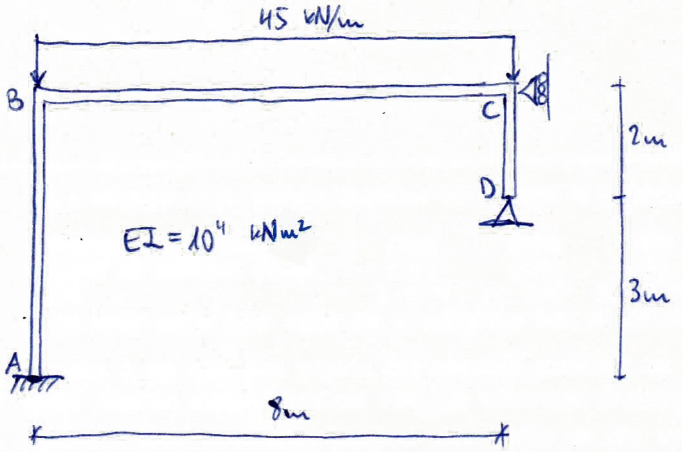
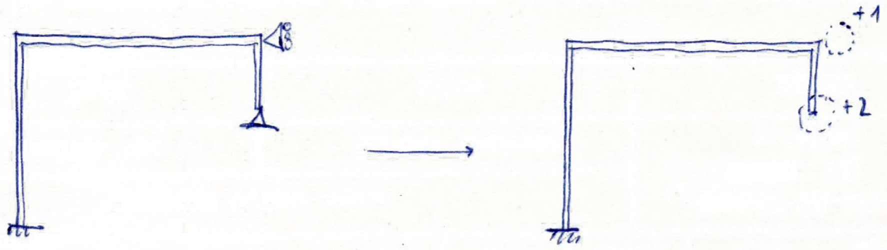
EJERCICIO MATRICIAL INTRASLACIONAL



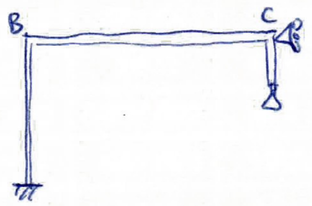
Calcular reacciones y leyes de solicitaciones (mediante el método matricial).
Suponer barras incompresibles.

1) HIPERESTATISMO (Asegurarse de que no es isostática; de lo contrario no hace falta matricial)



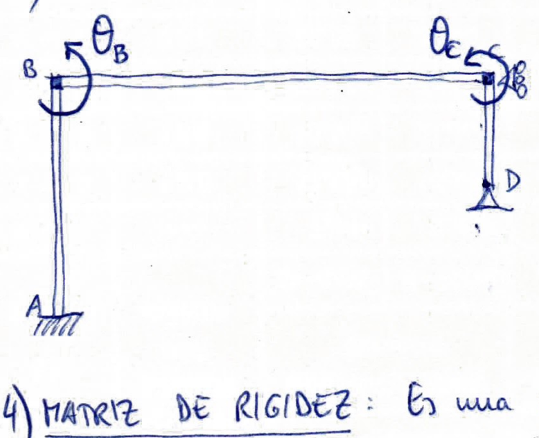
HIPER +3

2) TRASLACIONALIDAD: Si es intraslacional, los únicos grados de libertad (gdl) de la estructura son giros.



La existencia del apoyo lateral en C impide el desplazamiento horizontal de C. Por inextensibilidad de la viga, B tampoco se desplaza en horizontal. Y por incompresibilidad de pilares, B y C no pueden moverse en vertical.

3) GRADOS DE LIBERTAD: Solo giros de los nudos interiores (B y C). El giro de D (nudo exterior) se computa posteriormente considerando que la barra CD es rígida-articulada.



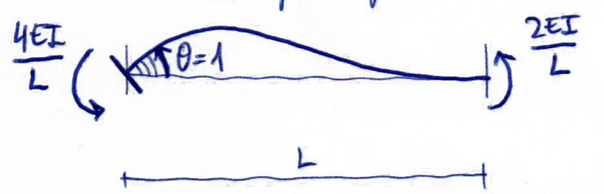
gdl = 2

4) MATRIZ DE RIGIDEZ: Es una matriz cuadrada de orden 2 (= gdl), que se obtiene dando movimientos (giros) unitarios a cada gdl de manera separada: se aplica un giro a uno de los gdl y el resto permanece inalterado, salvo los nudos exteriores que se mueven libremente por no constituir gdl del problema. Cada columna de la matriz corresponde a un movimiento independiente de cada gdl: θ_B y θ_C, ambos unitarios y siempre en el sentido positivo (antihorario), generando momentos también positivos en ejes globales.

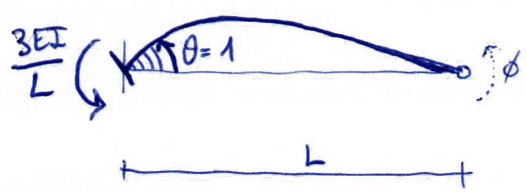
Al girar independiente cada nudo, computamos los momentos flectores en los extremos de barra que confluyen en los gdl, y de manera colateral también los que confluyen en los gdl exteriores (empotramientos), marcados entre paréntesis.

Dichos momentos flectores originados por giros unitarios se llaman coeficientes de rigidez a giro y se obtienen del prontuario, correspondientes a los dos tipos de barra existentes en este caso:

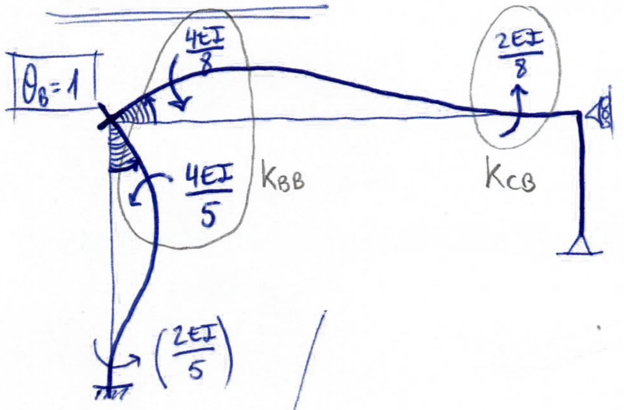
barra rígida-rígida



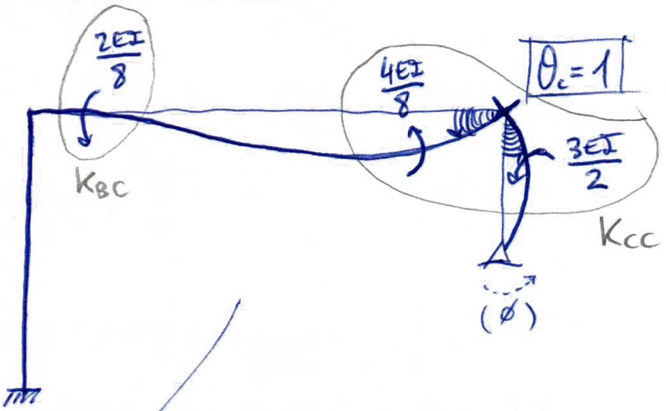
barra rígida-articulada



Giro en B: $\theta_B = 1$



Giro en C: $\theta_C = 1$



Los momentos flectores en extremos de barra concurrentes en un gdl se suman, puesto que en la matriz hay que colocar momentos totales sobre nudos. Cada coeficiente de la matriz de rigidez, K_{ij}, se interpreta como "momento que hay que aplicar en el nudo i cuando solo gira el nudo j 1 radián":

$$(K) = \begin{array}{c} \\ M_B \rightarrow \\ M_C \rightarrow \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \theta_B \downarrow & \theta_C \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} K_{BB} & K_{BC} \\ K_{CB} & K_{CC} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{8} + \frac{4EI}{5} & \frac{2EI}{8} \\ \frac{2EI}{8} & \frac{4EI}{8} + \frac{3EI}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13000 & 2500 \\ 2500 & 20000 \end{pmatrix}$$

(K) siempre es simétrica y con coeficientes positivos que son muy grandes.

5) INVERSIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ: Como la matriz es 2x2, se puede invertir fácilmente:

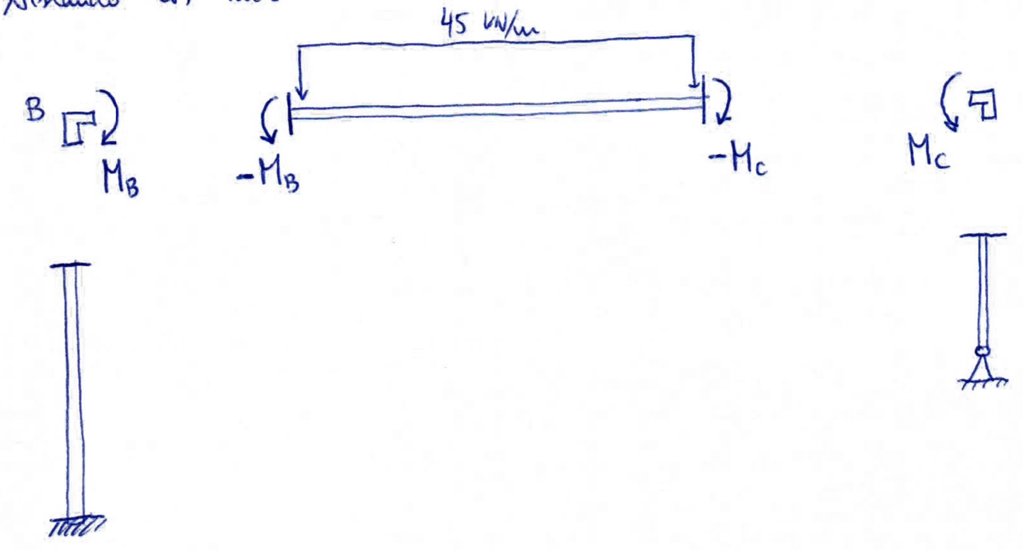
$$(K)^{-1} = \begin{pmatrix} 13000 & 2500 \\ 2500 & 20000 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 20000 & -2500 \\ -2500 & 13000 \end{pmatrix}}{13000 \cdot 20000 - 2500^2} = \begin{pmatrix} 7'88 \cdot 10^{-5} & -9'85 \cdot 10^{-6} \\ -9'85 \cdot 10^{-6} & 5'12 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$(K)^{-1}$ sigue siendo simétrica pero puede tener coeficientes negativos que son muy pequeños.

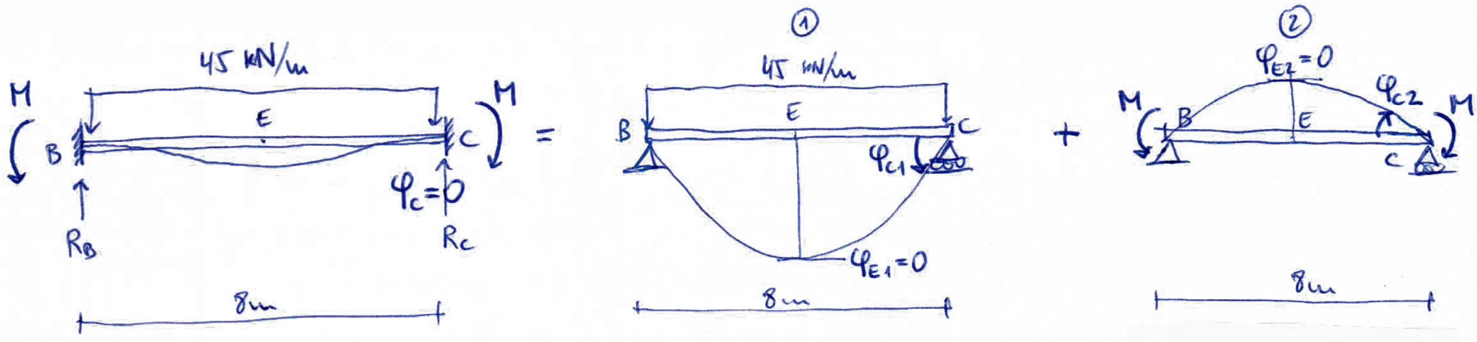
7) REACCIONES DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

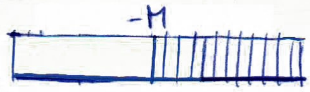
Mediante la matriz de rigidez se ha caracterizado el comportamiento deformacional de la estructura, de manera independiente de las cargas reales que soporta. A través de la matriz de rigidez, mediante una ley de Hooke matricial, podrían obtenerse los movimientos para cualquier estado de cargas. Para obtener los movimientos (giros) reales de los nudos de la estructura que constituyen gdl, hay que transformar las cargas sobre barras en acciones equivalentes sobre los nudos, que son los únicos elementos que el método matricial puede "ver". Transformar las cargas en equivalentes sobre nudos es igual que calcular las reacciones que ejercerían estos nudos sobre las barras cargadas, cambiadas de signo. Cuando los nudos son rígidos, estas reacciones se denominan "de empotramiento perfecto".

Aislando los nudos:



El cálculo de reacciones de empotramiento perfecto en la viga se efectúa mediante el método de superposición. Como la viga es simétrica de geometría, cargas y apoyos, los dos momentos reacción serán iguales y opuestos, y por tanto pueden incluirse en un mismo estado. Al no existir acciones horizontales, no existe tampoco reacción horizontal redundante:





$$\frac{45 \cdot 8^2}{8} = 360 \text{ kN·m}$$

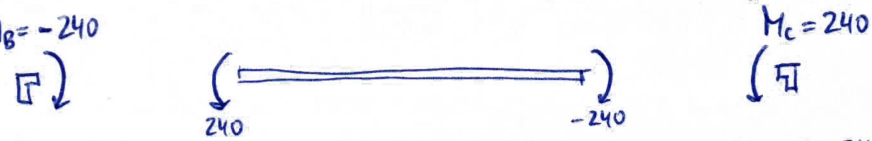
$$\varphi_C = 0 = \varphi_{C1} + \varphi_{C2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0'096 = 4 \cdot 10^{-4}\, M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 240 \text{ kN·m}}$$

$$\varphi_{C1} = \frac{A_{M,E\to C}}{EI} = \frac{\frac{2}{3} 4 \cdot 360}{10^4} = 0'096 \text{ rad} \qquad \varphi_{C2} = \frac{A_{M,E\to C}}{EI} = \frac{-4 \cdot M}{10^4} = -4 \cdot 10^{-4} M$$

