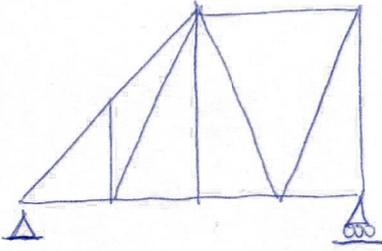


En las siguientes cerchas, determinar qué barras no trabajan y si se podrían eliminar sin que la cercha perdiera su estabilidad

Cuestión 1



A simple vista se puede estimar que la cercha es isostática interna y externa, y por tanto global. Internamente es una adición de triángulos donde todos comparten sus lados. Externamente tiene 3 reacciones.

Aplicando las fórmulas se comprueba:

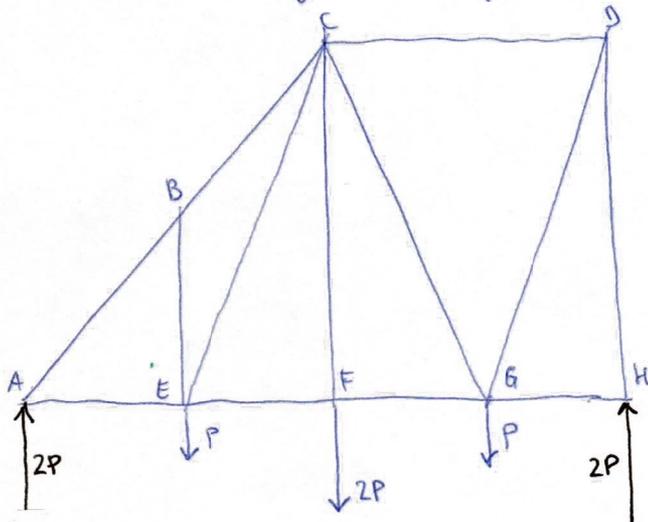
$$GHI = b - 2n + 3 = 13 - 2 \cdot 8 + 3 = 0 \quad \checkmark$$

$$GHE = r - 3 = 3 - 3 = 0 \quad \checkmark$$

$$GHT = 0 + 0 = 0 \quad \checkmark$$

Para estudiar si hay barras que no trabajen, hay que localizar si existen nudos con 3 fuerzas, 2 de ellas alineadas, donde por tanto la restante no trabaja.

Para localizar las fuerzas, se obtienen las reacciones sin necesidad de cálculos (por simetría de cargas salen iguales ambas reacciones). La carga total será  $4P$ , y por tanto cada reacción vale la mitad.

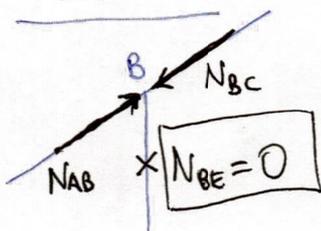


Inspeccionamos el número de fuerzas que concurren en cada nudo:

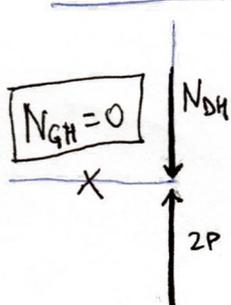
A	B	C	D	E	F	G	H
3	3	5	3	5	4	5	3

$\downarrow$  2 alineados  
 $\downarrow$  No alineados  
 $\downarrow$  No alineados  
 $\downarrow$  2 alineados

Nudo B:



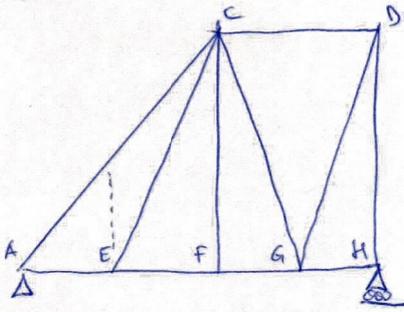
Nudo H:



En ambos nudos, la fuerza no alineada es nula.

¿Se pueden eliminar las barras que no trabajen? Solo si la estructura resultante sigue cumpliendo las condiciones de cercha, no se transforma en un mecanismo.

Si se quita la barra BE, quedaría así:

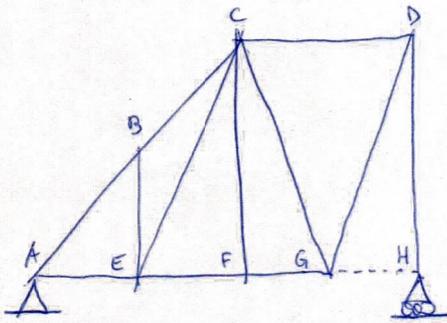


A simple vista se ve que seguiría siendo estable (isostática), puesto que siguen siendo triángulos adosados. Efectuando el conteo:

$$GHI = 11 - 2 \cdot 7 + 3 = 0 \quad \checkmark$$

Esto es así porque al quitar la barra BE también se está quitando 1 nudo (B) y 1 barra (BC), y por tanto la fórmula cumple.

Si se quita la barra GH, quedaría así:

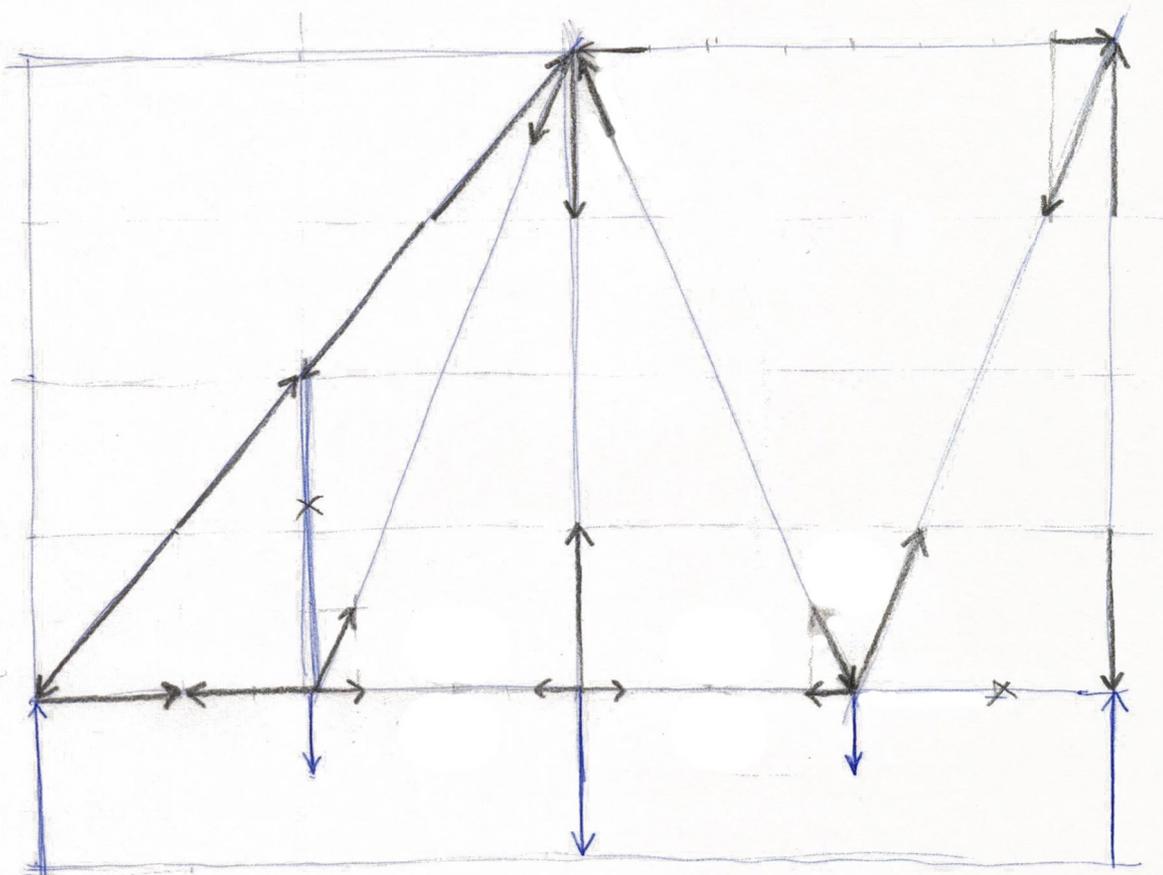


A simple vista se ve que es un mecanismo (se rompe un triángulo). Efectuando el conteo.

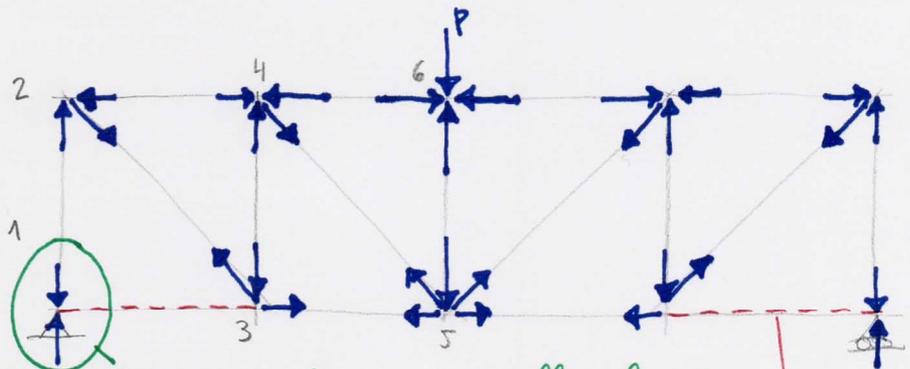
$$GHI = 12 - 2 \cdot 8 + 3 = -1$$

(Se quita 1 barra y ningún nudo)

Extra: resolución por el método de los nudos gráfico



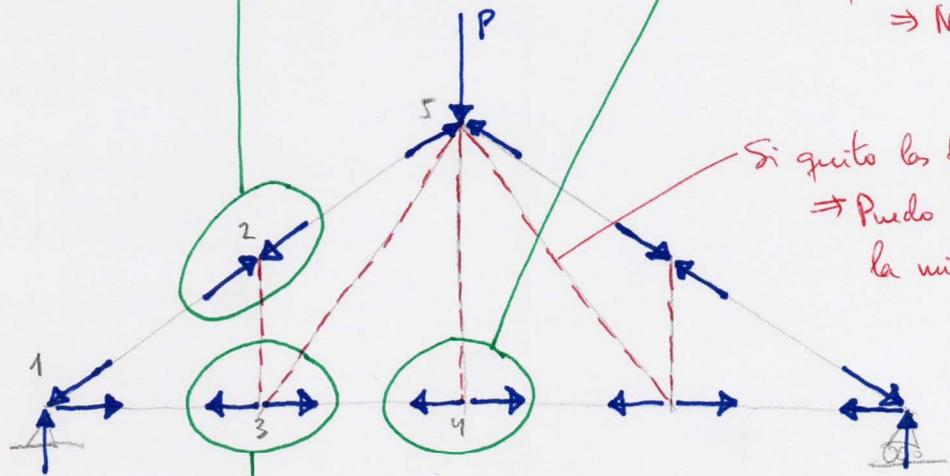
Los números junto a los nudos indica el orden en que se van equilibrando nudos para ir hallando las fuerzas



Confluyen 3 fuerzas, 2 de ellas alineadas  $\Rightarrow$  la restante es nula

Si quito las barras, se forma mecanismo  $\Rightarrow$  No puedo quitarlos

Si quito las barras, queda triángulo  $\Rightarrow$  Puedo quitarlas y obtengo la misma deformación



Después de quitar la vertical, me quedan otra vez 3 barras con 2 alineadas

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

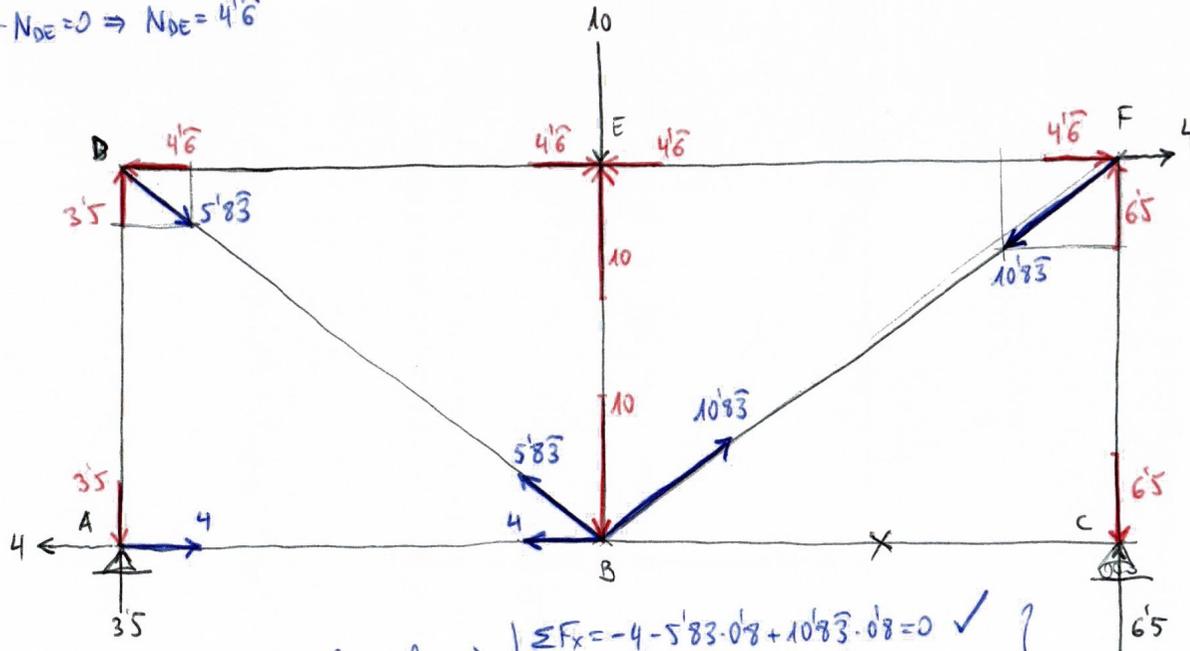
## NÚDOS GRÁFICO Y ANALÍTICO

$$D \left\{ \begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow 3.5 - 0.6 \cdot N_{DB} \Rightarrow N_{DB} = 5.8\bar{3} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow 5.8\bar{3} \cdot 0.8 - N_{DE} = 0 \Rightarrow N_{DE} = 4.6\bar{6} \end{aligned} \right.$$

