10

VIGAS CONTINUAS

PROYECTO DE ESTRUCTURAS

6 FASES:

1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica

2) Modelización: elaboración de modelo físico

3) Análisis: cálculo de solicitaciones y deformaciones de los elementos

4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos

5) Representación

6) Ejecución

PROYECTO DE ESTRUCTURAS

6 FASES:

1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica

2) Modelización: elaboración de modelo físico

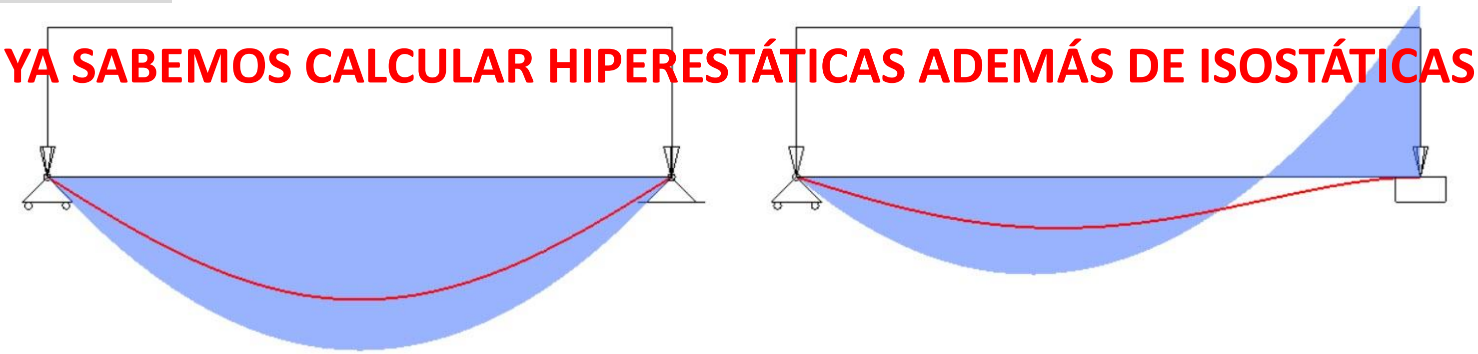
3) Análisis: cálculo de solicitaciones y deformaciones de los elementos

4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos

5) Representación

6) Ejecución

YA SABEMOS CALCULAR HIPERESTÁTICAS ADEMÁS DE ISOSTÁTICAS



MÉTODOS DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

El análisis de estructuras hiperestáticas consiste en el cálculo de reacciones incluyendo las sobreabundantes, y sucesivamente cálculo de solicitaciones y deformaciones.

En general, el cálculo de reacciones requiere de añadir, a las 3 ecuaciones de la estática, tantas ecuaciones de compatibilidad como reacciones sobreabundantes existan.

Existen dos tipos de métodos de resolución de hiperestáticas:

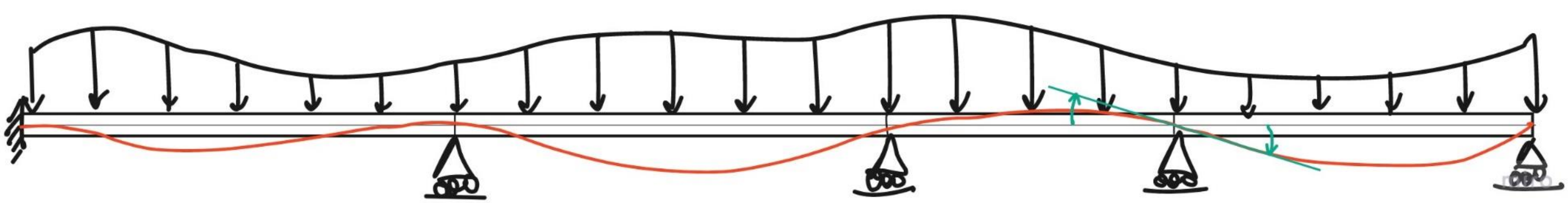
- **Métodos genéricos**, válidos para cualquier tipo de estructura hiperestática:
  - Método de **superposición** de estados
  - Método **matricial** (también válido para isostáticas)

- **Métodos particulares**, más sencillos pero solo aplicables a tipos específicos de hiperestáticas:
  - Ecuaciones de los **2 y 3 momentos**, solo válido para vigas continuas
  - **Simetría/antimetría**, solo para estructuras simétricas de forma

CONCEPTO DE VIGA CONTINUA

Viga continua: estructura trabajando a **flexión** formada por **barras rectas** alineadas, unidas rígidamente entre sí en **nudos interiores** que están **simplemente apoyados** en el exterior (comúnmente llamados **apoyos pasantes**) y cuyos enlaces extremos pueden ser apoyos o empotramientos.

Que la viga sea pasante sobre los apoyos, sin ninguna coacción al giro, provoca inclinaciones sobre los apoyos. Pero como la viga es rígida en su totalidad, la deformada es continua y no se generan “picos”; es decir: sobre cualquier nudo, el ángulo (inclinación) de la viga es el mismo por la izquierda que por la derecha.



CONCEPTO DE VIGA CONTINUA

En el ámbito de edificación, este modelo físico se utiliza para vigas que en la realidad tienen unas condiciones de contorno más complejas, principalmente porque los apoyos no son de giro y deslizamiento totalmente libre (por su unión con pilares o por rozamiento sobre otras vigas sobre las que son pasantes).

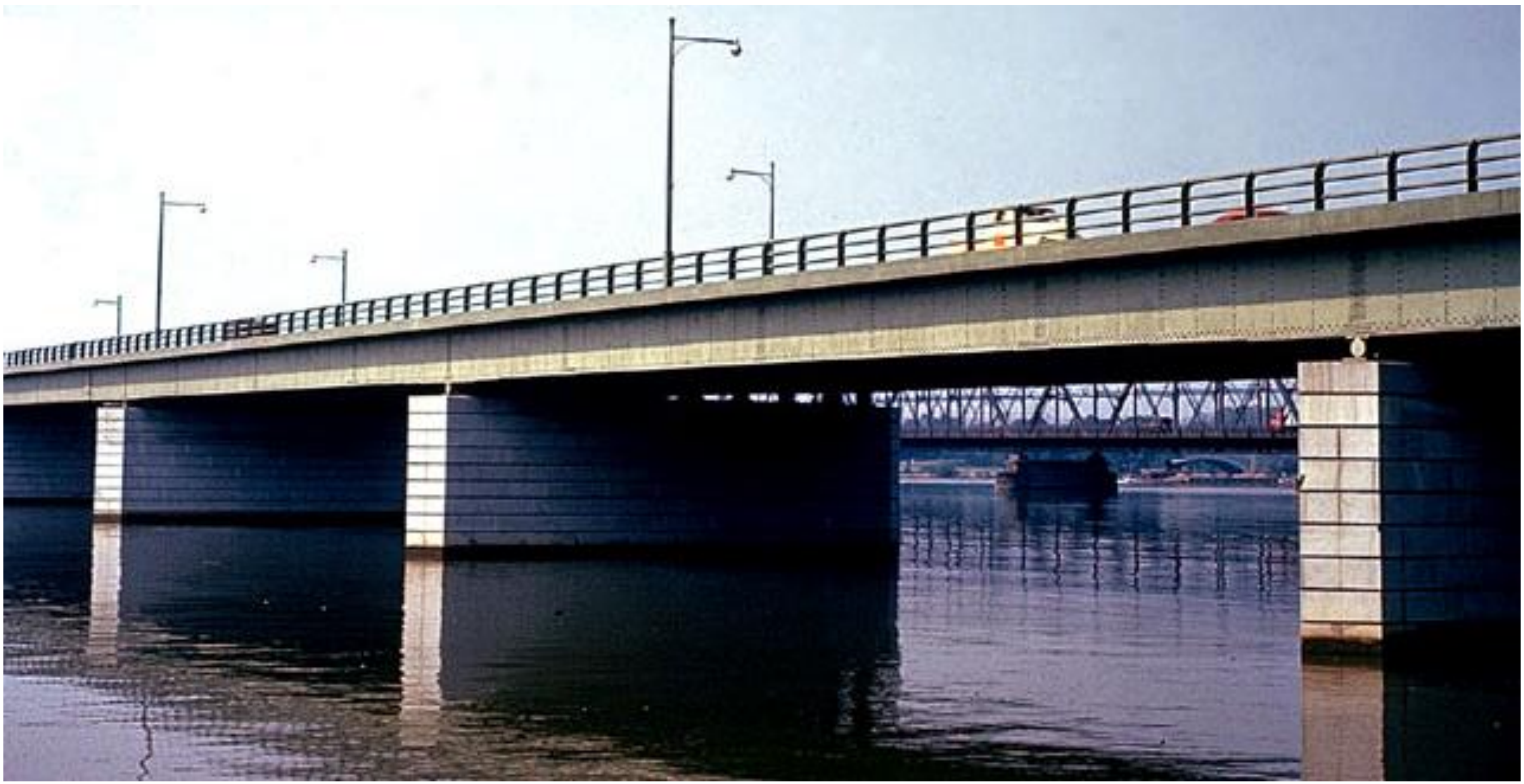
Sin embargo, dichas vigas se pueden modelizar como continuas porque su dimensionado suele quedar del lado de la seguridad (no así el de los pilares o vigas sobre los que se apoyan, aunque la estructura global suele quedar con mayor coeficiente global de seguridad).

CONCEPTO DE VIGA CONTINUA

El modelo de viga continua es muy preciso para representar viguetas pasantes sobre vigas con poca resistencia a torsión, como en el caso de perfiles metálicos de sección abierta. También las chapas sobre viguetas responden a este modelo.

CONCEPTO DE VIGA CONTINUA

También en puentes u otras infraestructuras se observan vigas continuas puras, dado que se suelen utilizar apoyos más complejos que permiten un giro sin rozamiento.



