

El problema isoperimétrico

César Rosales

Problemas variacionales geométricos

Master en Física y Matemáticas (Fisymat)



©2020 César Rosales - crosales [at] ugr [dot] es.

Estas notas se distribuyen bajo una licencia Creative Commons de Atribución-No Comercial 4.0 Internacional. Una copia de esta licencia puede consultarse en:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.es>.

Índice

TEMA 1. Preliminares	5
1. El problema isoperimétrico	5
2. Geometría de hipersuperficies	6
TEMA 2. Propiedades variacionales	11
1. Variaciones que conservan el volumen	11
2. Regiones estacionarias	13
3. Regiones estables	16
TEMA 3. El problema isoperimétrico en \mathbb{R}^m	19
1. Desigualdad isoperimétrica y regiones isoperimétricas en \mathbb{R}^m	19
2. Prueba de la desigualdad	20
3. Caracterización de la igualdad. Regiones estables en \mathbb{R}^m	23
4. Apéndice: prueba de la desigualdad de Brunn-Minkowski	25
TEMA 4. Regiones estacionarias en \mathbb{R}^m	29
1. El teorema de Alexandrov	29
2. Demostración del teorema mediante integración	29
3. Método de reflexión de Alexandrov	33
TEMA 5. Aplicaciones de la desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^m	37
1. Desigualdades de Poincaré-Wirtinger	37
2. Curvas minimizantes en el grupo de Heisenberg	41
Referencias	45

Preliminares

La cuestión isoperimétrica surgió al estudiar los conjuntos del espacio euclídeo que encierran mayor volumen entre aquellos que tienen un perímetro dado. Las soluciones son las bolas euclídeas, que también minimizan el área de la frontera entre los conjuntos de volumen dado. En la actualidad en un *problema isoperimétrico* se analizan los conjuntos que minimizan un funcional asociado al área a la vez que cumplen una o varias restricciones de volumen. Este estudio puede plantearse en cualquier espacio en el que existan nociones de volumen y área.

En este tema introduciremos el problema isoperimétrico más sencillo que se puede considerar en una variedad riemanniana y describiremos brevemente algunos aspectos relacionados. También recordaremos nociones y resultados de teoría de hipersuperficies que se emplearán a lo largo de estas notas. El lector interesado en apuntes históricos puede consultar las referencias [13, 2, 16, 6].

1. El problema isoperimétrico

En lo sucesivo M denotará una variedad riemanniana de dimensión $m \geq 2$. Dados dos campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ emplearemos $\langle X, Y \rangle$ y $\nabla_X Y$ para referirnos al producto escalar y a la conexión de Levi-Civita de X e Y , respectivamente. Denotaremos la norma o longitud de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ mediante $|X|$, mientras que $\operatorname{div} X$ representará su divergencia.

DEFINICIONES 1.1. Una *región* en M es un abierto relativamente compacto y diferenciable $\Omega \subseteq M$ (no se exige que sea conexo). La frontera $S = \partial\Omega$ es una hipersuperficie (subvariedad de dimensión $m - 1$) compacta y sin borde en M . Consideraremos sobre S el campo normal unitario exterior N . La medida riemanniana de Ω en M se llamará *volumen* de Ω y se denotará $V(\Omega)$. La medida riemanniana de S con la métrica inducida por M se llamará *área* de S y se denotará $A(S)$. En dimensión $m = 2$ es usual llamar *área* de Ω a $V(\Omega)$ y se representa por $A(\Omega)$. Del mismo modo $L(C)$ es la *longitud* de la curva $C = \partial\Omega$.

La cuestión isoperimétrica más simple consiste en analizar las regiones en M de volumen dado que minimizan el área de su frontera.

DEFINICIÓN 1.2. Sea $v \in (0, V(M))$. Una *región isoperimétrica* de volumen v en M es una región $\Omega \subseteq M$ tal que $V(\Omega) = v$ y se cumple la desigualdad:

$$A(\partial\Omega) \leq A(\partial\Omega'),$$

para cualquier región $\Omega' \subseteq M$ con $V(\Omega') = v$. Esto equivale a que se satisface la igualdad:

$$A(\partial\Omega) = \inf \{A(\partial\Omega') / \Omega' \subseteq M \text{ es una región y } V(\Omega') = v\}.$$

El interés principal es describir por completo las regiones isoperimétricas en M . Este es un objetivo muy complejo que solamente se ha conseguido en algunas variedades riemannianas, sobre todo en superficies ($m = 2$) y en espacios de curvatura constante (como el espacio euclídeo \mathbb{R}^m , la esfera \mathbb{S}^m o el espacio hiperbólico \mathbb{H}^m , entre otros). En general, es difícil caracterizar las soluciones del problema, por lo que el estudio se centra en cuestiones como éstas:

1. *Existencia.* Es sabido que si M es compacta, entonces existe al menos una región isoperimétrica Ω en M por cada volumen dado. La hipótesis de compacidad se puede relajar a que $V(M) < \infty$. También existen soluciones del problema en cualquier variedad homogénea. Es preciso mencionar que en dimensión $m \geq 8$ la existencia se consigue en una categoría de regiones que pueden contener singularidades en la frontera. En general, la cuestión de existencia no es trivial, y existen variedades que no tienen regiones isoperimétricas.
2. *Unicidad.* Es sencillo probar que si Ω es una región isoperimétrica en M y $\varphi : M \rightarrow M$ es una isometría, entonces $\varphi(\Omega)$ es una región isoperimétrica en Ω (que podría coincidir o no con Ω). Así, la cuestión de la unicidad debe plantearse salvo isometrías. Cuantas más isometrías posea M más difícil será que haya unicidad en sentido estricto.
3. *Propiedades variacionales.* Las regiones isoperimétricas son mínimos globales del área en la familia de regiones con volumen prefijado. En particular, también son puntos críticos y mínimos de segundo orden del área en dicha familia. Empleando el cálculo de variaciones se pueden caracterizar de forma analítica y geométrica este tipo de regiones que proporcionan candidatos naturales para resolver el problema.
4. *Propiedades geométricas y topológicas.* Cuando no es posible caracterizar las soluciones se suelen estudiar propiedades de las mismas bajo hipótesis adicionales sobre M . Por ejemplo, es natural plantearse si el hecho de que M tenga varias simetrías o sea topológicamente sencilla se refleja en sus regiones isoperimétricas. También es interesante analizar el comportamiento de la curvatura de M sobre las soluciones.

La organización de estas notas es la siguiente: en el tema 2 obtendremos propiedades de las regiones isoperimétricas mediante las fórmulas para las derivadas del volumen y del área probadas en temas previos. Esto nos permitirá deducir características geométricas y topológicas de las soluciones en variedades con curvatura de Ricci no negativa. En los temas 3 y 4 estudiaremos la cuestión isoperimétrica en \mathbb{R}^m , mostrando que las bolas euclídeas son las únicas soluciones, y caracterizando también los puntos críticos y mínimos de segundo orden asociados al problema. Por último, en el tema 5 deduciremos algunas estimaciones analíticas y geométricas relevantes a partir de la desigualdad isoperimétrica clásica en \mathbb{R}^m .

EJERCICIO 1. Se llama *perfil isoperimétrico* de M a la función:

$$I_M(v) = \inf \{ A(\partial\Omega) / \Omega \subset M \text{ es una región con } V(\Omega) = v \}, \quad \forall v \in (0, V(M)).$$

Si M es una variedad riemanniana compacta y sin borde, probar que:

- (a) El perfil isoperimétrico de M es simétrico, es decir:

$$I_M(v) = I_M(V(M) - v), \quad \forall v \in (0, V(M)).$$

- (b) Si $\Omega \subset M$ es una región, entonces Ω es isoperimétrica si y sólo si lo es $M \setminus \bar{\Omega}$.

2. Geometría de hipersuperficies

A lo largo de estas notas necesitaremos algunos ingredientes sobre teoría de hipersuperficies que recordaremos ahora.

DEFINICIONES 1.3 (véase chapter 6 en [8]). Sea S una hipersuperficie en M con un campo C^∞ de vectores normal y unitario N . Dado que $|N|^2 = 1$ en S , se sigue que $\nabla_w N \in T_p S$ para cada $p \in S$ y cada $w \in T_p S$. Se llama *endomorfismo de Weingarten* (u *operador forma*) de S en p a la aplicación lineal $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$ dada por:

$$A_p(w) = \nabla_w N, \quad \forall w \in T_p S.$$

La *segunda forma fundamental* de S en p es la forma bilineal $\sigma_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$\sigma_p(u, w) = \langle A_p(u), w \rangle, \quad \forall u, w \in T_p S.$$

Es sabido que σ_p es simétrica, lo que equivale a que A_p es autoadjunto respecto al producto escalar en $T_p S$. Llamamos *direcciones principales* en p a los vectores propios no nulos de A_p , y *curvaturas principales* en p a los valores propios de A_p . Por el teorema de diagonalización de endomorfismos autoadjuntos, si denotamos como $k_1(p) \leq k_2(p) \leq \dots \leq k_{m-1}(p)$ a las curvaturas principales, entonces existe una base ortonormal $\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ en $T_p S$ formada por direcciones principales, es decir, $A_p(w_i) = k_i(p)w_i$ para cada $i = 1, \dots, m-1$.

La *curvatura media* (escalar) de S respecto de N es la función $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$H(p) = \text{traza}(A_p) = \sum_{i=1}^{m-1} k_i(p) = (\text{div}_S N)(p), \quad \forall p \in S.$$

La *norma al cuadrado* de la segunda forma fundamental es la función:

$$|\sigma|^2(p) = \sum_{i=1}^{m-1} k_i(p)^2, \quad \forall p \in S.$$

Un punto $p \in S$ es *umbilical* si todas las curvaturas principales en p coinciden, esto es, si $k_1(p) = k_2(p) = \dots = k_{m-1}(p)$. Esto equivale a que se cumpla la igualdad:

$$(1.1) \quad A_p(w) = \frac{H(p)}{m-1} w, \quad \forall w \in T_p S.$$

Diremos que S es *totalmente umbilical* si todos sus puntos son umbilicales. Diremos que S es *totalmente geodésica* si $k_1 = k_2 = \dots = k_{m-1} = 0$ en S . Cuando $m = 2$ esto equivale a que S es una geodésica en M . En general, si S es totalmente geodésica, entonces las geodésicas de S (con la métrica inducida por M) son geodésicas de M . Por definición de $|\sigma|^2$ es inmediato que S es totalmente geodésica si y sólo si $|\sigma|^2 = 0$ en S .

El siguiente lema contiene una caracterización de los puntos umbilicales que será de utilidad en los próximos temas.

LEMA 1.4. *En una hipersuperficie S se cumple la desigualdad:*

$$|\sigma|^2(p) \geq \frac{H(p)^2}{m-1}, \quad \forall p \in S,$$

y la igualdad se verifica en un punto $p \in S$ si y solo si p es umbilical.

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en \mathbb{R}^{m-1} a los vectores dados por $u = (k_1(p), \dots, k_{m-1}(p))$ y $w = (1, \dots, 1)$. Los detalles se dejan como ejercicio. \square

La condición de que una hipersuperficie sea totalmente umbilical es bastante restrictiva. Concluiremos este capítulo recordando cuáles son estas hipersuperficies en el espacio euclídeo \mathbb{R}^m .

EJEMPLO 1.5. Sea P un hiperplano en \mathbb{R}^m . Fijamos un vector unitario η ortogonal a \vec{P} . Definimos el campo $N_p = \eta$ para cada $p \in P$. Como N es constante entonces $A_p = 0$ y $\sigma_p = 0$ para cada $p \in P$. Se sigue que $k_1(p) = \dots = k_{m-1}(p) = 0$, de donde P es totalmente geodésica.

EJEMPLO 1.6. Dados $p_0 \in \mathbb{R}^m$ y $r > 0$, la *esfera de centro p_0 y radio r* se define como:

$$\mathbb{S}^{m-1}(p_0, r) = \{p \in \mathbb{R}^m \mid |p - p_0| = r\}.$$

Si consideramos el normal unitario $N_p = (p - p_0)/r$ definido para cada $p \in \mathbb{S}^{m-1}(p_0, r)$, entonces $A_p(w) = w/r$ para cada vector tangente w . Se sigue que $k_i(p) = 1/r$ para cada $i = 1, \dots, m-1$. Esto prueba que $H(p) = (m-1)/r$ y que $\mathbb{S}^{m-1}(p_0, r)$ es totalmente umbilical.

El siguiente resultado nos muestra que los hiperplanos y las esferas son esencialmente las únicas hipersuperficies totalmente umbilicales en \mathbb{R}^m . Incluiremos la prueba por completitud, extendiendo a dimensión arbitraria los argumentos del theorem 3.30 en [12].

TEOREMA 1.7. *Si $S \subset \mathbb{R}^m$ es una hipersuperficie conexa, sin borde, y totalmente umbilical, entonces, S es un abierto de un hiperplano o de una esfera. Además, si S es compacta, entonces S es una esfera.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $S \subset \mathbb{R}^m$ una hipersuperficie en las hipótesis del enunciado. Queremos probar que S es un abierto de un hiperplano o de una esfera en \mathbb{R}^m .

Como cada $p \in S$ es umbilical se cumple la igualdad (1.1). Veamos que la curvatura media H es constante en S . Como S es conexa y $H \in C^\infty(S)$, basta probar que la diferencial $(dH)_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ es nula para cada $p \in S$. Como $(dH)_p$ es lineal, esto equivale a que se anula sobre una base de $T_p S$. Así, dada una parametrización local $\psi : U \rightarrow S$ con $p \in \psi(U)$ y $q = \psi^{-1}(p)$, es suficiente probar que $(dH)_p(\psi_i(q)) = 0$ para cada $i = 1, \dots, m-1$, donde $\psi_i(q) \in \mathbb{R}^m$ es el vector derivada parcial i -ésima de ψ en q .

Sean $i, j \in \{1, \dots, m-1\}$ con $i \neq j$. Gracias a la ecuación (1.1) y a la regla de la cadena:

$$(N \circ \psi)_i(z) = \nabla_{\psi_i(z)} N = A_{\psi(z)}(\psi_i(z)) = \frac{(H \circ \psi)(z)}{m-1} \psi_i(z), \quad \forall z \in U,$$

$$(N \circ \psi)_j(z) = \nabla_{\psi_j(z)} N = A_{\psi(z)}(\psi_j(z)) = \frac{(H \circ \psi)(z)}{m-1} \psi_j(z), \quad \forall z \in U.$$

Derivando parcialmente respecto a la variable j -ésima en la primera ecuación y respecto a la variable i -ésima en la segunda, obtenemos:

$$(m-1)(N \circ \psi)_{ji}(z) = (H \circ \psi)_j(z) \psi_i(z) + (H \circ \psi)(z) \psi_{ji}(z), \quad \forall z \in U,$$

$$(m-1)(N \circ \psi)_{ij}(z) = (H \circ \psi)_i(z) \psi_j(z) + (H \circ \psi)(z) \psi_{ij}(z), \quad \forall z \in U.$$

Restando ambas igualdades, evaluando en $z = q$ y aplicando el teorema de Schwarz, llegamos a:

$$0 = (H \circ \psi)_j(q) \psi_i(q) - (H \circ \psi)_i(q) \psi_j(q).$$

Como los vectores $\{\psi_i(q), \psi_j(q)\}$ son linealmente independientes, en particular:

$$0 = (H \circ \psi)_i(q) = (dH)_p(\psi_i(q)),$$

como se quería.

Hemos probado que existe $H_0 \in \mathbb{R}$ tal que $H(p) = H_0$ para cada $p \in S$. La igualdad en (1.1) se transforma en:

$$(1.2) \quad A_p(w) = \frac{H_0}{m-1} w, \quad \forall p \in S, \quad \forall w \in T_p S.$$

Ahora distinguiremos dos casos según si $H_0 = 0$ o $H_0 \neq 0$.

Si $H_0 = 0$, entonces la ecuación (1.2) nos dice que $A_p = 0$ y, por tanto, $\nabla_w N = 0$ para cada $p \in S$ y cada $w \in T_p S$. Por ser S conexa deducimos que N es constante. Así, existe $\eta \in \mathbb{R}^m$ unitario tal que $N(p) = \eta$ para cada $p \in S$. Dado $p_0 \in S$ es sencillo probar que la función $f(p) = \langle p - p_0, \eta \rangle$ se anula en S , de donde S es un abierto del hiperplano $P = \{p \in \mathbb{R}^m / \langle p - p_0, \eta \rangle = 0\}$.

Veamos que, si $H_0 \neq 0$, entonces S es un abierto de una esfera de radio $(m-1)/|H_0|$. Definimos $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ como $f(p) = p - \frac{m-1}{H_0} N_p$. Gracias a (1.2) se tiene que $w(f) = 0$ para cada $p \in S$ y cada $w \in T_p S$. Como S es conexa, existe $p_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(p) = p_0$ para cada $p \in S$. De este modo:

$$|p - p_0| = \left| \frac{m-1}{H_0} N_p \right| = \frac{m-1}{|H_0|},$$

es decir, todos los puntos de S equidistan de p_0 . Así, S es un abierto de una esfera de \mathbb{R}^m .

