

La capilaridad como inspiración en física: una revisión histórica

Rodríguez Valverde, Miguel Ángel y Tirado Miranda, María

Departamento de Física Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada. 18071

Granada- marodri@ugr.es



El análisis retrospectivo de la Física puede resultar un recurso incentivador para su enseñanza y aprendizaje. Y ese podría ser el caso de la comprensión de la estructura mesoscópica de la materia y sus interacciones (atractiva/repulsiva, alcance, intensidad), tomando como ejemplo paradigmático el ascenso capilar.

Abstract

Water, and liquids in general, has been deeply inspiring for philosophers due to their magnificence, of intangible nature, crystalline and elusive but also persevering. Natural philosophers such as Newton, Hooke, Young, Gauss, Rayleigh, Einstein and Bohr, and others, were likewise attracted by the puzzling phenomena of Capillarity. This interest by interfases would resound in their careers. Why so many physics celebrities focused on *capillary action*? Because cohesion and adhesion occur at frontiers, they reveal the hidden structure of matter but are daily, often misunderstanding and always stimulating. Nuclear Physics and Astrophysics were in part established by appealing to the clustering trend of short-range intermolecular forces in matter. With the permission of Newton, understanding the secrets of a water drop does allow knowing ocean.

Resumen

El agua, y por extensión los líquidos, siempre ha inspirado en los filósofos profundos pensamientos existenciales, por su belleza, de naturaleza intangible, cristalina y escurridiza a la vez que persistente, capaz de horadar la roca con su constante goteo. A la par, los intrigantes fenómenos de la Capilaridad fueron tratados científicamente, en algún momento de sus vidas, por ilustres como da Vinci, Newton, Hooke, Young, Gauss, Rayleigh, Einstein y Bohr, entre otros. Su interés por los fenómenos de interfaces resonaría en sus carreras. ¿Y por qué tanta celebridad de la Física se centró en la acción capilar? Porque la cohesión y adhesión ocurren en fronteras, revelan la estructura oculta de la materia, a la vez que se manifiestan cercanos, resultando con frecuencia contraintuitivos pero siempre fuente de inspiración. La Física Nuclear y la Astrofísica durante su desarrollo recurrieron a la fenomenología de las fuerzas intermoleculares cohesivas de la materia. Con el permiso de Newton, conocer los misterios de una gota de agua sí permite conocer al menos en parte el océano.

Introducción

Según la categorización de *Physics Subject Headings* (PhySH) de la Sociedad de Física Americana, la *Capilaridad* es un concepto vinculado a materia condensada, física de materiales, dinámica de fluidos, materia blanda y polímeros. Sin embargo, se enmarca dentro del concepto Mojado, y éste a su vez, en el de Fenómenos de gotas.

Los efectos cohesivos en una gota actúan como la autogravitación, que mantiene unido un cuerpo celeste, o las fuerzas nucleares fuertes. Una gota “centrifugada” o pulsante, emula el comportamiento de un cuerpo celeste (con momento angular intrínseco) o de un núcleo excitado. Un recurso didáctico muy recurrido para ilustrar la

forma de la función de onda electrónica en el átomo de hidrógeno son las oscilaciones de una pompa pulsante donde, a través de los armónicos esféricos, se puede describir su forma instantánea. En 2005 se publicó la exótica fenomenología encontrada al someter a vibración un baño sobre el que descansan gotas (no volátiles), las cuales comienzan a botar sin colapsar produciendo a la vez una onda finita [1]. Esta fenomenología resultó análoga a muchos de los fenómenos de la Física de asociación partícula-onda, como los cuánticos [2].

Primeros estudios sobre la acción capilar

La estructura de la materia y las interacciones intermoleculares que la mantienen unida fue uno de los problemas de la Física a resolver hasta finales del siglo XIX. La discusión de fondo se centraba en si las fuerzas de corto alcance podían justificar efectos de mayor escala (macroscópicos). El fenómeno más cercano donde se revela la cohesión es el ascenso capilar y en general, la Capilaridad. De ahí que el problema de la *acción capilar* fuera uno de los retos a los que se enfrentaron, en algún momento de su vida, muchos *filósofos naturales* célebres, y no tan célebres. Si bien actualmente el ascenso capilar se comprende, su descripción exacta sigue siendo motivo de estudio.

Cuando un menisco acotado tiene un espesor (distancia en la que está constreñido o delimitado) menor que la longitud capilar (2,71mm - agua), la forma del menisco compatible con las condiciones de contorno impuestas por la adhesión del sólido resulta de mayor compacidad (esférica/cilíndrica), o lo que es lo mismo, de mayor presión capilar, correspondiendo al caso ingrávido. Esto demuestra que la cohesión se manifiesta con especial notoriedad a distancias “pequeñas”.

