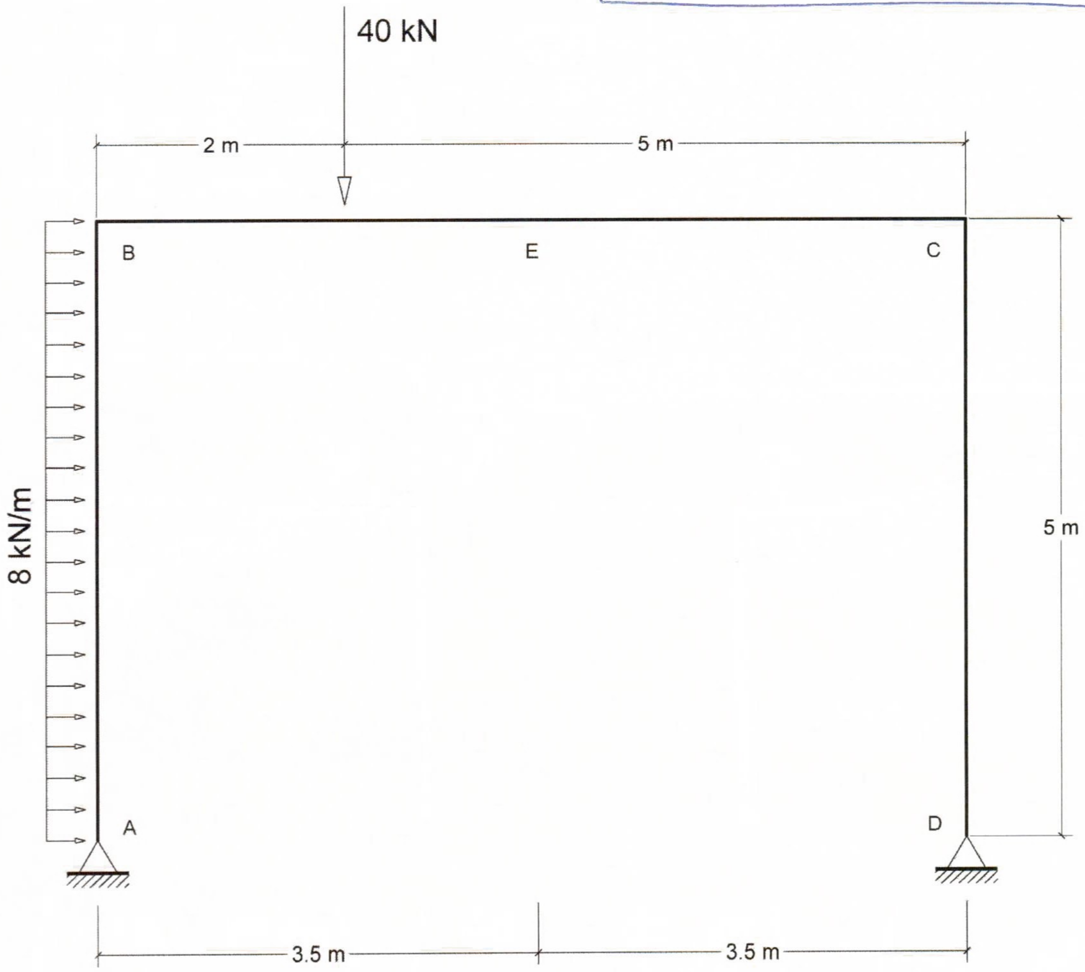
ETS de ARQUITECTURA. FUNDAMENTOS DE ESTRUCTURAS. CA 2019/20 ENERO Ej. nº 3

APELLIDOS: NOMBRE: D.N.I.:

En la estructura representada en la figura, determinar el momento flector en el punto E por el método matricial, aplicando consideraciones de simetría-antimetría.

TIEMPO APROX: 1h 30min

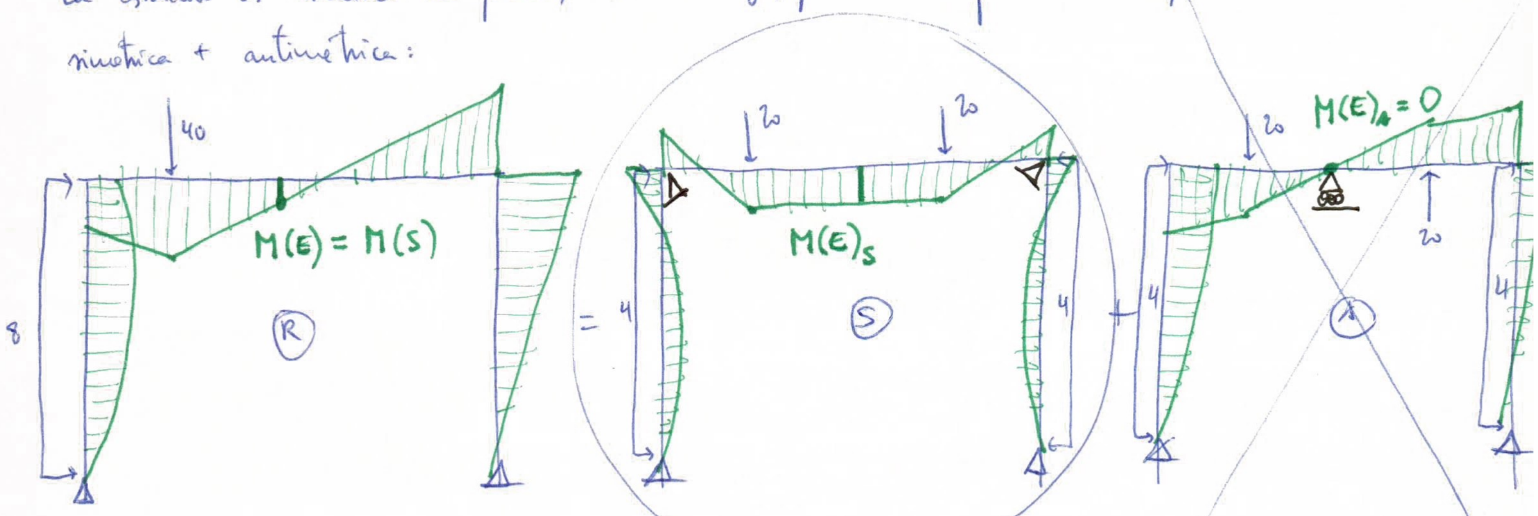


Barras: $EI = 10^5$ kNm^2

2

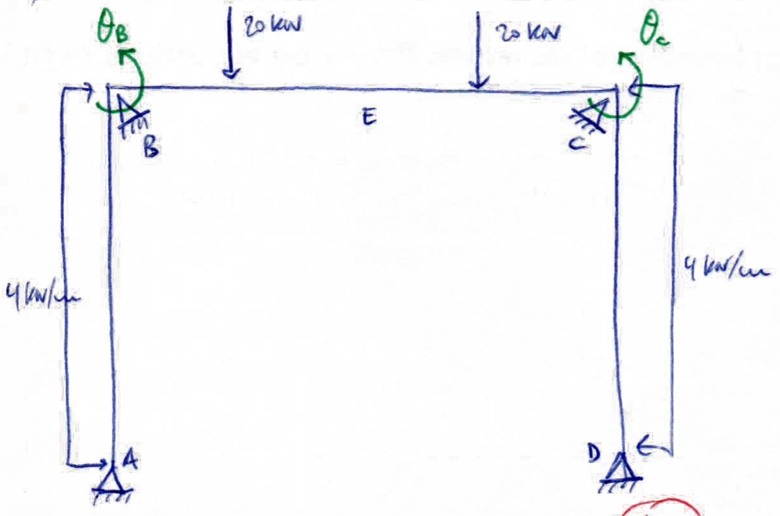
1) Consideraciones de simetría-antimetría

La estructura es simétrica de forma y no de cargas; por tanto, se puede descomponer en simétrica + antimétrica:



Como se pide solo $M(E)$, este es igual a $M(C)_S$, puesto que en el estado antimétrico el momento es nulo. Por tanto, hay que resolver el estado simétrico.

