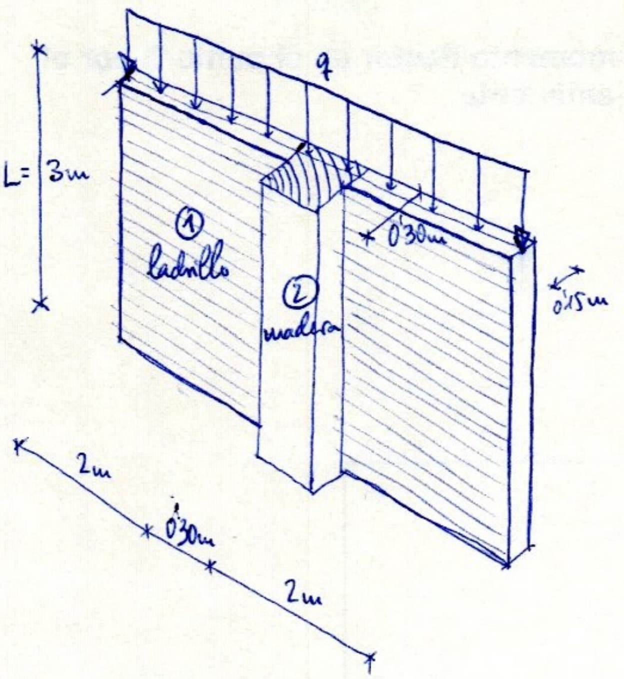
Ejercicio: AXIL HIPERESTÁTICO



Determinar cuál es la máxima carga lineal q que puede sostener el conjunto tabique de ladrillo + pilar de madera trabajando solidariamente a solicitación axil.

Datos:

Ladrillo (1) $\begin{cases} E_1 = 5000 \ N/mm^2 \\ \sigma_{adm,1} = 2 \ N/mm^2 \end{cases}$

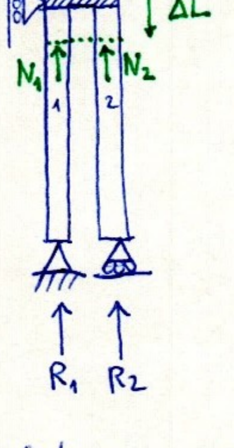
Madera $\begin{cases} E_2 = 8000 \ N/mm^2 \\ \sigma_{adm,2} = 10 \ N/mm^2 \end{cases}$

Antes de nada, se calculan las áreas, entendiendo que las dos paredes de ladrillo forman parte de un mismo elemento:

$$A_1 = 2 \cdot (2 \cdot 0'15) = 0'6 \ m^2 \cdot \frac{10^6 \ mm^2}{1 m^2} = 6 \cdot 10^5 \ mm^2$$

$$A_2 = 0'3^2 = 0'09 \ m^2 = 9 \cdot 10^4 \ mm^2$$

Seguidamente se modeliza el sistema. Se trata de dos elementos solidarios que trabajan solo a axil y que se deforman juntos. Se pueden modelizar como dos barras unidas en algún punto y acodaladas lateralmente. La carga vertical se considera aplicada en su totalidad (resultante) en un punto de la cabeza del sistema.



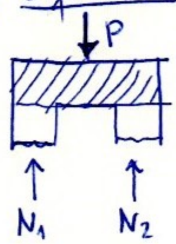
Se observa que es una estructura hiperestática de grado 1, y por tanto será necesario añadir alguna otra ecuación, aparte de las de equilibrio, para obtener el valor de las reacciones R_1 y R_2, que serán iguales a los axiles interiores N_1 y N_2.

En efecto, aplicando $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -P + R_1 + R_2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow R_1 + R_2 = P$, donde hay 2 incógnitas (R_1 y R_2) y por tanto no se puede resolver sin añadir otra ecuación.

(Este razonamiento no es necesario hacerlo cada vez que se resuelve un problema de este tipo).

Como cualquier otra estructura hiperestática, se aplican secuencialmente las ecuaciones de equilibrio (fuerzas), compatibilidad (deformaciones) y comportamiento (ley de Hooke, que relaciona fuerzas con deformaciones); y se determina cuál de los dos elementos se rompe antes y por tanto es el elemento responsable de que la carga total no pueda seguir aumentando.