Leonardo da Vinci (1452-1519), en su fascinación por el agua, describe en la disquisición 43 “Della sfericità della gocciola” del compendio apógrafo “Trattato del Moto e Misura dell’acqua” (Figura 1) el efecto tensor de la “gravedad” que sufren las

partes de una gota libre hacia su centro resultando en su esfericidad [3]. Da Vinci también se percató del ascenso capilar de aguas subterráneas en terrenos arenosos.

Galileo Galilei (1564-1642) en su “Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono”, 1612, Firenze, Cosimo Giunti, escrudiñando el origen de la flotabilidad del hielo en el agua (¿densidad o forma?), posó pequeños trozos de madera de ébano sobre agua y observó que, los de forma laminada flotaban y los de forma esférica (“palla”) se hundían. Galileo concluye a favor de la velocidad residual de los trozos o del aire atrapado en el ébano y afirma: “della nulla resistenza del' acqua all'esser divisa”. Negaba con ello, erradamente, la existencia de la tensión superficial. En 1638 publicó “Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze” [4]. En esta obra, Galileo discutió sobre la fuerte unión, capaz de compensar el peso, entre láminas “exquisitamente” pulidas de vidrio, metal o mármol, colocadas una debajo de otra horizontalmente. La ausencia de aire entre láminas y la probable humedad de las mismas, explicarían el efecto que ahora sabemos que se debe a la favorecida adhesión agua-sólido hidrófilo y la cohesión del agua.

Robert Boyle (1627-1691) pasó parte de su formación entre Francia e Italia, de hecho, residía en Florencia cuando Galileo murió, impactándole este hecho en su juventud. Probablemente en esa etapa conocería experimentos de colegas europeos sobre ascenso capilar, lo que llevó a preguntarse por su naturaleza especialmente cuando trabajaba con barómetros de mercurio. Boyle concluyó que el vacío no afectaba al ascenso capilar, por tanto, su origen no estaba en el aire. En 1676, describió un experimento para demostrar la forma esférica de gotas en medios líquidos inmiscibles. Fue el primer experimento de gotas “ingrávidas” sin anular la gravedad.

El 10 abril 1661, Robert Hooke (1635-1703), considerado con 26 años como un investigador autónomo, inauguró los debates de la recién creada *Royal Society* con el

trabajo “An Attempt for the Explication of the Phænomena Observable in an Experiment Published by the Honourable Robert Boyle, Esq., in the XXXV Experiment of his Epistological Discourse Touching the Aire in Confirmation of a Former Conjecture Made by R.H.” [5] donde argumentaba sobre experiencias con tubos capilares (Figura 2) de su mentor en Oxford, Robert Boyle [6]. Fue su primer trabajo, donde trataba desde fenómenos capilares hasta cuestiones generales de la Hidrostática, el ascenso de la savia en árboles y plantas, el papel de las aguas subterráneas como parte de la circulación global del agua... Él mismo reconoció que era especulativo e inconcluso. En 1662, dadas sus destrezas experimentales, Hooke fue nombrado “Curator (conservador) of experiments” de la *Royal Society*. El manuscrito se incluyó, con pequeños cambios, en “Micrographia” (1667) (pp. 12–22, "Observ. IV. Of small Glass Canes.").

Isaac Newton (1642 -1726), refiriéndose a las moléculas o átomos de la materia como “pequeñas partículas de los cuerpos”, fue el primero en esbozar la forma matemática de las leyes de atracción que explicaban la cohesión de la materia, sin entrar en su naturaleza. Lo hizo en su disquisición nº 31 (p. 350) de su “Opticks: or, A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light” de 1704 [7]. Utilizó los resultados de ascenso capilar realizados en vacío y aire con tubos y placas de vidrio. Curiosamente, estos experimentos los realizó quien tomara el relevo como “Curator” de la *Royal Society* a Hooke, Francis Hauksbee (1660–1713). Inspirándose en las ya conocidas leyes de la atracción “a distancia” gravitatoria, magnética y eléctrica, cuyo radio de acción es ponderable, Newton propuso una ley de interacción igualmente a distancia, pero mucho más intensa, que actúa a distancias por entonces inaccesibles experimentalmente. Con sus experimentos de interferometría descritos en el mismo libro, llegó a medir el espesor de una capa de agua entre dos placas de vidrio de 10 nm.

La cohesión del agua a tan cortas distancias impedía separar las placas, sobre las que el agua estaba enérgicamente adherida.