2) Obtención de grados de libertad 05

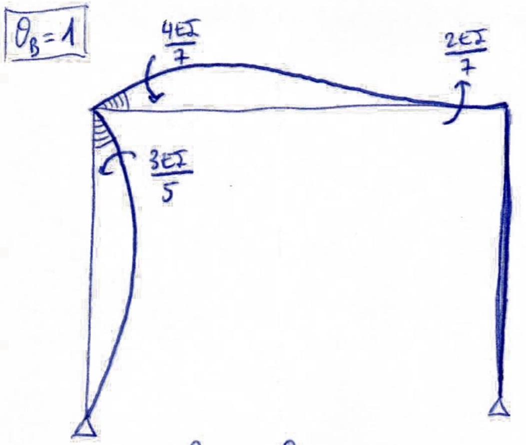


Por ser simétrica, la estructura es intraslacional, puesto que sólo se desplazarían los nudos si las barras fueran elongables, cosa que no son puesto que la rigidez axial es infinitamente mayor que la rigidez flexional en la mayoría de los casos. Por tanto, los únicos gdl son los giros de los dos nudos interiores. Por simetría: $\theta_c = -\theta_c$

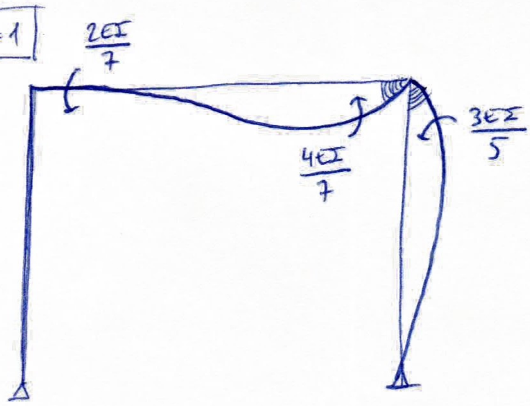
3) Obtención de la matriz de rigidez 15

Se aplican giros unitarios en los gdl en sentido positivo global.

$\boxed{\theta_B = 1}$



$\boxed{\theta_c = 1}$



$$
(K) = \begin{array}{c|cc} & \theta_B & \theta_c \\ \hline M_B & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} K_{BB} & K_{CB} \\ K_{BC} & K_{CC} \end{pmatrix}$}} \\ M_c & & \end{array} = \begin{pmatrix} \frac{3EI}{5} + \frac{4EI}{7} & \frac{2EI}{7} \\ \frac{2EI}{7} & \frac{3EI}{5} + \frac{4EI}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 117143 & 28571 \\ 28571 & 117143 \end{pmatrix} \text{ kNm}
$$

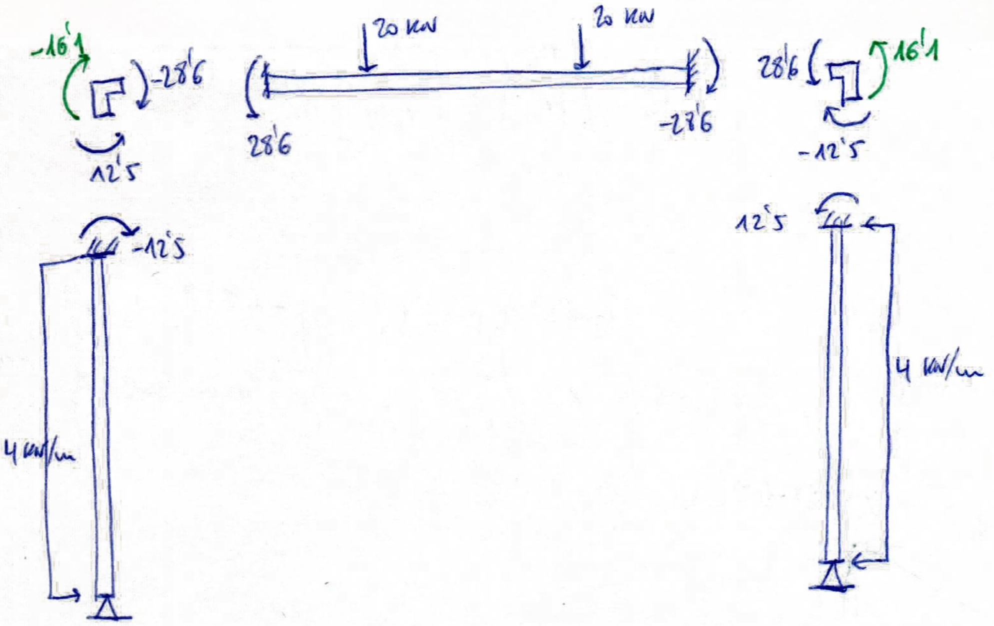
4) Inversión de la matriz de rigidez 05

$$
(K)^{-1} = \frac{(\mathrm{adj}(K))^t}{\det(K)} = \frac{\begin{pmatrix} 117143 & -28571 \\ -28571 & 117143 \end{pmatrix}}{117143^2 - 28571} = \begin{pmatrix} 9'077 \cdot 10^{-6} & -2'214 \cdot 10^{-6} \\ -2'214 \cdot 10^{-6} & 9'077 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \text{ kN}^{-1}\text{m}^{-1}
$$

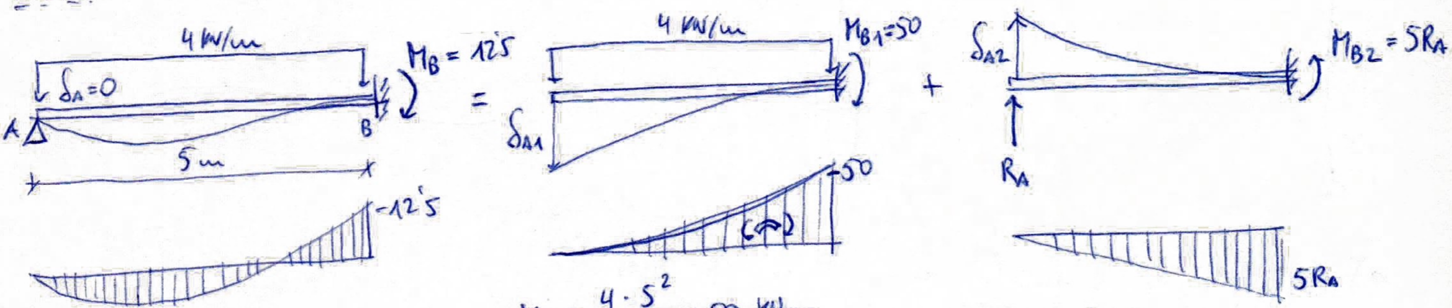
5) Cálculo de momentos de empotramiento perfecto 2

Se debe usar el método de superposición para casos hiperestáticos.

