

7

TEOREMAS DE MOHR

PROYECTO DE ESTRUCTURAS

6 FASES:

- 1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica
- 2) Modelización: elaboración de modelo físico
- 3) Análisis: cálculo de solicitaciones y deformaciones de los elementos
- 4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos
- 5) Representación
- 6) Ejecución

PROYECTO DE ESTRUCTURAS

6 FASES:

- 1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica
- 2) Modelización: elaboración de modelo físico
- 3) Análisis: cálculo de solicitaciones y **deformaciones de los elementos**
- 4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos
- 5) Representación
- 6) Ejecución

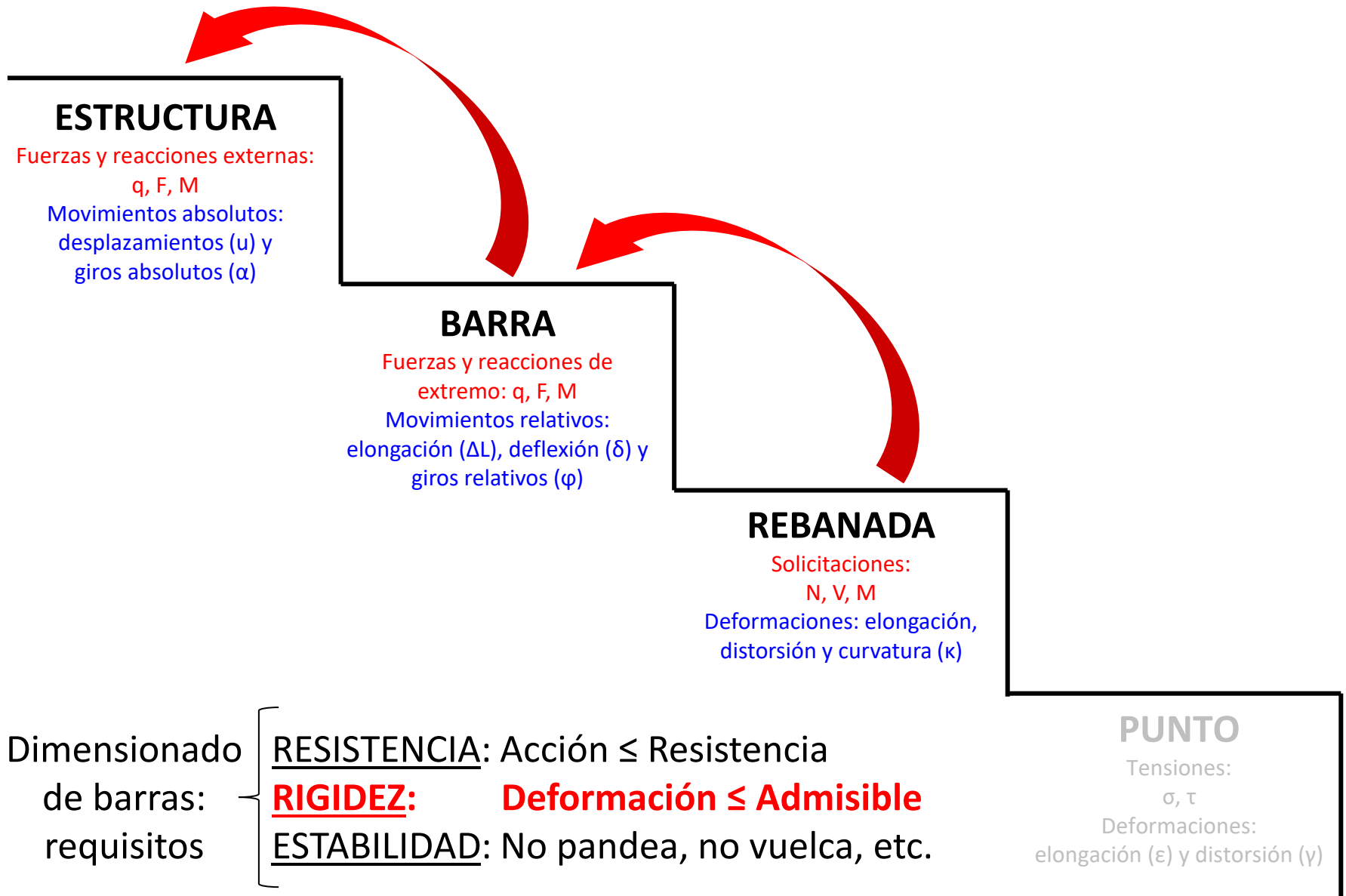
Dimensionado de barras: requisitos	{	<u>RESISTENCIA</u> :	Acción \leq Resistencia
		<u>RIGIDEZ</u> :	Deformación \leq Valores admisibles
		<u>ESTABILIDAD</u> :	No pandea, no vuelca, etc.

