Objetos matemáticos ligados a la variable aleatoria y sus distribuciones de probabilidad en libros de texto chilenos

Valeria Bizet, Elena Molina-Portillo y José Miguel Contreras

Este artículo analiza el tratamiento de la variable aleatoria y sus aplicaciones sobre distribuciones de probabilidad en libros de texto de educación secundaria de Chile, desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Así, un modelo es utilizado para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto y currículo escolar chileno, mediante el análisis de contenido. Los resultados demuestran diversidad de lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos ligados a los temas, aunque algunos son identificados en el currículo y excluidos en libros o viceversa, demostrándose falta de coherencia entre los documentos.

Palabras clave: Distribución binomial; Distribución normal; Educación escolar; Libros de texto; Objetos matemáticos; Variable aleatoria

Mathematical Objects Linked to Random Variable and its Applications on Probability Distributions in Chilean Secondary School Textbooks

This paper analyzes the treatment of the random variable and its applications on probability distributions in Chilean high school textbooks, from the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. Thus, a model is used for the analysis of mathematical objects in the Chilean textbooks and the Chilean school curriculum by means of content analysis. The results show a diversity of languages, concepts, propositions, procedures and arguments linked to the topics, although some of them are identified in the curriculum and excluded in books or inversely, showing a lack of coherence between the documents.

Keywords: Binomial distribution; Mathematical objects; Normal distribution; Random variable; School education; Textbooks

Bizet, V., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2023). Objetos matemáticos ligados a la variables aleatoria y sus distribuciones de probabilidad en libros de texto chilenos. *PNA, 17*(2), 201-238. https://doi.org/10.30827/pna.v7i2.21820

Objetos matemáticos ligados a variáveis aleatórias e as suas distribuições de probabilidade em livros escolares chilenos

Este artigo analisa o tratamento da variável aleatória e suas aplicações nas distribuições de probabilidade nos livros escolares chilenos do ensino médio, a partir da Abordagem Ontosemiótico ao Conhecimento e à Instrução Matemática. Assim, um modelo é utilizado para a análise de objetos matemáticos nos livros didáticos e currículos escolares chilenos, por meio da análise de conteúdo. Os resultados mostram uma diversidade de idiomas, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos ligados aos tópicos, embora alguns sejam identificados no currículo e excluídos nos livros ou vice-versa, demonstrando uma falta de coerência entre os documentos.

Palavras-chave: Distribuição binomial; Distribuição normal; Educação escolar; Manuais escolares; Objetos matemáticos; Variável aleatória

El estudio de la variable aleatoria y su familia de distribuciones es esencial de abordar en la educación escolar, pues se presentan en experiencias cotidianas (Pfannkuch, 2018). Debido a tal escenario los conceptos estocásticos aludidos han sido incorporados en el currículo de diferentes países entre los grados 9º y 12º (15 a 18 años). Esta tendencia es observada en los *Principles and Standards for School Mathematics* de la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), que proponen trabajar la variable aleatoria y su media, introducir su función de probabilidad a través de los enfoques de probabilidad frecuencial y clásico, y estudiar la distribución binomial mediante estos dos enfoques. También aquella tendencia es evidenciada en *Common Core State Standards for Mathematics* de la *National Governors Association Center for Best Practices* y el *Council of Chief State School Officers* (NGACBP y CCSSO, 2010), que sugieren en torno a la variable aleatoria abordar lo señalado e introducir la distribución normal mediante los enfoques frecuencial y clásico.

En tanto los *Pre-K–12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II* (GAISE II) (Bargagliotti et al., 2020) proporcionan una estructura conceptual para la educación estadística de preescolar a grado 12º, en tres niveles de desarrollo de habilidades (A, B y C). Particularmente para el nivel C en el contexto del rol de la probabilidad en estadística, proponen entre los conceptos necesarios de estudiar la variable aleatoria y su media, además de la distribución normal mediante los dos enfoques de probabilidad señalados. Chile no es indiferente a aquella realidad, debido a que las actuales Bases Curriculares del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2015; 2019a) introducen la variable aleatoria en grado 10º (15 a 16 años) e incluyen trabajar sus funciones de probabilidad y distribución desde el enfoque de probabilidad clásico. En grado 11º (16 a 17 años) sugieren abordar su media, desviación estándar y varianza, y para grado 12º (17 a 18 años) el estudio de las distribuciones binomial y normal bajo los enfoques clásico y frecuencial.

De esta manera, resulta interesante cuestionarnos cómo en los libros de texto escolar son abordados los temas aludidos, pues para los profesores aquel recurso representa el currículo y manera de entender y practicar la enseñanza (Escolano, 2009). Sin embargo, son limitados los estudios que indagan en estos documentos el tratamiento de la variable aleatoria y su familia de distribuciones.

En esta perspectiva sobre la variable aleatoria, Ortiz (2002) caracterizó su significado institucional desde el análisis a 11 libros de texto españoles para grado 11º. Entre sus resultados propone 11 definiciones y propiedades vinculados a esta, observando en pocos libros a lo más dos propiedades o un concepto, y cuatro lenguajes (verbal, simbólico, gráfico y tabular). También, Doukhan y Gueudet (2019) estudiaron su tratamiento en libros franceses, mediante un análisis comparativo entre dos textos de grado 9º y 10º, cuyos resultados muestran que ambos documentos emplearon cuatro diferentes lenguajes, especificados previamente.

Respecto a las distribuciones de probabilidad, Li et al. (2021) analizaron comparativamente el tratamiento de la binomial en seis textos de diferentes países (China, Japón, Singapur, Estados Unidos y Reino Unido), para los grados 10º a 12º. Los resultados mostraron que: los libros estadounidense y singapurense abordaron un número mayor de temas en torno al modelo (12) y el chino uno menor (5); los estadounidenses fomentaron mayor diversidad de formas en presentar el contenido (tablas y gráficos, y uso de herramientas tecnológicas), y el chino solo usó tecnología en el contexto de cálculos. Por su parte, Valverde (2017) estableció el significado institucional de la normal a partir del estudio a dos libros de texto españoles de grado 11º y 12º, y entre sus resultados observó que: gran parte de los conceptos se presentaron formal y confusamente; fueron promovidos los procedimientos de cálculo de probabilidad y tipificación, el lenguaje verbal, simbólico, tabular y gráfico, y cinco argumentos, predominando la justificación de respuesta mediante ejemplos o contraejemplos y gráfica.

Además, Setiawan (2020) indagó el tratamiento de la variable aleatoria y distribuciones binomial y normal en cinco textos indonesios para grado 12º. En sus resultados expuso que: todos los libros proporcionan una definición de variable aleatoria, presentándola uno formalmente como función, tres erróneamente como variable y uno con ideas poco claras; fueron identificados a lo sumo seis temas sobre la binomial en dos textos y solo uno promueve el uso de tabla para el cálculo de probabilidades; han sido reconocidos a lo más diecinueve temas sobre la normal en un libro.

Por otra parte, sobre investigaciones centradas en la comprensión a nivel escolar de los conceptos probabilísticos de interés, encontramos la desarrollada por Bizet y Ramos (2022), que valoraron en estudiantes chilenos de grado 10º (15 a 16 años) la construcción de variable aleatoria y su función de probabilidad mediante un proceso de instrucción, evidenciando respecto al primer concepto que el 64%

de los participantes logró identificarlo y representarlo en lenguaje verbal, gráfico o tabular, y en relación con el segundo un 59%. En tanto Sánchez y Landín (2014) analizaron en estudiantes mexicanos de grado 12º (17 a 18 años) la aplicación de la expresión algebraica de la función de probabilidad de la binomial para resolver dos cuestionarios, evidenciando en el segundo que pocos lograron comprenderla y emplearla adecuadamente, y concluyendo que el diagrama de árbol favorece la comprensión de aquella distribución. Mientras que Valdez y Salinas (2019) indagaron en estudiantes mexicanos de grado 12º (17 a 18 años) la resolución de problemas sobre la normal, observando que lograron desarrollar el proceso de estandarización, pero lo hicieron mecánicamente, manifestando dificultad para comprender algunas de sus etapas e identificar la relación entre la probabilidad y el área bajo la curva normal.

Por tanto, el presente estudio tiene el objetivo de analizar el tratamiento otorgado a la variable aleatoria y sus aplicaciones sobre distribuciones de probabilidad en cinco libros de texto chilenos destinados a los grados 9º a 12º, bajo la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), debido a que Chile no cuenta con información al respecto.

MARCO TEÓRICO

La investigación se fundamenta en el EOS (Godino et al., 2020), donde la matemática emerge de la resolución de situaciones-problemas para lo cual se realizan determinadas prácticas matemáticas, entendidas como actuaciones o expresiones verbal, gráfica, etc. desarrollada por una persona o compartidas en una institución (Godino, 2017).

En las prácticas matemáticas surgen e interactúan objetos matemáticos, definidos como entidades materiales o inmateriales que apoyan y regulan la actividad matemática (Godino et al., 2020). En este ámbito, han sido diferenciado seis tipos de objetos matemáticos primarios (Font et al., 2013): situaciones-problemas (tareas, actividades o problemas que promueven la actividad matemática); lenguaje (expresiones, notaciones o términos en sus diversos registros de representación utilizados para enunciar o resolver tareas); conceptos (descripciones o definiciones relacionadas con un objeto matemático, aplicadas en la resolución de actividades); proposiciones (características o propiedades de conceptos, usadas en solucionar tareas); procedimientos (algoritmos, técnicas de cálculos u operaciones desarrollados para responder actividades); argumentos (enunciados empleado para aprobar o justificar proposiciones y procedimientos, o la respuesta a tareas).

También, en la actividad matemática, las redes que se establecen de la interacción de aquellos objetos primarios son llamadas configuraciones (Godino et al., 2020): cognitiva, propia de una persona o epistémica, específica de una institución. La noción de configuración epistémica es una herramienta útil para analizar textos matemáticos de diferentes épocas (Font y Godino, 2006) y en la actualidad ha sido empleada en diversas investigaciones sobre educación estadística, por ejemplo, en los trabajos de Alvarado y Batanero (2008), Batanero et al. (2015) y Vásquez y Alsina (2017).

De esta manera, en la presente investigación empleamos la herramienta de configuración epistémica descrita para indagar en cinco textos chilenos el lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que intervienen en el tratamiento de la variable aleatoria y sus aplicaciones sobre distribuciones de probabilidad. Así este trabajo complementa y completa nuestra investigación previa (Bizet et al., en prensa-a), donde identificamos en aquellos libros las situaciones-problemas y sus contextos en torno a los temas señalados, y permite establecer la configuración epistémica asociada a la variable aleatoria y sus distribuciones de probabilidad en libros de texto de educación secundaria chilena (grado 9º a 12º).

MÉTODO

Este estudio fue realizado desde una perspectiva cualitativa y es de tipo exploratorio-descriptivo (Hernández et al., 2014). Su desarrollo comprendió tres etapas (ver Figura 1) fundamentado en el modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto de Vásquez y Alsina (2015).