Por tanto, los momentos sobre los nudos con signos en ejes globales, son:



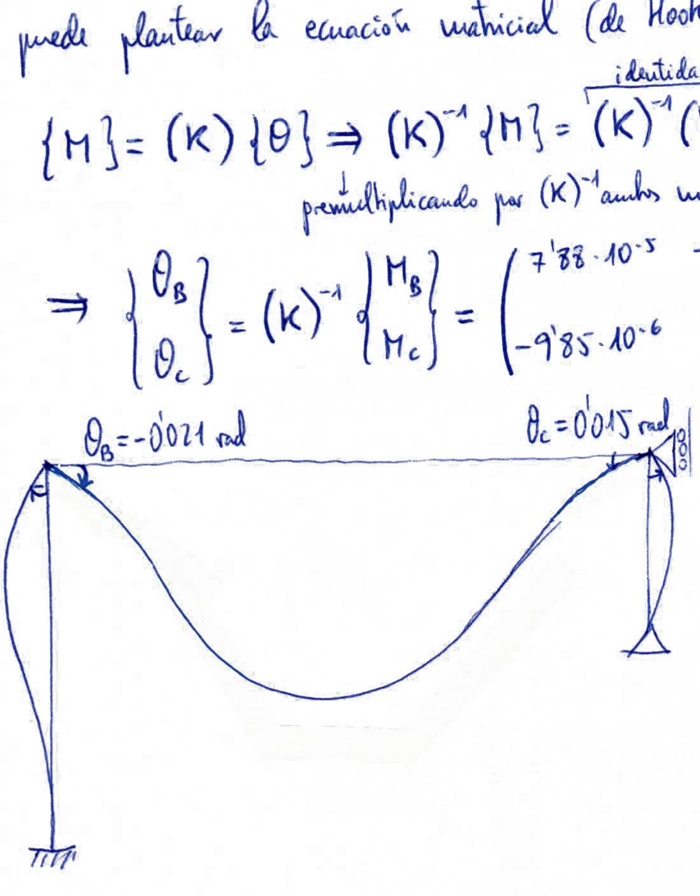
Ambos momentos se "empaquetan" en un vector $\{M\} = \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -240 \\ 240 \end{Bmatrix}$

8) OBTENCIÓN DE GIROS

Una vez que se ha transformado la estructura completa en un modelo de 2 gdl, se puede plantear la ecuación matricial (de Hooke) para despejar los giros:

$$\{M\} = (K)\{\theta\} \Rightarrow \underbrace{(K)^{-1}\{M\}}_{\text{premultiplicando por } (K)^{-1} \text{ ambos miembros}} = \overbrace{(K)^{-1}(K)}^{\text{identidad}}\{\theta\} \Rightarrow (K)^{-1}\{M\} = \{\theta\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = (K)^{-1} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 7'88 \cdot 10^{-5} & -9'85 \cdot 10^{-6} \\ -9'85 \cdot 10^{-6} & 5'12 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -240 \\ 240 \end{Bmatrix} = \cdots = \begin{Bmatrix} -0'021 \text{ rad} \\ 0'015 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$



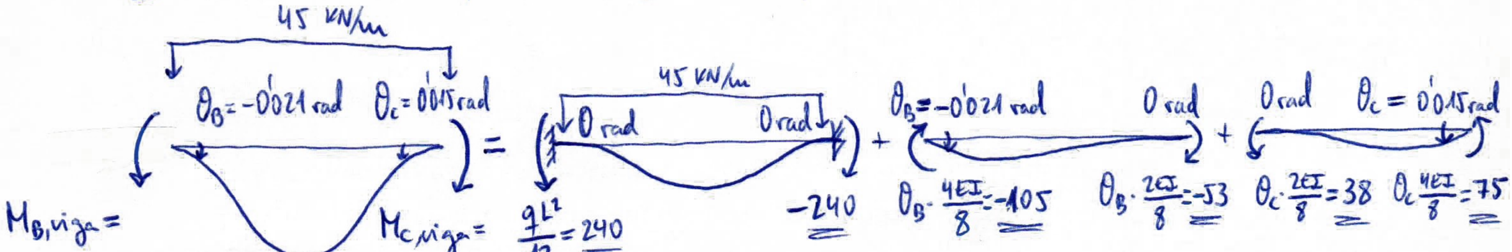
Se comprueba gráficamente que los signos son congruentes con la "panza" de la viga y que el mayor valor del giro izquierdo se debe a que, aunque el pilar izquierdo está empotrado y el derecho articulado, la mayor longitud del izquierdo lo hace más flexible.

9) OBTENCIÓN DE MOMENTOS EN EXTREMO DE BARRA

Hasta ahora el proceso seguido ha ido en la dirección de pasar de la estructura formada por barras hasta los nudos; de aquí en adelante hay que invertir el proceso, es decir, volver desde los nudos a las barras a través de los coeficientes de rigidez.

Conocidos los giros de los nudos, estos son iguales a los giros de los extremos de barra, que sabemos que producen momentos en las barras (ver punto 4).

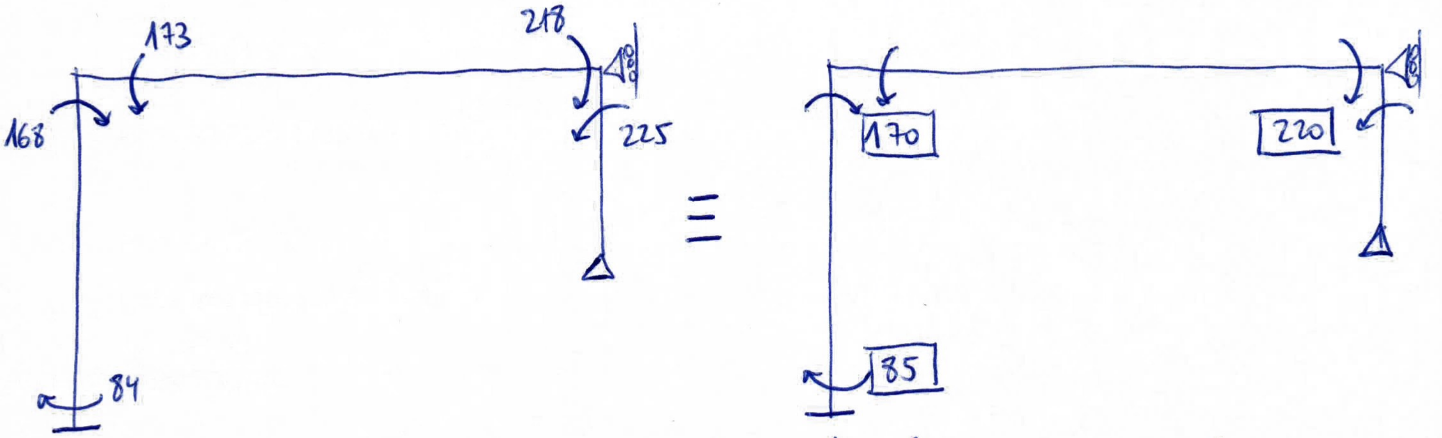
Procedemos aislando barras e imponiendo los giros reales, y descomponiendo en subestados en los que cada giro se aplique individualmente, provocando un momento en extremo de barra que se obtiene con la ley de Hooke: $M = K \cdot \theta$