Supongamos finalmente que S también es compacta. Por lo ya probado, existe una hipersuperficie S' , que es un hiperplano o una esfera de \mathbb{R}^m , tal que S es un abierto de S' . Como S es un subconjunto cerrado (por ser compacto) de \mathbb{R}^m y $S \subseteq S'$, entonces S es cerrado en S' . Y como S' es

conexa entonces $S = S'$. Dado que los hiperplanos de \mathbb{R}^m no son compactos, se concluye que S es una esfera. \square

COROLARIO 1.8. *Si $S \subset \mathbb{R}^m$ es una hipersuperficie conexa, sin borde y totalmente geodésica, entonces S es un abierto de un hiperplano. En consecuencia, S no puede ser compacta.*

DEMOSTRACIÓN. Como toda hipersuperficie totalmente geodésica es totalmente umbilical, el teorema 1.7 nos dice que S es un abierto de un hiperplano o de una esfera. Nótese que la segunda opción lleva a contradicción, ya que una esfera tiene curvaturas principales no nulas. Además, S no puede ser compacta ya que, en tal caso, sería una esfera por el teorema 1.7. \square

Como consecuencia inmediata del lema 1.4 y del teorema 1.7, deducimos lo siguiente:

COROLARIO 1.9. *Si $S \subset \mathbb{R}^m$ es una hipersuperficie conexa, compacta, sin borde, y tal que se cumple la igualdad $|\sigma|^2 = H^2/(m-1)$ en S , entonces S es una esfera.*

Propiedades variacionales

Las regiones isoperimétricas minimizan el área de la frontera entre todas las regiones que encierran un volumen dado. En particular, son conjuntos críticos y mínimos de segundo orden del área bajo deformaciones que conservan el volumen. En este tema emplearemos el cálculo de las derivadas del área y del volumen para estudiar de forma general estos conjuntos, que proporcionan los candidatos naturales para convertirse en regiones isoperimétricas.

1. Variaciones que conservan el volumen

Sea M una variedad riemanniana. Recordemos que un campo completo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tiene asociada una variación $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, que no es más que el grupo uniparamétrico de difeomorfismos de M . Si Ω es una región en M con frontera $S = \partial\Omega$, denotaremos $\Omega_t = \varphi_t(\Omega)$ y $S_t = \varphi_t(S)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Es inmediato que cada Ω_t es una región en M con $\partial\Omega_t = S_t$. Además $\Omega_0 = \Omega$ y $S_0 = S$. Los funcionales de área y volumen asociados se definen como $A(t) = A(S_t)$ y $V(t) = V(\Omega_t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Es obvio que $A(0) = A(S)$ y $V(0) = V(\Omega)$.

Introduciremos ahora las deformaciones que modifican una región sin cambiar su volumen.

DEFINICIÓN 2.1. Sea Ω una región en M y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo completo. Diremos que el campo X o la variación asociada $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ conserva el volumen de Ω si existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$V(\Omega_t) = V(\Omega), \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

es decir, el funcional de volumen $V(t)$ es constante cuando $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

EJEMPLO 2.2. Si X es un campo de Killing, es decir, cada difeomorfismo $\varphi_t : M \rightarrow M$ es una isometría de M , entonces X conserva el volumen de cualquier región Ω . Esto se debe a que:

$$V(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} dM = \int_{\Omega} \text{Jac}(\varphi_t) dM = V(\Omega),$$

donde se ha usado la fórmula del cambio de variable y que $\text{Jac}(\varphi_t) = 1$ en M , para cada $t \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO 2.3. Como caso particular del ejemplo anterior, dado un vector unitario $e \in \mathbb{R}^m$, el campo de traslaciones $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ dado por $X_p = e$ conserva el volumen de cualquier región Ω . Esto se debe a que $\varphi_t(p) = p + te$, que es una traslación de \mathbb{R}^m . Lo mismo ocurre con el campo de rotaciones $X_p = e \wedge p$ en \mathbb{R}^3 , puesto que el difeomorfismo φ_t coincide con la rotación de ángulo t alrededor de la recta vectorial $L(e)$.

Es obvio que si X conserva el volumen de Ω entonces el funcional de volumen cumple $V'(0) = 0$. Gracias a la fórmula para la primera derivada del volumen tenemos que:

$$0 = V'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(\Omega_t) = \int_{\Omega} \text{div} X dM = \int_S \langle X, N \rangle dS,$$

donde N es el normal unitario exterior sobre $S = \partial\Omega$. Como consecuencia deducimos que:

$$\text{Si } X \text{ conserva el volumen de } \Omega \text{ entonces se cumple } \int_S u dS = 0, \text{ donde } u = \langle X, N \rangle.$$

En la primera parte del curso se probó que, dada una función $u \in C^\infty(S)$, se puede construir un campo $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ tal que $X = uN$ en S y la variación asociada es crítica para el volumen, esto es $V'(0) = 0$. En general, la demostración de este hecho no garantiza que X conserve el volumen de Ω . En esta sección encontraremos un campo X que sí conserva el volumen de Ω .

Necesitaremos primero una expresión alternativa para la segunda derivada del volumen.

LEMA 2.4. Si Ω es una región en M y $X \in \mathfrak{X}_0(M)$, entonces:

$$V''(0) = \int_S (\operatorname{div} X) \langle X, N \rangle dS.$$

DEMOSTRACIÓN. Realizaremos la prueba cuando $X = uN$ en S . En este caso, por la fórmula para la segunda derivada del volumen probada en la primera parte del curso, sabemos que:

$$V''(0) = \int_S (\langle \nabla_X X, N \rangle + Hu^2) dS,$$

donde $H = \operatorname{div}_S N$ es la curvatura media de S respecto al normal exterior N . Veamos que el integrando en esta expresión coincide con el de la fórmula del enunciado. Esto se debe a que:

$$(\operatorname{div} X)u = (\operatorname{div}_S X)u + \langle \nabla_N X, N \rangle u = (\operatorname{div}_S uN)u + \langle \nabla_{uN} X, N \rangle = Hu^2 + \langle \nabla_X X, N \rangle,$$

donde hemos usado que $X = uN$ en S . □

A continuación seguiremos las ideas que aparecen en la prueba del theorem 3.7 de [1] para probar lo siguiente:

LEMA 2.5. Para cada $u \in C^\infty(S)$ con $\int_S u dS = 0$, existe un campo $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ tal que $X = uN$ en S y la variación asociada $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ conserva el volumen de Ω .

DEMOSTRACIÓN. Por sencillez realizaremos la prueba en dos pasos.

Paso 1 (extendemos N a un campo con divergencia nula). Existe un abierto $U \subseteq M$ con $S \subset U$, y un campo $Y \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $Y = N$ en S y $\operatorname{div} Y = 0$ en U (el interés en que $\operatorname{div} Y = 0$ se debe a la segunda derivada del volumen).

En efecto; sea $\phi : S \times (-a, a) \rightarrow M$ el flujo de las geodésicas normales de S , esto es:

$$\phi(p, t) = \exp_p(tN_p), \quad \forall p \in S, \forall t \in (-a, a).$$

Sean U un abierto de S con $S \subset M$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\phi : S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ es un difeomorfismo. Denotemos por $\pi : U \rightarrow S$ y por $d : U \rightarrow \mathbb{R}$ a la proyección sobre S y a la distancia con signo, respectivamente (las componentes del difeomorfismo ϕ^{-1}). Sabemos que $\nabla d = N \circ \pi$ en U , véase ejercicio (1) en página 125 de [12]. En particular $\nabla d = N$ en S . Sin embargo $\operatorname{div} \nabla d = \Delta d$ (el laplaciano de d), que no tiene porqué ser nulo en S .

Lo anterior nos lleva a considerar un campo de la forma $Y = \xi \nabla d$ con $\xi \in C^\infty(U)$. Es claro que $Y = N$ en S si y sólo si $\xi = 1$ en S . Por otro lado, gracias a la igualdad:

$$\operatorname{div} Y = \operatorname{div}(\xi \nabla d) = \xi \Delta d + \langle \nabla \xi, \nabla d \rangle,$$

se sigue que $\operatorname{div} Y = 0$ en U si y sólo si $\langle \nabla \xi, \nabla d \rangle = -\xi \Delta d$ en U . En resumen, la prueba del paso 1 se concluye tomando $Y = \xi \nabla d$ si encontramos una función $\xi \in C^\infty(U)$ tal que:

- (i) $\xi = 1$ en S ,
- (ii) $\langle \nabla \xi, \nabla d \rangle = -\xi \Delta d$ en U .

Definimos la función diferenciable $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\xi(x) = e^{-\eta(x)}, \quad \eta(x) = \int_0^{d(x)} (\Delta d)(\phi(\pi(x), t)) dt, \quad \text{para cada } x \in U.$$

Como $\eta = 0$ en S entonces $\xi = 1$ en S . Teniendo en cuenta que $\nabla \xi = -\xi \nabla \eta$ en U , la igualdad en (ii) equivale a:

$$(2.1) \quad \langle \nabla \eta, \nabla d \rangle = \Delta d \quad \text{en } U.$$

Sea $x \in U$. Como $\phi : S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ es sobreyectiva, entonces $x = \phi(p, \lambda)$ con $p = \pi(x) \in S$ y $\lambda = d(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Utilizando la regla de Leibniz para derivar bajo el signo integral, y que $(\nabla d)_x = N_p$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla \eta)_x, (\nabla d)_x \rangle &= \langle (\nabla \eta)_x, N_p \rangle = (d\eta)_x(N_p) \\ &= (\Delta d)(\phi(p, \lambda)) \langle (\nabla d)_x, N_p \rangle + \int_0^{d(x)} q(x, t) dt \\ &= (\Delta d)(x) + \int_0^{d(x)} q(x, t) dt, \end{aligned}$$

donde $q(x, t)$ es la derivada en x según la dirección N_p de la función $y \mapsto (\Delta d)(\phi(\pi(y), t))$. Como esta función es constante a lo largo del segmento contenido en U de la geodésica que sale de p con velocidad N_p entonces $q(x, t) = 0$. Esto prueba (2.1), lo que concluye la demostración del paso 1.

Paso 2 (encontramos el campo pedido). Existe $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ tal que $X = uN$ en S y la variación $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ inducida sobre Ω conserva el volumen.

Extendemos la función u a U de forma constante sobre las geodésicas normales de S . Esto se hace mediante la función $\bar{u} = u \circ \pi$ en U . Si definimos $Z = \bar{u}Y$ entonces $Z \in \mathfrak{X}(U)$, se cumple que $Z = uN$ sobre S , y además:

$$\operatorname{div} Z = \bar{u} \operatorname{div} Y + \langle \nabla \bar{u}, Y \rangle = \xi \langle \nabla \bar{u}, \nabla d \rangle = 0,$$

porque \bar{u} es constante sobre cada recta normal a S .

Utilizando una función meseta ρ y que \bar{U} es compacto, podemos encontrar $X = \rho Z \in \mathfrak{X}_0(M)$ tal que $X = Z$ en U . Así $X = Z = uN$ en S . Veamos que X conserva el volumen de Ω . Sea $\delta > 0$ tal que $S_t \subset U$ para cada $t \in (-\delta, \delta)$. Por la fórmula para $V''(0)$ en el lema 2.4 tenemos:

$$V''(t) = \int_{S_t} (\operatorname{div} X) \langle X, N_t \rangle dS_t = 0,$$

porque $\operatorname{div} X = \operatorname{div} Z = 0$ en U . Por tanto, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $V(t) = at + b$ para cada $t \in (-\delta, \delta)$. La primera derivada del volumen implica que:

$$V'(0) = \int_S \langle X, N \rangle dS = \int_S u dS = 0$$

por hipótesis. De este modo $a = 0$ y $V(t) = b$ para cada $t \in (-\delta, \delta)$. \square

2. Regiones estacionarias

En esta sección definiremos y caracterizaremos las regiones que se comportan como puntos críticos para el problema isoperimétrico, proporcionando así los candidatos de primer orden para ser regiones isoperimétricas. Aunque trabajaremos con campos con soporte compacto, todo el desarrollo que sigue es válido para campos completos $X \in \mathfrak{X}(M)$, e incluso para campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ que tengan una variación $\{\varphi_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ con $\varepsilon > 0$.

Sea Ω una región isoperimétrica en una variedad riemanniana M . Si $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ es un campo que conserva el volumen de Ω , entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $V(\Omega_t) = V(\Omega)$, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Como Ω minimiza el área de la frontera entre todas las regiones con su mismo volumen, entonces $A(S) \leq A(S_t)$, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. En consecuencia, el funcional de área $A(t) = A(S_t)$ alcanza un mínimo local en $t = 0$ y, por tanto, $A'(0) = 0$. Esto prueba que Ω es un *punto crítico del área para campos o variaciones que conservan el volumen* de Ω .

DEFINICIÓN 2.6. Diremos que una región Ω en una variedad riemanniana M es *estacionaria* si, para cada campo $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ cuya variación conserva el volumen de Ω , el funcional de área $A(t) = A(S_t)$ cumple que $A'(0) = 0$.

Por la discusión previa a la definición, si Ω es una región isoperimétrica en M , entonces Ω es estacionaria. En los ejemplos 2.11 y 2.13 mostraremos que el recíproco no es cierto en general.

Gracias a las fórmulas para las derivadas primeras del área y del volumen podemos establecer la siguiente caracterización geométrica de los conjuntos estacionarios.

TEOREMA 2.7. *Una región Ω en una variedad riemanniana M es estacionaria si y solo si la curvatura media H de $S = \partial\Omega$ es constante.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que Ω es estacionaria. Dada cualquier función $u \in C^\infty(S)$ con $\int_S u dS = 0$, el lema 2.5 nos dice que existe un campo $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ tal que $X = uN$ sobre S y cuya variación asociada conserva el volumen de Ω . Como Ω es estacionaria entonces $A'(0) = 0$. Gracias a la primera derivada del área llegamos a:

$$0 = A'(0) = \int_S \operatorname{div}_S X dS = \int_S \operatorname{div}_S (uN) dS = \int_S Hu dS.$$

Esto muestra que $\int_S Hu dS = 0$ para cada $u \in C^\infty(S)$ con $\int_S u dS = 0$. A partir de aquí se concluye que H es constante como en un resultado de la primera parte del curso (véase el lema 1.11 en [15]). La implicación recíproca se debe a la primera derivada del área y del volumen. De hecho, dado un campo $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ que conserva el volumen de Ω , entonces:

$$A'(0) = \int_S Hu dS = H \int_S u dS = H V'(0) = 0,$$

donde se ha usado que H es constante y que $V'(0) = 0$. □

NOTAS 2.8. (a). Es interesante destacar la diferencia que hay entre el teorema 2.7 y el siguiente enunciado obtenido en la primera parte del curso:

(*) *Una región $\Omega \subseteq M$ es un punto crítico del área para variaciones que son críticas para el volumen si y sólo si H es constante sobre $S = \partial\Omega$.*

En el teorema 2.7 se trabaja con puntos críticos del área para variaciones *que conservan el volumen*, mientras que en (*) se consideran puntos críticos del área para variaciones *que son críticas para el volumen*. Se puede emplear la condición suficiente en (*), y el hecho de que toda variación que conserva el volumen es crítica para el volumen, para deducir la condición suficiente en el teorema 2.7. La prueba de la condición necesaria es idéntica en ambos resultados gracias al lema 2.5.

(b). Una forma directa de obtener que H es constante en el teorema 2.7 es a partir del siguiente enunciado:

Si S es una hipersuperficie compacta y $f \in C^\infty(S)$ cumple que $\int_S f u dS = 0$, para cada $u \in C^\infty(S)$ con $\int_S u dS = 0$, entonces f es constante.

En efecto; el hecho de que $\int_S u dS = 0$ equivale a que $u \perp 1$ en el espacio de Hilbert $L^2(S)$. Dicho de otro modo $u \in V^\perp$, donde $V = \langle 1 \rangle$ es el subespacio de $L^2(S)$ formado por las funciones constantes. Gracias a la densidad de $C^\infty(S)$ en $L^2(S)$, la hipótesis sobre f implica que:

$$f \in (V^\perp)^\perp = \overline{V} = V,$$

de donde f es constante.

Como toda región isoperimétrica es estacionaria, el teorema 2.7 implica la siguiente relación entre el problema isoperimétrico y las hipersuperficies de curvatura media constante.

COROLARIO 2.9. *Si Ω es una región isoperimétrica en una variedad riemanniana M , entonces la hipersuperficie $S = \partial\Omega$ tiene curvatura media constante.*

Ahora emplearemos el teorema 2.7 para proporcionar ejemplos de regiones estacionarias. Mostraremos también situaciones en las que existen regiones estacionarias que no son isoperimétricas.

EJEMPLO 2.10. En \mathbb{R}^m se define la *bola abierta* de centro p_0 y radio $r > 0$ como el conjunto:

$$B(p_0, r) = \{p \in \mathbb{R}^m / |p - p_0| < r\},$$

donde $|\cdot|$ es la norma euclídea. Su frontera es la esfera $S^{m-1}(p_0, r)$ definida en el ejemplo 1.6. Se trata de una hipersuperficie compacta con curvatura media constante $H = (m-1)/r$ respecto del normal unitario exterior $N(p) = (p - p_0)/r$. En particular la bola $B(p_0, r)$ es estacionaria. De hecho, si Ω es una unión finita de bolas abiertas con cierres disjuntos, entonces Ω es estacionaria si y sólo si los radios de todas las bolas coinciden. En el tema 4 probaremos que todas las regiones estacionarias en \mathbb{R}^m son de este tipo. Veremos también que Ω no es isoperimétrica si contiene al menos dos bolas. Un caso particular es el siguiente:

EJEMPLO 2.11. En \mathbb{R}^2 consideramos la región Ω dada por la unión de dos discos abiertos del mismo radio y cierres disjuntos. Sabemos por el ejemplo 2.10 que Ω es estacionaria. Sin embargo, Ω no es isoperimétrica, pues la frontera de un único disco abierto en \mathbb{R}^2 encerrando la misma área que Ω tiene estrictamente menos longitud. Los cálculos explícitos se dejan como ejercicio.