E: trivial

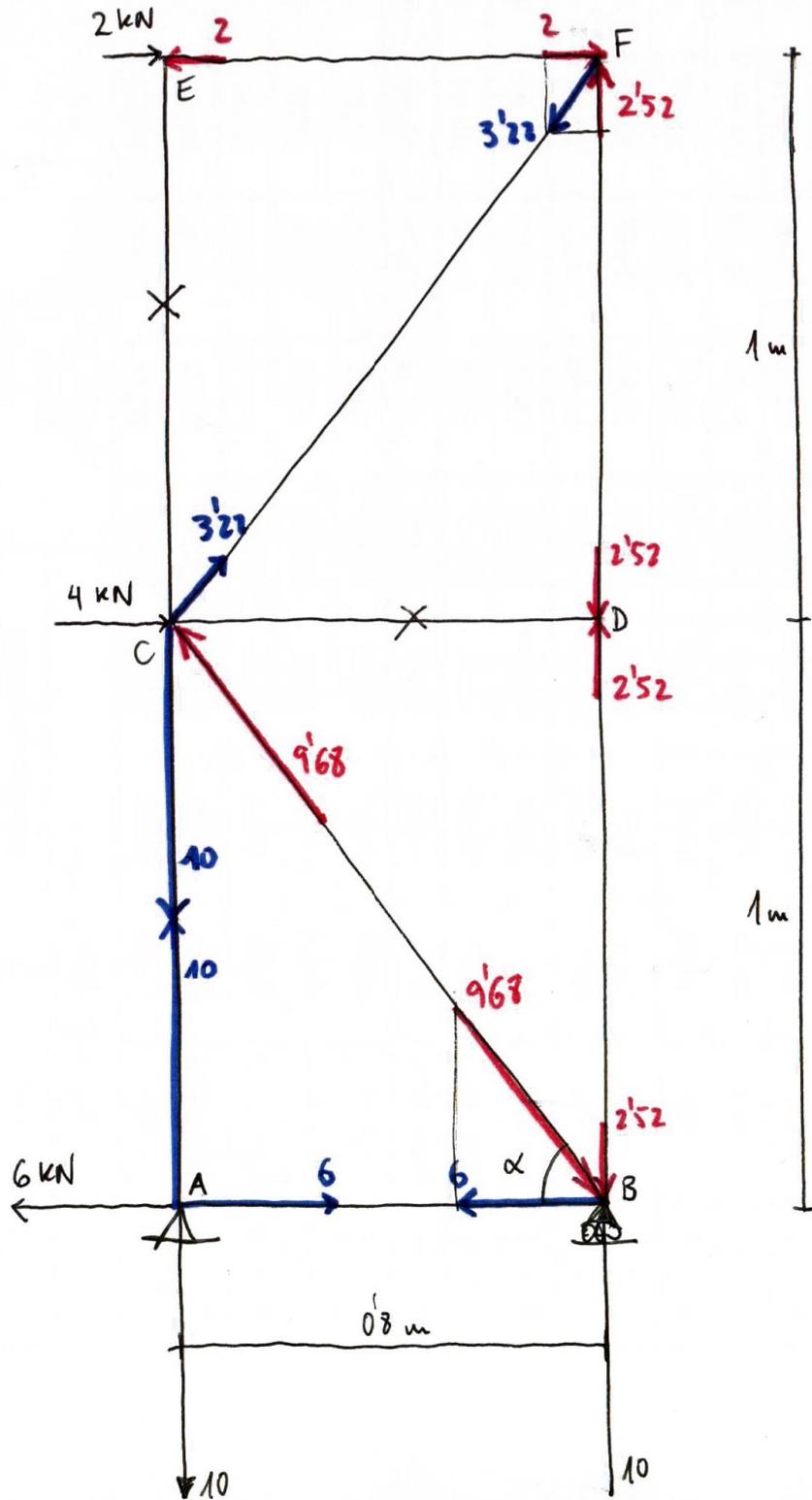
$$F \left\{ \begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow 6.5 - 0.6 N_{BF} = 0 \Rightarrow N_{BF} = 10.8\bar{3} \\ \text{Comprub: } \sum F_x &= -10.8\bar{3} \cdot 0.8 + 4.6\bar{6} + 4 = 0 \checkmark \end{aligned} \right.$$

A: trivial



c: trivial

$$B \text{ (comprobación)} \left\{ \begin{aligned} \sum F_x &= -4 - 5.8\bar{3} \cdot 0.8 + 10.8\bar{3} \cdot 0.8 = 0 \checkmark \\ \sum F_y &= -10 + 5.8\bar{3} \cdot 0.6 + 10.8\bar{3} \cdot 0.6 = 0 \checkmark \end{aligned} \right.$$

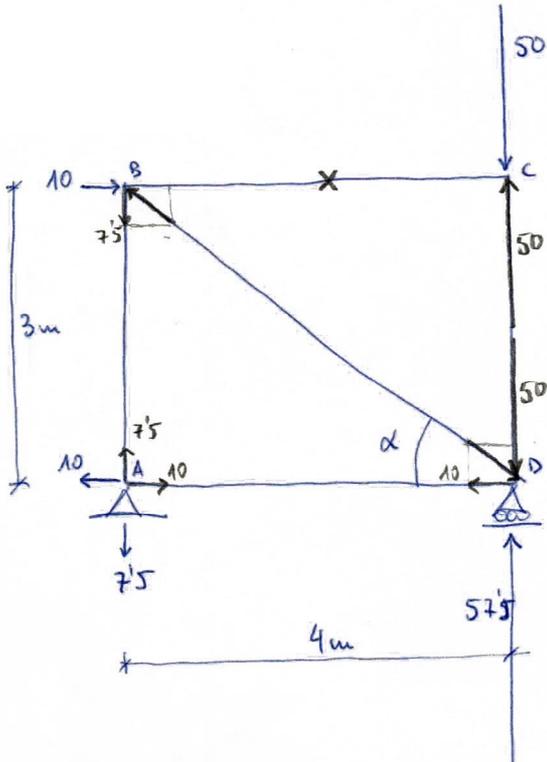


$$\alpha = \arctan \frac{1}{0.8} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0.62 \\ \sin \alpha = 0.78 \end{cases}$$

$$\text{Nudo F} \begin{cases} x: 2 - N_{CF} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{CF} = 3.22 (+) \\ y: -3.22 \sin \alpha + N_{DF} = 0 \Rightarrow N_{DF} = 2.52 (-) \end{cases}$$

$$\text{Nudo B} \begin{cases} x: -6 + N_{BC} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{BC} = 9.68 (-) \\ y: -9.68 \sin \alpha - 2.52 + 10 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\text{Nudo C} \begin{cases} x: 4 + 3.22 \cos \alpha - 9.68 \cos \alpha = 0 \quad \checkmark \\ y: 3.22 \sin \alpha + 9.68 \sin \alpha - 10 = 0 \quad \checkmark \end{cases} \quad \text{Compr.}$$



Reacciones:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -10 \cdot 3 - 50 \cdot 4 + R_D \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_D = 57.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - 50 + 57.5 = 0 \Rightarrow R_A = -7.5 \text{ kN (tracción por vuelco)}$$

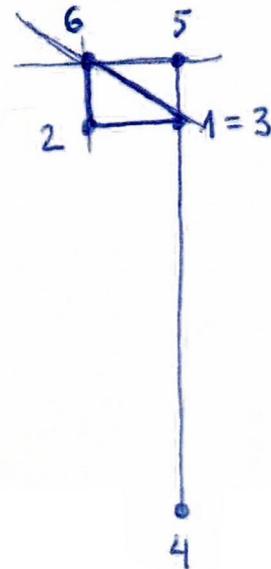
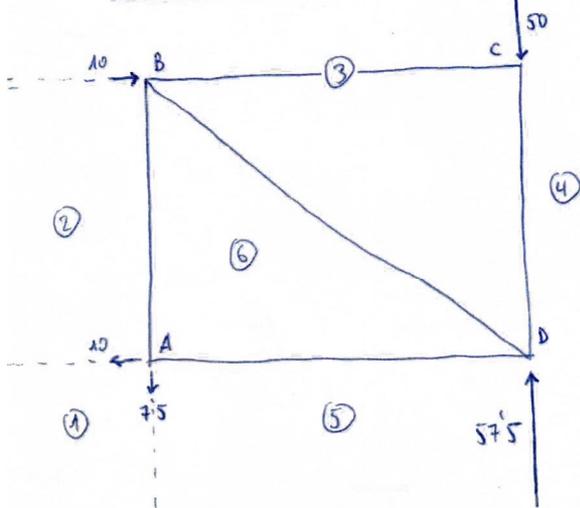
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 10 \text{ kN}$$

Comprobación:

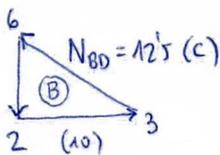
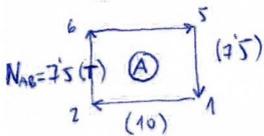
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 7.5 \cdot 4 - 10 \cdot 3 = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = 0.8 \\ \sin \alpha = 0.6 \end{cases}$$

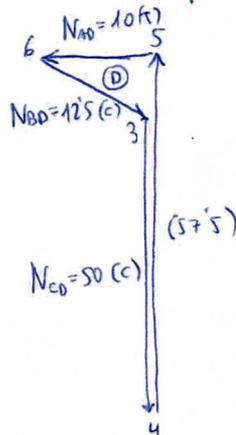
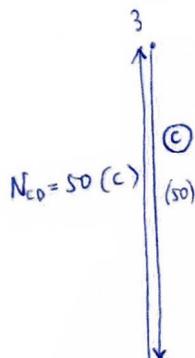
Método de Maxwell-Cremona



$$N_{AD} = 10 \text{ (T)}$$

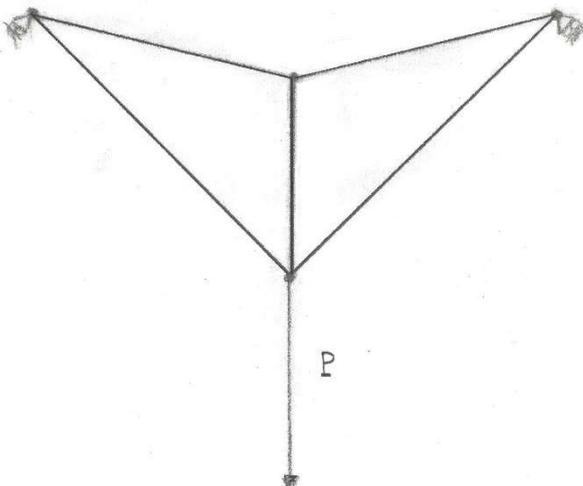
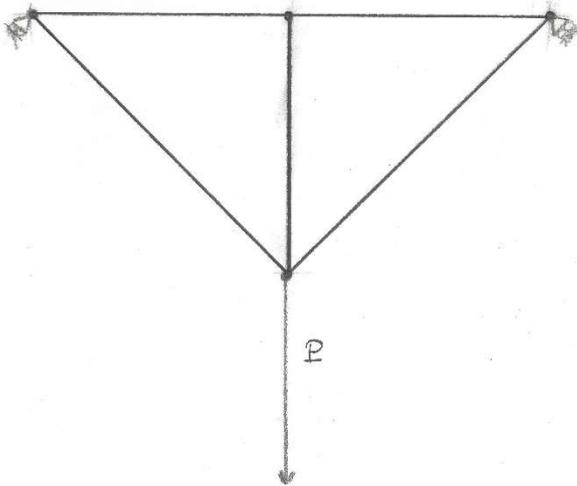
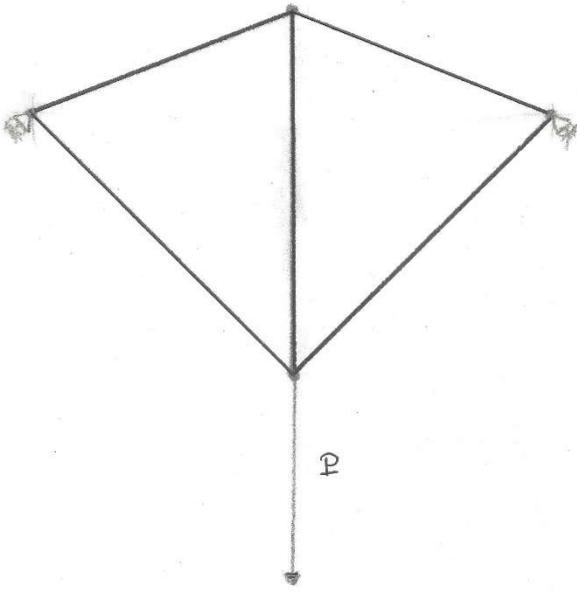


los últimos nudos son de comprobación

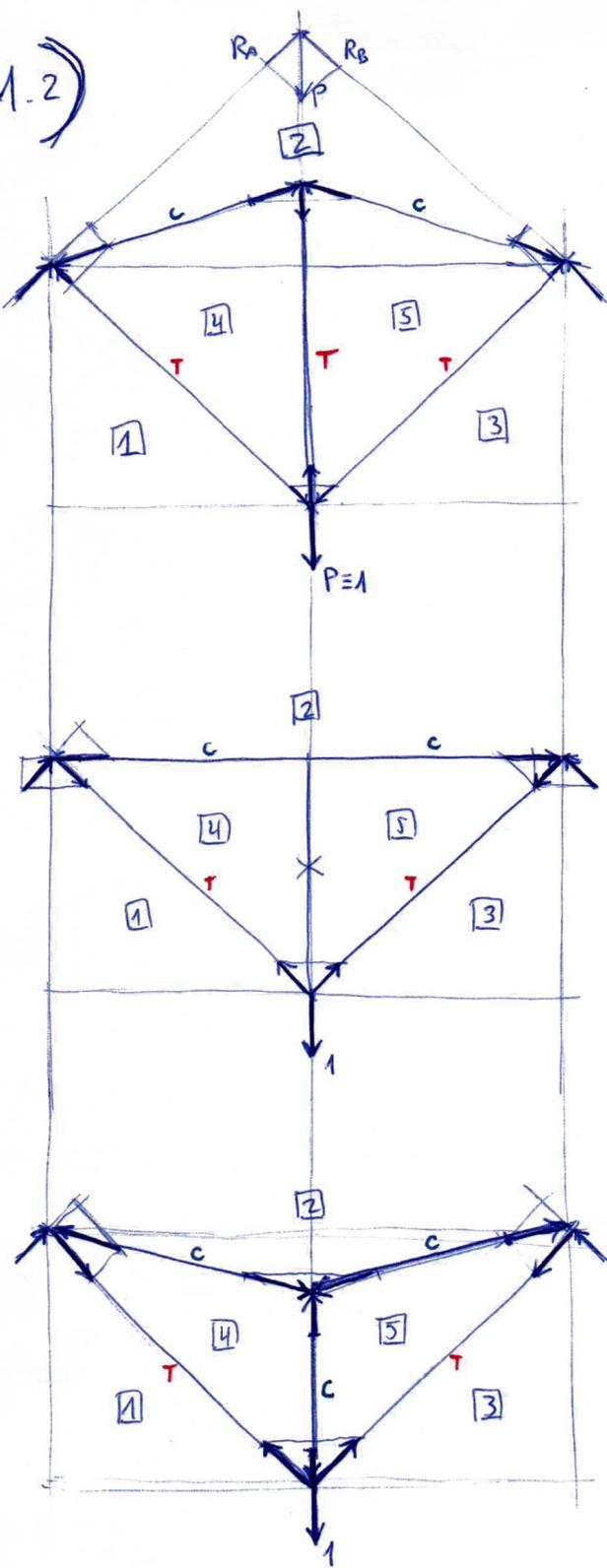




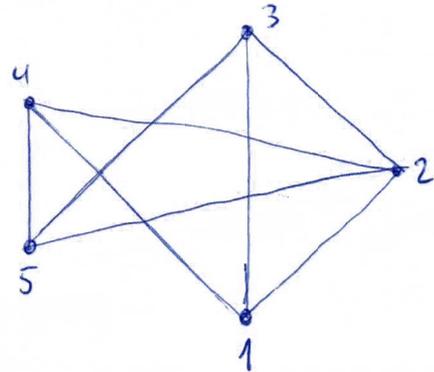
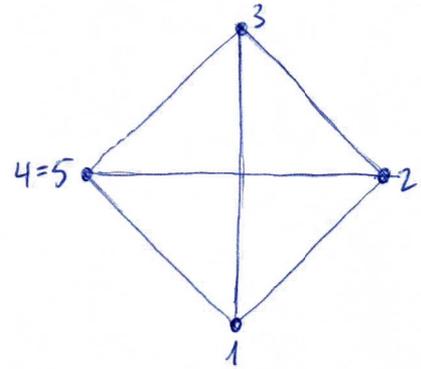
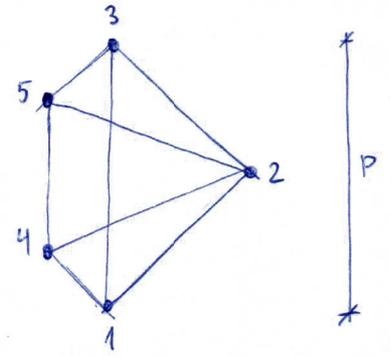
1.2. Para el entramado de barras articuladas simétrico que soporta la carga  $P$ , se consideran las tres alternativas de diseño indicadas en la figura. Mediante la construcción del diagrama de Maxwell, utilizando la notación de Bow, determinar en cada una de ellas, las barras que están comprimidas y las barras que están traccionadas; (se colorearán en azul/rojo)