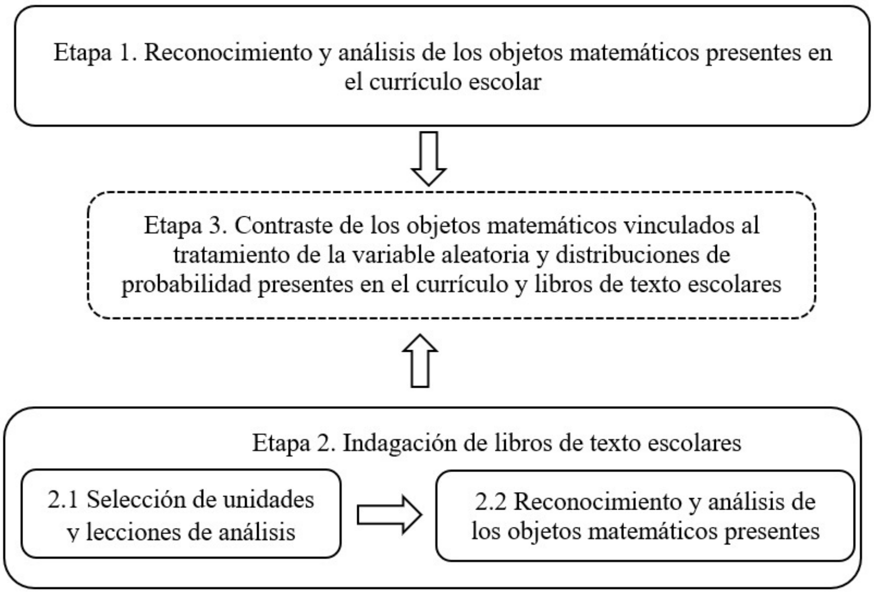


Figura 1. Etapas desarrolladas en la investigación

En la etapa 1 empleamos como material de investigación el principal documento curricular de Chile propuesto por el Ministerio de Educación, las Bases Curriculares (MINEDUC, 2015; 2019a) para los grados 9 a 12, además del instrumento que hace posible su ejecución denominado Programas de estudio de Matemática (MINEDUC, 2016; 2019b; 2019c).

Para la etapa 2, seleccionamos una muestra intencionada, compuesta por dos series de libros de texto chilenos que permanecían vigentes en el curso escolar 2021 (ver Tabla 1), donde cada una abarcó los grados 10º (15 a 16 años), 11º (16 a 17 años) y 12º (17 a 18 años). Las series son de reconocidas editoriales del país, la primera consideró los libros utilizados en la educación pública y subvencionada, entregados gratuitamente por el MINEDUC y elaborados por Ediciones SM, donde T1 está en sintonía con las Bases Curriculares dirigidas a grado 12º (MINEDUC, 2015) y T2 responde al escenario vigente de las Bases Curriculares para los grados 11º y 12º (MINEDUC, 2019a). La segunda serie incluyó los textos más usados en la enseñanza privada, los cuales son diseñados por la Editorial Santillana, donde el contenido de variable aleatoria presente en T3 atienden a las Bases Curriculares vigentes para grado 10º (MINEDUC, 2015), y respecto a los contenidos de distribuciones binomial y normal expuesto en T4 y T5, responden al escenario vigente de las Bases Curriculares para los grados 11º y 12º (MINEDUC, 2019a).

Tabla 1
Libros de texto utilizados en el análisis

Serie	Código	Grado	Referencia	Editorial	Año
1	T1	10°	Díaz et al., 2020	Ediciones SM	2020
	T2	11°-12°	Osorio et al., 2020		2019
2	T3	10°	Blanco et al., 2009a	Santillana	2009
	T4	11°	Blanco et al., 2009b		2009
	T5	12°	Departamento de investigación educativa, 2014		2014

Tanto en la primera como segunda etapa, los documentos fueron indagados utilizando el análisis de contenido (Krippendorff, 1990) mediante un proceso cíclico e inductivo, abarcando los pasos que se detallan (Cobo, 2003):

- Distinguir capítulos que tratan los temas de variable aleatoria y/o distribuciones de probabilidad.
- Indagación de capítulos seleccionados e identificación de los objetos matemáticos primarios (lenguaje: L; conceptos: C; proposiciones: PP; procedimientos: P; argumentos: A), introducidos implícita o explícitamente en el tratamiento de los temas en cuestión.
- Construcción de tablas que presentan los objetos matemáticos reconocidos en el currículo y textos escolares analizados.

RESULTADOS

Etapa 1: Objetos matemáticos presentes en el currículo escolar

El currículo chileno incluyó diversos objetos matemáticos sobre los temas de interés (ver Tablas 2 y 3), aquellos para grado 10º y 11º principalmente están vinculados a la variable aleatoria (v.a.), mientras que los de último grado a sus aplicaciones en distribución binomial (d.b.) o distribución normal (d.n.).

Este documento para la variable aleatoria promovió cuatro tipos de lenguaje (verbal, simbólico, gráfico y tabular) y cinco métodos de validación (justificación mediante ejemplo o contraejemplo, representación gráfica, simulación con herramienta tecnológica y objetos manipulables, y razonamiento algebraico). Presentó los demás objetos en orden de complejidad creciente, aunque omitió el concepto de función de densidad, la proposición sobre su caracterización mediante la función de distribución, los procedimientos de cálculo de probabilidades aplicando dichas funciones y los argumentos mediante razonamiento verbal-deductivo y análisis-síntesis. Además, excluyó abordar la integral, entonces los conceptos de función de distribución, media, varianza y desviación estándar sugirió trabajarlos únicamente para el caso de variables aleatorias discretas.

Tabla 2

Lenguaje y conceptos vinculados al tratamiento de la variable aleatoria y sus aplicaciones sobre distribuciones en el currículo chileno

		Nivel		
	Objeto matemático	10º	11º	12º
Lenguaje	L1. Verbal	v.a.	v.a.	d.b. y d.n.
	L2. Simbólico	v.a.	v.a.	d.b. y d.n.
	L3. Gráfico	v.a.	v.a.	d.b. y d.n.
	L4. Tabular	v.a.	v.a.	d.n.
Conceptos	C1. Variable aleatoria	v.a.	v.a.	d.b. y d.n.
	C2. Función de probabilidad	v.a.	v.a.	
	C3. Función de densidad			
	C4. Función de distribución	v.a.		v.a.
	C5. Parámetros de una variable aleatoria. C5.1 Media; C5.2 Varianza; C5.3 Desviación estándar		v.a.	v.a.
	C6. Distribución binomial: C6.1 Función de probabilidad; C6.2 Función de distribución; C6.3 Media; C6.4 Varianza			d.b.

Tabla 2

Lenguaje y conceptos vinculados al tratamiento de la variable aleatoria y sus aplicaciones sobre distribuciones en el currículo chileno

Objeto matemático	Nivel 10º	11º	12º
C7. Distribución normal: C7.1 Función de densidad; C7.2 Media; C7.3 Desviación estándar; C7.4 Moda; C7.5 Mediana			v.a. d.n.

Nota. v.a: El lenguaje o concepto están vinculados a la variable aleatoria; d.b: El lenguaje está vinculado a la distribución binomial; d.n.: El lenguaje está vinculado a la distribución normal.

En las distribuciones binomial y normal, el currículo fomentó tres tipos de lenguaje (verbal, simbólico y gráfico) y cuatro métodos de justificación (mediante representación gráfica, simulación con herramienta tecnológica, generalización y razonamiento algebraico). Además, incluyó solo en el contexto de la normal el lenguaje tabular y para la binomial la validación mediante simulación con objetos manipulables. Respecto a los restantes objetos primarios, primero presentó los relativos a la binomial seguidos por los de la normal, con ascendiente dificultad, donde excluyó el procedimiento de corrección por continuidad, los argumentos mediante ejemplos o contraejemplos y solo para la normal abordó los conceptos de moda y mediana.

Tabla 3

Proposiciones, procedimientos y argumentos vinculados al tratamiento de la variable aleatoria y sus aplicaciones sobre distribuciones en el currículo chileno

Objeto matemático	Nivel 11º	12º	13º
Proposiciones			
PP1. Caracterización de variable aleatoria y variable algebraica	v.a.		
PP2. Caracterización de variables aleatorias discreta y continua	v.a.		
PP3. Caracterización de la variable aleatoria mediante la función de probabilidad	v.a.	v.a.	
PP4. Propiedades de la función de probabilidad	v.a.	v.a.	
PP5. Caracterización de la variable aleatoria mediante la función de distribución			
PP6. Propiedades de la función de densidad			v.a. d.n.
PP7. Caracterización de la distribución binomial			d.b.

Tabla 3
Proposiciones, procedimientos y argumentos vinculados al tratamiento de la variable aleatoria y sus aplicaciones sobre distribuciones en el currículo chileno

Objeto matemático	Nivel		
	11º	12º	13º
PP8. Caracterización de la distribución normal			d.n.
PP9. Propiedades de la función de densidad de la normal			d.n.
PP10. Propiedades para el cálculo de probabilidades con distribución normal estándar			d.n.
PP11. Propiedad de los intervalos centrales ($\pm 3\sigma$)			d.n.
PP12. Condición para aproximar una distribución binomial a una normal			d.n.
Procedimientos			
P1. Cálculo de la cardinalidad del dominio de una variable aleatoria discreta mediante combinatoria	v.a.		v.a.
P2. Partición disjunta del espacio muestral	v.a.	v.a.	v.a.
P3. Determinación del dominio de una variable aleatoria discreta o probabilidad asociada a sus valores utilizando diagrama de árbol	v.a.		v.a.
P4. Cálculo de probabilidad de una variable aleatoria discreta aplicando la función de probabilidad	v.a.	v.a.	v.a.
P5. Cálculo de probabilidad de una variable aleatoria discreta aplicando la función de distribución			
P6. Cálculo de probabilidad de una variable aleatoria continua aplicando la función de densidad			
P7. Cálculo de parámetros de una variable aleatoria discreta empleando sus expresiones algebraicas		v.a.	v.a.
P8. Cálculo de probabilidades aplicando la función de probabilidad de una distribución binomial			d.b.
P9. Cálculo de probabilidades aplicando la función de distribución de una distribución binomial			d.b.
P10. Cálculo de media y varianza de la binomial mediante expresiones algebraicas			d.b.
P11. Cálculo de probabilidad empleando la propiedad de los intervalos centrales ($\pm 3\sigma$)			d.n.
P12. Tipificación			d.n.

Tabla 3

Proposiciones, procedimientos y argumentos vinculados al tratamiento de la variable aleatoria y sus aplicaciones sobre distribuciones en el currículo chileno

Objeto matemático	Nivel		
	11º	12º	13º
P13. Cálculo de probabilidades utilizando la tabla de distribución normal estándar			d.n.
P14. Corrección por continuidad			
Argumentos			
A1. Justificación por medio de ejemplo o contraejemplo	v.a.	v.a.	
A2. Justificación a través de la representación gráfica	v.a.		d.b. d.n.
A3. Justificación mediante simulación con			
A3.1. Herramienta tecnológica	v.a.		d.b. d.n.
A3.2. Objetos manipulables***	v.a.		d.b.
A4. Justificación mediante la generalización*			d.b. d.n.
A5. Razonamiento algebraico	v.a.	v.a.	d.b. d.n.
A6. Razonamiento verbal-deductivo** y ***			
A7. Justificación mediante análisis-síntesis** y ***			

Nota. v.a.: La proposición, procedimiento o argumento se vincula a la variable aleatoria; d.b.: El argumento se usa para trabajar la distribución binomial; d.n.: El argumento se usa para trabajar la distribución normal. *: No aplica para variable aleatoria; **: No aplica para distribución binomial; ***: No aplica para distribución normal.