EJEMPLO 2.12. Sea M una superficie de revolución en \mathbb{R}^3 . Como M es invariante por los giros alrededor de una recta, y estos giros conservan la curvatura media, entonces cada paralelo en M es un círculo con curvatura media constante. Así, si Ω es una región en M tal que $\partial\Omega$ es unión finita de paralelos con la misma curvatura media constante, entonces Ω es estacionaria. Lo mismo ocurre cuando $\partial\Omega$ es una unión finita de meridianos, pues estos son geodésicas en M . En particular, los discos geodésicos de una esfera $S^2(p_0, r)$ (o uniones finitas de ellos con el mismo radio), las regiones $\Omega = S^1 \times (a, b)$ del cilindro circular $M = S^1 \times \mathbb{R}$, y las regiones limitadas por círculos de revolución en un toro son estacionarias.

EJEMPLO 2.13. Sea M el cilindro vertical $S^1 \times \mathbb{R}$. En esta superficie de revolución cada paralelo $S^1 \times \{t\}$ es una geodésica y, por tanto, tiene curvatura media nula. Para cada $k \geq 2$ sea Ω_k una región en M obtenida al unir k cilindros del tipo $S^1 \times (a, b)$ con cierres disjuntos. Por el ejemplo 2.12 la región Ω_k es estacionaria. Sin embargo Ω_k no es una región isoperimétrica, ya que la frontera de un único cilindro $S^1 \times (c, d)$ con la misma área que Ω_k tiene estrictamente menos longitud.

NOTA 2.14. El corolario 2.9 nos indica que el conocimiento de la familia \mathcal{F} de las hipersuperficies compactas con curvatura media constante en una variedad M es útil para determinar las regiones isoperimétricas: si sabemos que existe una región isoperimétrica Ω en M entonces $\partial\Omega \in \mathcal{F}$. Cuando la familia \mathcal{F} tiene pocos elementos esto permite caracterizar Ω a partir de una comparación entre las regiones Ω' en M con volumen fijo y $\partial\Omega' \in \mathcal{F}$. Siguiendo este esquema se pueden describir las regiones isoperimétricas en ciertas variedades como el espacio euclídeo \mathbb{R}^m o el espacio hiperbólico \mathbb{H}^m . Por el contrario, esta idea no es útil en la esfera S^m con $m \geq 3$ porque en este caso la familia \mathcal{F} es demasiado extensa.

3. Regiones estables

Antes observamos que hay variedades donde el conocimiento de las regiones estacionarias no es suficiente para determinar las regiones isoperimétricas. Para resolver esta dificultad consideraremos regiones que cumplen una propiedad más restrictiva, a saber, son mínimos de segundo orden del área para variaciones que conservan el volumen.

Al comienzo de la sección 2 probamos que si Ω es una región isoperimétrica y el campo $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ conserva el volumen de Ω , entonces el funcional de área $A(t) = A(S_t)$ alcanza un mínimo local en $t = 0$. Esto implica no solo que $A'(0) = 0$, sino también que $A''(0) \geq 0$, es decir, Ω es un *mínimo de segundo orden del área para campos o variaciones que conservan su volumen*.

DEFINICIÓN 2.15. Diremos que una región Ω en una variedad riemanniana M es *estable* si, para cada campo $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ cuya variación conserva el volumen de Ω , el funcional de área $A(t) = A(S_t)$ cumple que $A'(0) = 0$ y $A''(0) \geq 0$.

Es obvio que toda región estable es estacionaria y que toda región isoperimétrica es estable. Más adelante veremos que los enunciados recíprocos no son ciertos.

Para obtener la propiedad fundamental de las regiones estables necesitamos recordar la fórmula para la segunda derivada del área y el volumen con la que finalizó la primera parte del curso, véase el corolario 1.17 de [15].

PROPOSICIÓN 2.16. *Sea Ω una región estacionaria en una variedad riemanniana M . Consideremos un campo $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ de forma que $X = uN$ en S . Entonces, los funcionales de área $A(t) = A(S_t)$ y de volumen $V(t) = V(\Omega_t)$ satisfacen la igualdad:*

$$(A - HV)''(0) = \int_S \{ |\nabla_S u|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |\sigma|^2) u^2 \} dS,$$

donde H es la curvatura media constante de S , $\nabla_S u$ es el gradiente de u en S , $|\sigma|^2$ es la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental de S , y Ric es el tensor de Ricci de M .

DEFINICIÓN 2.17. Dada una hipersuperficie $S \subset M$ con un campo diferenciable normal y unitario N , la *forma índice* de S es la forma bilineal simétrica $Q_S : C_0^\infty(S) \times C_0^\infty(S) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$Q_S(u, w) = \int_S \{ \langle \nabla_S u, \nabla_S w \rangle - (\text{Ric}(N, N) + |\sigma|^2) u w \} dS.$$

Nótese que la forma índice de S involucra términos analíticos y geométricos sobre S . Por definición de Q_S la fórmula de la proposición 2.16 se expresa como:

$$(2.2) \quad (A - HV)''(0) = Q_S(u, u).$$

Ahora podemos probar que toda región estable satisface la siguiente desigualdad:

TEOREMA 2.18. *Si Ω es una región estable en una variedad riemanniana M , entonces:*

$$Q_S(u, u) \geq 0,$$

para cada $u \in C^\infty(S)$ tal que $\int_S u dS = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Dada una función $u \in C^\infty(S)$ con $\int_S u dS = 0$, el lema 2.5 nos dice que existe un campo $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ tal que $X = uN$ sobre S y cuya variación conserva el volumen de Ω . Teniendo en cuenta la estabilidad de Ω y la ecuación (2.2), llegamos a:

$$0 \leq A''(0) = (A - HV)''(0) = Q_S(u, u),$$

donde se ha usado que $V''(0) = 0$ porque la variación conserva el volumen. \square

NOTA 2.19. El recíproco del enunciado anterior es cierto: si Ω es una región estacionaria y $Q_S(u, u) \geq 0$ para cada $u \in C^\infty(S)$ con $\int_S u \, dS = 0$, entonces Ω es una región estable. Esto se debe a que la proposición 2.16 es también válida para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}_0(M)$.

Como toda región isoperimétrica es estable, el teorema 2.18 implica que toda región isoperimétrica cumple la desigualdad de estabilidad.

COROLARIO 2.20. Si Ω es una región isoperimétrica en una variedad riemanniana M , entonces la hipersuperficie $S = \partial\Omega$ tiene curvatura media constante y satisface:

$$Q_S(u, u) \geq 0,$$

para cada $u \in C^\infty(S)$ tal que $\int_S u \, dS = 0$.

Veamos ahora un ejemplo de región estable que no es isoperimétrica.

EJEMPLO 2.21. Sea M el cilindro vertical $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Sea Ω una región en M obtenida al unir $k \geq 2$ cilindros del tipo $\mathbb{S}^1 \times (a, b)$ con cierres disjuntos. En el ejemplo 2.13 comprobamos que Ω es una región estacionaria pero no isoperimétrica. Por otro lado, nótese que $|\sigma|^2 = 0$ sobre $S = \partial\Omega$ ya que los paralelos de M son geodésicas. Además, como $\text{Ric} = 0$ sobre M , la forma índice de S está dada por $Q_S(u, u) = \int_S |\nabla_S u|^2 \, dS$. Esto implica que $Q_S(u, u) \geq 0$ para cada $u \in C^\infty(S)$ y, por tanto, Ω es una región estable por la nota 2.19.

EJERCICIO 2. Demostrar que en una variedad riemanniana M con $\text{Ric} \leq 0$ (esto significa que $\text{Ric}_p(w, w) \leq 0$, para cada $p \in M$ y cada $w \in T_p M$) toda región estacionaria Ω tal que $|\sigma|^2 = 0$ en $S = \partial\Omega$ es estable. Esto generaliza la construcción de la región estable en el ejemplo 2.21.

NOTA 2.22. Por el corolario 2.20, el conocimiento de las regiones estables en una variedad riemanniana M es útil para determinar las regiones isoperimétricas. Cuando la familia de regiones estables tiene pocos elementos podemos caracterizar una región isoperimétrica Ω comparando el área de las regiones estables con su mismo volumen. Siguiendo este esquema se pueden clasificar las regiones isoperimétricas en la esfera \mathbb{S}^m con $m \geq 3$. La descripción de las regiones estables es una cuestión difícil que solo se ha conseguido en variedades riemannianas muy concretas.

Concluiremos este tema deduciendo algunas propiedades de las regiones estables. Gracias al teorema 2.18 la estrategia consiste en utilizar la desigualdad $Q_S(u, u) \geq 0$ con funciones u de media nula específicas. Nótese que esta desigualdad es más restrictiva cuando $\text{Ric} \geq 0$ en M pues, en tal caso, el integrando en $Q_S(u, u)$ contiene un término no positivo. Así, la hipótesis $\text{Ric} \geq 0$ es natural en el estudio de las regiones estables. En el siguiente resultado emplearemos esta hipótesis para obtener información de tipo geométrico y topológico.

TEOREMA 2.23. Sea M una variedad riemanniana tal que $\text{Ric} \geq 0$ en M (es decir, $\text{Ric}_p(w, w) \geq 0$ para cada $p \in M$ y cada $w \in T_p M$). Si Ω es una región estable en M con frontera S , entonces:

- (i) S es una hipersuperficie conexa, o bien
- (ii) S es totalmente geodésica y $\text{Ric}(N, N) = 0$ en S .

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que si S no es conexa entonces se cumple (ii). Como S es compacta y localmente conexa, entonces cada componente conexa de S es una hipersuperficie compacta y un abierto de S .

Dado cualquier $p \in S$ veamos que $|\sigma|^2(p) = \text{Ric}_p(N_p, N_p) = 0$. Sea S_1 la componente conexa de S tal que $p \in S_1$. Como S no es conexa, existe otra componente S_2 de S tal que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Definimos la función $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$u = \begin{cases} c_1 & \text{en } S_1, \\ c_2 & \text{en } S_2, \\ 0 & \text{en } S - (S_1 \cup S_2), \end{cases}$$

donde c_1 y c_2 son constantes no nulas tales que $c_1 A(S_1) = -c_2 A(S_2)$. Es obvio que $u \in C^\infty(S)$ tal que $\nabla_S u = 0$ en S y $\int_S u dS = 0$. Como Ω es estable, el teorema 2.18 implica que $Q_S(u, u) \geq 0$. Utilizando la definición de forma índice y que $u = 0$ en $S - (S_1 \cup S_2)$ se obtiene:

$$0 \leq Q_S(u, u) = - \sum_{i=1}^2 c_i^2 \int_{S_i} (\text{Ric}(N, N) + |\sigma|^2) dS \leq 0,$$

donde la última desigualdad se debe a que $\text{Ric} \geq 0$ y $|\sigma|^2 \geq 0$. Como las desigualdades previas son igualdades y $c_i \neq 0$, entonces $|\sigma|^2 = 0$ y $\text{Ric}(N, N) = 0$ en S_1 , lo que completa la prueba. \square

NOTAS 2.24. (a). Geométricamente, la función empleada en la demostración está asociada a una deformación de Ω que “agrandar” una de las componentes de S a la que vez que “disminuye” otra, de forma que el volumen encerrado se mantenga constante. Dicha variación decrece estrictamente el área, salvo que se cumplan las propiedades en (ii).

(b). Las dos conclusiones del teorema 2.23 no son excluyentes. Si M se obtiene suavizando un cilindro circular recto rematado con dos semiesferas, entonces cada región Ω limitada por un paralelo del cilindro es estable (por la nota 2.19) y cumple tanto (i) como (ii).

(c). Existen regiones estables no conexas en variedades con $\text{Ric} \geq 0$, véase el ejemplo 2.21. No obstante, es posible demostrar que las regiones isoperimétricas en una variedad M con $\text{Ric} \geq 0$ son siempre conexas (aunque su frontera pueda ser disconexa).

A partir del teorema 2.23 podemos mostrar algunas condiciones suficientes para garantizar que toda región estable tiene frontera conexa. Esto permite descartar la estabilidad de algunos ejemplos estacionarios mostrados en la sección 2.

COROLARIO 2.25. *Sea M una variedad riemanniana tal que $\text{Ric} \geq 0$ en M . Supongamos que se cumple algunas de estas hipótesis:*

- (i) $\text{Ric} > 0$ en M (es decir, $\text{Ric}_p(w, w) > 0$ para cada $p \in M$ y cada $w \in T_p M$ con $w \neq 0$),
- (ii) No existen en M hipersuperficies compactas sin borde y totalmente geodésicas.

Si Ω es una región estable en M , entonces $S = \partial\Omega$ es una hipersuperficie conexa.

Como consecuencia, deducimos lo siguiente:

COROLARIO 2.26. *Si Ω es una región estable en el espacio euclídeo \mathbb{R}^m o en la esfera unidad \mathbb{S}^m con $m \geq 2$, entonces $S = \partial\Omega$ es una hipersuperficie conexa. En particular, las regiones isoperimétricas de \mathbb{R}^m y \mathbb{S}^m tienen frontera conexa.*

DEMOSTRACIÓN. La afirmación en el caso de \mathbb{S}^m es inmediata a partir del corolario 2.25 porque $\text{Ric} = m - 1 > 0$ en \mathbb{S}^m sobre vectores unitarios. En el caso de \mathbb{R}^m tenemos $\text{Ric} = 0$, y la afirmación se deduce del corolario 2.25 usando que en \mathbb{R}^m no existen hipersuperficies compactas sin borde y totalmente geodésicas, véase el corolario 1.8. \square

El problema isoperimétrico en \mathbb{R}^m

En este tema estudiaremos la cuestión isoperimétrica en el espacio euclídeo. Probaremos la desigualdad isoperimétrica clásica, que establece una relación entre el volumen de una región y el área de su frontera. Emplearemos para ello una propiedad de la medida de Lebesgue: la desigualdad de Brunn-Minkowski. Después mostraremos que las bolas abiertas son las únicas regiones que producen la igualdad isoperimétrica, haciendo uso de la condición de estabilidad. Como consecuencia concluiremos que las bolas abiertas son las únicas regiones isoperimétricas en \mathbb{R}^m .

1. Desigualdad isoperimétrica y regiones isoperimétricas en \mathbb{R}^m

En esta sección exponemos los resultados principales de este tema. Comenzamos con la relación fundamental que existe entre el volumen de una región y el área de su frontera.

TEOREMA 3.1 (desigualdad isoperimétrica). *Si Ω es una región en \mathbb{R}^m con frontera $S = \partial\Omega$, entonces se cumple que:*

$$A(S)^m \geq c_m V(\Omega)^{m-1},$$

donde $c_m = m^m V(B)$ y $B = B(0, 1) = \{p \in \mathbb{R}^m / |p| < 1\}$. Además, una región $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ cumple la igualdad si y solo si es una bola abierta.

La demostración consta de dos partes en las que se emplean técnicas diferentes: en la primera (sección 2) probaremos la desigualdad y en la segunda (sección 3) caracterizaremos la igualdad.

En el caso $m = 2$ el teorema 3.1 conduce a la siguiente desigualdad clásica:

COROLARIO 3.2 (desigualdad isoperimétrica plana). *Si Ω es una región en \mathbb{R}^2 , entonces:*

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

donde L es la longitud de $\partial\Omega$ y A el área de Ω . La igualdad se cumple si y sólo si Ω es un disco abierto.

NOTA 3.3 (desigualdad isoperimétrica en superficies). La desigualdad plana $L^2 \geq 4\pi A$ no se cumple en cualquier superficie riemanniana M , ni siquiera cuando su curvatura de Gauss es nula (un ejemplo sencillo para mostrar esto es el cilindro vertical $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^3). En general, la curvatura gaussiana interviene en la desigualdad isoperimétrica de una superficie arbitraria. Por ejemplo, se puede demostrar que cada región Ω en una esfera M de curvatura $K_0 > 0$ o en un plano hiperbólico M de curvatura $K_0 < 0$ satisface:

$$L^2 \geq 4\pi A - K_0 A^2.$$

Además, la igualdad se consigue si y solo si Ω es un disco geodésico en M .

En el caso $m = 3$ deducimos lo siguiente a partir de la desigualdad general:

COROLARIO 3.4 (desigualdad isoperimétrica espacial). *Si Ω es una región en \mathbb{R}^3 , entonces:*

$$A^3 \geq 36\pi V^2,$$

donde A es el área de $\partial\Omega$ y V el volumen de Ω . La igualdad se cumple si y sólo si Ω es una bola abierta.

La desigualdad isoperimétrica permite resolver la cuestión isoperimétrica en el espacio euclídeo. Esto se debe al siguiente hecho:

EJERCICIO 3. Una región Ω en \mathbb{R}^m es isoperimétrica si y sólo si cumple la igualdad en la desigualdad isoperimétrica.

COROLARIO 3.5 (regiones isoperimétricas en \mathbb{R}^m). *Una región $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ es isoperimétrica si y solo si coincide con una bola abierta.*

NOTA 3.6. En sus comienzos la cuestión isoperimétrica estudiaba las regiones que encierran el mayor volumen entre todas las que tienen frontera de área dada. La desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^m implica que este problema es equivalente al de minimizar el área con volumen dado. En consecuencia, las bolas abiertas maximizan de forma única el volumen entre las regiones en \mathbb{R}^m con frontera de área dada. Los detalles se proponen como ejercicio.