Sólo interesan los momentos en extremos que confluyen en los nudos B y C.



Pilars:



$$M_{B1} = \frac{4\cdot 5^2}{2} = 50 \text{ kNm}$$

$$|\delta_{A1}| = \frac{A_{M,B\to A}\cdot d_{G\to A}}{EI} = \frac{\left(\frac{1}{3}\cdot 5\cdot 50\right)\left(\frac{3}{4}5\right)}{EI} = \frac{312'5}{EI}$$

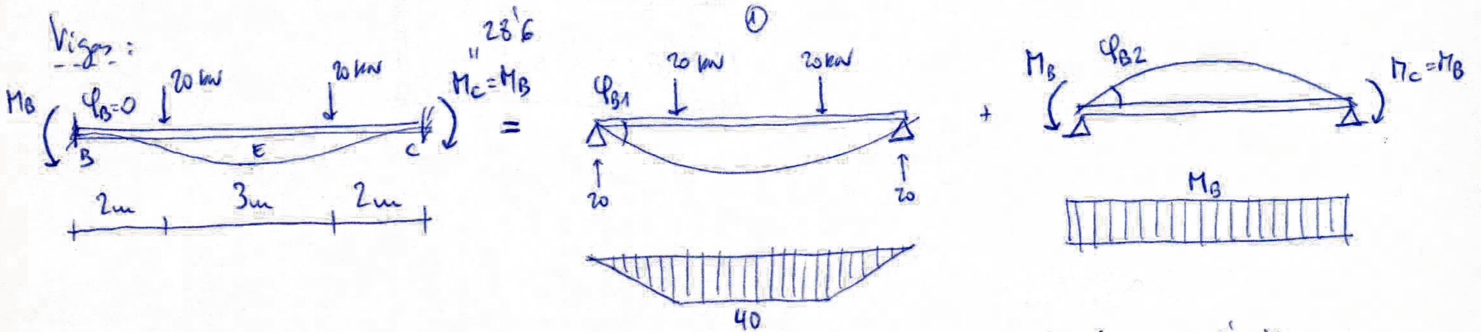
$$M_{B2} = R_A\cdot 5$$

$$|\delta_{A2}| = \frac{A_{M,B\to A}\cdot d_{G\to A}}{EI} = \frac{\frac{1}{2}5\cdot 5R_A\cdot\frac{2}{3}5}{EI} = \frac{41'\hat{6}\,R_A}{EI}$$

$$\delta_A = 0 = \delta_{A1} + \delta_{A2} \Rightarrow |\delta_{A2}| = |\delta_{A1}| \Rightarrow 312'5 = 41'\hat{6}\,R_A \Rightarrow R_A = 7'5 \text{ kN} = \frac{3}{8}4\cdot 5 \Rightarrow M_{B2} = 5\cdot 7'5 = 37'5$$

$$M_B = M_{B1} + M_{B2} = -50 + 37'5 = \underline{-12'5 \text{ kNm}}$$

Vigas:



$$|\varphi_{B1}| = \frac{A_{M,A\to E}}{EI} = \frac{\frac{1}{2}2\cdot 40 + 1'5\cdot 40}{EI} = \frac{100}{EI} \qquad |\varphi_{B2}| = \frac{A_{M,A\to E}}{EI} = \frac{3'5\cdot M_B}{EI}$$

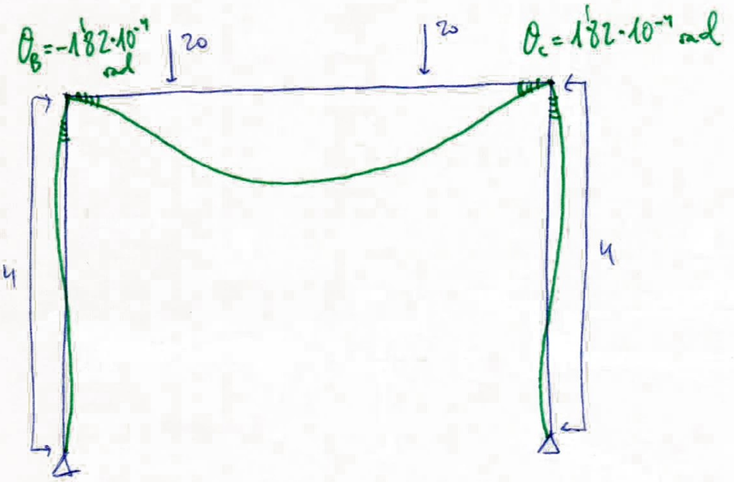
$$\varphi_B = 0 = \varphi_{B1} + \varphi_{B2} \Rightarrow |\varphi_{B1}| = |\varphi_{B2}| \Rightarrow 100 = 3'5\,M_B \Rightarrow M_B = \underline{28'6 \text{ kNm}}$$

6) Obtención de vector de momentos:

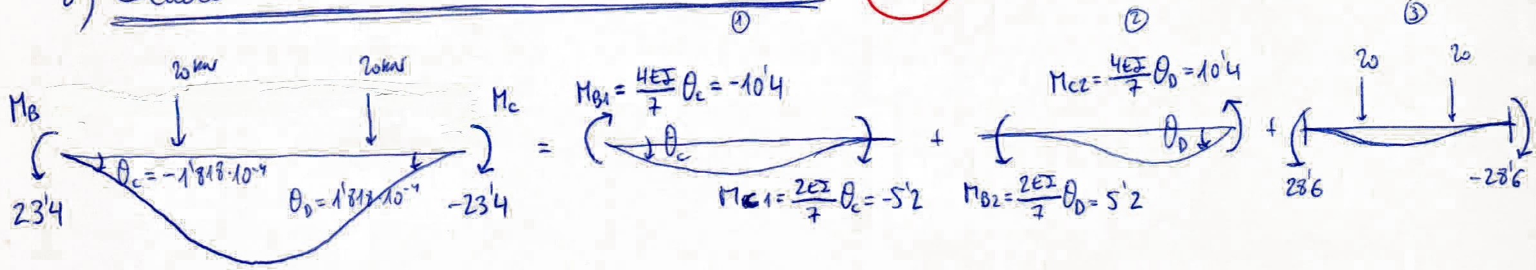
$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16'1 \\ 16'1 \end{Bmatrix} \text{ kNm}$$ 0'5

7) Cálculo de giros 1

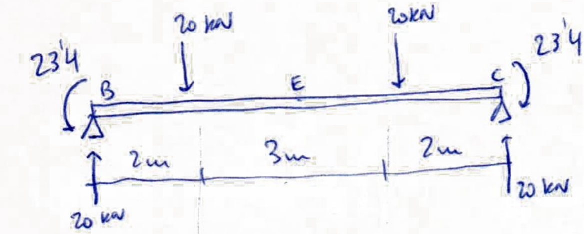
$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = (K)^{-1}\{M\} = \begin{pmatrix} 9'077 \cdot 10^{-6} & -2'214 \cdot 10^{-6} \\ -2'214 \cdot 10^{-6} & 9'077 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -16'1 \\ 16'1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1'818 \cdot 10^{-4} \\ 1'818 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} \text{ rad}$$



