(x+1)(x-1)$,
$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2-1\cdot(x+1)}{x^2-1}=\frac{-(x-1)}{x^2-1}=-\frac{1}{x+1}.$$

Por tanto,
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Ejercicio resuelto 2. Hallar
$$\lim_{x\to a}\frac{x^3}{x^2-4},$$
cuando $a=0,2,-2$.

Solución. Observamos que el denominador es un polinomio que se anula en $x=2$ y $x=-2$, luego la función no está definida en dichos valores. En particular, la función no puede ser continua en dichos puntos.

Sin embargo, aunque no esté definida en dichos puntos, se puede calcular el límite, ya que éste describe el comportamiento de la función *alrededor* del punto. Tanto en el numerador como el denominador son funciones continuas pues son polinomios, luego el límite es simplemente sustituir. En $a=0$, donde el denominador no se anula, obtenemos
$$\lim_{a\to 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\frac{0}{-4}=0.$$

El límite del numerador en $a=2$ es $\lim_{a\to 2}x^3=8$, por tanto el límite del cociente es infinito, y el hecho de ser $+\infty$ o $-\infty$ depende sólo de los signos de numerador y denominador. El numerador es positivo. El denominador, es decir, x^2-4, es positivo a la derecha de $a=2$ y negativo a la izquierda de $a=2$[1]. Para $a=-2$ es justo al revés.

[1] Esto se hace, o simplemente dando valores cercanos -no recomendable- o recordando cómo es una parábola. Ésta se interseca en dos puntos, y ya que el coeficiente de x^2 es positivo (es 1), las ramas de la parábola van hacia arriba, luego tenemos el resultado de signos.

Definitivamente, el hecho de que haya cambios de signos en el denominador, hace que tengamos que hallar los límites laterales.

$$\lim_{a\to 2^+} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{8}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{a\to 2^-} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{8}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{a\to -2^+} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{8}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{a\to -2^-} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{8}{0^+} = +\infty.$$

Ejercicio resuelto 3. Hallar

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}.$$

Solución. Todas las funciones son continuas y sustituimos en $x=2$, obteniendo $\frac{0}{0}$. Ya sabemos de clase que esto es una indeterminación[2]. Ya se han hecho ejemplos de este tipo en clase, y la idea es multiplicar y dividir toda la expresión por $\sqrt{x+7}+3$ y también por $\sqrt{x+2}+2$: se hace por los para poder simplificar a posteriori. Se deja como ejercicio comprobar que si sólo se hace con el numerador, o con el denominador, entonces no se acaba 'al momento'. Entonces

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}\,\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}\,\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}.$$

Ahora NO multiplicamos los tres factores arriba y abajo, sino sólo los que nos interesan (los de la forma $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$) y el otro lo dejamos.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 2} \frac{((x+2)-4)(\sqrt{x+7}+3)}{((x+7)-9)\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)\sqrt{x+2}+2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{\sqrt{2+7}+3}{\sqrt{2+2}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

[2]Si en vez de tener ese límite, fuera $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+7}-3}$, al sustituir, nos quedaría $\frac{4}{0}$, y sabemos que es ∞, salvo el signo que tenemos que determinar por el comportamiento del denominador alrededor de $x=2$. Pero $\sqrt{x+7}-3$ es positivo si $x>2$ cerca de 2 y por la izquierda es negativo, luego los límites laterales son $+\infty$ cuando $x\to 2^+$ y $-\infty$ cuando $x\to 2^-$.