2. Prueba de la desigualdad

El ingrediente fundamental que utilizaremos para establecer la desigualdad isoperimétrica clásica es la desigualdad de Brunn-Minkowski en \mathbb{R}^m . Antes de enunciarla necesitamos una definición.

DEFINICIÓN 3.7. Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de \mathbb{R}^m , se define la *suma conjuntista* $A + B$ como el subconjunto de \mathbb{R}^m dado por:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Es evidente que podemos escribir:

$$A + B = \bigcup_{a \in A} (\{a\} + B) = \bigcup_{b \in B} (A + \{b\}),$$

es decir, $A + B$ es la unión de las traslaciones de B (resp. A) mediante los vectores de A (resp. B).

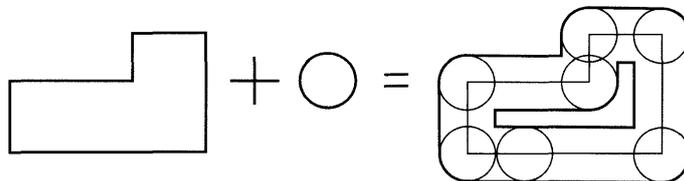


FIGURA 1. Suma conjuntista (figure 6.5 en [12]).

La desigualdad que nos interesa es una relación funcional que involucra al volumen de la suma conjuntista $A + B$ con los volúmenes de A y B .

TEOREMA 3.8 (desigualdad de Brunn-Minkowski). *Si A y B son dos conjuntos abiertos y acotados de \mathbb{R}^m , entonces:*

$$V(A + B)^{1/m} \geq V(A)^{1/m} + V(B)^{1/m}.$$

La prueba de este teorema se detalla en la sección 4. Otro ingrediente que necesitaremos en la prueba de la desigualdad isoperimétrica está contenido en el siguiente

EJERCICIO 4. Dados $p_0 \in \mathbb{R}^m$ y $r > 0$, se define $h_r : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ como $h_r(p) = p_0 + rp$ (composición de traslación y homotecia centrada en 0). Si S es una subvariedad k -dimensional en \mathbb{R}^m , demostrar que:

$$\text{vol}_k(h_r(S)) = r^k \text{vol}_k(S),$$

donde vol_k representa el volumen riemanniano k -dimensional en \mathbb{R}^m . En particular, dada una región Ω en \mathbb{R}^m con frontera $S = \partial\Omega$, se cumplen las igualdades:

$$V(h_r(\Omega)) = r^m V(\Omega), \quad A(h_r(S)) = r^{m-1} A(S).$$

Ya estamos en condiciones de establecer la desigualdad isoperimétrica clásica.

TEOREMA 3.9. Si Ω es una región en \mathbb{R}^m con frontera $S = \partial\Omega$, entonces se cumple que:

$$A(S)^m \geq c_m V(\Omega)^{m-1},$$

donde $c_m = m^m V(B)$ y $B = B(0, 1) = \{p \in \mathbb{R}^m / |p| < 1\}$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $r > 0$ sea $h_r : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ la homotecia de razón r dada por $h_r(p) = rp$. Denotamos $B_r = h_r(B)$, que coincide con la bola abierta $B(0, r)$ en \mathbb{R}^m . Por el ejercicio 4 se sigue que $V(B_r) = r^m V(B)$. Si aplicamos la desigualdad de Brunn-Minkowski en el teorema 3.8 a los conjuntos Ω y B_r , obtenemos:

$$\begin{aligned} V(\Omega + B_r) &\geq (V(\Omega)^{1/m} + V(B_r)^{1/m})^m = (V(\Omega)^{1/m} + r V(B)^{1/m})^m \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} V(\Omega)^{i/m} r^{m-i} V(B)^{(m-i)/m} \\ &\geq V(\Omega) + m V(\Omega)^{(m-1)/m} r V(B)^{1/m}, \end{aligned}$$

donde en la última estimación se desprecian todos los sumandos salvo los dos últimos. Por tanto:

$$\left(\frac{V(\Omega + B_r) - V(\Omega)}{r} \right)^m \geq c_m V(\Omega)^{m-1}.$$

Por otro lado, es fácil comprobar que $\Omega + B_r \subseteq \Omega_r$, donde $\Omega_r = \{q \in \mathbb{R}^m / \text{dist}(q, \bar{\Omega}) < r\}$. Esto implica que $V(\Omega_r) \geq V(\Omega + B_r)$ y, por la desigualdad anterior, deducimos:

$$(3.1) \quad \left(\frac{V(\Omega_r) - V(\Omega)}{r} \right)^m \geq c_m V(\Omega)^{m-1}.$$

Como $\Omega_r = \bar{\Omega} \cup (\Omega_r \setminus \bar{\Omega})$ entonces $V(\Omega_r) = V(\Omega) + V(\Omega_r \setminus \bar{\Omega})$. Sustituyendo esta información en (3.1), llegamos a:

$$\left(\frac{V(\Omega_r \setminus \bar{\Omega})}{r} \right)^m \geq c_m V(\Omega)^{m-1}.$$

Para terminar la prueba encontraremos una función $v(r)$ con $r > 0$, tal que:

- (i) $v(r) \geq V(\Omega_r \setminus \bar{\Omega})$, para cada $r > 0$,
- (ii) $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{v(r)}{r} = A(S)$.

A partir de esto tendríamos que:

$$\left(\frac{v(r)}{r} \right)^m \geq c_m V(\Omega)^{m-1}, \quad \forall r > 0,$$

y la desigualdad isoperimétrica se deduciría tomando límite arriba cuando $r \rightarrow 0^+$.

Definimos una aplicación diferenciable $\phi : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ por:

$$\phi(p, t) = p + t N_p.$$

La imagen $\phi(S \times \mathbb{R})$ es la unión de todas las rectas normales de S . Vamos a probar que:

$$(3.2) \quad \Omega_r \setminus \bar{\Omega} \subseteq \phi(S \times (0, r)).$$

Sea $q \in \Omega_r \setminus \bar{\Omega}$. Como $\bar{\Omega} = \{q \in \mathbb{R}^m / \text{dist}(q, \bar{\Omega}) = 0\}$ entonces $0 < \text{dist}(q, \bar{\Omega}) < r$. Definimos la función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(p) = |p - q|^2$. Como S es compacta y f es continua, entonces f alcanza su mínimo absoluto en un punto $p \in S$. La diferencial $(df)_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación lineal:

$$(df)_p(w) = w(f) = 2 \langle w, p - q \rangle, \quad \forall w \in T_p S.$$

Como $(df)_p(w) = 0$ para cada $w \in T_p S$, el vector $q - p$ es ortogonal a $T_p S$. Por tanto, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $q - p = t N_p$, de donde $q = p + t N_p = \phi(p, t)$. Además, se tiene que:

$$|t| = |q - p| = \text{dist}(q, S) = \text{dist}(q, \overline{\Omega}) \in (0, r).$$

Se verifica también que $t > 0$. Como $|q - p| = \text{dist}(q, S)$ entonces $(p, q] \cap S = \emptyset$, donde $(p, q]$ es el segmento que une p y q del que se ha suprimido p . Dado que $(p, q] \cap (\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}) \neq \emptyset$, se sigue que $(p, q] \subset \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$. Esto conlleva que $t > 0$ por ser N_p el vector normal unitario exterior sobre S .

Si definimos $v(r) = V(\phi(S \times (0, r)))$, entonces la desigualdad en (3.2) nos informa de que $v(r) \geq V(\Omega_r \setminus \overline{\Omega})$, para cada $r > 0$. Nos queda comprobar que $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{v(r)}{r} = A(S)$. Para ello aplicaremos la fórmula del cambio de variable cuando $\phi : S \times (0, r) \rightarrow \phi(S \times (0, r))$ es un difeomorfismo.

Dado $(p, t) \in S \times \mathbb{R}$ calculamos la diferencial $(d\phi)_{(p,t)} : T_p S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si $\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ es una base ortonormal de $T_p S$ formada por direcciones principales, es sencillo comprobar que:

$$\begin{aligned} (d\phi)_{(p,t)}(w_i, 0) &= (1 + t k_i(p)) w_i, \quad \forall i = 1, \dots, m-1, \\ (d\phi)_{(p,t)}(0, 1) &= N_p, \end{aligned}$$

donde $k_1(p) \leq \dots \leq k_{m-1}(p)$ son las curvaturas principales en cada punto $p \in S$ respecto del normal unitario exterior N . Tomando $\{(w_1, 0), \dots, (w_{m-1}, 0), (0, 1)\}$ como base ortonormal en $T_p S \times \mathbb{R}$ y aplicando la definición de jacobiano de ϕ en el punto (p, t) , obtenemos:

$$\text{Jac}(\phi)(p, t) = \prod_{i=1}^{m-1} |1 + t k_i(p)|.$$

En particular $\text{Jac}(\phi)(p, 0) = 1$, de donde $(d\phi)_{(p,0)} : T_p S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo lineal. Por el teorema de la función inversa la aplicación $\phi : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo local en $(p, 0)$. Así, existen un entorno abierto V_p de p en S , un número $r_p > 0$, y un entorno abierto W_p de $\phi(p, 0) = p$ en \mathbb{R}^m tales que $\phi : V_p \times (-r_p, r_p) \rightarrow W_p$ es un difeomorfismo. Empleando un argumento de compacidad y razonando como en la prueba del theorem 4.26 en [12] se demuestra que existen un número $r_0 > 0$ y un abierto W de \mathbb{R}^m con $S \subset W$ tales que $\phi : S \times (-r_0, r_0) \rightarrow W$ es un difeomorfismo.

Dado un punto $p \in S$ y un índice $i \in \{1, \dots, m-1\}$, la función $t \in (-r_0, r_0) \mapsto 1 + t k_i(p)$ es continua, no se anula, y toma el valor 1 cuando $t = 0$. Esto implica que dicha función es siempre positiva. En consecuencia:

$$\text{Jac}(\phi)(p, t) = \prod_{i=1}^{m-1} (1 + t k_i(p)) = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} f_i(p) t^i, \quad \forall (p, t) \in S \times (-r_0, r_0),$$

donde $f_i(p)$ es un polinomio de grado i sobre las curvaturas principales $k_i(p)$. Por tanto, dado $r \in (0, r_0)$, podemos aplicar el teorema de Fubini y la fórmula del cambio de variable al difeomorfismo $\phi : S \times (0, r) \rightarrow \phi(S \times (0, r))$ para concluir que:

$$\begin{aligned} v(r) &= \int_{S \times (0, r)} \text{Jac}(\phi) dS dt = \int_S \left(\int_0^r \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} f_i(p) t^i \right) dt \right) dS \\ &= \int_S \left(r + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{f_i(p)}{i+1} r^{i+1} \right) dS = r A(S) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{r^{i+1}}{i+1} \int_S f_i(p) dS, \quad \forall r \in (0, r_0). \end{aligned}$$

De este modo:

$$\frac{v(r)}{r} = A(S) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i+1} \left(\int_S f_i(p) dS \right) r^i, \quad \forall r \in (0, r_0),$$

de donde $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{v(r)}{r} = A(S)$. Esto completa la prueba de la desigualdad isoperimétrica. \square

3. Caracterización de la igualdad. Regiones estables en \mathbb{R}^m

En esta sección discutiremos la igualdad en la desigualdad isoperimétrica. El hecho de que sea satisfecha por las bolas abiertas es sencillo y se muestra en el siguiente:

EJERCICIO 5. Dada una bola abierta $B(p_0, r)$ en \mathbb{R}^m , probar que:

- (a) $V(B(p_0, r)) = r^m V(B)$ y $A(\mathbb{S}^{m-1}(p_0, r)) = r^{m-1} A(\mathbb{S}^{m-1})$ (usar el ejercicio 4),
- (b) $A(\mathbb{S}^{m-1}) = m V(B)$ (aplicar el teorema de la divergencia al campo $X_p = p$ sobre B).

Deducir que $A(\mathbb{S}^{m-1}(p_0, r))^m = \mathbf{c}_m V(B(p_0, r))^{m-1}$.

Así, para completar la prueba del teorema 3.1 nos queda por mostrar lo siguiente:

TEOREMA 3.10. Si una región $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ con frontera $S = \partial\Omega$ cumple la igualdad:

$$A(S)^m = \mathbf{c}_m V(\Omega)^{m-1},$$

entonces Ω es una bola abierta.

DEMOSTRACIÓN. Nótese que Ω es una región isoperimétrica. En efecto; dada otra región Ω' en \mathbb{R}^m con volumen $V(\Omega') = V(\Omega)$ y frontera $S' = \partial\Omega'$, tenemos:

$$A(S)^m = \mathbf{c}_m V(\Omega)^{m-1} = \mathbf{c}_m V(\Omega')^{m-1} \leq A(S')^m,$$

donde hemos usado la igualdad isoperimétrica para Ω y la desigualdad isoperimétrica para Ω' . Como Ω es una región isoperimétrica entonces es una región estable. El hecho de que Ω sea una bola abierta se consigue a partir de la clasificación de las regiones estables en \mathbb{R}^m del teorema 3.11. \square

TEOREMA 3.11. Una región $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ es estable si y solo si es una bola abierta.

DEMOSTRACIÓN (EL SOUFI E ILIAS [9]). Como toda bola abierta cumple la igualdad isoperimétrica se sigue como antes que es una región isoperimétrica y, por tanto, una región estable.

Sea Ω una región estable en \mathbb{R}^m . Entonces, Ω es estacionaria y el teorema 2.7 nos dice que la hipersuperficie $S = \partial\Omega$ tiene curvatura media constante H . Gracias al corolario 2.26 se sigue que S es conexa. Como S también es compacta, si probamos que se cumple la igualdad $|\sigma|^2 = H^2/(m-1)$ sobre S , entonces obtendremos por el corolario 1.9 que S es una esfera y Ω es una bola abierta. Veamos pues que $|\sigma|^2 = H^2/(m-1)$ en S .

Sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ la base usual de \mathbb{R}^m . Para cada $i = 1, \dots, m$ consideramos la proyección i -ésima $\pi_i(p) = \langle p, e_i \rangle$ y la constante $c_i = A(S)^{-1} \int_S \pi_i dS$. Denotamos $p_0 = \sum_{i=1}^m c_i e_i$ y consideramos el campo de posición $X_p = p - p_0$. Nótese que $\nabla_w X = w$ para cada $p \in \mathbb{R}^m$ y cada $w \in T_p \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$. Esto implica que $\text{div}_S X = m-1$ en S . Por otro lado, escribiendo $X|_S$ como la suma de su proyección normal $X^\perp = \langle X, N \rangle N$ y su proyección tangente $X^\top = X - X^\perp$, se sigue que:

$$m-1 = \text{div}_S X = \text{div}_S X^\top + \text{div}_S (\langle X, N \rangle N) = \text{div}_S X^\top + H \langle X, N \rangle.$$

Integrando la igualdad anterior y aplicando el teorema de la divergencia para campos tangentes sobre variedades riemannianas, tenemos que:

$$(m-1)A(S) = \int_S \text{div}_S X^\top dS + \int_S H \langle X, N \rangle dS = \int_S H \langle X, N \rangle dS.$$

En particular $H \neq 0$ (lo contrario nos diría que $A(S) = 0$) y, al ser constante, se cumple la igualdad:

$$(3.3) \quad \int_S \langle X, N \rangle dS = \frac{(m-1)A(S)}{H}.$$

Para cada $i = 1, \dots, m$, definimos la función $u_i = \pi_i - c_i$ sobre S . Es claro que $u_i \in C^\infty(S)$ y que $\int_S u_i dS = 0$ por definición de c_i . Como Ω es estable, podemos aplicar la desigualdad en el teorema 2.18 para deducir:

$$0 \leq Q_S(u_i, u_i) = \int_S \{|\nabla_S u_i|^2 - |\sigma|^2 u_i^2\} dS, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

es decir:

$$\int_S |\nabla_S u_i|^2 dS \geq \int_S |\sigma|^2 u_i^2 dS, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Sumando en $i = 1, \dots, m$, y usando que $X = \sum_{i=1}^m u_i e_i$, se sigue que:

$$(3.4) \quad \int_S \left(\sum_{i=1}^m |\nabla_S u_i|^2 \right) dS \geq \int_S |\sigma|^2 |X|^2 dS.$$

Por otro lado, dados $p \in S$ y $w \in T_p S$, tenemos:

$$\langle (\nabla_S u_i)_p, w \rangle = w(u_i) = w(\pi_i) = \langle w, e_i \rangle = \langle e_i^\top, w \rangle,$$

de donde:

$$(\nabla_S u_i)_p = e_i^\top = e_i - e_i^\perp = e_i - \langle e_i, N_p \rangle N_p,$$

y, por tanto:

$$(3.5) \quad |(\nabla_S u_i)_p|^2 = 1 - \langle e_i, N_p \rangle^2, \quad \forall p \in S.$$

En consecuencia:

$$(3.6) \quad \sum_{i=1}^m |\nabla_S u_i|^2 = \sum_{i=1}^m (1 - \langle e_i, N \rangle^2) = m - |N|^2 = m - 1.$$

Sustituyendo esta información en la ecuación (3.4), obtenemos:

$$(3.7) \quad (m-1)A(S) \geq \int_S |\sigma|^2 |X|^2 dS \geq \frac{H^2}{m-1} \int_S |X|^2 dS,$$

donde la última estimación se debe a la desigualdad $|\sigma|^2 \geq H^2/(m-1)$ del lema 1.4. Ahora estimaremos la integral de la derecha. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el espacio $L^2(S)$ de las funciones de cuadrado integrable sobre S , deducimos:

$$\left| \int_S \langle X, N \rangle dS \right| \leq \int_S |\langle X, N \rangle| dS \leq \int_S |X| \cdot 1 dS \leq \left(\int_S |X|^2 dS \right)^{1/2} \left(\int_S 1^2 dS \right)^{1/2}.$$

Elevando al cuadrado y despejando la integral de la derecha, llegamos a:

$$\int_S |X|^2 dS \geq \frac{1}{A(S)} \left(\int_S \langle X, N \rangle dS \right)^2.$$

Sustituyendo esta información en la ecuación (3.7) y teniendo en cuenta (3.3), se concluye que:

$$\begin{aligned} (m-1)A(S) &\geq \int_S |\sigma|^2 |X|^2 dS \geq \frac{H^2}{m-1} \int_S |X|^2 dS \geq \frac{H^2}{m-1} \frac{1}{A(S)} \left(\int_S \langle X, N \rangle dS \right)^2 \\ &= \frac{H^2}{m-1} \frac{1}{A(S)} \left(\frac{m-1}{H} A(S) \right)^2 = (m-1)A(S). \end{aligned}$$

De aquí se sigue que todas las estimaciones previas se convierten en igualdades. En particular, $|\sigma|^2 = H^2/(m-1)$ en S , como se quería. \square

4. Apéndice: prueba de la desigualdad de Brunn-Minkowski

En el desarrollo de esta sección extenderemos a dimensión arbitraria el caso $m = 3$ expuesto en la sección 6.5 de [12], véase también la sección 8 de [2].