VIGAS CONTINUAS HIPERESTÁTICAS

VIGAS CONTINUAS HIPERESTÁTICAS

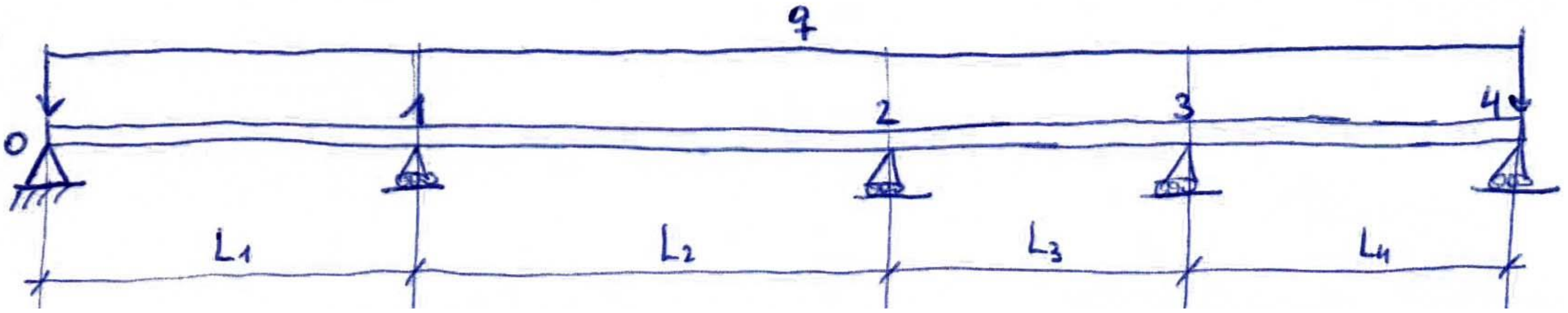
VIGAS CONTINUAS HIPERESTÁTICAS

VIGAS CONTINUAS HIPERESTÁTICAS

VIGAS CONTINUAS HIPERESTÁTICAS

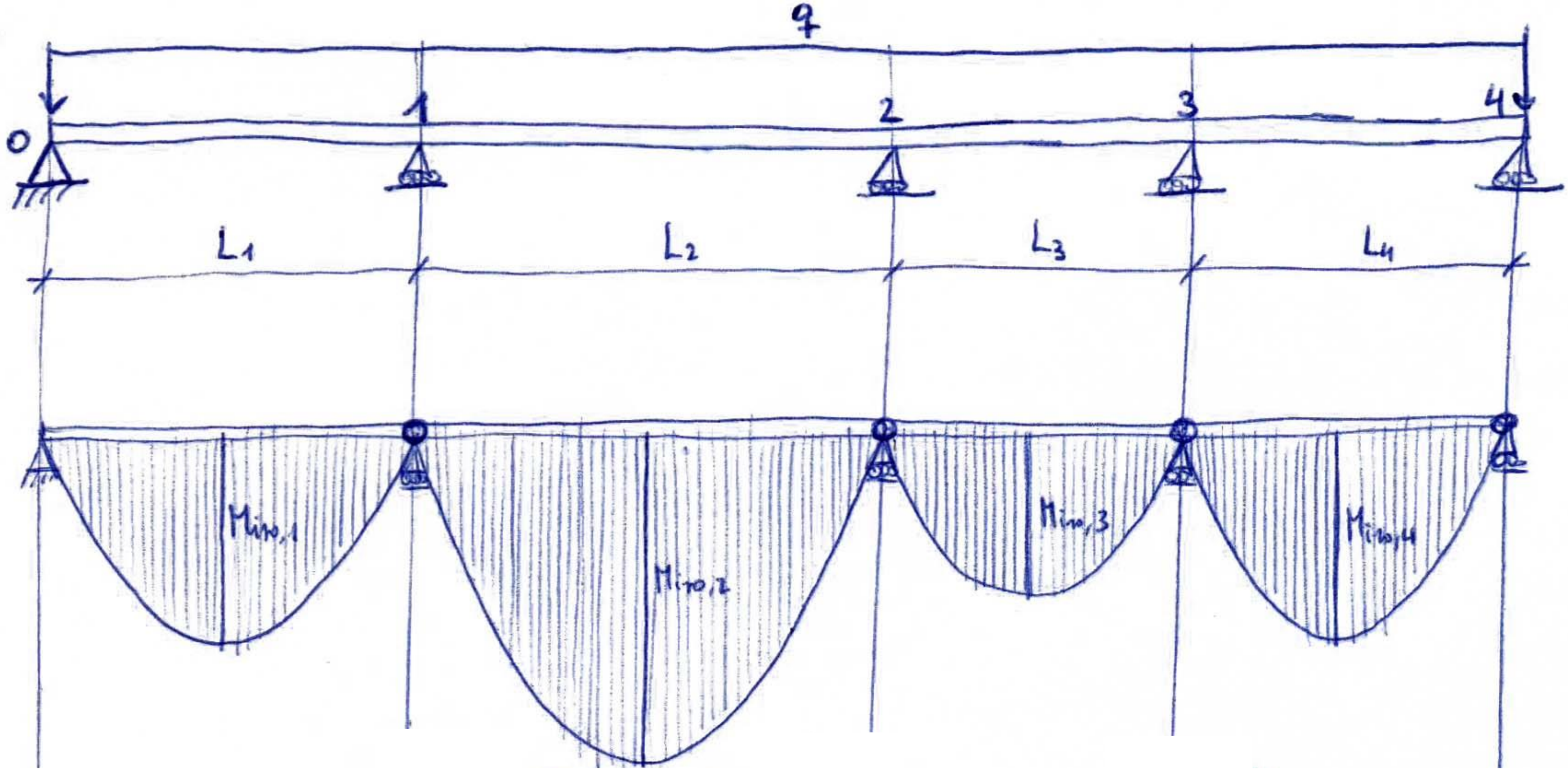
VIGAS CONTINUAS HIPERESTÁTICAS

ÁNÁLISIS DE VIGAS CONTINUAS

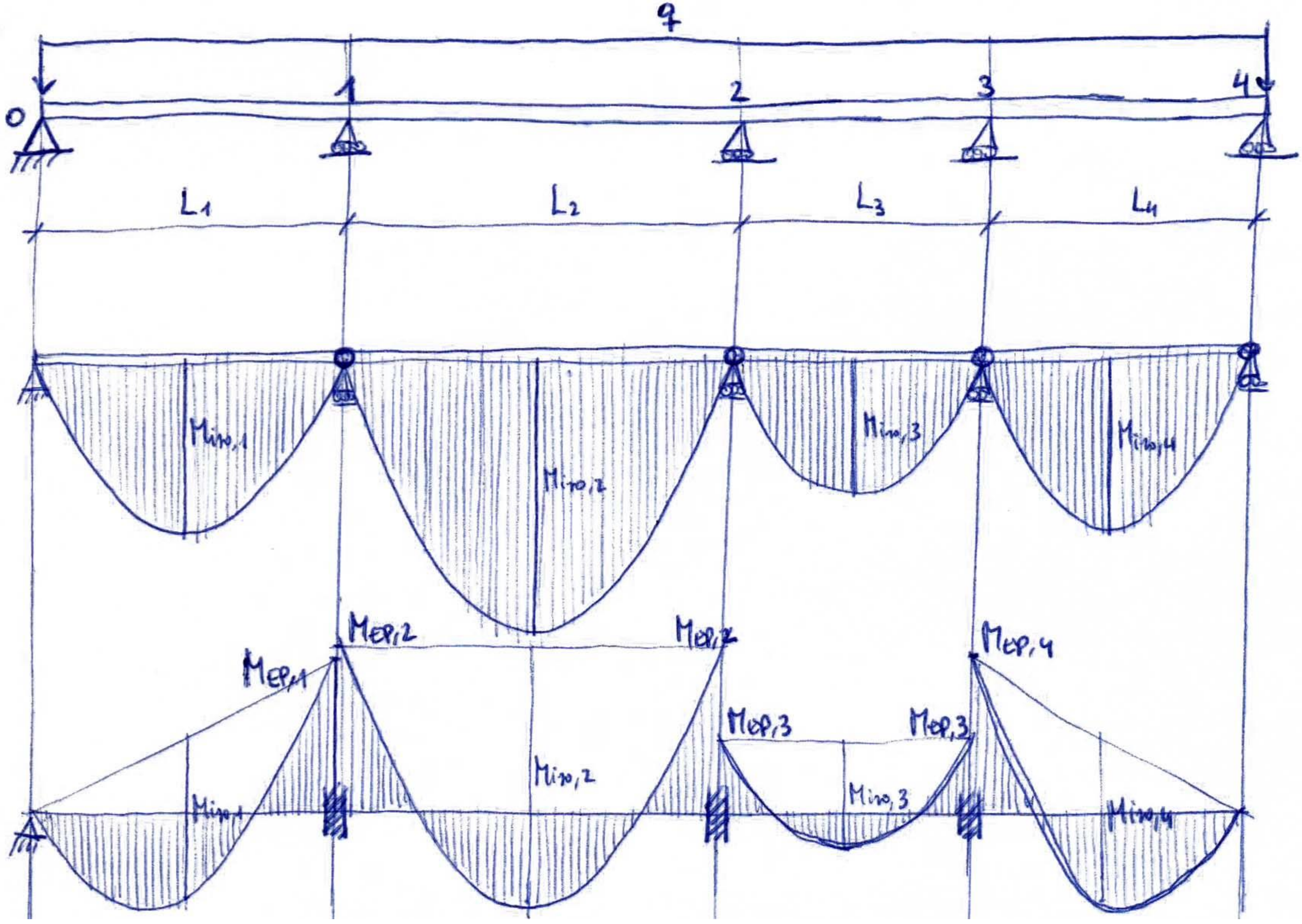


A

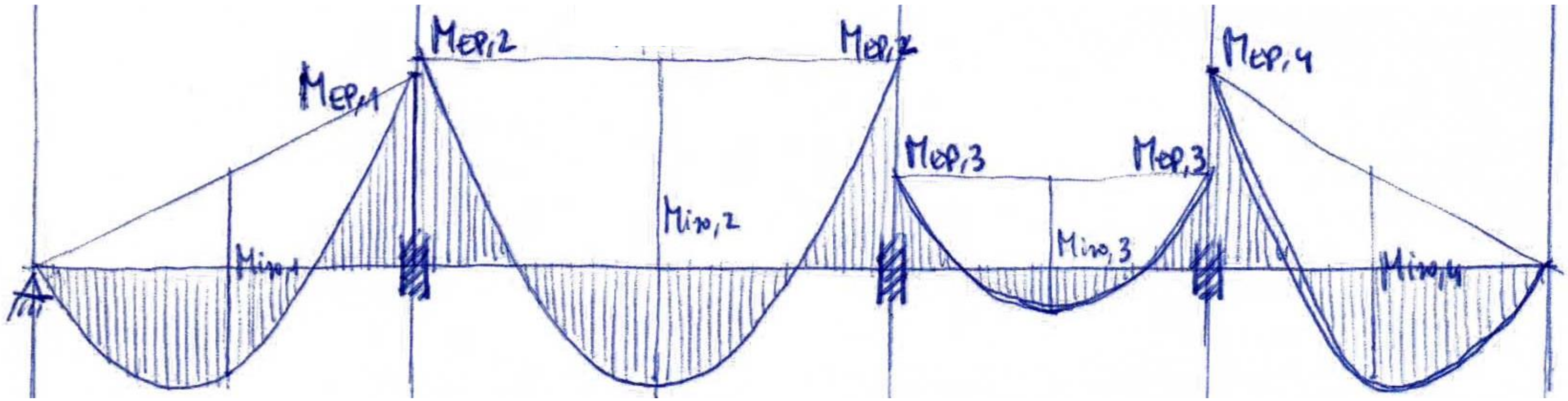
ÁNÁLISIS DE VIGAS CONTINUAS



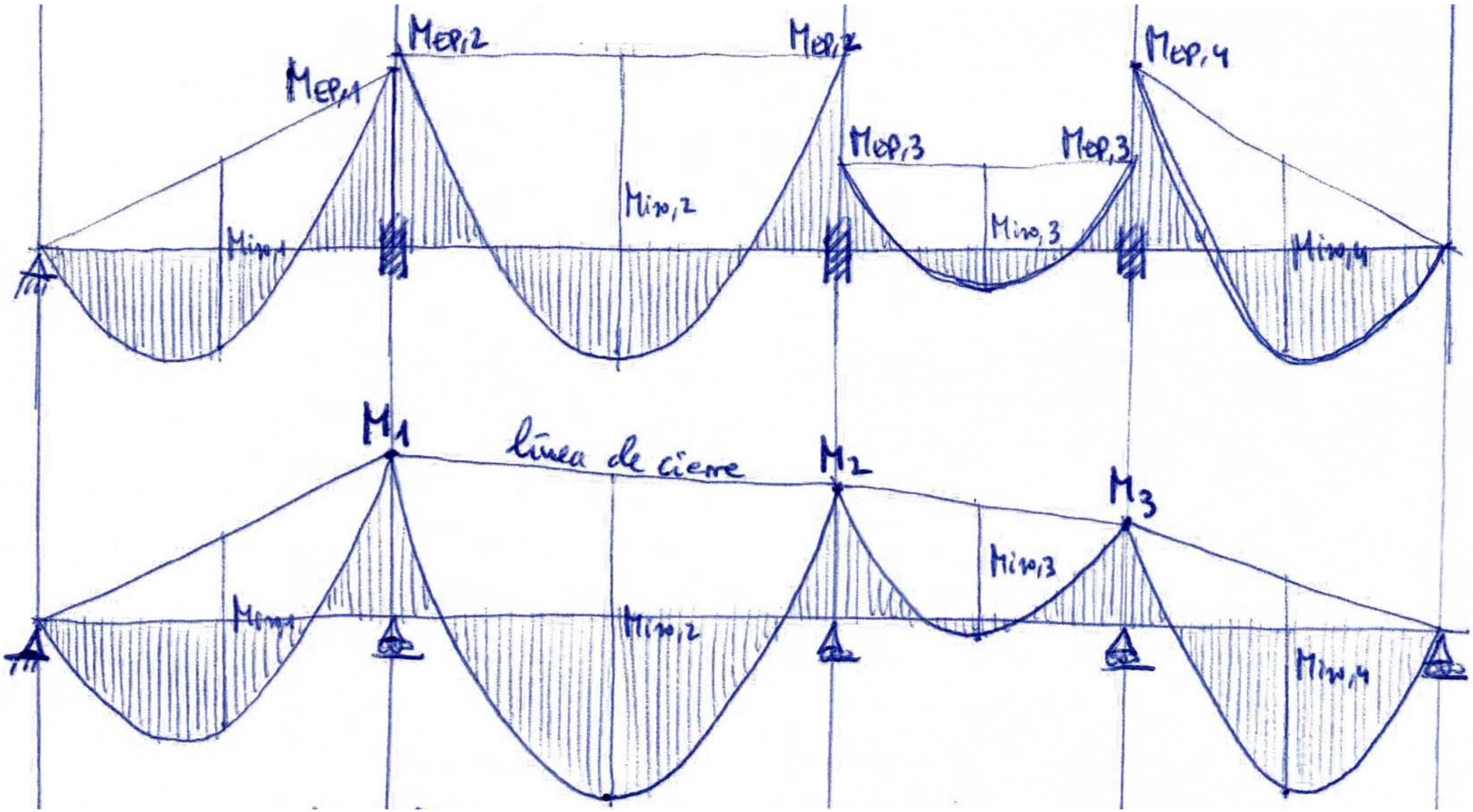
ÁNÁLISIS DE VIGAS CONTINUAS



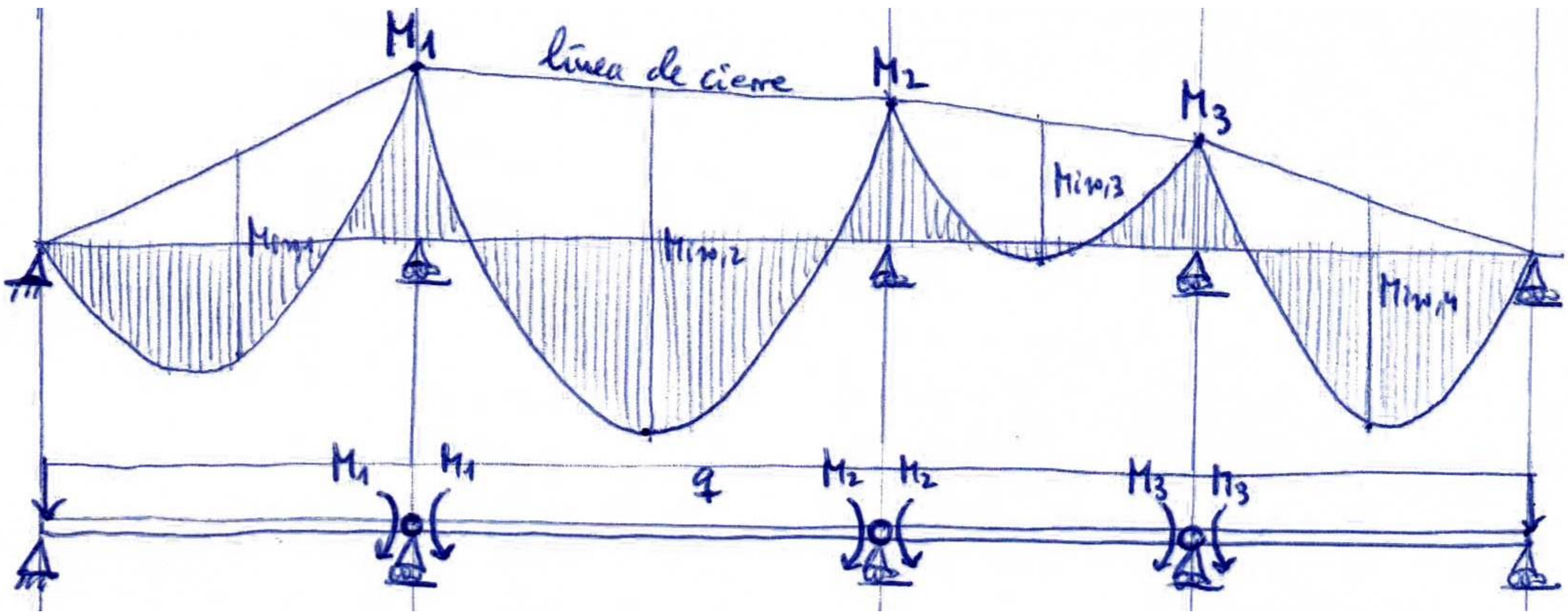
