8
MÉTODOS ENERGÉTICOS

PROYECTO DE ESTRUCTURAS

4 fases:

1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica

2) Modelización: elaboración de modelo físico

3) Análisis: cálculo de solicitaciones de los elementos

4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos

5) Representación

PROYECTO DE ESTRUCTURAS

4 fases:

1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica

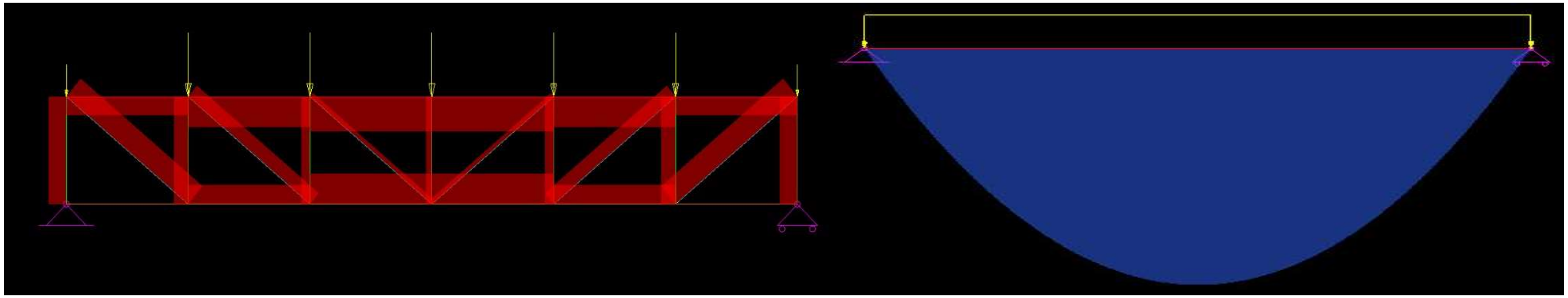
2) Modelización: elaboración de modelo físico

3) **Análisis: cálculo de solicitaciones de los elementos**

4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos

5) Representación

¡SÓLO SABEMOS CALCULAR ISOSTÁTICAS!



PROYECTO DE ESTRUCTURAS

4 fases:

1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica

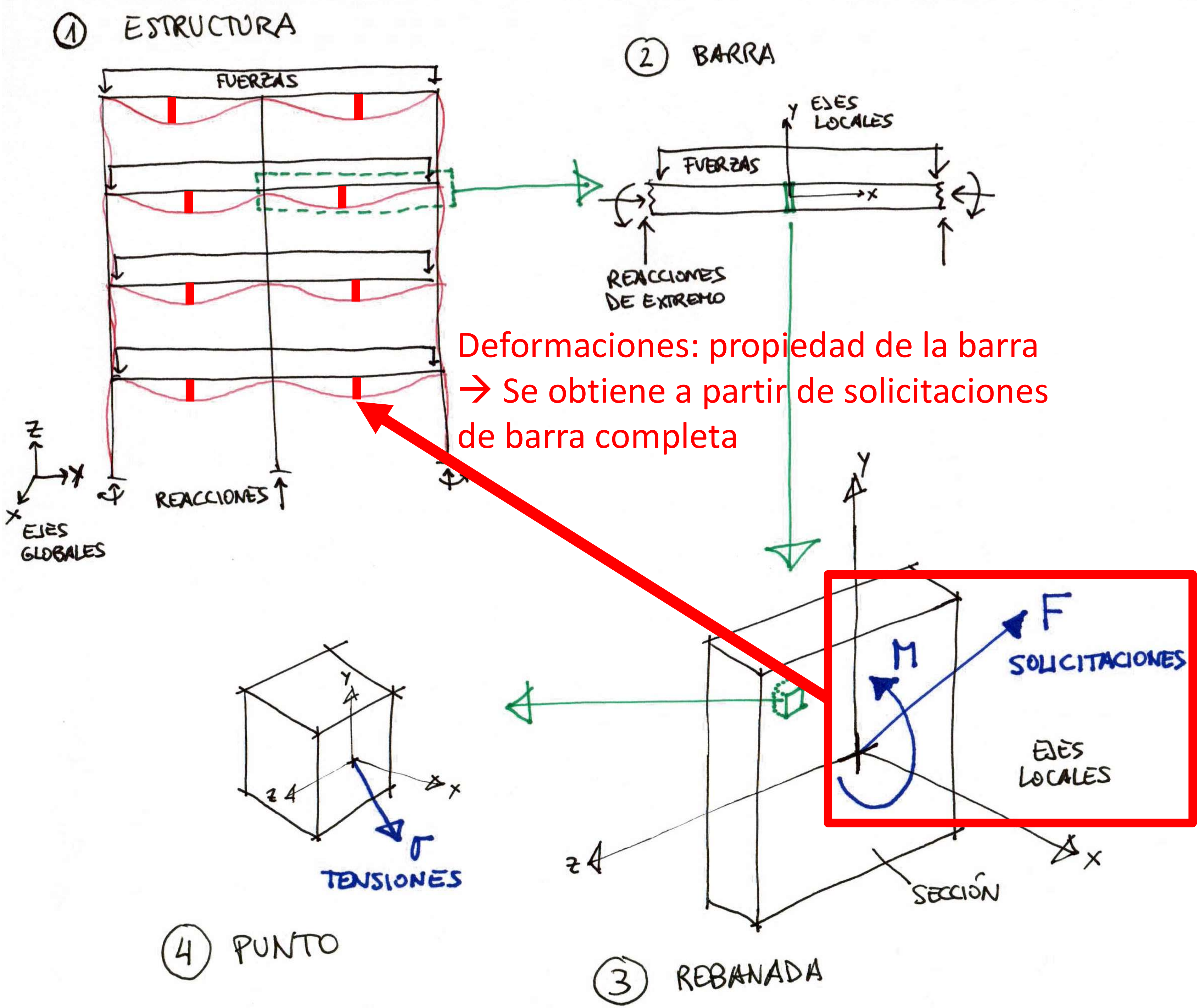
2) Modelización: elaboración de modelo físico

3) Análisis: cálculo de solicitaciones de los elementos

4) **Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos**

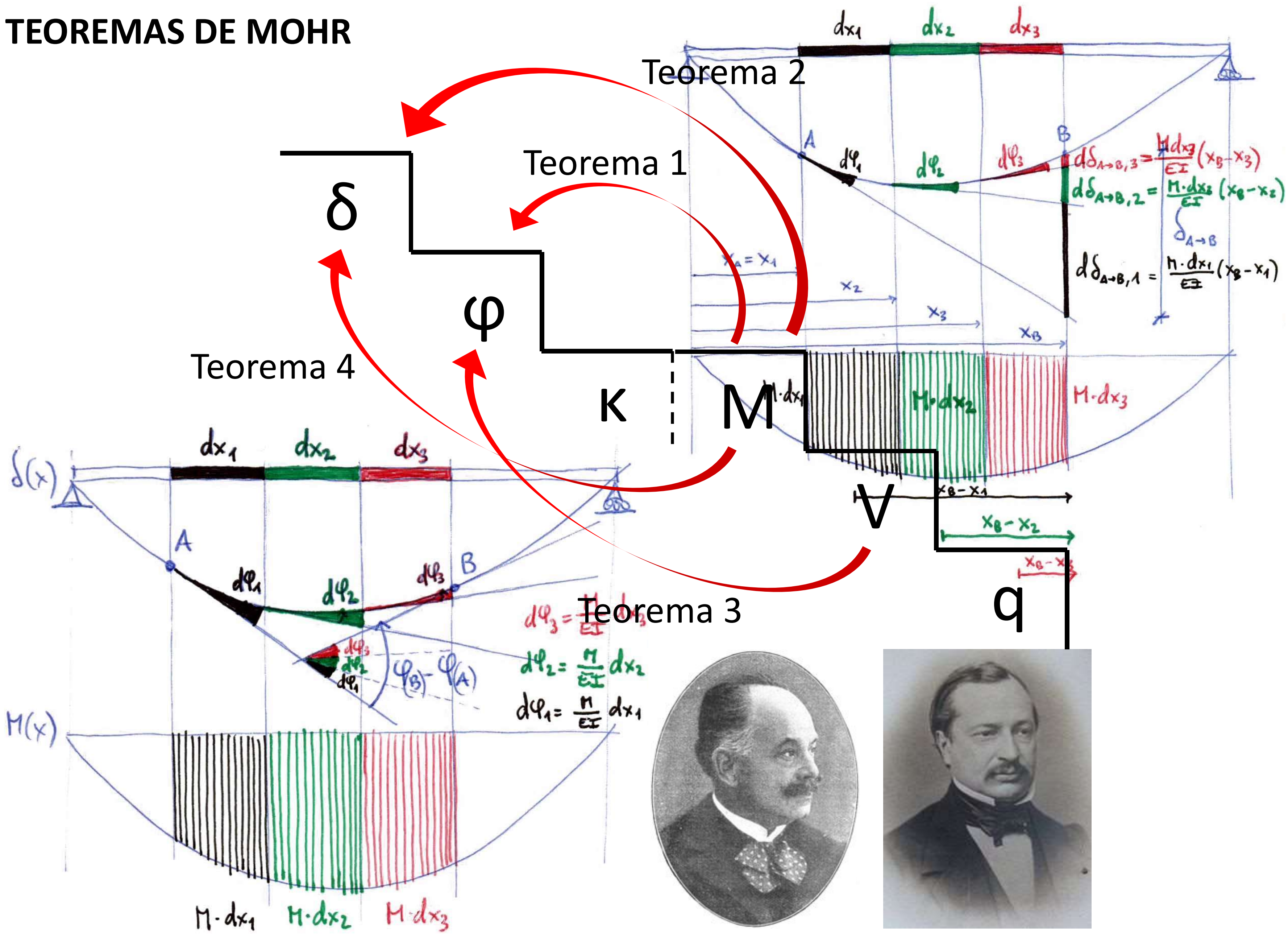
5) Representación

Dimensionado de barras: requisitos		
	RESISTENCIA:	Acción ≤ Resistencia
	RIGIDEZ:	**Deformación ≤ Valores admisibles**
	ESTABILIDAD:	No pandea, no vuelca, etc.



① ESTRUCTURA
FUERZAS
REACCIONES
Z
Y
X
EJES GLOBALES
② BARRA
Y
EJES LOCALES
FUERZAS
X
REACCIONES DE EXTREMO
Deformaciones: propiedad de la barra
→ Se obtiene a partir de solicitaciones
de barra completa
Y
F
M
SOLICITACIONES
EJES LOCALES
Z
X
SECCIÓN
③ REBANADA
Y
Z
X
σ
TENSIONES
④ PUNTO

TEOREMAS DE MOHR



(1835 – 1918)

(1842 – 1903)

Heinrich Müller-Breslau
(1842 – 1903)

J. A. Charles Bresse
(1822 – 1883)

MÉTODOS ENERGÉTICOS

OBJETIVOS

1) REACCIONES EN HIPERESTÁTICAS

(porque no sabemos)

2) MOVIMIENTOS EN ISO E HIPERESTÁTICAS

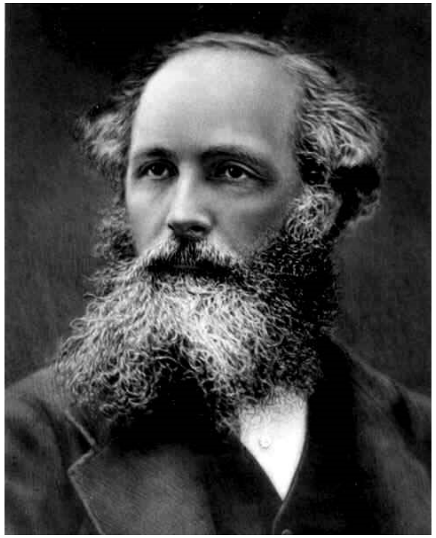
(porque es difícil)

MÉTODOS ENERGÉTICOS

Se conocen como "métodos energéticos" a una serie de teoremas y procedimientos desarrollados en el s. XIX, basados en el concepto de **energía de deformación elástica** y en el principio de conservación de la energía.

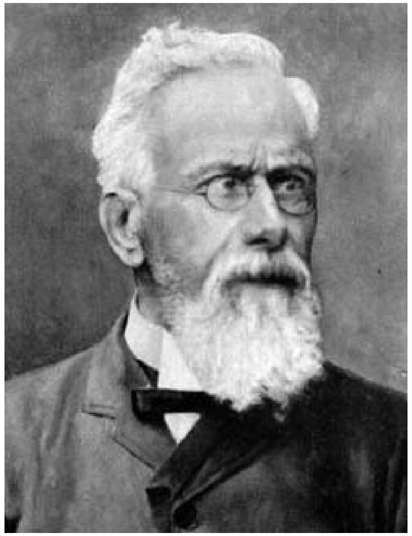
Estos métodos permitieron:

- Resolver (y construir!) estructuras **hiperestáticas**.
- Calcular **deformaciones**.
- Sentar las bases del desarrollo de los **métodos matriciales**, que son la base del análisis moderno y del software especializado de cálculo estructural.

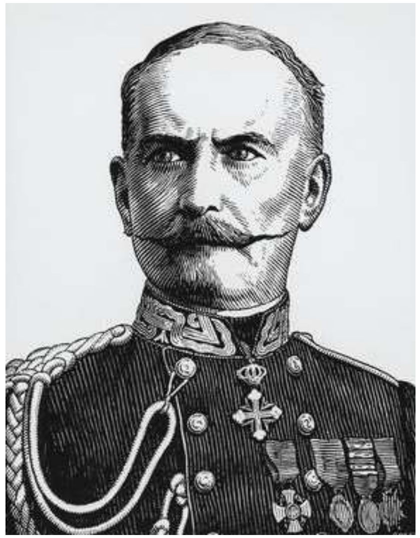


James Clerk Maxwell (1831 – 1879)

Carlo Alberto Castigliano (1847 – 1884)



Enrico Betti (1823 – 1892)



Luigi Federico Menabrea (1809 – 1896)

EL UNIVERSO Y LA ENERGÍA

La **energía** es la propiedad cuantitativa que **se transmite** a los cuerpos y que permite generar **trabajo** de algún tipo.