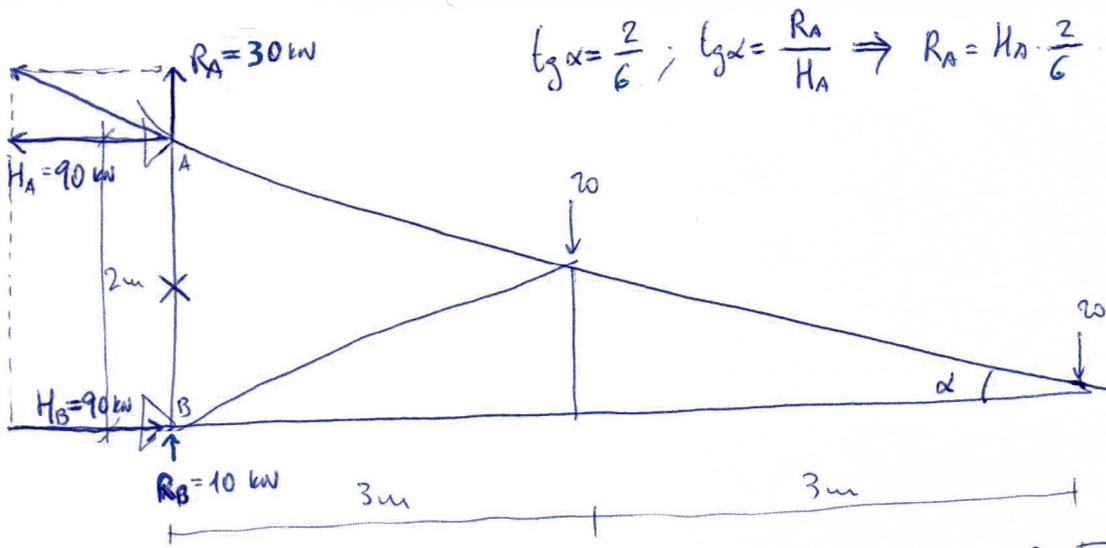
1.2)



COMPRESIÓN  
TRACCIÓN



La estructura es estable a pesar de ser un mecanismo porque es simétrica de geometría, apoyos y cargas, lo que permite que los únicos 2 reacciones y la carga  $P$  sean concurrentes en un punto y por tanto se cumple el teorema de los tres fuerzas. Si la carga  $P$  no fuera vertical, es decir, no pasara por el punto de corte de los dos reacciones, la estructura no sería estable.

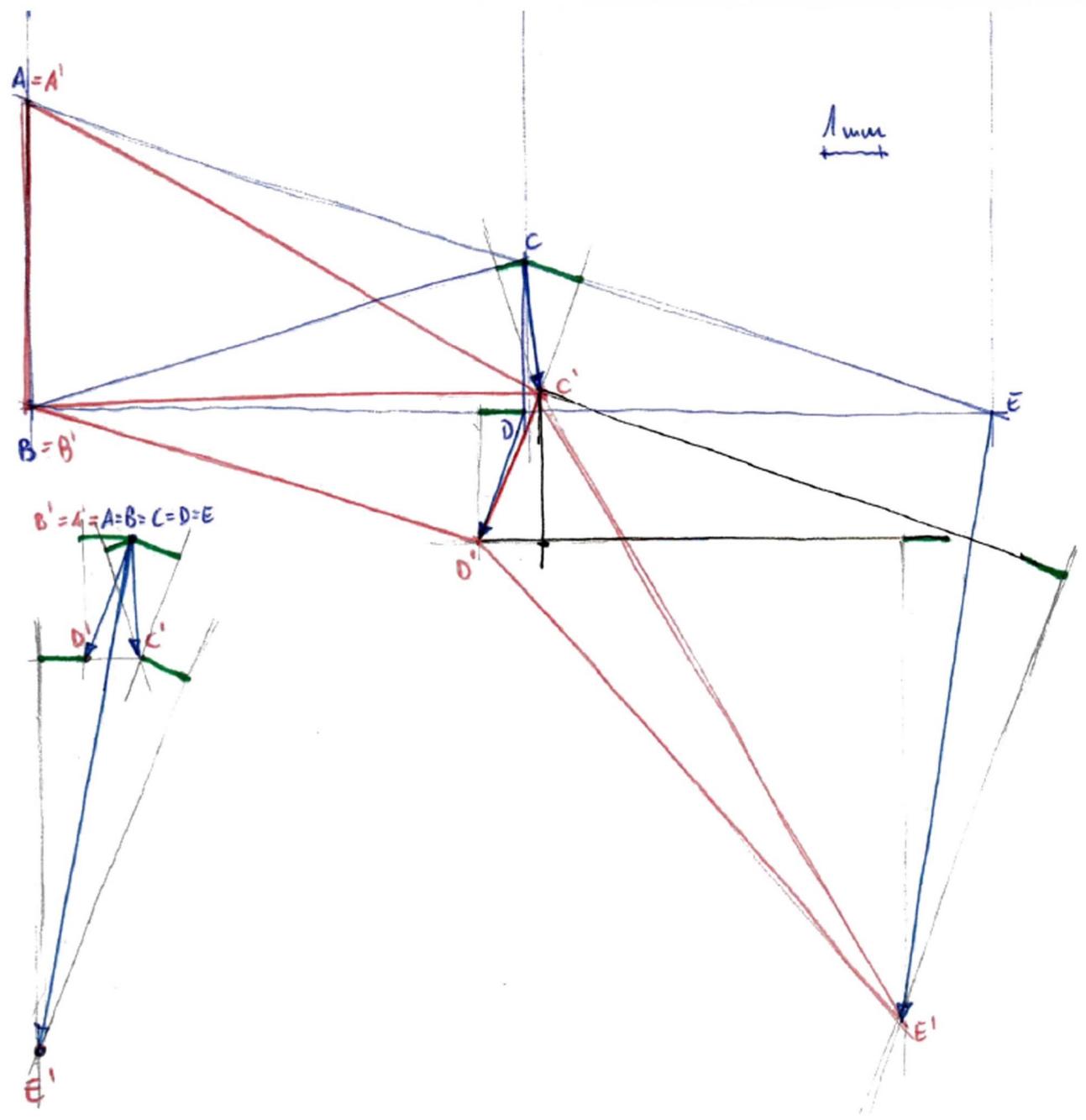


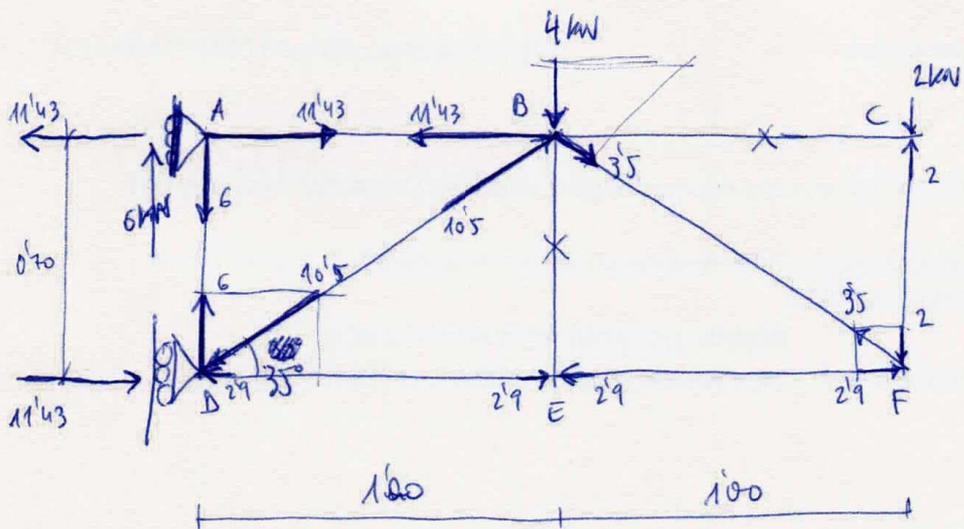
$$\tan \alpha = \frac{2}{6}; \quad \tan \alpha = \frac{R_A}{H_A} \Rightarrow R_A = H_A \cdot \frac{2}{6}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -20 \cdot 3 - 20 \cdot 6 + H_A \cdot 2 = 0 \Rightarrow H_A = 90 \text{ kN} \Rightarrow R_A = 90 \cdot \frac{2}{6} = 30 \text{ kN} = R_A$$

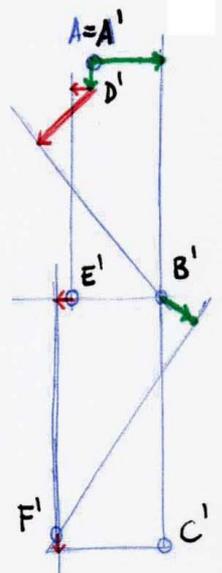
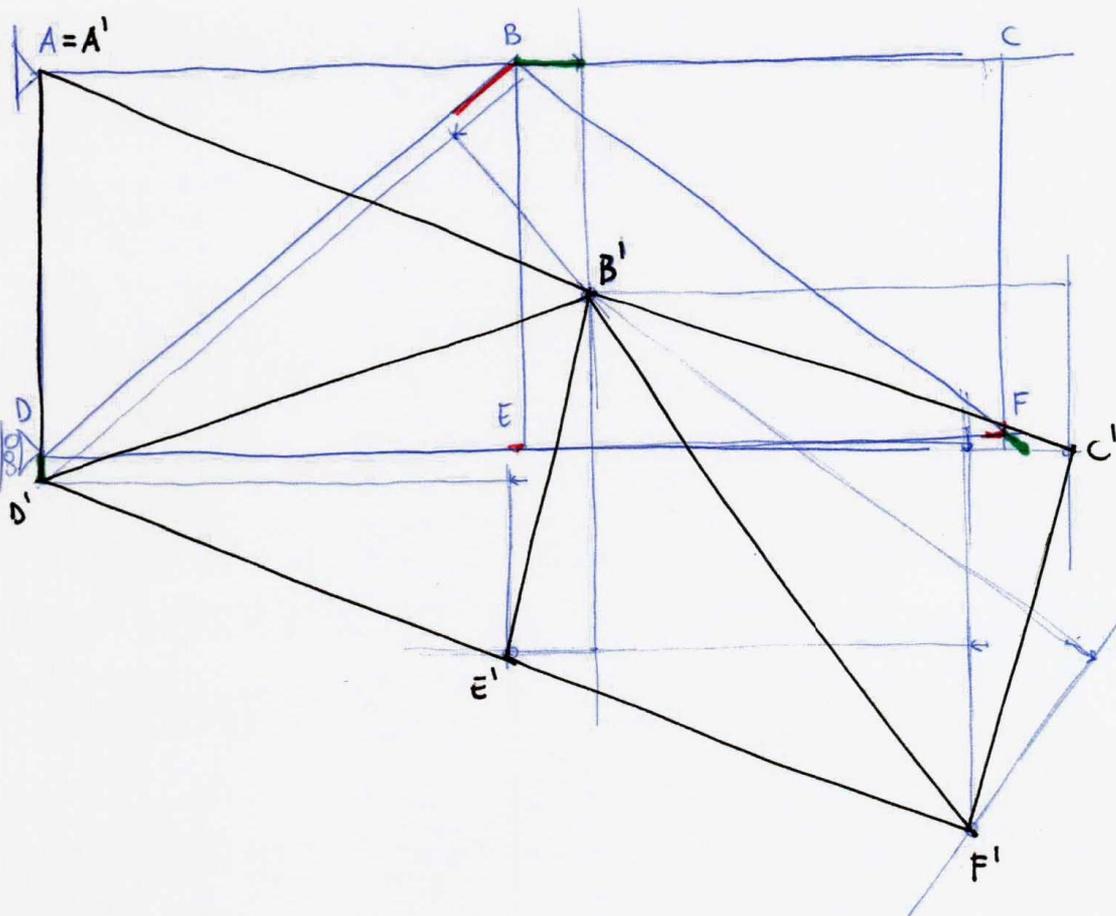
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = H_B = H = 90 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 30 + R_B - 20 - 20 = 0 \Rightarrow R_B = 10 \text{ kN}$$





	N [kN]
AD	+6'00
AB	-11'43
DB	+10'46
DE	-2'86
BE	±0'00
BC	±0'00
BF	+3'49
EF	-2'86
CF	-2'00



APELLIDOS:

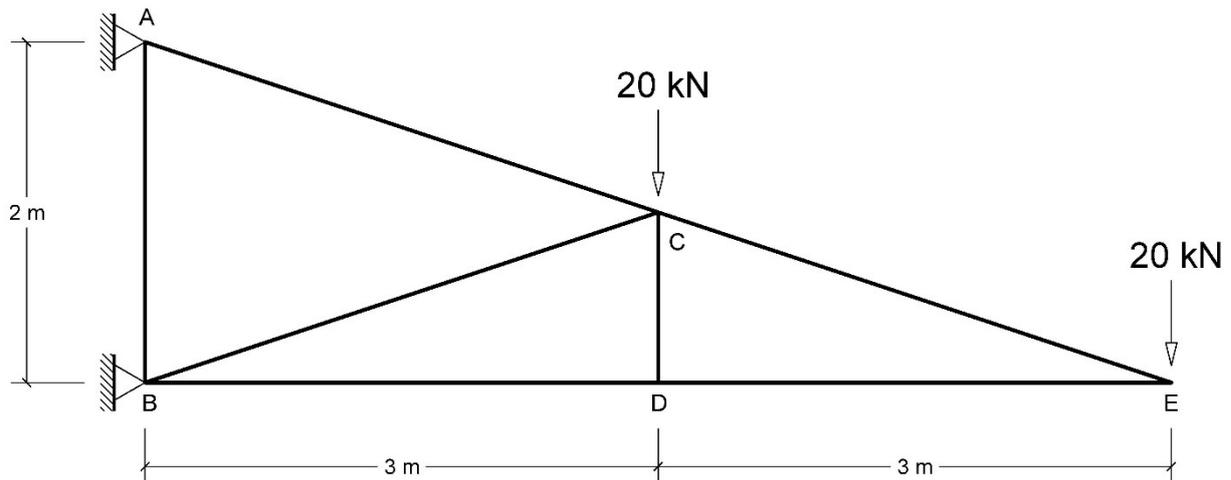
NOMBRE:

DNI:

GRUPO:

En la estructura de nudos articulados indicada en la figura, resuelta con secciones tubulares huecas 90x90x4 mm de acero S275 (cuyas propiedades mecánicas se proporcionan), se pide:

- Diagrama de Williot y vector desplazamiento de los nudos (dados los alargamientos)
- Comprobación del valor de la componente vertical del desplazamiento de la punta del voladizo (nudo E) mediante la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales



Barra	AB	AC	BC	BD	CD	CE	DE
$\Delta L$ [mm]	0	1.08	-0.36	-0.65	0	0.72	-0.65

Barras:  $A = 1317 \text{ mm}^2$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$

$$\alpha = \arctan \frac{1}{3} = 18.43^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 1.90$$

$$R_A = \frac{20 \cdot 3 + 20 \cdot 6}{1.90} = 94.74 \text{ kN}$$

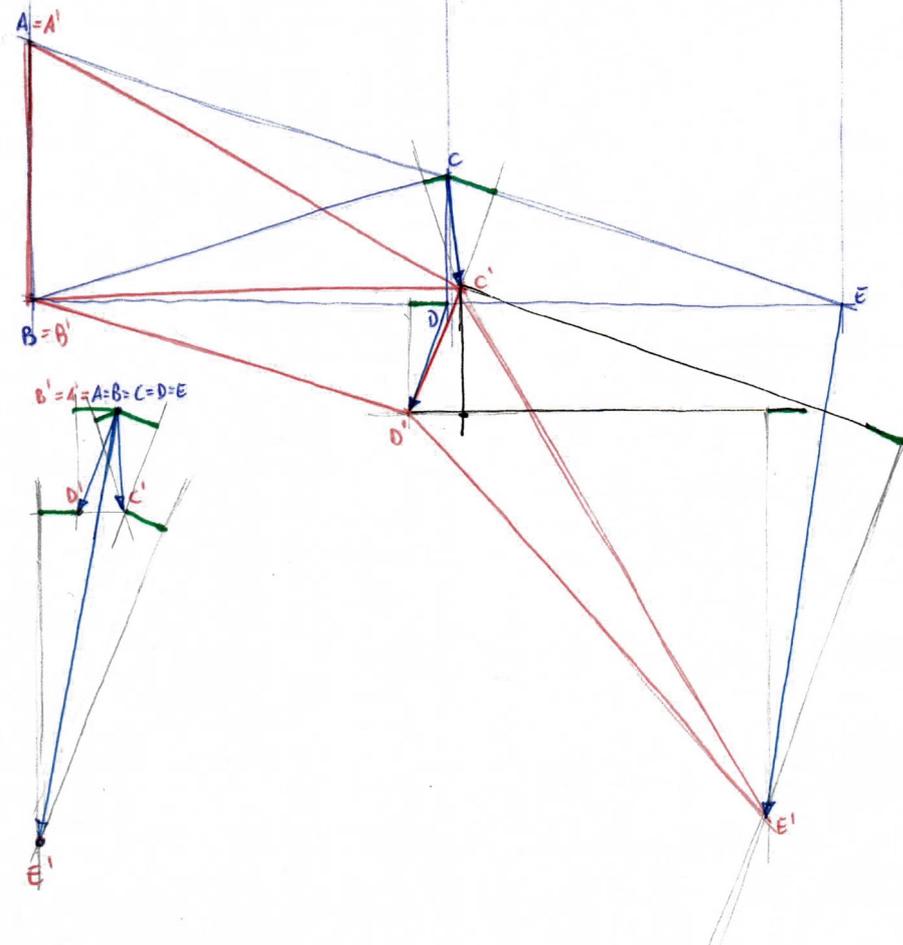
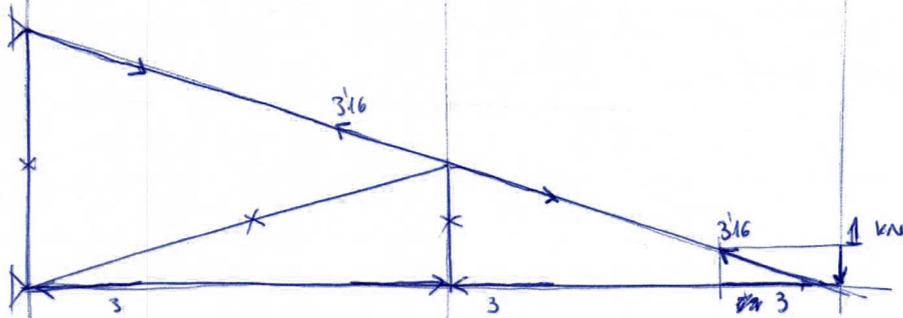
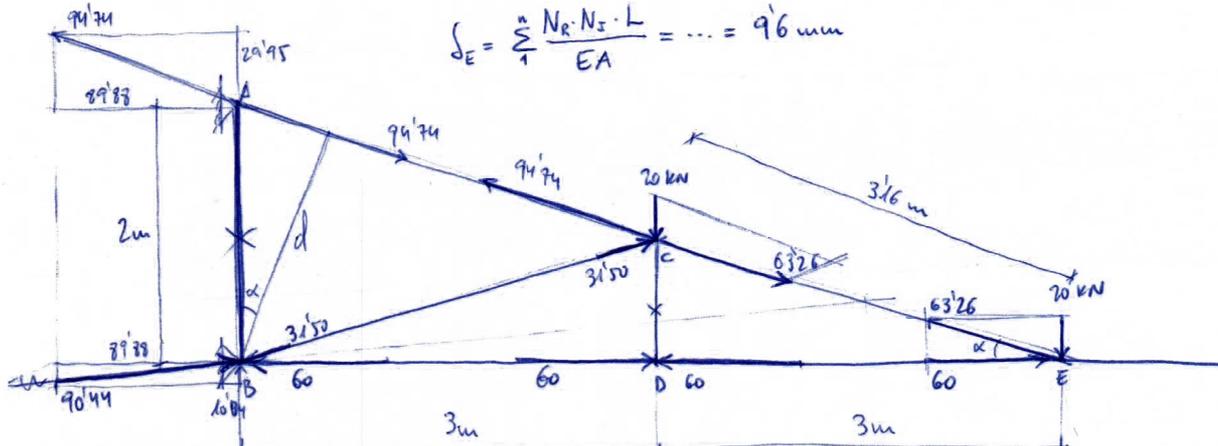
$$E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$A = 13.17 \text{ mm}^2$$

$$EA = 276570 \text{ kN}$$

$$N = \frac{EA}{L} \Delta L \Leftrightarrow \Delta L = \frac{NL}{EA}$$

$$\sum \Delta L = \sum \frac{N_R \cdot N_I \cdot L}{EA} = \dots = 96 \text{ mm}$$



1 mm

96 mm

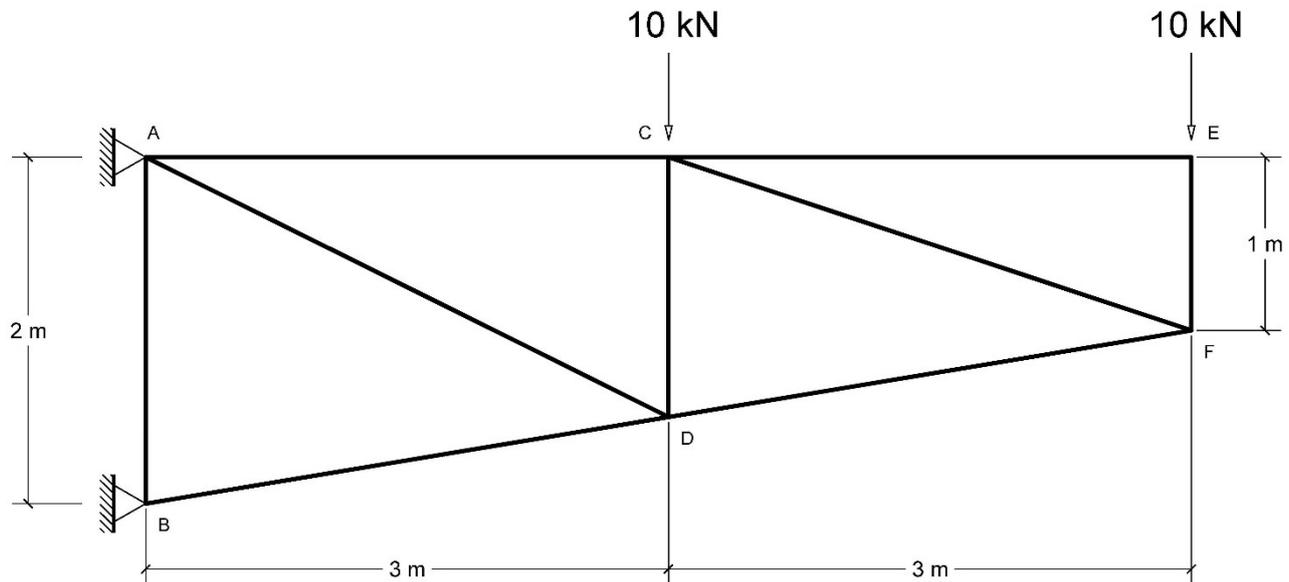
APELLIDOS:

NOMBRE:

D.N.I.:

En la estructura indicada en la figura, se pide:

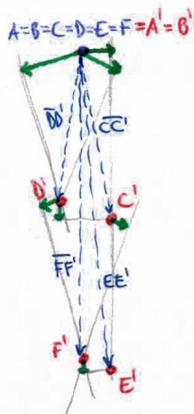
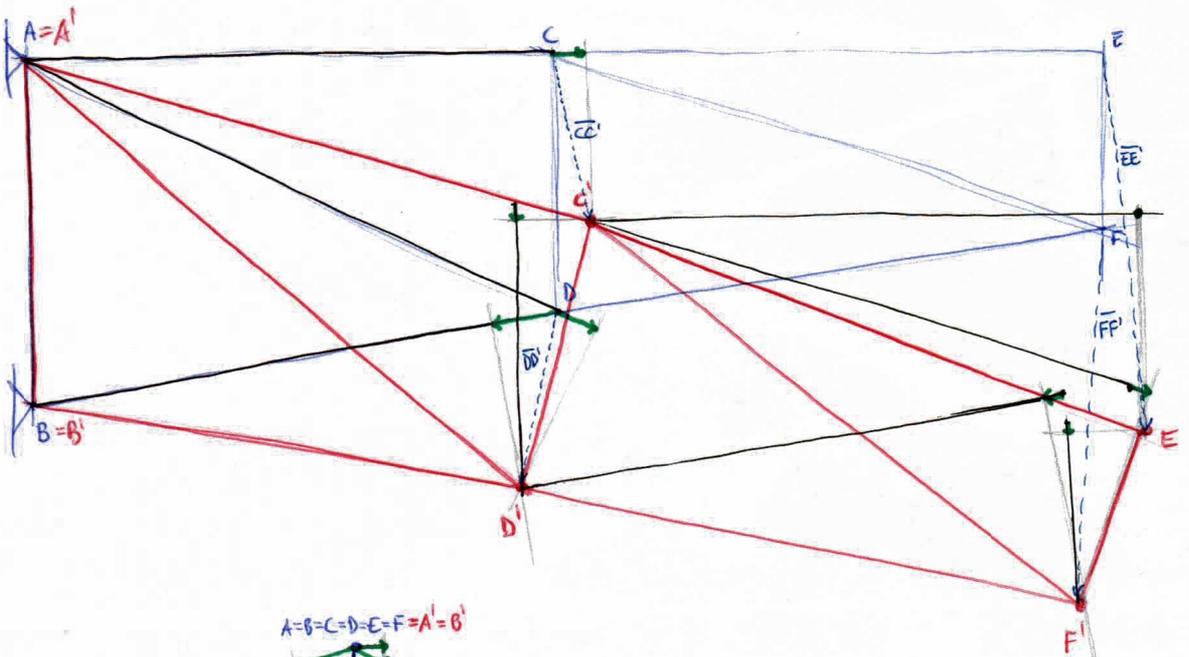
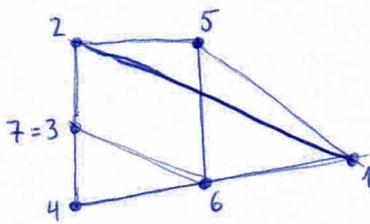
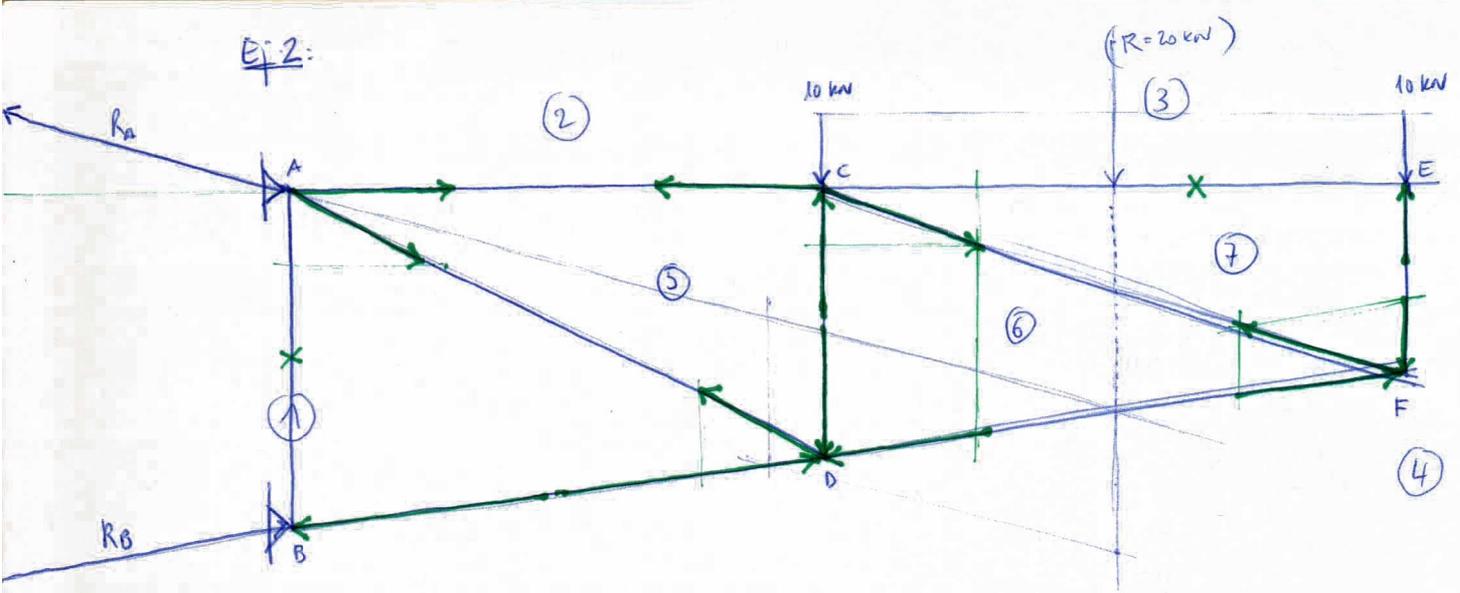
- Reacciones por métodos gráficos
- Esfuerzos de barras mediante el método de Maxwell-Cremona
- Diagrama de Williot y el vector desplazamiento de los nudos (dados los alargamientos)