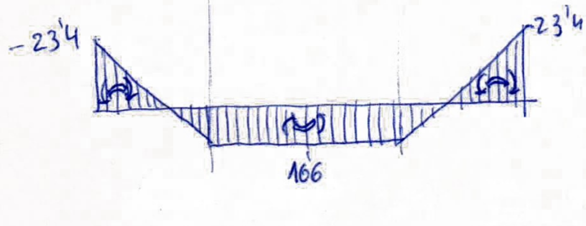
8) Cálculo de momentos en extremos de vigas 1'5



9) Obtención de momento en E 0'5



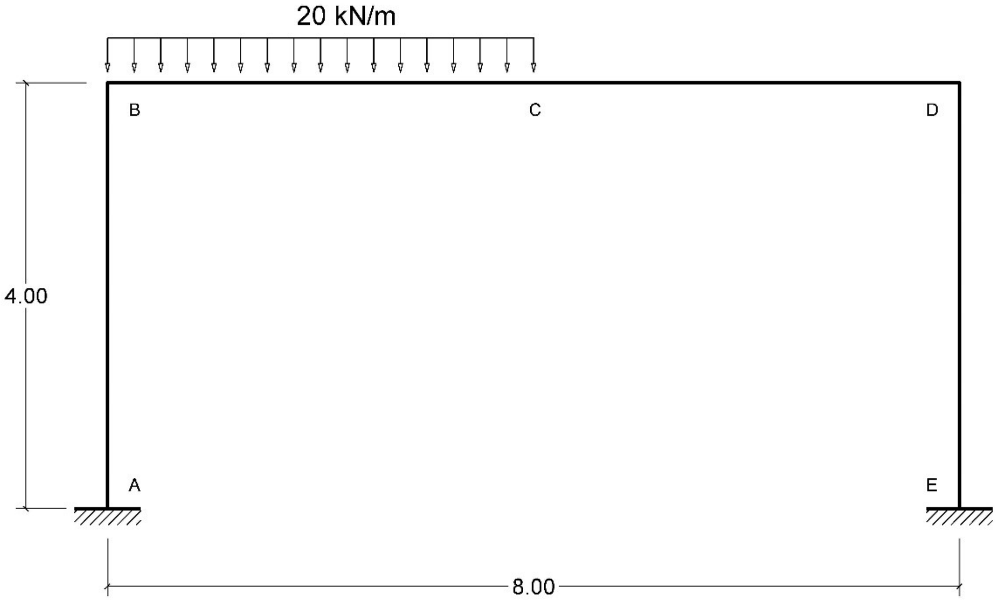
$$\boxed{M(E) = 16'6 \text{ kNm}}$$



ETS de ARQUITECTURA. **FUNDAMENTOS DE ESTRUCTURAS.** CA 2021/22 ENERO Ej. nº 3

APELLIDOS: NOMBRE: D.N.I.:

En la estructura representada en la figura, determinar el momento flector en el punto C por el método matricial, aplicando consideraciones de simetría-antimetría.

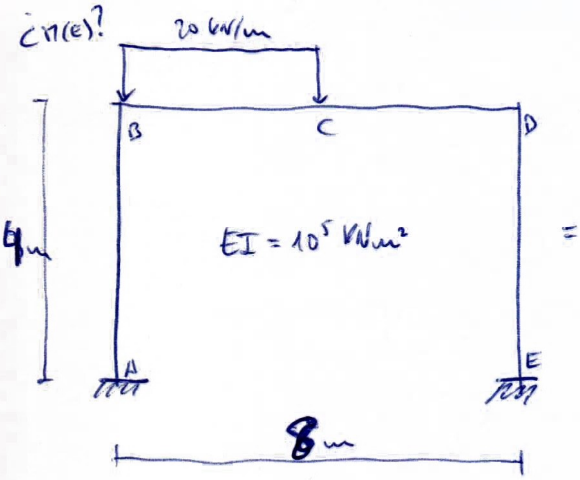


Barras: EI = 10^5 kNm^2

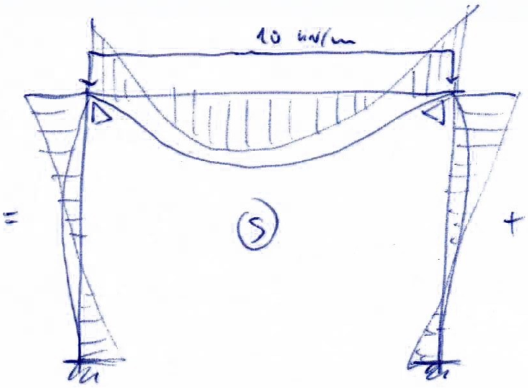
Nota:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad - bc}$$

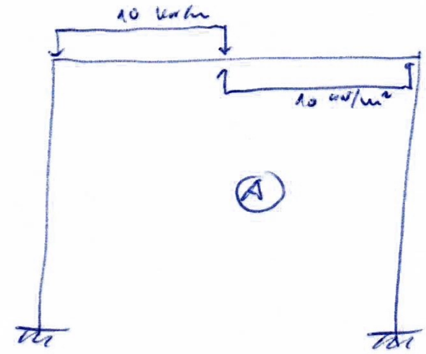
¿M(E)?

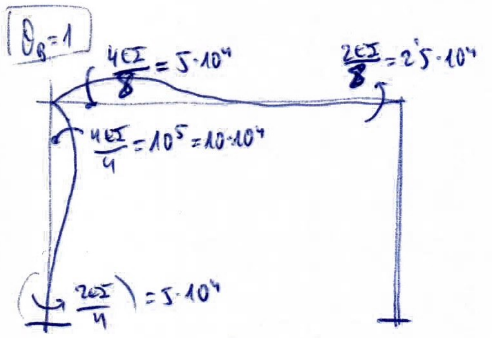


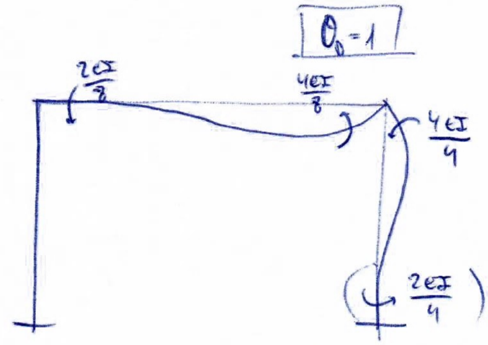
=



+



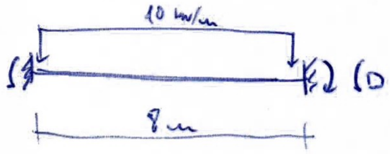




$$(K) = \begin{pmatrix} 15\cdot10^4 & 2'5\cdot10^4 \\ 2'5\cdot10^4 & 15\cdot10^4 \end{pmatrix}$$

$$(K)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 15\cdot10^4 & -2'5\cdot10^4 \\ -2'5\cdot10^4 & 15\cdot10^4 \end{pmatrix}}{(15\cdot10^4)^2 - 2'5\cdot10^4} = \begin{pmatrix} 6'\hat{6}\cdot10^{-6} & -1'\hat{1}\cdot10^{-6} \\ -1'\hat{1}\cdot10^{-6} & 6'\hat{6}\cdot10^{-6} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_D \end{Bmatrix} = (K)^{-1}\{M\} = \begin{Bmatrix} -4'1481\cdot10^{-4} \\ 4'1481\cdot10^{-4} \end{Bmatrix} \text{ rad}$$