LIMITACIÓN DE DEFORMACIONES

Se limitan las deformaciones aunque no se rompan los elementos a resistencia



ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL



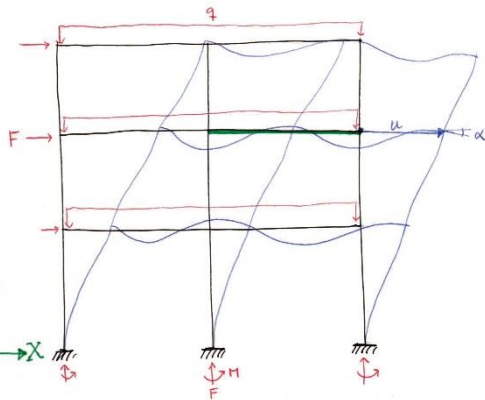
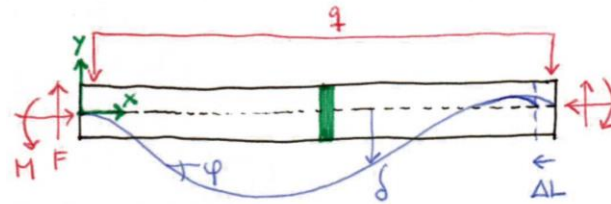
ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

ESTRUCTURA

Fuerzas y reacciones externas:

q, F, M

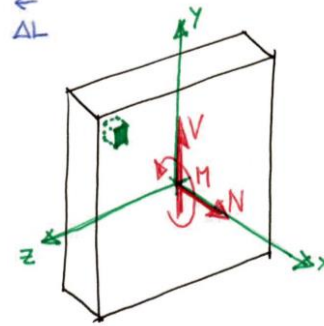
Movimientos absolutos:
desplazamientos (u) y
giros absolutos (α)



BARRA

Fuerzas y reacciones de
extremo: q, F, M

Movimientos relativos:
elongación (ΔL), deflexión (δ) y
giros relativos (φ)



REBANADA

Solicitaciones:
 N, V, M

Deformaciones: elongación,
distorsión y curvatura (κ)

Dimensionado
de barras:
requisitos

RESISTENCIA: Acción \leq Resistencia

RIGIDEZ: Deformación \leq Admisible

ESTABILIDAD: No pandea, no vuelca, etc.

PUNTO

Tensiones:

σ, τ

Deformaciones:

elongación (ϵ) y distorsión (γ)

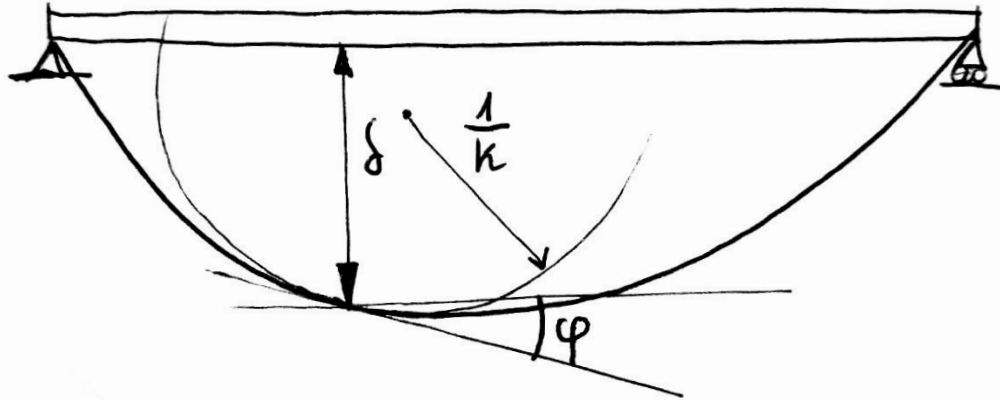
PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

- 1) Principio de rigidez relativa (o pequeñas deformaciones)
- 2) Principio de proporcionalidad
- 3) Principio de superposición de efectos
- 4) Principio de equilibrio estático
- 5) Principio de compatibilidad de deformaciones
- 6) Principio de Saint-Venant
- 7) Hipótesis de Navier-Bernoulli

MECANISMO DE FLEXIÓN

Para transmitir cargas aplicadas transversalmente a su directriz, la barra debe deformarse de tal manera que:

- La barra se **curva** (κ)
- Las secciones se ven obligadas a **girar** (φ)
- Algunos puntos **descienden** (δ)



Para conservar la energía total, la viga compensa la pérdida de energía potencial producida por el descenso de parte de su material a través de acumular energía de deformación elástica por flexión, de tal manera que al cesar el esfuerzo la viga recupera su posición inicial.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA DEFLEXIÓN

De ello resulta que:

- La curvatura mide lo “rápido” que varía el giro a lo largo de la barra
- El giro mide lo “rápido” que varía la deflexión a lo largo de la barra (su pendiente)

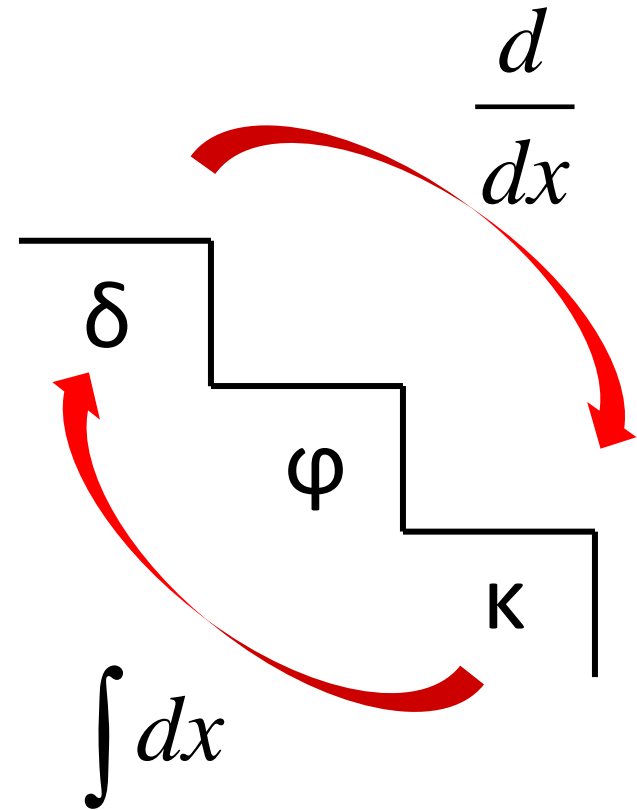
$$\kappa = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2\delta}{dx^2}$$

