CONEXIONES MATEMÁTICAS ASOCIADAS A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Enrique Dans-Moreno, Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez y Javier García-García

En este artículo, se muestran las conexiones matemáticas que establecen estudiantes universitarios al resolver tareas que involucran Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden. Consideramos las conexiones matemáticas como un proceso mediante el cual una persona relaciona una o más ideas, conceptos, representaciones, teoremas o significados entre sí, con los de otras disciplinas o con situaciones de la vida real. Se utilizó la entrevista basada en tareas para la recolección de datos, que fueron analizados con el método de análisis temático. Los resultados indican el uso de siete tipos de conexiones matemáticas: representaciones diferentes, procedimental, significado, característica, parte-todo, implicación y reversibilidad. No obstante, se observó que un desempeño académico alto no es indicador de que las conexiones emerjan adecuadamente en la resolución de tareas.

Términos clave: Conexiones matemáticas; Ecuación diferencial; Educación Matemática

Mathematical connections associated with first order ordinary differential equations

This paper shows the mathematical connections that university students make when solving tasks involving first-order Ordinary Differential Equations. We consider mathematical connections as a process by which a person relates one or more ideas, concepts, representations, theorems, or meanings to each other, to those in other disciplines or to real-life situations. For data collection, task-based interviews were used, which were analyzed with the Thematic Analysis method. The results indicate the use of seven types of mathematical connections: different representations, procedural, meaning, characteristic, part-whole, implication and reversibility. However, it was observed that a high academic performance

Dans-Moreno, E., Rodríguez-Vásquez, F. M. y García-García, J. (2022). Conexiones matemáticas asociadas a las ecuaciones diferentes ordinarias de primer orden. *PNA 17*(1), 25-50. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.23748

is not an indicator that the connections emerge adequately in the resolution of tasks.

Keywords: Differential equation; Mathematical connections; Mathematics Education

Conexões matemáticas associadas a equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

Neste artigo, se mostra as conexões matemáticas que fazem os estudantes universitários ao resolver tarefas que incluem as Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem. Consideramos as conexões matemáticas como um processo mediante o qual uma pessoa relaciona uma ou mais ideias, conceitos, representações, teoremas ou significados entre si, com os de outras disciplinas ou com situações da vida real. Para a coleta de dados foi utilizado a entrevista baseada em tarefas, as quais foram analisadas com o método de análise temático. Os resultados indicam o uso de sete tipos de conexões matemáticas: representações diferentes, procedimental, significado, característica, parte-todo, implicação e reversibilidade. Contudo, foi observado que um desempenho acadêmico alto não é indicador de que as conexões emergem adequadamente na resolução de tarefas.

Palavras chave: Conexão matemática; Equação diferencial; Educação Matemática

La matemática es una disciplina científica, en la cual, se puede identificar una variedad de relaciones entre conceptos, definiciones, axiomas, teoremas y otros objetos matemáticos, es decir, existen conexiones en ella por su propia naturaleza (Businskas, 2008). De acuerdo con Bingölbali y Coşkun (2016), esta característica ha hecho que la matemática sea vista como una disciplina secuencial y acumulativa, puesto que los temas matemáticos se construyen unos sobre otros, están interrelacionados y se utilizan conocimientos o conceptos previos para definir nuevos conceptos y construir nuevos temas.

En la enseñanza-aprendizaje de la matemática, las conexiones matemáticas tienen un papel fundamental para la comprensión acerca de los conceptos matemáticos, dado que el aprendizaje de nuevos conceptos requiere establecer conexiones entre conceptos previos y los conceptos aprendidos (Barmby et al., 2009; Evitts, 2004; Mhlolo, 2012; Mousley, 2004; Silver et al., 2009). Incluso Bingölbali y Coşkun (2016) señalan que hacer conexiones matemáticas es una habilidad fundamental que deben tener los estudiantes. Particularmente, Karakoç y Alacacı (2015) mencionan que se favorece el desempeño de los estudiantes cuando realizan conexiones entre la matemática y situaciones de la vida real. Además, las conexiones matemáticas contribuyen a esquematizar la disciplina no solo desde su enfoque abstracto sino desde una percepción real, y aumentan la motivación de los estudiantes hacia las matemáticas (Umay, 2007).

La literatura reporta que las conexiones matemáticas han sido estudiadas con diversos objetivos, por ejemplo, hay investigaciones de las conexiones entre la matemática y el mundo real (Karakoç y Alacacı, 2015; Lee, 2012; Özgen, 2013), se han definido diferentes tipologías de conexiones matemáticas (Businskas, 2008; Eli et al., 2011; Evitts, 2004; García, 2018), se ha investigado la calidad de las conexiones matemáticas asumiendo que, si el estudiante presenta mejor calidad en sus conexiones, su comprensión puede ser más profunda y duradera (Mhlolo, 2012; Mhlolo et al., 2012; Rodríguez-Nieto et al., 2021), también hay investigaciones que valoran la habilidad de hacer conexiones (Bingölbali y Coşkun, 2016; Mumcu, 2018). Estas investigaciones resaltan que se debe hacer uso de las tipologías de conexiones matemáticas, estudiar cómo los estudiantes hacen conexiones, la calidad de estas y qué tipo de conexiones matemáticas realizan.

Estos estudios han motivado a investigar las conexiones matemáticas que emergen en el contexto de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), ya que este tipo de ecuaciones sugieren las conexiones matemáticas no solo entre objetos de la matemática misma, sino de estos con situaciones de la vida real. Perdomo (2011) menciona que las EDO tienen un papel relevante en la investigación en Didáctica de la Matemática dado que favorecen el estudio de fenómenos de variación y procesos de modelación, además, permiten analizar y solucionar problemas que surgen en diferentes contextos. Adicionalmente, se interrelacionan con diferentes conceptos esenciales en matemáticas como son funciones, derivadas e integrales (Arslan, 2010). Por lo anterior, se ha planteado como objetivo identificar las conexiones matemáticas que hacen los estudiantes universitarios al resolver tareas que involucran EDO de primer orden.

Marco conceptual

Conexiones matemáticas

Existen diversas acepciones respecto a lo que son las conexiones matemáticas, por ejemplo: se entienden como una relación o asociación causal o lógica, una interdependencia (Brown, 1993); son ideas o procesos amplios que pueden usarse para vincular diferentes temas en matemáticas (Coxford, 1995); en los procesos matemáticos implican establecer relaciones entre distintos objetos matemáticos (Godino et al., 2003); son redes de enlaces que coordinan definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos para construir interconceptos. Dichos enlaces son vínculos lógicos y coherentes entre representaciones (De Gamboa y Figueiras, 2014); Eli et al. (2011), desde una perspectiva constructivista, consideran una conexión matemática como un enlace (o puente) en el que se utiliza el conocimiento previo o nuevo para establecer o fortalecer una comprensión de las relaciones entre ideas matemáticas, conceptos y representaciones dentro de una red mental; Businskas (2008) menciona que una conexión matemática es una relación verdadera entre dos ideas matemáticas A y B. En este artículo, de acuerdo a García-García y Dolores-Flores (2018), se consideró que las conexiones matemáticas son un proceso mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real.