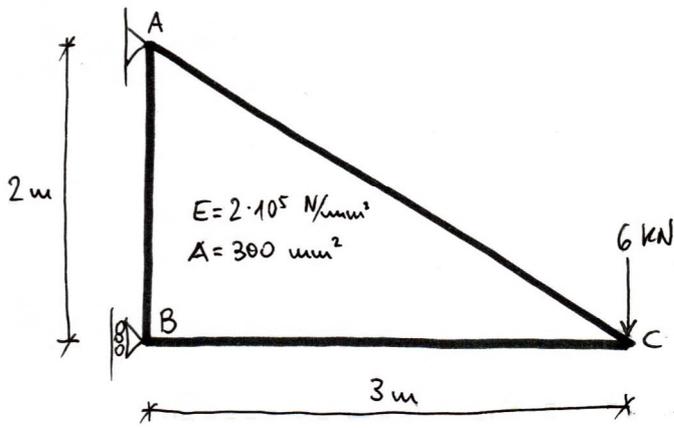


Barra	AB	AC	AD	BD	CD	CE	CF	DF	EF
$\Delta L$ [mm]	0.00	0.19	0.29	-0.43	-0.08	0.00	0.21	-0.19	-0.03

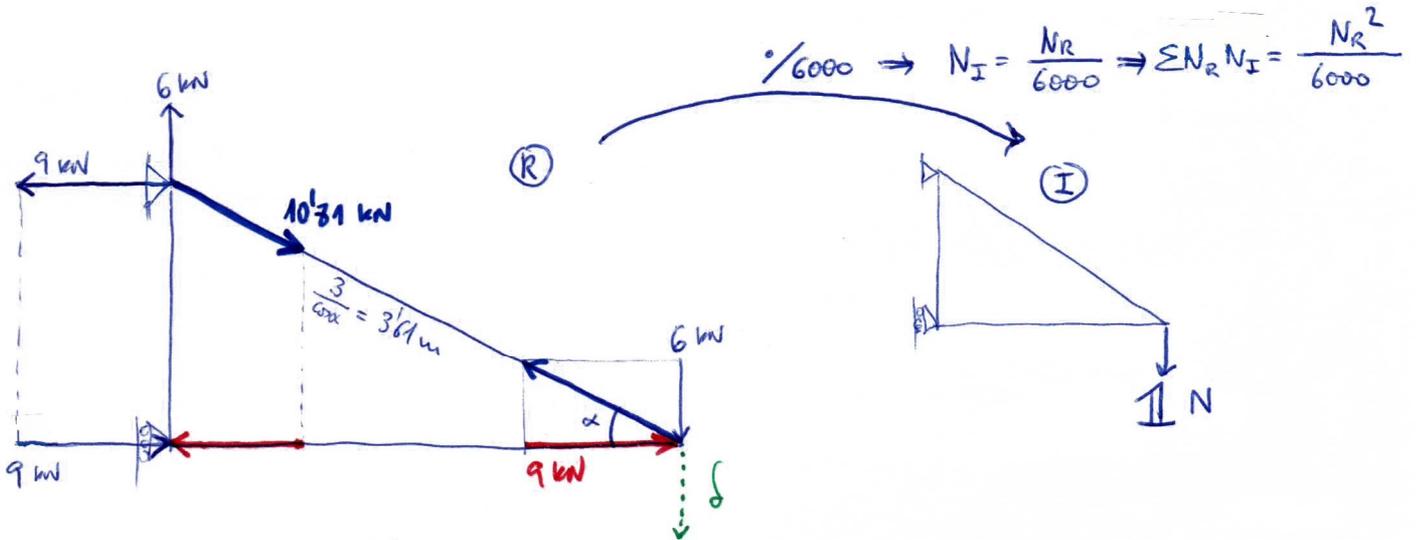
Barras:  $A = 1600 \text{ mm}^2$ ,  $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

Ej. 2:





$$\alpha = \arctan \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0.83 \text{ (g)} \\ \sin \alpha = 0.55 \text{ (p)} \end{cases}$$



$$\delta = \sum \left( \frac{N_R N_I L}{EA} \right)_i = \frac{\sum (N_R^2 L)}{6000 \cdot EA} = \frac{9000^2 \cdot 3000 + 10810 \cdot 3610}{6000 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 300} = \boxed{1.85 \text{ mm}}$$

La compatibilidad consiste en igualar la flecha vertical de la cercha ante la carga  $F$  con el alargamiento del cable ante el axil  $R_D = P - F$ .

Alargamiento del cable: 
$$\Delta L_4 = \frac{N_4 L_4}{EA} = \frac{R_D L}{EA} = \frac{(P-F)L}{EA}$$

Flecha de la cercha (por el PTV): 
$$\delta = \sum_i \left( \frac{N_{Ri} \cdot N_{Ii} \cdot L}{EA} \right)_i$$

Los axiles reales,  $N_{Ri}$ , son los grafados (correspondientes a la carga  $F$ ). Los imaginarios,  $N_{Ii}$ , equivalen a la carga unidad, y por tanto son proporcionales a los reales:  $N_{Ii} = \frac{N_{Ri}}{F}$ .

Por tanto: 
$$\delta = \frac{1}{EA} \sum_i \left( \frac{N_i^2 L_i}{F} \right) = \frac{1}{EAF} (N_1^2 L_1 + N_2^2 L_2 + N_3^2 L_3) =$$

$$= \frac{1}{EAF} \left( F^2 L + \frac{F^2 L}{\tan^2 \alpha} + \frac{F^2 L}{\sec^2 \alpha} \right) = \frac{F^2 L}{EAF} \left( 1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\sec^2 \alpha} \right) = \frac{FL}{EA} (1 + (\sqrt{3})^2 + 2^2) =$$

$$= \frac{FL}{EA} (9 + 3\sqrt{3})$$

Iguando: 
$$\delta = \Delta L_4 \Rightarrow \frac{(P-F)L}{EA} = \frac{FL}{EA} (9 + 3\sqrt{3}) \Rightarrow (50 - F) = 14.2F \Rightarrow \boxed{F = 3.3 \text{ kW}} \rightarrow$$

$$\Rightarrow R_D = 50 - 3.3 = \boxed{46.7 \text{ kW}}$$

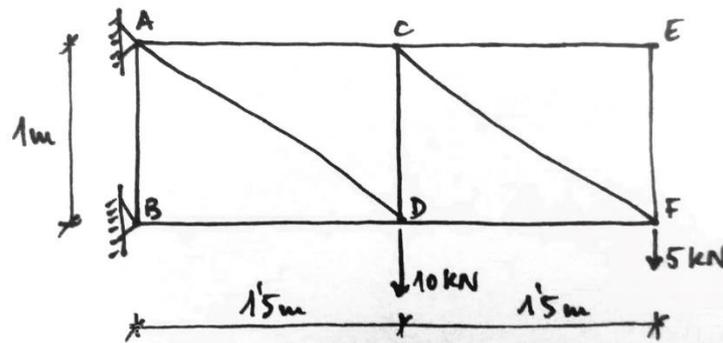
De los 50 kW, casi todo lo resiste el cable (46.7 kW) y solo 3.3 kW (el 6.6%) se va hacia la cercha.

Reacciones: $\left\{ \begin{array}{l} R_D = 46.7 \text{ kW} \\ R_A = 3.3 \text{ kW} \\ H = 5.7 \text{ kW} \end{array} \right.$	Axiles: $\left\{ \begin{array}{l} N_1 = 3.3 \text{ kW} \\ N_2 = 5.7 \text{ kW} \\ N_3 = 6.6 \text{ kW} \\ N_4 = 46.7 \text{ kW} \end{array} \right.$
--	--

Flecha: 
$$\delta = \frac{FL}{EA} (9 + 3\sqrt{3}) = 14.2 \cdot \frac{3.3 \cdot 3}{2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 3.5 \cdot 10^{-4} \text{ m} = \boxed{0.35 \text{ mm}}$$

## Ejercicio: cercha por métodos gráficos

De la siguiente cercha, compuesta de perfiles metálicos con módulo de elasticidad  $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  y área de la sección transversal de las barras  $A = 400 \text{ mm}^2$ , calcula:



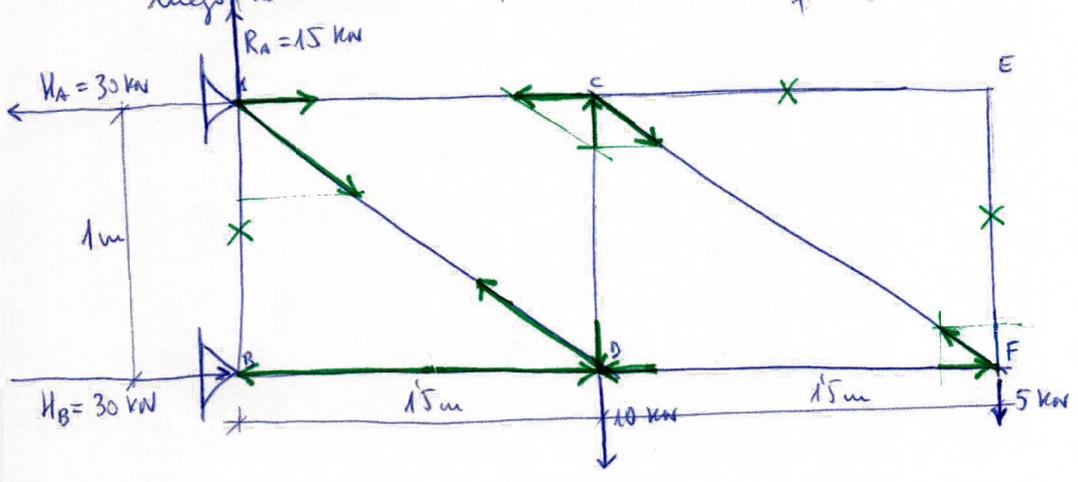
- 1) Los axiles de las barras mediante el método de Maxwell-Cremona
- 2) El alargamiento de la barra AD
- 3) El desplazamiento de cada nudo mediante el método de Williot, asumiendo las siguientes elongaciones de barras (+: alargamiento; -: acortamiento):

AB: 0	BD: -0.53 mm	CF: 0.19 mm
AC: 0.14 mm	CD: -0.06 mm	DF: -0.13
AD: 0.58 mm	CE: 0	EF: 0

- 4) Comprobar la componente vertical del desplazamiento del nudo F mediante el Método de la Carga Unidad (aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales)

TAREA: CERCAS MÉTODOS GRÁFICOS

1) Axiles de barras. Al tratarse de un voladizo, podrá comenzarse directamente el diagrama de Maxwell-Cremona por el nudo E e ir hallando gráficamente los axiles, recorriendo la cercha hasta los apoyos para finalmente calcular las reacciones (orden de nudos: E → F → C → D → A o B). Sin embargo, se prefiere calcular primero las reacciones y luego hallar los axiles, de tal manera que varios de los nudos son de comprobación.



Las barras CE y EF no trabajan, por concurrir en un nudo con 2 fuerzas.  
 La barra AB no trabaja por tener sus extremos fijos y por tanto no poder alargarse o acortarse. Por tanto, la reacción en B es solo horizontal.

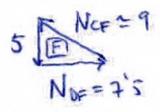
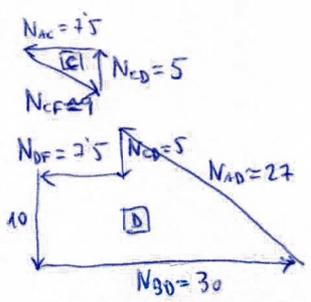
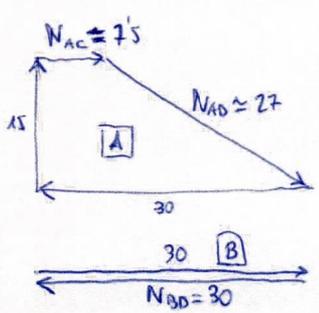
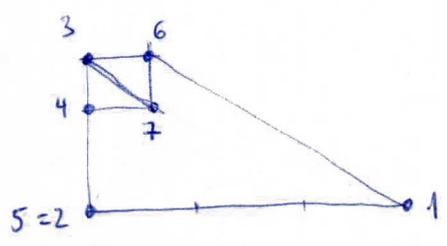
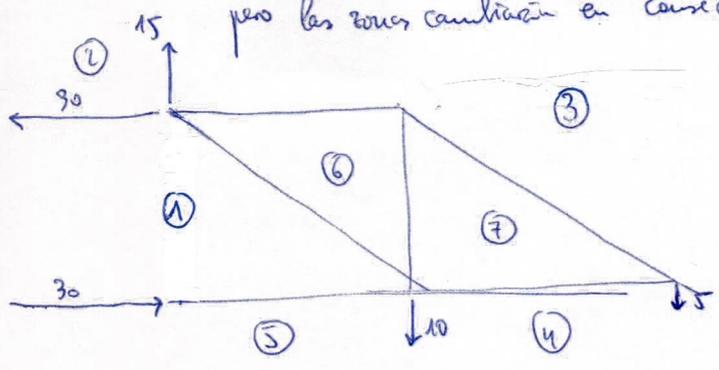
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -10 \cdot 15 - 5 \cdot 3 + H_B \cdot 1 = 0 \Rightarrow H_B = 30 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -H_A + 30 = 0 \Rightarrow H_A = 30 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A - 10 - 5 = 0 \Rightarrow R_A = 15 \text{ kN}$$