$M_{B,viga} = 240 - 105 + 38 = \boxed{173 \text{ kNm}}$

$M_{C,viga} = -240 - 53 + 75 = \boxed{-218 \text{ kNm}}$

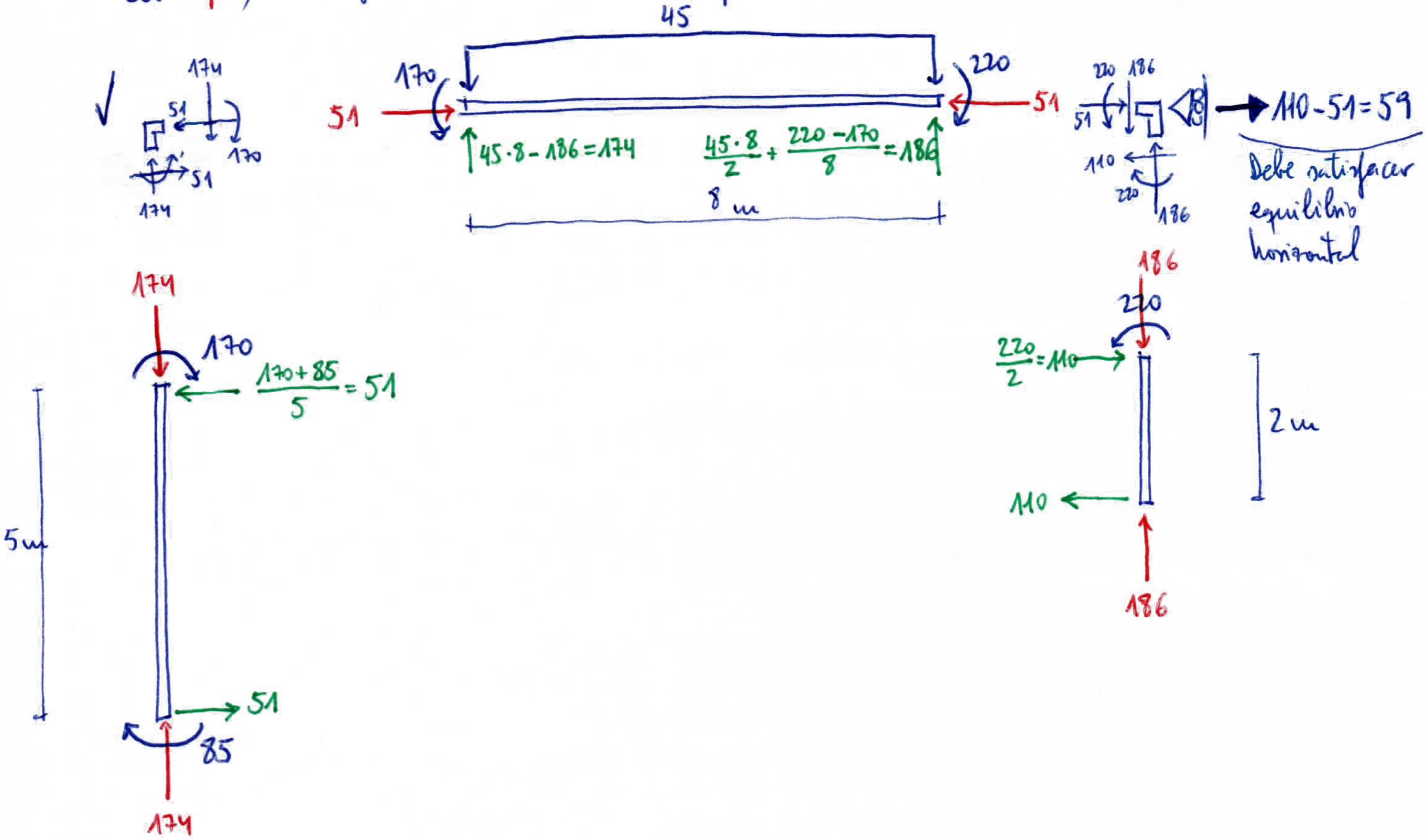
Ensamblando, se observa que no coinciden exactamente los momentos en los extremos concurrentes debido a una acumulación de error por redondeo. Se toman valores intermedios de manera aproximada:



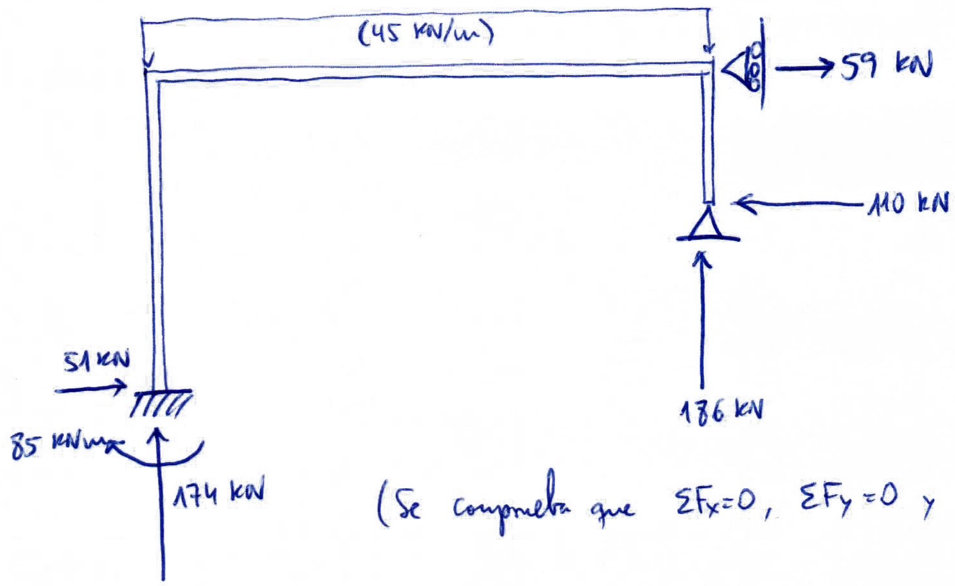
De manera aproximada, se podría haber evitado realizar la descomposición en la viga simplemente asumiendo que los momentos en sus extremos eran los obtenidos en los pilares.

10) REACCIONES EN EXTREMOS DE BARRAS

A partir de las fuerzas que ya se conocen (cargas aplicadas y momentos en extremos de barras), grafiadas en azul, se obtienen las reacciones transversales a las barras (grafiadas en verde) y finalmente, por equilibrio en los nudos, dichas fuerzas transversales se convierten en reacciones axiales en las barras adyacentes (grafiadas en rojo). Las fuerzas verdes se obtienen aplicando las ecuaciones de la estática.