En el espacio-tiempo sólo hay energía; incluso la masa es energía.

El universo es **direccional**, puesto que existe el eje **tiempo**.

Dentro del avance temporal, las transformaciones cumplen las **Leyes de la Termodinámica**:

1) **Conservación** de la energía.
2) Aumento de la **entropía**.

Es decir: se producen transformaciones de igual energía tendentes al desorden

EL UNIVERSO Y LA ENERGÍA

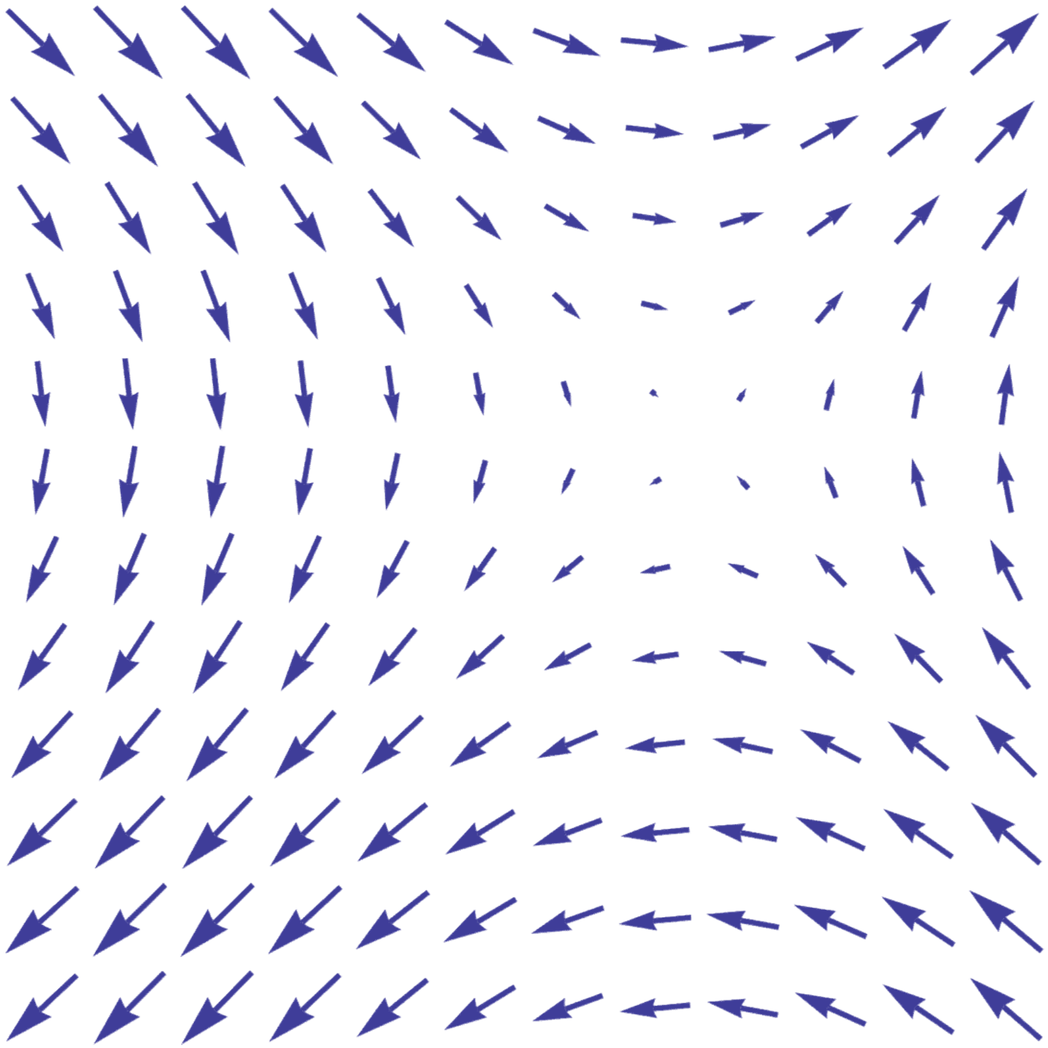
Tipos de energía:
- Cinética: velocidad
- Potencial (gravitatoria, eléctrica o magnética): posición en un campo
- Química: reacción
- Radiante: luz
- Térmica: temperatura
- **Elástica: deformación**

La energía total de un sistema o un cuerpo es la suma de todos los tipos de energía que alberga.

CONCEPTO DE TRABAJO

Se define un **campo** como una **región del espacio** donde una **magnitud** escalar o vectorial toma un valor **diferente** según el tiempo o la posición, de manera **continua**.

Un **campo de fuerzas** estacionario es aquél en que en cada punto de la región actúa una fuerza (vector).

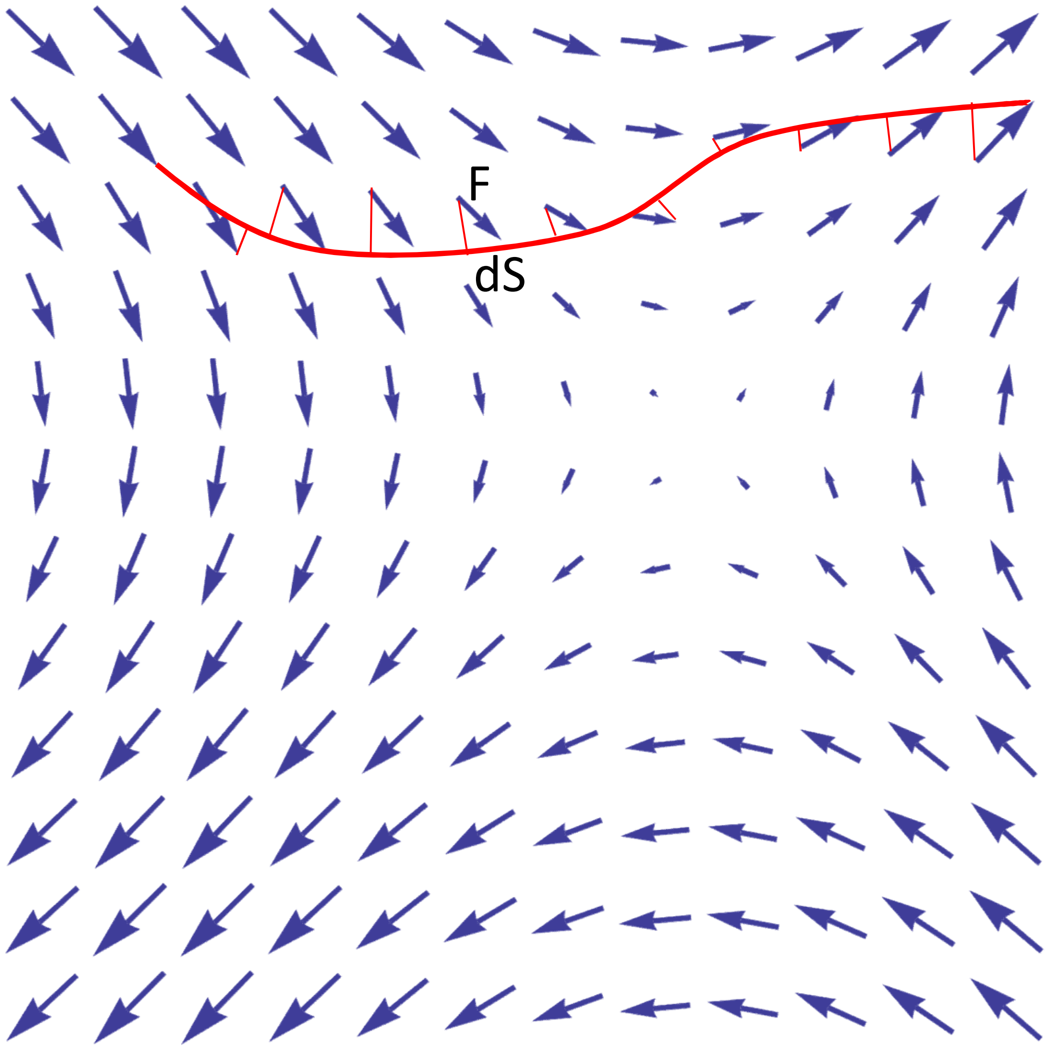


CONCEPTO DE TRABAJO

Al realizar una trayectoria por un campo de fuerzas, se produce un **trabajo** igual a la suma (integral) del producto de cada **fuerza proyectada sobre la distancia recorrida**:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

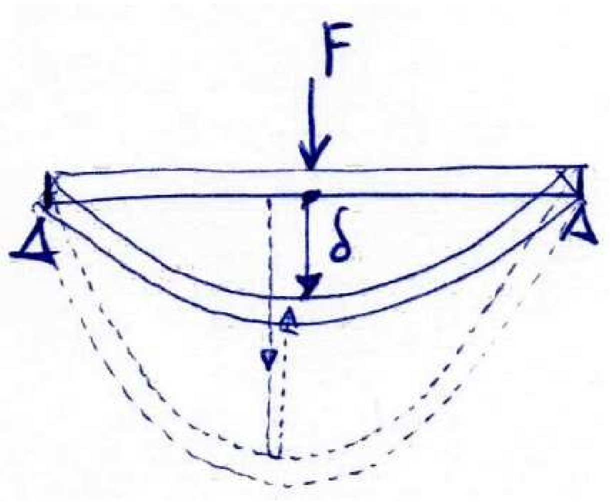
$$W = \oint \vec{F} d\vec{S}$$

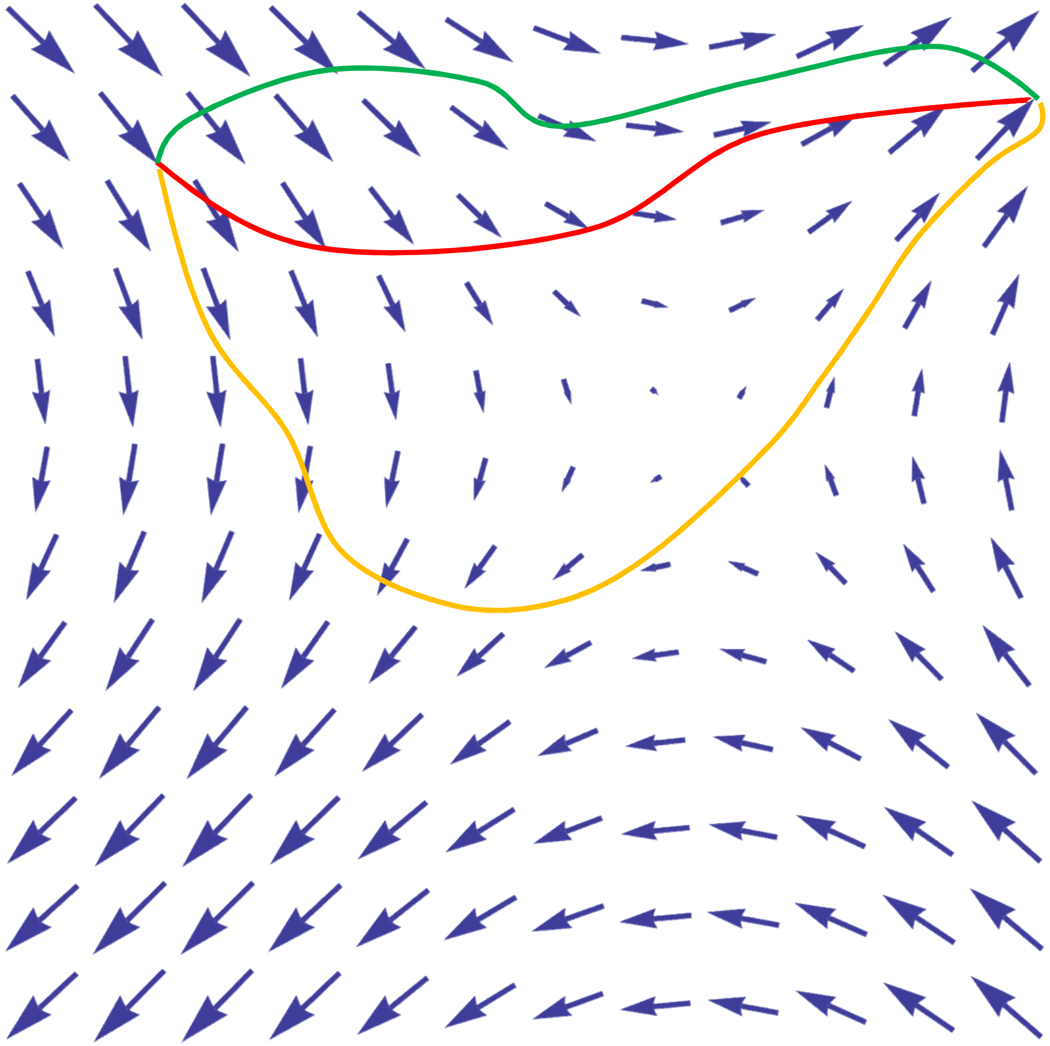


Ventaja: se manejan **escalares** (números), no vectores

CONCEPTO DE TRABAJO

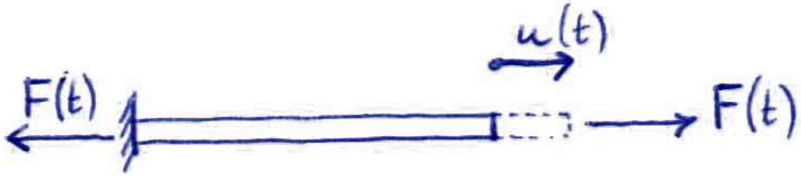
Trabajamos con **campos estacionarios**, donde el trabajo realizado sólo depende de la **posición inicial y final**, nunca de la trayectoria.