ÁNÁLISIS DE VIGAS CONTINUAS



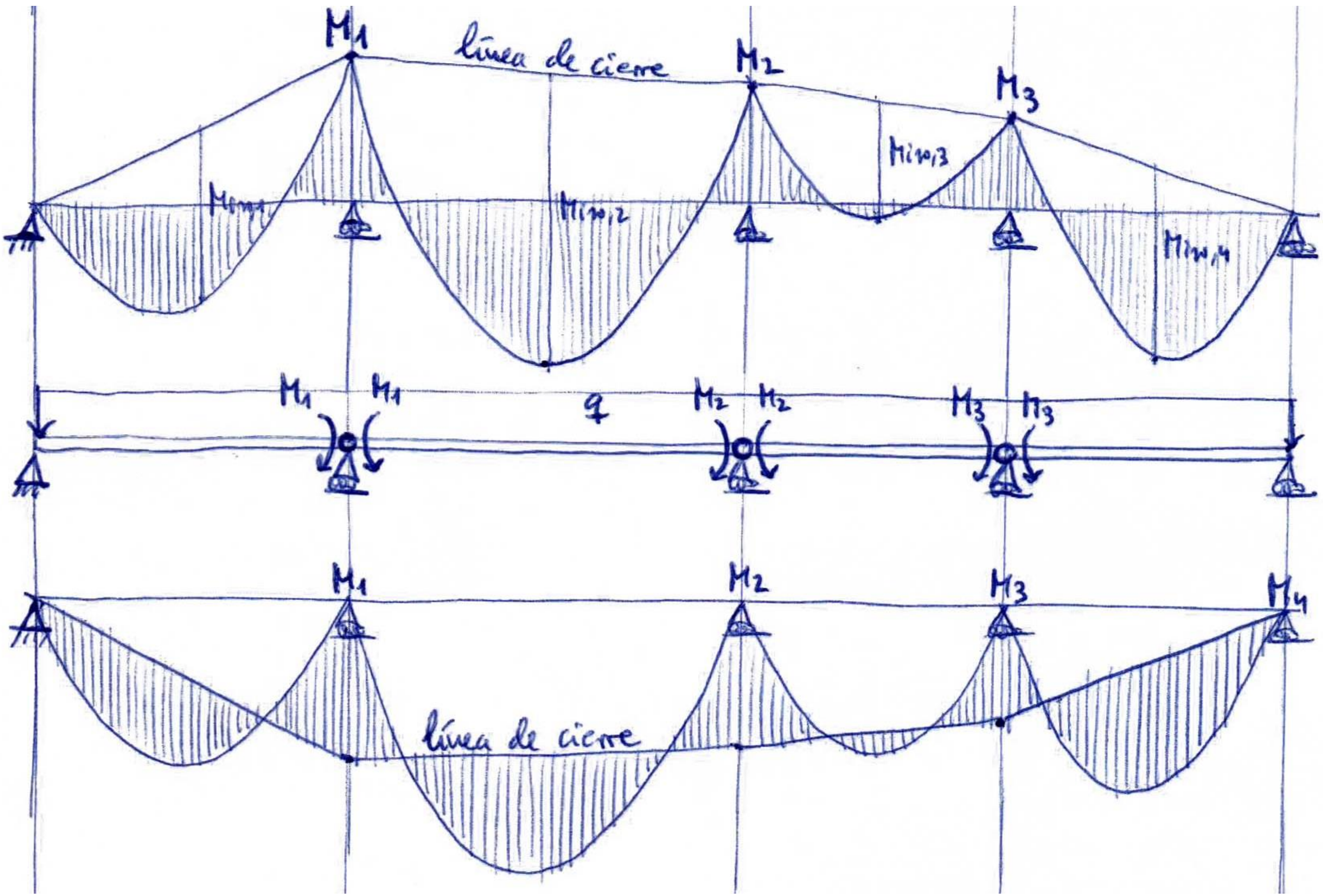
ÁNÁLISIS DE VIGAS CONTINUAS



ÁNÁLISIS DE VIGAS CONTINUAS



ÁNÁLISIS DE VIGAS CONTINUAS

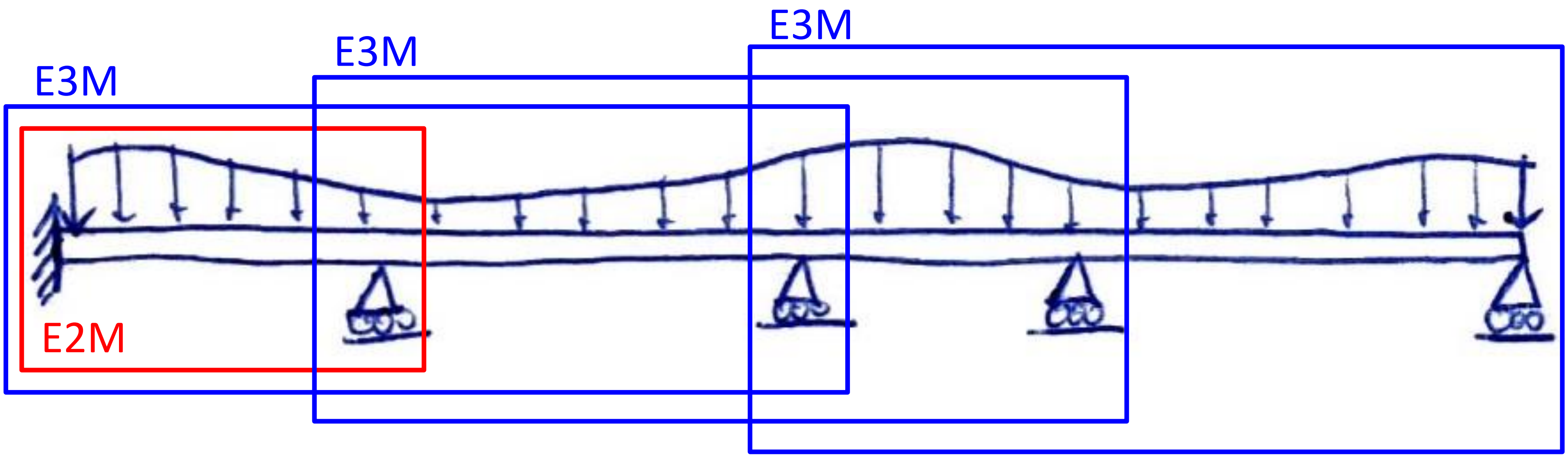


ECUACIÓN DE LOS DOS MOMENTOS Y DE LOS TRES MOMENTOS

A fin de obtener las n incógnitas hiperestáticas (momentos negativos en nudos), se establecen **relaciones conocidas entre los momentos negativos contiguos**, de tal manera que se obtiene un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Dichas relaciones son:

- Ecuación de los **dos momentos** → vanos extremos, si hay empotramiento
- Ecuación de los **tres momentos** → resto de los vanos

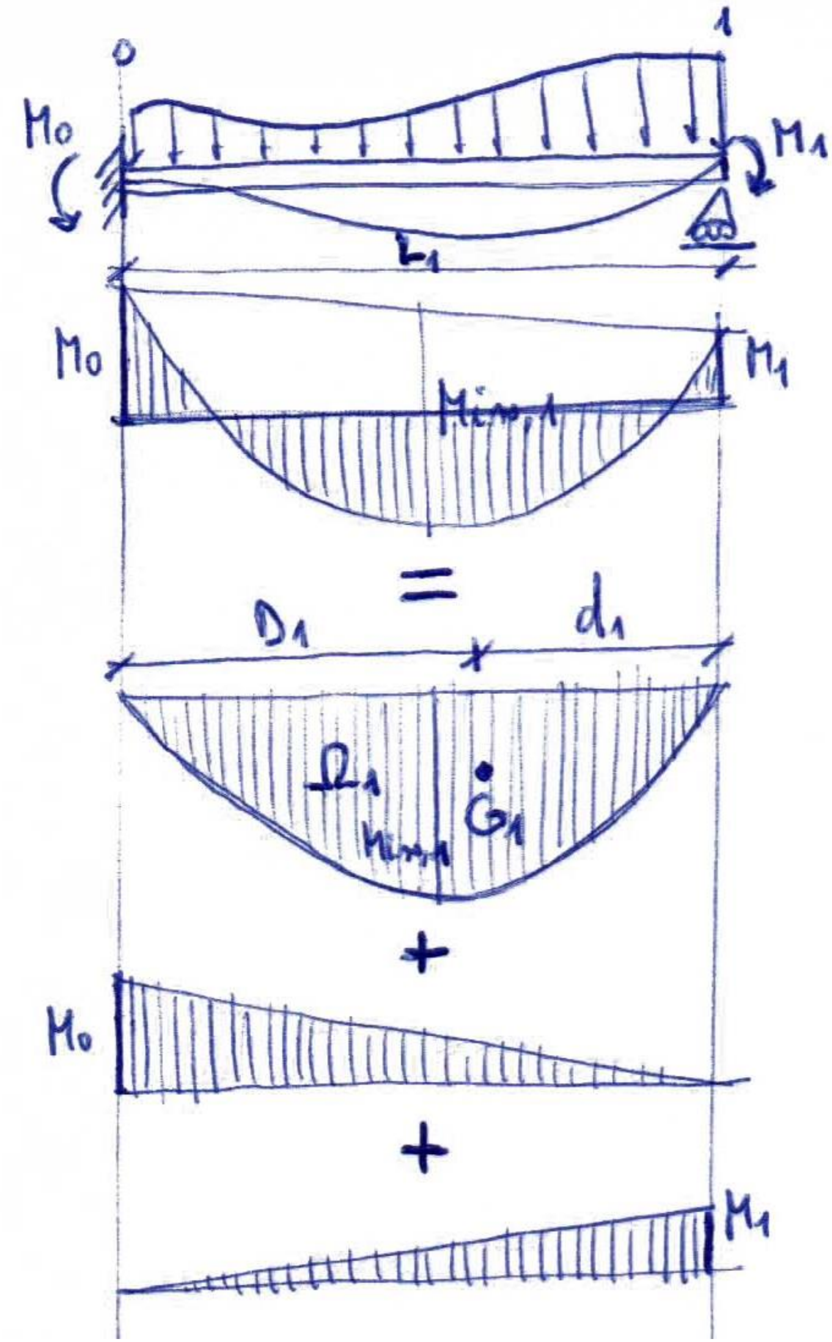


ECUACIÓN DE LOS DOS MOMENTOS

La primera ecuación, en el caso de que exista un empotramiento en el extremo (nudo 0), es una relación entre M_0 y M_1.

Aplicando el 2º Teorema de Mohr entre la tangente (horizontal) por el nudo 0 y la vertical por el nudo 1, se obtiene el desplazamiento vertical (nulo) del nudo 1. La ley de momentos se descompone en tres sumandos, correspondientes a la ley de momentos isostática e hiperestáticas.

M_0 y M_1 se toman negativos; L_1 es la luz del tramo, Ω_1 es el área de momentos isostáticos, G_1 el baricentro de dicha área, y D_1 y d_1 las distancias desde el baricentro a los extremos.



ECUACIÓN DE LOS DOS MOMENTOS

$$\delta_0 = 0 =$$

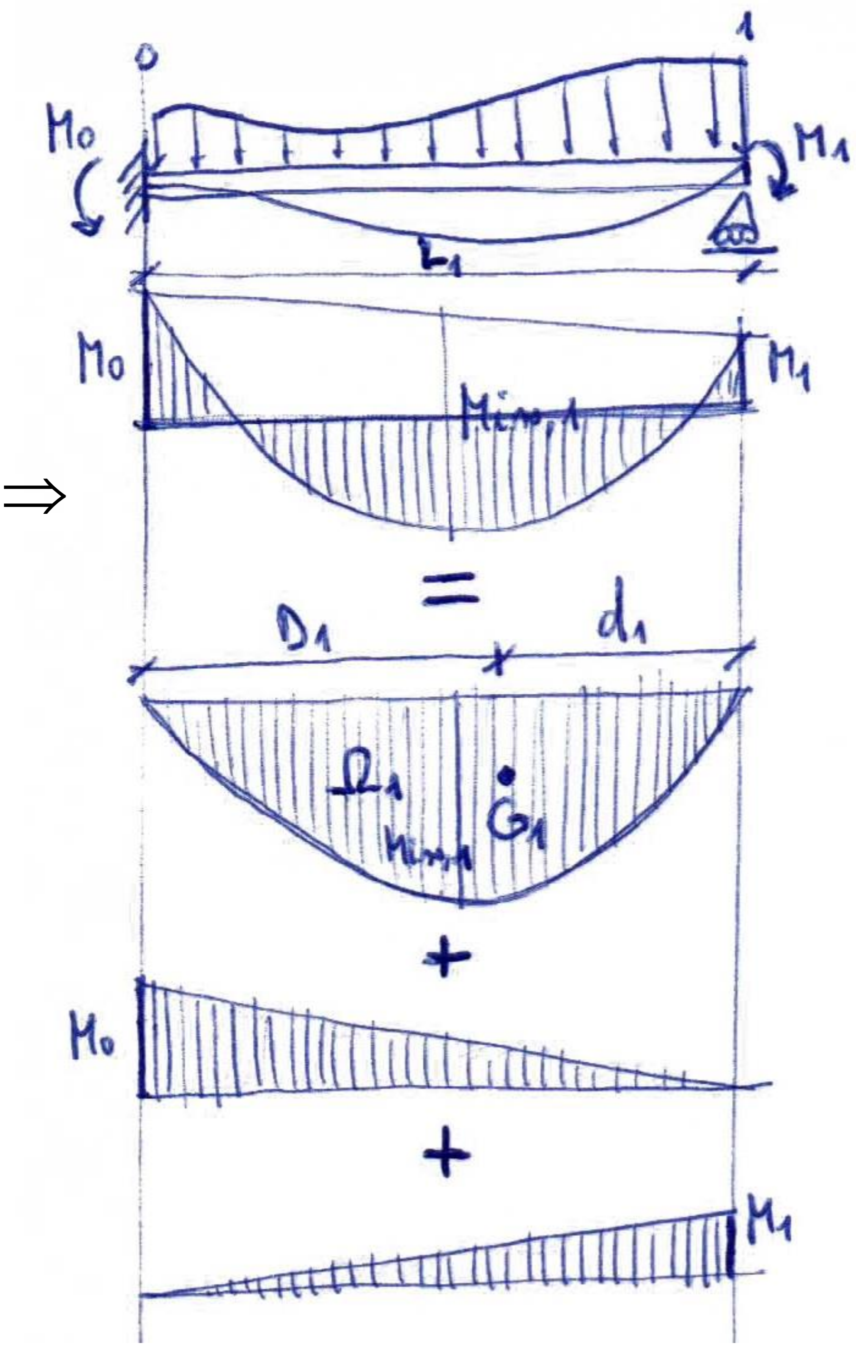
$$= \frac{\Omega_1 d_1 + \frac{1}{2} L_1 M_0 \frac{2}{3} L_1 + \frac{1}{2} L_1 M_1 \frac{1}{3} L_1}{EI} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Omega_1 d_1 + M_0 \frac{L_1^{\ 2}}{3} + M_1 \frac{L_1^{\ 2}}{6} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_1^{\ 2} \left(\frac{2M_0 + M_1}{6} \right) = -\Omega_1 d_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow 2M_0 + M_1 = -6 \frac{\Omega_1 d_1}{L_1^{\ 2}}}$$