Tipologías de conexiones matemáticas

Dado que el objetivo fue identificar conexiones matemáticas, se han considerado las tipologías propuestas por García-García y Dolores-Flores (2021) (ver figura 1):

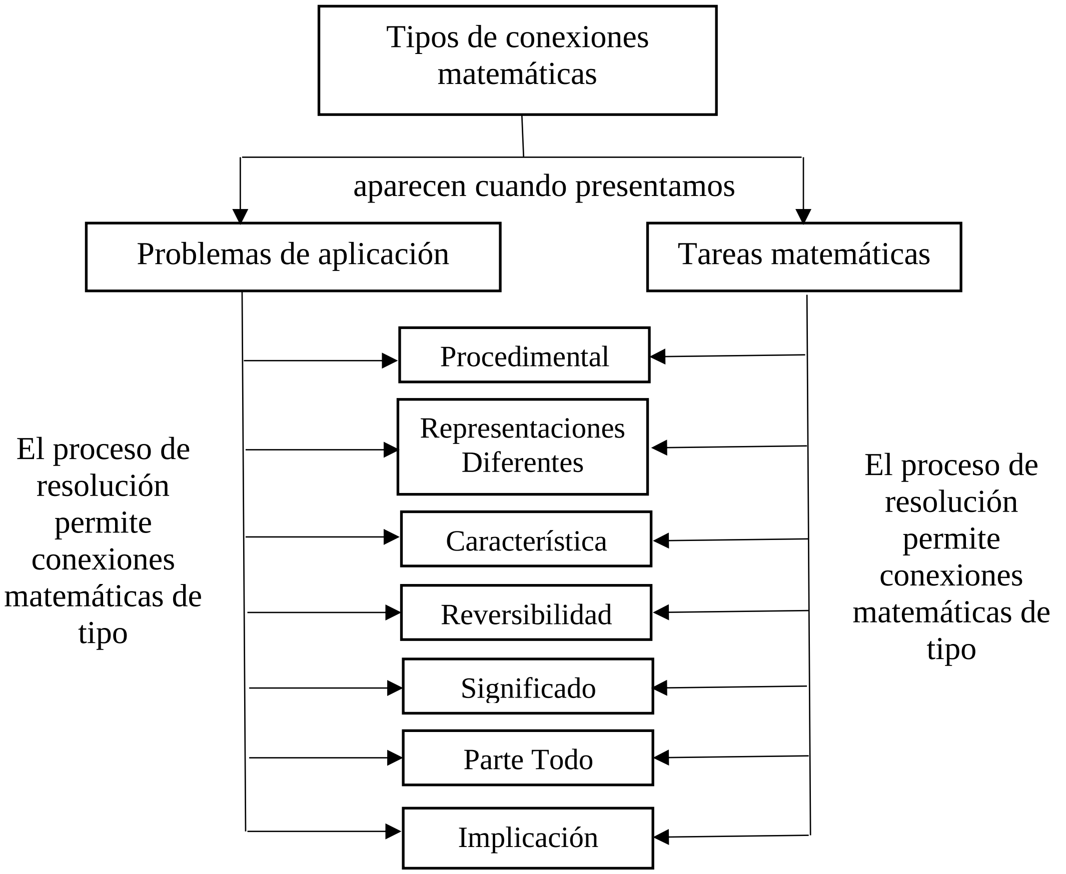


Figura 1. Tipología de conexiones matemáticas (adaptado de García-García y Dolores-Flores, 2021)

García-García y Dolores-Flores (2021) señalan que las conexiones se presentan cuando un estudiante relaciona o asocia conceptos matemáticos entre sí para resolver tareas matemáticas o problemas de aplicación, es decir, que las conexiones matemáticas podrían emerger dentro de la matemática misma o entre entidades matemáticas pero también involucrar conceptos de otras disciplinas. A continuación, se describe cada una de ellas:

- Procedimental: se manifiesta cuando los estudiantes utilizan reglas, algoritmos o fórmulas para resolver una tarea matemática e incluyen explicaciones para lograr un resultado. Por ejemplo, cuando un estudiante utiliza el factor integrante para encontrar la solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria.
- Representaciones diferentes: se manifiesta de dos formas: a) "representaciones alternativas", cuando los estudiantes utilizan dos o más representaciones para interpretar un concepto matemático (algebraico-gráfico, verbal-algebraico, etc.); b) "representaciones equivalentes", cuando los estudiantes representan el mismo concepto matemático de dos maneras diferentes dentro de la misma representación. Por ejemplo, la ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ y la representación gráfica del campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial son representaciones alternativas.
- Característica: se manifiesta cuando los estudiantes identifican en los conceptos matemáticos atributos o cualidades que los hacen diferentes de otras características. Estas son de ayuda en el momento de distinguir un concepto matemático de otro, para diferenciar simbologías matemáticas, la forma en que pueden ser representados o pueden ayudar a identificar cierto orden que favorece algunos cálculos. Asimismo, se manifiesta cuando se describen las propiedades de los conceptos. Por ejemplo, cuando un estudiante distingue las ecuaciones diferenciales de las ecuaciones estudiadas previamente al utilizar la simbología de la derivada $\frac{dy}{dx}$ o $f'(x)$.
- Reversibilidad: se manifiesta cuando los estudiantes pueden partir de un concepto A para llegar a un concepto B e invertir el proceso partiendo de B para regresar a A. Esto implica que los estudiantes pueden partir de un punto final y seguir el curso de un razonamiento hasta llegar a un punto inicial y viceversa. Tienen la particularidad de ser bidireccionales, por ejemplo, cuando el estudiante resuelve la ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$ reconociendo que tiene la derivada de la función y para encontrar la función solo es necesario integrar.
- Significado: se manifiesta cuando los estudiantes le atribuyen un sentido propio a un concepto matemático, es decir, lo que significa para ellos. Puede incluir la definición que ellos han construido para estos conceptos. Es diferente de la conexión matemática característica porque no se describen propiedades ni cualidades. Por ejemplo, cuando el estudiante utiliza o plantea la definición de un concepto haciendo uso del significado construido por él.
- Parte-todo: se manifiesta cuando los estudiantes reconocen relaciones lógicas entre los conceptos matemáticos, ya sea de generalización (entre casos generales y particulares) o de inclusión (cuando un concepto

matemático está contenido en otro). Por ejemplo, de una ecuación diferencial en particular logran llegar a su generalización, o viceversa.

Además, se ha considerado también la tipología implicación propuesta por Businskas (2008):

- Implicación: se manifiesta cuando de una premisa A se llega a una premisa B de forma lógica. Tiene la forma de "si…, entonces…". Por ejemplo: si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la Ecuación Diferencial Ordinaria es exacta.

METODOLOGÍA

La investigación es cualitativa y empleó un estudio de caso. Esta forma de investigación permite centrarse en la búsqueda de significado y comprensión, donde el producto final es descriptivo (Merriam y Tisdell, 2016). Además, implica un proceso de búsqueda que se caracteriza por el análisis detallado, comprehensivo y sistemático del fenómeno de estudio (Rodríguez et al., 1999). En particular, nos centramos en comprender el problema mediante los casos, porque ayuda a generar una mayor comprensión de la explicación teórica que sustenta el problema (Stake, 1995). Además, este enfoque permite realizar la investigación de manera exhaustiva sobre las conexiones matemáticas.

Método de recolección de datos

La entrevista basada en tareas (en adelante, EBT) se utilizó como método para la recolección de los datos, dado que permitió obtenerlos a partir de las producciones escritas y también de los testimonios verbales y gestuales que utilizaron los estudiantes. De acuerdo con Goldin (2000), la EBT involucra un entrevistador (investigador) y un sujeto (estudiante), que interactúan en torno a una o más tareas (preguntas, problemas o actividades), el investigador al analizar el comportamiento o las interacciones verbales y no verbales puede hacer inferencias sobre el conocimiento, el aprendizaje y las formas de interpretación. Se eligió este método porque permitió centrar la atención en los procesos de los estudiantes al resolver tareas matemáticas en lugar de solo tener en cuenta respuestas correctas e incorrectas de los resultados. En este sentido, se profundizó en las producciones escritas y orales (argumentos) de los estudiantes que realizaron durante la resolución de las tareas propuestas.