1) <u>Equilibrio</u>: En el nudo superior, se aplica $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 - P = 0 \Rightarrow$



$$\Rightarrow P = N_1 + N_2 \quad (1)$$

2) <u>Compatibilidad</u>: Los dos elementos se acortan lo mismo: $\Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L \quad (2)$

3) <u>Comportamiento</u>: Se aplica la Ley de Hooke a ambos elemento

Ley de Hooke en cualquier material: $\sigma = E\varepsilon$

Tensión normal: $\sigma = \dfrac{N}{A} \quad (3)$

Deformación unitaria: $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L}$

$$\frac{N}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow N = \frac{EA}{L}\Delta L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \dfrac{E_1 A_1}{L_1}\Delta L_1 \\[2ex] N_2 = \dfrac{E_2 A_2}{L_2}\Delta L_2 \end{array} \right\} (4)$$

Sustituyendo en la ecuación (4) la (2), es decir, suponiendo igual acortamiento, y suponiendo $L_1 = L_2 = L$ (igual altura), queda, para ambos elementos:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \dfrac{E_1 A_1}{L}\Delta L \quad (5) \\[2ex] N_2 = \dfrac{E_2 A_2}{L}\Delta L \quad (6) \end{array} \right.$$

4) <u>Rotura</u>: Se rompe el elemento cuya relación entre su "velocidad de carga" y su resistencia sea mayor, entendiendo que la "velocidad de carga" (cantidad de fuerza total que se lleva un elemento en relación al contiguo) es directamente proporcional a su rigidez axial y a su inclinación:

$$\text{"Velocidad de carga"} \sim K_N \cdot \cos\alpha = \frac{EA}{L}\cos\alpha$$

Como en este caso los elementos son verticales, $\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1$, luego

$$\text{"Velocidad de carga"} \sim K_N = \frac{EA}{L}$$

Por su parte, la resistencia axil de cada elemento (Axil admisible, N_{adm}), se calcula en base a su tensión admisible (σ_{adm}) a partir de la ecuación (3):

$$N_{adm} = \sigma_{adm} \cdot A \Rightarrow \begin{cases} N_{adm,1} = \sigma_{adm,1} \cdot A_1 & (7) \\ N_{adm,2} = \sigma_{adm,2} \cdot A_2 & (8) \end{cases}$$

Se calculan a continuación las relaciones "carga/resistencia":

Ladrillo: $$\frac{Carga_{,1}}{Resistencia_{,1}} = \frac{K_{N,1}}{N_{adm,1}} = \frac{\frac{E_1 A_1}{L}}{\sigma_{adm,1} \cdot A_1} = \frac{E_1}{\sigma_{adm,1} \cdot L} = \frac{5000}{2L} = \frac{2500}{L}$$

Madera: $$\frac{Carga_{,2}}{Resistencia_{,2}} = \frac{K_{N,2}}{N_{adm,2}} = \frac{\frac{E_2 A_2}{L}}{\sigma_{adm,2} \cdot A_2} = \frac{E_2}{\sigma_{adm,2} \cdot L} = \frac{8000}{10L} = \frac{800}{L}$$

(no sustituimos L porque queda en ambos miembros)

Como $$\underbrace{\frac{2500}{L}}_{ladrillo} > \underbrace{\frac{800}{L}}_{madera} \Longrightarrow \underline{\underline{\text{Rompe ladrillo}}}$$

Si rompe ladrillo, en el instante de rotura su axil N_1 alcanza el axil admisible:

$$N_1 = N_{adm,1} \overset{\text{Ecuación (7)}}{=} \sigma_{adm,1} \cdot A_1 = 2 \cdot 6 \cdot 10^5 = 1'2 \cdot 10^6 \text{ N} = 1200 \text{ kN}$$

5) Sustitución hacia atrás

Conociendo el axil del elemento que se rompe, se puede obtener el axil en el otro elemento (no roto) calculando previamente la deformación ΔL del conjunto:

A partir de la ecuación (5): $$\Delta L = \frac{N_1 L}{E_1 A_1} = \frac{1'2 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^5} = 1'2 \text{ mm}$$

(Observar que el tabique se aplasta con muy poca deformación)

Sustituyendo $\Delta L = 1'2$ mm en la ecuación (6), se tiene

$$N_2 = \frac{E_2 A_2}{L} \Delta L = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^3} 1'2 = 2'88 \cdot 10^5 \text{ N} = 288 \text{ kN}$$