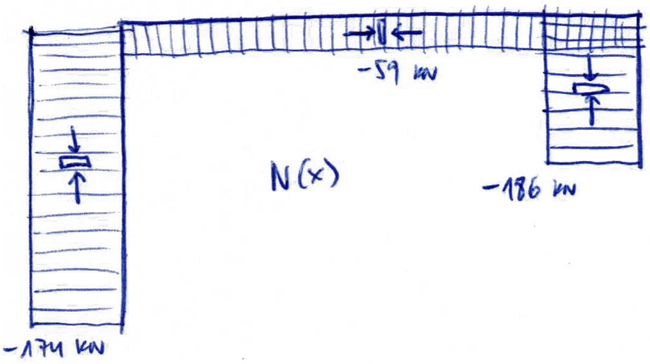


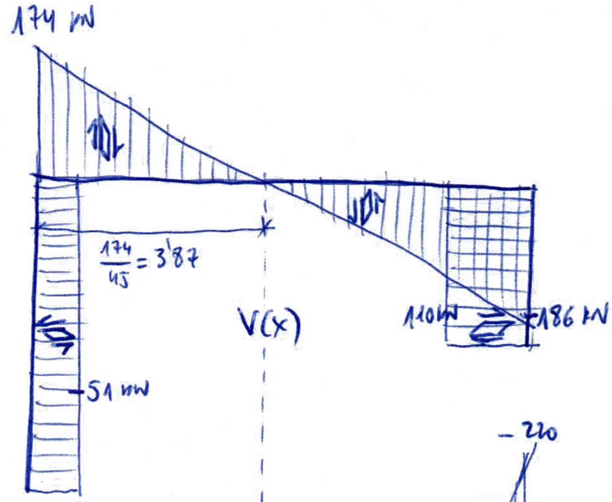
11) REACCIONES DE LA ESTRUCTURA

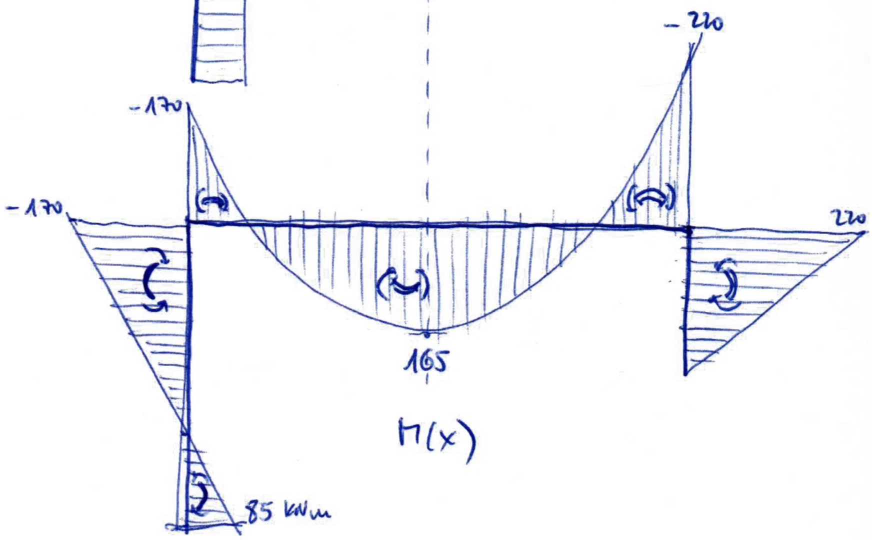


(Se comprueba que $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_A = 0$)

12) SOLICITACIONES DE LA ESTRUCTURA

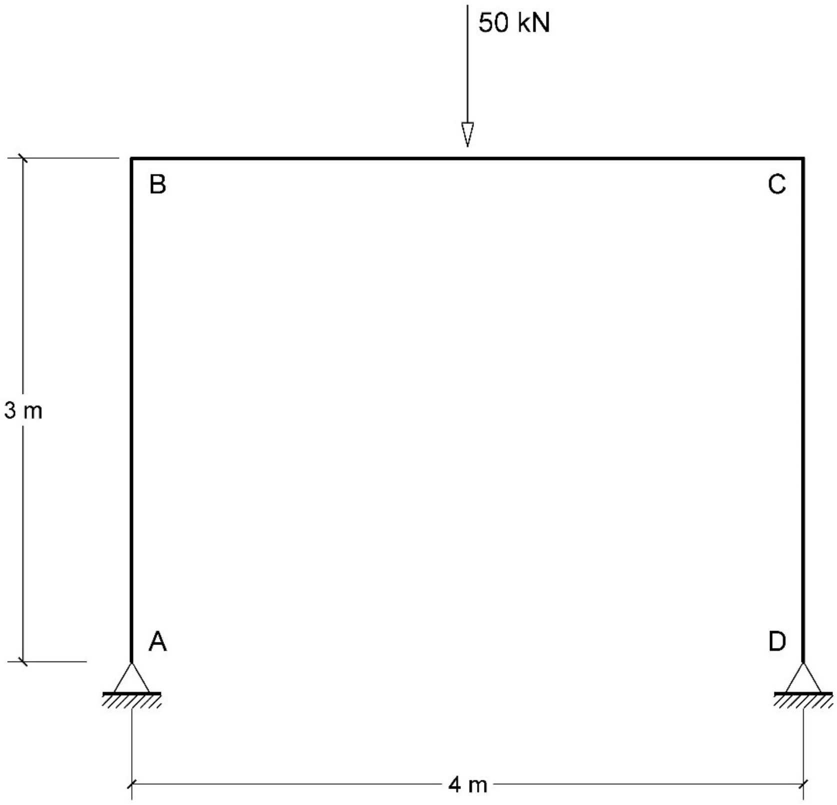






APELLIDOS: NOMBRE: D.N.I.:

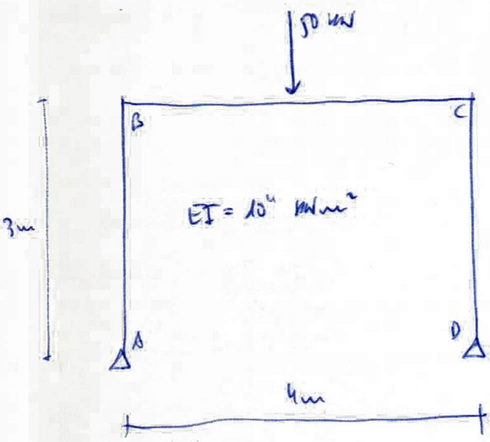
Obtener las reacciones y solicitaciones del pórtico mediante el método matricial.