Contexto de la investigación y participantes

La investigación se desarrolló en la facultad de matemáticas de una Universidad ubicada en la región sur de México. Los participantes fueron cuatro estudiantes (20 – 22 años) de sexto semestre, quienes se eligieron de acuerdo con las siguientes características: haber aprobado el curso de Ecuaciones Diferenciales I, colaborar voluntariamente y con buena disposición y haber tenido un alto desempeño durante el curso de sexto semestre, es decir, estudiantes con promedio mayor o igual a 8.

En adelante, se denota a los estudiantes por E1, E2, E3, E4 y al entrevistador por I.

Diseño de la entrevista basada en tareas

Se elaboró un instrumento que permitiera obtener las respuestas lo más naturalmente posible de los estudiantes al resolver tareas que involucran a las EDO de primer orden. Inicialmente, se propusieron seis tareas retomadas de Perdomo (2011), las cuales fueron adaptadas teniendo presente la clasificación de los tipos de tareas de EDO, libros de textos de ecuaciones diferenciales (por ejemplo, Zill y Cullen, 2009; Zill y Wright, 2015) y el programa de estudio de la asignatura. Las tareas fueron validadas por expertos y usuarios a fin de valorar el alcance del objetivo de investigación. La validación por expertos se dejó a cargo de dos profesores, con 20 y 4 años de experiencia, respectivamente, impartiendo el curso de Ecuaciones Diferenciales I. Los criterios de la validación del contenido de las tareas fueron: claridad en la redacción, nivel de dificultad de los problemas, información correcta adecuada al objetivo.

Asimismo, se consideraron los criterios de Goldin (2000) para diseñar y construir una EBT: elegir tareas asequibles para los sujetos, es decir, tareas que incorporan ideas y estructuras matemáticas apropiadas para los estudiantes; fomentar la libre resolución de problemas; decidir qué grabar; refinar cada una de las tareas y preguntas. Posteriormente, se diseñó el instrumento final, el cual consistió en tres tareas (ver tabla 1).

Tabla 1
Tareas planteadas a los estudiantes

Tarea 1. Justifica, de forma razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
La función $xy^2 + \frac{x^3}{3} = 1$ es una solución particular de la ecuación diferencial $$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$$
La familia de funciones $y = \frac{c}{x} + 2$ es una solución de la ecuación diferencial $$\frac{dy}{dx} = \frac{(2 - y)}{x}$$
¿Qué es una ecuación diferencial?
¿Qué es una solución particular y general?
¿Cómo resolver varios tipos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden (separable, lineal y exacta)?

Tabla 1
Tareas planteadas a los estudiantes (continuación)

Tarea 2. Resuelve la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{1}{x}$. Dibuja el campo de direcciones asociado a esta ecuación y una solución correspondiente a $x = 1$. ¿Qué es un campo de direcciones?
Tarea 3. Se sabe que la población de una ciudad crece a medida que pasa el tiempo, verificando la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = K, K > 0$. Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40000 habitantes. ¿Cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese periodo de cinco años?

Análisis de datos

Para el análisis de los datos se utilizó el análisis temático (Braun y Clarke, 2006, 2012), cuyo objetivo es identificar patrones de significados (Temas) de un conjunto de datos que se obtienen de las respuestas a las tareas planteadas en la investigación. En otras palabras, permite examinar e identificar patrones en datos cualitativos. Este método está compuesto por seis fases y se describe a continuación cómo se realizó el análisis.

- Fase 1. Familiarizarse con los datos. Se transcribió cada entrevista, esto permitió tener ideas iniciales sobre las conexiones matemáticas que realizaron los estudiantes.
- Fase 2. Generar códigos iniciales. Se identificaron en las transcripciones relaciones entre dos o más conceptos, definiciones, teoremas, significados entre sí; permitiendo generar códigos relacionados con las conexiones matemáticas. Por ejemplo, el estudiante E2 argumentó que identifica las EDO por la notación de la derivada $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, lo que nos permitió generar el código: "la derivada permite identificar la existencia de una ecuación diferencial". Este proceso se realizó con las transcripciones de los cuatro estudiantes.
- Fase 3. Buscar temas. Se asignaron y ordenaron códigos relacionados entre sí y se establecieron familias de códigos (subtemas). Esto permitió agrupar aquellos códigos con el mismo patrón de respuesta. Los subtemas construidos fueron asociados a un tipo de conexión matemática (Temas). Cada subtema es un tipo de conexión matemática específica dentro de las ecuaciones diferenciales (construido a partir de los datos) y cada tema es un tipo de conexión matemática (proporcionada en el marco).
- Fase 4. Revisión de los temas. Se realizaron dos niveles de revisión (Braun y Clarke, 2006). En el primer nivel, se revisaron los datos codificados, se observaron todos los códigos confeccionados para cada tema y se prestó atención a si estos formaban un patrón coherente. En el segundo nivel, se realizó un proceso similar, pero teniendo presente todo el conjunto de datos.

Además, para cada nivel se realizó una triangulación entre los investigadores para incrementar la calidad y validez del análisis de los datos. Esto permitió refinar el proceso de identificación de las conexiones matemáticas.

- Fase 5. Definición y nombre de los temas. Se definió y se nombró cada tipo de conexión matemática identificada en los datos durante las sesiones de trabajo.
- Fase 6. Elaboración del informe. El informe incluyó los subtemas definidos y agrupados en temas que contienen las conexiones matemáticas identificadas.

RESULTADOS

Mediante el análisis temático se construyeron 17 subtemas y cada subtema fue asociado a un tipo de conexión matemática (Temas) definida en el marco conceptual (ver tabla 2). Las conexiones emergieron cuando los estudiantes resolvieron las tareas propuestas en la investigación, es decir, al comprobar si una expresión algebraica es solución particular o general de una EDO, al usar conocimientos matemáticos estudiados con anterioridad, al representar y/o interpretar el campo de direcciones asociado a una EDO y al interpretar la información proporcionada en términos algebraicos en un contexto de la vida real.

Tabla 2
Conexiones realizadas por los estudiantes

Temas	Subtemas	Frecuencia
Procedimental	Una función es solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria cuando esta satisface la ecuación diferencial.	2
	Para encontrar la solución de una ecuación diferencial de variables separables se separan las variables y se integra.	5
Representaciones	El campo de direcciones de una ecuación diferencial se representa mediante la interpretación geométrica de la derivada.	2
	El valor inicial de una Ecuación Diferencial Ordinaria se representa por la expresión $p(0)$.	1
	La representación verbal “En cinco años se ha alcanzado la cifra de 40.000 habitantes” se puede representar algebraicamente por $p(5) = 40000$.	1

Tabla 2
Conexiones realizadas por los estudiantes (continuación)

Temas	Subtemas	Frecuencia
Característica	La derivada es una componente de la ecuación diferencial.	2
	Las ecuaciones diferenciales separables tienen la característica de separar las variables x e y.	1
Significado	Una ecuación diferencial es la relación de una función con sus derivadas.	1
	Una ecuación diferencial es una ecuación en donde las soluciones son funciones.	2
	El campo direccional es una representación gráfica que permite observar el comportamiento que tiene la solución de la ecuación diferencial.	1
	La solución general es una familia de funciones que satisface una ecuación diferencial.	1
Parte-todo	La constante C de una solución general de una ecuación diferencial puede tomar un valor cualquiera de los reales.	1
	Por $x = 1$ pasa una curva de la familia de funciones del tipo logarítmica.	1
Parte-todo (continuación)	Una ecuación diferencial exacta es de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.	1
	Las ecuaciones diferenciales de variables separables tienen la forma $f(y)dy = f(x)dx$.	1
Reversibilidad	La derivada y la integral son operaciones inversas.	1
Implicación	Una ecuación diferencial es exacta si $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial y}$.	1

Conexiones matemáticas de tipo procedimental

Los estudiantes E2 y E3 al resolver la Tarea 1, es decir, cuando justificaron que la familia de funciones $y = \frac{c}{x} + 2$ es una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{(2-y)}{x}$, argumentaron que es necesario comprobar si la función satisface la ecuación diferencial haciendo uso de reglas matemáticas. En este sentido, se identificó una conexión matemática de tipo procedimental cuando los estudiantes, guiados por su noción del concepto de solución de una ecuación diferencial, encontraron la derivada de la solución, sustituyeron la solución en la ecuación diferencial y finalmente realizaron los cálculos necesarios obteniendo las dos expresiones iguales (ver extracto del diálogo con estudiante E3 y ver figura 2).