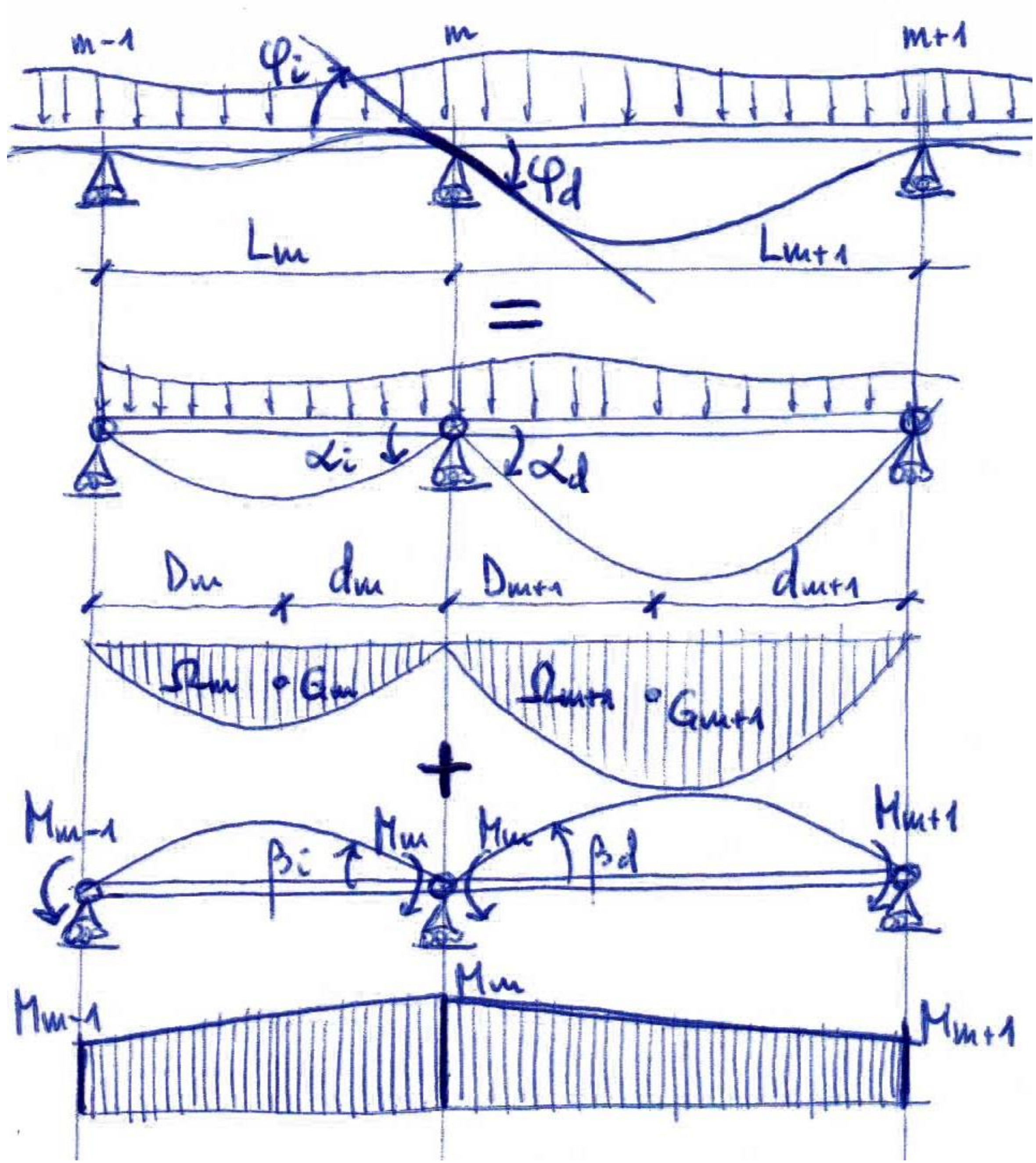
Ecuación de los dos momentos



ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

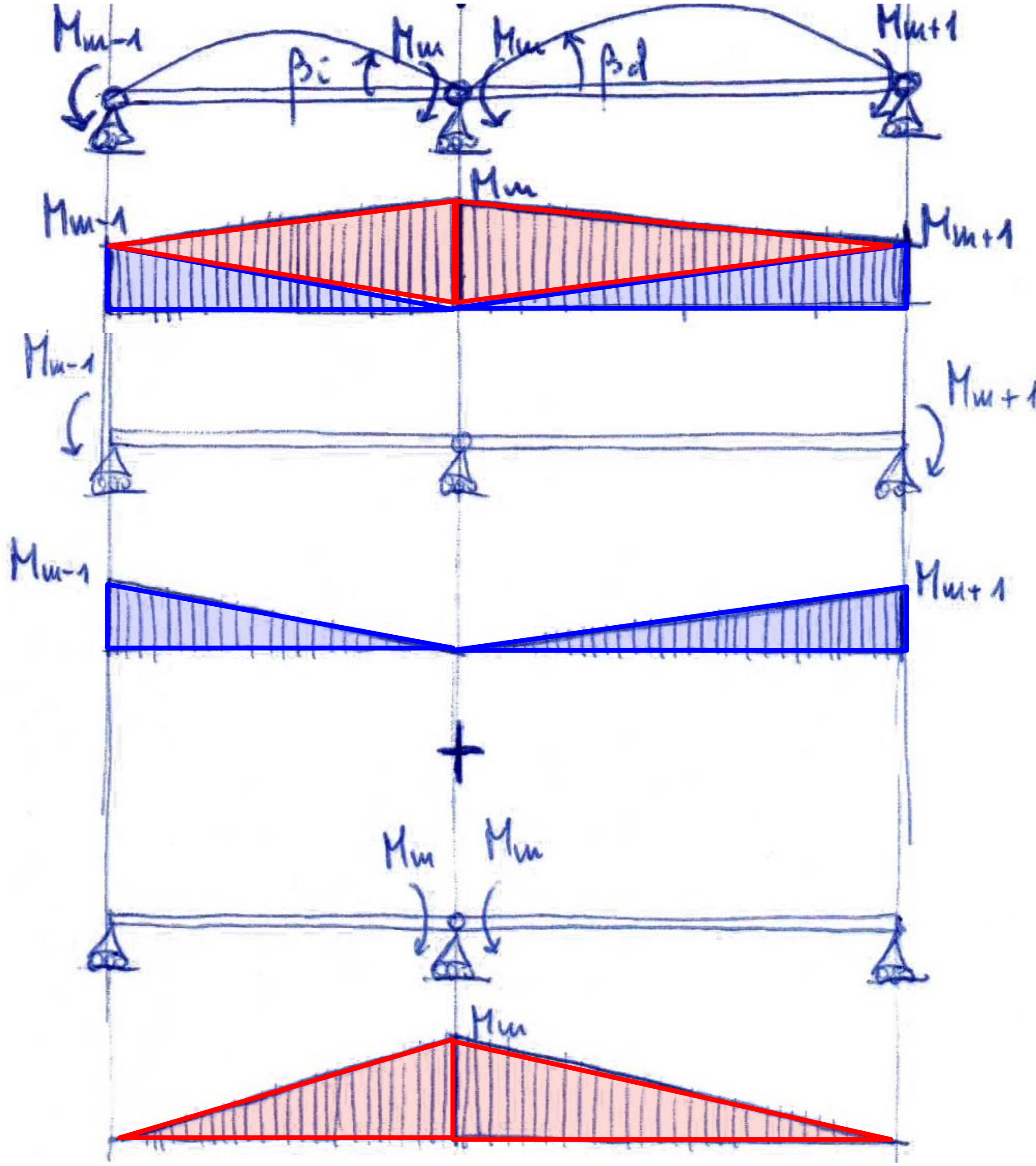
Las restantes ecuaciones, correspondientes a nudos interiores m, relacionan el momento en ese nudo (M_m) y sus dos adyacentes (M_{m-1} y M_{m+1}).

Se descompone la estructura en dos estados isostáticos (el primero sólo con la carga y el segundo con los momentos hiperestáticos).
Las áreas trapeciales de momento en el segundo estado se pueden descomponer en triángulos



ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

Para el cálculo de áreas de momentos y centros de gravedad del segundo estado, correspondiente a los momentos negativos, se puede descomponer los trapecios en dos triángulos, pero no como partición geométrica sino como suma de subestados donde en cada uno actúan momentos pares e impares alternadamente.



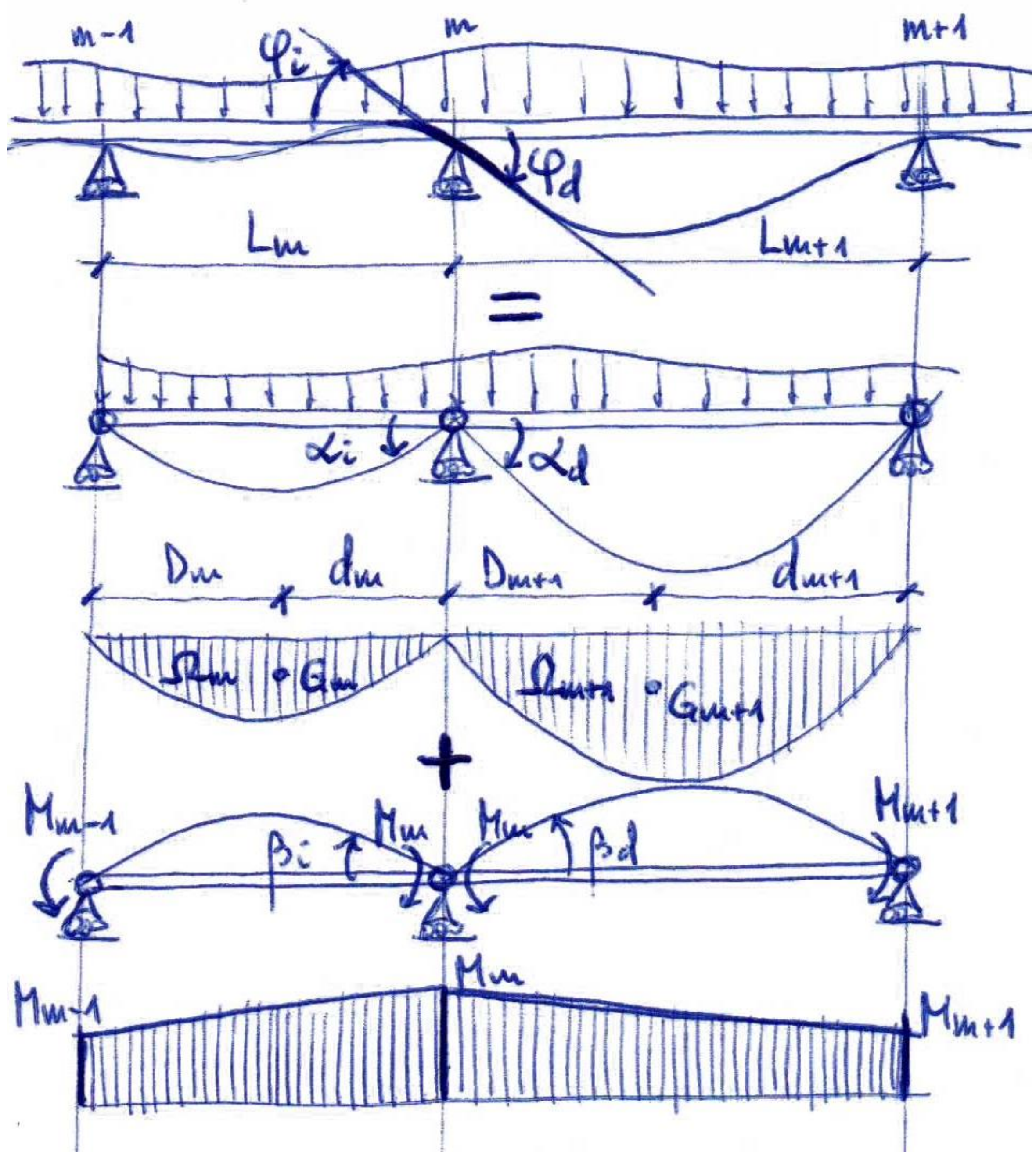
ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

En cada estado, se obtienen expresiones para los ángulos girados a ambos lados del nudo m: α_i y α_d para el giro isostático izquierdo y derecho; β_i y β_d para el hiperestático.