$$\varphi = \frac{d\delta}{dx}$$

En notación funcional:

$$\kappa(x) = \varphi'(x) = \delta''(x)$$

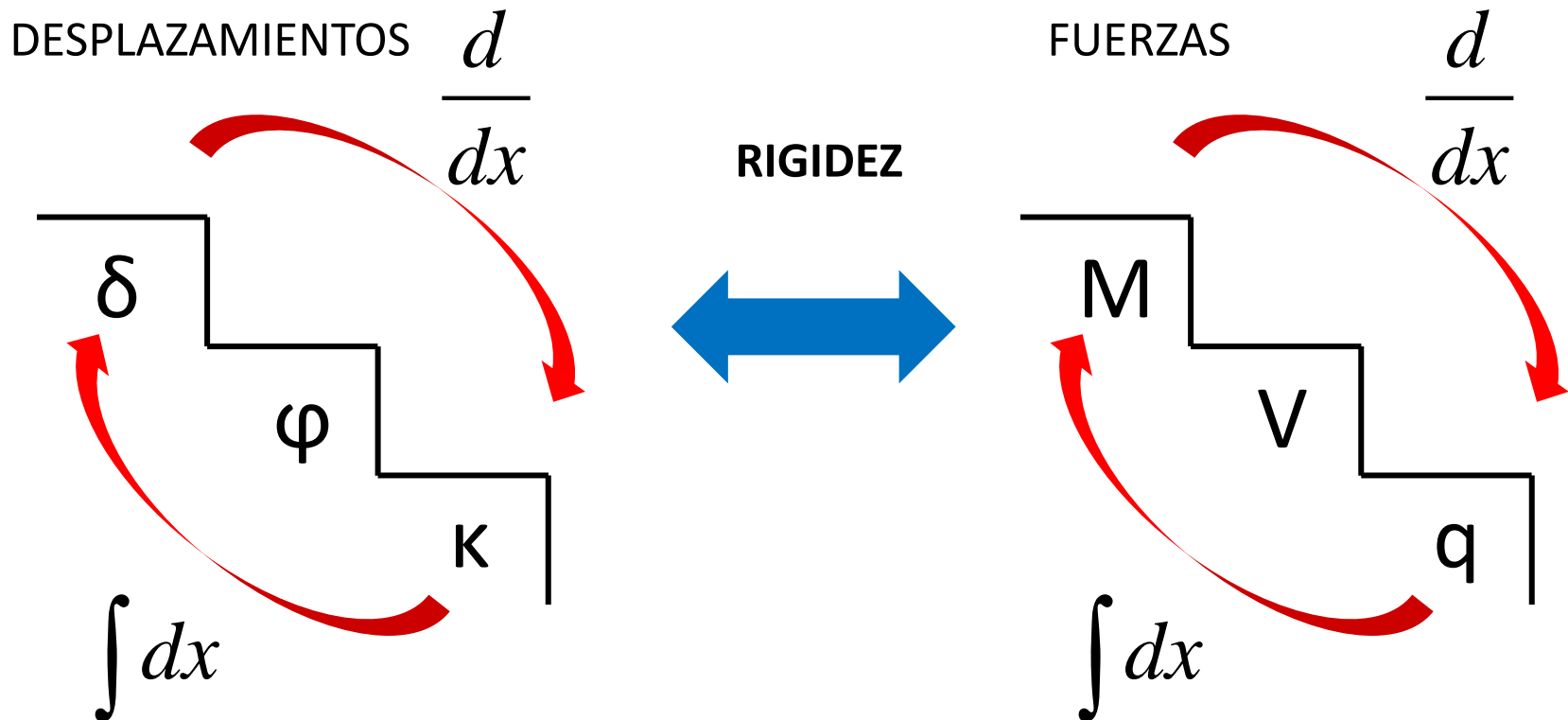
$$\varphi(x) = \delta'(x)$$



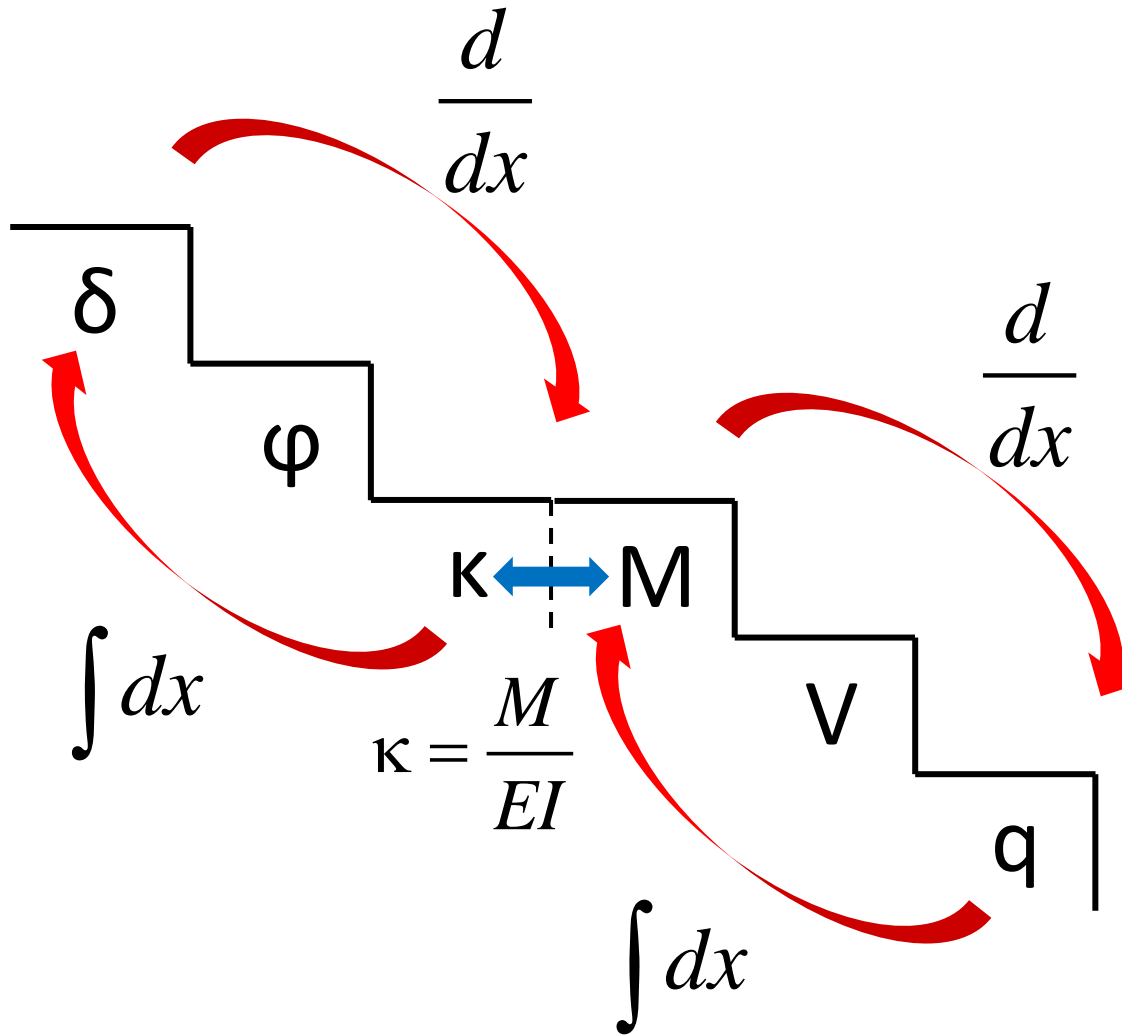
RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS

Las variables de **fuerza** (Momento – Cortante – Carga repartida) están relacionadas entre sí; y análogamente para las variables de **desplazamiento** (Deflexión – Giro – Curvatura).