I: Si preguntara, ¿esta función ($y = \frac{c}{x} + 2$) es solución de la ecuación EDO? ¿Qué harías?

E3: Pues, solo debe satisfacer la ecuación.

I: Explícame lo que me dijiste.

E3: Tengo la función($y = \frac{c}{x} + 2$), la derivo respecto a x, obtengo la derivada.

I: ¿La derivada a qué es igual?

E3: Es esta ($y' = -\frac{c}{x^2}$) menos c sobre x cuadrada.

I: ¿Y la ecuación?

E3: La ecuación es 2 menos y sobre x $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x}\right)$.

I: Entonces, para que satisfaga, ¿qué debe pasar?

E3: Sustituimos el valor de y $\left(y = \frac{c}{x} - 2\right)$ acá (señala $\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x}$) pues es lo mismo que llegamos acá (señala $y' = -\frac{c}{x^2}$).

I: ¿Será cierto eso?

E3: Sí, es cierto

I: ¿A ver?

E3: (realiza el procedimiento)

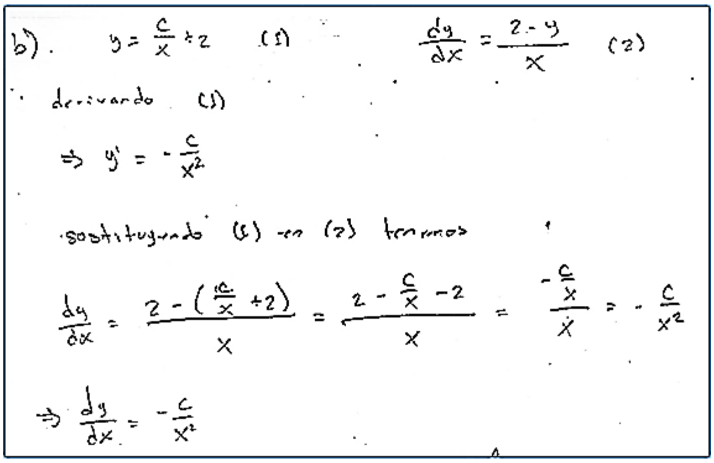


Figura 2. Procedimientos hechos por E3 para resolver la Tarea 1

Este procedimiento corresponde al subtema “Una función es solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria cuando esta satisface a la ecuación diferencial”.

Por otro lado, los estudiantes E1, E3 y E4, al resolver una ecuación diferencial de variables separables, indicaron que, para encontrar la solución, es necesario separar las variables e integrar. Esto corresponde al subtema “Para encontrar la solución de una ecuación diferencial de variables separables se separan las variables y se integra.” (ver extracto del diálogo con E1 y ver figura 3).

I: ¿Cómo llegas a esta forma ($f(y)dy = f(x)dx$)?

E1: Despejando

I: ¿Cómo sigue…?

E1: Nos queda esto (señala $\frac{1}{2-y}dy = \frac{1}{x}dx$) y lo único que hay que hacer es integrar los dos (señala $\int \frac{1}{2-y}dy = \int \frac{1}{x}dx$)

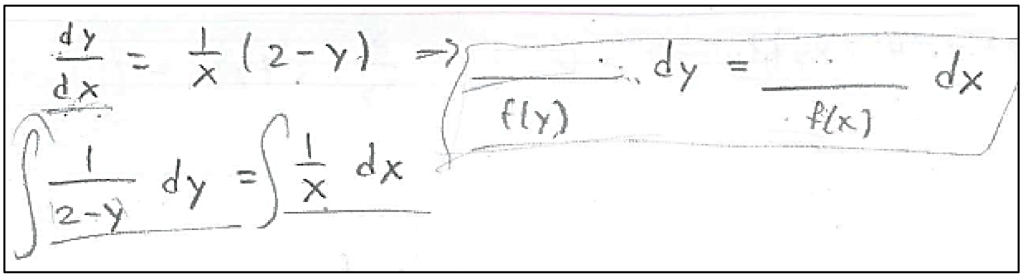


Figura 3. Procedimientos hechos por E3 para resolver la Tarea 1

La conexión matemática de tipo procedimental se identificó en los cuatro participantes que intervinieron en la investigación. Los estudiantes, en general, utilizaron diferentes métodos para resolver las tareas establecidas, esto permitió identificar este tipo de conexión matemática.

Conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes

La conexión de representaciones se identificó en el tránsito entre diferentes registros de representación. Por ejemplo, en el subtema “El campo de direcciones de una ecuación diferencial se representa mediante la interpretación geométrica de la derivada”, los estudiantes E1 y E3 lograron transitar entre la expresión analítica de una ecuación diferencial y la representación gráfica del campo direccional asociado a la ecuación diferencial, al resolver la Tarea 2.

En particular, el estudiante E3 al representar el campo direccional realiza representaciones algebraicas de la ecuación de una recta (para los puntos (1,1); (2,1)) reconociendo que al evaluar el punto en la derivada el valor obtenido es la pendiente de la recta en dicho punto. Las rectas las representa en una gráfica, resaltando vectores pequeños en las rectas que pasan por los puntos indicados anteriormente, obteniendo una representación gráfica inicial del campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{1}{x}$ (ver extracto del diálogo con E3 y ver figura 4).

I: ¿Qué es un campo direccional?

E3: Mi idea es que, digamos, es una representación […] en forma de vectores.

I: ¿Esos vectores cómo los obtienes?

E3: Si es relacionado al problema se deben obtener a partir de... esos vectores deben tener una pendiente, esa pendiente se tiene que obtener a partir de la derivada de cierta función.

I: ¿Cómo es este caso (señala $y'(x) = \frac{1}{x}$)?

E3: Para obtener el campo direccional, por ejemplo, tenemos la ecuación diferencial que es esta (señala $y'(x) = \frac{1}{x}$), entonces podemos sacar las rectas tangentes, digamos, tomamos un punto, el punto p de coordenadas uno coma uno y en la derivada (señala $y'(x) = \frac{1}{x}$) solo tenemos el valor de x, entonces, sustituimos el valor de la primera coordenada que sería uno en la derivada, entonces, tenemos uno sobre uno que es igual a uno.

I: ¿Ese uno qué es?

E3: Ese uno es la pendiente que tendrá la recta que pasa por dicho punto, entonces, nosotros como ya tenemos el punto utilizamos esta ecuación de la recta (señala $y - y_1 = m(x - x_1)$).