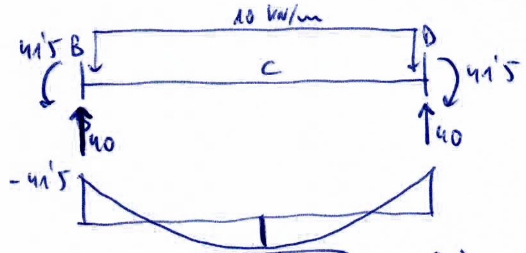
a) B



D

$$\frac{qL^2}{12} = \frac{10\cdot8^2}{12} = 53'\hat{3} \text{ kN m} \Rightarrow \{M\} = \begin{Bmatrix} -53'\hat{3} \\ 53'\hat{3} \end{Bmatrix}$$

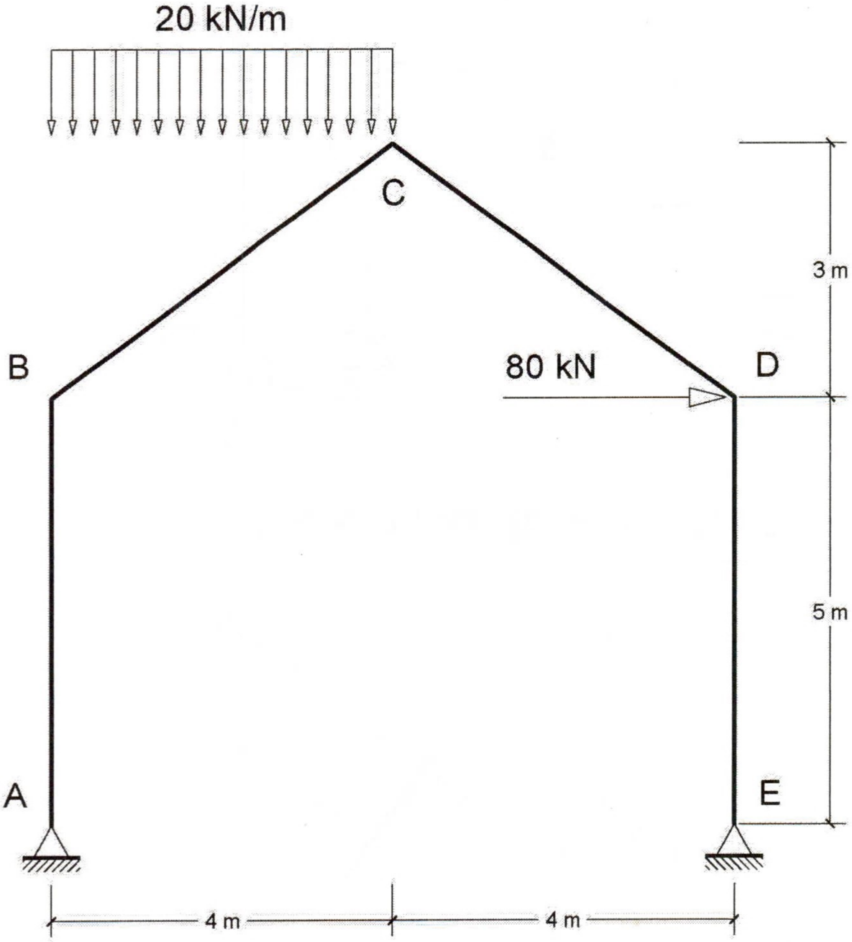
$$M_B = |\theta_B| \frac{4EI}{4} = 4'1481\cdot10^{-4}\cdot10^5 = 41'5 \text{ kN m}$$



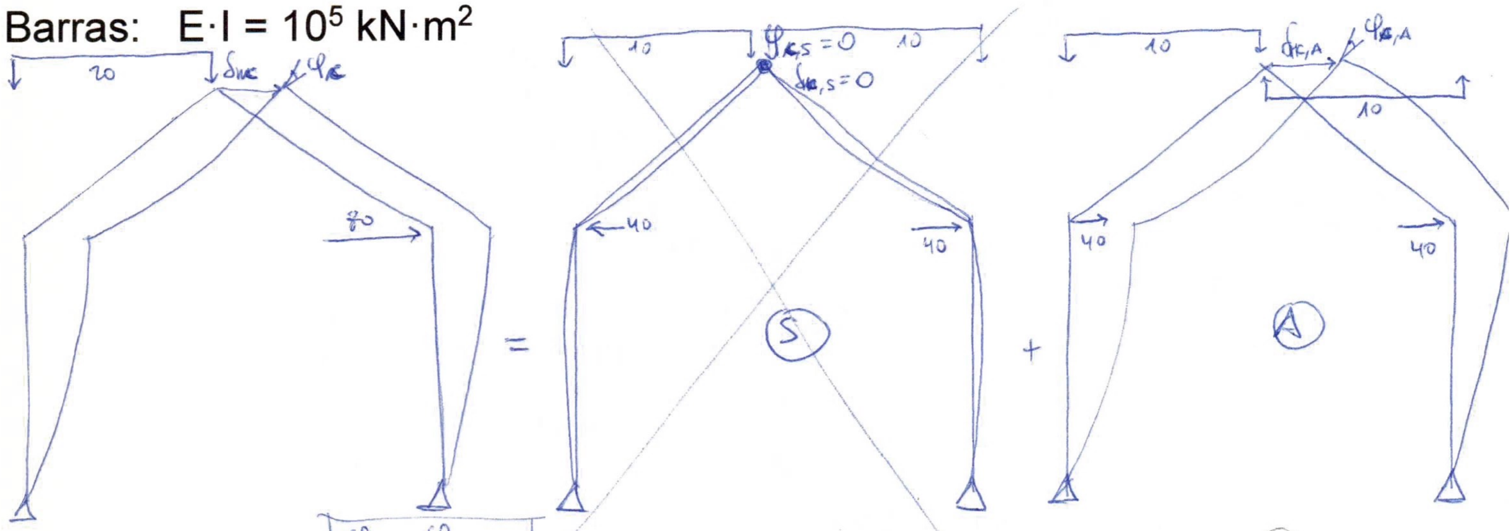
$\boxed{38'5 \text{ kN m}} = M(E)$

APELLIDOS: NOMBRE: D.N.I.:

En la estructura simétrica de forma indicada en la figura, calcular el desplazamiento horizontal y el giro del nudo C