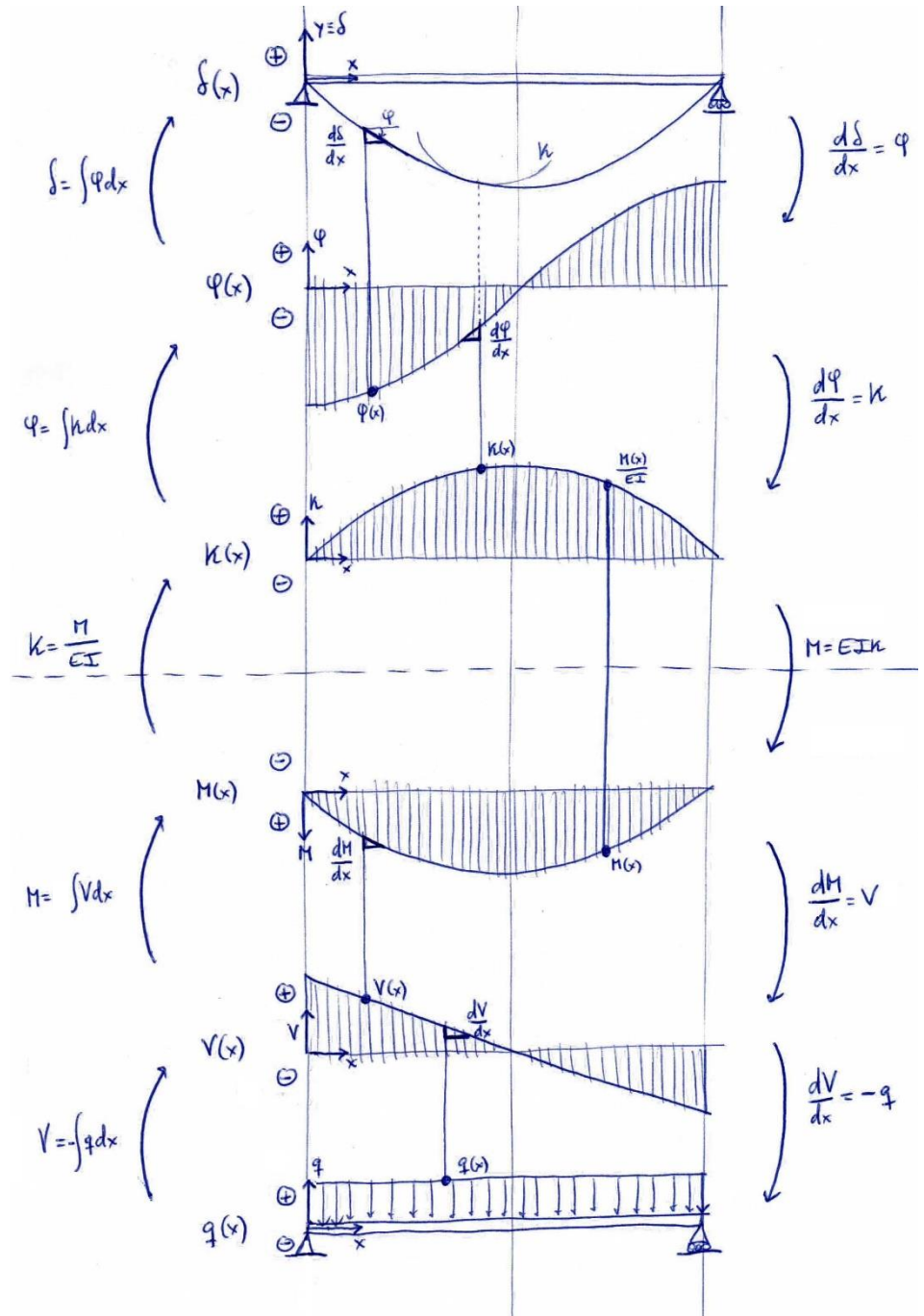
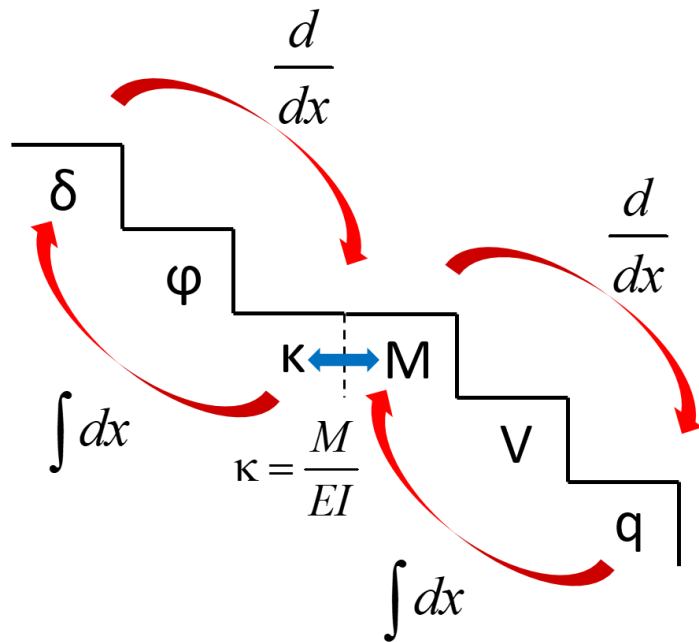
¿Hay alguna relación entre estos dos grupos? Como cualquier relación fuerza-desplazamiento, habrá