Thomas Young (1773-1829) hizo parte de su doctorado en la Universidad de Gotinga (1795-1797), del reino de Hanover hermanado con Gran Bretaña e Irlanda. Allí, probablemente Young conocería los trabajos de J.A. von Segner (1704-1777), también médico, que ocupaba la cátedra de matemáticas. Segner en 1751 introdujo la idea primigenia de *tensión superficial* (tenacitas) de líquidos, originada por las propias fuerzas atractivas de la cohesión. Segner fue el primero en establecer teóricamente que una gota ingravida debe adoptar la forma esférica. Young presenta el 20 de diciembre de 1804 ante la *Royal Society* su "An Essay on the Cohesion of Fluids" [8], donde de manera descriptiva, por su aversión al Cálculo, enunciaba las dos ecuaciones fundamentales de la Capilaridad y Adhesión:

1)-“... la fluxión del área [curvatura media] resulta proporcional al coseno del ángulo formado por la curva [menisco] con la horizontal e inversamente proporcional al radio [semi-distancia entre sólidos]”, presumiblemente aplicado al caso del menisco formado entre dos placas verticales.

2)-“...para cada combinación de un sólido y un fluido, hay un ángulo de contacto apropiado entre las superficies del fluido, expuesto al aire, y del sólido.”

En este trabajo Young planteaba, por primera vez, que si existe una atracción a través de la interfase, se necesita de una repulsión para que la materia no colapse. En 1807, Young publicó sus disertaciones de 1802 en la *Royal Institution* de Londres, donde fue *Professor of Natural Philosophy* hasta 1803, cuando renunció voluntariamente por ejercer la práctica de la medicina. Entre las disertaciones se encontraba la interferencia de luz a través de una doble rendija, considerada como uno de los experimentos más bellos de la Física. En 1815, Young fue capaz de estimar razonadamente el alcance de

las interacciones cohesivas (~distancia entre partículas) con el valor de 0,1 nm aunque lo firmara con un pseudónimo [9].

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), más conocido en Física por sus aportaciones a las matemáticas, publicó en 1805 el tomo IV de su magnífico “Traité de mécanique céleste” [10]. En el Apéndice “Sur l’Action Capillaire” del libro décimo de esta obra demostraba matemáticamente, haciendo uso del principio de presión capilar, muchos de los resultados ya conocidos hasta la fecha, entre los que estaba la ley descrita por Young sobre la forma de meniscos (Figura 3). Laplace cita a Young sólo al final de su texto y lo hace para justificar el valor didáctico y más potente de su demostración. En su trabajo, a diferencia de Young, Laplace apenas trata la adhesión y no menciona fuerzas repulsivas explícitamente (aunque están incluidas en la presión capilar). Laplace también cita, entre otros, a Alexis Claude Clairaut (1713-1765), quien fuera el primero en considerar la atracción entre partes del líquido (cohesión) para explicar la acción capilar. Sin embargo, Clairaut no reconoció el corto e imponderable alcance de la atracción cohesiva.

Después de Young y Laplace

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), formado en la Universidad de Gotinga y que ocupó la cátedra de matemáticas de Segner, dedujo de manera refinada y conjunta las ecuaciones de Young y Laplace utilizando el principio de los trabajos virtuales [11]. Su trabajo fue la primera solución a un problema variacional con integrales dobles y condiciones de contorno.

Joseph-Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883), inspirado en Boyle y Segner, con el objeto de confirmar la forma matemática de gotas/filamentos en equilibrio, realizó experimentos anulando la diferencia de densidad a través de la interfase [12]. Plateau reprodujo superficies minimales (de curvatura media nula) que le servirían para

desarrollar su teoría de espumas y, que hoy se considera un problema paradigmático del cálculo variacional. Plateau también detectó la inestabilidad capilar que sufren los filamentos delgados sometidos a un campo de fuerzas extensor llegando a dividirse en gotas (Figura 4), fundamento de la dispersión fina o emulsionado.

El premio Nobel de Física de 1904, Lord Rayleigh (1842–1919) publicó en 1878 “On the instability of jets” [13] donde estableció la ley matemática, en primera aproximación, de la inestabilidad observada por Plateau (Figura 5). Rayleigh continuó con varios trabajos originales y de revisión. Célebres coetáneos a Rayleigh como Lord Kelvin (1824-1907) y James Clerk Maxwell (1831-1879) también hicieron incursiones en la Capilaridad. Maxwell, en su búsqueda constante de analogías, se percató de que la forma del perfil de los meniscos capilares respondía matemáticamente a la misma familia que la *curva elástica* según ésta se deformara.