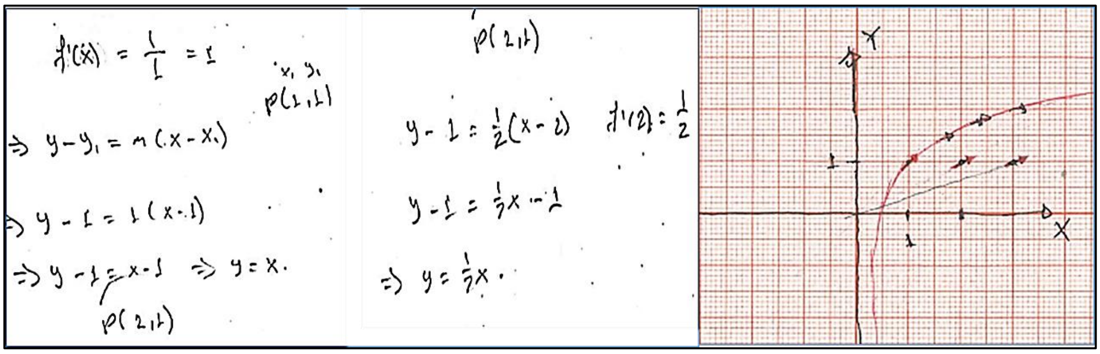
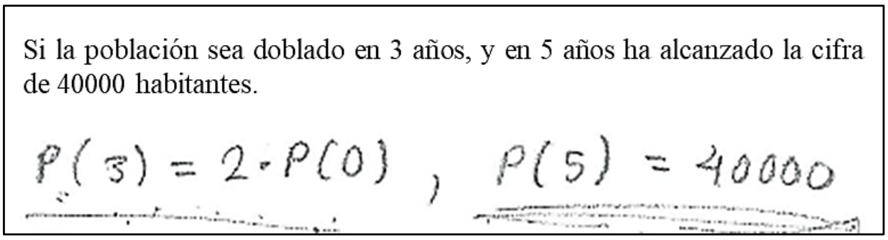


Figura 4. Representación algebraica y gráfica de E3

Además, se construyeron los subtemas "El valor inicial de una Ecuación Diferencial Ordinaria se representa por la expresión $p(0)$" y "La representación verbal "en cinco años se ha alcanzado la cifra de 40.000 habitantes" se puede representar por $p(5) = 40000$" para el tipo de conexión de representaciones. Esto se logró dado que el estudiante E1, al resolver el problema de la Tarea 3, fue capaz de representar algebraicamente situaciones del problema, por ejemplo, reconoce que el valor inicial de la población lo puede representar por una función p evaluada en cero ($p(0)$). Al mismo tiempo reconoce que, si la población en 5 años ha alcanzado la cifra de 40000, entonces esto se puede representar por una función p evaluada en 5 igual a 40000 ($p(5) = 40000$), lo que corresponde a una representación algebraica (ver extracto con E1 y ver figura 5).

I: Explícame tu procedimiento.

E1: Queremos encontrar primero la función original que depende del tiempo y la función original es P así que P evaluada en tres sería el doble que P evaluada en cero, que sería el valor inicial, y aquí está la expresión que dice que se ha doblado en tres años (señala $P(3) = 2P(0)$) y así mismo en cinco años se ha alcanzado la cifra de 40000 habitantes o sea que P evaluado en 5 son igual a 40000 ($P(5) = 40000$) […].


Si la población sea doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40000 habitantes.

$P(3) = 2 \cdot P(0)$, $P(5) = 40000$

Figura 5. Representación algebraica de E1

La conexión matemática de representaciones diferentes se identificó en los estudiantes E1 y E3, en específico utilizaron representaciones alternativas (algebraico – gráfico y verbal – algebraico). Mientras que los estudiantes E2 y E4 presentaron dificultad para realizar este tipo de conexión matemática. Por ejemplo, el estudiante E2 trabajó en el registro algebraico para resolver las ecuaciones diferenciales, pero cuando se le solicitó obtener el campo direccional correspondiente a la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{1}{x}$ planteó que no recordaba el concepto. Por otra parte, cuando respondió a la Tarea 3 no logró escribir algebraicamente las condiciones del problema para poder resolver la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = K$. El estudiante E4, de igual forma, presentó la misma dificultad.

Conexiones matemáticas de tipo característica

Los estudiantes E2 y E3 realizaron conexiones de tipo característica al reconocer cualidades de las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, reconocieron que al incluir la notación simbólica que representa a la derivada de y con respecto de x en una ecuación, esto indica que la ecuación es una ecuación diferencial (ver extracto de diálogo con E2).

I: ¿Cómo te das cuenta de que es una ecuación diferencial (señala $\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x}$)?

E2: Por esto (señala la expresión $\frac{dy}{dx}$), la notación.

I: ¿Qué es eso?

E2: La notación.

I: Pero, ¿qué significa?

E2: La derivada de y respecto a x.

Esta cualidad corresponde al subtema “La derivada es una componente de la ecuación diferencial”.

Además, el estudiante E3, al referirse a las ecuaciones diferenciales separables, reconoció que puede escribir la ecuación separando las variables cada una en cada miembro, esto corresponde al subtema “Las ecuaciones diferenciales separables tienen la característica de separar las variables x e y”, subtema que está relacionado con la forma de las ecuaciones diferenciales (ver extracto de diálogo con E3).

I: ¿Las ecuaciones diferenciales que se resuelven mediante este procedimiento $\frac{dy}{dx}=\frac{2-y}{x} \rightarrow \frac{dy}{2-y}=\frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{dy}{2-y}=\int \frac{dx}{x}$ tienen algún tipo de nombre?

E3: Sí, ecuaciones diferenciales separables.

I: ¿Por qué separables?

E3: Lo que entendí, son fácil de despejar ambas variables, porque para otras, no puedes despejar, de hecho, en algunas no se pueden despejar las variables, se recurre a otros métodos.

La conexión matemática de tipo característica se identificó en los estudiantes E1, E2 y E3. Estos estudiantes lograron reconocer elementos o características propias de los conceptos ecuaciones diferenciales o ecuaciones diferenciales de variables separables, mientras que el estudiante E4 presentó dificultad para realizar este tipo de conexión matemática, dado que no logró identificar cualidades que le permitieran identificar que la ecuación diferencial de la tarea podría ser resuelta por el método específico de separar variables.

Conexiones matemáticas de tipo significado

Este tipo de conexión emergió al preguntarles a los estudiantes qué entendían por ecuaciones diferenciales, solución general y campo direccional. En sus respuestas atribuyeron un sentido a cada uno de estos conceptos matemáticos. Por ejemplo, se identificó la conexión matemática de significado en el estudiante E4, relativo al subtema “Una ecuación diferencial es la relación de una función con sus derivadas”, ya que él indicó que la relación de una función con sus derivadas es una ecuación diferencial (ver extracto con E4), dándole un significado al concepto.

I: ¿Qué es una ecuación diferencial?

E4: Es la relación de una función con sus derivadas.

También, emergió la conexión de tipo significado en los estudiantes E1 y E3 respecto al subtema “Una ecuación diferencial es una ecuación en donde las soluciones son funciones” (ver extractos de diálogos con E1 y con E3).

I: ¿Qué es una ecuación diferencial?

E1: Una ecuación en la que en lugar de una variable incógnita, en ese caso, es una función incógnita.

I: ¿Qué es una ecuación diferencial?

E3: Una ecuación diferencial es una ecuación en donde las soluciones no son números reales, sino que las soluciones son funciones.

También se identificaron conexiones de tipo significado relativas a los subtemas “El campo direccional es una representación gráfica que permite observar el comportamiento que tiene la solución de la ecuación diferencial” y “La solución general es una familia de funciones que satisface una ecuación diferencial”. Por ejemplo, el estudiante E1 indicó que el campo direccional permite observar el comportamiento que tiene la solución de la ecuación diferencial (ver extracto con E1) y el estudiante E2 respondió que una solución general es una expresión donde cualquier valor que se evalúe en la constante C va a satisfacer la ecuación diferencial (ver extracto con E2). En ambos casos, los estudiantes E1 y E2 reconocen a partir de una conexión de tipo significado las diferencias de campo direccional y solución general con respecto a otros conceptos.