Por tanto, sumando ambos axiles (N_1 y N_2) se tiene la carga total resultante P (ver ecuación 1):

$$P = N_1 + N_2 = 1200 + 288 = 1488 \text{ kN}$$

Que corresponde a una carga repartida $\boxed{q = \frac{P}{4'3 \text{m}} = 346 \text{ kN/m}}$

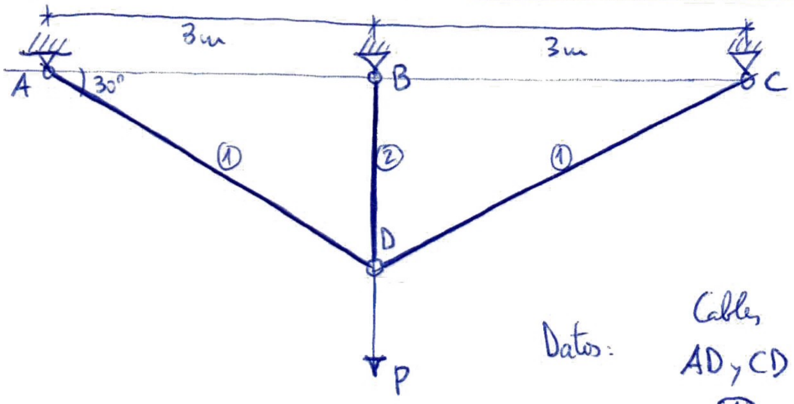
Aunque el problema académico se tendría ya resuelto, el problema real estructural requeriría de comprobar si, cuando el tabique rompe, el pilar de madera es capaz de soportar de golpe toda la carga: la que tenía (288 kN) más la que ha dejado de soportar el tabique (1200 kN).

El axil admisible del pilar es (ecuación (2)): $N_{adm,2} = \sigma_{adm,2} \cdot A_2 = 10 \cdot 9 \cdot 10^4 = 9 \cdot 10^5$ N

$= 900$ kN < 1488 kN $= P$

Se rompería instantáneamente el pilar.

Ejercicio: AXIL HIPERESTÁTICO (DIFERENTES ORIENTACIONES)



Determinar cuál es la máxima fuerza puntual P que puede sostener el conjunto de 3 cables AD, BD y CD.

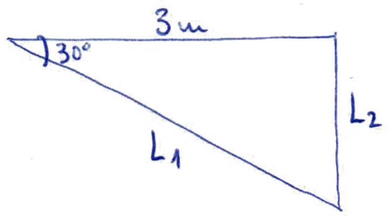
Datos:

Cables AD y CD ①: $A_1 = 400 \text{ mm}^2$; $E_1 = 2'1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{adm,1} = 180 \text{ N/mm}^2$

Cable BD ②: $A_2 = 900 \text{ mm}^2$; $E_2 = 2'1 \cdot 10^5 \text{ mm}^2$; $\sigma_{adm,2} = 240 \text{ N/mm}^2$

0) Geometría:

Preliminarmente hay que calcular las longitudes de los cables por trigonometría:

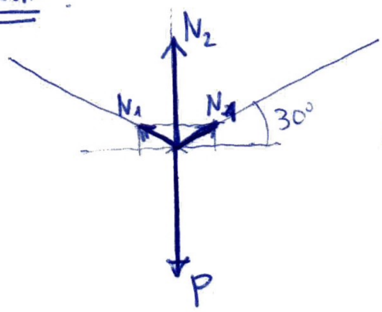


$$\cos 30° = \frac{3}{L_1} \rightarrow L_1 = \frac{3}{\cos 30°} = 3'464 \text{ m} = 3464 \text{ mm}$$

$$tg\,30° = \frac{L_2}{3} \Rightarrow L_2 = 3\,tg\,30° = 1'732 \text{ m} = 1732 \text{ mm}$$

$$\text{sen}\,30° = \frac{L_2}{L_1} \Rightarrow L_1 = \frac{L_2}{\text{sen}\,30°} \Rightarrow L_1 = 2L_2 \quad (1)$$