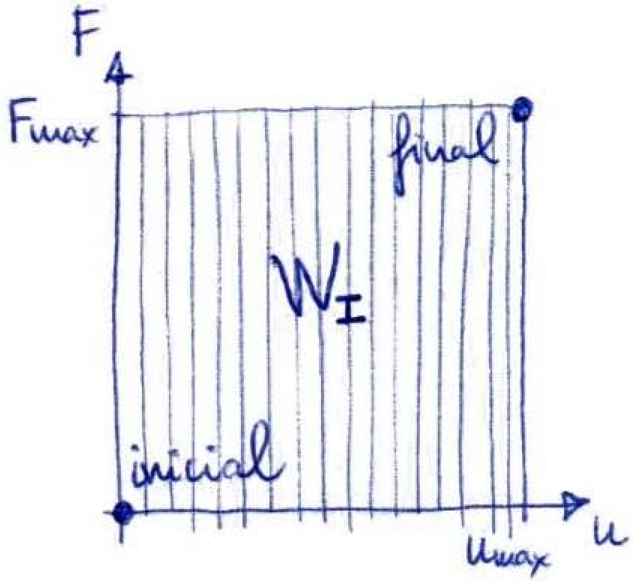
TRABAJO INSTANTÁNEO vs TRABAJO DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA

Por simplicidad, tomamos el caso de una ménsula horizontal sometida a una fuerza horizontal incremental con el tiempo, F(t), que produce desplazamientos sólo horizontales, u(t); por tanto, se puede eliminar la condición vectorial de ambas variables y trabajar con sus módulos.



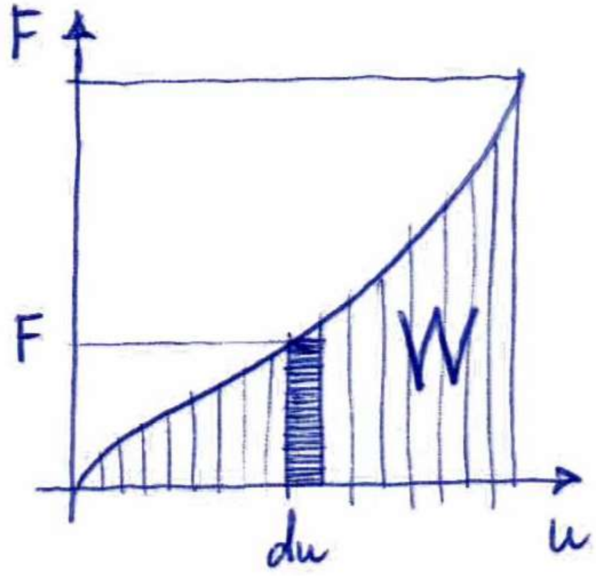
El **trabajo instantáneo** (W_I) es el que se ejercería si la pieza alcanzara su deformación máxima "de golpe", sin pasar por los estadios intermedios:

$$W_I = F_{\max} \cdot u_{\max}$$



TRABAJO INSTANTÁNEO vs TRABAJO DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA

Sin embargo, este trabajo nunca se produce en la realidad. Como la fuerza se aplica progresivamente, fuerza y desplazamiento recorren todos los valores entre 0 y los máximos.



En un instante intermedio de la carga, cada pequeño incremento desplazamiento (du) se produce a una fuerza constante F, generándose un diferencial de trabajo dW:

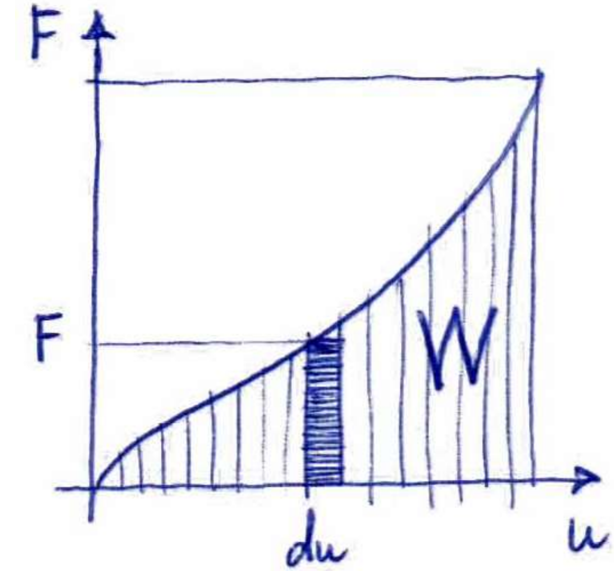
$$dW = F \cdot du$$

Luego el trabajo total generado (**trabajo de deformación elástica**) coincide con el área bajo la curva de carga F(u):

$$W = \int_0^{u_{\max}} F du$$

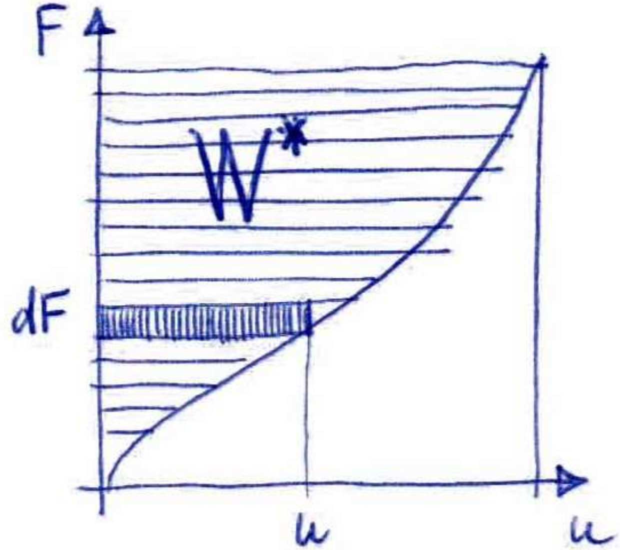
TRABAJO INSTANTÁNEO vs TRABAJO DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA

Análogamente, desde el punto de vista de las fuerzas en lugar del de los desplazamientos, se define el **trabajo complementario de deformación elástica** como el área bajo la curva de desplazamientos u(F):



$$dW^* = u \cdot dF$$

$$W^* = \int_0^{F_{\max}} u dF$$



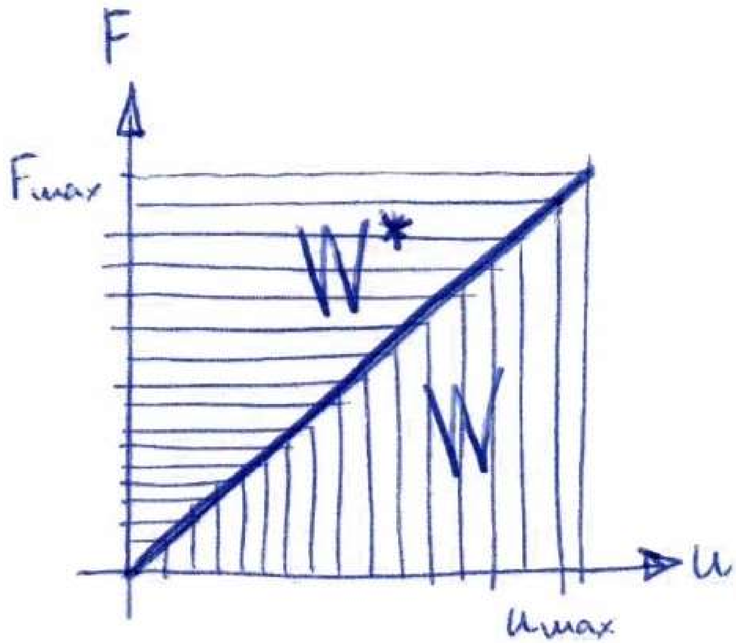
Por tanto, el trabajo instantáneo se puede descomponer como la suma de trabajo y trabajo complementario:

$$W_I = W + W^*$$

TRABAJO INSTANTÁNEO vs TRABAJO DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA

Asumiendo que el material es elástico y lineal, se tiene que el trabajo y el trabajo complementario son iguales a la mitad del instantáneo:

$$W = W^* = \frac{W_I}{2}$$



ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA

En los procesos de carga habituales:

- La velocidad de carga es muy lenta (cuasiestática);
- No se desprende calor;
- No existe rozamiento

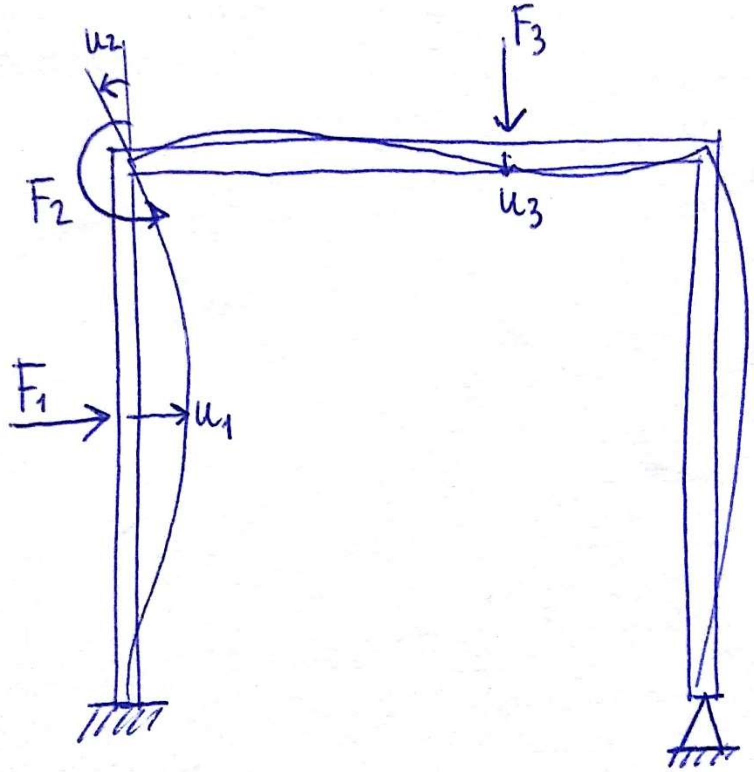
Luego todo el trabajo de deformación elástica se almacena dentro del sólido, en cada instante de tiempo t, en forma de **energía de deformación elástica**, también llamado **trabajo interno** porque se expresa en función de las solicitaciones y deformaciones (internas) que provocan las fuerzas y movimientos (externos).

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dU}{dt} \Rightarrow W = U$$

TEOREMA DE CLAPEYRON

Por ser el material elástico y lineal, el valor de U coincide con la mitad del trabajo total instantáneo (expresión conocida como **Teorema de Clapeyron**), donde F_1 … F_n son los módulos de las fuerzas externas sobre la estructura y u_1 … u_n los módulos de los desplazamientos experimentados por los puntos de aplicación de dichas fuerzas en su misma dirección.

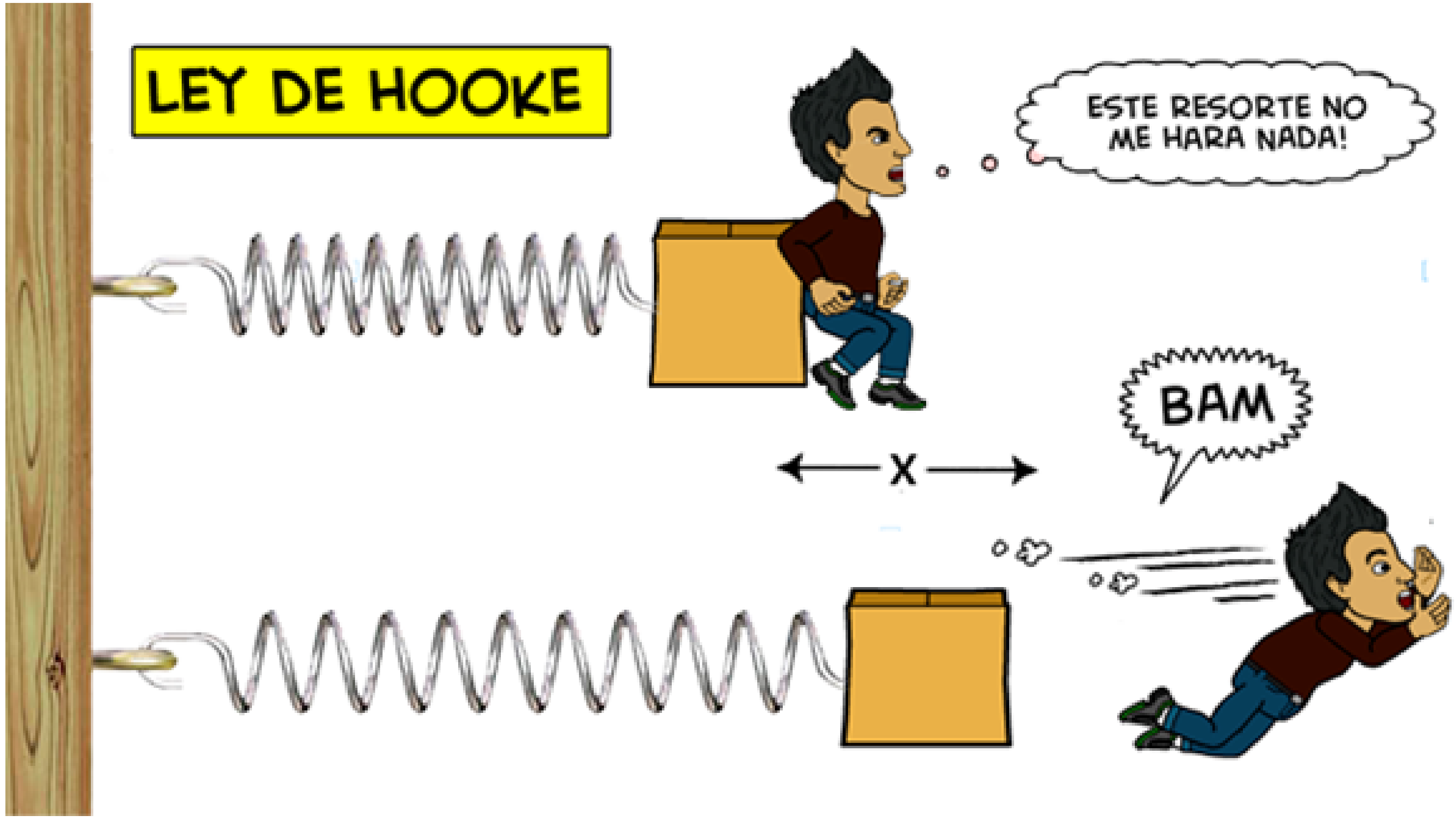
$$\boxed{U = \frac{1}{2} W_I = \frac{1}{2}\left(F_1 \cdot u_1 + \ldots + F_n \cdot u_n\right)}$$