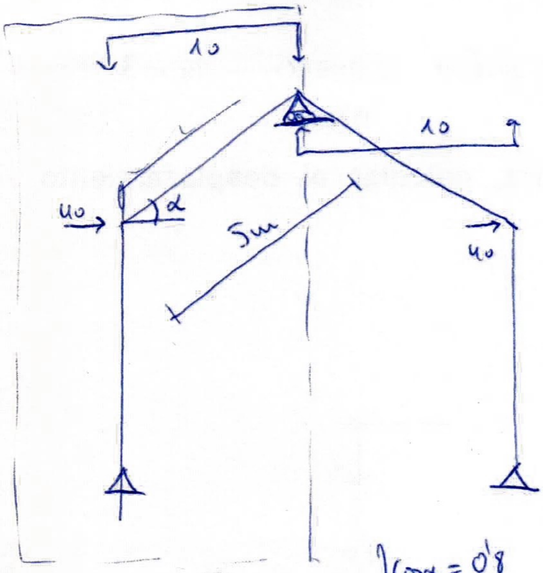
Barras: $E \cdot I = 10^5\ kN \cdot m^2$

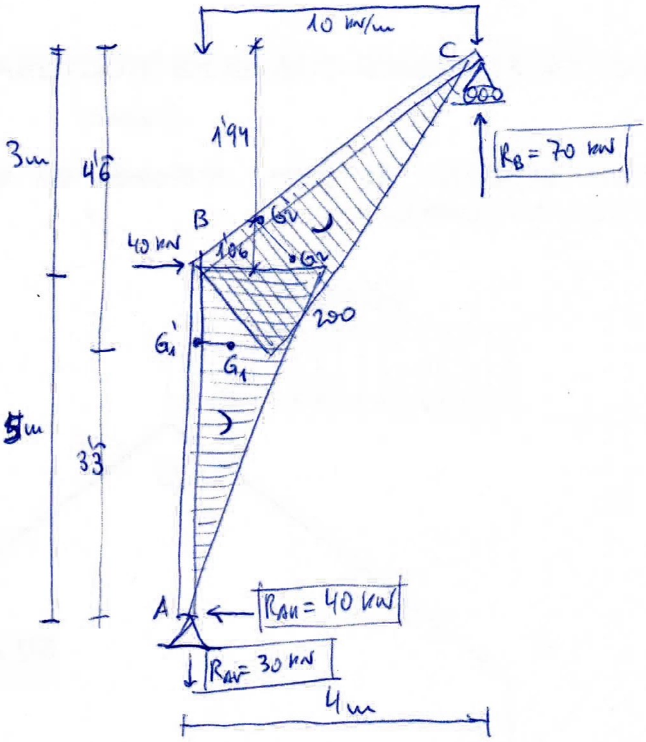


$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_C &= \varphi_{C,A} \\ \delta_{HC} &= \delta_{HC,A} \end{aligned}}$$

25

Descomposición





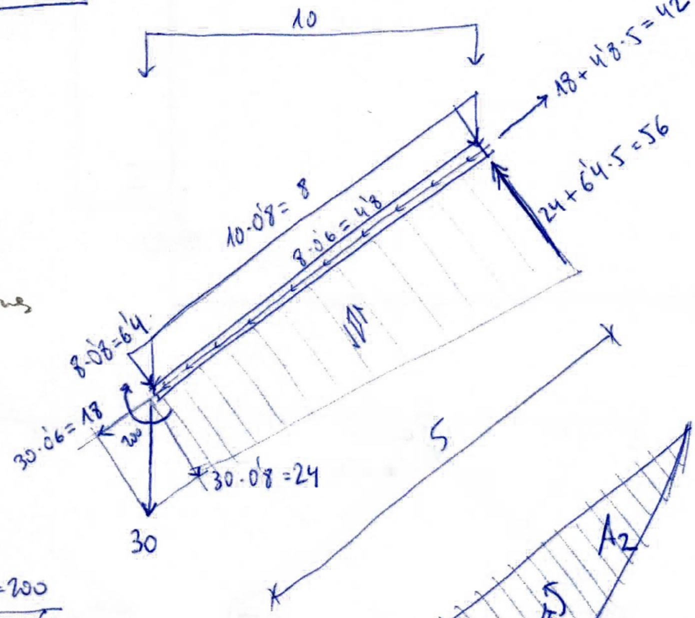
$$\begin{cases} \cos\alpha = 0'8 \\ \operatorname{sen}\alpha = 0'6 \\ \operatorname{tg}\alpha = 0'75 \end{cases}$$

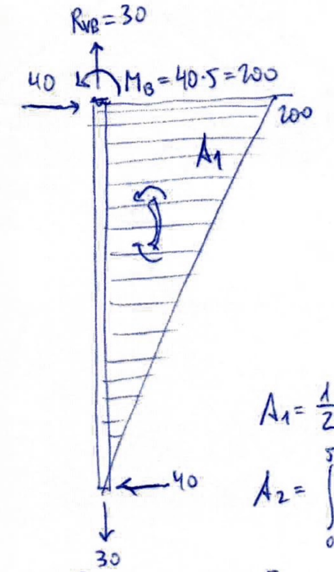
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -40 \cdot 5 - 10 \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{R_B = 70 \text{ kN}}$

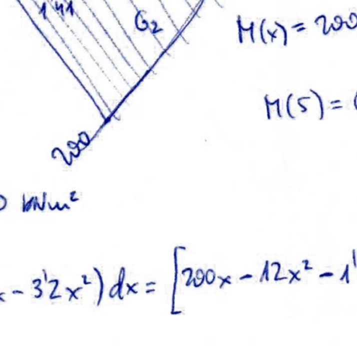
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$ $\boxed{R_B = 30 \text{ kN}}$

25

Solicitaciones







$M(x) = 200 - 24x - 6'4\frac{x^2}{2} = 200 - 24x - 3'2x^2$

$M(5) = 0$ ✓

1 G y h

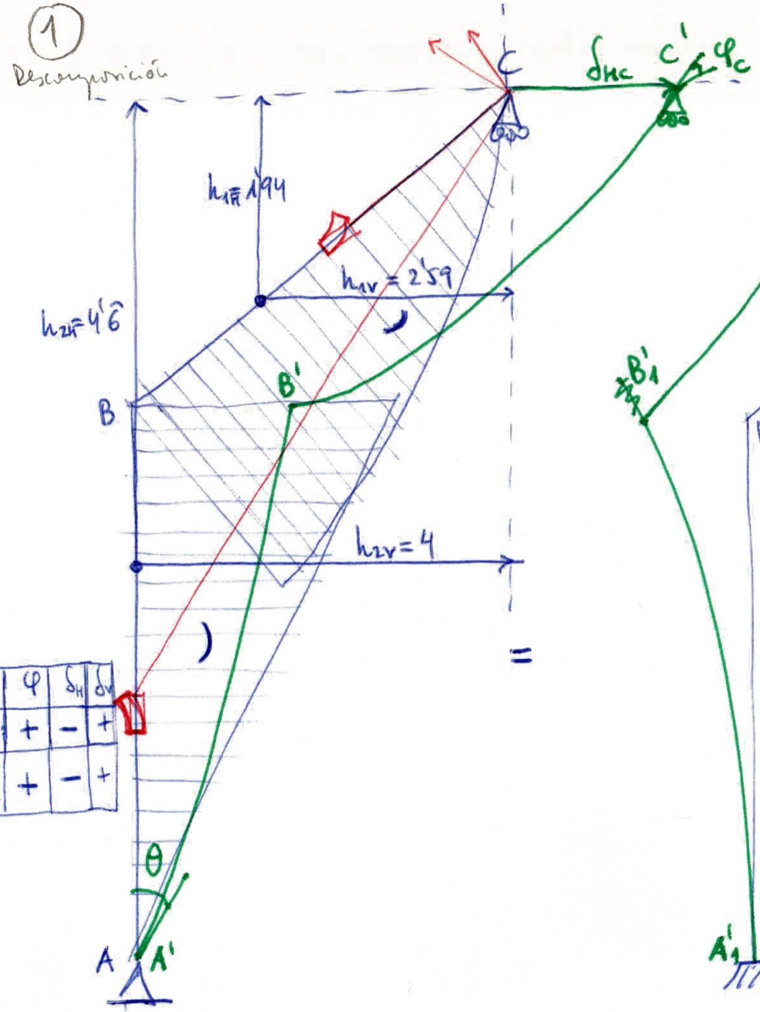
$A_1 = \frac{1}{2} 5\text{m} \cdot 200 \text{ kNm} = 500 \text{ kNm}^2$