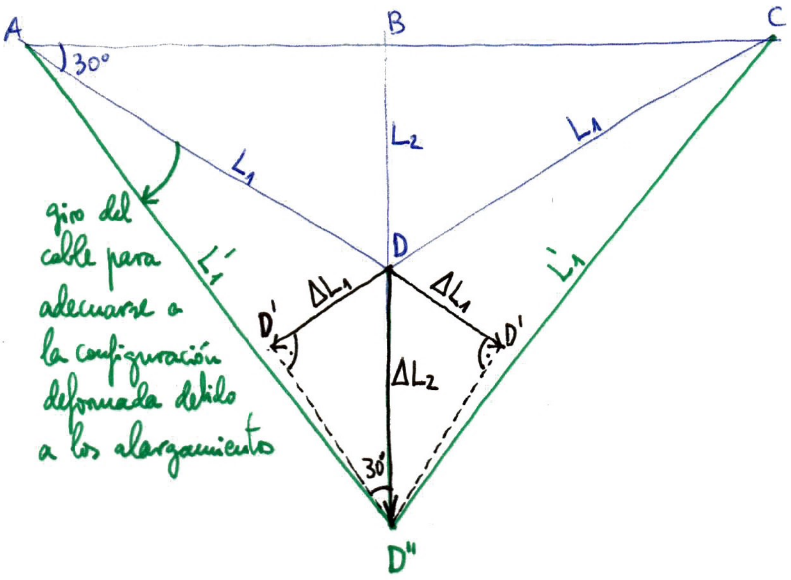
1) Equilibrio:



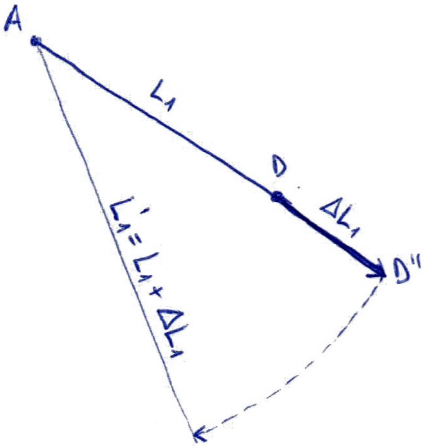
Por simetría, los axiles de los cables diagonales deben ser idénticos ($\Sigma F_x = 0$)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 + 2(N_1\,\text{sen}\,30°) - P = 0 \Rightarrow P = N_1 + N_2 \quad (2)$$

2) Compatibilidad:



Al tirar hacia abajo del punto D, este se desplaza verticalmente hacia D'' (no puede moverse en horizontal puesto que se rompería la simetría). Esto se consigue gracias al alargamiento de los cables. El cable recto se alarga dicha distancia $\overline{DD''}$, a la que llamamos ΔL_2; coincide el alargamiento con el movimiento porque ambos están alineados. Sin embargo, los cables inclinados, además de alargarse



necesitan girar para amoldarse al descenso de D. Ese giro, que si la deformación fuera grande sería un arco de circunferencia, en la hipótesis de pequeñas deformaciones puede simplificarse como una perpendicular (línea negra a trazos en el dibujo anterior) que forma un triángulo rectángulo $\widehat{DD'D''}$ que es semejante al que forma el conjunto indeformado de cables, luego el ángulo de la perpendicular con la vertical es 30°, y se establece la siguiente relación:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} \Rightarrow \Delta L_1 = 0'5\,\Delta L_2 \quad (3)$$

3) <u>Comportamiento</u>: Aplicando la Ley de Hooke:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma = E\varepsilon \\ \sigma = \dfrac{N}{A} \ (4) \\ \varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L} \end{array}\right\} \frac{N}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow N = \underbrace{\frac{EA}{L}}_{K_N}\Delta L \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} N_1 = \dfrac{E_1 A_1}{L_1}\Delta L_1 \\ \\ N_2 = \dfrac{E_2 A_2}{L_2}\Delta L_2 \end{array}\right\}$$

, donde sustituimos (1) y (3) y $E_1 = E_2 = E$ $\longrightarrow$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{l} N_1 = \dfrac{EA_1}{2L_2}\,0'5\,\Delta L_2 \Rightarrow N_1 = \dfrac{EA_1}{4L_2}\Delta L_2 \quad (5) \\ \\ N_2 = \dfrac{EA_2}{L_2}\Delta L_2 \quad (6) \end{array}\right.$$

4) <u>Rotura</u>: Se rompe el elemento con menor fracción $\dfrac{\text{"Velocidad de carga"}}{\text{Resistencia}}$, donde

· "velocidad" es proporcional a la rigidez axial y a la inclinación respecto de la dirección de la carga: "Velocidad" $\sim K_N \cos\alpha = \dfrac{EA}{L}\cos\alpha$; y la

resistencia se calcula a partir de (4) como: $N_{adm} = \sigma_{adm}\cdot A$ (7)