Otros contribuyeron significativamente al desarrollo de la naturaleza difusa de las interfases como Siméon Denis Poisson (1781-1840), que fue el primero en suponer, a diferencia de Laplace, que la densidad en la interfase era menor que en el seno del líquido. Josiah Willard Gibbs (1839-1903) diseñó el formalismo de la Termodinámica de fronteras tal y como se conoce en la actualidad introduciendo el concepto de *interfaz* (“dividing surface”), las magnitudes de exceso y la energía superficial/interfacial. Johannes van der Waals (1837-1923), premio Nobel de Física 1910 por la ecuación de estado para gases y líquidos, publicó en 1893 su “Thermodynamische theorie der capillariteit in de onderstelling van continue dichtheidsverandering” con la que explicaba la estructura fina de la interfase, entendida como una transición continua de densidad (Figura 6) cuyo espesor está vinculado a la temperatura [14].

Física del siglo XX

Albert Einstein (1879-1955) publicó a los 22 años "Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen" [15]. En este trabajo (Figura 7), de título un tanto vago (*Conclusiones derivadas de los fenómenos de Capilaridad*), Einstein trató de justificar valores experimentales de tensión superficial de la literatura con su teoría de Capilaridad basada en fuerzas moleculares a pares donde también supuso, erróneamente, que la tensión superficial variaba linealmente con la temperatura. En su correspondencia de 1907, Einstein reconoció que su primer artículo científico fue poco relevante. La teoría de van der Waals prevaleció. Los años 1900 a 1902 correspondieron a lo que Einstein llamó la "depresión intelectual" porque tras diplomarse en el *Instituto Politécnico Federal* de Suiza (actual ETH) no consiguió puesto como docente y sufrió, ya como empleado en la oficina de patentes de Berna, dos rechazos de tesis doctoral en la Universidad de Zúrich. Uno de sus intentos trataba sobre el artículo de Capilaridad y el segundo sobre la teoría de la Relatividad. Einstein se interesó por la Capilaridad tras cursar clases de matemáticas con Hermann Minkowski (1864-1909), mientras éste escribía su capítulo enciclopédico Kapillarität [16]. En 1921, Einstein recibió el premio Nobel de Física por sus servicios a la Física Teórica y en especial por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico.

Niels Bohr (1885-1962) con 19 años ganó la medalla de oro del premio (edición 1905) convocado por la *Royal Danish Academy of Sciences* con una teoría no lineal de oscilaciones superficiales para la medida de tensión superficial, basada en la teoría lineal de Rayleigh e ilustrada con experimentos propios realizados en el laboratorio de fisiología de su padre médico. En 1909 Bohr publicó el trabajo (Figura 8a) como "Determination of the surface tension of water by the method of jet vibration" [17] y lo amplió en 1910 [18]. En 1922 Bohr es galardonado con el premio Nobel de Física por sus investigaciones del átomo y sus radiaciones. En 1936 Bohr y John Archibald

Wheeler explican la fisión nuclear (Figura 8b) a partir del modelo nuclear de gota líquida [19]. Una perturbación externa adecuada puede producir la escisión parcial del núcleo. Antes, en 1930, Gueórgui Gámov (1904-1968) fue quien estableció la similitud entre fuerzas nucleares y fuerzas cohesivas en una gota con su trabajo “Mass Defect Curve and Nuclear Constitution” [20]. En 2016 el tratamiento no lineal de Bohr de su artículo de 1909 fue validado experimentalmente [21].

Subrahmanyam Chandrasekhar (1910-1995), tratando de dar explicación a la formación de cúmulos galácticos con momento angular intrínseco, publicó en 1965 “The stability of a rotating liquid drop” [22], una solución analítica para la forma de una gota axisimétrica rotando sobre sí misma. En 1983 recibió el premio Nobel de Física por sus estudios teóricos de los procesos físicos vinculados a la estructura y evolución de estrellas.

Finalmente, Pierre Gilles-De Gennes (1932-2007), pionero de la materia blanda y de los fundamentos de los líquidos nemáticos, a partir de 1984 se interesó en problemas interfaciales como la dinámica de líneas de tres fases y la fisico-química de la adhesión [23]. En 1991 recibió el premio Nobel de Física por su aplicación de métodos de estudio de fenómenos de orden en sistemas simples a formas más complejas de la materia, en particular para cristales líquidos y polímeros.

Conclusión

Esta revisión histórica ha mostrado cómo los intrigantes fenómenos de la Capilaridad fueron uno de los iniciáticos problemas a tratar, y en otros casos de la madurez, por muchos de los nombres que han forjado la Física hasta nuestros días. Fenómenos localizados en las incómodas fronteras que revelan la esquiva estructura de la materia, a la vez que se manifiestan cercanos, aunque armoniosos en su universalidad

fenomenológica desde lo diminuto hasta lo inmenso, resultando frecuentemente contraintuitivos pero siempre sirven de fuente de inspiración.