un parámetro de tipo “**rigidez**” que las relacione



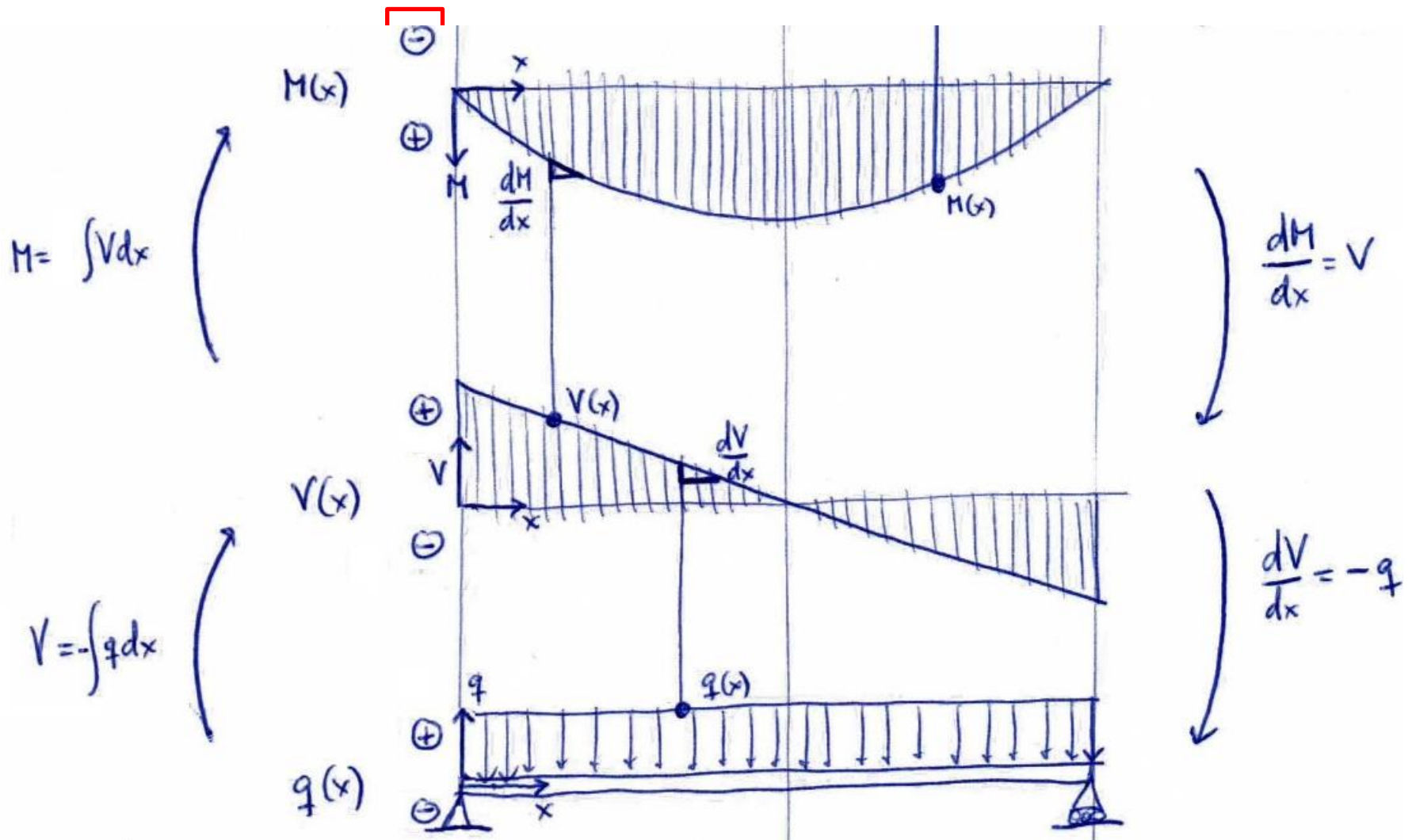
RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS



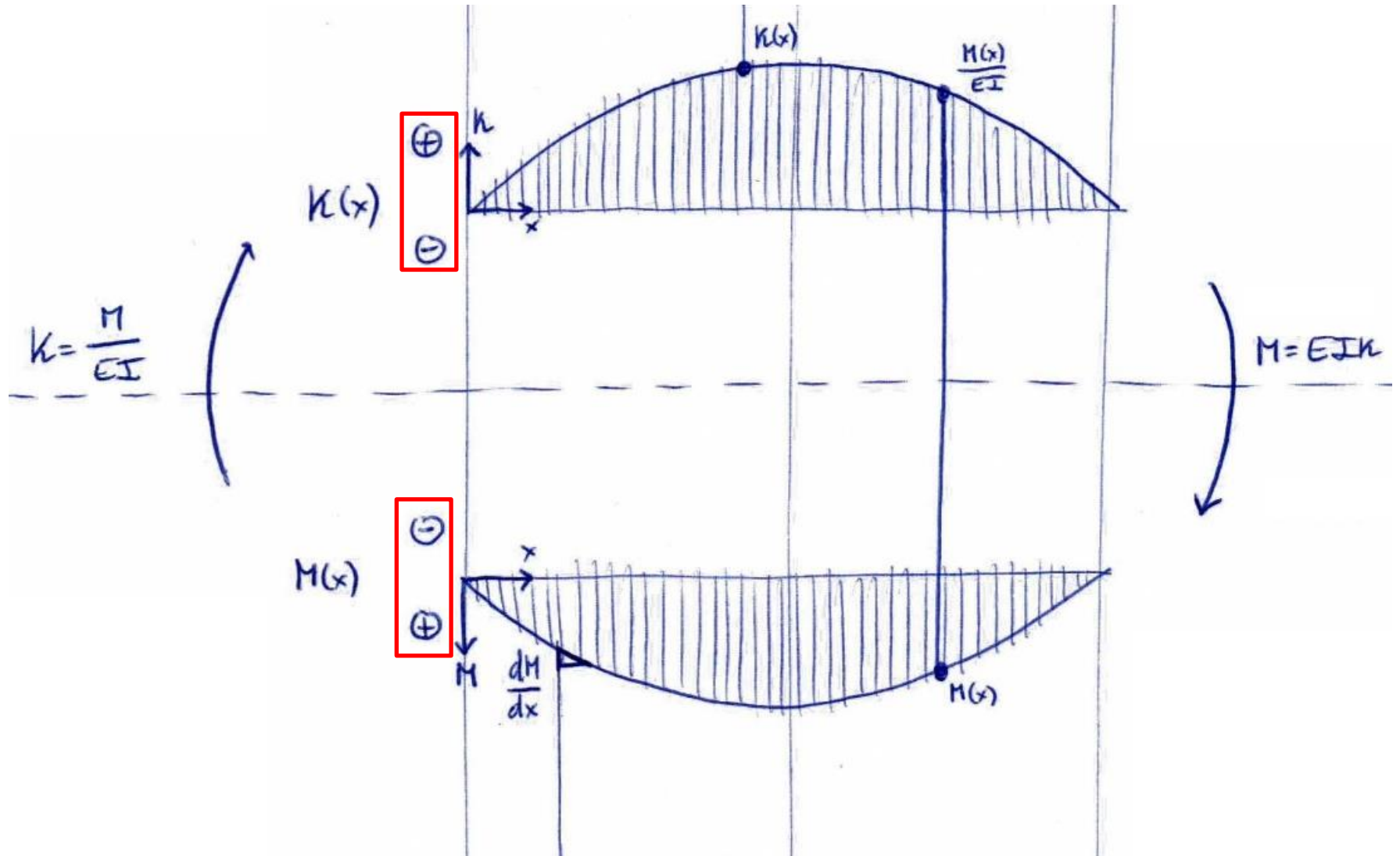
RELACIÓN DE DERIVACIÓN/INTEGRACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS



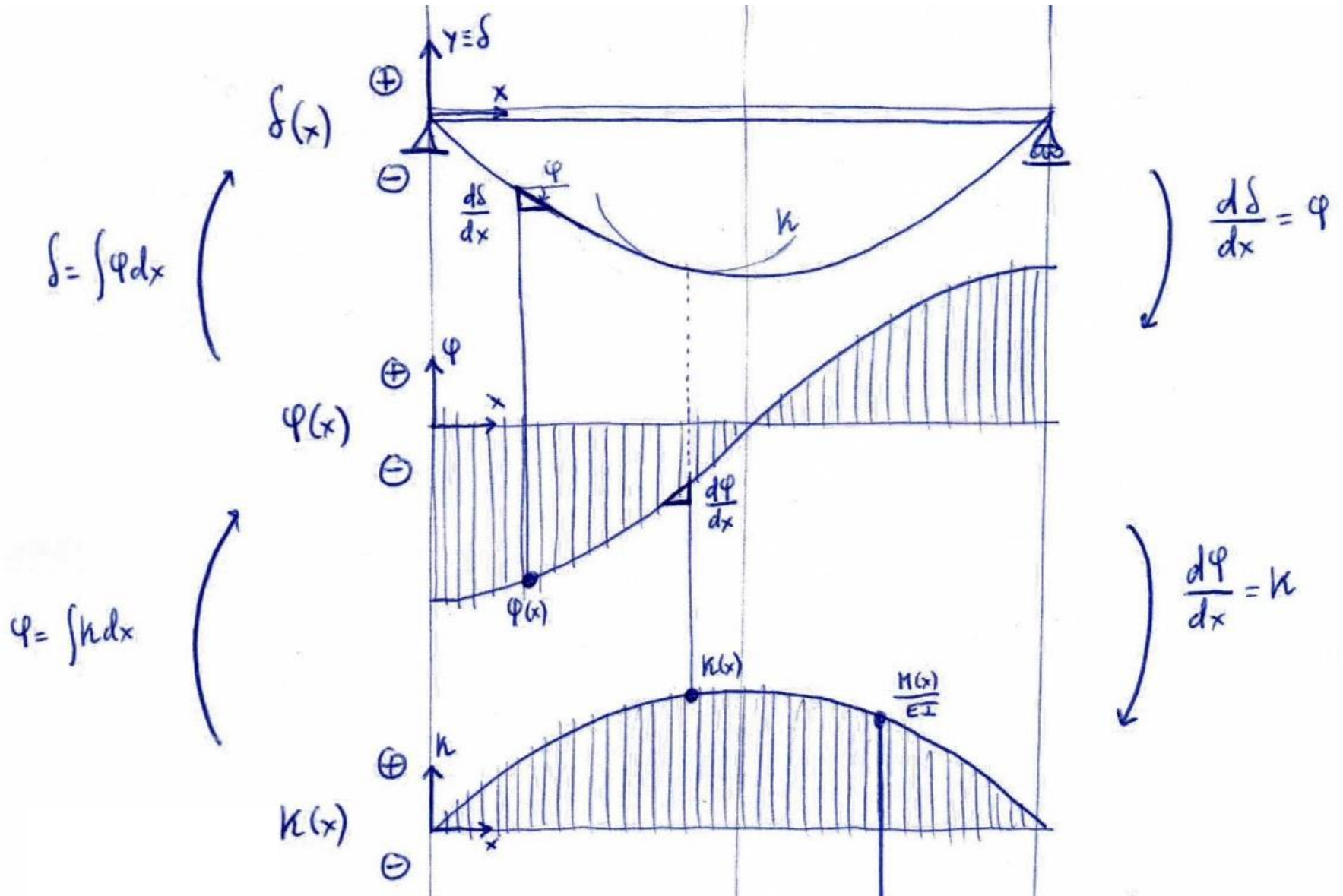
RELACIÓN DE DERIVACIÓN/INTEGRACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS



RELACIÓN DE DERIVACIÓN/INTEGRACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS



RELACIÓN DE DERIVACIÓN/INTEGRACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS



TEOREMAS DE ÁREA DE MOMENTO

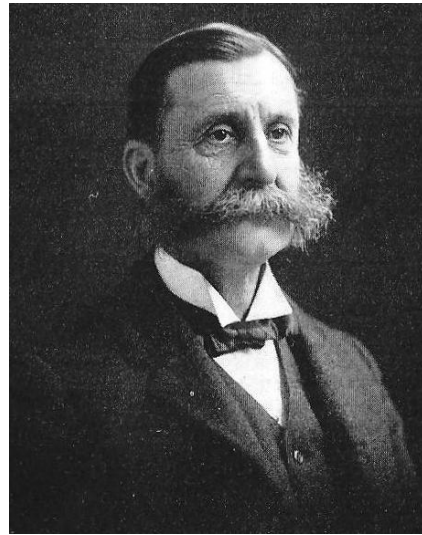
La obtención de deformaciones (deflexiones y giros) de una estructura es un procedimiento de una cierta complejidad.