Etapa 2.1: Unidades y lecciones indagadas en libros de texto

En los cinco libros indagados seleccionamos las unidades y lecciones que tratan la variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad (ver Tablas 4 y 5). Según expone la Tabla 4, en grado 11º, T2(1) excluye contenidos sobre variable aleatoria, opuesto con lo explicitado por el currículo para este contexto que sugirió trabajar su media, varianza y desviación estándar. La Tabla 5 evidencia que para grado 11º, T4 propuso estudiar la distribución binomial, lo que difiere con los lineamientos curriculares que introdujeron su estudio en grado 12º.

Tabla 4
Unidades y lecciones de serie 1 vinculadas al tratamiento de variable aleatoria y su familia de distribuciones

Nivel	Texto	Unidad	Lección	Páginas
10°	T1	Probabilidad y Estadística	Definición de variable aleatória	136-147
			Probabilidad de una variable aleatoria	158-159
			Gráfica de la distribución de una función de probabilidad	
11°	T2(1)		No se presenta contenido sobre los temas	
12°	T2(2)	Toma de decisiones en situaciones de incerteza	Valor esperado y varianza de una variable aleatoria	165-182
				185-191
			Distribución binomial	
			Variable aleatoria continua	
			Distribución normal	
			Distribución normal estándar	
			Aproximación normal a la binomial	

La Tabla 4 muestra que la serie 1 omitió utilizar herramientas tecnológicas durante el tratamiento de los temas de interés. En tanto la serie 2 (ver Tabla 5) promovió utilizar software en el estudio de la variable aleatoria (T3 y T4) y distribución normal (T5), lo cual está en consonancia con el currículo chileno que en los grados 10º y 12º abordó el mecanismo de validación mediante simulación con herramientas tecnológicas.

Tabla 5
Unidades y lecciones de serie 2 vinculadas al tratamiento de variable aleatoria y su familia de distribuciones

Nivel	Texto	Unidad	Lección	Páginas
10°	T3	Probabilidad	Variable aleatoria	320-335
			Función de probabilidad de una variable aleatoria	
			Función de distribución de probabilidad	
			Gráficos de función de probabilidad y distribución de probabilidad	
			Uso de software	
11°	T4	Probabilidad	Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta	146-165

Tabla 5
Unidades y lecciones de serie 2 vinculadas al tratamiento de variable aleatoria y su familia de distribuciones

Nivel	Texto	Unidad	Lección	Páginas
			Función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta	168-175
			Uso de software	
			Valor esperado, varianza y desviación estándar	
			Modelo de distribución binomial	
12°	T5	Datos y azar	Variable aleatoria continua	222-241
			Distribución de probabilidad normal	254-261
			Uso de software	

Etapa 2.2: Objetos matemáticos presentes en libros de texto

La metodología señalada permitió indagar libros de texto chilenos y establecer la presencia o ausencia de objetos matemáticos primarios sobre variable aleatoria y su familia de distribuciones identificados. Ahora exponemos los resultados de esta fase, donde son descritas las diversas categorías de acuerdo con el lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos asociados a los temas en cuestión, incorporando un ejemplo en aquellas que sea necesario para su mejor comprensión. Los objetos primarios que se describen a continuación, junto con las situaciones-problemas identificadas previamente (Bizet et al., en prensa-a) forman la configuración epistémica de textos escolares chilenos sobre la variable aleatoria y distribuciones de probabilidad binomial y normal.

Lenguaje

En el análisis de los libros identificamos cuatro lenguajes utilizados para presentar y trabajar los temas de interés.

L1. Lenguaje verbal. Palabras y frases que describen tareas, conceptos o sus propiedades, procedimientos y argumentos necesarios para responderlas. Sobre la variable aleatoria encontramos diversidad de términos: variable aleatoria discreta; espacio muestral; dominio y recorrido; preimagen; valores de la variable aleatoria; evento o suceso aleatorio; función algebraica; variable aleatoria no discreta; tipo de variable aleatoria; variable aleatoria continua; función de probabilidad; gráfica; probabilidad; función de distribución; función de densidad; área achurada o sombreada; intervalo real; curva; promedio o media; valor esperado o esperanza; varianza; variabilidad; homogeneidad; desviación estándar o típica.

También sobre las distribuciones de probabilidad reconocimos diversos términos: (i) distribución binomial; modelo binomial; variable aleatoria binomial; variable de Bernoulli; experimento de Bernoulli; parámetros; probabilidad; modelo de distribución; función de probabilidad; función de distribución; suceso aleatorio; valor esperado o media; varianza; (ii) distribución normal; media; desviación estándar; curva normal o de densidad; área; probabilidad; datos; intervalo real; función de densidad; simetría; mediana; distribución normal estándar; tipificación o normalización; aproximación; ajuste; corrección por continuidad.

L2. Lenguaje simbólico. Notaciones simbólicas y expresiones algebraicas que posibilitan desarrollar operaciones con conceptos y trabajar con mayor grado de complejidad. Las Tablas 6 y 7 ejemplifican lo observado en libros sobre notaciones y expresiones algebraicas asociada a la variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad respectivamente.

Tabla 6
Ejemplos de L2 sobre variable aleatoria

Concepto	Notación	Expresión algebraica
Variable aleatoria	X	$X(\omega) = x_i$
Función de probabilidad	$f(x)$	$f(x_i) = P(X = x_i)$ Propiedades: $f(x_1) + \cdots + f(x_i) = 1$, $\sum f(x_i) = 1$, $0 \leq f(x) \leq 1$
Función de distribución	$F(x)$	$F(x_i) = P(X \leq x_i)$
Función de densidad	$f(x)$	$f(x) = P(a \leq X \leq b)$
Media	μ, $E(X)$	$\mu = x_1 \cdot p(x_1)+\ldots+x_n \cdot p(x_n)$, $E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(x_i)$
Varianza	σ^2, $Var(X)$	$\sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot p(x_1) + \cdots + (x_n - \mu)^2 \cdot p(x_n)$ $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$
Desviación estándar	$s(X)$	$s(X) = \sqrt{Var(X)}$

Tabla 7
Ejemplos de L2 sobre distribuciones binomial y normal

Concepto	Notación	Expresión algebraica
V.a. con distribución binomial	$X \to B(n,p)$ $X \sim B(n,p)$	
Función de probabilidad distribución binomial	$f(x)$	$f(x) = C_x^n \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$ $P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$
Función de distribución de la v.a. binomial	$F(x)$	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} C_i^n \cdot p^i \cdot q^{n-i}$
Media	μ	$\mu = n \cdot p$
Varianza	σ^2	$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$
V.a. con distribución normal	$Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$	
Función de densidad distribución normal	$f(x)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ Propiedad $\pm 3\sigma$: $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}683$ $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}954$ $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$
V.a. con distribución normal estándar	$X \sim \mathcal{N}(0{,}1)$	$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
Función de densidad distribución normal estándar	$f(x)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ Probabilidades en un intervalo: i. $P(Z \leq a),\ a \geq 0$ ii. $P(Z \geq a),\ a \geq 0$ iii. $P(Z \leq a),\ a < 0$ iv. $P(Z \geq a),\ a < 0$ v. $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$

Tabla 7
Ejemplos de L2 sobre distribuciones binomial y normal

Concepto	Notación	Expresión algebraica
Aproximación binomial por la normal	$B(n,p) \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$	Corrección por continuidad $P(Y \leq a) = P(X < a + 0{,}5)$ $P(Y < a) = P(X < a - 0{,}5)$ $P(Y \geq a) = P(X > a - 0{,}5)$ $P(Y > a) = P(X > a + 0{,}5)$

L3. Lenguaje gráfico. Entre los objetos de la estocástica se reconocen los gráficos. En los libros indagados la variable aleatoria fue representada en diagrama sagital (Figura 2.a). Su función de probabilidad se graficó empleando también dicho diagrama (Figura 2.a), el polígono de frecuencias (Figura 2.b) y el gráfico de barra (Figura 2.c); y su función de densidad fue graficada en el plano cartesiano (Figura 2.e). Su función de distribución se representó en el plano cartesiano (Figura 2.d).

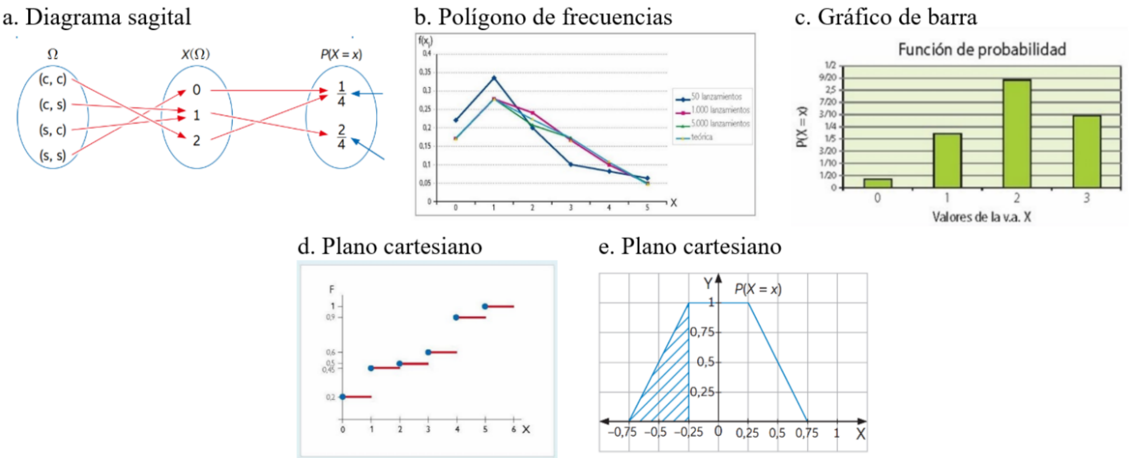


Figura 2. Ejemplo de L3 sobre variable aleatoria

Respecto al tratamiento de la familia de distribuciones en los textos inspeccionados, la función de probabilidad de la binomial se representó en un gráfico de barra (Figura 3.a), mientras que la función de densidad de la normal fue graficada con la curva normal, representando distintos contextos: intervalos centrados en la media (Figura 3.b), cálculo de probabilidades en un intervalo (Figura 3.c) o aproximación de la binomial por la normal (Figura 3.d).