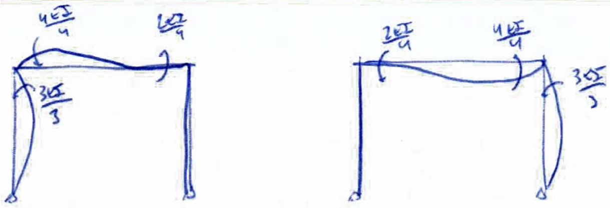


Barras: EI = 10^4 kNm^2

Nota:

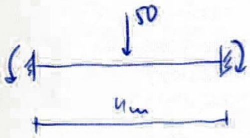
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad - bc}$$





$$(K) = EI\begin{pmatrix} \frac{4}{4}+\frac{3}{3} & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{4}{4}+\frac{3}{3} \end{pmatrix} = EI\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 10^4 & 5\cdot 10^3 \\ 5\cdot 10^3 & 2\cdot 10^4 \end{pmatrix} = 10^3\begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$$

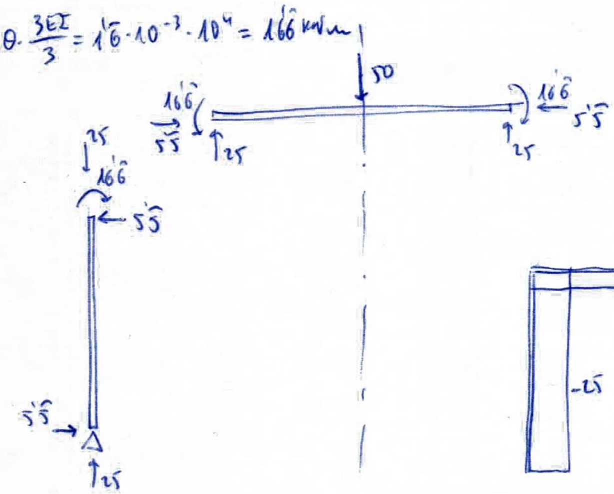
$$(K)^{-1} = 10^{-3}\begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}^{-1} = 10^{-3}\frac{\begin{pmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}}{(20^2-5^2)} = \frac{\begin{pmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}}{3'75\cdot 10^5} = \begin{pmatrix} 5'\hat{3}\cdot 10^{-5} & -1'\hat{3}\cdot 10^{-5} \\ -1'\hat{3}\cdot 10^{-5} & 5'\hat{3}\cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

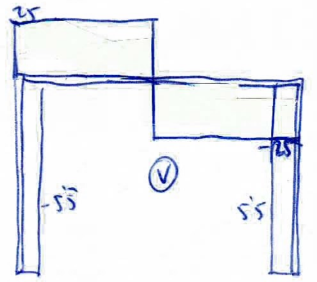


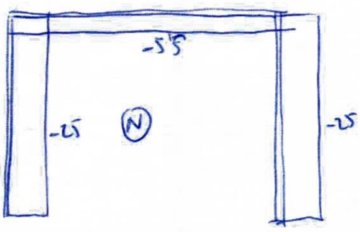
$$\frac{50\cdot 4}{8} = 25$$

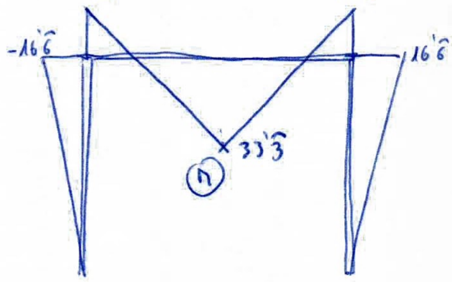
$$\{M\} = \begin{Bmatrix} -25 \\ 25 \end{Bmatrix} \text{ kNm} \quad ; \quad \{\theta\} = (K)^{-1}\{M\} = \begin{Bmatrix} -1'\hat{6}\cdot 10^{-3} \\ 1'\hat{6}\cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} \text{ rad}$$

$$M = \theta\cdot\frac{3EI}{3} = 1'\hat{6}\cdot 10^{-3}\cdot 10^{4} = 16'\hat{6} \text{ kNm}$$



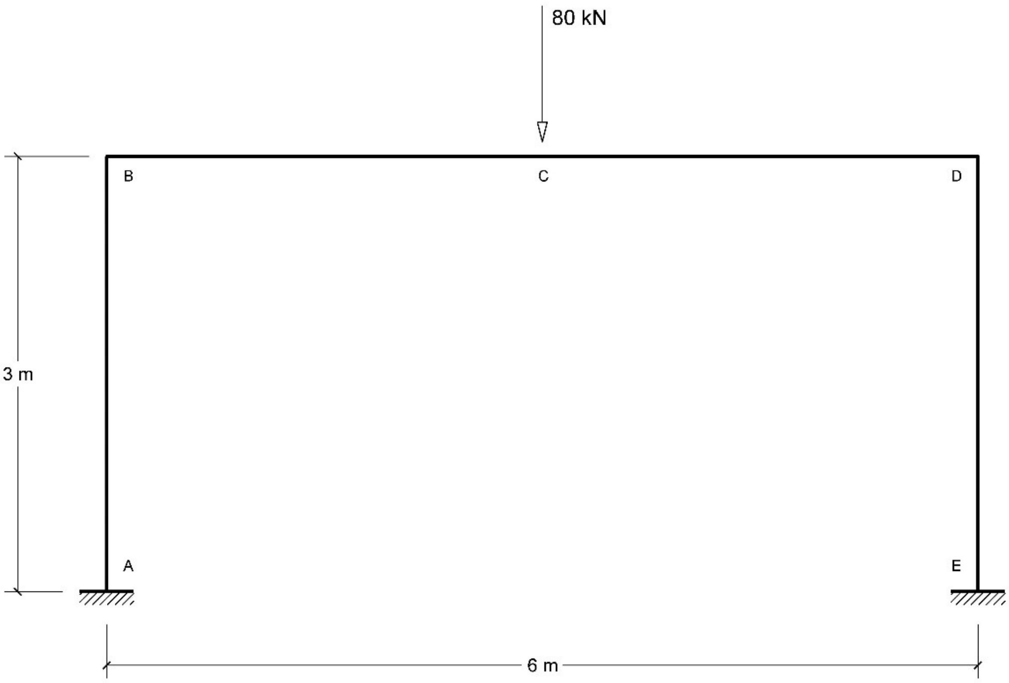






APELLIDOS: NOMBRE: DNI: GRUPO:

Obtener las reacciones de la estructura mediante el método matricial



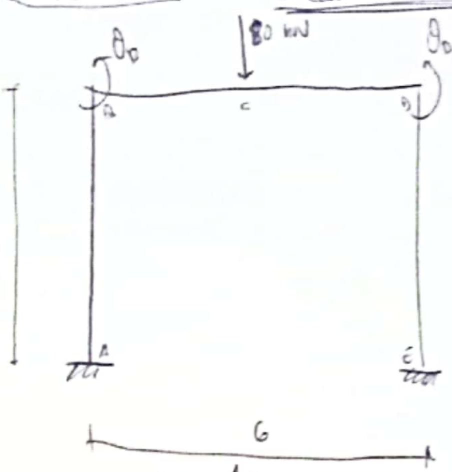
Barras: EI = 10^4 kNm^2

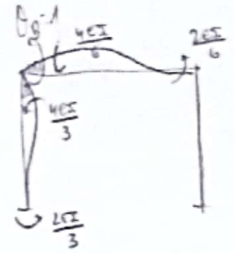
Nota:

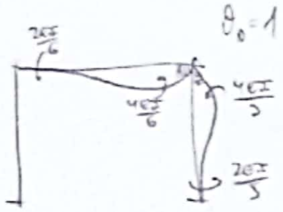
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad - bc}$$