Recordemos que la suma $A + B$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ es el subconjunto de \mathbb{R}^m dado por:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

El siguiente lema recoge algunos hechos sobre la suma conjuntista que serán útiles a lo largo de esta sección. Su prueba es sencilla y se propone como ejercicio.

LEMA 3.12. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

- (i) *Si A y B son acotados entonces $A + B$ es acotado y, por tanto, $V(A + B) < \infty$. Además, si $V(A) > 0$ o $V(B) > 0$, entonces $V(A + B) > 0$,*
- (ii) *Dados dos intervalos $I = (a, b)$ y $J = (c, d)$ en \mathbb{R} , entonces $I + J = (a + c, b + d)$ y, por tanto, $V(I + J) = V(I) + V(J)$,*
- (iii) *Dadas dos familias $\{I_i\}_{i=1, \dots, m}$ y $\{J_i\}_{i=1, \dots, m}$ de intervalos abiertos y acotados no vacíos de \mathbb{R} , los paralelepípedos de \mathbb{R}^m definidos por $C = \prod_{i=1}^m I_i$ y $D = \prod_{i=1}^m J_i$ cumplen la igualdad:*

$$C + D = \prod_{i=1}^m (I_i + J_i).$$

Ahora recordaremos cómo se definen los semiespacios abiertos determinados por un hiperplano de \mathbb{R}^m y enunciaremos algunas propiedades sencillas relacionadas con los mismos.

DEFINICIÓN 3.13. *Sea P un hiperplano (afín) en \mathbb{R}^m . Fijado un vector normal y unitario η sobre P , sabemos que $P = \{p \in \mathbb{R}^m \mid \langle p, \eta \rangle = \lambda\}$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Se definen los *semiespacios abiertos* asociados a P y η como los conjuntos:*

$$P^+ = \{p \in \mathbb{R}^m \mid \langle p, \eta \rangle > \lambda\}, \quad P^- = \{p \in \mathbb{R}^m \mid \langle p, \eta \rangle < \lambda\}.$$

Geoméricamente, P^+ (resp. P^-) es la componente de $\mathbb{R}^m \setminus P$ hacia la que apunta η (resp. $-\eta$). En particular, los conjuntos P^+ y P^- se intercambian entre sí cuando cambiamos η por $-\eta$.

LEMA 3.14. *Se verifican estas propiedades:*

- (i) *Dados dos paralelepípedos C y D como en el lema 3.12 (iii) y tales que $C \cap D = \emptyset$, existen un hiperplano P paralelo a un hiperplano coordenado $x_i = 0$, y un vector normal unitario η sobre P , tales que $C \subset P^+$ y $D \subset P^-$,*
- (ii) *Si P y Q son dos hiperplanos paralelos, entonces la suma $P + Q$ es un hiperplano paralelo a P y Q . Además, si tomamos sobre P , Q y $P + Q$ el mismo vector normal unitario η , entonces:*

$$P^+ + Q^+ \subseteq (P + Q)^+, \quad P^- + Q^- \subseteq (P + Q)^-.$$

- (iii) *Sea $P_\lambda = \{p \in \mathbb{R}^m \mid \langle p, \eta \rangle = \lambda\}$ una familia de hiperplanos paralelos. Entonces, dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ medible y acotado con $V(A) > 0$, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada por:*

$$f(\lambda) = \frac{V(A_\lambda^+)}{V(A)}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

donde $A_\lambda^+ = A \cap P_\lambda^+$, es continua y sobreyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Probemos (i). Supongamos que $C = \prod_{i=1}^m I_i$ y $D = \prod_{i=1}^m J_i$. Como $C \cap D = \emptyset$ y $C \cap D = \prod_{i=1}^m (I_i \cap J_i)$, existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $I_i \cap J_i = \emptyset$. Si $I_i = (a_i, b_i)$ y $J_i = (c_i, d_i)$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $b_i < \alpha < c_i$ o bien $d_i < \alpha < a_i$. El hiperplano P de ecuación $x_i = \alpha$ es paralelo al hiperplano coordenado $x_i = 0$ y se cumple $C \cap P = D \cap P = \emptyset$. Elijiendo un vector normal unitario adecuado sobre P se consigue también que $C \subset P^+$ y $D \subset P^-$.

La prueba de (ii) es sencilla y queda como ejercicio.

En cuanto a (iii), para demostrar que f es continua, basta comprobar la continuidad de la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(\lambda) = V(A_\lambda^+) = \int_A \chi_\lambda d\mathbb{R}^m,$$

donde χ_λ es la función característica del semiespacio abierto P_λ^+ . Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\{\lambda_k\} \rightarrow \lambda$. Denotamos por χ_k a la función característica de $P_{\lambda_k}^+$. Es sencillo comprobar que $\{\chi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones integrables sobre A que converge puntualmente a χ_λ en $A \setminus P_\lambda$. Aplicando el teorema de la convergencia dominada se sigue que $\{g(\lambda_k)\} \rightarrow g(\lambda)$. Finalmente, la sobreyectividad de f se debe a su continuidad y al teorema de los valores intermedios, ya que $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = 1$ y $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = 0$ (como antes, estos límites proceden del teorema de la convergencia dominada usando que A está acotado). \square

Ya estamos en condiciones de probar lo siguiente:

TEOREMA 3.15 (desigualdad de Brunn-Minkowski). *Si A y B son dos conjuntos abiertos y acotados de \mathbb{R}^m , entonces:*

$$V(A+B)^{1/m} \geq V(A)^{1/m} + V(B)^{1/m}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 3.12 (i) sabemos que $A+B$ es acotado y $0 < V(A+B) < \infty$. Supongamos probado que:

(*) la desigualdad de Brunn-Minkowski se cumple cuando A y B son uniones finitas y disjuntas de paralelepípedos como los del lema 3.12 (iii).

Entonces, la desigualdad es válida en el caso general por un argumento de aproximación. En efecto; dados dos conjuntos A y B abiertos y acotados, por una propiedad de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^m , existen sucesiones $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que:

- (i) $A_k \subseteq A$ y $B_k \subseteq B$, para cada $k \in \mathbb{N}$,
- (ii) A_k y B_k se expresan como uniones finitas y disjuntas de paralelepípedos,
- (iii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} V(A_k) = V(A)$ y $\lim_{k \rightarrow +\infty} V(B_k) = V(B)$.

De este modo:

$$V(A+B)^{1/m} \geq V(A_k+B_k)^{1/m} \geq V(A_k)^{1/m} + V(B_k)^{1/m}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

donde la primera desigualdad se debe a la inclusión $A_k+B_k \subseteq A+B$, y la segunda se sigue de (*). Tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$ se obtiene la desigualdad de Brunn-Minkowski para A y B .

Ahora demostraremos (*). Consideremos conjuntos A y B definidos como:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n_1} C_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^{n_2} D_k,$$

donde C_k y D_k son paralelepípedos como en el lema 3.12 (iii) tales que $C_k \cap C_j = \emptyset$ y $D_k \cap D_j = \emptyset$ si $k \neq j$. Para probar (*) razonaremos por inducción sobre el número total $n_1 + n_2$ de paralelepípedos.

Caso 1. Supongamos que $n_1 + n_2 = 2$, es decir, A y B son paralelepípedos.

Esto significa que existen dos familias $\{I_i\}_{i=1, \dots, m}$ y $\{J_i\}_{i=1, \dots, m}$ de intervalos abiertos acotados no vacíos en \mathbb{R} tales que $A = \prod_{i=1}^m I_i$ y $B = \prod_{i=1}^m J_i$. Por el lema 3.12 (iii) tenemos que $A+B = \prod_{i=1}^m (I_i + J_i)$. De este modo, el lema 3.12 (ii) implica que:

$$V(A+B) = \prod_{i=1}^m V(I_i + J_i) = \prod_{i=1}^m (V(I_i) + V(J_i)) = \prod_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i),$$

donde hemos denotado $\alpha_i = V(I_i)$ y $\beta_i = V(J_i)$ para cada $i = 1, \dots, m$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{V(A)^{1/m} + V(B)^{1/m}}{V(A+B)^{1/m}} &= \left(\frac{V(A)}{V(A+B)} \right)^{1/m} + \left(\frac{V(B)}{V(A+B)} \right)^{1/m} \\ &= \left(\prod_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} \right)^{1/m} + \left(\prod_{i=1}^m \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i} \right)^{1/m} \\ &\leq \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} \right) + \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i} \right) = 1, \end{aligned}$$

donde la última estimación se debe a la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética, según la cuál se cumple que $(\prod_{i=1}^m c_i)^{1/m} \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m c_i$, para cualesquiera números no negativos c_1, \dots, c_m . La desigualdad que hemos conseguido equivale a la de Brunn-Minkowski, lo que prueba este caso.

Caso 2. Supongamos que $n_1 + n_2 > 2$. Admitimos la hipótesis de inducción: la desigualdad de Brunn-Minkowski es válida para cualquier pareja de uniones disjuntas de paralelepípedos tal que la suma total de estos es menor que $n_1 + n_2$.

Como $n_1 + n_2 > 2$ podemos suponer tras intercambiar los papeles de A y B que $n_1 \geq 2$. Como $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, podemos aplicar el lema 3.14 (i) para encontrar un hiperplano P paralelo a un hiperplano coordenado $x_i = 0$, y un vector normal unitario η sobre P , tales que $C_1 \subset P^-$ y $C_2 \subset P^+$. Si denotamos $A^+ = A \cap P^+$ y $A^- = A \cap P^-$ obtenemos uniones disjuntas de paralelepípedos, pues:

$$\begin{aligned} A^+ &= \left(\bigcup_{k=1}^{n_1} C_k \right) \cap P^+ = \bigcup_{k=1}^{n_1} (C_k \cap P^+) = \bigcup_{k=1}^{n_1} C_k^+, \\ A^- &= \left(\bigcup_{k=1}^{n_1} C_k \right) \cap P^- = \bigcup_{k=1}^{n_1} (C_k \cap P^-) = \bigcup_{k=1}^{n_1} C_k^-, \end{aligned}$$

donde cada $C_k^+ = C_k \cap P^+$ y cada $C_k^- = C_k \cap P^-$ es un paralelepípedo si es no vacío. Por ejemplo $C_1^+ = \emptyset$ y $C_2^- = \emptyset$ porque $C_1 \subset P^-$ y $C_2 \subset P^+$. Si eliminamos los conjuntos vacíos en las uniones anteriores, tenemos:

$$A^+ = \bigcup_{k=1}^{n_1^+} C_k^+, \quad A^- = \bigcup_{k=1}^{n_1^-} C_k^-,$$

donde $n_1^+ < n_1$ y $n_1^- < n_1$.

Consideremos la familia de hiperplanos paralelos dada por:

$$P_\lambda = \{p \in \mathbb{R}^m / \langle p, \eta \rangle = \lambda\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como B es medible y acotado con $V(B) > 0$, el lema 3.14 (iii) nos dice que la función de una variable $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada por:

$$f(\lambda) = \frac{V(B_\lambda^+)}{V(B)}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

donde $B_\lambda^+ = B \cap P_\lambda^+$, es sobreyectiva. En particular, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(\lambda) = \frac{V(A^+)}{V(A)}$, es decir:

$$(3.8) \quad \frac{V(A^+)}{V(A)} = \frac{V(B_\lambda^+)}{V(B)}.$$

Utilizando que $V(A) = V(A^+) + V(A^-)$ y que $V(B) = V(B_\lambda^+) + V(B_\lambda^-)$, es fácil deducir que:

$$(3.9) \quad \frac{V(A^-)}{V(A)} = \frac{V(B_\lambda^-)}{V(B)}.$$

En resumen, hemos elegido un hiperplano P_λ tal que la proporción de volumen de B que queda en un semiespacio de P_λ coincide con la proporción de volumen de A que queda en el semiespacio

correspondiente de P . Por otro lado, razonando como se hizo con A , se muestra que los conjuntos B_λ^+ y B_λ^- son uniones finitas y disjuntas de $n_2^+ \leq n_2$ y $n_2^- \leq n_2$ paralelepípedos, respectivamente.

Consideramos las parejas de conjuntos A^+ , B_λ^+ y A^- , B_λ^- . El número total de paralelepípedos en cada pareja es $n_1^+ + n_2^+ < n_1 + n_2$ y $n_1^- + n_2^- < n_1 + n_2$, respectivamente. Esto nos permite aplicar la hipótesis de inducción para conseguir las desigualdades:

$$\begin{aligned} V(A^+ + B_\lambda^+)^{1/m} &\geq V(A^+)^{1/m} + V(B_\lambda^+)^{1/m}, \\ V(A^- + B_\lambda^-)^{1/m} &\geq V(A^-)^{1/m} + V(B_\lambda^-)^{1/m}. \end{aligned}$$

Gracias a la primera desigualdad y a la ecuación (3.8), tenemos:

$$\begin{aligned} V(A^+ + B_\lambda^+) &\geq (V(A^+)^{1/m} + V(B_\lambda^+)^{1/m})^m \\ &= \left(V(A^+)^{1/m} + \left(\frac{V(B)V(A^+)}{V(A)} \right)^{1/m} \right)^m \\ &= \left(V(A^+)^{1/m} \left(1 + \frac{V(B)^{1/m}}{V(A)^{1/m}} \right) \right)^m \\ &= V(A^+) \left(\frac{V(A)^{1/m} + V(B)^{1/m}}{V(A)^{1/m}} \right)^m \\ &= \frac{V(A^+)}{V(A)} (V(A)^{1/m} + V(B)^{1/m})^m. \end{aligned}$$

Del mismo modo, gracias a la segunda desigualdad y a la ecuación (3.9), llegamos a:

$$V(A^- + B_\lambda^-) \geq \frac{V(A^-)}{V(A)} (V(A)^{1/m} + V(B)^{1/m})^m.$$

Sumando las dos desigualdades obtenidas, se sigue que:

$$(3.10) \quad V(A^+ + B_\lambda^+) + V(A^- + B_\lambda^-) \geq (V(A)^{1/m} + V(B)^{1/m})^m.$$

Por otro lado, por el lema 3.14 (ii) sabemos que $P + P_\lambda$ es un hiperplano P_μ , y que se cumplen las inclusiones:

$$P^+ + P_\lambda^+ \subseteq P_\mu^+, \quad P^- + P_\lambda^- \subseteq P_\mu^-.$$

A partir de aquí es sencillo mostrar que:

$$A^+ + B_\lambda^+ \subseteq (A+B) \cap P_\mu^+, \quad A^- + B_\lambda^- \subseteq (A+B) \cap P_\mu^-.$$

En consecuencia:

$$V(A^+ + B_\lambda^+) + V(A^- + B_\lambda^-) \leq V((A+B) \cap P_\mu^+) + V((A+B) \cap P_\mu^-) = V(A+B).$$

Sustituyendo esta información en la ecuación (3.10) concluimos que:

$$V(A+B) \geq (V(A)^{1/m} + V(B)^{1/m})^m,$$

que equivale a la desigualdad de Brunn-Minkowski para los conjuntos A y B . \square

NOTA 3.16. Aunque no lo necesitaremos, se puede probar que se satisface la igualdad en la desigualdad de Brunn-Minkowski si y sólo si A y B son conjuntos convexos que coinciden salvo una homotecia o una traslación en \mathbb{R}^m , véase la sección 8.2 en [2].

Regiones estacionarias en \mathbb{R}^m

En este capítulo caracterizaremos los puntos críticos del problema isoperimétrico en el espacio euclídeo. En el ejemplo 2.10 mostramos que cada unión finita de bolas abiertas con cierres disjuntos e idéntico radio es una región estacionaria en \mathbb{R}^m . El teorema de Alexandrov establece que el recíproco es cierto, es decir, todas las regiones estacionarias en \mathbb{R}^m son de este tipo. Como toda región isoperimétrica es estacionaria, este teorema puede emplearse en una nueva prueba de la unicidad de las bolas abiertas como regiones isoperimétricas en \mathbb{R}^m . También debemos mencionar que el interés del teorema de Alexandrov va más allá de su aplicación al problema isoperimétrico. Por ejemplo, este resultado permite explicar matemáticamente el porqué las pompas de jabón en equilibrio son superficies esféricas.