Nomenclatura:
F_i: fuerzas generalizadas
u_i: desplazamientos generalizados

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA

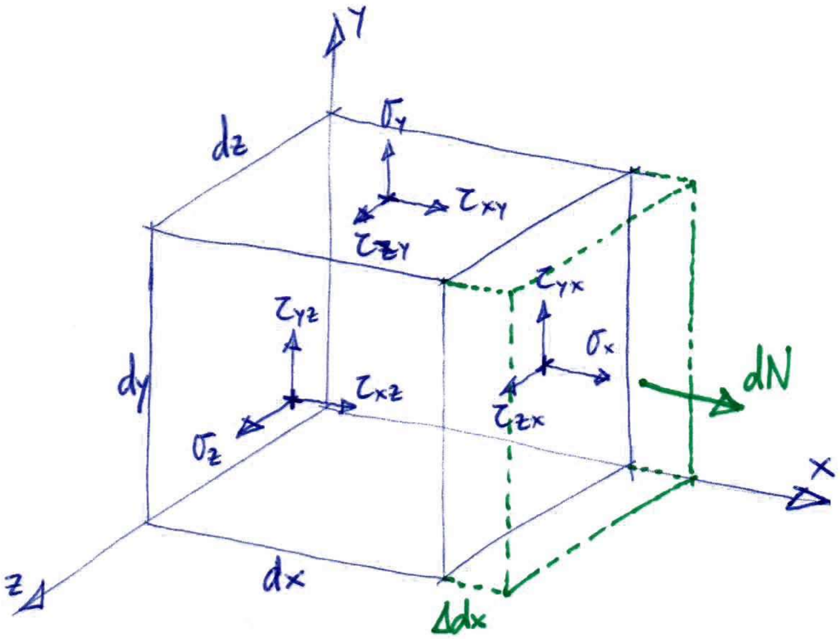
Se puede interpretar el proceso como si al ejercer trabajo sobre la estructura, ésta fuera capaz de **almacenar energía a través de su deformación**, de tal manera que si cesa la acción esa energía puede ser transformada en otra fuente (por ejemplo velocidad)

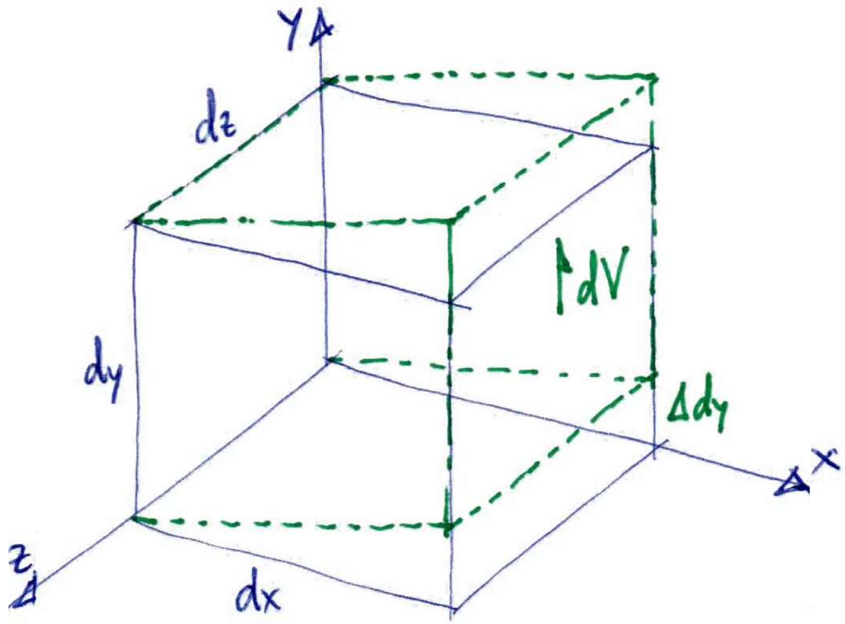


DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

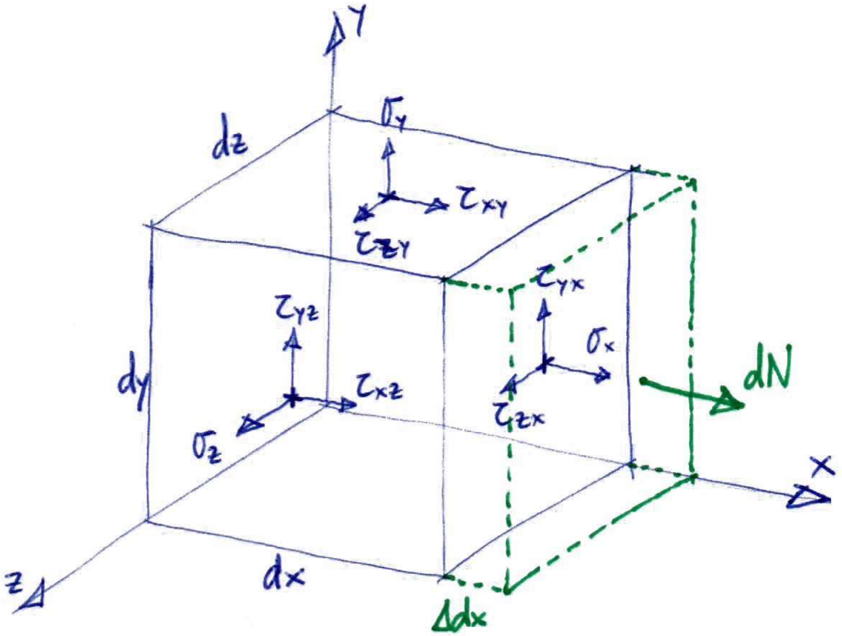
Si se desciende a la escala micro y se toma cada punto de la estructura, se puede dividir la energía de deformación de la pieza en diferenciales de energía, obteniéndose una **densidad de energía** (U_0 = energía/volumen).

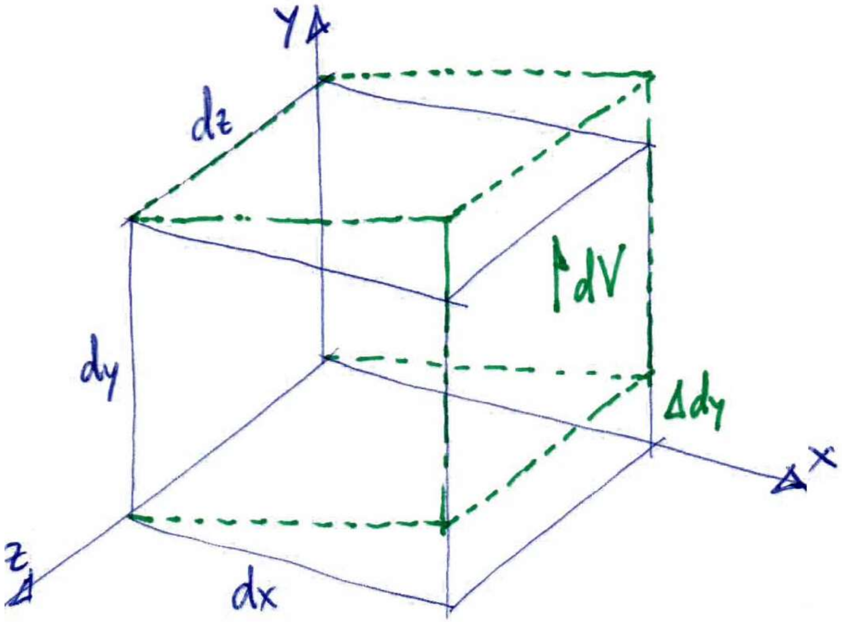
A escala micro, las fuerzas que desarrollan trabajo son las **tensiones** normales (σ) y tangenciales (τ), y los desplazamientos son las **deformaciones** longitudinales (ε) y transversales (γ, conocido como distorsión angular)

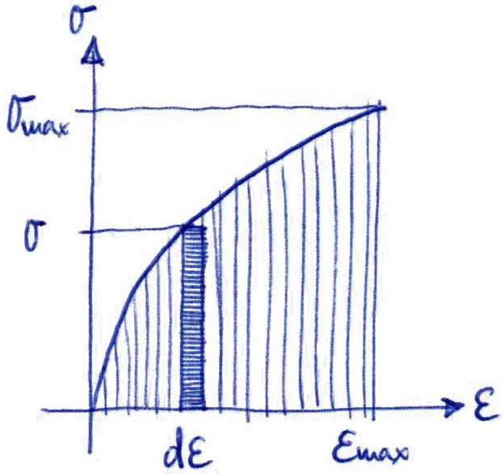


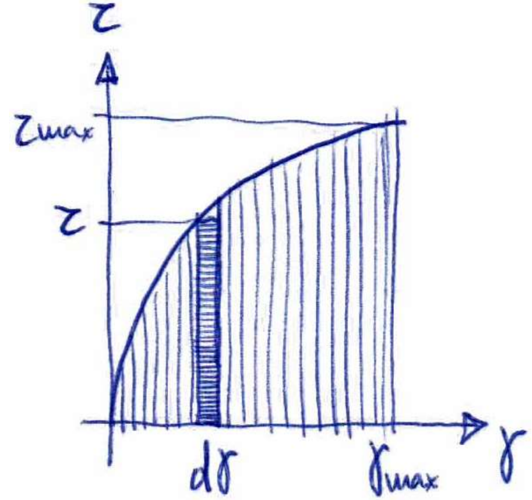


DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN



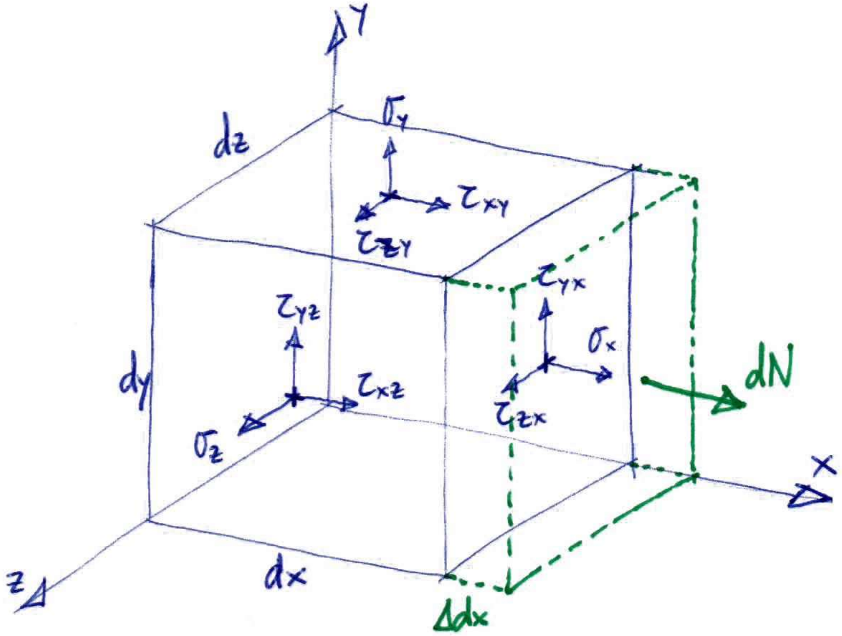






DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

El diferencial de axil sobre el punto es igual a la tensión por el área:



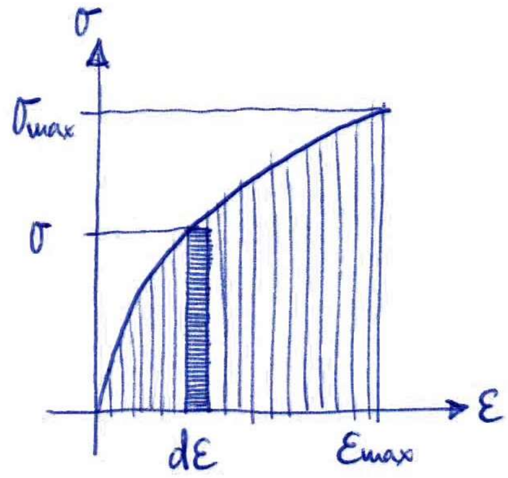
$$dN = \sigma_x dA = \sigma_x dzdy$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$$

Luego el diferencial de trabajo instantáneo sobre el punto es:

$$dW_I = dN \cdot \Delta dx = \sigma_x \varepsilon_x dxdydz = \sigma_x \varepsilon_x dV$$

El diferencial de trabajo real, que por el principio de conservación es igual a la densidad de energía de deformación, será la mitad del instantáneo para el caso lineal:



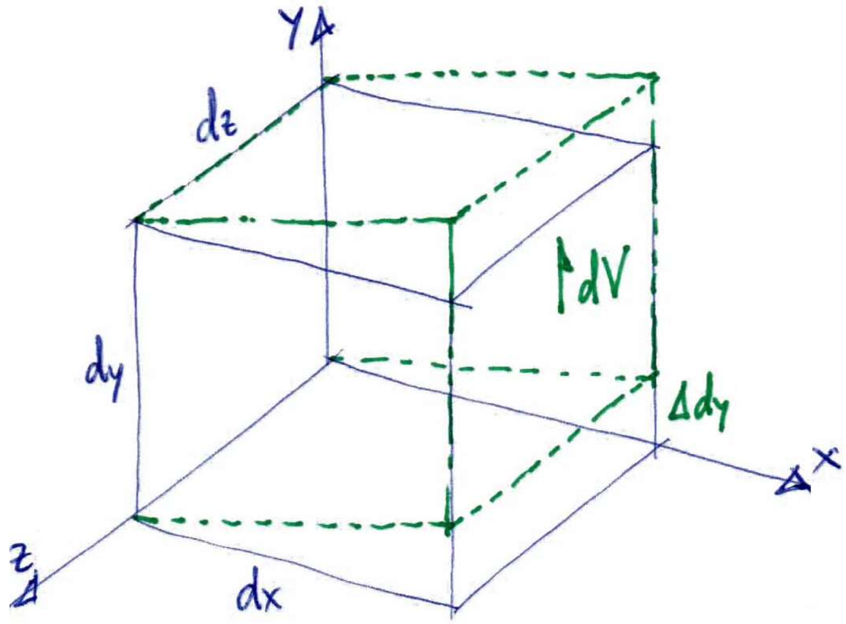
$$dW = U_0 = \frac{dW_I}{2} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x dV$$

DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Análogamente, el diferencial de cortante es igual a la tensión por el área:

$$dV = \tau_{xy} dA = \tau_{xy} dz dy$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta dy}{dy}$$

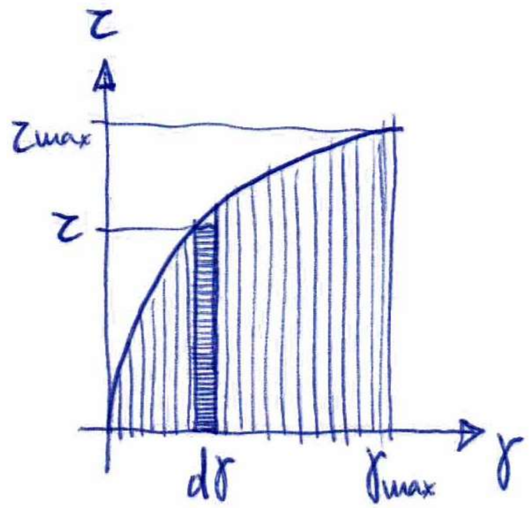


Luego el diferencial de trabajo instantáneo sobre el punto es:

$$dW_I = dV \cdot \Delta dy = \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz = \tau_{xy} \gamma_{xy} dV$$

El diferencial de trabajo real, que por el principio de conservación es igual a la densidad de energía de deformación, será la mitad del instantáneo para el caso lineal:

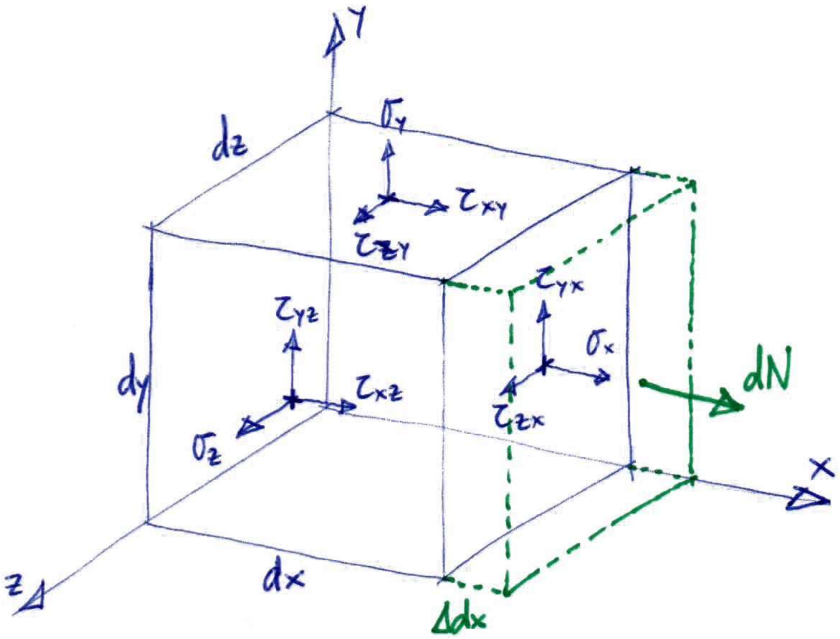
$$dW = U_0 = \frac{dW_I}{2} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV$$

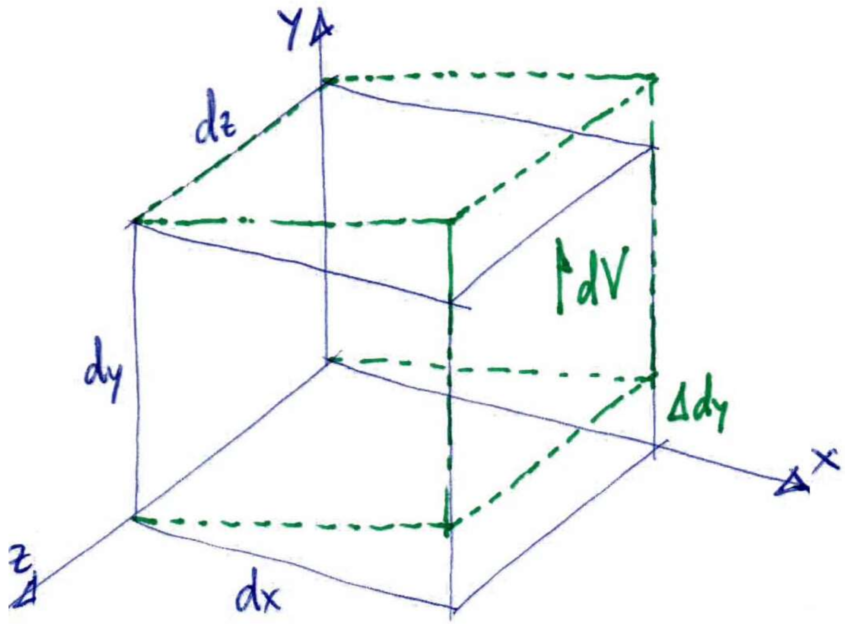


DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Sumando las 6 posibles contribuciones a la densidad de energía (un alargamiento y una distorsión en cada una de las 3 direcciones), se tiene la expresión general de la **densidad de energía de deformación**:

$$U_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right)dV$$





ENERGÍA DE DEFORMACIÓN TOTAL

Sumando (integrando) la densidad de energía para todo el volumen de la estructura, se tiene la **energía de deformación (U)**:

$$U = \int_V U_0 = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right)dV$$

Pero tensiones y deformaciones están relacionadas por constantes:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\tau = G\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\tau}{G}$$

Luego U se puede expresar sólo en función de las tensiones y las propiedades del material:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\frac{{\sigma_x}^2 + {\sigma_y}^2 + {\sigma_z}^2}{E} + \frac{{\tau_{xy}}^2 + {\tau_{xz}}^2 + {\tau_{yz}}^2}{G} \right) dV$$

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN BARRAS RECTAS EN PÓRTICOS PLANOS

En barras rectas, podemos descomponer cada diferencial de volumen en área por longitud:

$$dV = dxdydz = dxdA$$

Además, por pertenecer a pórticos planos, las tensiones con subíndice "z" son nulas; y por ser de tipo barra, las tensiones normales verticales también son nulas. Por tanto, la expresión de la energía de deformación sólo depende de la tensión normal ($\sigma_x = \sigma$) y la tangencial ($\tau_{xy} = \tau$):

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L dx \int_A \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) dA$$

Esta expresión genérica se puede particularizar para cada una de las 3 solicitaciones en el plano (N, V, M), sin más que sustituir las tensiones por su expresión correspondiente en función de las solicitaciones.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L dx \int_A \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) dA$$

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN POR AXIL

El axil N provoca sólo tensiones normales, cuya relación es:

$$\sigma = \frac{N(x)}{A}$$

Luego la energía de deformación por axil (U_N) para un axil variable a lo largo de la longitud de la barra es:

$$U_N = \frac{1}{2}\int_0^L dx \int_A \frac{\sigma^2}{E} dA = \frac{1}{2}\int_0^L dx \int_A \frac{N(x)^2}{A^2 E} dA = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N(x)^2}{A^2 E} dx \int_A dA =$$

$$= \int_0^L \frac{N(x)^2}{2EA} dx$$

Para N constante en toda la barra:

$$U_N = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}\int_0^L dx = \frac{N^2 L}{2EA}$$

$$\boxed{U_N = \int_0^L \frac{N(x)^2}{2EA} dx}$$

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN POR CORTANTE

El cortante V provoca sólo tensiones tangenciales (Fórmula de Collignon):

$$\tau = \frac{V(x)S(y)}{bI}$$

Luego la energía de deformación por cortante (U_V) para un cortante variable a lo largo de la longitud de la barra es:

$$U_V = \frac{1}{2}\int_0^L dx \int_A \frac{\tau^2}{G} dA = \frac{1}{2G}\int_0^L dx \int_A \frac{V(x)^2 S(y)^2}{b^2 I^2} dydz =$$

$$\frac{1}{2GI^2}\int_0^L V(x)^2 dx \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} S(y)^2 dy \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{dz}{b^2} = \frac{1}{2GI^2}\int_0^L V(x)^2 dx \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{S(y)^2}{b} dy =$$

$$= \frac{1}{2GI^2}\int_0^L V(x)^2 dx \frac{I^2}{A} = \int_0^L \frac{V(x)^2}{2GA} dx$$

$$\boxed{U_V = \int_0^L \frac{V(x)^2}{2GA} dx}$$

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN POR MOMENTO

El momento M provoca sólo tensiones normales (Ley de Navier):

$$\sigma = -\frac{M(x)}{I} y$$

Luego la energía de deformación por momento (U_M) para un momento variable a lo largo de la longitud de la barra es:

$$U_M = \frac{1}{2}\int_0^L dx \int_A \frac{\sigma^2}{E} dA = \frac{1}{2}\int_0^L dx \int_A \frac{M(x)^2}{EI^2} y^2 dA =$$

$$= \frac{1}{2EI^2}\int_0^L M(x)^2 dx \int_A y^2 dA = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx$$

$$\boxed{U_M = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx}$$

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN TOTAL

Sumando las contribuciones de N, V y M:

$$\boxed{U = U_N + U_V + U_M = \int_0^L \frac{N(x)^2}{2EA}dx + \int_0^L \frac{V(x)^2}{2GA}dx + \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI}dx}$$

Los 3 términos son análogos: integrales a lo largo de la barra de la **solicitación al cuadrado partido por el doble de la rigidez de la sección**.

Simplificaciones:

- U_V despreciable frente a U_M en vigas de canto usual
- U_N despreciable frente a U_M

TEOREMAS DE CASTIGLIANO

Los teoremas de Castigliano son dos elegantes resultados que **relacionan la energía de deformación con las fuerzas y desplazamientos generalizados**, permitiendo calcular reacciones y, lo que es más útil, movimientos desconocidos de la estructura.

1er Teorema de Castigliano → **Fuerzas** desconocidas

2º Teorema de Castigliano → **Desplazamientos** desconocidos

RESULTADO PREVIO: CONCEPTO DE VARIACIÓN

Para funciones de una variable, la derivación establece una relación entre la variación de una función y su variable (despreciando las derivadas sucesivas de la expansión en Serie de Taylor):

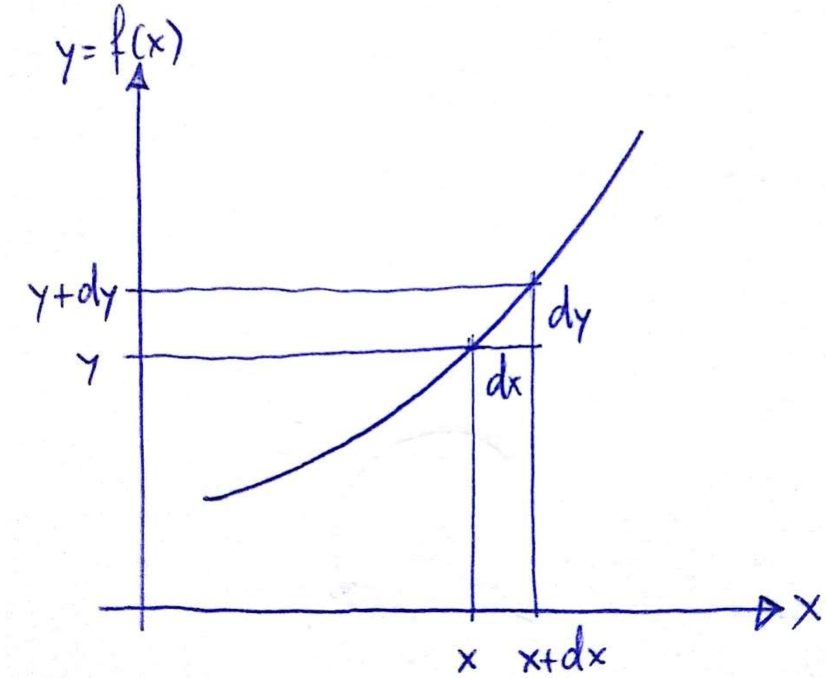
$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$$

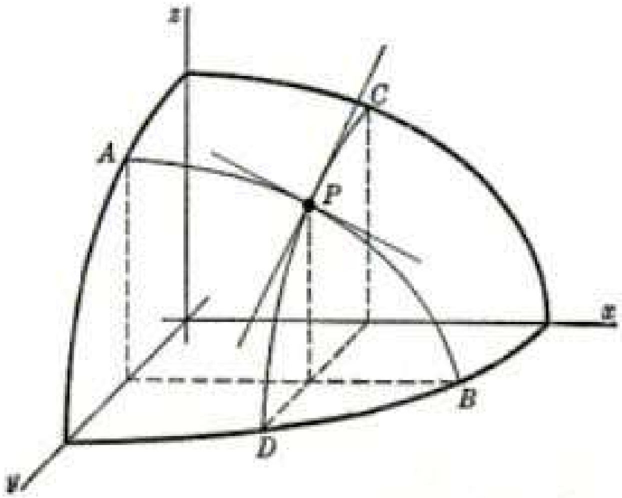
O equivalentemente:

$$y + dy = y + \frac{dy}{dx}dx \Rightarrow dy = \frac{dy}{dx}dx$$

Para funciones de varias variables, el resultado es análogo para cada derivada parcial:

$$z + dz = z + \frac{\partial z}{\partial x}dx \Rightarrow dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx$$





1ER TEOREMA DE CASTIGLIANO

Por la fórmula de Clapeyron:

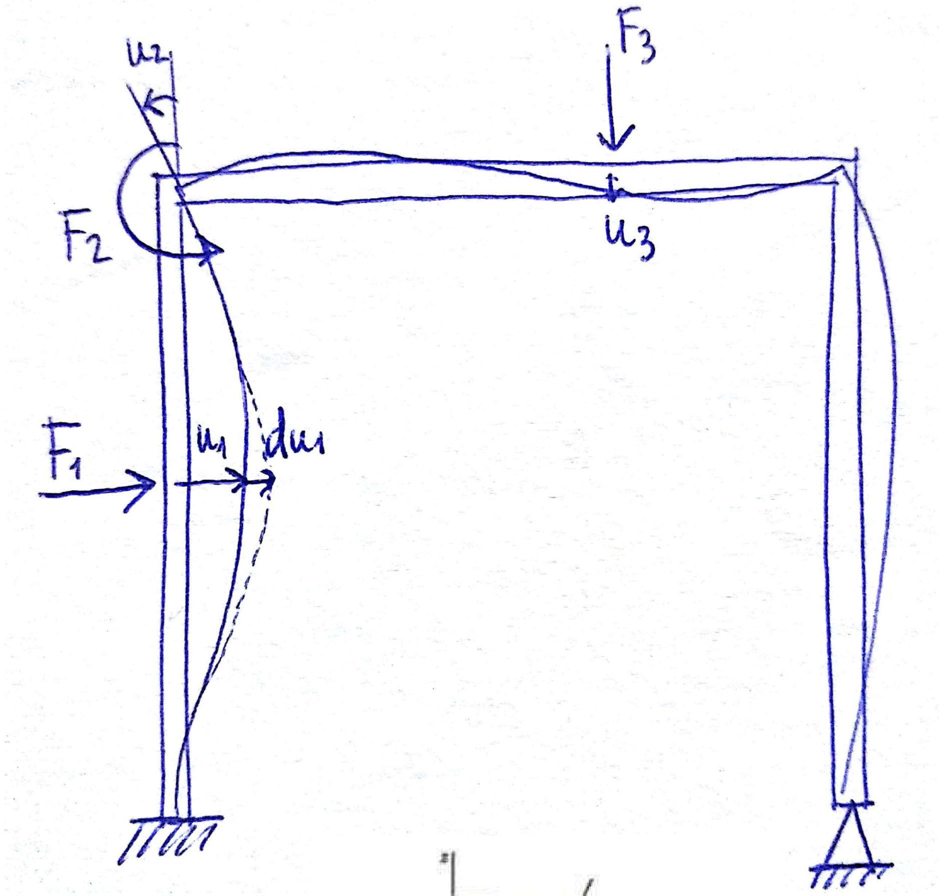
$$U = \frac{1}{2}\left(F_1 \cdot u_1 + \ldots + F_n \cdot u_n\right)$$

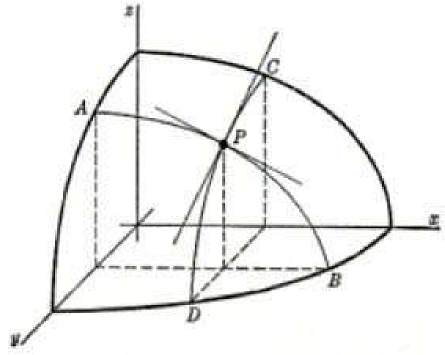
Si uno de los desplazamientos generalizados se aumenta una cantidad infinitesimal, el incremento de trabajo externo es igual a:

$$dW = F_i \cdot du_i$$

Por otro lado, aplicando el concepto de variación, se tiene que el incremento de la energía de deformación (expresada en función de los desplazamientos) al variar u_i es:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial u_i} du_i$$



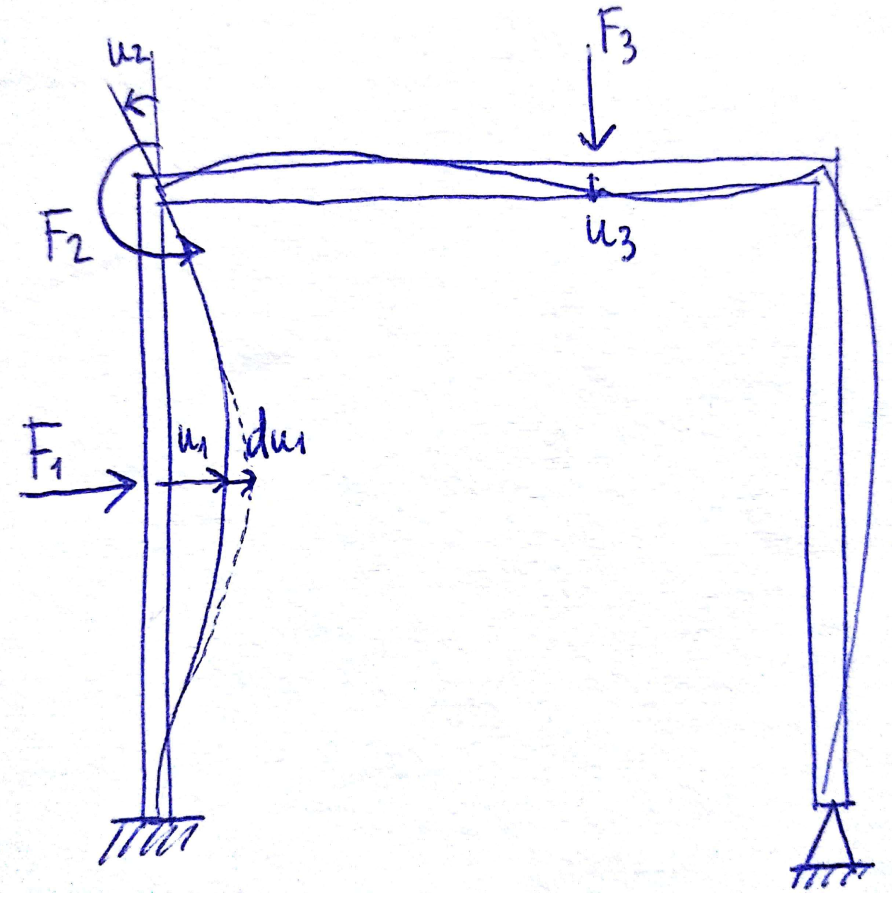


1ER TEOREMA DE CASTIGLIANO

Igualando trabajo y energía:

$$dU = dW \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial u_i} du_i = F_i \cdot du_i \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial u_i} = F_i}$$

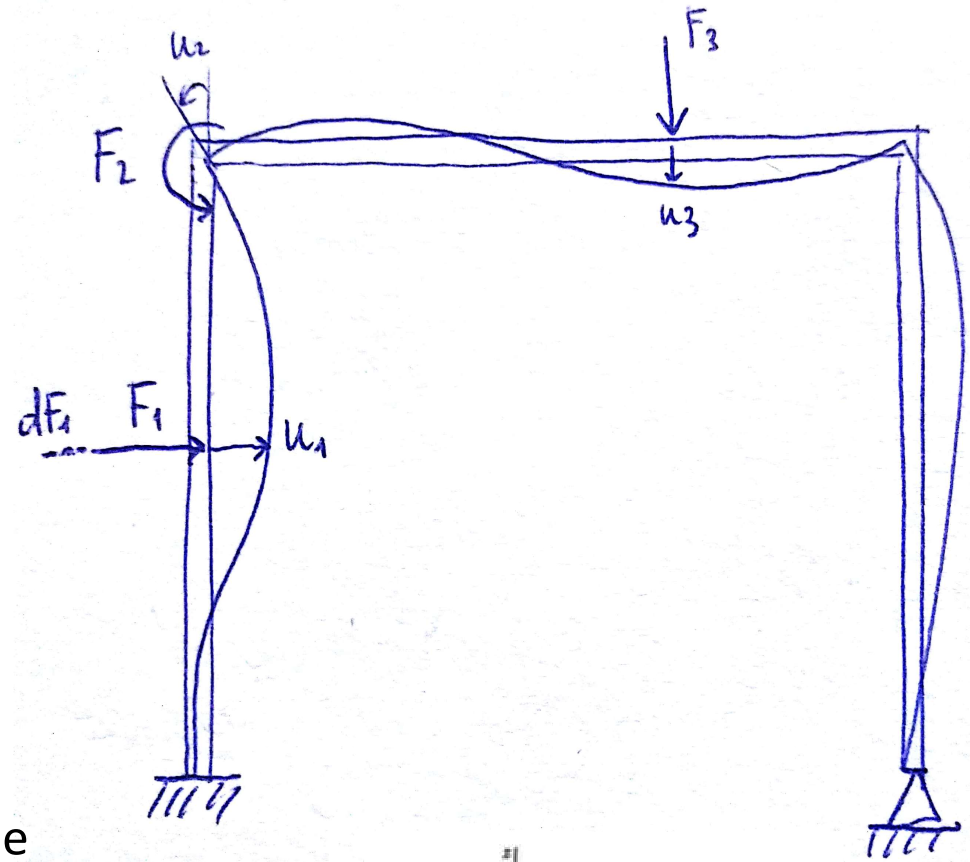


*"La **variación de la energía** de deformación **respecto de un solo desplazamiento** generalizado **es igual a la fuerza** generalizada asociada a dicho desplazamiento"*

Este resultado suele ser de baja utilidad, puesto que las fuerzas suelen ser conocidas.

2º TEOREMA DE CASTIGLIANO

El 2º Teorema se plantea desde el punto de vista de las fuerzas (trabajo complementario) en lugar de los desplazamientos.

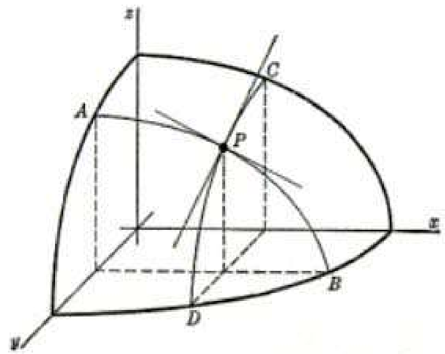


Si una de las fuerzas generalizadas se aumenta una cantidad infinitesimal, el incremento de trabajo externo es igual a:

$$dW = u_i \cdot dF_i$$

El incremento de la energía de deformación (expresada en función de las fuerzas) al variar u_i es:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i$$

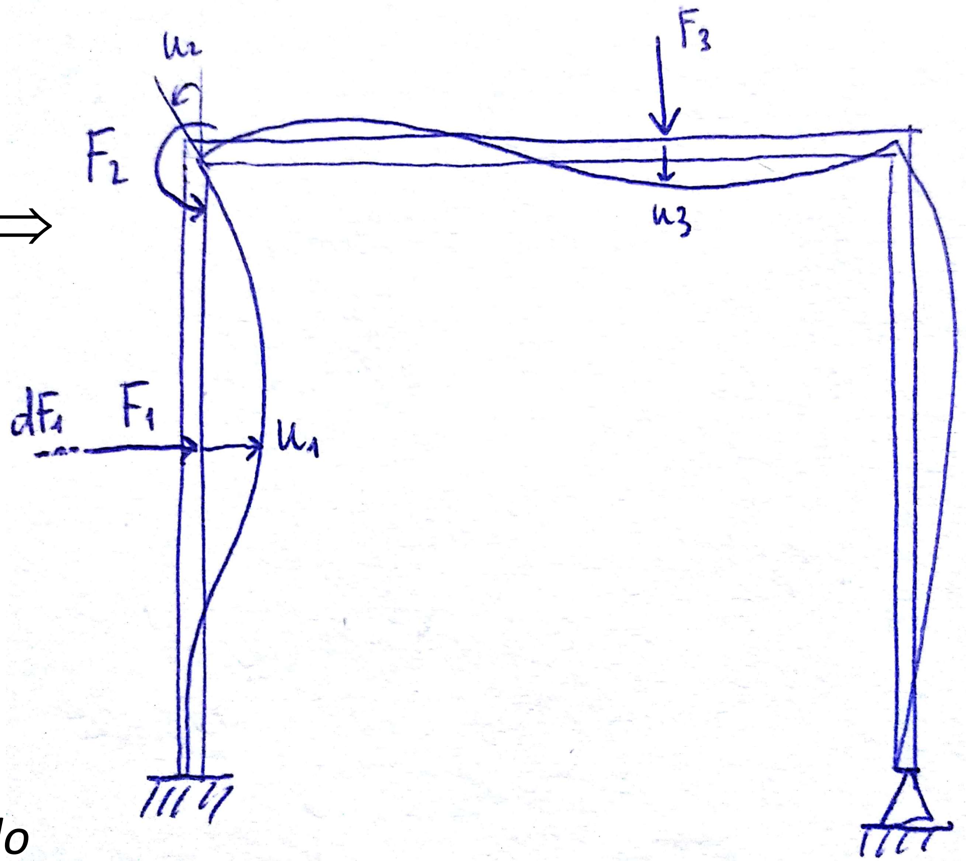


2º TEOREMA DE CASTIGLIANO

Igualando trabajo y energía:

$$dU = dW \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i = u_i \cdot dF_i \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial F_i} = u_i}$$



*"La **variación de la energía** de deformación **respecto de una sola fuerza** generalizada **es igual al desplazamiento** generalizado asociado a dicha fuerza"*

Este resultado es de vital importancia, pues **permite calcular las deformaciones** a partir de una función escalar como es la energía.

2º TEOREMA DE CASTIGLIANO

En estructuras usuales a flexión, donde $U \approx U_M$, es recomendable resolver la operación derivando antes de desarrollar la expresión de U (utilizando la "Regla de la Cadena":

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i}\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^L \frac{\partial M^2}{\partial F_i}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^L 2M\frac{\partial M}{\partial F_i}dx =$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^L M\frac{\partial M}{\partial F_i}dx$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial u_i} = F_i}$$

1

*"La **variación de la energía** de deformación **respecto de un solo desplazamiento** generalizado **es igual a la fuerza** generalizada asociada a dicho desplazamiento"*

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial F_i} = u_i}$$

2

*"La **variación de la energía** de deformación **respecto de una sola fuerza** generalizada **es igual al desplazamiento** generalizado asociado a dicha fuerza"*


PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES
IMAGINARIO
REAL

PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

El Principio de los Trabajos Virtuales (**PTV**) es uno de los pilares de la mecánica clásica. Fue intuido por los científicos de la Grecia Antigua, aunque su sistematización se debe a Johann Bernoulli. Se basa en el Principio de D'Alembert y en el Principio de Mínima Acción.