$A_2 = \int_0^5 M(x)\,dx = \int_0^5 (200 - 24x - 3'2x^2)\,dx = \left[200x - 12x^2 - 1'0\hat{6}x^3\right]_0^5 = 566'\hat{6} \text{ kNm}^2$ ✓ (algo más de 500 pero menos de 666)

$x_{G2} = \dfrac{\int_0^5 M(x)\,x\,dx}{A_2} = \dfrac{\int_0^5 (200x - 24x^2 - 3'2x^3)\,dx}{566'\hat{6}} = \dfrac{1}{566'\hat{6}}\left[100x^2 - 8x^3 - 0'8x^4\right]_0^5 = 1'76$ ✓ (algo más de $\frac{5}{3} = 1'\hat{6}$)

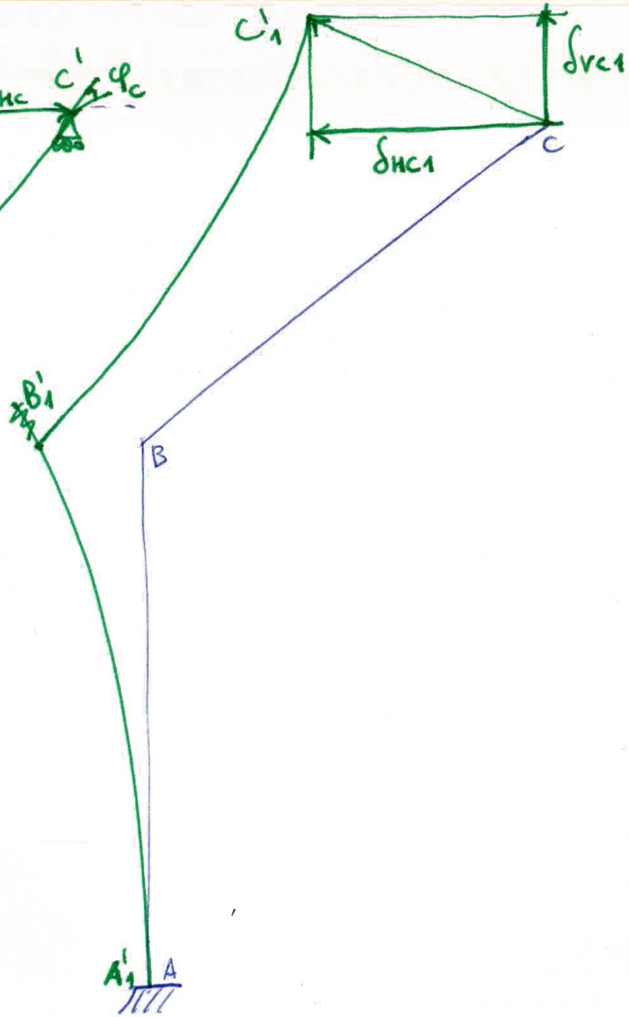
(1)

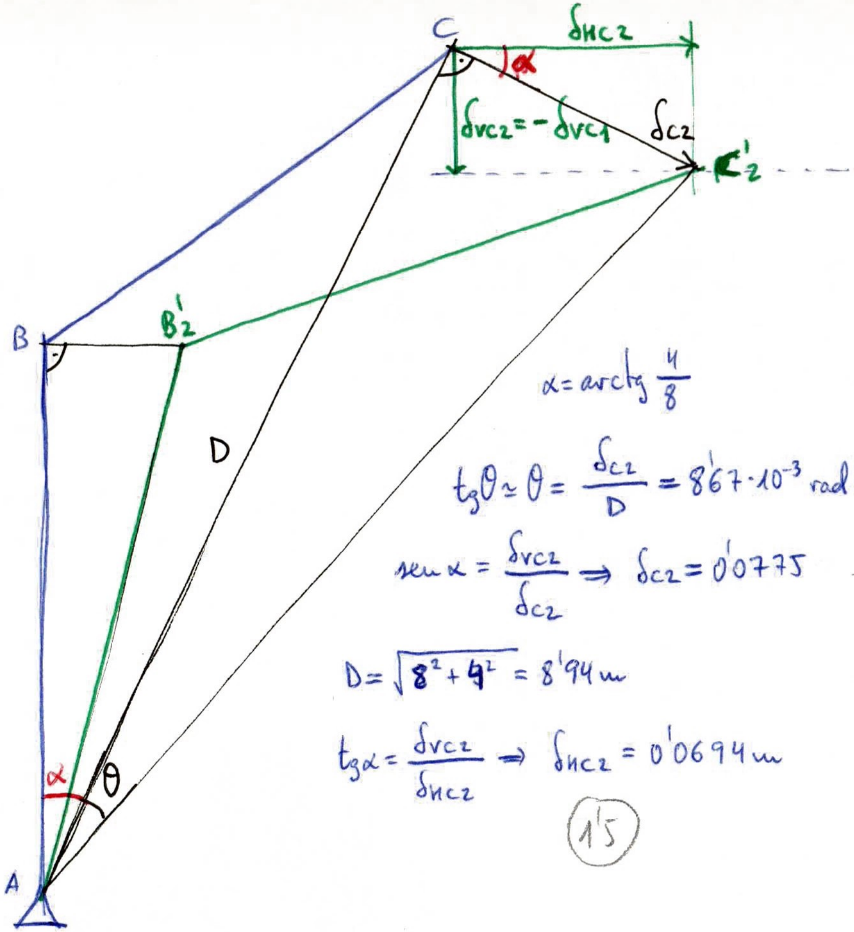
Descomposición



	φ	δ_H	δ_V
A_1	+	−	+
A_2	+	−	+

=





$\alpha = \text{arctg}\,\frac{4}{8}$

$$tg\,\theta \simeq \theta = \frac{\delta_{C2}}{D} = 8'67 \cdot 10^{-3}\ \text{rad} = \varphi_{C2}^{(-)}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\delta_{VC2}}{\delta_{C2}} \Rightarrow \delta_{C2} = 0'0775$$

$$D = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8'94\ \text{m}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\delta_{VC2}}{\delta_{HC2}} \Rightarrow \delta_{HC2} = 0'0694\ \text{m}$$