1. El teorema de Alexandrov

TEOREMA 4.1 (Alexandrov, 1958). *Una región $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ es estacionaria si y solo si Ω es unión finita de bolas abiertas con cierres disjuntos y el mismo radio.*

Por el ejemplo 2.10 sabemos que la implicación de izquierda a derecha es cierta. En las secciones 2 y 3 mostraremos dos pruebas de la otra implicación basadas en técnicas diferentes. Antes de ello vamos a presentar algunas interesantes consecuencias de este resultado.

CONSECUENCIAS. (a). El teorema de Alexandrov proporciona una nueva demostración de la unicidad de las bolas abiertas como regiones isoperimétricas en \mathbb{R}^m . En efecto; si Ω es una región isoperimétrica de \mathbb{R}^m entonces, como también es estacionaria, debe ser la unión de k bolas abiertas con cierres disjuntos y el mismo radio. Desde aquí se comprueba que Ω consta de una única bola: de lo contrario, cálculos explícitos a partir del ejercicio 5 mostrarían que una única bola abierta B con $V(B) = V(\Omega)$ verifica $A(\partial B) < A(\partial \Omega)$, lo que contradice la propiedad isoperimétrica de Ω .

(b). El teorema 3.11 nos dice que las bolas abiertas son las únicas regiones estables en \mathbb{R}^m . Como toda región estable es estacionaria y tiene frontera conexa (por el corolario 2.26), el teorema de Alexandrov conduce a una prueba directa de este resultado de unicidad.

(c). El teorema de Alexandrov justifica matemáticamente por qué las pompas de jabón en equilibrio son superficies esféricas. Cuando una pompa de jabón $S \subset \mathbb{R}^3$ alcanza el estado de equilibrio, la diferencia entre las presión p_1 ejercida sobre S por el aire contenido en la región Ω bordeada por S , y la presión p_2 ejercida por el exterior, es constante sobre S . Por otro lado, la ecuación de Laplace-Young nos dice que $p_1 - p_2$ coincide esencialmente con la curvatura media H de S . De aquí, la región Ω es estacionaria por el teorema 2.7 y S es una esfera por el teorema 4.1.

2. Demostración del teorema mediante integración

En esta sección probaremos el teorema de Alexandrov siguiendo una idea de Montiel y Ros que utiliza geometría integral y se expone cuando $m = 3$ en la sección 6.4 de [12]. Esencialmente, se trata de estimar el volumen de la región estacionaria Ω aplicando un “teorema de cambio de

variable generalizado" a la aplicación $\phi(p, t) = p + tN_p$ con $(p, t) \in S \times \mathbb{R}$ que ya utilizamos en la demostración de la desigualdad isoperimétrica. Necesitaremos algunos resultados previos.

Comenzaremos mostrando un caso particular de la igualdad integral llamada *fórmula del área*, que enunciaremos sin demostración. El lector interesado puede reproducir los argumentos que aparecen en la prueba de esta fórmula cuando $m = 3$, véase el theorem 5.27 en [12].

PROPOSICIÓN 4.2 (fórmula del área). *Sea S una hipersuperficie compacta y sin borde en \mathbb{R}^m . Supongamos que $\phi : S \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación diferenciable y $f : S \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $f \text{ Jac}(\phi)$ es integrable. Entonces, la función $n(\phi, f)$ dada por:*

$$n(\phi, f)(x) = \sum_{(p,t) \in \phi^{-1}(x)} f(p, t)$$

está bien definida ($\phi^{-1}(x)$ es finito o vacío) para casi todo $x \in \mathbb{R}^m$, es integrable en \mathbb{R}^m , y además:

$$\int_{\mathbb{R}^m} n(\phi, f) d\mathbb{R}^m = \int_{S \times (a,b)} f \text{ Jac}(\phi) dS dt.$$

NOTAS 4.3. (a). El hecho de que $n(\phi, f)$ esté bien definida en casi todo \mathbb{R}^m se debe al teorema de Sard. Este teorema implica que, si denotamos

$$\mathcal{N} = \{(p, t) \in S \times (a, b) / \text{Jac}(\phi)(p, t) = 0\},$$

entonces $\phi(\mathcal{N})$ es de medida nula en \mathbb{R}^m . En consecuencia, dado $x \in \mathbb{R}^m \setminus \phi(\mathcal{N})$ con $\phi^{-1}(x) \neq \emptyset$, se cumple que $\text{Jac}(\phi)(p, t) \neq 0$ si $\phi(p, t) = x$ y, por tanto, ϕ es un difeomorfismo local en (p, t) . Esto nos dice que $\phi^{-1}(x)$ es discreto. Como $S \times (a, b)$ tiene cierre compacto se sigue que $\phi^{-1}(x)$ es finito para cada $x \in \mathbb{R}^m \setminus \phi(\mathcal{N})$. En particular, la suma que define a $n(\phi, f)(x)$ es finita.

(b). Cuando $\phi : S \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo entonces $n(\phi, f) = f \circ \phi^{-1}$ y la fórmula del área se deduce de la fórmula del cambio de variable.

El siguiente lema nos dice que todo punto q de una región Ω se encuentra en la recta normal a $S = \partial\Omega$ en un punto p , y a una distancia de S relacionada con las curvaturas principales en p .

LEMA 4.4. *Sea Ω una región en \mathbb{R}^m con frontera $S = \partial\Omega$. Para cada punto $q \in \Omega$, existen un punto $p \in S$ y un valor $t < 0$, tales que:*

$$q = p + tN_p \quad \text{y} \quad 1 + t k_i(p) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m-1,$$

donde N es el normal unitario exterior y $k_1(p) \leq \dots \leq k_{m-1}(p)$ las curvaturas principales de S en p .

DEMOSTRACIÓN. Seguiremos una idea similar a la que aparece al final de la prueba del teorema 3.9. Sea $q \in \Omega$. Definimos la función diferenciable $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(p) = |p - q|^2$. Como S es compacta la función f alcanza su mínimo absoluto en un punto $p \in S$. Como $f \in C^\infty(S)$ entonces f tiene en p un mínimo de segundo orden, es decir, $(df)_p = 0$ y $(d^2f)_p$ es semidefinida positiva. La tesis del lema se deducirá de estos hechos.

La diferencial $(df)_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación lineal:

$$(df)_p(w) = w(f) = 2\langle w, p - q \rangle, \quad \forall w \in T_p S.$$

Como $(df)_p(w) = 0$ para cada $w \in T_p S$, entonces $q - p$ es ortogonal a $T_p S$. Así, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $q - p = tN_p$, de donde $q = p + tN_p$. Nótese que $t \neq 0$; lo contrario implicaría $q = p$, lo que contradice que $q \in \Omega$ y $p \in S$.

Veamos que $t < 0$. Sea $(p, q]$ el segmento de recta determinado por p y q del que se ha suprimido p . Como $|q - p| = \text{dist}(q, S)$ entonces $(p, q] \cap S = \emptyset$. Dado que $(p, q] \cap \Omega \neq \emptyset$, se sigue que $(p, q] \subset \Omega$. Esto conlleva que $t < 0$ por ser N_p el vector normal unitario exterior sobre S . Por último comprobaremos que $1 + t k_i(p) \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, m-1$.

La diferencial segunda $(d^2f)_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ es la forma cuadrática definida por:

$$(d^2f)_p(w) = (f \circ \alpha)''(0),$$

donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ es cualquier curva con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Como $(f \circ \alpha)(t) = |\alpha(t) - q|^2$, derivando obtenemos $(f \circ \alpha)'(t) = 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) - q \rangle$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y, por tanto:

$$(d^2f)_p(w) = 2(\langle \alpha''(0), p - q \rangle + |w|^2) = 2(|w|^2 - t \langle \alpha''(0), N_p \rangle),$$

donde se ha usado que $p - q = -t N_p$. Por otro lado, como $\langle \alpha'(t), N_{\alpha(t)} \rangle = 0$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, derivando en $t = 0$ conseguimos la igualdad:

$$\langle \alpha''(0), N_p \rangle + \langle w, A_p(w) \rangle = 0,$$

es decir $\langle \alpha''(0), N_p \rangle = -\sigma_p(w, w)$. Sustituyendo esto en la expresión de $(d^2f)_p$ concluimos que:

$$(d^2f)_p(w) = 2(|w|^2 + t \sigma_p(w, w)), \quad \forall w \in T_p S.$$

Como $(d^2f)_p(w, w) \geq 0$ para cada $w \in T_p S$, llegamos a:

$$|w|^2 + t \sigma_p(w, w) \geq 0, \quad \forall w \in T_p S.$$

Cuando tomamos w en una base ortonormal $\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ de direcciones principales de S en p deducimos que $1 + t k_i(p) \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, m-1$. Esto finaliza la prueba. \square

NOTA 4.5. La familia de desigualdades $1 + t k_i(p) \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, m-1$ se deduce del caso $i = m-1$, es decir $1 + t k_{m-1}(p) \geq 0$, usando que $k_1(p) \leq \dots \leq k_{m-1}(p)$ y $t < 0$. Por otro lado la desigualdad $1 + t k_{m-1}(p) \geq 0$ equivale a $-1/k_{m-1}(p) \leq t$ si $k_{m-1}(p) > 0$.

Combinando la fórmula del área con el lema anterior podemos deducir la siguiente estimación del volumen de una región en términos de la integral total de $1/H$ sobre su frontera.

PROPOSICIÓN 4.6 (desigualdad de Heintze-Karcher). *Sea Ω una región en \mathbb{R}^m cuya frontera $S = \partial\Omega$ tiene curvatura media $H > 0$ (quizás no constante) respecto del normal exterior N . Entonces:*

$$V(\Omega) \leq \frac{m-1}{m} \int_S \frac{1}{H} dS.$$

Además, se cumple la igualdad si y sólo si Ω es unión finita de bolas abiertas con cierres disjuntos.

DEMOSTRACIÓN. Definimos la aplicación diferenciable $\phi : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por:

$$\phi(p, t) = p + t N_p.$$

Esta aplicación parametriza las rectas normales a la hipersuperficie S . Procediendo como en la prueba del teorema 3.9, se comprueba que:

$$(4.1) \quad \text{Jac}(\phi)(p, t) = \prod_{i=1}^{m-1} |1 + t k_i(p)|, \quad \forall (p, t) \in S \times \mathbb{R},$$

donde $k_1(p) \leq \dots \leq k_{m-1}(p)$ son las curvaturas principales de S en p respecto de N .

Por otro lado, como $k_i \leq k_{m-1}$ para cada $i = 1, \dots, m-1$, entonces $H(p) \leq (m-1)k_{m-1}(p)$ para cada $p \in S$. En consecuencia $k_{m-1} > 0$ en S y:

$$(4.2) \quad \frac{1}{k_{m-1}(p)} \leq \frac{m-1}{H(p)}, \quad \forall p \in S.$$

En particular, como S es compacta y $1/H$ es continua en S , existirá $b > 0$ tal que $1/k_{m-1} < b$ en S .

A continuación consideramos el conjunto:

$$A = \left\{ (p, t) \in S \times \mathbb{R} / \frac{-1}{k_{m-1}(p)} \leq t < 0 \right\}.$$

Es obvio que $A \subseteq S \times (-b, 0)$. Además, dado $(p, t) \in A$, tenemos:

$$(4.3) \quad 1 + t k_i(p) \geq 1 + t k_{m-1}(p) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m-1.$$

Gracias al lema 4.4 se sigue que $\Omega \subseteq \phi(A)$, por lo que $V(\Omega) \leq V(\phi(A))$. Para estimar $V(\phi(A))$ emplearemos la fórmula del área en la proposición 4.2 con la aplicación $\phi : S \times (-b, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ y la función $f = \chi_A : S \times (-b, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, que vale 1 en A , y se anula en el resto de puntos. Es sencillo observar que $n(\phi, f) \geq 1$ en casi todo $\phi(A)$ y $n(\phi, f) = 0$ en casi todo $\mathbb{R}^m \setminus \phi(A)$. Teniendo esto en cuenta, junto con el teorema de Fubini y las ecuaciones (4.1), (4.3) y (4.2), llegamos a:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &\leq V(\phi(A)) \leq \int_{\mathbb{R}^m} n(\phi, f) d\mathbb{R}^m = \int_{S \times (-b, 0)} f \text{Jac}(\phi) dS dt \\ &= \int_S \left(\int_{-1/k_{m-1}(p)}^0 \prod_{i=1}^{m-1} (1 + t k_i(p)) dt \right) dS \\ &\leq \int_S \left(\int_{(1-m)/H(p)}^0 \prod_{i=1}^{m-1} (1 + t k_i(p)) dt \right) dS. \end{aligned}$$

Ahora usamos la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética. Dicha desigualdad para números reales no negativos c_1, \dots, c_{m-1} establece que:

$$\left(\prod_{i=1}^{m-1} c_i \right)^{1/(m-1)} \leq \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} c_i,$$

y se verifica la igualdad si y sólo si $c_1 = \dots = c_{m-1}$. Si tomamos $c_i = 1 + t k_i(p)$, entonces:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &\leq \int_S \left(\int_{(1-m)/H(p)}^0 \left(\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} (1 + t k_i(p)) \right)^{m-1} dt \right) dS \\ &= \int_S \left(\int_{(1-m)/H(p)}^0 \left(1 + \frac{t H(p)}{m-1} \right)^{m-1} dt \right) dS \\ &= \frac{m-1}{m} \int_S \frac{1}{H(p)} dS, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se consigue calculando la integral en la variable t que aparece en la penúltima igualdad. Esto demuestra la estimación deseada.

Si se cumple la igualdad, entonces $1 + t k_i(p) = 1 + t k_j(p)$ para cada punto $p \in S$, cada $t \in ((1-m)/H(p), 0)$ y cada $i, j \in \{1, \dots, m-1\}$. De aquí se sigue que S es totalmente umbilical. Por el teorema 1.7 cada componente conexa de S es una esfera. Como $H > 0$ en S no puede ocurrir que una de estas esferas esté contenida en la bola abierta limitada por otra de estas esferas. En consecuencia, la región Ω es unión finita de bolas abiertas con cierres disjuntos. Por último, el hecho de que una región de este tipo cumpla la igualdad en la desigualdad de Heintze-Karcher se deduce a partir de los cálculos en el ejercicio 5. \square

Ya podemos proporcionar una primera prueba del teorema 4.1.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE ALEXANDROV. Por el teorema 2.7 la curvatura media H de $S = \partial\Omega$ respecto del normal unitario exterior es constante. Consideremos el campo de posición $X_p = p$. Como $\nabla_w X = w$ entonces $\text{div} X = m$ y $\text{div}_S X = m-1$. Escribiendo $X = X^\top + \langle X, N \rangle N$ sobre S y aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos:

$$(m-1)A(S) = \int_S \text{div}_S X^\top + \int_S H \langle X, N \rangle dS = H \int_S \langle X, N \rangle dS = H \int_\Omega \text{div} X = H m V(\Omega).$$

En particular $H > 0$ y podemos despejar $V(\Omega)$ para deducir:

$$V(\Omega) = \frac{m-1}{m} \frac{A(S)}{H} = \frac{m-1}{m} \int_S \frac{1}{H} dS,$$

es decir, se verifica la igualdad en la desigualdad de Heintze-Karcher. Por la proposición 4.6 la región Ω es unión finita de bolas abiertas con cierres disjuntos. El hecho de que las bolas tengan el mismo radio se deduce por ser H constante. \square

3. Método de reflexión de Alexandrov

La demostración original del teorema 4.1 se basó en un argumento que hoy conocemos como *método de reflexión de Alexandrov*. Este método emplea un principio del máximo que poseen ciertas ecuaciones en derivadas parciales para producir simetrías de las hipersuperficies compactas con curvatura media constante. En esta sección describiremos esta idea sin probar los resultados involucrados. Un tratamiento detallado se puede encontrar en la sección II.1.3 de [6], el artículo [4] y las secciones 5 y 9 de [14].

Comenzaremos presentando el principio del máximo en la situación que nos interesa. Sea U un dominio (conjunto abierto y conexo no vacío) en \mathbb{R}^{m-1} y $u \in C^\infty(U)$. Si el laplaciano de u cumple la desigualdad $\Delta u > 0$ en U , entonces u no puede alcanzar su máximo en un punto $x_0 \in U$. De lo contrario, la matriz hessiana $(\nabla^2 u)(x_0)$ sería semidefinida negativa y tendríamos que $(\Delta u)(x_0) = \text{traza}(\nabla^2 u)(x_0) \leq 0$, en contra de la hipótesis. El principio del máximo para el laplaciano generaliza este hecho y afirma que, si $\Delta u \geq 0$ en U , entonces u no puede alcanzar su máximo en U , salvo que u sea constante (véase el theorem 2.2 en [10]). En realidad, este principio es cierto para una familia más extensa de operadores diferenciales que presentaremos ahora.

Dado un dominio diferenciable U en \mathbb{R}^{m-1} con $m \geq 3$, consideraremos un *operador diferencial lineal* (de segundo orden) $L : C^\infty(\bar{U}) \rightarrow C^\infty(\bar{U})$ del tipo:

$$(4.4) \quad L(u)(x) = \langle A(x), (\nabla^2 u)(x) \rangle + \langle b(x), (\nabla u)_x \rangle, \quad \forall x \in \bar{U}, \forall u \in C^\infty(\bar{U}),$$

donde $A(x)$ es una matriz simétrica y $b(x) \in \mathbb{R}^{m-1}$, para cada $x \in \bar{U}$. La notación $\langle A(x), (\nabla^2 u)(x) \rangle$ se refiere al producto escalar de matrices simétricas $\langle Q_1, Q_2 \rangle = \text{traza}(Q_1 Q_2)$, mientras que el término $\langle b(x), (\nabla u)_x \rangle$ es el producto escalar usual en \mathbb{R}^{m-1} . Si denotamos $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq m-1}$ y $b(x) = (b_1(x), \dots, b_{m-1}(x))$, entonces:

$$L(u)(x) = \sum_{i,j=1}^{m-1} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{m-1} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

Diremos que L es *elíptico* si la matriz simétrica $A(x)$ es definida positiva para cada $x \in \bar{U}$.