La suma de ambos giros es el giro real del nudo, que es igual a ambos lados por el principio de continuidad:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i &= \alpha_i + \beta_i \\ \varphi_d &= \alpha_d + \beta_d \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

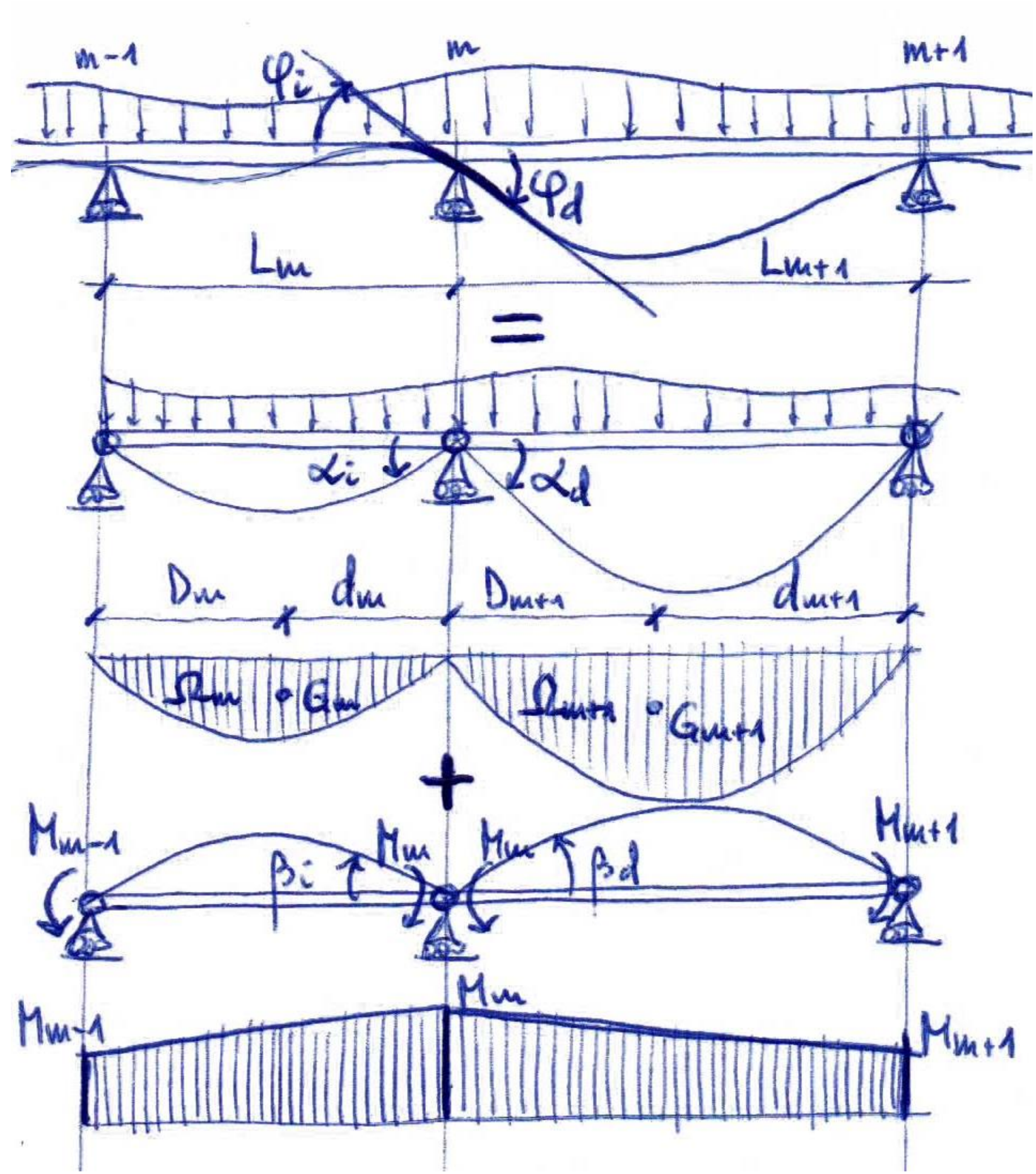
$$\Rightarrow \alpha_i + \beta_i = \alpha_d + \beta_d$$



ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

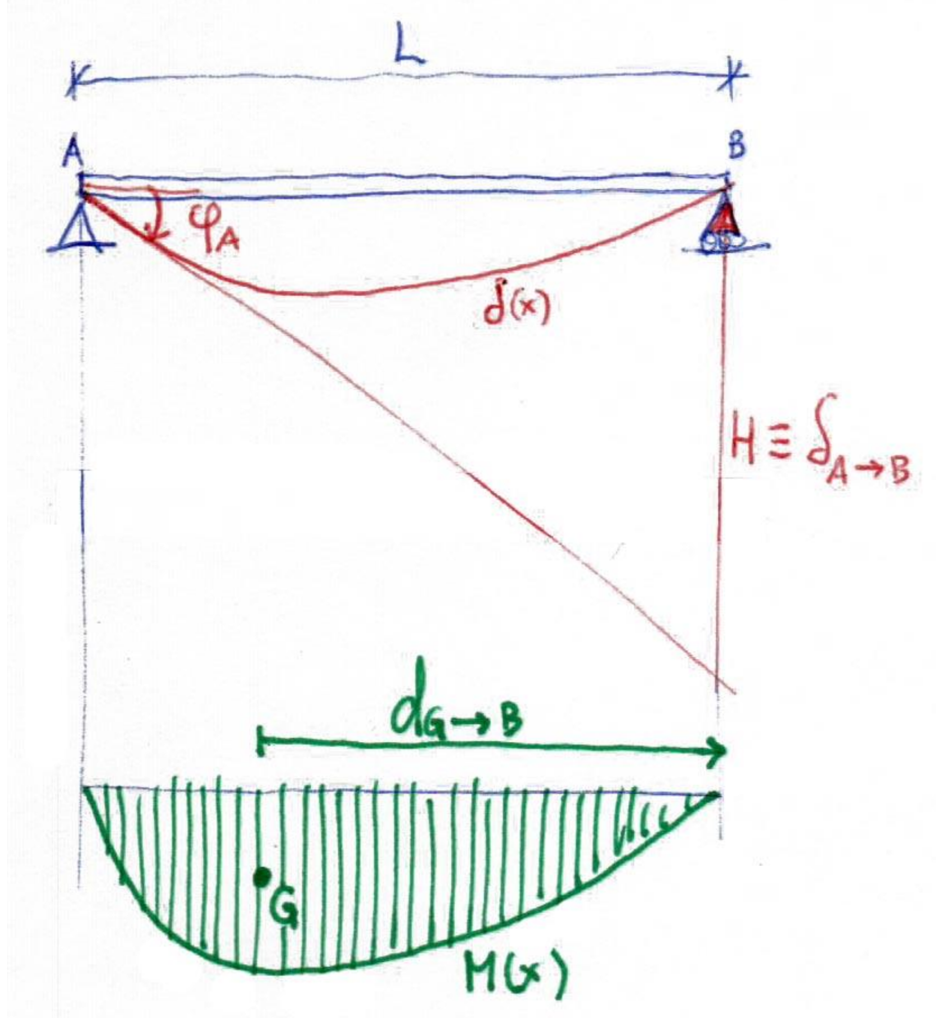
Es necesario, pues, calcular todos los giros (α_i, α_d, β_i y β_d). En este caso no se puede utilizar el 1er Teorema de Mohr, puesto que en cada vano no se conoce la abscisa del punto auxiliar (de giro nulo).

La única manera de obtener estos giros de los subestados correspondientes es mediante la aplicación del 2º Teorema de Mohr, como sigue.



ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

En un caso genérico aparte, donde la deformada alcance su punto máximo (giro nulo) en un punto desconocido, se puede hallar el giro de uno de sus extremos construyendo un triángulo rectángulo cuyo cateto horizontal es la luz L, la hipotenusa es la línea tangente a la deformada en el extremo de interés y H es la distancia vertical desde la tangente hasta el punto opuesto. H se puede obtener mediante el 2º Teorema de Mohr, L es conocida y, por pequeñas deformaciones, el ángulo se asemeja a la tangente del mismo:



$$|\varphi_A| \approx \tan|\varphi_A| = \frac{H}{L} = \frac{\frac{S_{M,A\rightarrow B}}{EI}}{L} = \frac{A_{M,A\rightarrow B} \cdot d_{G\rightarrow B}}{EIL}$$

ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

Aplicando este procedimiento desde las tangentes en el nudo m hacia las verticales en los nudos m-1 y m+1, para el primer estado:

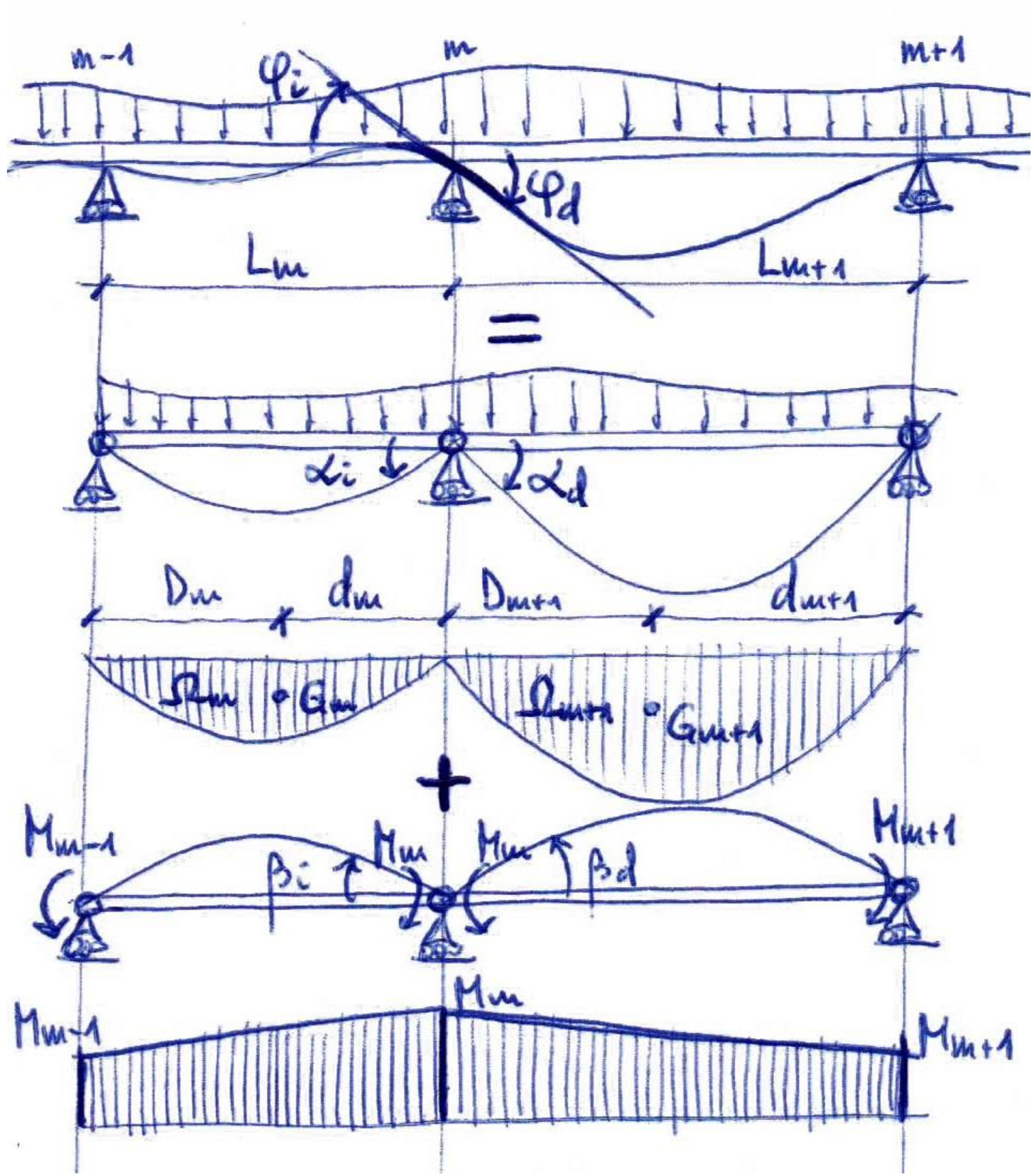
$$\left|\alpha_i\right| = \Omega_m D_m / EIL_m$$