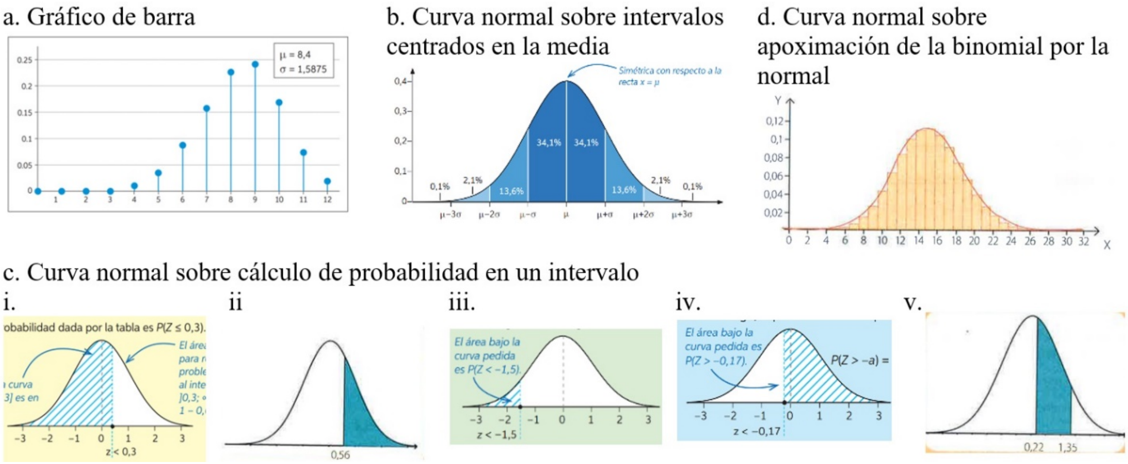


Figura 3. Ejemplo de L3 sobre distribuciones binomial y normal

L4. Lenguaje tabular. Otro objeto característico de la estocástica son las tablas. En los libros indagados se identificó que la variable aleatoria fue representada en una tabla de conteo (Figura 4.a). Para representar su función de probabilidad se construyeron tablas de probabilidad horizontal (Figura 4.b) y vertical (Figura 4.c), mientras que su función de distribución se representó en una tabla de probabilidad acumulada horizontal (Figura 4.d) y vertical (Figura 4.e). En el tratamiento de la función de densidad de la normal estándar esta fue representada en una tabla de probabilidad (Figura 4.f).

a. Tabla de conteo

Ω.	X(Ω)
cc	2
cs	1
sc	1
ss	0

b. Tabla de probabilidad horizontal

x_i	2	4	6	8
$P(X = x_i)$	0,25	0,35	0,15	0,25

c. Tabla de probabilidad vertical

X	f(x)
0	f(0) = 0,035
1	f(1) = 0,035
2	f(2) = 0,071
3	f(3) = 0,071
4	f(4) = 0,107
5	f(5) = 0,107
6	f(6) = 0,142
7	f(7) = 0,107
8	f(8) = 0,107
9	f(9) = 0,071
10	f(10) = 0,071
11	f(11) = 0,035
12	f(12) = 0,035
Total	1

d. Tabla de probabilidad acumulada horizontal

x_i	0	1	2	3
$P(X \leq x_i)$	0,275	0,425	0,855	1

e. Tabla de probabilidad acumulada vertical

$f(x_i) = P(X = x_i)$	$F(x_i) = P(X \leq x_i)$
$\frac{1}{16}$	$F(0) = P(X \leq 0) = \frac{1}{16}$
$\frac{4}{16}$	$F(1) = P(X \leq 1) = P(X \leq 0) + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$
$\frac{6}{16}$	$F(2) = P(X \leq 2) = P(X \leq 1) + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$
$\frac{4}{16}$	$F(3) = P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + \frac{4}{16} = \frac{15}{16}$
$\frac{1}{16}$	$F(4) = P(X \leq 4) = P(X \leq 3) + \frac{1}{16} = \frac{16}{16} = 1$
1	

f. Tabla de probabilidad

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,59[illegible]	0,5987	0,6026	0,6064

Figura 4. Ejemplo de L4 sobre variable aleatoria y aplicaciones en distribuciones binomial y normal

La Tabla 8 expone las representaciones sobre variable aleatoria y su familia de distribuciones (binomial y normal) identificadas en los libros indagados, las cuales demostraron una complejidad semiótica de los temas a nivel escolar. Apreciamos sobre la variable aleatoria que tanto la serie 1 como 2, promovieron cuatro lenguajes para su representación. En relación con la binomial, T2(2) fomentó mayor variedad de representaciones que T4, aunque ninguno empleó una tabla de valores de su función de probabilidad, que podría facilitar el procedimiento de calcular probabilidades en este contexto. Por último, para el tratamiento de la normal, evidenciamos que T2(2) y T5 trabajaron los cuatro lenguajes.

Tabla 8
Lenguajes sobre variable aleatoria y distribuciones de probabilidad

Lenguaje	Variable aleatoria						Distribuciones binomial y normal					
	Serie 1			Serie 2			Serie 1			Serie 2		
	T1	T2(1)	T2(2)	T3	T4	T5	T1	T2(1)	T2(2)	T3	T4	T5
L1. Verbal	X		X	X	X	X			b, n		b	n
L2. Simbólico	X		X	X	X	X			b, n		b	n
L3. Gráfico	X		X	X	X	X			b, n			n
L4. Tabular	X		X	X	X	X			n			n

Nota. X: El lenguaje se usa en el libro para trabajar la variable aleatoria; b: El lenguaje se usa para trabajar la distribución binomial; n: El lenguaje se usa para trabajar la distribución normal

Conceptos

Identificamos en los libros la presencia o ausencia de conceptos involucrados en el tratamiento de la variable aleatoria y su familia de distribuciones, además de la forma en que son introducidos. Según Sfard (1991) un concepto matemático es posible definirlo de manera operacional (descripción de fórmula u operación) o estructural (descripción de condiciones y propiedades). Por tanto, observamos si estos objetos fueron abordados mediante ejemplos, operacionalmente, estructuralmente o combinando aquellas formas, reconociendo un número total de dieciséis conceptos.

C1. Variable aleatoria. Fue abordada explícitamente en cinco textos, definiéndola correctamente como una función cuyo dominio es el espacio muestral y recorrido los números reales o un subconjunto de ellos. También se realizó la distinción entre las de tipo discreta y continua, afirmando por ejemplo sobre la primera que "pueden asumir una cantidad finita o infinita numerable de valores" (T5, p.222), y respecto a la segunda "su recorrido es un intervalo de números reales" (T1, p.137).

C2. Función de probabilidad. También llamada función de cuantía o distribución de probabilidad, fue presentada explícitamente en T1, T3 y T4, describiéndola adecuadamente como una función que asocia a cada valor de la variable aleatoria discreta una posibilidad de ocurrencia.

C3. Función de densidad. Nombre que recibe la función de probabilidad de una variable aleatoria continua, solo T2(2) y T5 la introdujeron como aquella que permite calcular la probabilidad de que la variable pertenezca al intervalo *[a, b]*, mediante el cálculo del área bajo la curva de la función entre los valores *a* y *b*.

C4. Función de distribución. Los textos T1, T3 y T4 estudiaron esta para el caso de variables aleatorias discretas, donde fue descrita como la función que proporciona la probabilidad acumulada hasta un valor determinado de la variable, y solo T3 expuso su domino (números racionales) y recorrido (intervalo *[0,1]*).

C5. Parámetros de una variable *aleatoria.* Corresponden a la media, varianza y desviación estándar, los cuales simplifican el estudio y comparación de distribuciones de probabilidad, aunque los libros analizados solo trabajaron con aquellos para variables aleatorias discretas.

C5.1. Media. También denominado esperanza o valor esperado, fue tratado por T2(2) y T4 mediante su expresión algebraica (ver Tabla 5); además T4 lo definió en lenguaje verbal como "el promedio ponderado de los valores de X con sus respectivas probabilidades" (p.170) y describió una característica para el contexto de juego (p.155): "(i) este es justo si $E(X)=0$; (ii) injusto si $E(X)<0$; (iii) favorable si $E(X)>0$".

C5.2. Varianza. Fue abordada por T2(2) y T4 mediante su expresión algebraica (ver Tabla 5); también T4 la describió en lenguaje verbal como "el promedio de las distancias al cuadrado de los valores en X hasta la media" (p.170), y describió su característica, que indica el grado de dispersión que posee la variable aleatoria respecto a su valor esperado.

C5.3. Desviación estándar. Trabajada por T2(2) en lenguaje verbal como "la raíz cuadrada de la varianza" (p.165) y T4 en lenguaje simbólico mediante su expresión algebraica (ver Tabla 5).

C6. Distribución binomial. Este modelo de probabilidad para variables aleatorias discretas fue introducido en T2(2) y T4, mediante las características de un experimento de Bernoulli: (i) genera solo dos resultados; (ii) la probabilidad de obtener uno de ello es p y el otro es $1-p$. Luego se señaló que al realizar aquel experimento n veces se genera una distribución binomial, presentándose su función de probabilidad (C6.1) en lenguaje simbólico (ver Tabla 6). Solo T4 abordó explícitamente su función de distribución (C6.2) mediante su expresión algebraica (ver Tabla 6), y lo mismo ocurrió en T2(2) con su media (C6.3) y varianza (C6.4).

C7. Distribución normal. Aquel modelo de probabilidad para variables aleatorias continuas fue tratado en T2(2) y T5 presentando su función de densidad (C7.1) por medio de una expresión algebraica (ver Tabla 6), aunque soló el primero explicitó el dominio (números reales) y únicamente el segundo describió su media (C7.2) y desviación estándar (C7.3). En este aspecto ambos textos excluyeron trabajar los conceptos de moda (C7.4) y mediana (C7.5).

La distribución normal estándar o tipificada fue abordada por dos textos: en T2(2) implícitamente cuando trabajó el proceso de tipificación de la variable, mientras que T5 presentó explícitamente su función de densidad (C7.6) en lenguaje verbal, afirmando que es un caso particular de la normal donde su media es 0 y desviación estándar 1, y lenguaje simbólico mediante una expresión algebraica (ver Tabla 7).

La Tabla 9 sintetiza la manera que los libros introdujeron los conceptos descritos. Esta evidencia que el concepto más definido fue variable aleatoria, seguido por sus funciones de probabilidad y distribución. El primero fue presentado en las dos series de forma operacional, estructural y mediante ejemplo, aunque se observó que en grado 12, T2(2) y T5 emplearon solo estas dos últimas. Las funciones mencionadas fueron introducidas por ambas series de tres formas diferentes, pero la primera abordó los contenidos solo en grado 10 (T1), mientras que la segunda entregó mayor continuidad presentándolos en los grados 10 (T3) y 11 (T4).

Tabla 9
Forma de introducción de conceptos sobre variable aleatoria y distribuciones de probabilidad

Concepto	Serie 1			Serie 2		
	T1	T2(1)	T2(2)	T3	T4	T5
C.1. Variable aleatoria	ESO		ES	ESO	SEO	SE
C.2. Función de probabilidad	EOS			EOS	SOE	
C.3. Función de densidad			OSE			OSE
C.4. Función de distribución	EOS			EOS	EOS	
C.5. Parámetros de una variable aleatoria:						
C.5.1 Media			O		EOS	
C.5.2. Varianza			O		ESO	
C.5.3. Desviación estándar			E		ESO	
C.6. Distribución binomial:						
C.6.1. Función de probabilidad			SO		EO	
C.6.2. Función de distribución					EO	
C.6.3. Media			O			
C.6.4. Varianza			O			
C.7. Distribución normal:						
C.7.1. Función de densidad			SO			SO
C.7.2. Media						E
C.7.3. Desviación estándar						E

Tabla 9
Forma de introducción de conceptos sobre variable aleatoria y distribuciones de probabilidad

Concepto	Serie 1	Serie 2
C.7.4. Moda		
C.7.5. Mediana		
C.7.6. Función de densidad de la normal estándar		SO

Nota. E: Definición mediante ejemplo; O: Definición operacional; S: Definición estructural.