EJEMPLO 4.7. Cuando $A(x)$ es la matriz identidad I_{m-1} para cada $x \in \bar{U}$, entonces:

$$L(u)(x) = (\Delta u)(x) + \langle b(x), (\nabla u)_x \rangle.$$

Como antes anunciábamos, el principio del máximo para el laplaciano es válido también para operadores lineales elípticos. Este hecho se recoge en el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en el lemma 3.4 y el theorem 3.5 de [10].

TEOREMA 4.8. *Sea U un dominio diferenciable en \mathbb{R}^{m-1} y L un operador lineal elíptico en $C^\infty(\bar{U})$. Supongamos que una función $u \in C^\infty(\bar{U})$ satisface la desigualdad $L(u) \geq 0$ en U .*

(i) (*Principio del máximo*). *Si u alcanza su máximo en U , entonces u es constante,*

(ii) (*Lema de Hopf para el borde*). Si existe $x_0 \in \partial U$ tal que $u(x) < u(x_0)$ para cada $x \in U$, entonces la derivada de u en la dirección del normal unitario exterior ν sobre ∂U satisface:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Para mostrar la aplicación geométrica que nos interesa de este teorema necesitamos calcular la curvatura media del grafo de una función. Si U es un dominio diferenciable en \mathbb{R}^{m-1} y $u \in C^\infty(\bar{U})$, se define el grafo de U como el subconjunto de \mathbb{R}^m dado por:

$$G(u) = \{(x, u(x)) / x \in \bar{U}\}.$$

El conjunto $G(u)$ es una hipersuperficie con borde en \mathbb{R}^m (los puntos del borde se obtienen cuando $x \in \partial U$). Sobre $G(u)$ tenemos definido el campo normal unitario:

$$(4.5) \quad N(x, u(x)) = \frac{(\nabla u, -1)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}(x),$$

que apunta hacia el sentido negativo del eje x_m . No es difícil probar que la curvatura media H de $G(u)$ con respecto a N está dada por:

$$\begin{aligned} H(x, u(x)) &= (\operatorname{div}_{G(u)} N)(x, u(x)) = \operatorname{div}_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) (x) \\ &= \frac{\Delta u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}(x) - \frac{(\nabla u)(\nabla^2 u)(\nabla u)^t}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}(x), \quad \forall x \in \bar{U}, \end{aligned}$$

donde $(\nabla u)_x^t$ es el gradiente de u en x escrito como vector columna. Un desarrollo explícito conduce a la expresión:

$$H(x, u(x)) = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \left(1 + \sum_{j=1, j \neq i}^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - 2 \sum_{i < j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}(x).$$

En particular, cuando $m = 3$, el grafo $G(u)$ es una superficie con borde de \mathbb{R}^3 y además:

$$H(x, u(x)) = \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}(x).$$

Nótese que el *operador curvatura media* $H(u)$ definido cuando $u \in C^\infty(\bar{U})$ no es un operador lineal elíptico, por lo que el principio del máximo del teorema 4.8 no puede aplicarse directamente sobre $H(u)$. En realidad $H(u)$ pertenece a la familia de los operadores *cuasilineales elípticos*, que tienen la misma expresión que en (4.4) con la diferencia de que A y b dependen de $(\nabla u)_x$. La siguiente proposición expresa en el caso concreto de $H(u)$ una relación entre operadores cuasilineales elípticos y operadores lineales elípticos que nos permitirá emplear el teorema 4.8.

PROPOSICIÓN 4.9. Sea U un dominio diferenciable en \mathbb{R}^{m-1} y $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{U})$. Entonces, existe un operador lineal elíptico L en $C^\infty(\bar{U})$, que depende de u_1 y u_2 , de forma que:

$$H(u_1) - H(u_2) = L(u_1 - u_2).$$

Una primera consecuencia interesante de esta proposición es el siguiente resultado de unicidad para la ecuación de curvatura media constante con condición de Dirichlet sobre la frontera.

EJERCICIO 6. Sea U un dominio diferenciable y acotado en \mathbb{R}^{m-1} . Fijados $c \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in C^\infty(\partial U)$, probar que existe a lo sumo una función $u \in C^\infty(\bar{U})$ tal que $H(u) = c$ en U y $u = \varphi$ en ∂U .

A continuación deduciremos un *principio de tangencia* para hipersuperficies en \mathbb{R}^m . Sean S_1 y S_2 hipersuperficies con eventual borde ∂S_i en \mathbb{R}^m . Dado un punto $p \in S_1 \cap S_2$ tal que $p \notin \partial S_1$ y $p \notin \partial S_2$, diremos que S_1 y S_2 son *tangentes* en p si $T_p S_1 = T_p S_2$. Cuando $p \in \partial S_1 \cap \partial S_2$ se requiere también que $T_p(\partial S_1) = T_p(\partial S_2)$ para decir que S_1 y S_2 son tangentes en p . Tras una isometría de \mathbb{R}^m se puede suponer que el espacio afín tangente Π de S_1 y S_2 en p coincide con $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$. Cuando $p \in S_i \setminus \partial S_i$ para cada $i = 1, 2$, usando que toda hipersuperficie se expresa localmente como grafo sobre su espacio afín tangente, encontramos un dominio diferenciable $U \subset \Pi$ con $p \in U$, y funciones $u_i \in C^\infty(\bar{U})$, tales que $u_i(p) = 0$, $(\nabla u_i)_p = 0$ y $G(u_i) \subset S_i$. Cuando $p \in \partial S_1 \cap \partial S_2$ asumiremos que existe un dominio diferenciable $U \subset \Pi$ con $p \in \partial U$, y funciones $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{U})$, tales que $u_i(p) = 0$, $(\nabla u_i)_p = 0$ y $G(u_i) \subset S_i$. Sobre cada grafo $G(u_i)$ consideramos el campo normal unitario N_i definido en (4.5), de modo que $N_1(p) = N_2(p) = (0, -1)$. Por último, cuando $p \in \partial S_1 \cap \partial S_2$, tomaremos campos normales unitarios exteriores ν_i sobre ∂S_i en S_i tales que $\nu_1(p) = \nu_2(p)$.

COROLARIO 4.10 (principio de tangencia). *En las condiciones anteriores, si se cumple que:*

- (i) S_1 está localmente a un lado de S_2 en p , en el sentido de que $u_1 \leq u_2$ en U , y
- (ii) $H(u_1) \geq H(u_2)$ en U ,

entonces $G(u_1) = G(u_2)$. En consecuencia, S_1 y S_2 coinciden localmente en p .

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 4.9 y la hipótesis (ii), existe un operador lineal elíptico L en $C^\infty(\bar{U})$ tal que $L(u_1 - u_2) = H(u_1) - H(u_2) \geq 0$ en U . Por la hipótesis (i) tenemos $u_1 - u_2 \leq 0$ en \bar{U} . Como $(u_1 - u_2)(p) = 0$ entonces $u_1 - u_2$ alcanza en p su máximo. Por el teorema 4.8 se cumple que $u_1 - u_2$ es constante en U , o bien $p \in \partial U$ y $\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial \nu}(p) > 0$. Como $(\nabla u_i)_p = 0$ para cada $i = 1, 2$, la segunda opción no es posible. Dado que $u_1 - u_2$ es constante en U y se anula en p , se concluye que $u_1 = u_2$ en \bar{U} , lo que prueba el corolario. \square

NOTA 4.11. Como caso especial, si S_1 y S_2 comparten un punto de tangencia p , tienen la misma curvatura media constante respecto de normales unitarios que coinciden en p , y una de las hipersuperficies está localmente a un lado de la otra en p , entonces S_1 y S_2 coinciden localmente en p . Esto se aplica en particular cuando S_1 y S_2 son *minimales*, es decir, $H_1 = H_2 = 0$. Como las superficies minimales son los modelos matemáticos de las películas de jabón, el principio de tangencia formaliza la imposibilidad de encontrar dos películas de jabón que sean tangentes en un punto, y de forma que una de ellas quede estrictamente a un lado de la otra fuera de dicho punto.

Ya podemos describir geoméricamente la prueba original de Alexandrov del teorema 4.1.

MÉTODO DE REFLEXIÓN DE ALEXANDROV. Sea Ω una región estacionaria en \mathbb{R}^m . Por el teorema 2.7 sabemos que $S = \partial\Omega$ tiene curvatura media constante H . Mostraremos que cada componente conexa Σ de S es una esfera. Para ello, es suficiente con probar que Σ tiene un hiperplano de simetría en cada dirección del espacio. Esto significa que, para cualquier vector $\eta \in \mathbb{S}^{m-1}$, existe un hiperplano P ortogonal a η tal que Σ es simétrica respecto de P .

Fijada una dirección $\eta \in \mathbb{S}^{m-1}$, consideramos la familia de hiperplanos paralelos:

$$P_\lambda = \{p \in \mathbb{R}^m / \langle p, \eta \rangle = \lambda\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

y los correspondientes *semiespacios cerrados*:

$$P_\lambda^+ = \{p \in \mathbb{R}^m / \langle p, \eta \rangle \geq \lambda\}, \quad P_\lambda^- = \{p \in \mathbb{R}^m / \langle p, \eta \rangle \leq \lambda\}.$$

Cada hiperplano P_λ divide a Σ en dos piezas cerradas, a saber $\Sigma_\lambda^+ = \Sigma \cap P_\lambda^+$ y $\Sigma_\lambda^- = \Sigma \cap P_\lambda^-$. Denotamos $\Sigma_\lambda^* \subset P_\lambda^+$ al reflejo o simetría de Σ_λ^- respecto de P_λ . Como las isometrías de \mathbb{R}^m conservan la curvatura media, la hipersuperficie Σ_λ^* tiene también curvatura media constante H .

Debido a que Σ es compacta, existen valores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 < \lambda_2$ tales que $\Sigma \subset P_{\lambda_1}^+ \cap P_{\lambda_2}^-$ y Σ es tangente a P_{λ_1} y P_{λ_2} . Nótese que, para cada $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ próximo a λ_1 , se verifica que $\Sigma_\lambda^* \subset \overline{D}$, donde D es el dominio acotado encerrado por Σ . Sin embargo, para valores $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ próximos a λ_2 no se cumple que $\Sigma_\lambda^* \subset \overline{D}$. De este modo debe existir, por continuidad, un primer valor $\mu \in (\lambda_1, \lambda_2)$ tal que la propiedad $\Sigma_\lambda^* \subset \overline{D}$ no se cumple. Ahora veremos que Σ es simétrica respecto de P_μ , lo que equivale a probar que las hipersuperficies con borde Σ_μ^* y Σ_μ^+ coinciden.

Por definición de μ tenemos que $\Sigma_\mu^* \cap \Sigma_\mu^+ \neq \emptyset$. En cada punto de $(\Sigma_\mu^* \cap \Sigma_\mu^+) \setminus P_\mu$ ambas hipersuperficies son tangentes, tienen la misma curvatura media constante, y una de ellas está localmente a un lado de la otra. Por el principio de tangencia se sigue que Σ_μ^* y Σ_μ^+ coinciden localmente en dichos puntos. Por otro lado, en cada $p \in (\Sigma_\mu^* \cap \Sigma_\mu^+) \cap P_\mu$ en el que Σ_μ^* y Σ_μ^+ sean tangentes se puede aplicar de nuevo el principio de tangencia para mostrar que Σ_μ^* y Σ_μ^+ coinciden localmente en p . A partir de aquí un argumento topológico de conexión conduce a que $\Sigma_\mu^* = \Sigma_\mu^+$, como se quería. \square

NOTA 4.12. Los resultados de varios experimentos físicos con películas de jabón se formalizan matemáticamente gracias al principio de tangencia. El lector interesado puede consultar por ejemplo las secciones 6 y 7 de [14] y el chapter 6 de [7].

Aplicaciones de la desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^m

Nuestro objetivo en este tema es mostrar algunas aplicaciones de la desigualdad isoperimétrica clásica en el ámbito de la teoría espectral del laplaciano. Otras consecuencias interesantes aunque menos directas de la desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^m son las desigualdades de Sobolev y de Faber-Krahn. El lector interesado puede encontrar más información y referencias [en esta presentación](#).

1. Desigualdades de Poincaré-Wirtinger

En general, una *desigualdad de Poincaré* en una variedad riemanniana M es una cota inferior para la energía $\int_M |\nabla u|^2 dM$ de una función $u \in C_0^\infty(M)$ en términos de la integral $\int_M u^2 dM$. En esta sección ilustraremos la relación que existe entre regiones estables y desigualdades de Poincaré.

Comenzaremos recordando una desigualdad de este tipo para funciones de una variable. De sus múltiples pruebas exponemos la que se basa en series de Fourier trigonométricas, véase [3].

PROPOSICIÓN 5.1 (desigualdad de Wirtinger). *Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable (basta con que sea C^1) tal que $f(-\pi) = f(\pi)$ y $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$. Entonces:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

DEMOSTRACIÓN. En el espacio de Hilbert $L^2(-\pi, \pi)$ de las funciones de cuadrado integrable en el intervalo $(-\pi, \pi)$ consideramos la base ortonormal:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

El desarrollo en serie de Fourier de f asociado a esta base es:

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \right) \quad \text{en } L^2(-\pi, \pi),$$

donde los coeficientes a_k y b_k se calculan como:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0, \quad a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tomando norma al cuadrado en el desarrollo de Fourier de f , se sigue que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Por otro lado, como f es C^1 y $f(-\pi) = f(\pi)$, la serie de Fourier de f' se consigue derivando término a término la serie de Fourier de f . Esto significa que:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k b_k \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} - k a_k \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \right) \text{ en } L^2(-\pi, \pi),$$

y, por tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2).$$

Con todo esto, concluimos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} ((k^2 - 1)a_k^2 + (k^2 - 1)b_k^2) \geq 0,$$

y la demostración ha finalizado. \square

NOTA 5.2. La desigualdad de Wirtinger es equivalente a la desigualdad isoperimétrica plana del corolario 3.2, véase el lemma 1.2 de [13] para los detalles.

La desigualdad de Wirtinger puede expresarse como una desigualdad de Poincaré sobre la circunferencia unidad.

EJERCICIO 7. Probar que si $u \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ con $\int_{\mathbb{S}^1} u d\mathbb{S}^1 = 0$, entonces:

$$\int_{\mathbb{S}^1} |\nabla_{\mathbb{S}^1} u|^2 d\mathbb{S}^1 \geq \int_{\mathbb{S}^1} u^2 d\mathbb{S}^1.$$

Indicación: utilizar que la aplicación $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ es una isometría local 2π -periódica, y que $\phi|_{(-\pi, \pi)} : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ es un difeomorfismo.

En el siguiente resultado mostramos como la estabilidad de las bolas abiertas de \mathbb{R}^m conduce a una desigualdad de Poincaré, que generaliza la desigualdad del ejercicio 7.

TEOREMA 5.3 (desigualdad de Poincaré sobre esferas). Si S es una esfera de radio $r > 0$ en \mathbb{R}^m , entonces:

$$\int_S |\nabla_S u|^2 dS \geq \frac{m-1}{r^2} \int_S u^2 dS,$$

para cada función $u \in C^\infty(S)$ con $\int_S u dS = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea Ω la bola abierta en \mathbb{R}^m tal que $S = \partial\Omega$. Por el teorema 3.11 sabemos que Ω es una región estable en \mathbb{R}^m . Así, la desigualdad del teorema 2.18 nos dice que, para cada función $u \in C^\infty(S)$ con $\int_S u dS = 0$, se cumple:

$$0 \leq Q_S(u, u) = \int_S \{|\nabla_S u|^2 - |\sigma|^2 u^2\} dS = \int_S \left\{ |\nabla_S u|^2 - \frac{m-1}{r^2} u^2 \right\} dS,$$

donde hemos usado que $|\sigma|^2 = (m-1)/r^2$ sobre S . Esto completa la prueba. \square

Observemos ahora que la estimación del teorema 5.3 puede escribirse como:

$$\frac{\int_S |\nabla_S u|^2 dS}{\int_S u^2 dS} \geq \frac{m-1}{r^2},$$

para cada $u \in C^\infty(S)$, $u \neq 0$, con $\int_S u dS = 0$. A su vez, esto equivale a:

$$(5.1) \quad \inf \left\{ \frac{\int_S |\nabla_S u|^2 dS}{\int_S u^2 dS} / u \in C^\infty(S), u \neq 0, \int_S u dS = 0 \right\} \geq \frac{m-1}{r^2}.$$

El interés de la desigualdad (5.1) está motivado por la noción de constante de Poincaré.

DEFINICIONES 5.4. Sea M una variedad riemanniana compacta, conexa y sin borde. Dada una función $u \in C^\infty(M)$ con $u \neq 0$, el cociente de Rayleigh de u es la cantidad:

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int_M |\nabla u|^2 dM}{\int_M u^2 dM}.$$

Se llama *constante de Poincaré* de M al número no negativo:

$$\lambda^*(M) = \inf \left\{ \mathcal{R}(u) / u \in C^\infty(M), u \neq 0, \int_M u dM = 0 \right\}.$$

Esta definición implica la *desigualdad de Poincaré*:

$$\int_M |\nabla u|^2 dM \geq \lambda^*(M) \int_M u^2 dM,$$

que es válida para cada $u \in C^\infty(M)$ con $\int_M u dM = 0$.