Referencias

- (1) Y. Couder, S. Protiere, E. Fort y A. Boudaoud. Walking and orbiting droplets, Nature 437, 208 (2005)
- (2) T. Bohr. Quantum physics dropwise, Nature Physics, 14(3), 209-210, 2018
- (3) L. da Vinci. Trattato del Moto e Misura dell'acqua, Libro I, Cap. XLIII, Francesco Cardinali, Bologna, 1826- -Codice Barberini Latin 4332 –Hermanos Arconati 1643
- (4) G. Galilei. “Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze”, Leiden, 1638.
- (5) R. Hooke. An Attempt for the Explication of the Phænomena Observable in an Experiment Published by the Honourable Robert Boyle, Esq., in the XXXV Experiment of his Epistolical Discourse Touching the Aire in Confirmation of a Former Conjecture Made by R.H., Printed by J.H. for Sam. Thomson at the Bishops Head in St. Pauls Church-yard, 1661.
- (6) R. Boyle. New experiments physico-mechanical, touching the spring of the air and its effects: (made for the most part, in a new pneumatical engine). / Written by way of letter to Charles, Lord Vicount of Dungarvan ... by the Honorable Robert Boyle. Oxford: Printed by H. Hall, printer to the University for T. Robinson, 1660.
- (7) I. Newton. Opticks: or, A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light, London, William Innys at the West-End of St. Paul's, 1704.
- (8) T. Young. An Essay on the Cohesion of Fluids, Philos. Trans. R. Soc. Lond., 95(3), 65–87, 1805.

- (9) F.O. [i.e. T. Young]. art. 'Cohesion', in Supplement to the fourth, fifth, and sixth editions of Encyclopaedia Britannica, 6 vols., London, 1815–1824, v. 3, pp. 213.
- (10) P. S. Laplace. *Traité de mécanique céleste*, Vol. 4, Courcier, Paris, 1805.
- (11) C.F. Gauss. *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii*, *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*. *Commentat. Cl. math.* 7. S.39-88, 1832.
- (12) J.A.F. Plateau. *Statique Expérimentale et Théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaires*, Tome Premier (Gand et Leipzig: F. Clemm, 1873); Tome Second (Gand et Leipzig: F. Clemm, 1873), Paris, Gauthier-Villars 1873.
- (13) Lord (J.W. Strutt) Rayleigh. On the instability of jets, *Proc. Lon. Math. Soc.* 10, 4–13 (1878).
- (14) J. D. van der Waals. *Thermodynamische theorie der capillariteit in de onderstelling van continue dichtheidsverandering*, *Verhandel. Konink. Akad. Wet.* Amsterdam (Sect. 1), Vol. 1, No. 8 (1893).
- (15) A. Einstein. *Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen*, *Annalen der Physik* 4 (1901) 513-523, received 16 December 1900.
- (16) H. Minkowski. *Kapillarität*, V. 9 in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, 558–613. (1903-1921). Abgeschlossen im Herbst 1906.
- (17) N. Bohr. Determination of the surface tension of water by the method of jet vibration, *Phil. Trans.*, A209, 281 (1909).
- (18) N. Bohr. On the determination of the tension of a recently formed water-surface, *Proc. R. Soc. Lond. A* 1910 84 395-403; Published 15 December 1910.
- (19) N. Bohr and J.A. Wheeler. The mechanism of nuclear fission, *Physical Review* 56, 426 (1939).

- (20) G. Gamow. Mass Defect Curve and Nuclear Constitution, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, Vol. 126, No. 803 (Mar. 3, 1930), pp. 632-644.
- (21) S. Moon, Y. Shin, H. Kwak, J. Yang, S.-B. Lee, S. Kim y K. An. Experimental Observation of Bohr's Nonlinear Fluidic Surface Oscillation. Sci Rep. 2016 Jan 25;6:19805.
- (22) S. Chandrasekhar. The stability of a rotating liquid drop, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Volume 286, Issue 1404, pp. 1-26, 1965.
- (23) P.G. de Gennes. Wetting: statics and dynamics, Reviews of Modern Physics. 57, No. 3, 1985.

LEONARDO DA VINCI

291

CAPITOLO XLIII.

Della sfericità della gocciola.