También la Tabla 9 muestra diferencias entre las dos series de texto cuando introdujeron los conceptos menos definidos, como los parámetros de una variable aleatoria, donde la primera empleó para la media y varianza la forma operacional y para la desviación estándar un ejemplo, mientras que la segunda utilizó las tres formas que propusimos. Respecto al concepto de distribución binomial, la serie 1 presentó su función de probabilidad de forma estructural y operacional, y su media y varianza operacionalmente, y en tanto la serie 2, introdujo sus funciones de probabilidad y distribución de manera operacional y a través de ejemplos. En cuanto a la distribución normal, ambas series presentaron su función de densidad de forma estructural y operacional, aunque solo la segunda introdujo la función de densidad de la normal estándar del mismo modo señalado, y la media y desviación estándar mediante ejemplos.

Proposiciones

Reconocimos doce características y propiedades sobre variable aleatoria y su familia de distribuciones en los libros examinados.

PP1. Caracterización de la variable aleatoria y variable algebraica. Explica la diferencia entre estas: la primera es una función cuyo domino es el espacio muestral de un experimento aleatorio, y la segunda corresponde a un símbolo que representa cualquier número o rango de estos en un conjunto de números dados. Solamente se abordó implícitamente en T1.

PP2. Caracterización de variables aleatorias discreta *y continua*. Señala la diferencia entre sus recorridos, pues la primera toma un número finito $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o infinitos numerables de valores $(x_1, x_2, \ldots)$, mientras que la segunda toma todos los valores comprendidos en un intervalo de recta real. Esta fue propuesta en T1, T2(2), T3 y T5.

PP3. Caracterización de la variable aleatoria mediante la función de probabilidad. Cada variable aleatoria hereda una medida de probabilidad que la caracteriza y representa la probabilidad de cada uno de sus valores, lo que únicamente se omitió en T2(1).

PP4. Propiedades de la función de probabilidad. Presenta las condiciones que debe satisfacer esta función: (i) $p_j \geq 0$, para todo j; (ii) $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$, o $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. Fueron estudiadas en T1, T3 y T4.

PP5. Caracterización de la variable aleatoria mediante la función de distribución. Cada variable aleatoria define una función que describe la probabilidad de que ella sea menor o igual a uno de sus valores real. Esto se trabajó en T1, T3 y T4.

PP6. Propiedades de la función de densidad. Expone las condiciones que debe satisfacer esta función: (i) su probabilidad no es negativa; (ii) el área limitada por su gráfica en su dominio y el eje de la abscisa es 1. Estas propiedades se trabajaron en T2(2) y T5.

PP7. Caracterización de la distribución binomial. Establece las características del contexto donde el modelo es aplicable: (i) situación que presenta un suceso dicotómico observado *n* veces; (ii) los posibles resultados en cada ocasión son independientes. Estas se identificaron en T2(2) y solo (i) en T4.

PP8. Caracterización de la distribución normal. Constituye las características del contexto donde esta distribución es aplicable: (i) situación modelada por una variable aleatoria continua; (ii) sus valores se agrupan en torno a un valor central y sus valores extremos no son frecuentes. Estas características solo fueron mencionadas en T(2) y T5.

PP9. Propiedades de la función de densidad de la normal: (i) Esta es simétrica con respecto a la media; (ii) la media es, además, la mediana y la moda de la distribución; (iii) $x = \mu$ es el punto sobre el eje horizontal donde la curva tiene su máximo; (iv) la curva tiene sus puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$; (v) el eje de abscisas es una asíntota de la función. Dos libros presentaron algunas de estas propiedades: T2(2) a (i), (iv) y parcialmente (ii), y T5 a (i), (v) y parte de (ii).

PP10. Propiedades para el cálculo de probabilidades con distribución normal estándar: (i) $P(Z \leq a)$ o $P(Z < a)$, con $a \geq 0$; (ii) $P(Z \geq a)$ o $P(Z > a)$, con $a \geq 0$; (iii) $P(Z \leq a)$ o $P(Z < a)$, con $a < 0$; (iv) $P(Z \geq a)$ o $P(Z > a)$, con $a < 0$; (v) $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$. Todas fueron trabajadas en T2(2) y T5.

PP11. Propiedad de los intervalos centrales $(\pm 3\sigma)$. También denominada distribución de casos en relación con la desviación típica y media, corresponde a: (i) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\%$; (ii) $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\%$; (iii) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 99{,}7\%$;. Fue abordada explícitamente en T2(2) e implícitamente en T5.

PP12. Condición para aproximar una distribución binomial a una normal. Dada una variable aleatoria $X \sim B(n, p)$, si n es un valor grande de manera que cumple: (i) $n \geq 30$; (ii) $n \cdot p > 5$; (iii) $n \cdot (1 - p) > 5$, entonces $B(n, p) \sim \mathcal{N}(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$). Únicamente T5 y T2(2) señalaron explícitamente las condiciones (ii) y (iii), y sobre (i) solo el primero mencionó que n debe ser un valor grande.

La Tabla 10 resume las proposiciones reconocidas en los libros analizados. Esta evidencia que la más abordada fue la caracterización de la variable aleatoria mediante su función de probabilidad, seguido por las características de las variables aleatorias de tipo discreta y continua, ambas incluidas en las dos series. La menos propuesta ha sido la caracterización de variable aleatoria y variable algebraica. En tanto las proposiciones que aparecen con baja frecuencia fueron las vinculadas a las distribuciones binomial y normal y las propiedades de la función de densidad, presentes únicamente en un documento de cada serie.

Tabla 10
Proposiciones sobre variable aleatoria y distribuciones de probabilidad binomial y normal

Proposiciones	Serie 1			Serie 2		
	T1	T2(1)	T2(2)	T3	T4	T5
PP1. Caracterización de variable aleatoria y variable algebraica	X					
PP2. Caracterización de variables aleatorias discreta y continua	X		X	X		X
PP3. Caracterización de la variable aleatoria mediante la función de probabilidad	X		X	X	X	X
PP4. Propiedades de la función de probabilidad	X			X	X	
PP5. Caracterización de la variable aleatoria mediante la función de distribución	X			X	X	
PP6. Propiedades de la función de densidad			X			X
PP7. Caracterización de la distribución binomial			X		X	
PP8. Caracterización de la distribución normal			X			X
PP9. Propiedades de la función de densidad de la normal			X			X
PP10. Propiedades para el cálculo de probabilidades con distribución normal estándar			X			X

Tabla 10
Proposiciones sobre variable aleatoria y distribuciones de probabilidad binomial y normal

Proposiciones	Serie 1	Serie 2
PP11. Propiedad de los intervalos centrales ($\pm 3\sigma$)	X	X
PP12. Condición para aproximar una distribución binomial a una normal	X	X

Procedimientos
Identificamos catorce algoritmos, técnicas de cálculo u operaciones empleadas en los textos para resolver problemas sobre variable aleatoria y su familia de distribuciones.

P1. Cálculo de la cardinalidad del dominio de una variable aleatoria discreta mediante combinatoria. Aquella técnica de conteo es empleada en determinar la cantidad de elementos del espacio muestral para luego establecer sus elementos o probabilidad asociada a un valor de la variable. Este procedimiento se desarrolló en T1 y T3.

P2. Partición disjunta del espacio muestral. Realizada para determinar lo sucesos aleatorios elementales asociados a cada valor de una variable aleatoria discreta, lo que fue abordado implícitamente en T1, T3 y T4.

P3. Determinación del dominio de una variable aleatoria discreta o probabilidad asociada a sus valores utilizando diagrama de árbol. Solamente T1 sugirió elaborar un diagrama de árbol para identificar el espacio muestral vinculado al experimento aleatorio propuesto.

P4. Cálculo de probabilidades de una variable aleatoria discreta aplicando la función de probabilidad. Permite determinar la posibilidad de ocurrencia de cada elemento de la variable y compararlas. Esto fue promovido en la mayoría de los libros a excepción de T2(1).

P5. Cálculo de probabilidad de una variable aleatoria discreta aplicando la función de distribución. Proporciona la probabilidad acumulada hasta algún valor de la variable aleatoria, lo cual se trabajó en T1, T3 y T4.

P6. Cálculo de probabilidad de una variable aleatoria continua aplicando la función de densidad. Calcular probabilidades en este contexto involucra emplear integrales, concepto excluido en el currículo chileno. Así se observó que T2(2) y T5 sugirieron determinar el área bajo la curva de la función de densidad mediante la interpretación geométrica de la integral por cálculo de áreas de figuras geométricas simples.

P7. Cálculo de parámetros de una variable aleatoria discreta empleando sus expresiones algebraicas. Únicamente T4 incluyó determinar la media, varianza y desviación estándar de ese tipo de variable mediante la expresión algebraica correspondiente. En tanto, T2(2) abordó parcialmente este proceso, dado que excluyó el cálculo de la desviación.

P8. Cálculo de probabilidades aplicando la función de probabilidad de una distribución binomial. Solo T2(2) y T4 promovieron utilizar la expresión algebraica de aquella función para determinar probabilidades, omitiendo el uso de una tabla con sus valores.

P9. Cálculo de probabilidades aplicando la función de distribución de una distribución binomial. Solamente fue incluido explícitamente en T4 mediante el reemplazo de valores en la expresión algebraica de dicha función, mientras que T2(2) lo abordó implícitamente.

P10. Cálculo de media y varianza de la binomial mediante expresiones algebraicas. Únicamente T2(2) promovió este procedimiento a través del reemplazo de valores, sobre la situación binomial dada, en la expresión algebraica del parámetro correspondiente.

P11. Cálculo de probabilidad empleando la propiedad de los intervalos centrales $(\pm 3\sigma)$. Corresponde a determinar la probabilidad de que una variable aleatoria distribuida normalmente pertenezca a un intervalo centrado en su media y radio k =1, 2 y 3 desviaciones estándar, desarrollado solo en T2(2) y T5.

P12. Tipificación. La probabilidad asociada a cualquier distribución normal es posible expresarla en términos de la normal estándar. El procedimiento, denominado tipificación o normalización, permite determinar ese valor y consiste en transformar una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ en $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ mediante una expresión algebraica. Esto solamente fue trabajado en T2(2) y T5.

P13. Cálculo de probabilidades utilizando la tabla de distribución normal estándar. Consiste en utilizar una tabla de valores de la normal estándar para determinar la probabilidad de que una variable aleatoria tome valores en un intervalo dado, cálculo que solo fue incluido en T2(2) y T5.

P14. Corrección por continuidad. Utilizar la distribución normal como aproximación de la binomial involucra este procedimiento que consiste en cambiar un número discreto a un intervalo real ubicado a 0,5 por arriba o 0,5 por debajo de aquel número. Esto se debe a que se emplea un modelo de probabilidad de variable aleatoria discreta para aproximarlo a uno de variable aleatoria continua. Únicamente fue abordado explícitamente en T2(2) e implícitamente en T5.