(1'5)

$$\varphi_C = \varphi_{C1} + \varphi_{C2} = \boxed{2 \cdot 10^{-3}\ \text{rad}}$$

$$\delta_{HC} = \underbrace{\delta_{HC1}}_{\text{Mohr}} + \underbrace{\delta_{HC2}}_{\text{Geometría}} = \boxed{3'51\ \text{cm}}$$

$$\varphi_{C1} = \frac{1}{EI}(A_1 + A_2) = \frac{500 + 566'6}{10^5} = 0'0106\ \text{rad}$$

$$\delta_{HC1} = \frac{1}{EI}(-A_1 h_{1H} - A_2 h_{2H}) = -\frac{566'6 \cdot 1'94 + 500 \cdot 4'6}{10^5} = -0'0343\ \text{m}$$

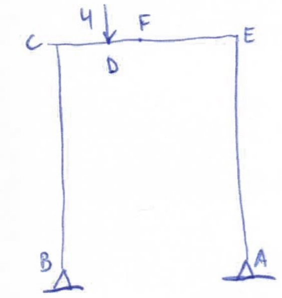
$$\delta_{VC1} = \frac{1}{EI}(A_1 h_{1V} + A_2 h_{2V}) = \frac{566'6 \cdot 2'59 + 500 \cdot 4}{10^5} = 0'0347\ \text{m}$$

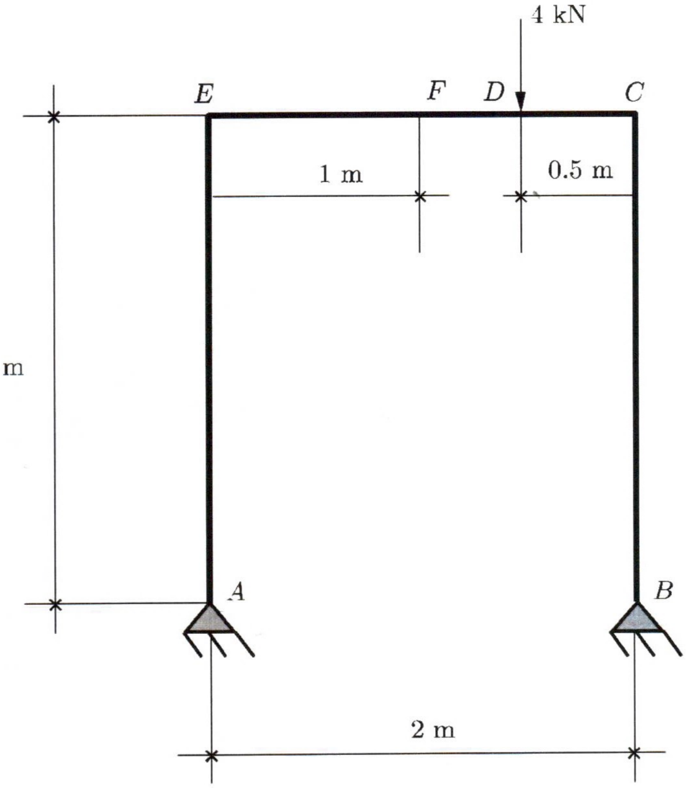
(1'5)

APELLIDOS: NOMBRE: D.N.I.: Grupo:

Considere el pórtico de la figura:

Por comodidad, vamos a mirar al pórtico desde detrás:



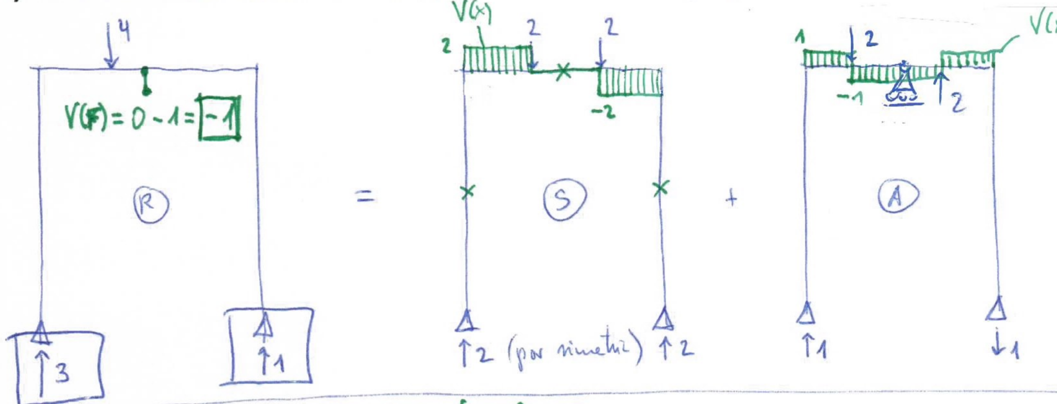


Sabiendo que todos los elementos estructurales tienen la misma sección y son del mismo material, siendo EI = 10^4 kNm², se pide:

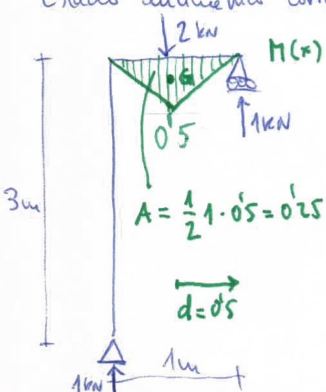
a) Calcular el valor del esfuerzo cortante en F. ⟶ Estado antimétrico, puesto que en el simétrico vale 0

b) Calcular el desplazamiento horizontal de F. ⟶ " " " " " " " " "

c) Calcular las reacciones verticales en los apoyos. ⟶ Suma de ambos estados



Estado antimétrico cortando por F:



$A = \frac{1}{2} 1 \cdot 0'5 = 0'25$

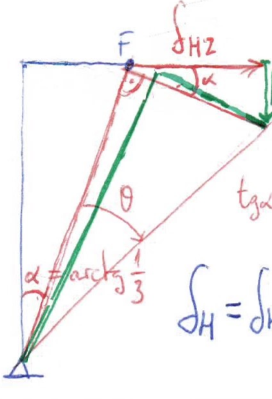
$\overrightarrow{d = 0'5}$

=

$\delta_{H1} = 0$

$\delta_{V1} = \frac{1}{EI} A \cdot d = \frac{0'25 \cdot 0'5}{10^4} = 1'25 \cdot 10^{-5}$ mm

+



$|\delta_{V2}| = |\delta_{V1}| = 1'25 \cdot 10^{-5}$

$tg\alpha = \frac{|\delta_{V2}|}{\delta_{H2}} \Rightarrow \delta_{H2} = \frac{1'25 \cdot 10^{-5}}{\frac{1}{3}} = 3'75 \cdot 10^{-5}$ mm

$\delta_H = \delta_{H1} + \delta_{H2} = 0 + 3'75 \cdot 10^{-5} = \boxed{3'75 \cdot 10^{-5} \text{ mm}}$