En virtud de lo anterior, la ecuación (5.1) nos dice que:

$$(5.2) \quad \lambda^*(S) \geq \frac{m-1}{r^2},$$

donde S es una esfera de radio $r > 0$ en \mathbb{R}^m . Esta estimación para $\lambda^*(S)$ se puede generalizar fácilmente a la frontera de cualquier región estable.

EJERCICIO 8. Sea M una variedad riemanniana con $\text{Ric} \geq 0$ y Ω una región estable en M . Demostrar que:

$$\lambda^*(S) \geq \frac{H^2}{m-1},$$

donde $S = \partial\Omega$ y H es la curvatura media constante de S .

Ahora probaremos que la cota inferior en la ecuación (5.2) es, de hecho, una igualdad.

TEOREMA 5.5 (cálculo de $\lambda^*(S)$ sobre esferas). Si S es una esfera de radio $r > 0$ en \mathbb{R}^m , entonces:

$$\lambda^*(S) = \frac{m-1}{r^2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que tenemos la desigualdad (5.2), para conseguir la igualdad es suficiente con encontrar $u \in C^\infty(S)$, $u \neq 0$, tal que $\int_S u dS = 0$ y:

$$(5.3) \quad \mathcal{R}(u) = \frac{m-1}{r^2}.$$

Sea p_0 el centro de S y $\Omega = B(p_0, r)$. Tomamos el normal unitario exterior $N_p = (p - p_0)/r$, donde $p \in S$. Dado $i = 1, \dots, m$, definimos la función $u_i(p) = \langle p - p_0, e_i \rangle$, donde $p \in S$ y $\{e_1, \dots, e_m\}$ es la base usual en \mathbb{R}^m . Es claro que $u_i \in C^\infty(S)$. Además $u_i \neq 0$ porque $p_0 + r e_i \in S$ y $u_i(p_0 + r e_i) = r$. Si empleamos el teorema de la divergencia con el campo constante $X = e_i$ llegamos a:

$$\int_S u_i dS = r \int_S \langle N, e_i \rangle dS = \int_\Omega \text{div} X d\mathbb{R}^m = 0.$$

Para concluir la prueba veremos que cada u_i produce la igualdad en (5.3).

Por un lado, con cálculos similares a los que nos llevaron a la igualdad (3.5), tenemos:

$$|\nabla_S u_i|^2 = 1 - \langle e_i, N \rangle^2 = 1 - \frac{1}{r^2} u_i^2, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

y, por tanto:

$$(5.4) \quad \int_S |\nabla_S u_i|^2 dS = A(S) - \frac{1}{r^2} \int_S u_i^2 dS, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Por otro lado, si $i, j \in \{1, \dots, m\}$ y tomamos una isometría $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\phi(p_0) = p_0$ y $\vec{\phi}(e_i) = e_j$, la fórmula del cambio de variable aplicada al difeomorfismo $\phi : S \rightarrow S$ implica que:

$$\int_S u_j^2 dS = \int_S u_i^2 dS.$$

A partir de aquí, como $\sum_{i=1}^m u_i(p)^2 = |p - p_0|^2 = r^2$ para cada $p \in S$, entonces:

$$r^2 A(S) = \int_S \left(\sum_{i=1}^m u_i^2 \right) dS = m \int_S u_i^2 dS.$$

Despejando aquí $A(S)$ y sustituyendo su valor en la ecuación (5.4) se deduce la igualdad (5.3) para u_i . Esto completa la prueba. \square

En este punto, es interesante observar como los cálculos del ejercicio 5 conducen a la relación:

$$\lambda^*(S) = \frac{m-1}{m^2} \frac{A(S)^2}{V(\Omega)^2},$$

que involucra a la constante de Poincaré de una esfera S junto con el área de S y el volumen de la bola abierta Ω encerrada por S . Terminaremos esta sección con un resultado de Chavel y Reilly mostrando que esta igualdad caracteriza a las bolas abiertas.

TEOREMA 5.6 (desigualdad de Chavel-Reilly). *Si Ω es una región en \mathbb{R}^m con frontera conexa $S = \partial\Omega$, entonces:*

$$\lambda^*(S) \leq \frac{m-1}{m^2} \frac{A(S)^2}{V(\Omega)^2},$$

y la igualdad se verifica si y sólo si Ω es una bola abierta.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ la base usual de \mathbb{R}^m . Para cada $i = 1, \dots, m$ consideramos la proyección i -ésima $\pi_i(p) = \langle p, e_i \rangle$, la constante $c_i = A(S)^{-1} \int_S \pi_i dS$ y la función $u_i = \pi_i - c_i$ sobre S . Es claro que $u_i \in C^\infty(S)$ con $\int_S u_i dS = 0$. Por definición de $\lambda^*(S)$ tenemos que:

$$\lambda^*(S) \left(\int_S u_i^2 dS \right) \leq \int_S |\nabla_S u_i|^2 dS, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Tomando el punto $p_0 = \sum_{i=1}^m c_i e_i$ y el campo de posición $X_p = p - p_0$, cuando sumamos las desigualdades de arriba y empleamos la ecuación (3.6), llegamos a:

$$(5.5) \quad \lambda^*(S) \int_S |X|^2 dS \leq (m-1)A(S).$$

Por otro lado, gracias al teorema de la divergencia y a la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el espacio $L^2(S)$, obtenemos:

$$m V(\Omega) = \int_\Omega \operatorname{div} X d\mathbb{R}^m = \int_S \langle X, N \rangle dS \leq \int_S |X| \cdot 1 dS \leq \sqrt{A(S)} \left(\int_S |X|^2 dS \right)^{1/2},$$

de donde:

$$\int_S |X|^2 dS \geq \frac{m^2 V(\Omega)^2}{A(S)}.$$

Sustituyendo esta información en la ecuación (5.5) se deduce la estimación deseada. Por la observación previa al teorema las bolas abiertas producen la igualdad. Si Ω es una región que cumple la

igualdad, entonces existe $r > 0$ tal que $|X| = r$ en S , es decir, $S \subseteq \mathbb{S}^{m-1}(p_0, r)$. De la compacidad de S se concluye que $S = \mathbb{S}^{m-1}(p_0, r)$. En consecuencia $\Omega = B(p_0, r)$ y la prueba ha terminado. \square

Es conveniente concluir esta sección conectando los resultados conseguidos con la teoría espectral del laplaciano. El lector interesado en los detalles puede consultar el chapter 1 en [5].

NOTA 5.7 (laplaciano y valores propios). Si M es una variedad riemanniana y $u \in C^\infty(M)$, se llama *laplaciano* de u a la función dada por $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$ (nótese que en \mathbb{R}^m esto coincide con la traza de la matriz hessiana de u). Es sabido que existe una sucesión creciente, divergente y no negativa $\{\lambda_k(M)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que cada ecuación:

$$\Delta u = -\lambda_k(M)u \quad \text{en } M$$

tiene al menos una solución $u_k \neq 0$. Los números $\lambda_k(M)$ se llaman *valores propios* del laplaciano. Las soluciones no nulas de la ecuación $\Delta u = -\lambda_k(M)u$ se llaman *funciones propias* asociadas a $\lambda_k(M)$. Es claro que $\lambda_1(M) = 0$, y que cada función constante (no nula) en M es una función propia asociada a $\lambda_1(M)$. Gracias a un teorema debido a Rayleigh se cumple que:

$$\lambda_2(M) = \lambda^*(M),$$

es decir, *la constante de Poincaré de M coincide con el primer valor propio no trivial del laplaciano*. En consecuencia, el teorema 5.5 nos dice que:

$$\lambda_2(S) = \frac{m-1}{r^2},$$

cuando $S = \mathbb{S}^{m-1}(p_0, r)$. Además, al probar el corolario, mostramos que cada $u_i(p) = \langle p - p_0, e_i \rangle$ es una función propia asociada a $\lambda_2(S)$ (porque realiza el ínfimo en la definición de $\lambda^*(S)$). En general, puede demostrarse que:

$$\lambda_k(\mathbb{S}^{m-1}) = (k-1)(k+m-3), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

y que las funciones propias asociadas a $\lambda_k(\mathbb{S}^{m-1})$ se obtienen restringiendo a \mathbb{S}^{m-1} los polinomios homogéneos armónicos de grado k en \mathbb{R}^m , véase el chapter 2 en [5].

2. Curvas minimizantes en el grupo de Heisenberg

En esta sección mostraremos una curiosa aplicación de la desigualdad isoperimétrica plana al cálculo de las curvas con menor longitud que unen dos puntos dados en una variedad subriemanniana. Necesitamos introducir algo de notación y terminología.

Existen problemas físicos y matemáticos que se modelan a partir de un espacio de posiciones donde el movimiento está restringido a una familia específica de direcciones que cambia con la posición. Estas consideraciones conducen a campos de estudio como la *geometría sub-riemanniana* y la *mecánica no holonómica*. El lector interesado puede consultar el libro de Montgomery [11].

En general, una *variedad sub-riemanniana* es una variedad diferenciable conexa M junto con una métrica euclídea que, en cada punto $p \in M$, está solamente definida sobre un subespacio distinguido $\mathcal{H}_p \subset T_p M$ cuyos vectores se llaman *direcciones horizontales*. Por causa de esta restricción en la métrica solo podemos medir longitudes de *curvas horizontales*, que son aquellas cuya velocidad en cada instante es una dirección horizontal.

Una primera dificultad que surge en estos espacios es la posible falta de conectividad entre sus puntos. Esto significa que, dados $p, q \in M$, podría no existir ninguna curva horizontal que los una.

EJEMPLO 5.8. Si en \mathbb{R}^3 declaramos como direcciones horizontales en cada punto los vectores del plano coordenado $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$, entonces no existe ninguna curva horizontal que conecte dos puntos distintos sobre una misma recta vertical.

Existen condiciones sobre los subespacios horizontales para garantizar la conectividad de dos puntos cualesquiera. En tales casos es natural plantearse la siguiente cuestión:

¿cuáles son las curvas horizontales de longitud mínima que unen dos puntos prefijados en M ?

Debido a la ligadura impuesta por la horizontalidad este problema es más complejo que el estudio de las geodésicas en una variedad riemanniana. Analizaremos la cuestión en el ejemplo más importante de variedad sub-riemanniana tridimensional: el *grupo de Heisenberg*.

El grupo de Heisenberg \mathbb{H}^1 es un grupo de Lie, en el que la estructura diferenciable es la usual de \mathbb{R}^3 , y la operación viene dada por:

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + x'y - xy').$$

No es difícil probar que los siguientes campos en \mathbb{H}^1 son campos invariantes por la izquierda:

$$X_p = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y_p = \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z_p = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \forall p = (x, y, z) \in \mathbb{H}^1.$$

Dado un punto $p \in \mathbb{H}^1$ definimos el *plano horizontal* \mathcal{H}_p como el generado por $\{X_p, Y_p\}$. La métrica sub-riemanniana en p es la única métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathcal{H}_p tal que $\{X_p, Y_p\}$ es una base ortonormal. De este modo, si $w = aX_p + bY_p$ y $w' = a'X_p + b'Y_p$ son dos vectores en \mathcal{H}_p , entonces:

$$\langle w, w' \rangle = a a' + b b'.$$

Se comprueba enseguida que el corchete de Lie $[X, Y]$ es igual a $-2Z$. Gracias a un teorema de Chow esto implica la conectividad horizontal en \mathbb{H}^1 : dados dos puntos $p, q \in \mathbb{H}^1$ existe una curva horizontal parametrizada por el arco $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{H}^1$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(L) = q$. La horizontalidad de γ significa que su vector velocidad $\dot{\gamma}$ verifica $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{H}_{\gamma(t)}$ para cada $t \in [0, L]$. El hecho de que γ esté parametrizada por el arco nos dice que $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ para cada $t \in [0, L]$. En particular, la longitud de γ es $\int_0^L |\dot{\gamma}(t)| dt = L$.

En relación con las curvas minimizantes en \mathbb{H}^1 nuestro objetivo es mostrar como la desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^2 conduce al siguiente resultado:

TEOREMA 5.9. *Sea $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{H}^1$ una curva horizontal y parametrizada por el arco tal que $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ y $\gamma(L) = (0, 0, T)$ con $T > 0$. Supongamos que γ minimiza la longitud entre todas las curvas en sus mismas condiciones. Entonces, la proyección de γ sobre el plano euclídeo \mathbb{R}^2 es una circunferencia y γ es un arco de hélice circular.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos cualquier curva horizontal $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{H}^1$ que esté parametrizada por el arco y tenga por extremos los puntos $(0, 0, 0)$ y $(0, 0, T)$. Podemos escribir:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \forall t \in [0, L],$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son las coordenadas euclídeas de $\gamma(t)$. Nótese que:

$$\dot{\gamma}(t) = x'(t)X_{\gamma(t)} + y'(t)Y_{\gamma(t)} + (z'(t) - x'(t)y(t) + x(t)y'(t))Z_{\gamma(t)}, \quad \forall t \in [0, L].$$

Por tanto, el hecho de que γ sea horizontal significa que:

$$(5.6) \quad z'(t) = x'(t)y(t) - x(t)y'(t), \quad \forall t \in [0, L].$$

Integrando esta igualdad y usando que $z(0) = 0$ y $z(L) = T$, llegamos a:

$$(5.7) \quad T = \int_0^L (x'(t)y(t) - x(t)y'(t)) dt.$$

Además, como γ está parametrizada por el arco, entonces:

$$(5.8) \quad x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1, \quad \forall t \in [0, L].$$

Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ la proyección de γ sobre el plano euclídeo \mathbb{R}^2 . Nótese que α es cerrada porque $\alpha(0) = \alpha(L) = (0, 0)$. La ecuación (5.8) nos dice que α está parametrizada por el arco, así que su longitud es L . Sea Ω la región plana tal que $\partial\Omega = C = \alpha([0, L])$. Denotamos por A el área encerrada por Ω . Cambiando el sentido de parametrización de γ si fuese preciso, podemos suponer que el normal unitario exterior N sobre C se obtiene girando 90 grados la velocidad de α en sentido antihorario. Esto equivale a que $N_{\alpha(t)} = (-y'(t), x'(t))$ para cada $t \in [0, L]$. Aplicando sobre Ω el teorema de la divergencia con el campo $U_q = q$ y aplicando la igualdad (5.7), tenemos:

$$2A = \int_{\Omega} \operatorname{div} U \, d\mathbb{R}^2 = \int_C \langle U, N \rangle \, dC = \int_0^L ((x'(t)y(t) - x(t)y'(t))) \, dt = T.$$

En consecuencia, si γ minimiza la longitud entre todas las curvas horizontales con sus mismos extremos, entonces la región Ω tiene menor perímetro entre todas las regiones planas que encierran área $T/2$. Esto significa que Ω es una región isoperimétrica en \mathbb{R}^2 y, por el corolario 3.5, debe coincidir con un disco abierto. Por tanto, C es una circunferencia de radio $r = \sqrt{T/2\pi}$ que contiene al origen. Tras un giro en \mathbb{R}^2 alrededor de $(0, 0)$ podemos suponer que:

$$\alpha(t) = -(r, 0) + r \left(\cos \frac{t}{r}, -\operatorname{sen} \frac{t}{r} \right).$$

En este caso, la ecuación (5.6) nos dice que:

$$z'(t) = r - r \cos \frac{t}{r}, \quad \forall t \in [0, L],$$

y, por tanto:

$$z(t) = r t - r^2 \operatorname{sen} \frac{t}{r}, \quad \forall t \in [0, L].$$

De aquí se concluye que la imagen de la curva $\gamma(t) = (\alpha(t), z(t))$ es una hélice circular. \square

Referencias

- [1] E. Acerbi, N Fusco y M. Morini, *Minimality via second variation for a nonlocal isoperimetric problem*, Commun. Math. Phys. **322** (2013), 515–557.
- [2] Y. D. Burago y V. A. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Grund. Math. Wisen., vol. 285, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [3] A. Cañada, *Series de Fourier y aplicaciones*, Editorial Pirámide, Madrid, 2002.
- [4] A. Chang, *Aleksandrov's theorem: closed surfaces with constant mean curvature*, June 2015.
- [5] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1984.
- [6] I. Chavel, *Isoperimetric inequalities*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 145, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [7] U. Dierkes, *Minimal surfaces I*, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, vol. 296, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [8] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1992.
- [9] A. El Soufi y S. Ilias, *Majoration de la seconde valeur propre d'un operateur de Schrödinger sur une variété compacte et applications*, J. Funct. Anal. **103** (1992), 294-316.
- [10] D. Gilbarg y N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [11] R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [12] S. Montiel y A. Ros, *Curves and surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 69, American Mathematical Society, 2009.
- [13] R. Osserman, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Mac. Soc. **84** (1978), 1182-1238.
- [14] J. Pérez, *Superficies mínimas y de curvatura media constante en \mathbb{R}^3* , notas de un curso de doctorado desarrollado por F. Martín y J. Pérez, disponible [en este enlace](#).
- [15] M. Ritoré, *Fórmulas de variación*, Apuntes de problemas variacionales geométricos, curso 2019-20.
- [16] G. Talenti, *The standard isoperimetric theorem*, Handbook of convex geometry, vol. A., Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1993, 73-123.