El PTV se establece generalmente a dos niveles:

- **Punto** material o sólido rígido
- **Sólido deformable**

A partir del PTV se establecen algunos procedimientos para calcular movimientos de estructuras y reacciones en hiperestáticas, como el **Método de la Carga Unidad**

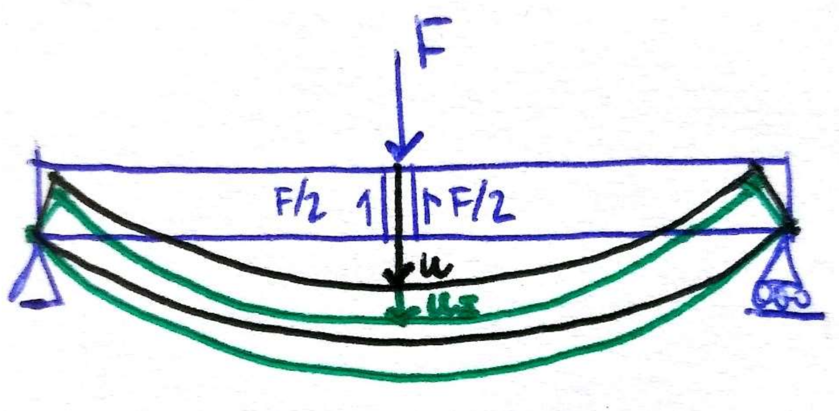
Johann Bernoulli (1667 – 1748)

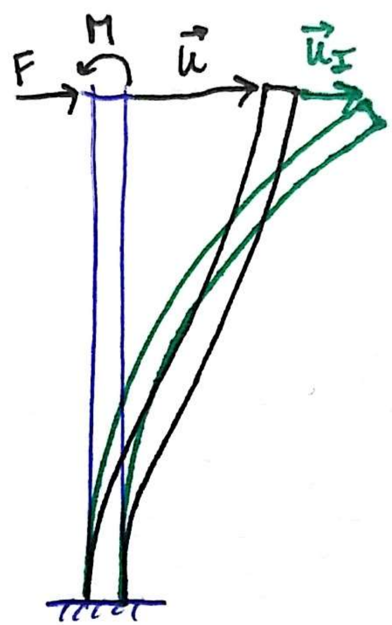
MOVIMIENTO VIRTUAL

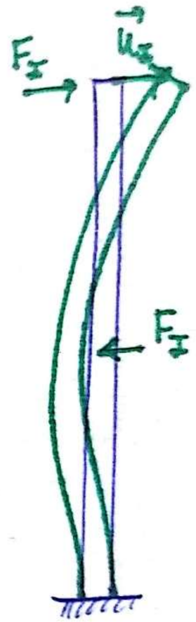
Se denomina “**movimiento virtual**” (subíndice “I”, imaginario) sobre un sólido a un movimiento o conjunto de movimientos (desplazamientos o giros) que no se corresponden con el campo de fuerzas al que está sometido el sólido, es decir, que no son reales. El movimiento virtual está **desvinculado de las fuerzas y desplazamientos reales**.

Se pueden interpretar de dos formas, según convenga:

- Como incrementos de los desplazamientos reales (debidos a las fuerzas)
- Como movimientos pertenecientes a otro sistema de cargas distinto.





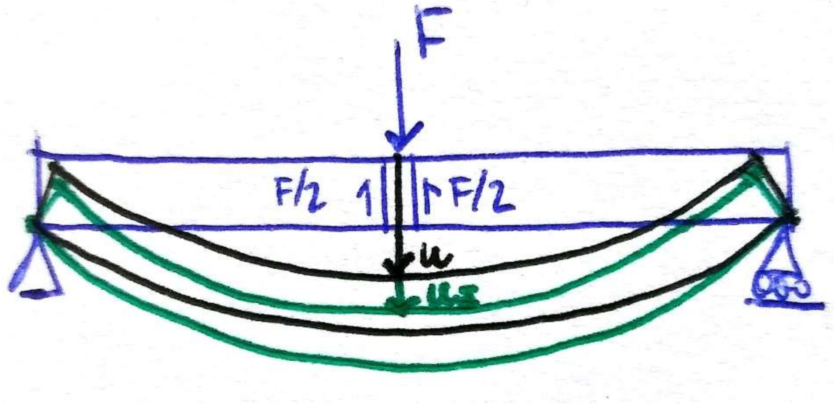


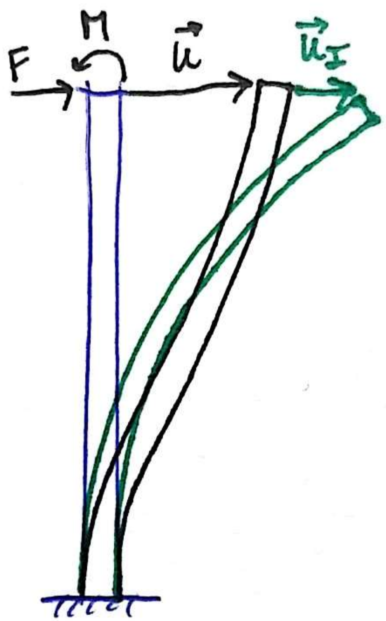
MOVIMIENTO VIRTUAL

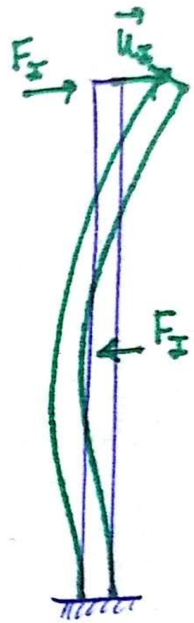
Los movimientos virtuales deben cumplir:

- Ser **instantáneos**: no existe una trayectoria
- Ser **compatibles** con las condiciones de contorno
- No ser demasiado grandes para no vulnerar el principio de **pequeñas** deformaciones

Los movimientos virtuales se utilizan únicamente para computar cuál es el **trabajo que las fuerzas reales** efectúan cuando se mueven a lo largo de dicho **movimiento virtual**.





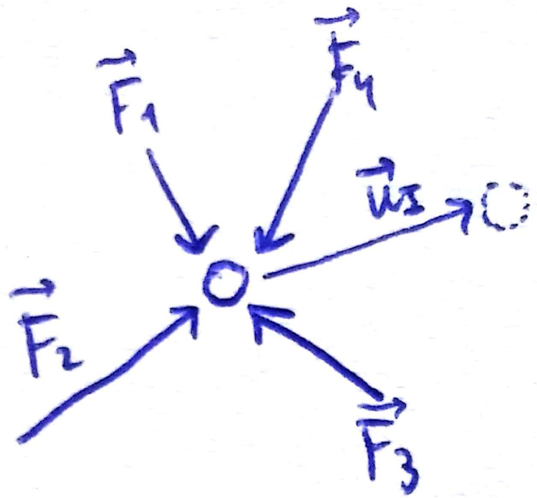


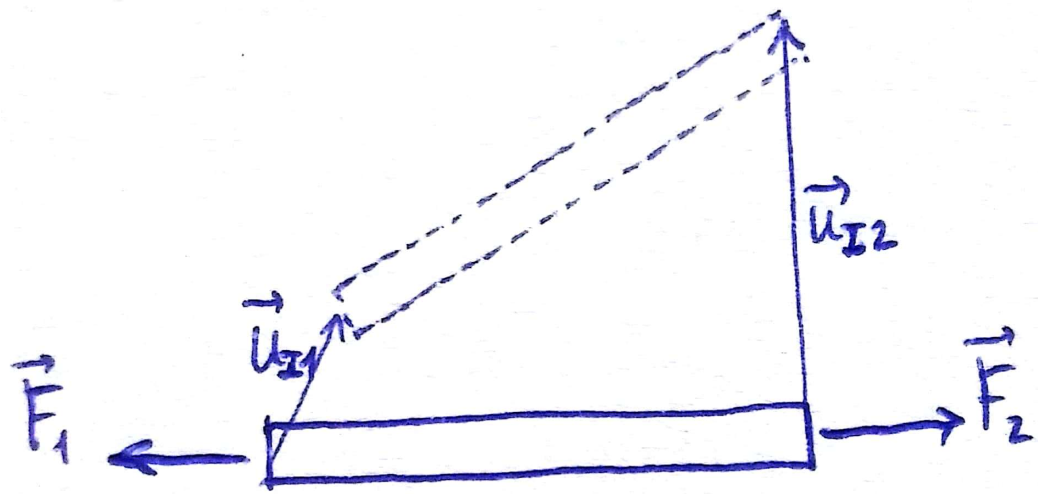
PTV EN PUNTO O SÓLIDO RÍGIDO

Si se aplica un movimiento virtual sobre un punto cuyas fuerzas están en equilibrio, el trabajo realizado es nulo:

$$W = \sum_i \left(\overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{u_I} \right) = \overrightarrow{u_I} \sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{u_I} \cdot \vec{0} = 0$$

De forma análoga se demuestra el PTV sobre el sólido rígido, cuyo movimiento se puede descomponer en un desplazamiento más un giro

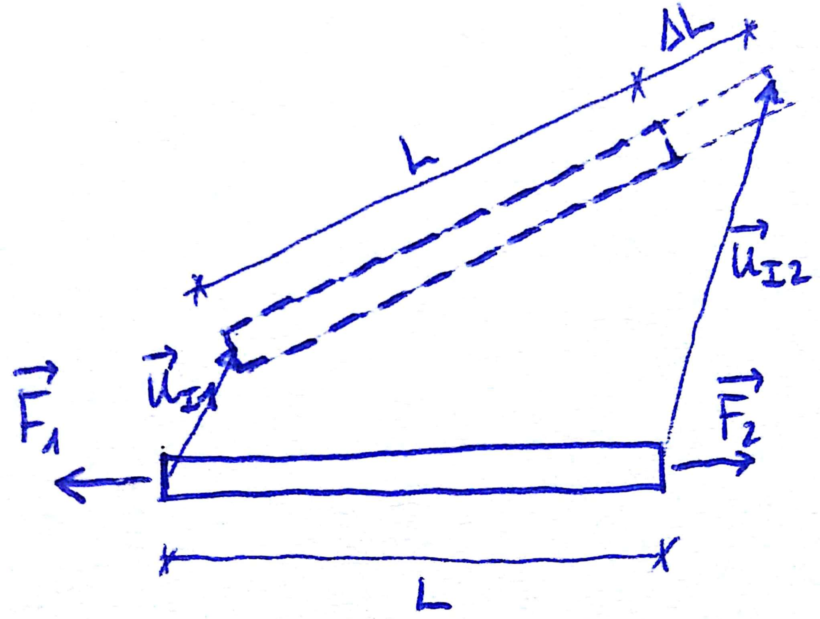




PTV EN SÓLIDO DEFORMABLE

Los movimientos virtuales sobre un sólido deformable se pueden descomponer como **movimientos de sólido rígido más deformaciones** (que nada tienen que ver con las fuerzas y solicitaciones reales, que simplemente desplazan sus puntos de aplicación).

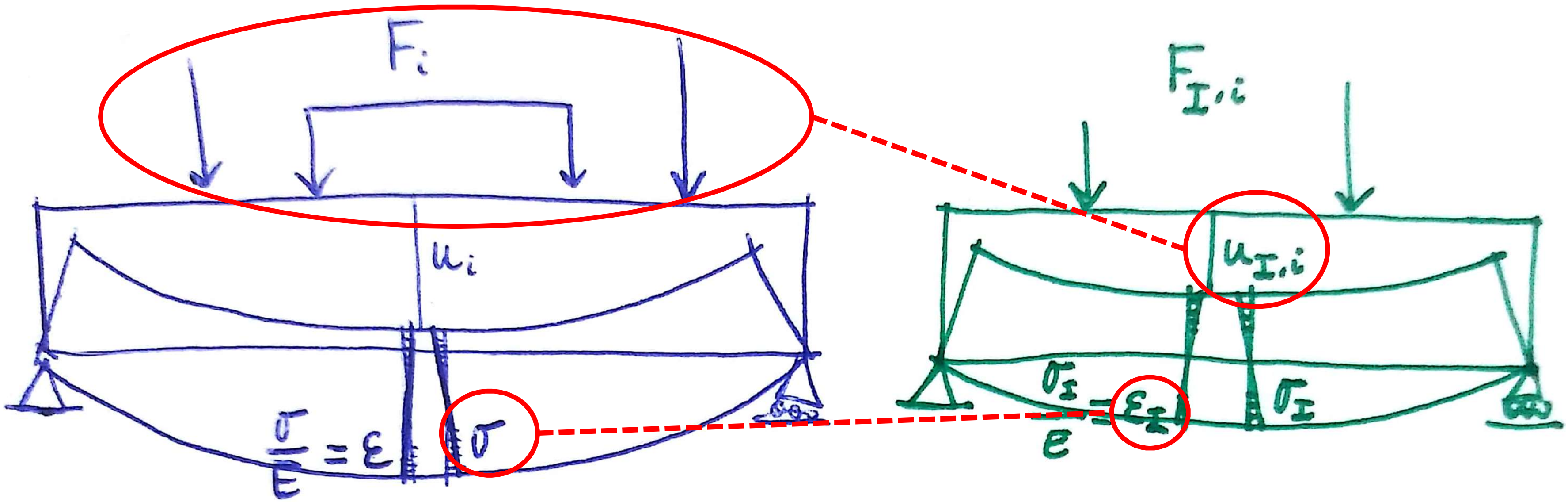
Aplicando el Teorema de Clapeyron (y teniendo en cuenta que tanto trabajo como energía son instantáneas y no se reducen a la mitad), se tiene que el **trabajo virtual de las fuerzas exteriores es igual a la energía de deformación virtual**:



$$W = U \Rightarrow \sum_i \left(\overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{u_{I,i}} \right) = \int_V \left(\sigma \cdot \varepsilon_I + \tau \cdot \gamma_I \right) dV$$