I: ¿Qué es un campo direccional?

E1: Vimos en clase que era una guía u orientación para poder observar o darnos cuenta del comportamiento que tiene la solución de la ecuación diferencial.

I: ¿Qué es una solución general?

E2: (Señala la solución $y = \frac{c}{x} + 2$) cualquier constante que se le ponga va a satisfacer la ecuación diferencial, se le puede poner $5, 3, 20, 200$, cualquiera sigue satisfaciendo la ecuación diferencial.

La conexión matemática de tipo significado se identificó en los cuatro estudiantes que participaron en la investigación. En general, los estudiantes atribuyeron un sentido propio a los conceptos de ecuación diferencial, campo direccional y solución general de una ecuación diferencial.

Conexiones matemáticas del tipo parte-todo

Conexiones matemáticas del tipo parte-todo se identificaron, por ejemplo, en los estudiantes E1 y E3, quienes establecieron relaciones lógicas entre conceptos matemáticos, ya sean de generalización o inclusión. Específicamente, el estudiante E3 reconoció que la solución general es una familia de funciones que genera funciones particulares de acuerdo con el valor que toma la constante C, un valor cualquiera de los números reales (ver extracto con E3), lo que se encasilla en el subtema “La constante C de una solución general de una ecuación diferencial puede tomar un valor cualquiera de los reales”.

I: ¿Qué es una solución general?

E3: Es una familia de funciones, porque a C le podemos dar un valor cualquiera de los reales, por ejemplo le podemos dar el valor de uno y se genera una función, le damos otro valor y es otra función.

La conexión matemática parte-todo también se identificó dentro del subtema "Una ecuación diferencial exacta es de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$", dado que el estudiante E3 al referirse a la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ logra escribir la forma general de una ecuación diferencial exacta (ver extracto con E3 y ver figura 6).

I: ¿Cómo pensaste el inciso a)?

E3: Esta ecuación diferencial es exacta

I: ¿Por qué?

E3: Este… bueno, más que nada no me aprendí la definición, pero la identifico por esta primera parte (señala $M(x, y)dx$)….

I: Si quieres escribe aquí abajo para que tengas espacio

E3: Una ecuación diferencial exacta es de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

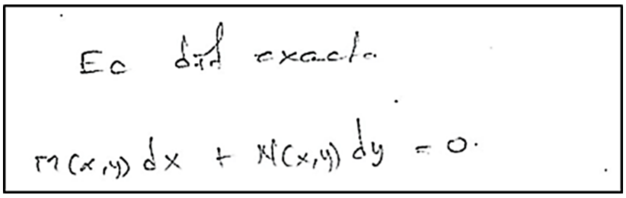


Figura 6. Forma general de la ecuación diferencial exacta dada por E3

En este mismo sentido, se identificó una conexión de tipo parte-todo cuando el estudiante E1 indicó que en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$ se tienen que despejar las expresiones que dependen de x e y (una en cada miembro de la ecuación) y cada expresión debe estar multiplicada por el diferencial correspondiente a las variables indicadas, logrando describir la forma general de una ecuación diferencial separable en la forma $f(y)dy = g(x)dx$ (ver extracto de E1 y ver figura 7), es decir, en el subtema "Las ecuaciones diferenciales de variables separables tienen la forma $f(y)dy = f(x)dx$".

I: ¿Me puedes explicar?

E1: Me explicaron en clase que aquí (señala $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$) se tiene que despejar y, de un lado iba a quedar una expresión que fuera una función de variables y y que va a ser multiplicada por el diferencial dy y aquí (miembro derecho de la ecuación) una expresión que iba ser multiplicada por el diferencial dx y aquí la expresión depende de x.

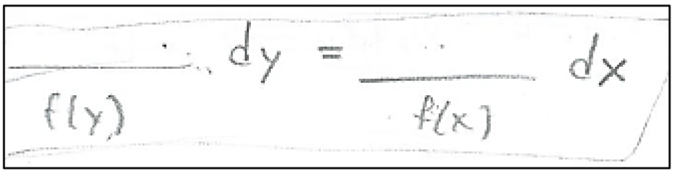


Figura 7. Forma general de una ecuación diferencial separable hecha por E1

Finalmente, el estudiante E1, al referirse a la representación de una solución correspondiente a $x = 1$ de acuerdo con la Tarea 2, reconoció que la solución de una ecuación diferencial es una familia de funciones, pero al representar una solución que pase por el punto indicado (ejemplo por $(1{,}1)$) solo pasa una curva de la familia de funciones (ver extracto con E3 y ver figura 8), es decir, la conexión como parte del subtema "Por $x = 1$ pasa una curva de la familia de funciones del tipo logarítmica".

I: Acá dice (señala Tarea 2): dibuje el campo de direcciones asociado a esta ecuación y una solución correspondiente a $x = 1$. ¿Cuál sería una solución correspondiente a $x = 1$?

E3: Es donde debería pasar una curva de la familia de funciones.

I: ¿Cómo debería ser?

E3: Creo que debe ser así, algo así (grafica una función que pasa por el punto (1,1))

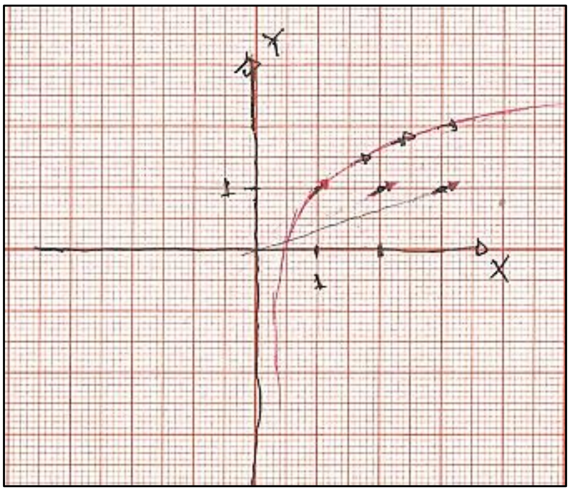


Figura 8. Representación de una curva de la familia de funciones por E3

La conexión matemática de tipo parte-todo se identificó en los estudiantes E1 y E3, mientras que los estudiantes E2 y E4 presentaron dificultad para realizar este tipo de conexión matemática. Por ejemplo, el estudiante E4 reconoce qué es una ecuación diferencial y logra resolver una ecuación diferencial separable, pero no es capaz de generalizar un tipo de ecuación diferencial e identificar elementos incluidos en las ecuaciones diferenciales que le permitan encontrar particularidades de estas. Mientras que el estudiante E2 igualmente es capaz de reconocer las ecuaciones diferenciales de tipo separable pero no logra generalizar este tipo de ecuación.

Conexión matemática de tipo reversibilidad

La conexión matemática de reversibilidad se identificó cuando el estudiante E2 logró, a partir de la derivada de $y'(x)$, llegar al valor de $y(x)$, reconociendo que la integral es la operación inversa de la derivada. Particularmente, E2 no usó un método para resolver la ecuación diferencial $y(x)' = \frac{1}{x}$, sino que reconoció que, al tener la derivada de una función ($y(x)' = \frac{1}{x}$), para obtener la función ($y(x)$) solo debe integrar, dado que la integral es la operación inversa de la derivada (ver extracto del diálogo con E2 y ver figura 9). Esto hace alusión al subtema "La derivada y la integral son operaciones inversas".

I: En la tarea 2, explícame qué hiciste.

E2: Quería encontrar primero y, integramos esta cosa (señala $y'(x)$) y prima, integral de y prima respecto de x va a ser igual (señala $\int y'(x)dx = \int \frac{1}{x} dx$).

I: ¿Por qué integras?

E2: Quiero calcular primero qué es y.