La goccia fia di più perfetta sfericità, la quale sarà di minor quantità. Perchè se due liquidi sferici di quantità ineguali verranno al principio del contatto infra loro, il maggiore tira a se il minore, e immediatamente se lo incorpora, senza distruggere la perfezione della sua sfericità. Questa è difficile proposizione; ma per questo non resterò di dire il mio parere. L'acqua vestita dall'aria naturalmente desidera stare unita nella sua sfera, perchè in tal sito essa si priva di gravità, la qual gravità è dupla, cioè che il suo tutto ha gravità atteso al centro degli elementi, la seconda gravità attesa al centro della sfericità dell'acqua; il che se così non fosse, essa farebbe di se solamente una mezza sfera, la quale è quella che sta dal centro in su. Ma di questo non vedo nell'umano ingegno modo di darne scienza, ma dire, come si dice della calamita, che tira il ferro, cioè che tale virtù è occulta proprietà, delle quali ve ne sono infinite in natura. Ma dimanderemo, perchè è più perfezione nella minima sfera del liquido, che nella grande. Qui si risponde, che la minima goccia ha levità più simile all'aria, che la circonda, che la gocciola grande, e per la poca differenza è sostenuta più dal mezzo in giù da essa aria, che la grande. E per prova di questo si alleggerà le minime gocce, che sono di tanta minima figura, che elle sono quasi invisibili per se. Ma molte, ed in quantità sono visibili; e queste sono le particole componitrici delle nuvole, nebbie, e piogge ec.

Figura 1.- Reflexión de Leonardo da Vinci sobre la naturaleza esférica de las gotas.



An Attempt for the Explication of this New Experiment.

MY former Conjecture, That the unequal height of the surfaces of the water proceeded from the greater pressure made upon the water by the Air without the Pipes A. B. C. than by that within them; I shall endeavour to confirm from the Truth of the two following Propositions.

The first of which is. That an une-

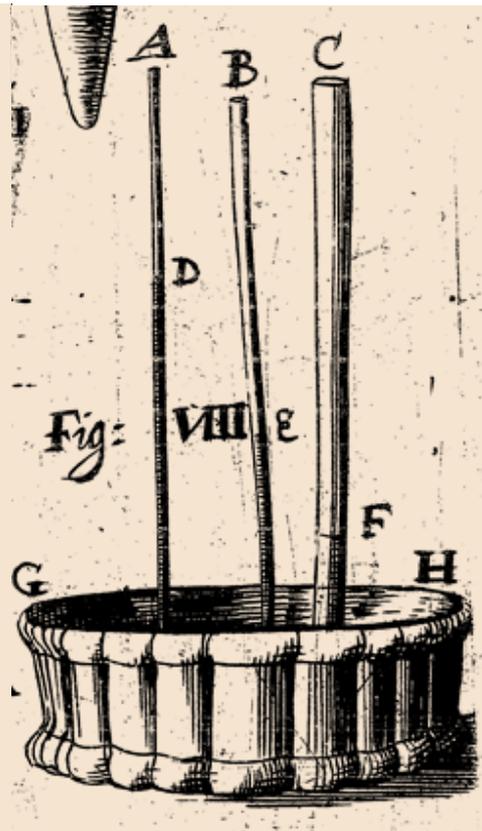


Figura 2.- Primera página e ilustración del ascenso capilar del manuscrito de Hooke de 1661.

$$gD \cdot (h + z) = \frac{1}{2} \cdot H \cdot \left\{ \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right\};$$

Figura 3.- Formulación de la ecuación que justifica la forma de meniscos sometidos a un campo de presiones externo (gravitatorio), tal y como la expresó Laplace en su apéndice *Sur l'action capillaire* del libro X del *Tratado de Mecánica Celeste*.