PTV EN SÓLIDO DEFORMABLE

En un sentido amplio, se puede plantear el problema como **dos sistemas de fuerzas-tensiones y desplazamientos-deformaciones independientes, el real e imaginario**, desvinculadas entre sí y que sólo comparten las condiciones de contorno:



$$W = U \Rightarrow \sum_i \left(\overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{u_{I,i}} \right) = \int_V \left(\sigma \cdot \varepsilon_I + \tau \cdot \gamma_I \right) dV$$

PTV EN SÓLIDO DEFORMABLE

Sustituyendo las deformaciones virtuales por su expresión correspondiente en función de las tensiones (virtuales) que las producirían:

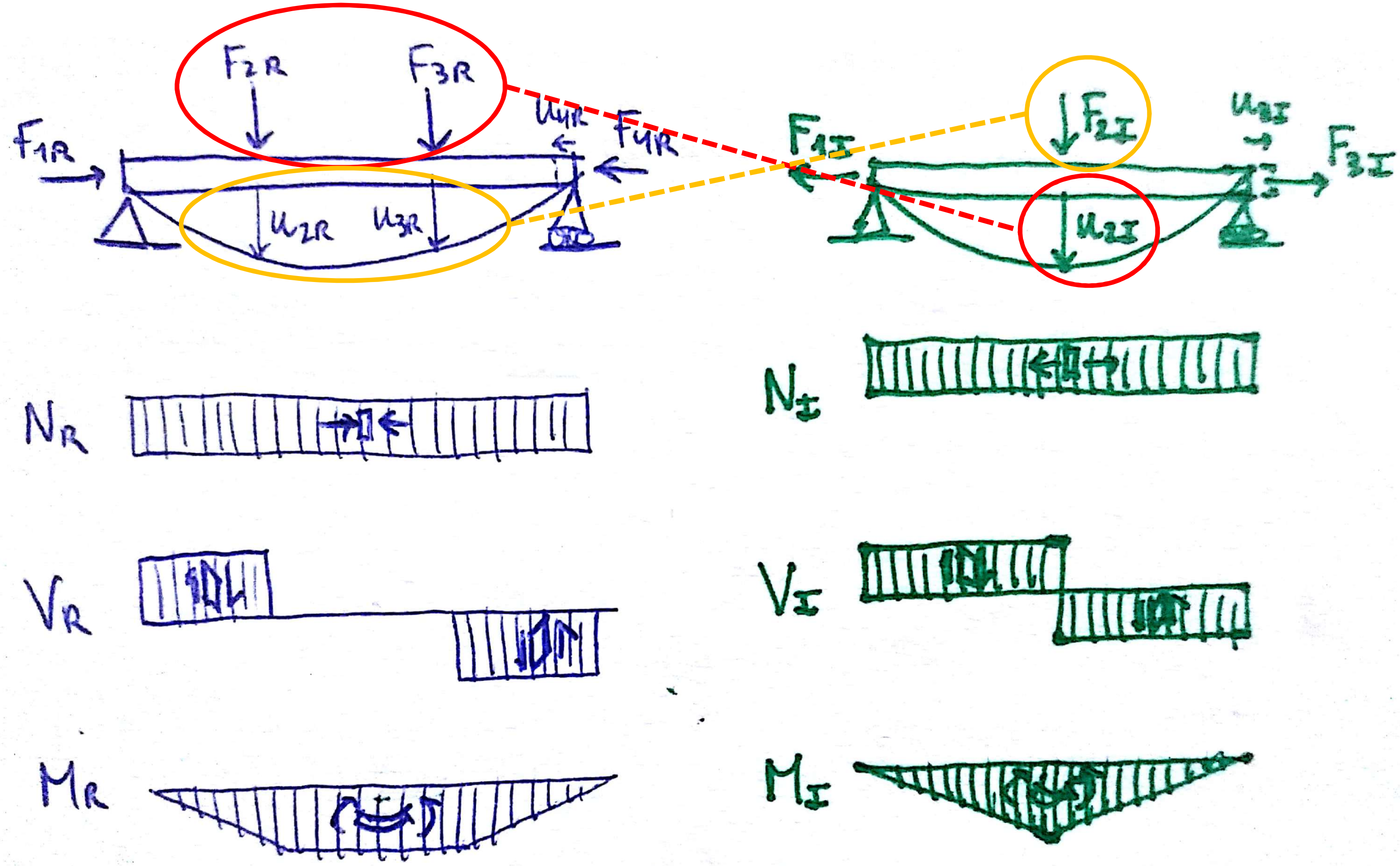
$$\sum_i \left(\overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{u_{I,i}} \right) = \int_V \left(\frac{\sigma \cdot \sigma_I}{E} + \frac{\tau \cdot \tau_I}{G} \right) dV$$

Y, finalmente, sustituyendo las tensiones por su expresión en función de las solicitaciones correspondientes (análogamente a lo efectuado con la energía de deformación):

$$\sum_i \left(\overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{u_{I,i}} \right) = \int_0^L \frac{N \cdot N_I}{EA} dx + \int_0^L \frac{V \cdot V_I}{GA} dx + \int_0^L \frac{M \cdot M_I}{EI} dx$$

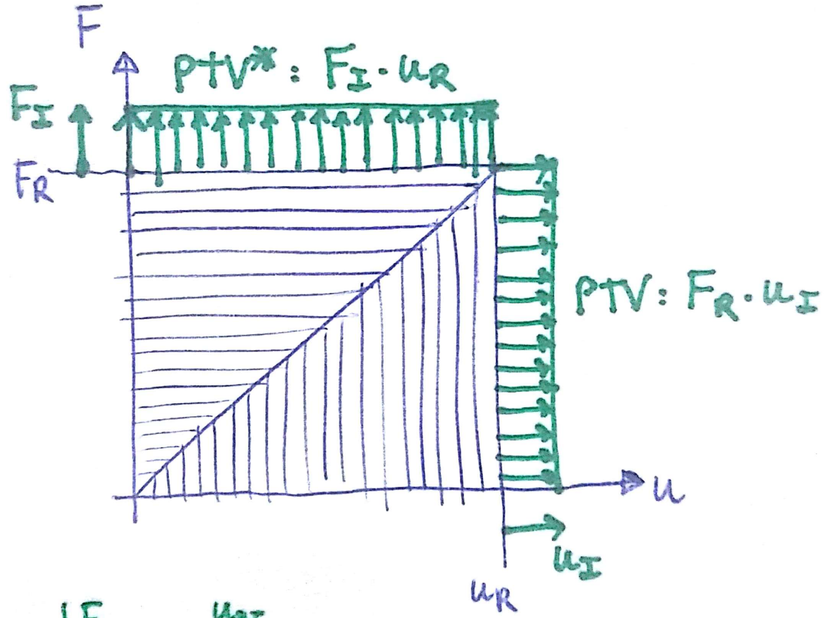
PTV Y PTV COMPLEMENTARIO

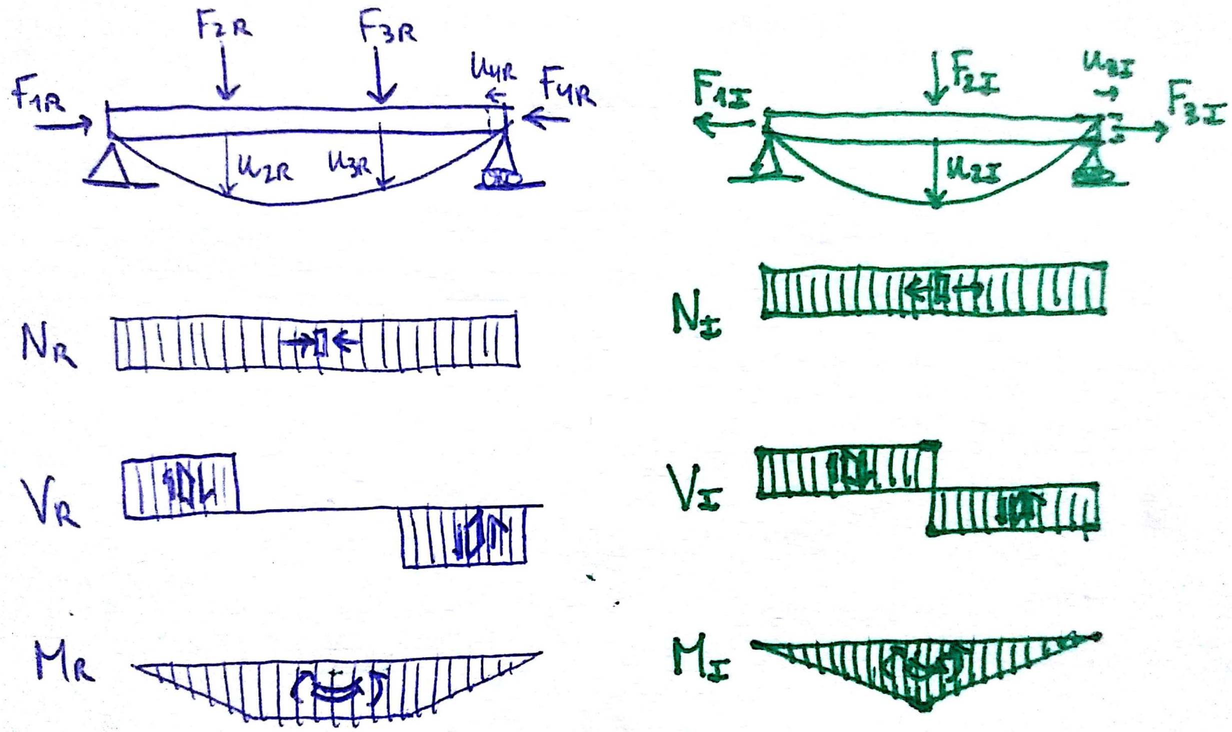
La generalidad del problema permite combinar indistintamente **fuerzas de un sistema con desplazamientos de otro**, indistintamente



PTV Y PTV COMPLEMENTARIO

Por tanto, adquiere sentido definir un **trabajo virtual y un trabajo virtual complementario**, sin más que combinar las fuerzas reales con desplazamientos virtuales o viceversa. (Notar que la energía de deformación virtual no cambia)

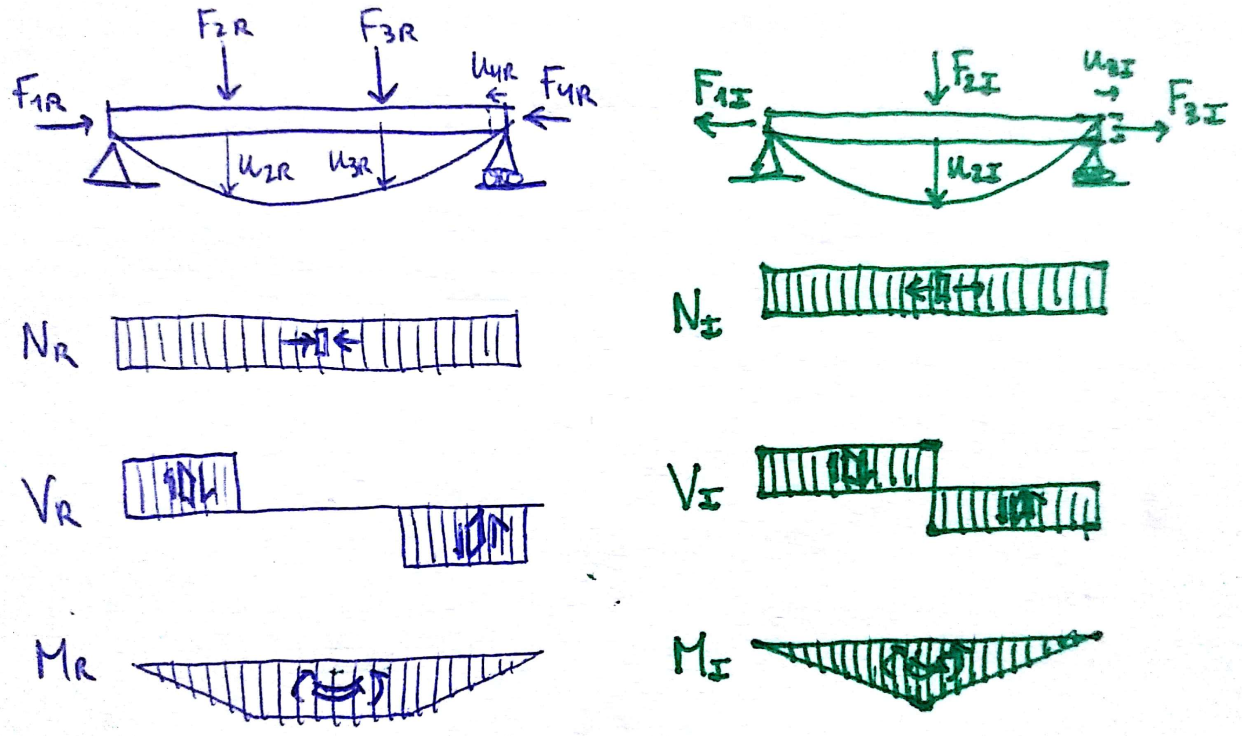




PTV Y PTV COMPLEMENTARIO

PTV: $$\sum_i \left(\overrightarrow{F_{R,i}} \cdot \overrightarrow{u_{I,i}} \right) = \int_0^L \frac{N_R N_I}{EA} dx + \int_0^L \frac{V_R V_I}{GA} dx + \int_0^L \frac{M_R M_I}{EI} dx$$

PTV*: $$\sum_i \left(\overrightarrow{F_{I,i}} \cdot \overrightarrow{u_{R,i}} \right) = \int_0^L \frac{N_I N_R}{EA} dx + \int_0^L \frac{V_I V_R}{GA} dx + \int_0^L \frac{M_I M_R}{EI} dx$$



MÉTODO DE LA CARGA UNIDAD

El PTV* se puede utilizar para calcular movimientos reales de estructuras. Para ello se toma un sistema **imaginario** donde **sólo haya una carga unitaria** (de valor 1) en el punto de aplicación, dirección y sentido correspondientes al movimiento buscado:

$$1 \cdot u_R = \int_0^L \frac{N_I N_R}{EA} dx + \int_0^L \frac{V_I V_R}{GA} dx + \int_0^L \frac{M_I M_R}{EI} dx$$