$$\left|\alpha_d\right| = \Omega_{m+1} d_{m+1} / EIL_{m+1}$$

Interpretando los signos:

$$\alpha_i = \frac{\Omega_m D_m}{EIL_m}$$

$$\alpha_d = -\frac{\Omega_{m+1} d_{m+1}}{EIL_{m+1}}$$



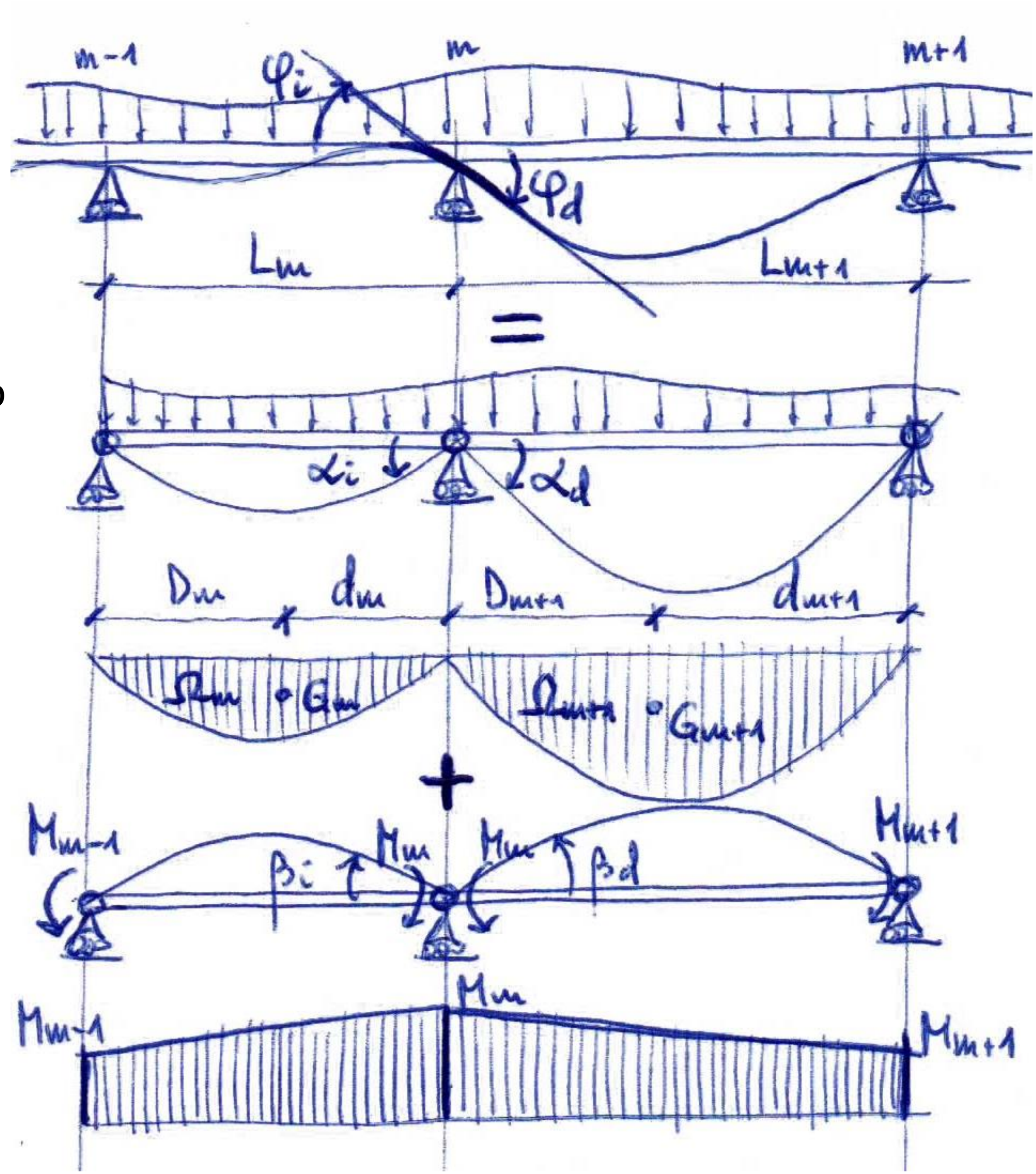
ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

Análogamente para el segundo estado, giro izquierdo (utilizando la descomposición del trapecio en dos triángulos):

$$|\beta_i| = \frac{1}{EIL_m} \cdot \left(\frac{L_m |M_{m-1}|}{2} \frac{L_m}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{L_m |M_m|}{2} \frac{2L_m}{3} \right) =$$

$$= \frac{L_m}{6EI} \left(|M_{m-1}| + 2|M_m| \right)$$



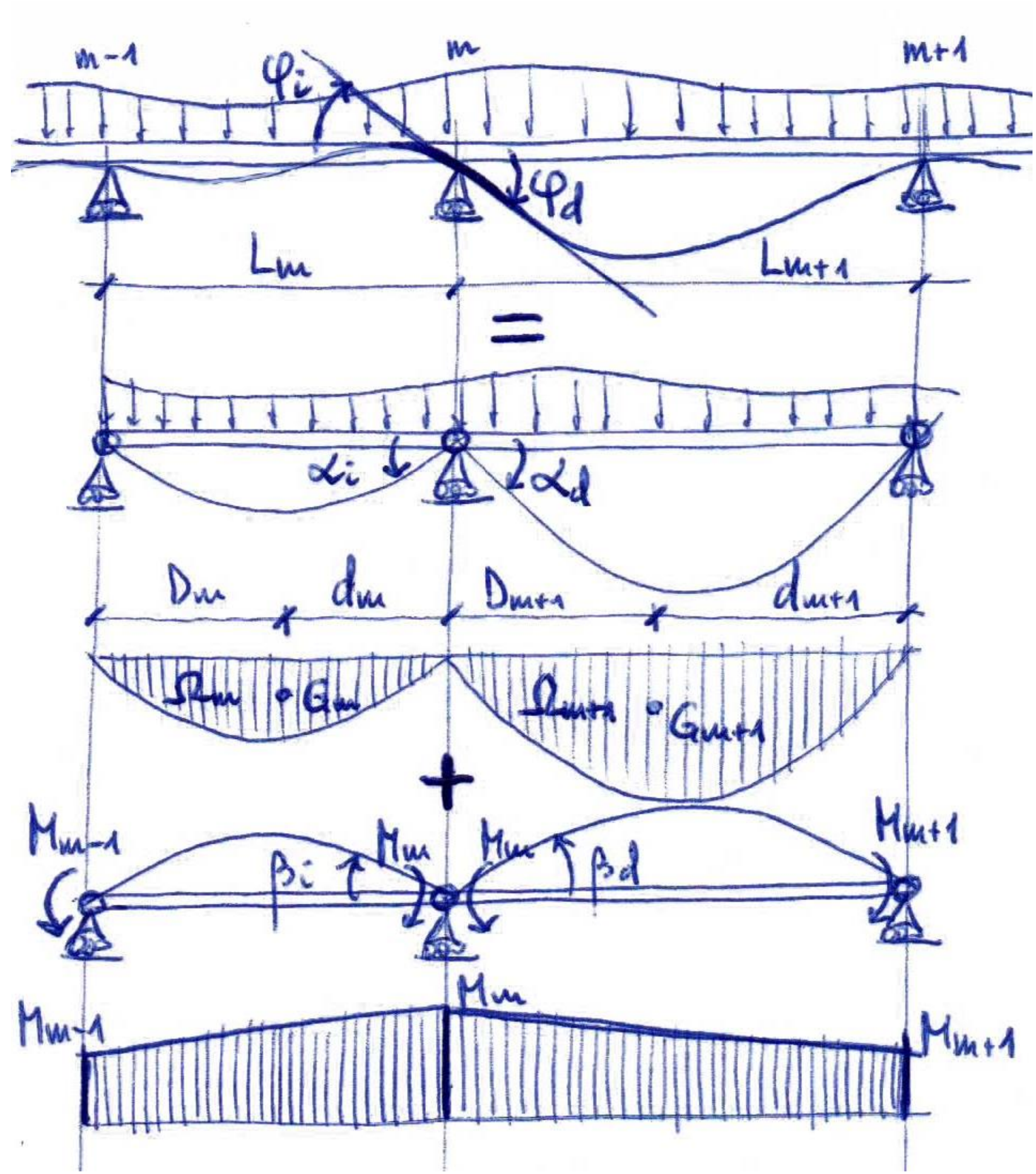
ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