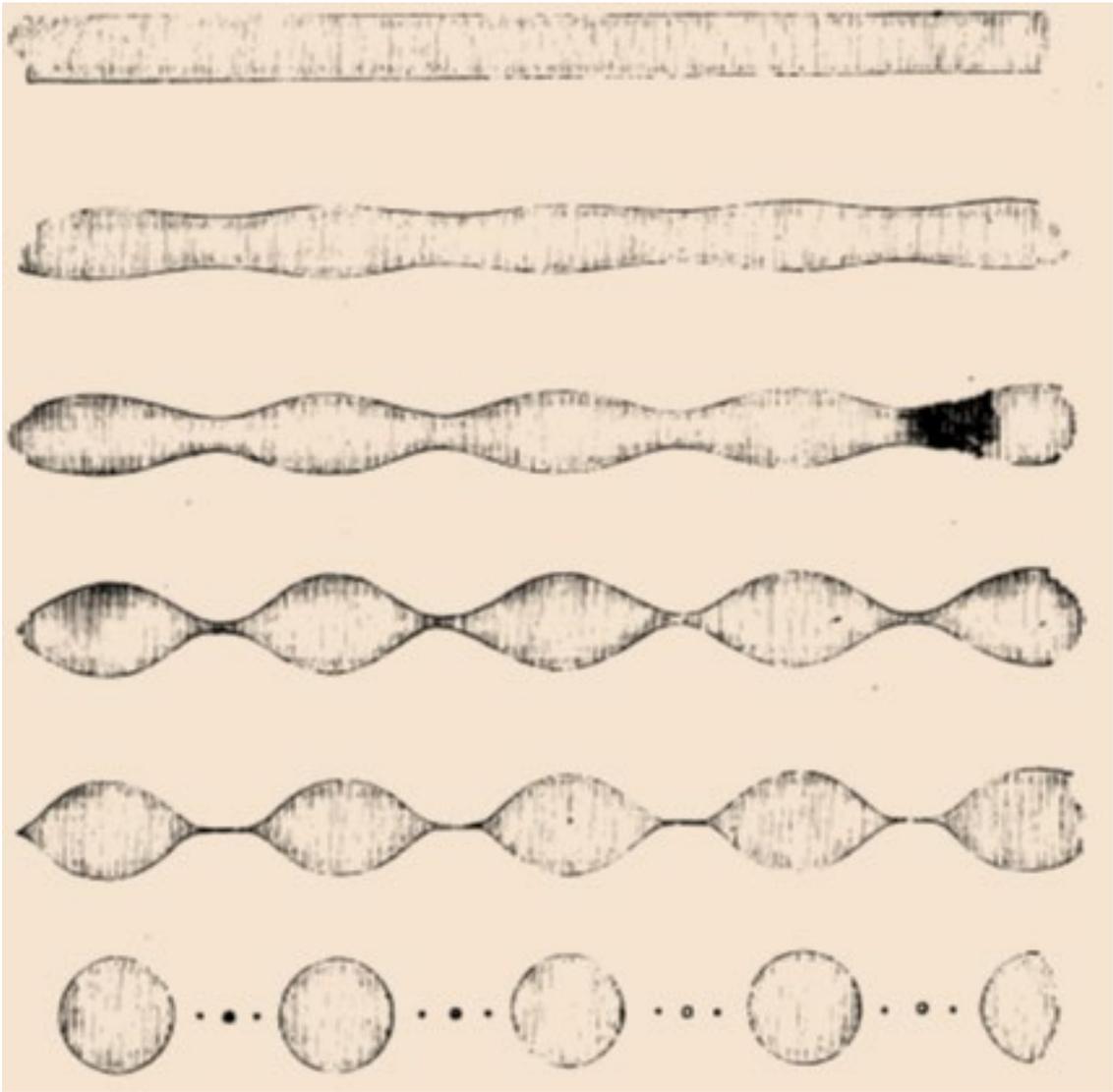


Figura 4.- Ilustraciones de Plateau de la degeneración gradual de un filamento capilar a gotas individuales.

On the Instability of Jets. By LORD RAYLEIGH, F.R.S.

[Read November 14th, 1878.]*

Many, it may even be said, most of the still unexplained phenomena of Acoustics are connected with the instability of jets of fluid. For this instability there are two causes; the first is operative in the case of jets of heavy liquids, *e.g.*, water, projected into air (whose relative density is negligible), and has been investigated by Plateau in his admirable researches on the figures of a liquid mass, withdrawn from the action of gravity. It consists in the operation of the capillary force, whose effect is to render the infinite cylinder an unstable form of equilibrium, and to favour its disintegration into detached masses whose aggregate surface is less than that of the cylinder. The other cause of instability, which is operative even when the jet and its environment are of the same material, is of a more dynamical character.

With respect to instability due to capillary force, the principal problem is the determination, as far as possible, of the mode of disintegration of an infinite cylinder, and in particular of the number of masses into which a given length of cylinder may be expected to distribute itself. It must, however, be observed that this problem is not so definite as Plateau seems to think it; the mode of falling away from unstable equilibrium necessarily depends upon the peculiarities of the small displacements to which a system is subjected, and without which the position of equilibrium, however unstable, could not be departed from. Nevertheless, in practice, the latitude is not very great, because



FIG. 3.



FIG. 4.



Figura 5.- Primera página del manuscrito de Rayleigh de 1878 y fotografías de filamentos capilares inestables.



Figura 6.- Representación gráfica original del perfil de densidad a través de una interfase de van der Waals en su artículo de 1893.

**5. Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen;
von Albert Einstein.**

Bezeichnen wir mit γ diejenige Menge mechanischer Arbeit, welche wir der Flüssigkeit zuführen müssen, um die freie Oberfläche um die Einheit zu vergrössern, so ist γ nicht etwa die gesamte Energiezunahme des Systems, wie folgender Kreisprocess lehrt. Sei eine bestimmte Flüssigkeitsmenge vorliegend von der (absoluten) Temperatur T_1 und der Oberfläche O_1 . Wir vermehren nun isothermisch die Oberfläche O_1 auf O_2 , erhöhen die Temperatur auf T_2 (bei constanter Oberfläche), vermindern dann die Oberfläche auf O_1 und kühlen dann die Flüssigkeit wieder auf T_1 ab. Nimmt man nun an, dass dem Körper ausser der ihm vermöge seiner specifischen Wärme zukommenden keine andere Wärmemenge zugeführt wird, so ist bei dem Kreisprocess die Summe der dem Körper zugeführten Wärme gleich der Summe der ihm entnommenen. Es muss also nach dem Princip von der Erhaltung der Energie auch die Summe der zugeführten mechanischen Arbeiten gleich Null sein.