La Tabla 11 sintetiza los procedimientos identificados en los textos indagados. Entre los más incluidos destacan calcular probabilidades de una variable aleatoria discreta utilizando sus funciones de probabilidad y distribución, y realizar una partición disjunta del espacio muestral; mientras que los procedimientos observados con baja frecuencia han sido los relativos a las distribuciones binomial y normal, así como también algunos vinculados a la variable aleatoria discreta (establecer sus parámetros mediante expresión algebraica y cardinalidad de su dominio empleando combinatoria) y continua (calcular probabilidades empleando su función de densidad). Además, el menos promovido fue determinar el dominio de una variable aleatoria discreta o sus probabilidades utilizando el diagrama de árbol.

Tabla 11
Procedimientos sobre variable aleatoria y distribuciones de probabilidad binomial y normal

Procedimientos	Serie 1			Serie 2		
	T1	T2(1)	T2(2)	T3	T4	T5
P1. Cálculo de la cardinalidad del dominio de una variable aleatoria discreta mediante combinatoria	X			X		
P2. Partición disjunta del espacio muestral	X			X	X	
P3. Determinación del dominio de una variable aleatoria discreta o probabilidad asociada a sus valores utilizando diagrama de árbol	X					
P4. Cálculo de probabilidades de una variable aleatoria discreta aplicando la función de probabilidad	X		X	X	X	X
P5. Cálculo de probabilidad de una variable aleatoria discreta aplicando la función de distribución	X			X	X	
P6. Cálculo de probabilidad de una variable aleatoria continua aplicando la función de densidad			X			X
P7. Cálculo de parámetros de una variable aleatoria discreta empleando sus expresiones algebraicas			X		X	

Tabla 11
Procedimientos sobre variable aleatoria y distribuciones de probabilidad binomial y normal

Procedimientos	Serie 1			Serie 2		
	T1	T2(1)	T2(2)	T3	T4	T5
P8. Cálculo de probabilidades aplicando la función de probabilidad de una distribución binomial			X		X	
P9. Cálculo de probabilidades aplicando la función de distribución de una distribución binomial			X		X	
P10. Cálculo de media y varianza de la binomial mediante expresiones algebraica			X			
P11. Cálculo de probabilidad empleando la propiedad de los intervalos centrales ($\pm 3\sigma$)			X			X
P12. Tipificación			X			X
P13. Cálculo de probabilidades utilizando la tabla de distribución normal estándar			X			X
P14. Corrección por continuidad			X			X

Argumentos

Reconocimos en los textos examinados seis métodos de validación sobre variable aleatoria, tres en distribución binomial y cinco para distribución normal, que permitieron relacionar los objetos matemáticos anteriores y las situaciones-problemas identificadas por Bizet et al. (en prensa-a).

A1. Justificación mediante ejemplo o contraejemplo. Emplea un ejemplo con datos específicos para comprobar una proposición o explicar un procedimiento. Este fue abordado por cinco libros en el ámbito de la variable aleatoria, y por tres (T2(2), T4 y T5) en el contexto de distribuciones binomial o normal, ejemplificándose en la Figura 5.

A2. *Justificación a través de la representación gráfica.* Usa las características visuales de un gráfico para aprobar o refutar afirmaciones, o validar una proposición o solucionar un problema. Ella fue incluida en cinco textos en el contexto de variable aleatoria (ejemplo en la Figura 6) y solo en T2(2) para el ámbito de distribuciones binomial y normal.

En una variable aleatoria continua X, la probabilidad de que esta tome exactamente un valor **a** es 0, es decir, P(X = a) = 0.

Esto se puede interpretar de la siguiente manera. Si se escoge aleatoriamente a una persona en la calle y mides su masa, se podría preguntar cuál es la probabilidad de que la masa de ella sea 76,43 kg. Esta es una situación compleja, ya que al considerar ese número estamos buscando personas cuya masa, en kilogramos, sea exactamente 76,430000... y seguro que al utilizar instrumentos de mayor precisión observemos valores diferentes a los de una balanza común, por ejemplo, 76,431 kg o 76,43001 kg.

Tienc más sentido preguntar cuál es la probabilidad de encontrar a una persona cuya masa se ubique, por cjemplo, entre 75 kg y 80 kg. Es decir, en una variable aleatoria continua lo natural es calcular la probabilidad de que la variable aleatoria se encuentre en un intervalo dado. Intuitivamente se pude notar que a medida que el intervalo se hace cada vez más pequeño, es más difícil encontrar a una persona cuya masa cumpla con ese requisito.

Figura 5. Ejemplo de A1 (T5, p. 224)

En la siguiente figura se muestra el gráfico de la función de probabilidad de una v.a. **X**. Respecto de la función de probabilidad del gráfico, es verdadero que:

I. Rec X = {0, 1, 2, 3, 4}
II. la probabilidad de obtener **1** es igual a la probabilidad de obtener **3**.
III. la probabilidad de obtener a lo más **3** es de **68,75%**.

A. Solo III
B. I y II
C. I y III
D. II y III
E. I, II y III

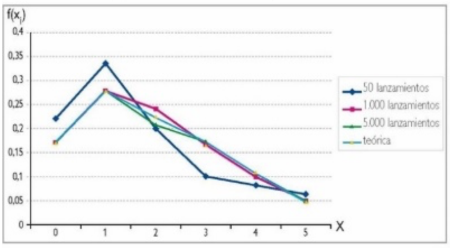
Figura 6. Ejemplo de A2 (T4, p.153)

A3. Justificación mediante simulaciones con herramienta tecnológica u objeto manipulable. Consiste en el análisis de resultados obtenidos en simulación de experimentos aleatorios por medio de software (A3.1) u objetos como chinche, moneda, dado, aparato de Galton, etc. (A3.2), para extraer conclusiones y validar la solución a problemas. Solo el primer método de validación fue promovido por T3 y T4 en el ámbito de la variable aleatoria y por T5 en el contexto de la normal, como muestra la Figura 7.

A4. Justificación mediante la generalización. A partir de ciertas condiciones es desarrollada una demostración informal o formal para obtener conclusiones extensibles a problemas que cumplen con las mismas características iniciales. Solamente fue utilizado para justificar proposiciones por T5 en el ámbito de la normal (ver Figura 8).

Mediante una planilla de cálculo se simulará el lanzamiento de **2** dados, para calcular la función de probabilidad de la v.a. **X** definida como **X:** valor absoluto de la diferencia de sus caras, en **50, 1.000** y **5.000** lanzamientos.
Calcula el error para cada una de las simulaciones.
¿Qué observas respecto al error de las probabilidades a medida que aumentan los lanzamientos?

En el siguiente gráfico y tabla, se muestran los valores de la función de probabilidad de la v.a. **X,** para **50, 1.000** y **5.000** lanzamientos, las cuales se comparan con la función de probabilidad teórica de la v.a. **X,** indicando la diferencia o error, con repecto al valor teórico.



x	0	1	2	3	4	5
50	0,22	0,34	0,20	0,10	0,08	0,06
1.000	0,17	0,28	0,24	0,17	0,10	0,05
5.000	0,17	0,28	0,21	0,18	0,11	0,05
Teórico	$0{,}1\overline{6}$	$0{,}2\overline{7}$	$0{,}\overline{2}$	$0{,}1\overline{6}$	$0{,}\overline{11}$	$0{,}0\overline{5}$
Error 50	0,05	0,06	$-0{,}0\overline{2}$	$-0{,}0\overline{6}$	$-0{,}03\overline{11}$	$-0{,}00\overline{4}$
Error 1.000	$0{,}00\overline{3}$	$0{,}00\overline{7}$	$0{,}01\overline{7}$	$0{,}00\overline{3}$	$-0{,}0\overline{11}$	$-0{,}00\overline{4}$
Error 5.000	$0{,}00\overline{3}$	$0{,}00\overline{7}$	$-0{,}01\overline{2}$	$0{,}01\overline{3}$	$-0{,}00\overline{11}$	$-0{,}00\overline{5}$

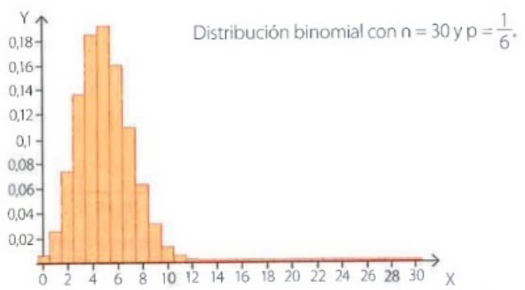
En el gráfico se observa que a medida que aumenta el número de lanzamiento de los dados la probabilidad de cada uno de los valores de la v.a. **X** tienden a ser los mismos. Lo anterior se observa al comparar la diferencia entre la probabilidad experimental y teórica de **X.** En la tabla se observa que el error tiende a disminuir a medida que la cantidad de ensayos aumenta. Este principio se conoce como **ley de los grandes números,** y afirma que al repetir un experimento aleatorio un número muy grande de veces la frecuencia relativa de cada suceso elemental se aproxima a la probabilidad del suceso.

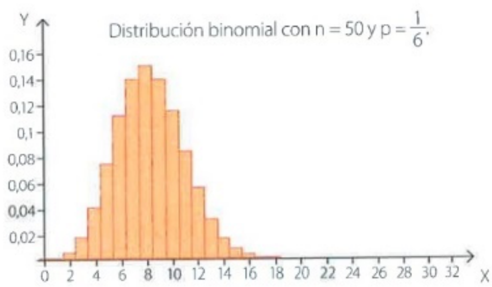
Figura 7. Ejemplo de A3 (T3, p. 326-327)

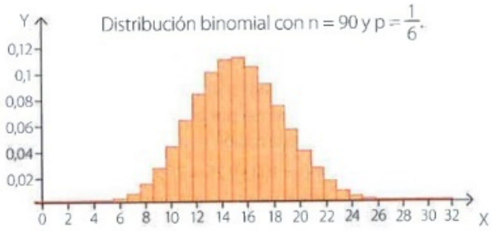
Considera el experimento de lanzar un dado cinco veces y contar cuántas veces obtenemos un punto. ¿Qué tipo de variable aleatoria se puede definir?

La variable aleatoria que se puede definir es X: la cantidad de veces que se obtiene un punto. Esta variable aleatoria es discreta y se puede modelar como $X \sim B\left(5, \frac{1}{6}\right)$.

Si quisiéramos hacer el mismo conteo del ejemplo, pero esta vez lanzando el dado 30, 50 y 90 veces, obtendríamos los siguientes gráficos, que muestran la función de probabilidad en cada caso:







A medida que la cantidad de lanzamientos aumenta, los gráficos de la distribución binomial se van aproximando a la distribución normal. Luego, si **n** es lo suficientemente grande, la distribución binomial se puede aproximar por una normal de media $\mu = np$ y una desviación estándar $\sigma = \sqrt{np\,(1-p)}$.

Se debe notar que se está aproximando una variable aleatoria discreta con un modelo de variable aleatoria continua.

En general, lo anterior ocurre para cualquier distribución binomial en la que **n** sea un valor grande, y **p** y **1 – p** no sean valores muy pequeños. Cuanto mayor sea **n**, mejor se aproxima la distribución binomial a la normal. En la práctica, se estima que la aproximación es aceptable cuando se cumple que: $np > 5$ y $n(1-p) > 5$.