Análogamente para el segundo estado, giro derecho:

$$|\beta_d| = \frac{1}{EIL_{m+1}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{L_{m+1}|M_{m+1}|}{2} \frac{L_{m+1}}{3} + \right.$$
$$\left. + \frac{L_{m+1}|M_m|}{2} \frac{2L_{m+1}}{3} \right) =$$

$$= \frac{L_{m+1}}{6EI} \left(|M_{m+1}| + 2|M_m| \right)$$

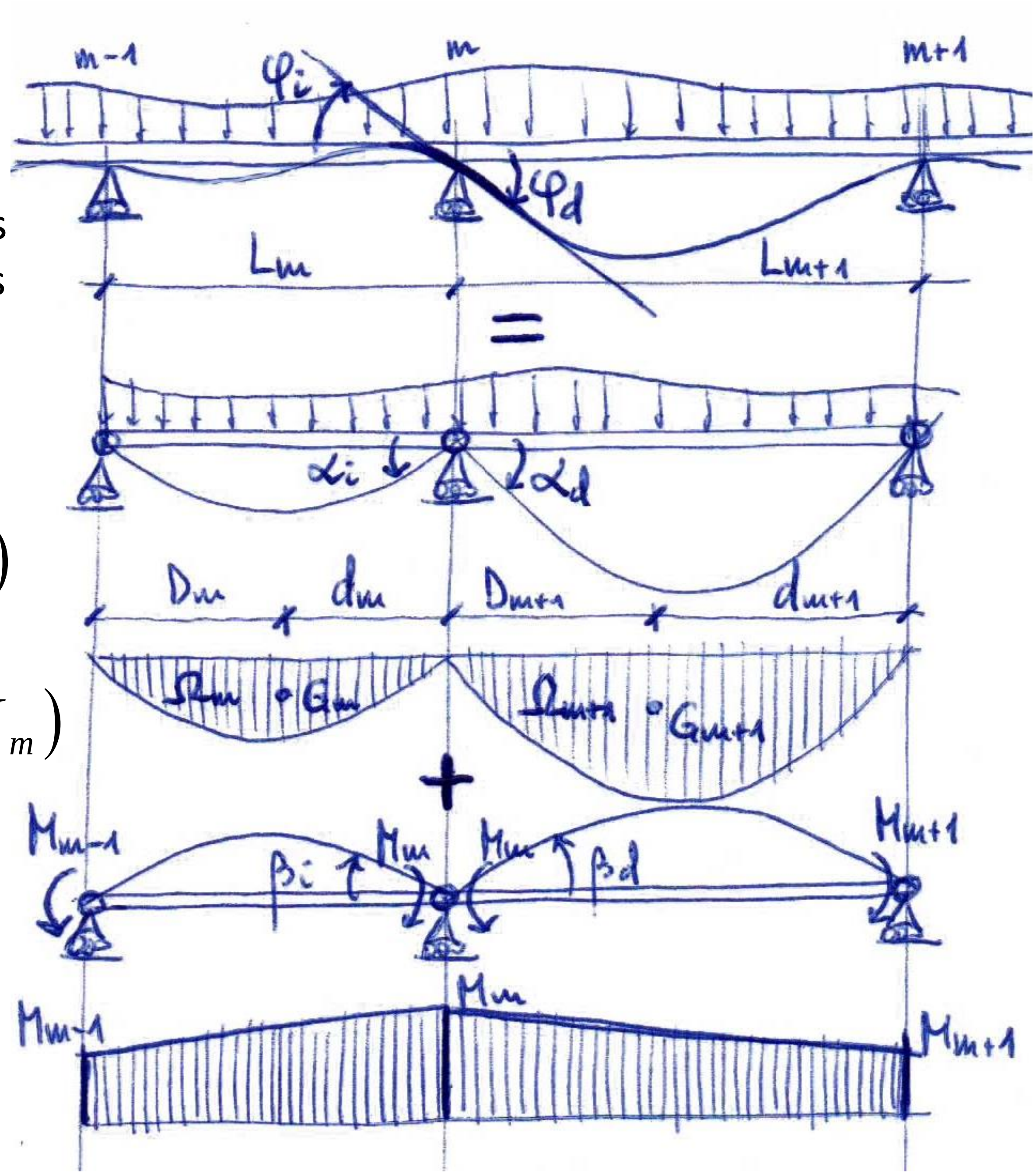


ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

Interpretando el signo de los giros (asumiendo momentos hiperestáticos negativos):

$$\beta_i = \frac{L_m}{6EI}\left(M_{m-1} + 2M_m\right)$$

$$\beta_d = -\frac{L_{m+1}}{6EI}\left(M_{m+1} + 2M_m\right)$$



ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

Igualando giros:

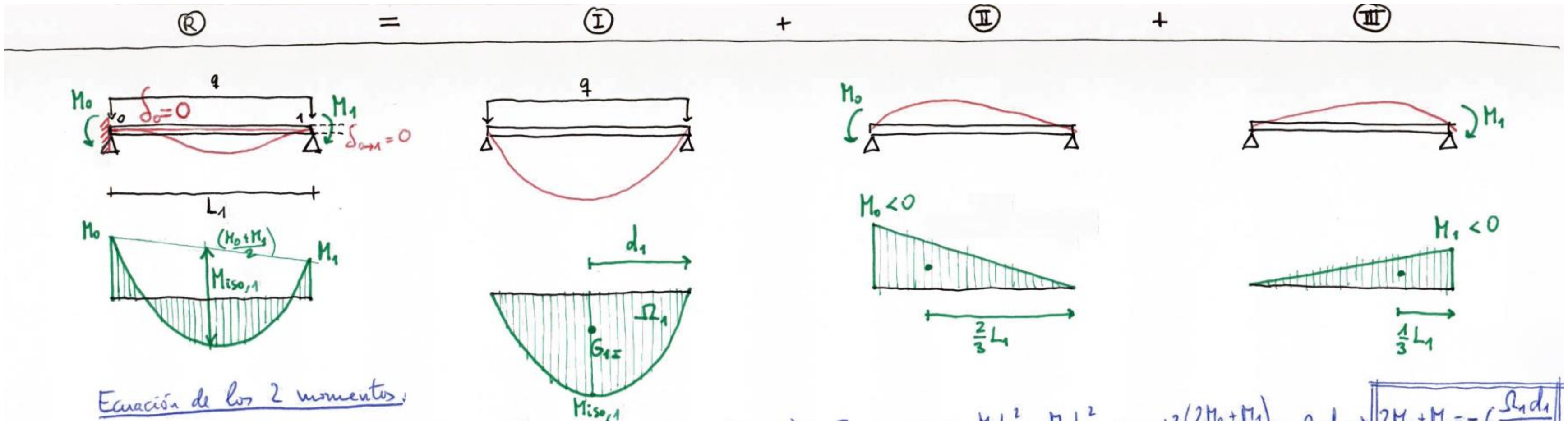
$$\alpha_i + \beta_i = \alpha_d + \beta_d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_m D_m}{EIL_m} + \frac{L_m}{6EI}\left(M_{m-1} + 2M_m\right) = -\frac{\Omega_{m+1} d_{m+1}}{EIL_{m+1}} - \frac{L_{m+1}}{6EI}\left(M_{m+1} + 2M_m\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow L_m M_{m-1} + 2\left(L_m + L_{m+1}\right) M_m + L_{m+1} M_{m+1} = -6\left(\frac{\Omega_m D_m}{L_m} + \frac{\Omega_{m+1} d_{m+1}}{L_{m+1}}\right)}$$

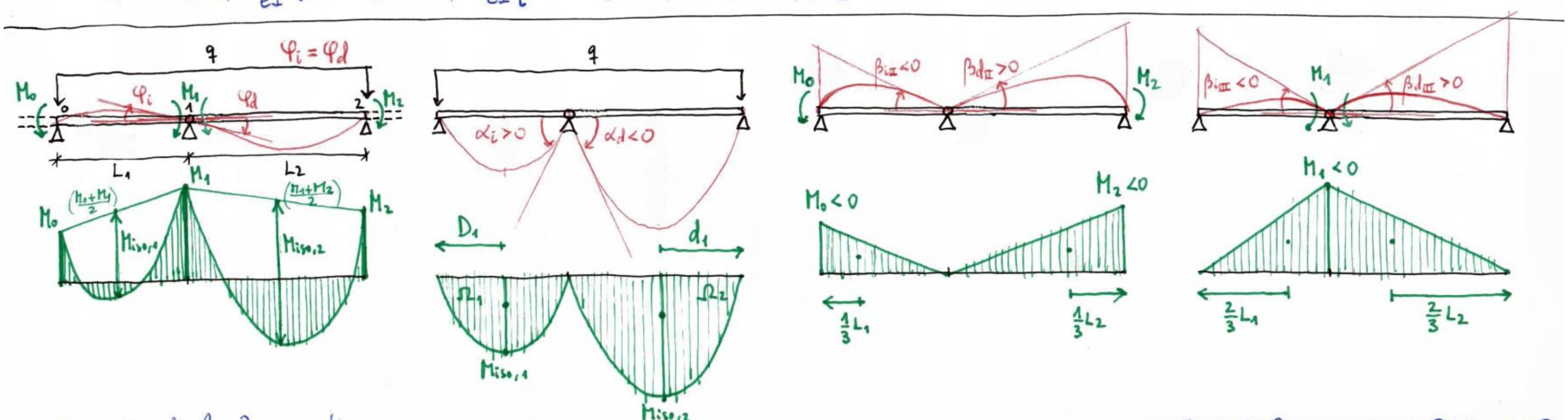
Ecuación de los tres momentos

RESUMEN DE DEMOSTRACIONES DE LAS ECUACIONES DE 2 Y 3 MOMENTOS



Ecuación de los 2 momentos:

$$\delta_0 = 0 \equiv \delta_{0\to 1} = \frac{1}{EI}\left(S_I + S_{II} + S_{III}\right) = \frac{1}{EI}\left[\Omega_1 d_1 + \left(\frac{1}{2}L_1 M_0\right)\frac{2}{3}L_1 + \left(\frac{1}{2}L_1 M_1\right)\frac{1}{3}L_1\right] = 0 \Rightarrow \Omega_1 d_1 + \frac{M_0 L_1^2}{3} + \frac{M_1 L_1^2}{6} = 0 \Rightarrow L_1^2\left(\frac{2M_0 + M_1}{6}\right) = -\Omega_1 d_1 \Rightarrow \boxed{2M_0 + M_1 = -6\frac{\Omega_1 d_1}{L_1^2}}$$



Ecuación de los 3 momentos:

$$\varphi_i = \varphi_d \Rightarrow \alpha i + \beta i_{II} + \beta i_{III} = -\alpha d - \beta d_{II} - \beta d_{III} \Rightarrow \frac{1}{EIL_1}\left(S i_I + S i_{II} + S i_{III}\right) = -\frac{1}{EIL_2}\left(S d_I + S d_{II} + S d_{III}\right) \Rightarrow \frac{\Omega_1 D_1 + \left(\frac{1}{2}L_1 M_0\right)\frac{1}{3}L_1 + \left(\frac{1}{2}L_1 M_1\right)\frac{2}{3}L_1}{L_1} = -\frac{\Omega_2 D_2 + \left(\frac{1}{2}L_2 M_2\right)\frac{1}{3}L_2 + \left(\frac{1}{2}L_2 M_1\right)\frac{2}{3}L_2}{L_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_i D_i}{L_1} + L_1\left(\frac{M_0}{6} + \frac{M_1}{3}\right) = -\frac{\Omega_2 d_2}{L_2} - L_2\left(\frac{M_1}{3} + \frac{M_2}{6}\right) \Rightarrow L_1\frac{M_0 + 2M_1}{6} + L_2\frac{2M_1 + M_2}{6} = -\frac{\Omega_1 D_1}{L_1} - \frac{\Omega_2 d_2}{L_2} \Rightarrow L_1 M_0 + 2L_1 M_1 + 2L_2 M_1 + L_2 M_2 = -6\left(\frac{\Omega_1 D_1}{L_1} + \frac{\Omega_2 d_2}{L_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L_1 M_0 + 2\left(L_1 + L_2\right)M_1 + L_2 M_2 = -6\left(\frac{\Omega_1 D_1}{L_1} + \frac{\Omega_2 d_2}{L_2}\right)}$$

Ecuación de los dos momentos

$$\boxed{2M_0 + M_1 = -6\frac{\Omega_1 d_1}{L_1^{\ 2}}}$$

Ecuación de los tres momentos

$$\boxed{L_m M_{m-1} + 2\left(L_m + L_{m+1}\right) M_m + L_{m+1} M_{m+1} = -6\left(\frac{\Omega_m D_m}{L_m} + \frac{\Omega_{m+1} d_{m+1}}{L_{m+1}}\right)}$$