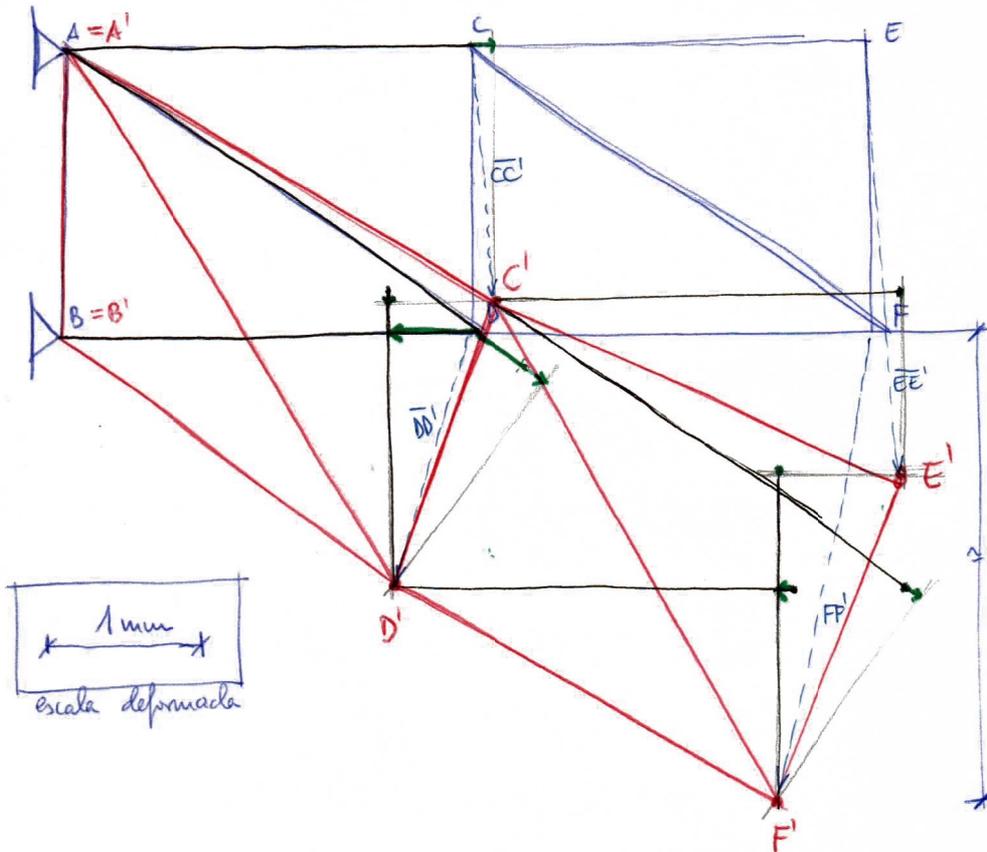
A continuación, es conveniente trazar los axiles de las barras gráficamente sobre la cercha (método de los nudos gráficos) antes de construir el diagrama de Maxwell-Cremona. (Axiles sobre la cercha en verde)

Para construir el diagrama, se numeran las zonas. Es conveniente eliminar las barras con trabajo nulo, por consoldidad. La reacción RA se puede colocar por arriba o por debajo, pero las zonas cambiarán en consecuencia. Una posible numeración es:

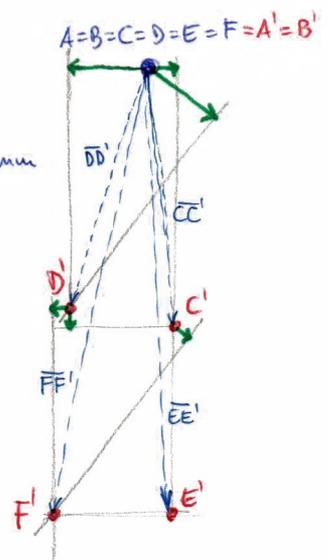


2) Alargamiento AD:  $\Delta L = \frac{NL}{EA} \approx \frac{27000 [N] \sqrt{1000^2 + 1500^2} [mm]}{2.1 \cdot 10^5 \left[ \frac{N}{mm^2} \right] \cdot 400 [mm^2]} = 0.58 \text{ mm}$

3) Desplazamientos de nudos: Se obtienen en este orden:  $D' \rightarrow C' \rightarrow F' \rightarrow E'$

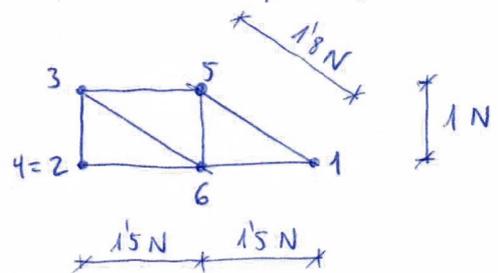
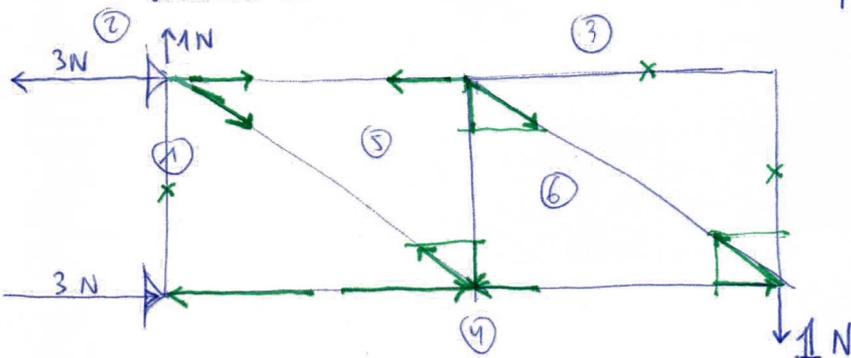


Indeforzado  
Arrastrado  
Alargamiento  
Perpendiculares  
Deformada  
Desplazamientos



4) Desplazamiento vertical del nudo F

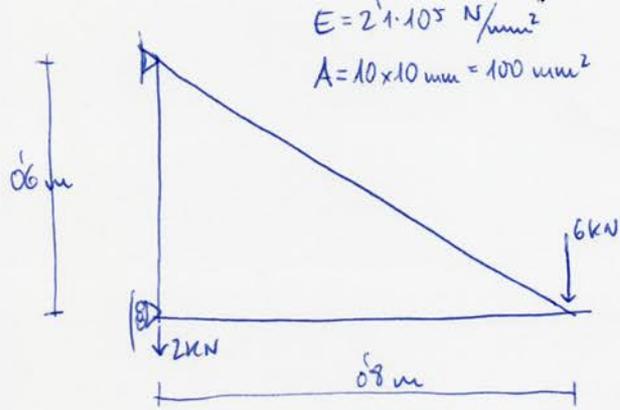
Para aplicar el método de la Carga Unidad, hay que calcular los axiles de la misma cercha bajo una carga unitaria situada en el nudo de interés (F) y con dirección y sentido iguales a los del desplazamiento buscado (vertical y hacia abajo). Para no cambiar de unidades los datos E y A, operamos con N y mm. Por tanto, la carga unitaria sea de 1 N. Se calculan los axiles por cualquier método (por ejemplo Maxwell-Cremona):



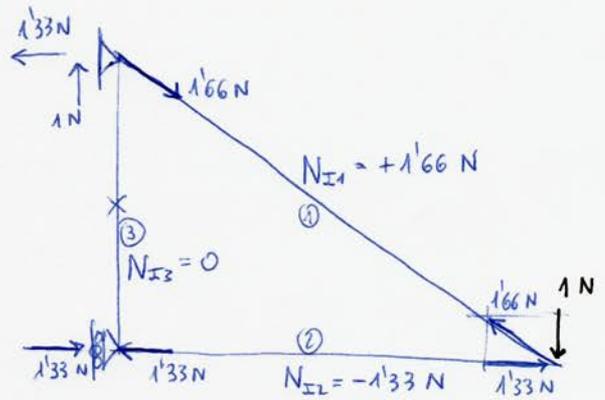
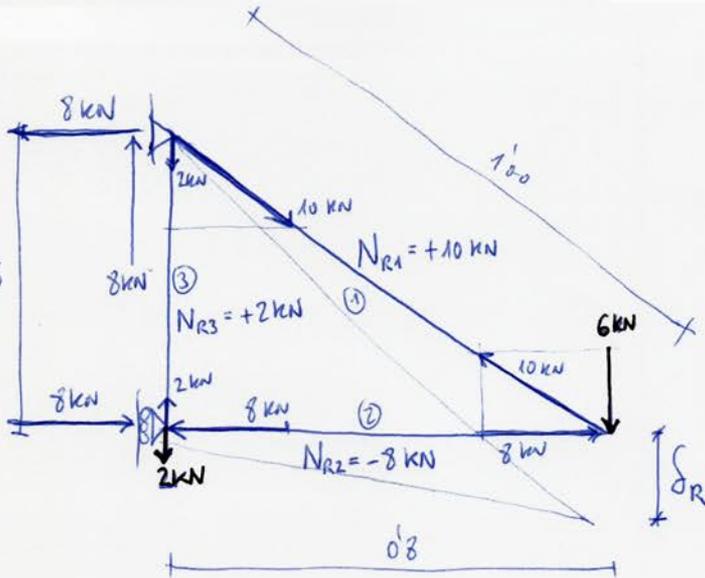
Por tanto, se tienen los siguientes axiles (reales e imaginarios) y las longitudes de las barras, donde + y - indican tracción y compresión:

Barra	AB	AC	AD	BD	CD	CE	CF	DF	EF
$N_R$ [N]	0	7500	27000	-30000	-5000	0	9000	-7500	0
$N_I$ [N]	0	15	18	-3	-1	0	18	-15	0
$L$ [mm]	1000	1500	1800	1500	1000	1500	1800	1500	1000

$$\delta_{VF} = \frac{1}{EA} \sum_i (N_{Ri} N_{Ii} L_i) \approx 3.5 \text{ mm} \quad \checkmark$$



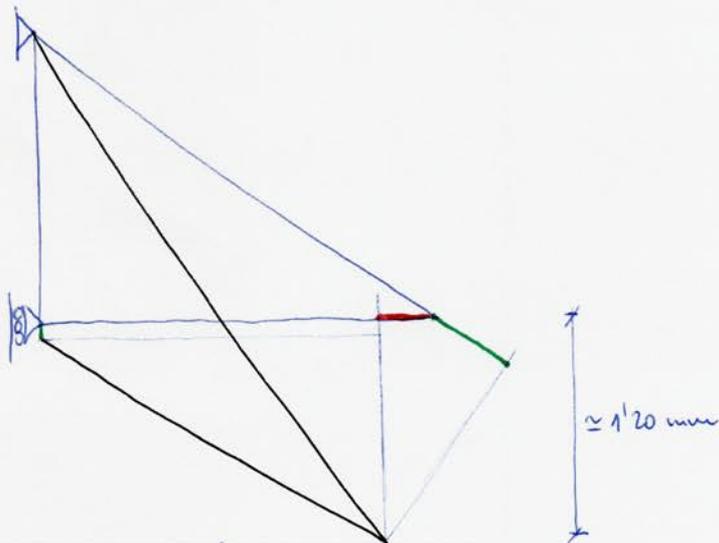
Obtener desplazamientos de los nudos mediante el método de Williot y comprobar el desplazamiento vertical del extremo de la cercha mediante la aplicación del PTV



$$\delta_R = \sum_i \frac{N_{Ri} N_{Ii} L_i}{E_i A_i} = \frac{1}{EA} (N_{R1} N_{I1} L_1 + N_{R2} N_{I2} L_2 + N_{R3} N_{I3} L_3) = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1.66 \cdot 1 \cdot 10^3 + (-8 \cdot 10^3) \cdot (-1.33) \cdot 0.8 \cdot 10^3 + 0}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^2}$$

$$= 1.20 \text{ mm}$$

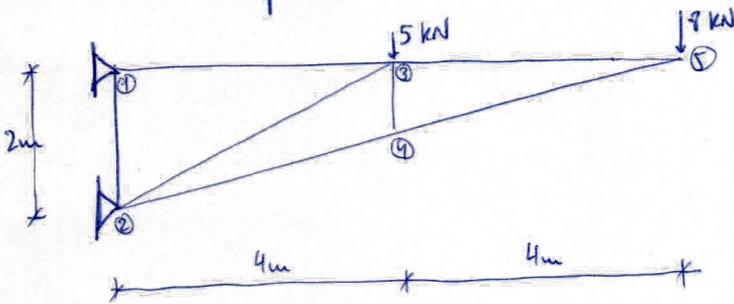
$$\Delta L = \frac{NL}{EA} \rightarrow \begin{cases} \Delta L_1 = +0.48 \text{ mm} \\ \Delta L_2 = -0.30 \text{ mm} \\ \Delta L_3 = +0.06 \text{ mm} \end{cases}$$



# SOLUCIÓN EJERCICIO CERCHA EXAMEN ENERO 2019

Se pide:

- Axiles de barras y reacciones
- Obtener desplazamiento de los nudos específicamente (y en este caso comprobamos analíticamente)



$$\text{barras} \begin{cases} A = 10 \text{ cm}^2 \\ E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \end{cases}$$

## d) Cambio de unidades.

El cálculo de axiles se efectúa en kN. Sin embargo, para la deformación es más cómodo usar mm, y para las propiedades mecánicas es también más cómodo usar N y m. Por tanto, modificamos A y E:

$$A = 10 \text{ cm}^2 = 10 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 = 10^3 \text{ mm}^2$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ kp}} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

## 1) Axiles y reacciones.

1.1. Estaticidad. Para saber si se puede resolver la cercha hay que estudiar si es isostática o hiperestática, puesto que los métodos estudiados sólo son aplicables para isostáticas.

A simple vista se ve que es isostática interna (triángulos adosados) e hiperestática externa (4 reacciones), y por tanto hiperestática global. Comprobamos algebraicamente:

$$GHI = b - 2n + 3 = 7 - 2 \cdot 5 + 3 = 0 \rightarrow \text{Isostática interna}$$

$$GHE = r - 3 = 4 - 3 = 1 \rightarrow \text{Hiperestática externa} + 1$$

$$GHT = GHI + GHE = 0 + 1 = 1 \rightarrow \text{Hiperestática global} + 1$$

Aparentemente la estructura no es resoluble por los métodos conocidos.

Sin embargo, es posible eliminar alguna de las barras que no trabajan y que la estructura no modifique su comportamiento; de esta manera se tendrá que es equivalente a una estructura isostática y se podrá resolver.

Hay 2 barras con axil nulo (simplemente con una inspección visual): 1-2 y 3-4.

La barra 1-2 se encuentra entre grupos articulados, que no se pueden mover, y por ello su alargamiento será nulo, y lo mismo el axil.

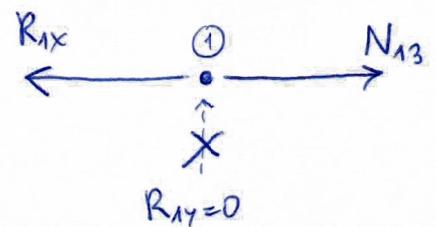
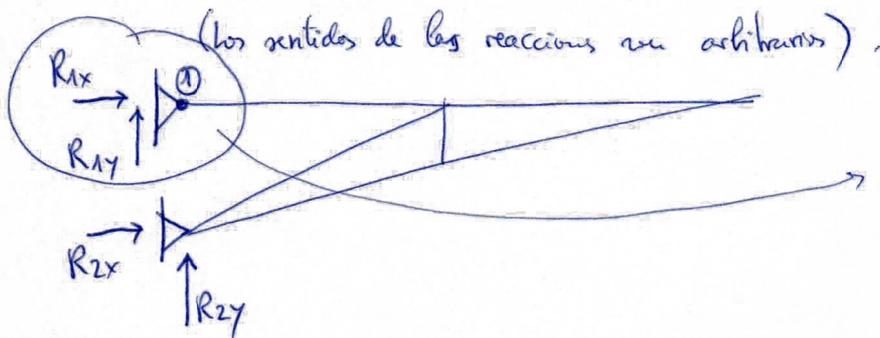
La barra 3-4 confluye en el nudo 4 con otras 2 barras alineadas, luego su axil es nulo.