I: ¿Por qué para calcular y necesitas integral?

E2: Porque y prima es la derivada respecto a x, es una primitiva.

I: ¿Entonces?

E2: Para calcular y necesitamos una integración que es lo contrario de la derivación, una antiderivada que es la integración.

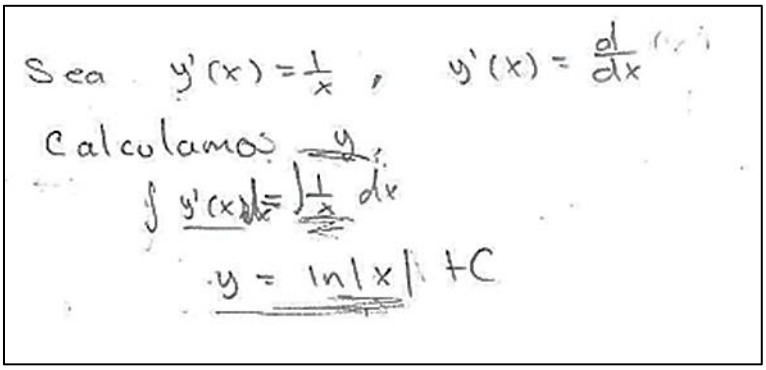


Figura 9. Cálculos hechos por E2 para resolver la ecuación $y(x)' = \frac{1}{x}$

Los estudiantes E1, E3 y E4 no lograron realizar una conexión de tipo reversibilidad, una causa se alude al uso frecuente de métodos para resolver las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, los estudiantes, al resolver la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{1}{x}$, utilizaron el procedimiento correspondiente para resolver una ecuación diferencial separable y no identifican que están en presencia del resultado de una derivada y que la ecuación se puede resolver de forma directa determinando la primitiva de $\frac{1}{x}$. Es importante resaltar que los estudiantes reconocen que la integral es la operación inversa de la derivada, pero no lo utilizan para resolver este tipo de ecuación diferencial, por lo cual, se observa que no se alcanza a vincular el cálculo diferencial y las ecuaciones diferenciales.

Conexión de tipo implicación

La conexión matemática de implicación se identificó cuando el estudiante E1 argumentó que una ecuación diferencial es exacta si la derivada parcial de $x^2 + y^2$ con respecto a y es igual a la derivada parcial de $2xy$ con respecto a x (ver extracto con E1 y ver figura 10), es decir, bajo la categoría de la relación *si se cumple A entonces ocurre B (A implica B)* y el subtema “Una ecuación diferencial es exacta si $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$”.

I: ¿Cómo procediste?

E1: […] Ubiqué que la forma que tenía ($(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$), la ecuación diferencial tendría la forma de una ecuación diferencial exacta, ya solo ahora es cuestión de comprobarlo bajo esta propiedad ($\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial x}$).

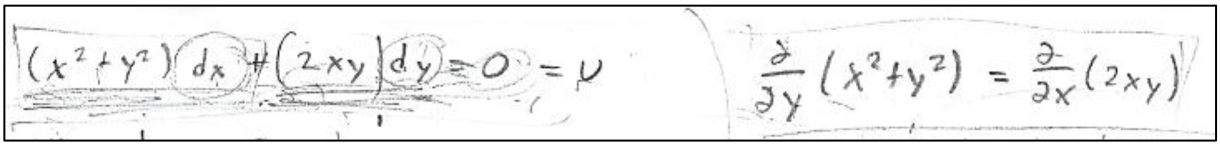


Figura 10. Condición que se debe cumplir para que la ecuación diferencial sea exacta

I: ¿Qué significa eso?

E1: Me explicaron en clase que si la derivada de esto (señala, $x^2 + y^2$) con respecto a y tendría que ser igual a la derivada de esto (señala, $2xy$) con respecto a x.

I: ¿Y sí se cumple?

E1: Sí, se cumple, entonces es una ecuación diferencial exacta.

Los estudiantes E2, E3 y E4 no lograron realizar una conexión matemática de tipo implicación, esto es consecuencia del uso incorrecto de teoremas (“Existencia de solución única” y “Criterio para diferencial exacta”). Por ejemplo, los estudiantes, para determinar si una ecuación diferencial es exacta, utilizan incorrectamente la condición $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, intercambian las derivadas parciales o no reconocen que deben utilizar la condición. De igual forma, cuando analizan si una solución es general no reconocen que $f(x, y)$ y $\frac{f(x,y)}{\partial y}$ deben ser continuas.

CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN

Las conexiones matemáticas identificadas en esta investigación fueron las esperadas (procedimental, característica, parte-todo, significado, representaciones diferentes, reversibilidad e implicación) de acuerdo con el sustento teórico. Estos resultados nos permiten hacer algunas reflexiones, por ejemplo, los estudiantes aparentan tener mayor familiaridad con los procedimientos de solución de los diferentes tipos de EDO, dado que reconocen características propias de las EDO y predomina en ellos el uso de métodos y reglas para resolver ecuaciones diferenciales, en específico, en el registro algebraico. Por ejemplo, al resolver la Tarea 1, justifican su respuesta utilizando métodos de solución de ecuaciones diferenciales, una vez que identifican el tipo de ecuación, aunque tienen la oportunidad de utilizar el concepto de solución de una EDO para justificar la tarea. Esto es consistente con lo reportado por Guerrero et al. (2010), que mencionan que los estudiantes dominan procedimientos algebraicos para resolver una EDO, pero se les dificulta interpretar las soluciones de una EDO.

Por otra parte, los estudiantes presentan dificultades con el análisis e interpretación del campo de dirección y con problemas de aplicación de las EDO. Por ejemplo, cuando resuelven la Tarea 2, presentan dificultad para lograr la representación del campo direccional. Esto se debe en particular a que no logran relacionar la interpretación geométrica de la derivada con la construcción de la representación del campo direccional de una EDO. Mientras que en la Tarea 3 se identificaron el menor número de conexiones matemáticas, lo cual se considera que es debido a que los estudiantes no logran interpretar la información dada en lenguaje verbal relativa a un contexto real. Esto nos señala que los estudiantes generalmente desarrollan un aprendizaje procedimental que no les permite resolver problemas de aplicación, como se reporta en Rowland y Jovanoski (2004) y en Arslan (2010).

En los resultados también se evidenció que las conexiones de tipo procedimental y significado emergieron en los cuatro estudiantes, se considera que estas conexiones matemáticas predominan debido a que, de forma general, dominan reglas y procedimientos vistos en el curso de Ecuaciones Diferenciales I, siendo consistente con lo reportado por Serrano-Gómez (2005), Guerrero et al. (2010) y García-García y Dolores-Flores (2021). Mientras que la conexión de tipo representaciones diferentes identificada en los estudiantes E2 y E3 es consistente con los resultados de Mhlolo et al. (2012) y la conexión matemática de tipo característica identificada en los estudiantes E1, E2 y E3 es consistente con lo reportado por García-García y Dolores-Flores (2021), quienes indican que esta conexión puede aparecer una vez que los estudiantes hacen una conexión de tipo procedimental; por ejemplo, el estudiante E3 reconoce las ecuaciones diferenciales separables mediante el procedimiento de solución. Además, este tipo de conexión matemática permitió en particular al estudiante E1 realizar la conexión matemática de tipo parte-todo. Por ejemplo, el estudiante logró generalizar la ecuación de variables separables partiendo de que las expresiones de variables x e y deben estar separadas. Esto es consistente con García-García y Dolores-Flores (2021), quienes plantean que este tipo de conexión matemática juega un papel importante en el logro de la generalización y abstracción de diferentes conceptos matemáticos.