2 cables inclinados ①: $\dfrac{2\cdot K_{N,1}\cdot\cos\alpha}{2\cdot N_{adm,1}} = \dfrac{\frac{E_1 A_1}{L_1}\cos 60^\circ}{\sigma_{adm,1} A_1} = \dfrac{E\cdot\cos 60^\circ}{L_1\,\sigma_{adm,1}} = \dfrac{2'1\cdot 10^5\cdot 0'5}{3464\cdot 180} \simeq 0'168$

$\wedge$ $\Big\}\rightarrow$ Rompe ② (cable recto)

Cable recto ②: $\dfrac{K_{N,2}\cdot\cos\alpha}{N_{adm,2}} = \dfrac{\frac{E_2 A_2}{L_2}\cos 0^\circ}{\sigma_{adm,2}\cdot A_2} = \dfrac{E\cdot\cos 0^\circ}{L_2\cdot\sigma_{adm,2}} = \dfrac{2'1\cdot 10^5\cdot 1}{1732\cdot 240} \simeq 0'505$

En el instante de rotura del cable recto, su axil es $N_2 = N_{adm,2} \overset{\text{Ecuación (7)}}{=} \sigma_{adm,2}\cdot A_2 = \underline{216\ kN}$

Y por tanto, según la ecuación (6), su alargamiento es $\Delta L_2 = \dfrac{N_2 L_2}{EA_2} \simeq \dfrac{216\cdot 10^3\cdot 1732}{2'1\cdot 10^5\cdot 900} \simeq \underline{1'98\ mm}$

Sustituyendo el alargamiento ΔL_2 en la ecuación (5), se obtiene el axil en los cables inclinados justo antes del instante de rotura: $N_1 = \frac{EA_1}{4L_2}\Delta L_2 = \frac{2'1 \cdot 10^5 \cdot 400}{4 \cdot 1732} \cdot 1'98 \simeq \underline{\underline{24\ kN}}$

Luego, sustituyendo en (2), se obtiene la carga total soportada

$$P = N_1 + N_2 = 24 + 216 = \boxed{240\ kN}$$

En el instante posterior a la rotura, dado que el cable vertical está roto y por tanto $N_2 = 0$, la carga total se transfiere a los cables inclinados restantes. Sustituyendo en la ecuación anterior:

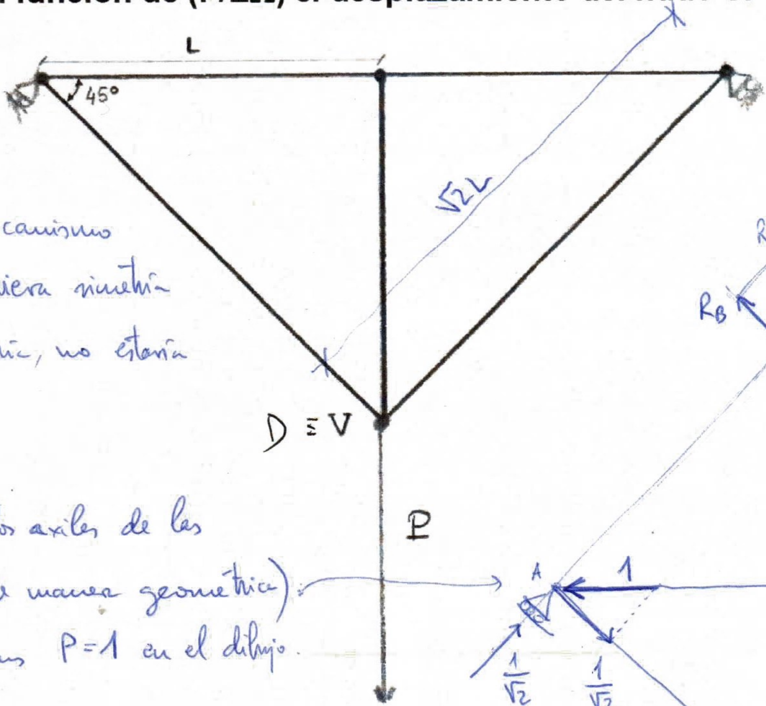
$$P = N_1 + 0 \Rightarrow 240 = N_1$$

Cada cable inclinado queda solicitado por 240 kN. Sin embargo, el axil admisible de cada uno es (Ecuación (7)): $N_{adm,1} = \sigma_{adm,1} \cdot A_1 = 180 \cdot 400 = 72000\ N = 72\ kN < 240\ kN$

Luego se rompen también los cables inclinados en ese instante.