$\boxed{EI = 10^4\ kN\,m^2}$

Calculo reacciones

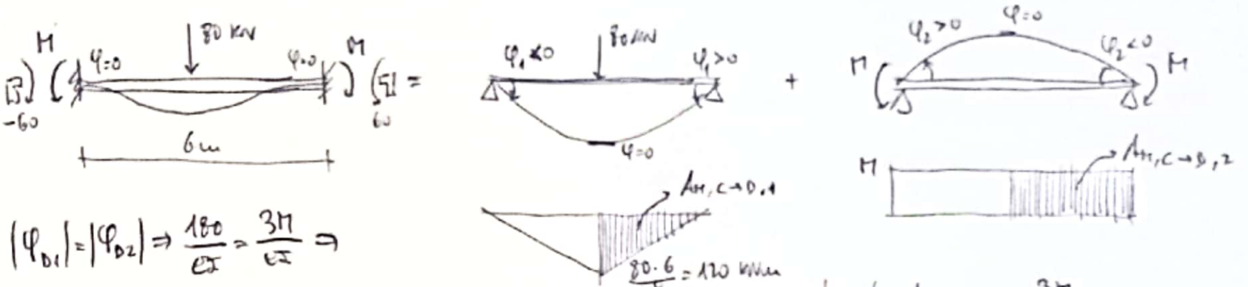






$$(K)=\begin{array}{c|cc} & \theta_B & \theta_D \\ \hline M_B & 4EI\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) & \frac{2EI}{6} \\ M_D & \frac{2EI}{6} & 4EI\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) \end{array} = \begin{pmatrix} 2EI & \frac{EI}{3} \\ \frac{EI}{3} & 2EI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 & 3333'3 \\ 3333'3 & 2000 \end{pmatrix} = EI\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

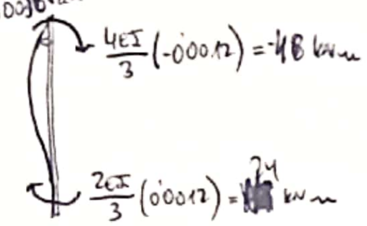
$$(K)^{-1} = \frac{EI\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}}{(EI)^2\left(2^2-\frac{1}{3^2}\right)} = \frac{1}{EI}\frac{1}{\frac{35}{9}}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{pmatrix} \frac{18}{35} & -\frac{3}{35} \\ -\frac{3}{35} & \frac{18}{35} \end{pmatrix} = \frac{3}{35EI}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$



$|\varphi_{D1}| = |\varphi_{D2}| \Rightarrow \frac{180}{EI} = \frac{3M}{EI} \Rightarrow$

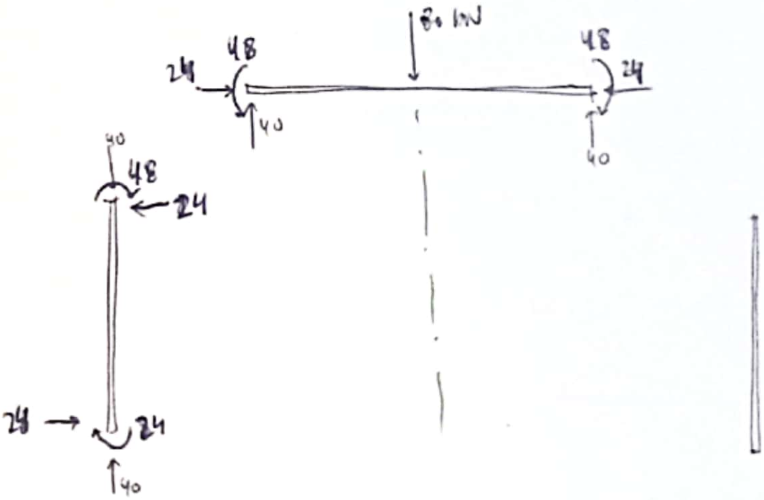
$\Rightarrow \underline{M = 60\ kNm} \Rightarrow \{M\} = \begin{Bmatrix} -60 \\ 60 \end{Bmatrix}$ $|\varphi_{D1}| = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\,3\cdot 120 = \frac{180}{EI}$ $|\varphi_{D2}| = \frac{1}{EI}\,3M = \frac{3M}{EI}$

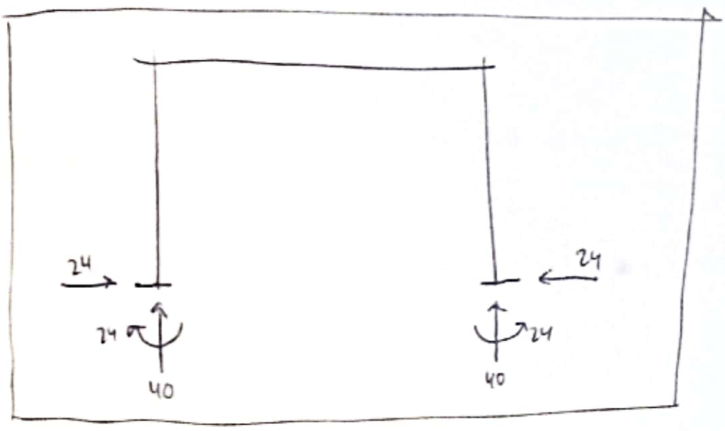
$$\{M\} = (K)\{\theta\} \Rightarrow (K)^{-1}\{M\} = \{\theta\} = \frac{3}{35EI}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} -60 \\ 60 \end{Bmatrix} = \frac{3}{35EI}\begin{Bmatrix} -420 \\ 420 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3'6\cdot 10^{-3} \\ 3'6\cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0'0036 \\ 0'0036 \end{Bmatrix} rad$$



$\frac{4EI}{3}(-0'0012) = -48\ kNm$

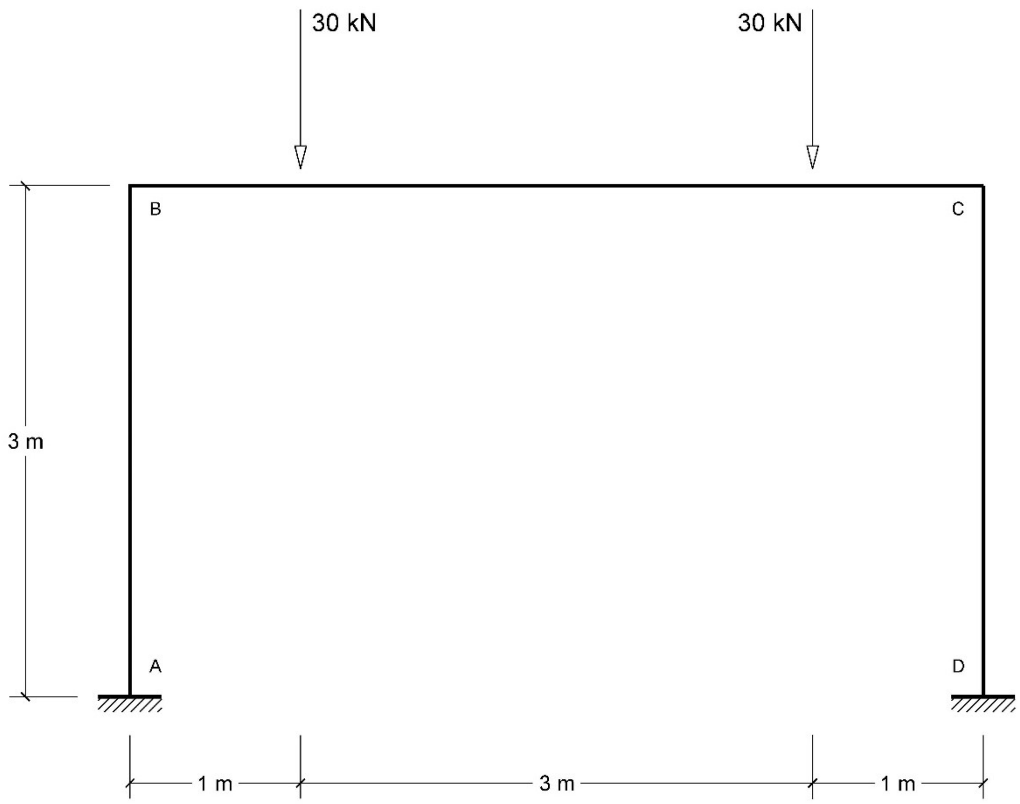
$\frac{2EI}{3}(0'0012) = 24\ kNm$





APELLIDOS: NOMBRE: DNI: GRUPO:

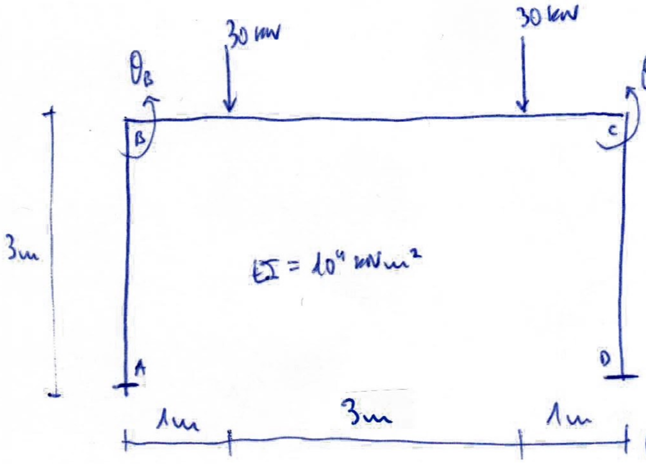
Obtener las reacciones de la estructura mediante el método matricial

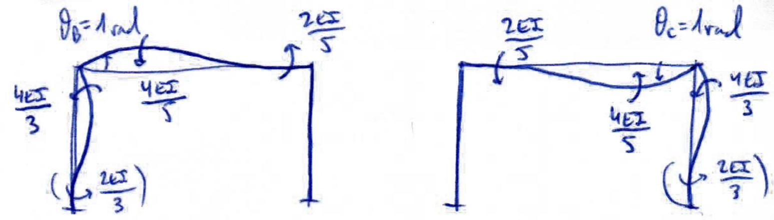


Barras: $EI = 10^4\ kNm^2$

Nota:

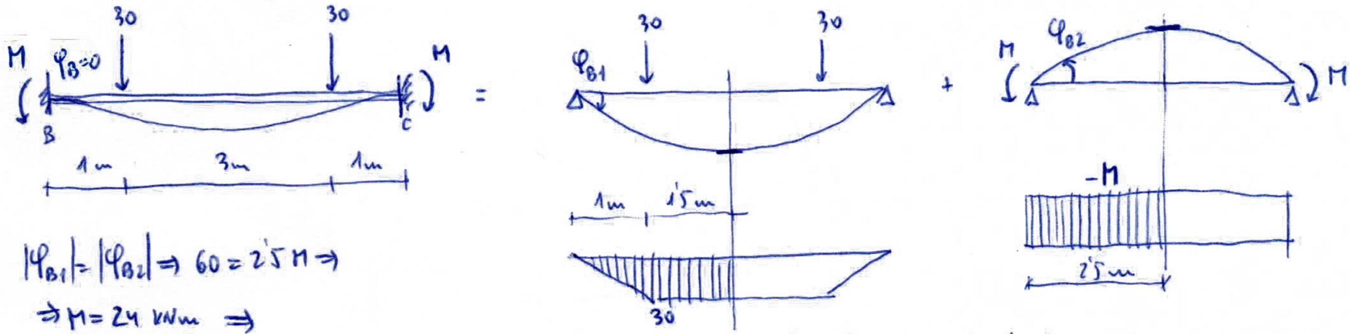
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad - bc}$$





$$(K) = \begin{pmatrix} 4EI\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) & \frac{2EI}{5} \\ \frac{2EI}{5} & 4EI\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 2'1\hat{3} & 0'4 \\ 0'4 & 2'1\hat{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21333 & 4000 \\ 4000 & 21333 \end{pmatrix}$$

$$(K)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 21333 & -4000 \\ -4000 & 21333 \end{pmatrix}}{21333^2 - 4000^2} = \begin{pmatrix} 4'858\cdot 10^{-5} & -9'109\cdot 10^{-6} \\ -9'109\cdot 10^{-6} & 4'858\cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$



$|\varphi_{B1}| = |\varphi_{B2}| \Rightarrow 60 = 2'5\,M \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{M = 24 \text{ kNm}} \Rightarrow$

$$|\varphi_{B1}| = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\,1\cdot 30 + 1'5\cdot 30\right) = \frac{60}{EI} \qquad |\varphi_{B2}| = \frac{1}{EI}\,2'5\cdot M$$

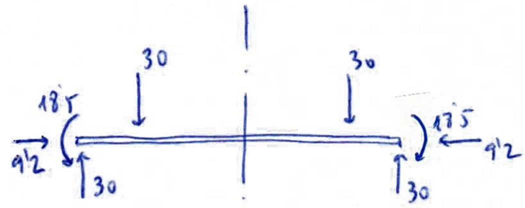
$$\Rightarrow \{M\} = \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -24 \\ 24 \end{Bmatrix} \text{kNm}$$

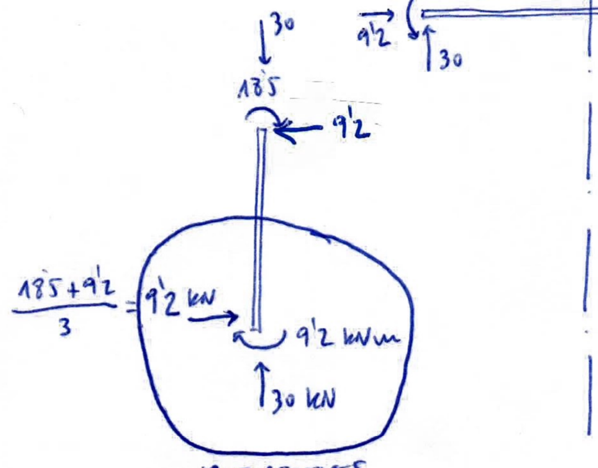
$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = (K)^{-1}\{M\} = \begin{pmatrix} 4'858\cdot 10^{-5} & -9'109\cdot 10^{-6} \\ -9'109\cdot 10^{-6} & 4'858\cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -24 \\ 24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1'385\cdot 10^{-3} \\ 1'385\cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} \text{rad}$$

$\theta_B = -1'385\cdot 10^{-3}$

$m_B = \frac{4EI}{3}\cdot\theta_B = 18'5$ kNm

$\frac{m_B}{2} = 9'2$ kNm





REACCIONES