La conexión de tipo reversibilidad solo se identificó en el estudiante E2 debido a que resolvió la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{1}{x}$ utilizando reglas de la derivada, así como el significado de la integración como operación inversa de la derivada. Mientras que los estudiantes E1, E2 y E3 utilizaron procedimientos de resolución de EDO y no fueron capaces de relacionar la ecuación diferencial con los conceptos de derivada e integral. Esto es consistente con lo reportado por Perdomo (2011), quien expuso que los estudiantes muestran dificultades para establecer conexiones entre conceptos que intervienen en las EDO, como la derivada de una función, que les ayudan a resolver tareas que contienen ideas básicas de las ecuaciones diferenciales. Esta conexión emergió a partir de las producciones del estudiante E1, debido a que utilizó el teorema relativo a la condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta, para determinar si la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ es exacta.

Estos resultados sugieren que las conexiones matemáticas son un proceso complejo y no siempre es llevado a cabo por los estudiantes, además de que influyen los conocimientos previos y nuevos de los estudiantes (García-García y Dolores-Flores, 2018). Entender las conexiones matemáticas y la relación que guardan entre sí nos puede permitir llevarlas a la práctica en el proceso de enseñanza y aprendizaje para atender las dificultades de los estudiantes y favorecer el desarrollo de la comprensión matemática. Por lo que, consideramos como un espacio abierto y favorable desarrollar actividades para la enseñanza de las EDO enfocadas en las conexiones matemáticas, ya que con ellas se promueve la articulación de diferentes conceptos y de diferentes registros de representación, lo que permitirá comprender los procesos y articulación en los métodos de solución, además de sembrar entre las ideas fundamentales, como menciona Perdomo (2011), la relación entre la derivada y las ecuaciones diferenciales.

En este sentido, la relevancia de este documento estriba en promover y generar en los estudiantes el uso de las conexiones matemáticas para potenciar la comprensión de conceptos. En este caso, no solo en la identificación (simbólica) de cómo expresar una EDO de primer orden en su forma general, sino en vincularla con expresiones particulares que cumplan ser ecuaciones donde se involucren derivadas de orden 1, además del reconocimiento de características específicas de las EDO para ser resueltas por un determinado método. Asimismo, consideramos que el diseño de actividades en las cuales se involucren acciones que lleven a la realización de conexiones es fundamental para la extensión del conocimiento, es decir, que el estudiante no solo realice conexiones de tipo intramatemático sino también extramatemáticas, lo cual, sin duda, el estudio de las EDO lo hace posible debido al alcance que tienen en el contexto de la modelación de fenómenos de la vida real y en la solución de problemas de otras disciplinas. No obstante de los beneficios que podrían tenerse al considerar las conexiones matemáticas como parte esencial de la comprensión de conceptos, una limitante que se tiene para su estudio es la complejidad en la caracterización de cada una de las conexiones, porque aunque su caracterización es dada por el fundamento teórico, debe realizarse una caracterización dependiente del tema matemático de estudio, y no aplicar un método adecuado en el análisis puede generar ambigüedades en la interpretación de datos, por lo que es necesario un método de triangulación en el análisis de conexiones así como la validación de actividades, por lo menos, desde la perspectiva de los expertos.

Finalmente, destacamos que para futuras investigaciones se plantea la necesidad de estudiar las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes al resolver tareas de modelación, puesto que se puede explorar la comprensión de las ecuaciones diferenciales respecto a otras disciplinas y en contextos reales.

Referencias

Arslan, S. (2010). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *29*(2), 94-107. https://doi.org/10.1093/teamat/hrq001

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. y Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 217-241. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9145-1

Bingölbali, E. y Coşkun, M. (2016). A proposed conceptual framework for enhancing the use of making connections skill in mathematics teaching. *Education and Science*, *41*(183), 233-249. https://doi.org/10.15390/EB.2016.4764

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77-101. http://dx.doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Braun, V. y Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf y K. J. Sher (Eds.), *APA Handbook of Research Methods in Psychology, Vol 2: Research Designs: Quantitative, Qualitative, Neuropsychological, and Biological* (pp. 57-71). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/13620-004

Brown, L. (Ed.). (1993). *The new shorter Oxford English dictionary on historical principles*. Clarendon Press.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* (tesis doctoral no publicada). Simon Fraser University, Canadá.

Coxford, A. F. (1995). The case for connections. En P. A. House y A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3-12). National Council of Teachers of Mathematics.

De Gamboa, G. y Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). SEIEM.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. y Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *23*, 297-319. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0

Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula* (tesis doctoral no publicada). Pennsylvania State University College of Education, Estados Unidos de América.

García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas a la derivada y a la integral en los estudiantes del preuniversitario* (tesis doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227-252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2021). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(6), 912-936. https://doi.org/10.1080/0020739x.2020.1729429

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Universidad de Granada.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). Lawrence Erlbaum Associates.

Guerrero, C., Camacho, M. y Mejía, H. R. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de Las Ciencias*, *28*(3), 341-352. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n3.431

Karakoç, G. y Alacacı, C. (2015). Real World Connections in High School Mathematics Curriculum and Teaching. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *6*(1), 31-46.

Lee, J. E. (2012). Prospective elementary teachers' perceptions of real-life connections reflected in posing and evaluating story problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(6), 429-452. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9220-5

Merriam, S. B. y Tisdell, E. J. (2016) *Qualitative research: A guide to design and implementation* (4.ª ed.). Jossey-Bass.

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 176-191. https://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740738

Mhlolo, M. K., Venkat, H. y Schäfer, M. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. *Pythagoras*, *33*(1), 1-9. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v33i1.22

Mousley, J. (2004). An aspect of mathematical understanding: the notion of "connected knowing". En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 377-384). Bergen University College.

Mumcu, H. Y. (2018). A theoretical examination of the mathematical connection skill: The case of the concept of derivative. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *9*(2), 211-248.

Özgen, K. (2013). Self-Efficacy Beliefs in Mathematical Literacy and Connections Between Mathematics and Real World: The Case of High School Students. *Journal of International Education Research*, *9*(4), 305-316. https://doi.org/10.19030/jier.v9i4.8082

Perdomo, J. (2011). Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de Resolución de Problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 464. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.650

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Aljibe.

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M. y García-García, J. (2021). Exploring University Mexican Students Quality of Intra-Mathematical Connections When Solving Tasks About Derivate Concept. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(9), em2006. https://doi.org/10.29333/ejmste/11160

Rowland, D. R. y Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(4), 503-516. https://doi.org/10.1080/00207390410001686607

Serrano-Gómez, W. (2005). El significado de los objetos en el aula. *Revista de Pedagogía*, *26*(75), 131-164.

Silver, E. A., Mesa, V. M., Morris, K. A., Star, J. R. y Benken, B. M. (2009). Teaching Mathematics for Understanding: An Analysis of Lessons Submitted by Teachers Seeking NBPTS Certification. *American Educational Research Journal*, *46*(2), 501-531. https://doi.org/10.3102/0002831208326559

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.

Umay, A. (2007). *The New Face of Our Old Friend School Mathematics*. Aydan Web Tesisleri.

Zill, D. y Cullen, M. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera. (7.ª ed.).* Cengage Learning.

Zill, D. y Wright, W. (2015). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera. (8.ª ed.).* Cengage Learning.

Enrique Dans-Moreno
Plantel Roberto Ruiz Obregón,
Colegio Nacional de Educación
Profesional Técnica, Querétaro,
México
edansmoreno@gmail.com

Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez
Universidad Autónoma de Guerrero,
México
flor.rodriguez@uagro.mx

Javier García-García
Universidad Autónoma de Guerrero,
México
jagarcia@uagro.mx

Recibido: Enero de 2022. Aceptado: Julio de 2022.
doi: 10.30827/pna.v17i1.23748

ISSN: 1887-3987