Figura 8. Ejemplo de A4 (T5, p. 233-234)

◆ Considera las siguientes variables aleatorias asociadas a experimentos diferentes.

$$P(X = x_i) = \begin{cases} a\ ;\ \text{si } x_i = 1 \\ b,\ \text{si } x_i = 2 \\ 0{,}6\ ;\ \text{si } x_i = 3 \end{cases} \qquad P(Y = y_i) = \begin{cases} 2a;\ \text{si } y_i = 1 \\ b;\ \text{si } y_i = 2 \\ 0{,}3;\ \text{si } y_i = 3 \end{cases}$$

a. ¿Cuáles son los valores de *a* y *b*?

Figura 9. Ejemplo de A5 (T1, p. 142)

A5. Razonamiento algebraico. Involucra la representación, generalización y formalización de regularidades en diversos ámbitos de la matemática, como en probabilidad, con el propósito de ayudar a expresar el pensamiento algebraico (variables, ecuaciones y funciones). Este argumento fue fomentado para justificar procedimientos por cinco libros en el contexto de la variable aleatoria y en tres (T2(2), T4 y T5) para las distribuciones binomial o normal, como se ejemplifica en la Figura 9.

Un juego consiste en sacar una bolita de una urna que contiene **7** bolitas rojas y **3** azules. Gana **$ 500** si la bolita que se extrae es de color rojo y el jugador debe pagar **$ 1.500** en caso de que la bolita sea azul. ¿Es conveniente jugar?

Se considera la v.a. **X:** monto a ganar, por lo tanto **X** puede tomar los siguientes valores:

X = 500 ► Si sale bolita de color rojo, gana **$ 500.**
X = −1.500 ► Si sale bolita de color azul, pierde **$ 1.500.**

La función probabilidad de **X** es:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{7}{10} & \text{si } X = 500 \\ \frac{3}{10} & \text{si } X = -1.500 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto:

$$E(X) = 500 \cdot \frac{7}{10} + (-1.500) \cdot \frac{3}{10} = 350 - 450 = -100$$

Luego, no es un juego conveniente para el jugador, ya que **E(X) < 0.**

SOS MAT

En el ejemplo 2, el valor esperado de la v.a. es la **ganancia media** que se obtiene cuando se juega un número elevado de veces, por lo cual se considera:

- un juego justo si el valor esperado **E(X)** es igual a **0.**
- un juego injusto si **E(X) < 0.**
- un juego favorable si **E(X) > 0.**

Figura 10. Ejemplo de A6 (T4, p. 155)

A6. Razonamiento verbal-deductivo. Reconoce un vínculo entre proposiciones que permiten lograr un resultado necesario de interpretar para obtener conclusiones. Fue utilizado por T1 y T4 en torno a la variable aleatoria para justificar procedimientos y respuesta a problemas, como ejemplifica la Figura 10.

A7. Justificación mediante análisis-síntesis. Indaga las cualidades de un problema propuesto, las cuales conducen a concluir propiedades o características de un concepto. Esto fue promovido por T2(2), T3 y T4 en el ámbito de la variable aleatoria y es ejemplificado en la Figura 11.

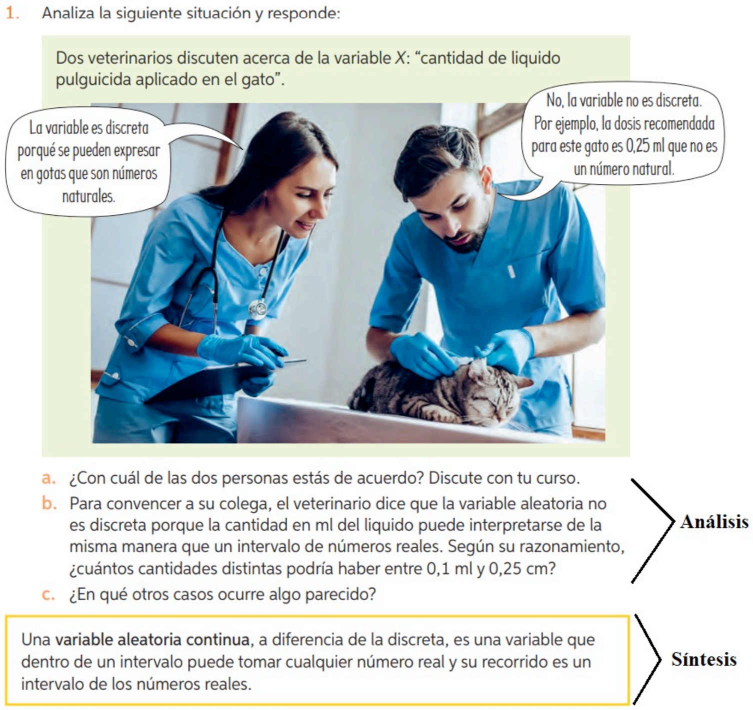


Figura 11. Ejemplo de A7 (T2(2), p. 172)

La Tabla 12 resume los argumentos reconocidos en los libros examinados. Aquella demuestra que los más promovidos fueron la validación mediante ejemplo o contraejemplo y el razonamiento algebraico, presente en ambas series. Del mismo modo, destaca con alta frecuencia la justificación por medio de representación gráfica. Mientras que los mecanismos de validación menos incluidos han sido la simulación con software y la generalización, solamente observados en la serie 2. Además, ningún texto promovió la justificación a través de simulación con objeto manipulable en el contexto de la variable aleatoria o distribución binomial.

Tabla 12
Argumentos sobre variable aleatoria y distribuciones binomial y normal

Argumentos	Variable aleatoria						Distribuciones binomial y normal					
	Serie 1			Serie 2			Serie 1			Serie 2		
	T1	T2(1)	T2(2)	T3	T4	T5	T1	T2(1)	T2(2)	T3	T4	T5
A1. Ejemplos	X		X	X	X	X			X b n		X b	X n
A2. Gráficos	X		X	X	X	X			X b n			
A3. Simulación:												
A3.1. Tecnología				X	X							X n
A3.2. Manipulable***												

Tabla 12

Argumentos sobre variable aleatoria y distribuciones binomial y normal

Argumentos		Variable aleatoria				Distribuciones binomial y normal		
A4. Generalización*								X n
A5. Algebraico	X	X	X	X	X	X b n	X b	X n
A6. Verbal-deductivo** y ***	X			X				
A7. Análisis-síntesis** y ***		X	X	X				

Nota. X: El argumento se usa en el libro para trabajar la variable aleatoria; b: El argumento se usa con la distribución binomial; n: El argumento se usa en la distribución normal. *: No aplica para variable aleatoria; **: No aplica para distribución binomial; ***: No aplica para la normal

Etapa 3: Contraste entre Currículo Escolar Chileno y Libros de Texto

El análisis desarrollado al currículo y textos escolares sobre los objetos matemáticos demostró que entre los documentos existe coherencia en el lenguaje empleado, dado que para la variable aleatoria y distribución normal propusieron cuatro tipos (verbal, simbólico, gráfico y tabular), y en la binomial tres (verbal, simbólico y gráfico), aunque la segunda serie de libros excluyó el lenguaje gráfico.

Sobre las proposiciones identificamos discrepancias solo en la variable aleatoria, pues el currículo sugirió cinco, excluyendo su caracterización mediante la función de distribución. Mientras que la serie 1 propuso seis, y la serie 2 presentó cinco omitiendo la caracterización de variables aleatoria y algebraica. Para las distribuciones binomial y normal aquellas normativas sugirieron una y cinco proposiciones respectivamente, igual que las propuestas por cada serie.

En los conceptos también observamos diferencias: el currículo para la variable aleatoria presentó seis conceptos, excluyendo su función de densidad, mientras que cada serie mostró los siete identificados. En la binomial el currículo promovió cuatro, a diferencia de la primera serie que estableció tres (omitiendo su función de distribución), y la segunda serie dos (omitiendo su media y varianza). Para la normal el currículo sugirió seis, en cambio la serie 1 solo uno, descartando la función de densidad de la normal estándar, media, desviación, moda y mediana, y la serie 2 únicamente presentó cuatro, omitiendo las dos últimas señaladas.

También en los procedimientos existió desarmonía. El currículo para la variable aleatoria promovió cinco, ignorando calcular probabilidades con sus funciones de distribución y densidad. Mientras la serie 1 propuso siete y la serie 2 presentó seis excluyendo determinar probabilidades o su dominio utilizando diagrama de árbol. En la binomial, el currículo presentó tres procedimientos al igual que la primera serie, pero la segunda serie promovió dos, descartando calcular su media y varianza mediante expresiones algebraicas. Para el ámbito de la normal el currículo sugirió tres procedimientos exceptuando la corrección por continuidad, mientras que cada serie de libros cuatro.

Por último, en los argumentos encontramos incongruencias: el currículo en la variable aleatoria fomentó cinco tipos, suprimiendo el razonamiento verbal-deductivo y la justificación mediante análisis-síntesis, a diferencia de la serie 1 que promovió cinco, descartando las simulaciones utilizando herramienta tecnológica y objeto manipulable; por otro lado, la serie 2 promovió seis, omitiendo la última nombrada. Para la binomial, el currículo presentó cinco argumentos, excluyendo la validación mediante ejemplo o contraejemplo, en tanto la primera serie contempló tres, exceptuando la argumentación a través de generalización y simulaciones con herramienta tecnológica y objeto manipulable, y la segunda serie sólo presentó dos, descartando aquellas tres y la justificación mediante gráfica. En la normal, el currículo promovió cuatro, omitiendo el argumento mediante ejemplo o contraejemplo, mientras que la serie 1 sugirió tres, descartando la validación mediante simulación con herramienta tecnológica y generalización, y la serie 2 contempló cuatro, suprimiendo la justificación por medio de representación gráfica.

Discusión y conclusiones

El análisis realizado permitió mostrar cómo es abordada la variable aleatoria y sus aplicaciones sobre distribuciones de probabilidad en libros de texto escolares chilenos, por ello se analizaron las lecciones sobre estos temas en cinco libros de texto, dirigidos a los grados 9º a 12º, desde la perspectiva del EOS. Así evidenciamos que existen objetos matemáticos identificados en el currículo chileno que fueron excluidos de los libros de texto, y viceversa, demostrándose una falta de coherencia entre las directrices propuestas por el MINEDUC (2015; 2019a) y aquel recurso. En términos del EOS, la indagación del lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos en los libros chilenos en torno a los temas en cuestión posibilitó el análisis de los principales elementos que contribuyen a la resolución de las situaciones-problemas propuestas en estos textos escolares (Bizet et al., en prensa-a), donde aquellos objetos matemáticos se organizan formando la configuración epistémica de textos escolares chilenos sobre variable aleatoria y distribuciones binomial y normal.

El estudio desarrollado muestra sobre el tratamiento de la variable aleatoria en textos escolares que en el contexto escolar chileno el lenguaje sugerido concuerda con los cuatro tipos observados por Doukhan y Gueudet (2019) en el ámbito francés. Este escenario podría favorecer a mejorar el conocimiento de los estudiantes chilenos sobre el concepto en cuestión, es decir, los resultados constatados por Bizet y Ramos (2022), quienes observaron en la resolución a un problema que el 64% de aquellos participantes identificó y representó en lenguaje verbal, figural o tabular la variable aleatoria y el 59% su distribución de probabilidad.