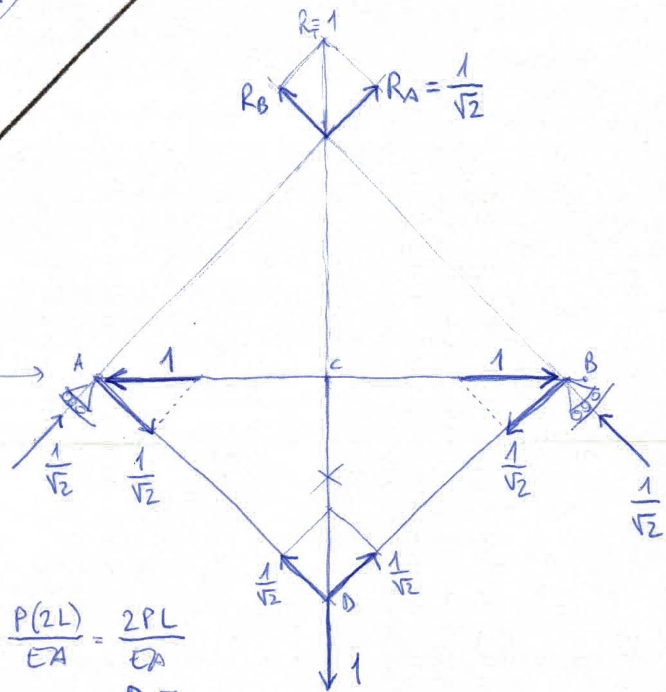
1.2. En la figura se representa un entramado simétrico formado por barras articuladas de módulo de elasticidad E, y sección Ω, sometido a una carga vertical P.

Calcular y expresar en función de (P/EΩ) el desplazamiento del nudo V. ($\equiv$ nudo D)



La estructura es un mecanismo en equilibrio; si no hubiera simetría de cargas y de geometría, no estaría en equilibrio.

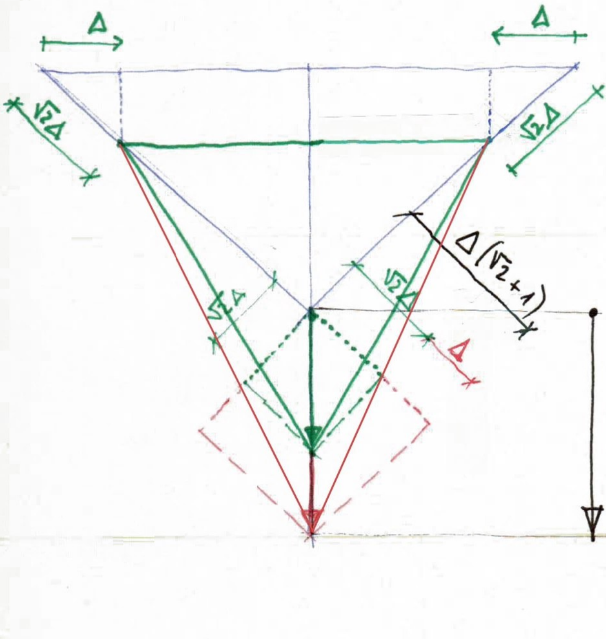
Primero se obtienen los axiles de las barras (por ejemplo de manera geométrica). Por comodidad, tomamos $P=1$ en el dibujo.



Queda $\begin{cases} N_{AB} = P \\ N_{AD} = N_{BD} = \dfrac{P}{\sqrt{2}} \end{cases}$

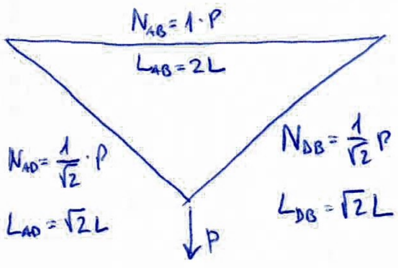
Y por tanto los alargamientos son $\Delta L = \dfrac{NL}{EA} = \begin{cases} \Delta L_{AB} = \dfrac{P(2L)}{EA} = \dfrac{2PL}{EA} \\ \Delta L_{AD} = \Delta L_{BD} = \dfrac{\frac{P}{\sqrt{2}}\sqrt{2}L}{EA} = \dfrac{PL}{EA} \end{cases}$