¿Qué barra, al quitarla, daría lugar a una estructura hipostática -1 interna, de tal manera que al ser hiperestática +1 externa dé lugar a una isostática global?

Si se quita la 3-4, queda  , que ni que nudo de triángulos adosados y por tanto isostática interna:  $GHI = 5 - 2 \cdot 4 + 3 = 0$ .

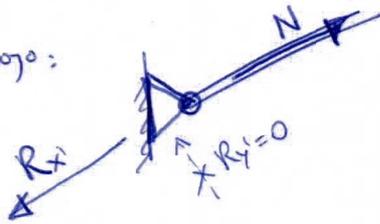
En cambio, si se quita la 1-2, queda  , que es hipostática interna:  $GHI = 6 - 2 \cdot 5 + 3 = -1$ . Se puede quitar porque el resultado es estable.

Quitamos la barra 1-2 e inspeccionamos las reacciones, por si pudiéramos conocer a priori alguna de las 4 y pudiéramos hallar los 3 restantes con nuestras 3 ecuaciones de la estática ( $\sum F_x = \sum F_y = \sum M = 0$ )

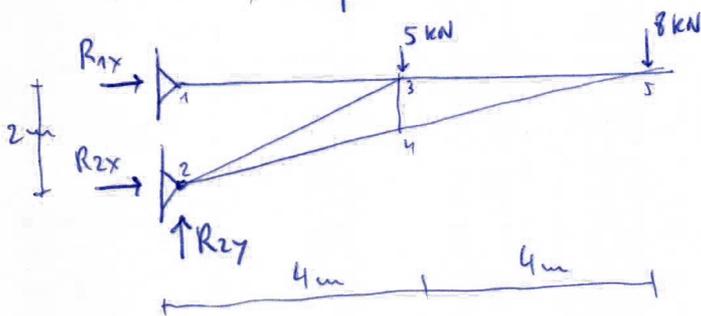


Al plantear el equilibrio del nudo ①, se concluye que la reacción es igual horizontal y de sentido contrario al axil, y por tanto la reacción vertical es nula.

Esto pasaría para cualquier inclinación de la barra: la reacción nace en la dirección de la barra, basta hacer un giro del sistema de coordenadas en el giro:



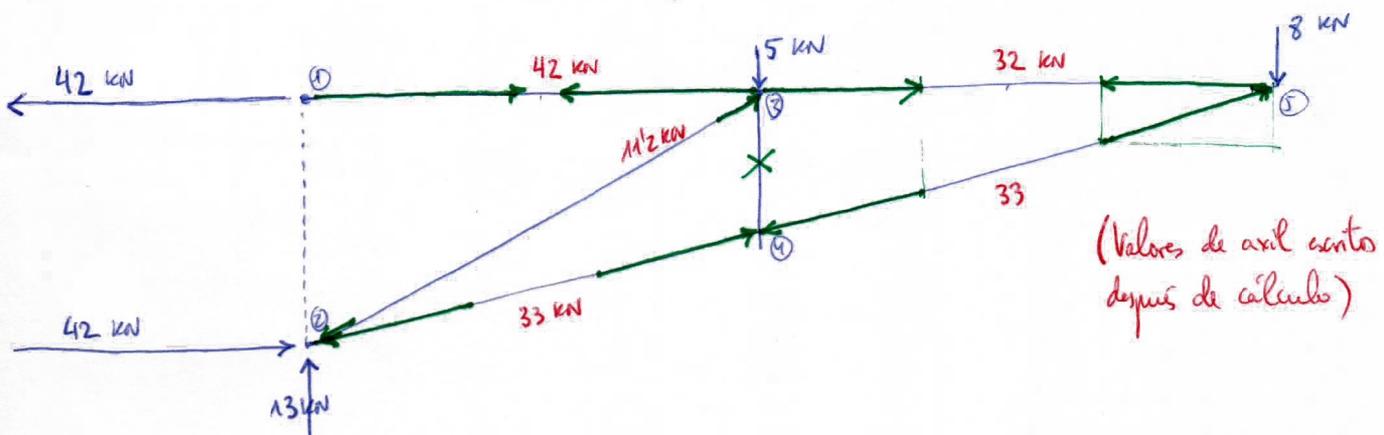
Por tanto, se pueden calcular las reacciones en (poniéndolos con sentidos arbitrarios)



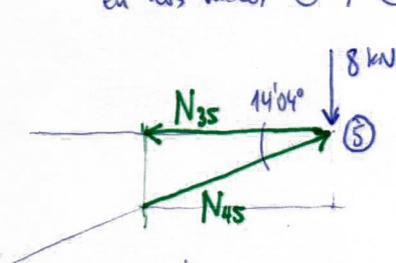
$$\begin{aligned} \sum M_2 = 0 &\Rightarrow -R_{1x} \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 8 \cdot 8 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow R_{1x} = -42 \text{ kN (sentido contrario!)} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow -42 + R_{2x} = 0 \Rightarrow R_{2x} = 42 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_{2y} - 5 - 8 = 0 \Rightarrow R_{2y} = 13 \text{ kN} \end{aligned}$$

### 1.2. Axilas

Primero se estiman los vigas gráficamente y luego se resuelve algebraicamente:



Se plantea una resolución de nudos desde el voladizo hasta los apoyos, utilizando los equilibrios en los nudos ①, ② para comprobar. [En azul los datos y en verde las incógnitas.]

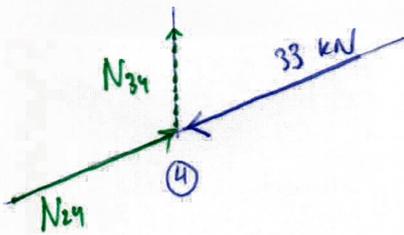


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -8 + N_{45} \cdot \sin 14.04^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{N_{45} = 33 \text{ kN}} \quad (\text{Compresión, entra al nudo})$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{35} + 33 \cdot \cos 14.04^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{N_{35} = 32 \text{ kN}} \quad (\text{Tensión, sale del nudo})$$

Notar varias cosas:

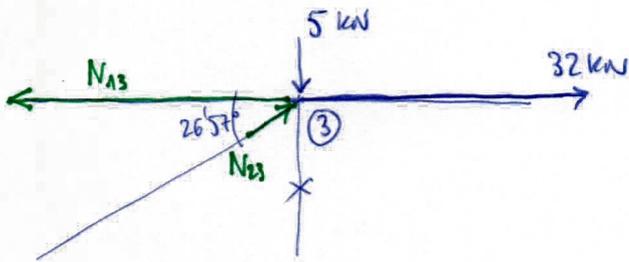
- Como hemos estimado previamente los vigas, si obtenemos valores negativos de axil quiere decir que tienen sentido contrario al supuesto, no necesariamente de tracción. Hay que interpretar si la fuerza sale del nudo (tracción) o entra al nudo (comp.).
- De las dos ecuaciones disponibles, se plantea primero la que contenga sólo una incógnita, de tal manera que, si es posible (no siempre se puede), evite los sistemas de ecuaciones.



No hace falta plantear ecuaciones.

$$N_{24} = 33 \text{ kN (compresión)}$$

$$N_{34} = 0$$



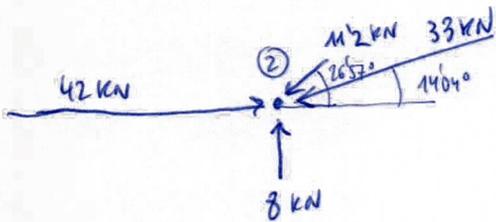
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -5 + N_{23} \cdot \sin 26.57^\circ = 0 \Rightarrow N_{23} = 11.2 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{13} + 11.2 \cdot \cos 26.57^\circ + 32 = 0 \Rightarrow N_{13} = 42 \text{ kN}$$

Nudos de comprobación:



$$\sum F_x = -42 + 42 = 0 \quad \checkmark$$



$$\sum F_x = 42 - 11.2 \cdot \cos 26.57^\circ - 33 \cdot \cos 14.04^\circ = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum F_y = 8 - 11.2 \cdot \sin 26.57^\circ - 33 \cdot \sin 14.04^\circ = 0 \quad \checkmark$$

Nota: Todo el razonamiento del punto 1.1 se podría haber evitado, aunque no se habría podido comprobar los resultados. Si en lugar de calcular primero las reacciones y luego hallar los axiles por el método de los nudos se hubiera comenzado directamente con el método de los nudos desde el extremo hasta los apoyos, las últimas 3 ecuaciones (nudos 1 y 2) no serían de comprobación, sino que se utilizarían justamente para hallar las reacciones. En cualquier caso, se desaconseja puesto que elimina la posibilidad de comprobar los resultados.

## 2. Desplazamientos

Antes de la aplicación del método de Williot, se deben calcular los alargamientos.

En cada barra  $\Delta L = \frac{NL}{EA}$ . Hay que pasar los axiles a [N] y hallar las longitudes.

$$L_{24} = L_{45} = \frac{4000 \text{ mm}}{\cos 14.04^\circ} = 4123 \text{ mm}$$

$$L_{23} = \frac{4000 \text{ mm}}{\cos 26.57^\circ} = 4472 \text{ mm}$$

En la tabla, los signos de axiles y alargamientos indican } + : tracción  
- : compresión

Barra	12	13	23	24	34	35	45
N [N]	0	+42000	-11200	-33000	0	+32000	-33000
L [mm]	2000	4000	4472	4123	1000	4000	4123
$\Delta L$ [mm]	0	+0.84	-0.25	-0.68	0	+0.65	-0.68

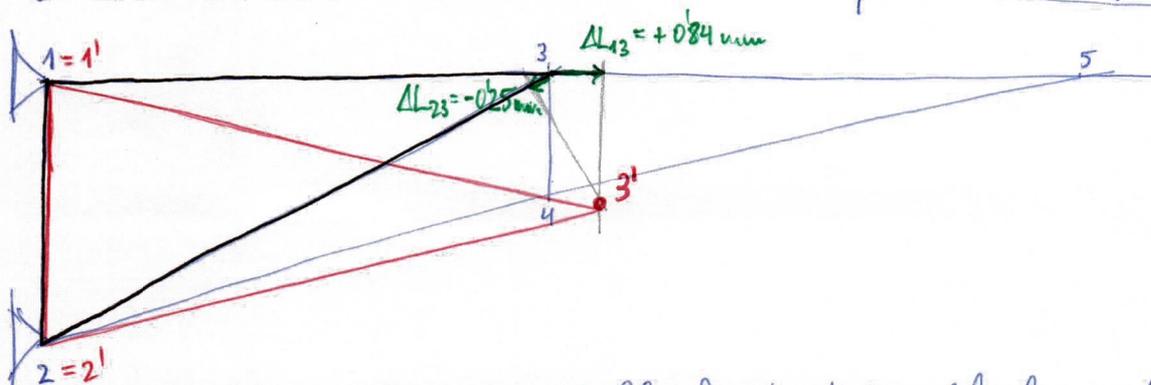
El método de Williot se puede aplicar sobre la cercha o independientemente, dando lugar en este último caso a un grafo llamado "Diagrama de Williot".

El método se basa en dibujar los alargamientos a una escala distinta (mayor) que la geometría indeformada, pero asumiendo que, dado que las deformaciones reales en realidad son pequeñas, los giros de barras se pueden representar como movimientos perpendiculares de sus extremos, en lugar de arcos de circunferencia.

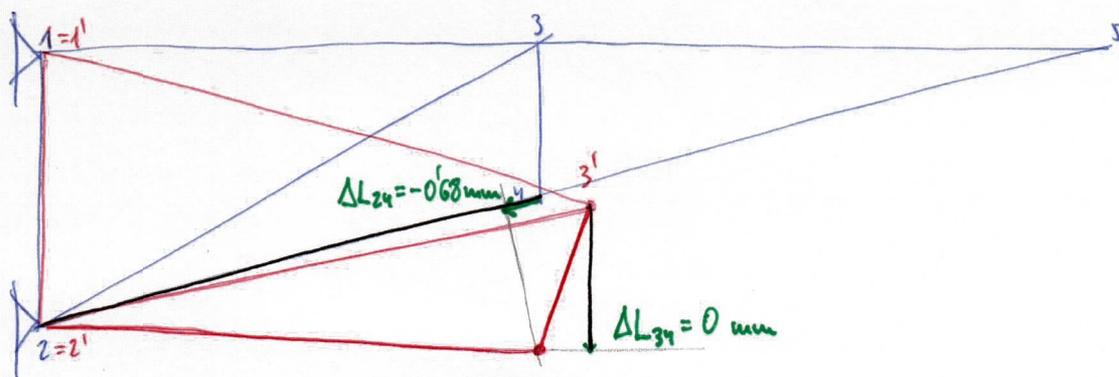
Para hallar la posición deformada de cada nudo, se siguen los siguientes pasos:

- 1 - Arastrar cada barra hasta que uno de los extremos ocupe el lugar del nudo deformado correspondiente → Color negro
- 2 - Alargar (o acortar) cada una de las 2 barras manteniendo fijo el nudo deformado del paso previo. → Color verde
- 3 - Girar (en perpendicular) el extremo alargado de cada una de las 2 barras → Color gris
- 4 - Cortar ambos perpendiculares en un punto, que será la posición del nuevo nudo deformado → Color rojo

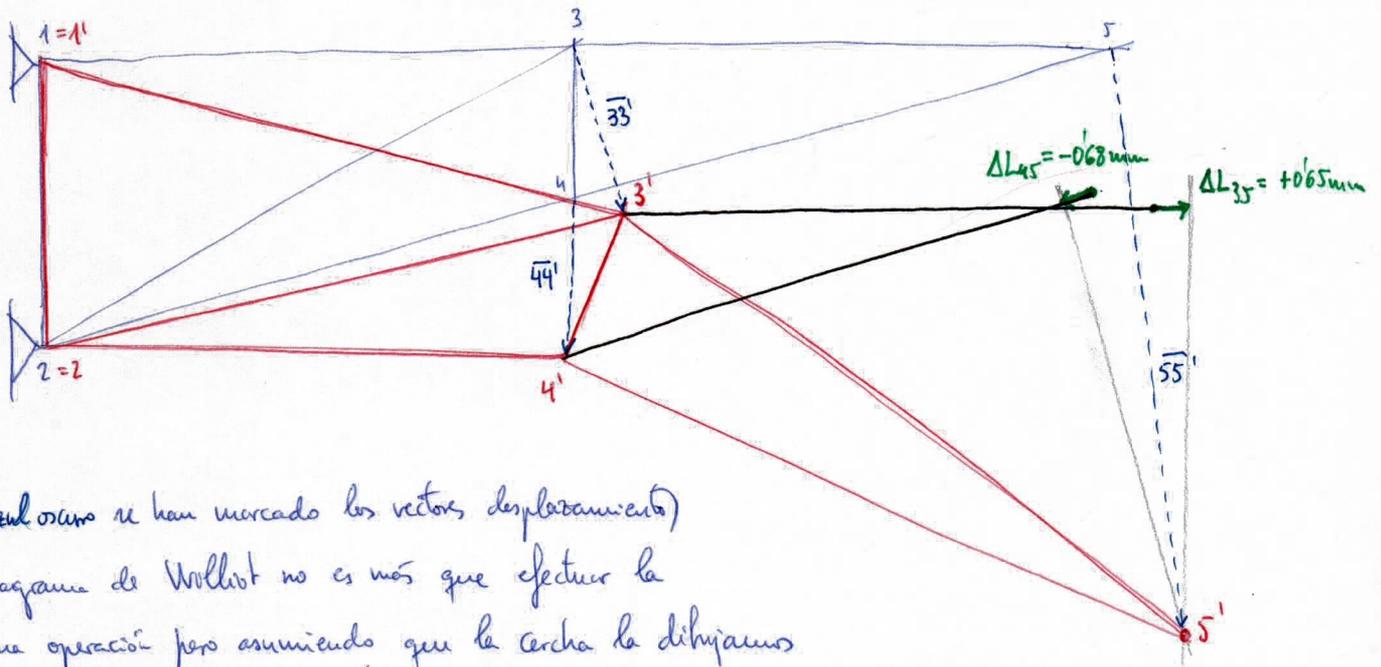
Se comienza por buscar la deformada de un triángulo que tenga nudos fijos:  $\triangle 123$   
 En este caso las barras "arrastradas" coinciden con las indeformadas. (Escala deformada:  $\times 1 \text{ mm}$ )



A continuación se repite el proceso para hallar el punto 4' después del alargamiento de las barras  $\overline{34}$  y  $\overline{24}$ :



Finalmente, se halló el punto 5'.