Además, la variedad de conceptos en torno a la variable aleatoria (siete, desde C1 a C5.3) y sus proposiciones (seis, desde PP1 a PP6) identificadas en los textos chilenos, evidencia resultados más alentadores que los observados por Ortiz (2002) en el contexto español, quien constató en tales libros solo uno y tres de estos tipos de objetos respectivamente. En Chile, aquella realidad promueve el estudio de variable aleatoria en la escuela y está en consonancia con directrices curriculares internacionales que recomienda fomentar su conocimiento entre los conceptos probabilísticos básicos (Bargagliotti et al., 2020; NCTM, 2000). Sin embargo, el procedimiento de emplear diagrama de árbol fue poco promovido en los libros chilenos, siendo algo que favorece posteriormente la comprensión de la binomial (Sánchez y Landín, 2014).

Por otra parte, este trabajo actualiza el estudio de Li et al. (2021), quienes reconocieron sobre la binomial 12 temas en textos escolares, pues nuestra investigación indagó de manera diferenciada el lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos en torno a aquel modelo. Aunque en este contexto constatamos que los libros chilenos excluyen el lenguaje tabular. La ausencia de la representación tabular de un concepto probabilístico, en el inicio o transición de su estudio, para Lugo-Armenta y Pino-Fan (2021) es una situación preocupante, debido a que no se diversifica los tipos de lenguajes y transiciones entre estos, y limita el desarrollo de habilidades de razonamiento estadístico, siendo este último aspecto una necesidad en todo egresado de educación escolar para afrontar los requerimientos de la ciudadanía (Bargagliotti et al., 2020). Este escenario es contario al resultado de Setiawan (2020) que observó en el ámbito indonesio la utilización del lenguaje tabular de la binomial para calcular probabilidades. Por tanto, recomendamos incluir la tabla de su función de probabilidad y aquel procedimiento que involucra su uso.

Respecto al tratamiento de la normal en libros escolares concluimos aspectos positivos y negativos. Del lado positivo, actualizamos el estudio de Setiawam (2020), quien identificó sobre ella 19 temas, pues nosotros diferenciamos sus objetos matemáticos, identificando en los textos chilenos los mismos cuatro lenguajes observados por Valverde (2017). Un procedimiento más que esta (la corrección por continuidad). Como negativo, reconocemos que los libros analizados promovieron solo introducir conceptos de forma estructural y operacional, similar a lo expuesto en otro trabajo desarrollado en España que señala alto nivel de formalidad (Valverde, 2017), este resultado podría implicar una agudización de aquellos problemas de los estudiantes señalados por Valdez y Salinas (2019) como identificar la relación entre la probabilidad y el área bajo la curva normal y comprender algunas etapas del proceso de estandarización.

También el tratamiento de la normal en los textos indagados incluyó menor variedad de mecanismos de validación que los observados por Valverde (2017), destacando entre los más presentados la validación mediante ejemplos y contraejemplos, concordando con ella, y como menos fomentados la simulación con herramienta tecnológica. Sin embargo, lineamientos curriculares internacionales recomiendan que los estudiantes realicen simulaciones mediante software para construir distribuciones de probabilidad empíricas, comparando estos resultados con las distribuciones de probabilidad teóricas (NCTM, 2000), como por ejemplo la normal y binomial, debido a que la tecnología es una buena herramienta para mejorar la comprensión de estas dos distribuciones (Choo-Kim y Choo-Peng, 2015).

Este estudio completa nuestros trabajos previos respecto a aspectos involucrados en las situaciones-problemas sobre variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad presentes en: (a) el currículo escolar chileno (Bizet et al., en prensa-b) que en conjunto representan el significado institucional de referencia de los tópicos de interés; (b) textos escolares chilenos (Bizet et al., en prensa-a) que unidos representan el significado institucional pretendido de los temas en cuestión. Por tanto, la información presentada es un insumo valioso para los profesores de matemática, investigadores de su didáctica y encargados de elaborar libros de texto, interesados en diseñar propuestas de enseñanza en beneficio de mejorar la educación estocástica escolar.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto B-SEJ-063-UGR18 y Grupo SEJ622 (Junta de Andalucía). La investigación ha sido financiada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) del Gobierno de Chile a través de la beca de doctorado en el extranjero (folio-72200367).

Referencias

Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). El significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios Pedagógicos, 34*(2),7-28. https://doi.org/10.4067/S0718-07052008000200001

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II)*. American Statistical Association.

Batanero, C., Gea, M., Díaz-Levicoy, D. y Cañadas, G. (2015). Objetos matemáticos ligados a la regresión en los textos españoles de bachillerato. *Educación Matemática, 27*(2), 9-35.

Bizet, V. Molina-Portillo, E. y Contreras, J.M. (en prensa-a). Situaciones-problemas sobre variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad según libros de texto chilenos. *Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado.*

Bizet, V., Molina-Portillo, E., Ruz, F. y Contreras, J.M. (en prensa-b). Elaboración de una Guía de Situaciones-Problema sobre Variable Aleatoria y sus Aplicaciones a partir del Currículo Escolar Chileno. *Educación Matemática*.

Bizet, V. y Ramos, E. (2022). Valoración de una situación didáctica para la enseñanza de variable aleatoria y distribución de probabilidad en la educación secundaria chilena. *Innovaciones Educativas, 24*(36), 21-36. http://dx.doi.org/10.22458/ie.v24i36.3897

Blanco, M., Bozt, J., Calderón, F., Jiménez, M., González, M., López, G., et al. (2009a). *Matemática 2 proyecto bicentenario*. Santillana.

Blanco, M., Bozt, J., Calderón, F., Romero, L., Jiménez, L. y Jammet, C. (2009b). *Matemática 3 proyecto bicentenario.* Santillana.

Choo-Kim, T. y Choo-Peng, T. (2015). Effects of the handheld technology instructional approach on performances of students of different achievement levels. *Computers and Education, 82*, 306-314. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.11.011

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (Tesis Doctoral). Granada, Universidad de Granada, España.

Departamento de Investigaciones Educativas. (2014). *Matemática 4 proyecto bicentenario.* Santillana.

Díaz, E., Ortiz, N., Morales, K., Rebolledo, M., Barrera, R. y Norambuena, P. (2020). *Texto del estudiante de matemática 2° medio*. Ediciones SM.

Doukhan, C. y Gueudet, G. (2019). Students' difficulties at the secondary-tertiary transition: the case of random variables. En U. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2464-2471). Freudenthal Group y Freudenthal Institute of the Utrecht University y ERME.

Escolano, A. (2009). El manual escolar y la cultura profesional de los docentes. *Tendencias pedagógicas, 14,* 169-180.

Font, V. y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97-124. https://doi.org/ 10.1007/s10649-012-9411-0

Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. Gea, B. Giacomone y M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemático* (pp. 1-20). Universidad de Granada.

Godino, J., Font, V. y Batanero, B. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista chilena de educación matemática, 12*(2), 3-15. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Editorial McGraw Hill Education.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica.* Paidós.

Li, J., Cheng, J., An, T. y Zhou, D. (2021). Comparative Study on Binomial Distribution Content in High School Textbooks. En J. Wang (Ed.), *School mathematics textbooks in China, comparative studies and beyond* (pp. 107-136). Word Scientific.

Lugo-Armenta, J. y Pino-Fan, L. (2021). Niveles de Razonamiento Inferencial para el Estadístico t-Student. *Bolema, 35*(71), 1776-1802. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a25

Ministerio de Educación de Chile (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Gobierno de Chile. Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile (2016). *Matemática, programa de estudio segundo medio.* Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile (2019a). *Chile. Bases Curriculares 3º y 4º medio.* Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile (2019b). *Programa de estudio matemática 3° medio para formación general.* Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile (2019c). *Programa de estudio matemática 4° medio para formación general.* Unidad de Currículum y Evaluación.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers (2010). *Common Core State Standars for Mathematics*. NGACBP and CCSSO.

Ortiz, J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto.* Grupo de Investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada.

Osorio, G., Norambuena, P., Romante, M., Gaete, D., Díaz, J., Celedón, et al. (2019). *Texto del estudiante de matemática 3° y 4° medio.* Ediciones SM.

Pfannkuch, M. (2018). Reimagining curriculum approaches. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 387-413). Springer.

Sánchez, E. y Landín, P. (2014). Levels of probabilistic reasoning of high school students about binomial problems. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking presenting plural perspectives* (pp. 581-597). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_31

Setiawan, E. (2020). Introducing statistical inference to senior high school students: a textbook analysis. *Journal of Physics: Conference Series, 1663*, 12014. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1663/1/012014

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. https://doi.org/ 10.1007/BF00302715

Valdez, J. y Salinas, J. (2019). Análisis de las respuestas de estudiantes de bachillerato a problemas sobre la distribución normal. En J. M. Contreras, M. Gea, M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-10). Universidad de Granada.

Valverde, M. (2017). *Un estudio de la presentación de la distribución normal en los textos de bachillerato* (Trabajo Fin de Máster). Granada, Universidad de Granada, España.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 19*(2), 441-462.

Vásquez, C. y Alsina. Á. (2017). Proposiciones, procedimientos y argumentos sobre probabilidad en libros de texto chilenos de educación primaria. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 21*(1), 433-457.

Valeria Bizet Leyton
Universidad de Granada
valeriabizet@gmail.com

Elena Molina Portillo
Universidad de Granada
elemo@ugr.es

José Miguel Contreras
Universidad de Granada
jmcontreras@ugr.es

Recibido: Julio de 2021. Aceptado: Diciembre de 2022
doi: 10.30827/pna.v17i2.21820

ISSN: 1887-3987

Mathematical Objects Linked to Random Variable and its Applications on Probability Distributions in Chilean Secondary School Textbooks

Valeria Bizet, Elena Molina-Portillo and José Miguel Contreras

This research aims to analyse the treatment given to the random variable and its applications to probability distributions in five Chilean textbooks for grades 9 to 12 from the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction perspective. This study was conducted from a qualitative approach and is exploratory-descriptive. Its development comprised three stages based on a model for analysing mathematical objects in textbooks. In the first stage, the leading Chilean curricular documents for grades 9 to 12 were analysed using the content analysis technique. The language, concepts, propositions, procedures and arguments linked to the random variable and binomial and normal distributions were identified. In the second stage, through content analysis, five Chilean textbooks still in force in the 2021 school year were investigated, and the primary mathematical objects on the topics of interest were recognized. In the third stage, a contrast was made between the mathematical objects linked to the random variable and probability distributions present in the Chilean curriculum and school textbooks. The results show a diversity of languages, concepts, propositions, procedures and arguments linked to the topics. However, some are identified in the curriculum and excluded in books or vice versa: about the language of the random variable and normal distribution, those documents are coherent, unlike what is observed for the binomial; regarding the propositions on binomial and normal distributions, there is harmony between the curriculum and Chilean books, although there are discrepancies about the random variable; about the concepts linked to the random variable and binomial and normal distributions, there is incongruence between the documents analysed; concerning the procedures around the random variable and binomial and normal distributions, there is disharmony between the curriculum guidelines and Chilean texts; and regarding the arguments on the random variable and binomial and normal distributions, there is incongruence between the documents.