Es gilt also die Gleichung:

$$(O_2 - O_1)\gamma_1 - (O_2 - O_1)\gamma_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

Dies widerspricht aber der Erfahrung.

Es bleibt also nichts anderes übrig als anzunehmen, dass mit der Aenderung der Oberfläche auch ein Austausch der Wärme verbunden sei, und dass der Oberfläche eine eigene specifische Wärme zukomme. Bezeichnen wir also mit U die Energie, mit S die Entropie der Oberflächeneinheit der Flüssigkeit, mit s die specifische Wärme der Oberfläche, mit w_0 die zur Bildung der Oberflächeneinheit erforderliche Wärme in mechanischem Maass, so sind die Grössen:

$$dU = s \cdot O \cdot dT + \{\gamma + w_0\} dO$$

und

$$dS = \frac{s \cdot O \cdot dT}{T} + \frac{w_0}{T} dO$$

vollständige Differentiale. Es gelten also die Gleichungen:

Figura 7.- Primera página del manuscrito de Albert Einstein de 1901 sobre su fallida teoría de Capilaridad.

XII. *Determination of the Surface-Tension of Water by the Method of Jet Vibration.**

By N. BOHR, *Copenhagen.*

Communicated by Sir WILLIAM RAMSAY, *K.C.B., F.R.S.*

Received January 12,—Read January 21, 1909.

Introduction.

It has been shown that one of the most important and difficult questions in regard to the determination of the surface-tension of water is to produce a sufficiently pure surface, and in later investigations great importance has therefore been attached to this point.

In 1879 LORD RAYLEIGH,† however, indicated a method which solves the above-mentioned difficulty in a far more perfect manner than any other method used hitherto; this method makes it possible to determine the surface-tension of an almost perfectly fresh and constantly newly formed surface.

In the paper cited above, LORD RAYLEIGH has developed the theory of the vibrations of a jet of liquid under the influence of surface-tension, and as appears from this theory, it is possible to determine the surface-tension of a liquid when the velocity and cross-section of a jet of liquid, and the length of the waves formed on the jet, are known.

LORD RAYLEIGH has attached a series of experiments to the theoretical development. By these experiments, however, it was more especially intended to give illustrations of the theory rather than to give an exact determination of the surface-tension.

If, however, this is the problem, it is necessary to consider more closely some questions which are not discussed in LORD RAYLEIGH's investigation, for it is necessary

* Based on a response to Det Kongl. Danske Videnskabskaademi (The Royal Danish Scientific Society's) Problem in Physics for 1906, delivered October 20, 1906, awarded the Society's Gold Medal. (The investigation has since been completed with a number of experiments.)

† LORD RAYLEIGH, 'Roy. Soc. Proc.' vol. XXIX., p. 71, 1879.

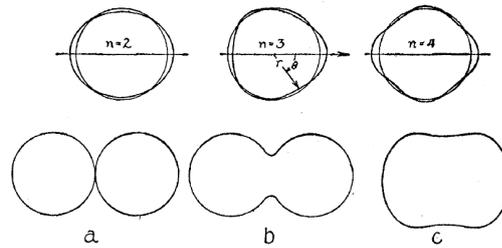


FIG. 2. Small deformations of a liquid drop of the type $\delta r(\theta) = \alpha_n P_n(\cos \theta)$ (upper portion of the figure) lead to characteristic oscillations of the fluid about the spherical form of stable equilibrium, even when the fluid has a uniform electrical charge. If the charge reaches the critical value ($10 \times \text{surface tension} \times \text{volume}$)[‡], however, the spherical form becomes unstable with respect to even infinitesimal deformations of the type $n=2$. For a slightly smaller charge, on the other hand, a finite deformation (c) will be required to lead to a configuration of *unstable equilibrium*, and with smaller and smaller charge densities the critical form gradually goes over (c, b, a) into that of two uncharged spheres an infinitesimal distance from each other (a).

(a)

(b)

Figura 8.- (a) Primera página del manuscrito de Niels Bohr de 1909 con el que consiguió el primer premio de la Real Sociedad Danesa de Ciencias-edición 1905. (b) Figura del manuscrito de Bohr y Wheeler de 1936 sobre la fisión nuclear.