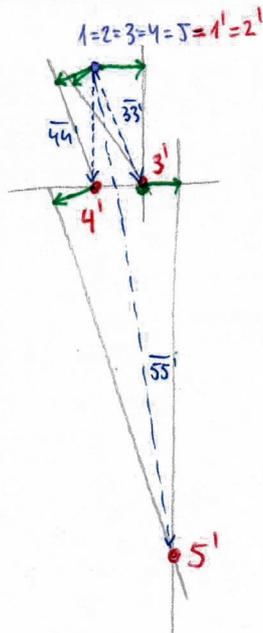


(En azul oscuro se han marcado los vectores desplazamiento)

El diagrama de Williot no es más que efectuar la misma operación pero asumiendo que la cercha la dibujamos infinitamente pequeña, concentrada toda en un punto.

Por tanto, las líneas azul y negra no existen; las únicas líneas del diagrama son los **verdes (alargamientos)**, los **grises (perpendiculares)** y los **puntos deformados (rojo)**

En el diagrama se pueden localizar fácilmente los polígonos de cada nudo. El desplazamiento de cada nudo es la distancia desde el punto azul (donde están todos los puntos redefinidos) hasta el correspondiente punto rojo (deformado).

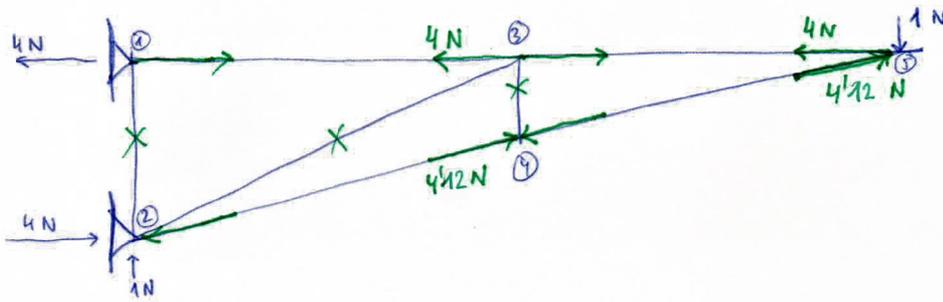


Este máximo desplazamiento vertical se puede medir y proporción 11.6 mm

Aunque no se pedía en el examen, se va a comprobar analíticamente el desplazamiento vertical del punto 5 mediante el Método de la Carga Unidad, que consiste en la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV).

Para ello, es necesario calcular los axiles en la misma cercha pero sometida únicamente a una fuerza unitaria en el nudo donde se quiere calcular el desplazamiento, en la misma dirección y sentido de dicho movimiento:

Cómo E y A están en N, mm, la fuerza unitaria la tomamos de 1 N.  
 Se calculan los axiles de esta "estructura virtual" por el método de los nudos:



Se demuestra que el desplazamiento vertical del nudo 5 es igual al momento por todos los barras:

$$\delta_{v5} = \sum_i \frac{N_{Ri} \cdot N_{Ii} \cdot L_i}{EA}, \text{ donde } \begin{cases} N_R, N_I \text{ son los axiles en las estructuras (real e imaginaria)} \\ L \text{ es la longitud de cada barra.} \end{cases}$$

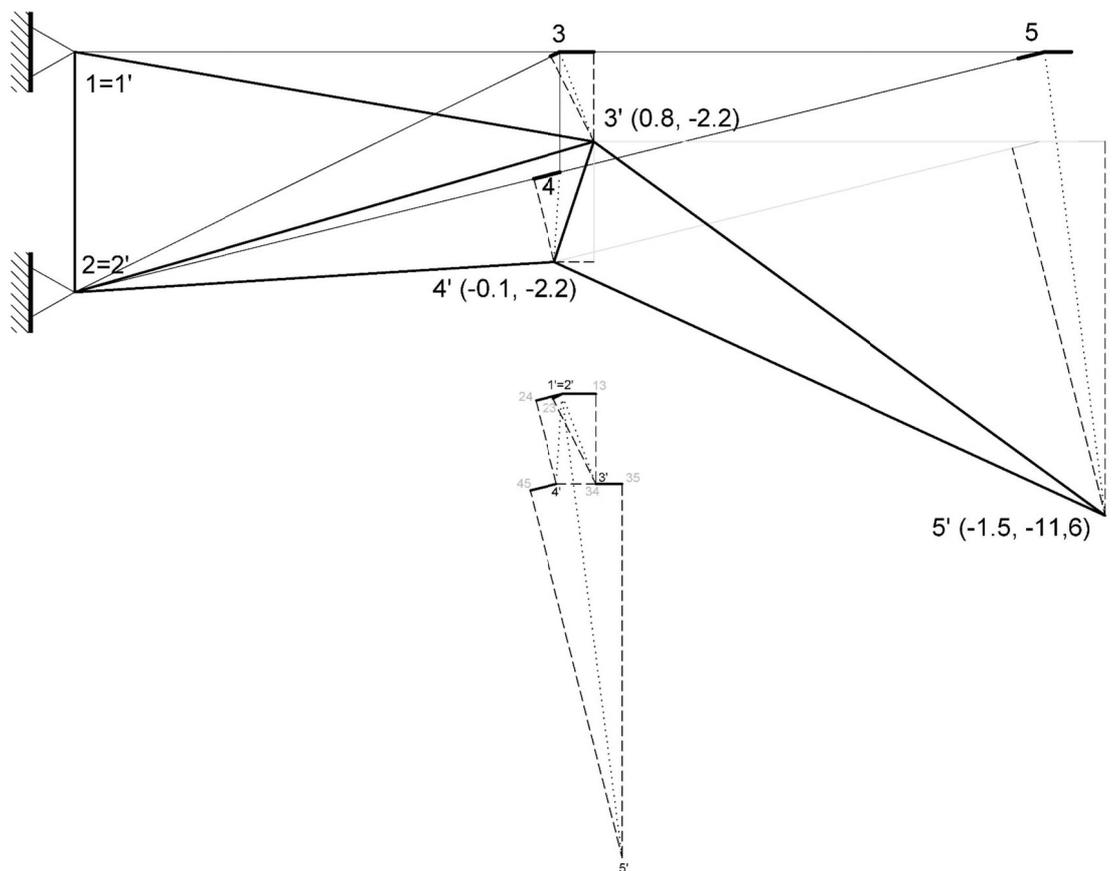
Sustituyendo:

$$\delta_{v5} = \frac{1}{EA} \left( N_{R12} N_{I12} L_{12} + N_{R13} N_{I13} L_{13} + N_{R23} N_{I23} L_{23} + N_{R24} N_{I24} L_{24} + N_{R34} N_{I34} L_{34} + N_{R35} N_{I35} L_{35} + N_{R45} N_{I45} L_{45} \right)$$

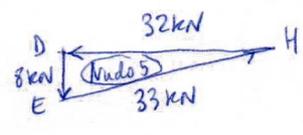
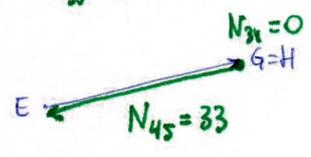
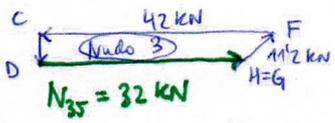
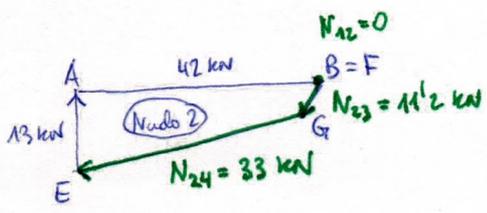
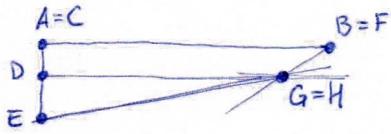
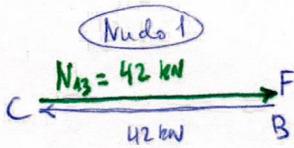
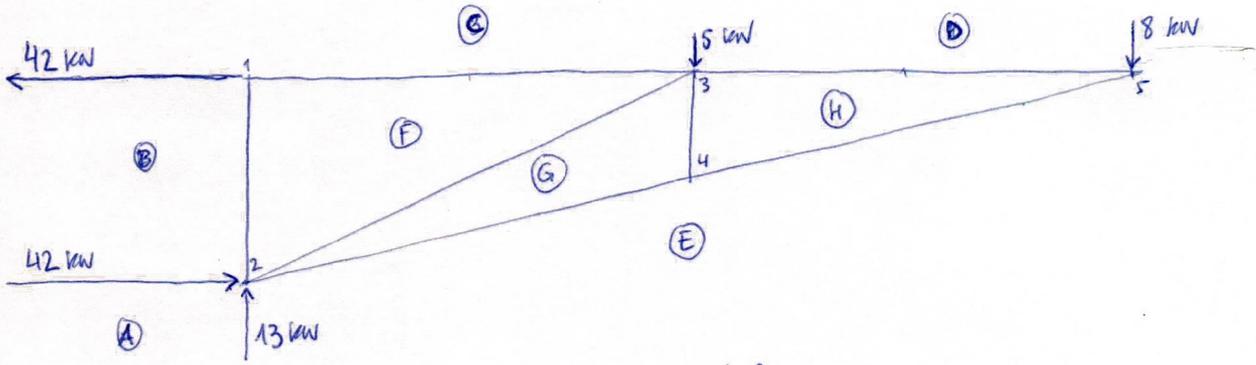
$$= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3} \left( 0 \cdot 0 \cdot 2000 + 42000 \cdot 4 \cdot 4000 + (-11200) \cdot 0 \cdot 4472 + (-33000) \cdot (-4\sqrt{12}) \cdot 4123 + 0 \cdot 0 \cdot 1000 + 32000 \cdot 4 \cdot 4000 + (-33000) \cdot (-4\sqrt{12}) \cdot 4123 \right) =$$

$$= 11.6 \text{ mm en vertical hacia abajo } \checkmark$$

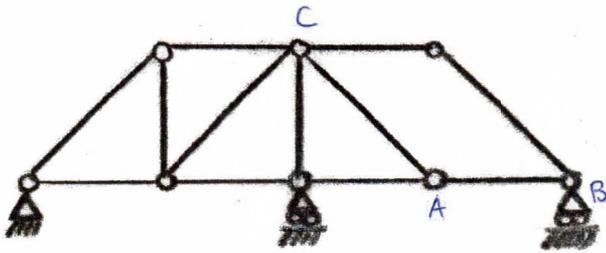
(Diagrama preciso)



Extra: obtención de axiles por el método de Maxwell-Cremona:



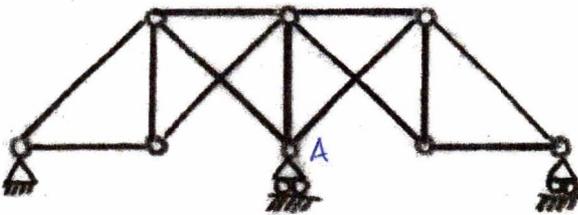
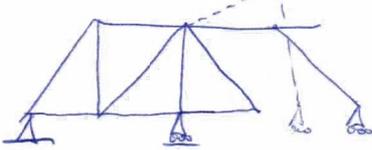
5. Determinar el grado de hiperestatismo de las siguientes celosías:



$GHE = 4 - 3 = 1$   
 $GHI = 12 - 2 \cdot 8 + 3 = -1$   
 $GHT = 1 - 1 = 0$

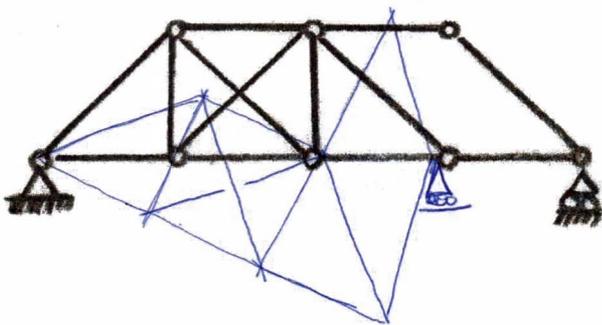
Es inestática teórica y realmente.  
 El nudo A está fijo por pertenecer al sistema rígido izquierdo, y por tanto B también queda fijado. Luego las dos barras superiores del cuadrilátero no pueden moverse.

Solo podría moverse el apoyo B y las barras superiores si no existiera AB



$GHE = 4 - 3 = 1$   
 $GHI = 13 - 2 \cdot 8 + 3 = 0$   
 $GHT = 1 + 0 = 1$

Hiperestática de grado 1 teórica y realmente. Si se elimina el apoyo central se convierte en inestática, porque internamente es estable. El nudo A no puede desplazarse horizontalmente aunque no tenga barras horizontales a sus lados.



$GHE = 3 - 3 = 0$   
 $GHI = 13 - 2 \cdot 8 + 3 = 0$   
 $GHT = 0 + 0 = 0$

Inestática teórica, mecanismo real. Internamente es un mecanismo porque el cuadrilátero no queda "sujetado" por apoyos u otras cerchas adosadas.