La deformada la interpretamos en dos pasos. En el primer paso (verde), se acorta AB y por tanto los apoyos deslizantes descienden por las pendientes inclinadas, mientras que AD y BD, aún sin alargar, tienen que seguir compartiendo el nudo D (por compatibilidad) y por ello D desciende. En el segundo paso (rojo), se alargan AD y BD, y D vuelve a descender. Como $\Delta L_{AB} = 2 \cdot \Delta L_{AD}$, llamamos simplemente $\Delta L_{AD} \equiv \Delta$

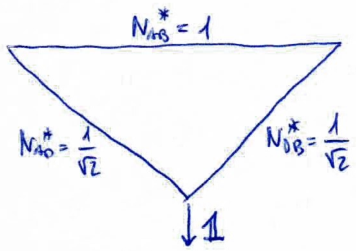


$$\Delta(\sqrt{2}+1)\sqrt{2} = \Delta(2+\sqrt{2}) = \boxed{\frac{PL}{EA}(2+\sqrt{2})}$$

Sin embargo, es mucho más sencillo aplicar el método de la carga unidad (PTV):

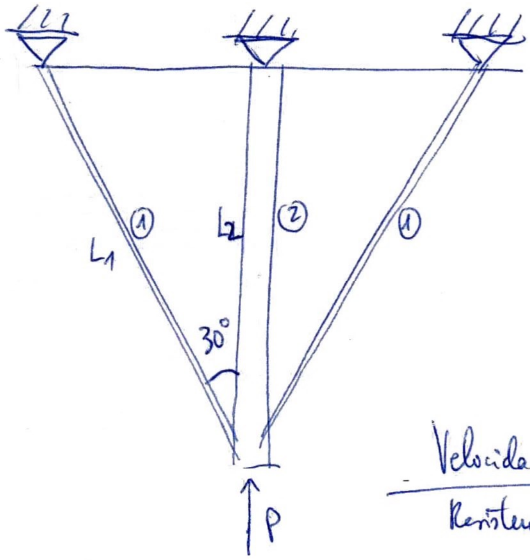


Real



Virtual

$$1 \cdot \delta = \frac{1}{EA} \sum_i (N \cdot N^* \cdot L)_i = \frac{1}{EA} \left(P \cdot 1 \cdot 2L + 2 \cdot \frac{P}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} L \right) = \boxed{\frac{PL}{EA} \left(2 + \sqrt{2} \right) = \delta}$$



¿Puede romper simultáneamente ① y ②?

Para ello, debe cumplirse que la ratio $\frac{\text{Velocidad de carga}}{\text{Resistencia}}$ sea igual en ambos sistemas:

$$\frac{\text{Velocidad}_1}{\text{Resistencia}_1} = \frac{\text{Velocidad}_2}{\text{Resistencia}_2} \Rightarrow \frac{2\cdot K_{N1}\cdot \cos 30^\circ}{2\cdot N_{adm,1}} = \frac{K_{N2}\cdot \cos 0^\circ}{N_{adm,2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{E\cdot A_1}{L_1}\cos 30^\circ}{A_1\cdot \sigma_{adm}} = \frac{\frac{E\cdot A_2}{L_2}}{A_2\cdot \sigma_{adm}} \Rightarrow \frac{\cos 30^\circ}{L_1} = \frac{1}{L_2} \Longrightarrow \frac{\cos 30^\circ}{L_1} = \frac{1}{L_1 \cos 30^\circ} \Rightarrow \cos^2 30^\circ = 1 \Rightarrow$$

Por geometría: $\cos 30^\circ = \frac{L_2}{L_1} \Rightarrow L_2 = L_1 \cos 30^\circ$

$\Rightarrow 0'75 = 1$. FALSO. Nunca puede romper simultáneamente. ¿Cuál rompe antes?

Si rompiera antes ① que ②, para cualquier inclinación α, se tendría

$$\frac{\text{Velocidad}_1}{\text{Resistencia}_1} > \frac{\text{Velocidad}_2}{\text{Resistencia}_2} \Rightarrow \dots \Rightarrow \cos^2\alpha > 1,$$ que es imposible.

$\boxed{\text{NUNCA PUEDE ROMPERSE EL PUNTAL INCLINADO}}$

(Solo podría romper para distinto material y tensión admisible)