Para solventar la dificultad, se desarrollaron los Teoremas de Área de Momento (más conocidos como **Teoremas de Mohr**), que permiten hallar deformaciones a partir de las leyes de sollicitaciones, mucho más sencillas de hallar.

Dichos teoremas se fundamentan en la relación diferencial entre movimientos y fuerzas.



Christian Otto Mohr (1835 – 1918)



Charles Ezra Greene (1842 – 1903)



Heinrich Müller-Breslau (1842 – 1903)



J. A. Charles Bresse (1822 – 1883)

TEOREMAS DE ÁREA DE MOMENTO

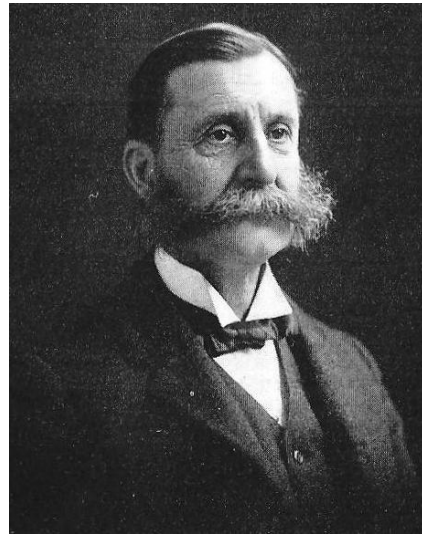
Los **Teoremas de Área de Momento** o **Teoremas de Mohr** son 4:

- 1^{er} Teorema: cálculo de φ a partir de $M(x)$
- 2^o Teorema: cálculo de δ a partir de $M(x)$
- 3^{er} Teorema: cálculo de φ a partir de $V(x)$ en la viga conjugada
- 4^o Teorema: cálculo de δ a partir de $M(x)$ en la viga conjugada

Además, se incluyen en este tema las **Ecuaciones de Navier-Bresse**, útiles para el cálculo de desplazamientos en piezas curvas.



Christian Otto Mohr (1835 – 1918)



Charles Ezra Greene (1842 – 1903)

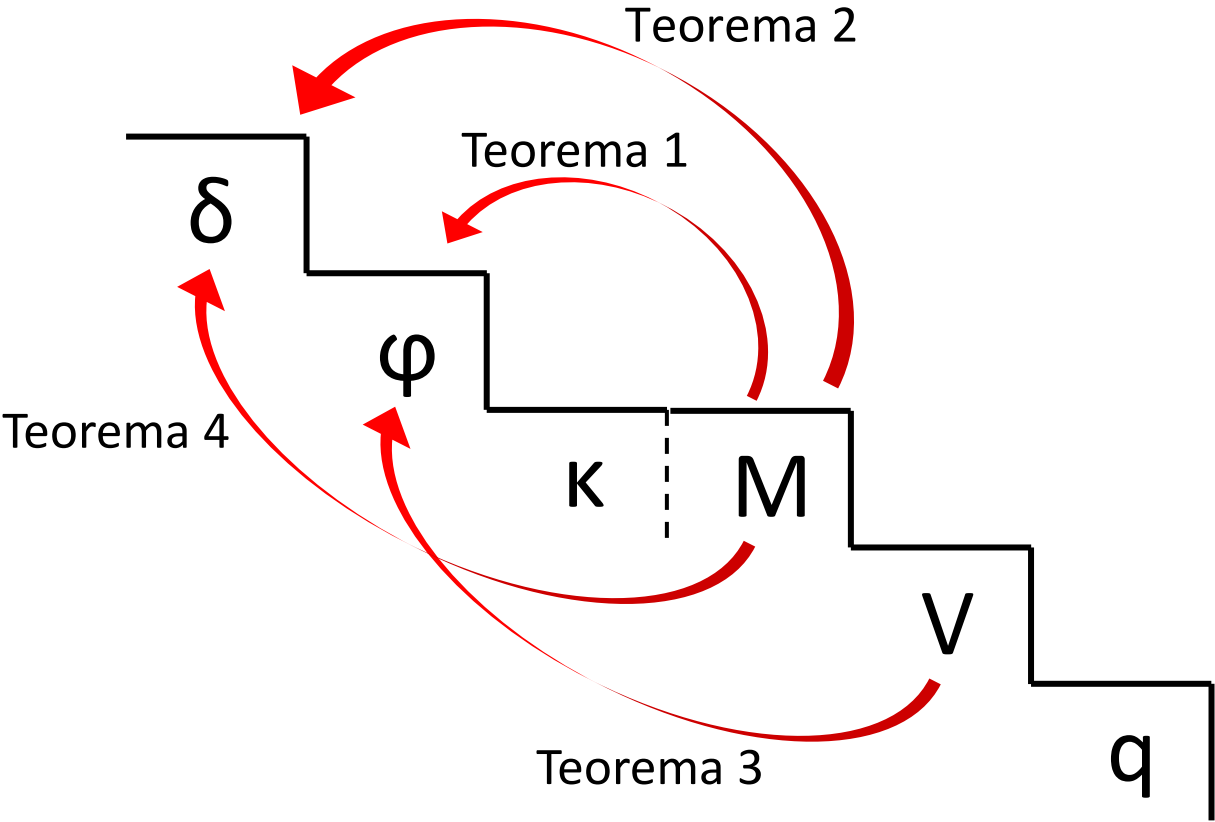


Heinrich Müller-Breslau (1842 – 1903)

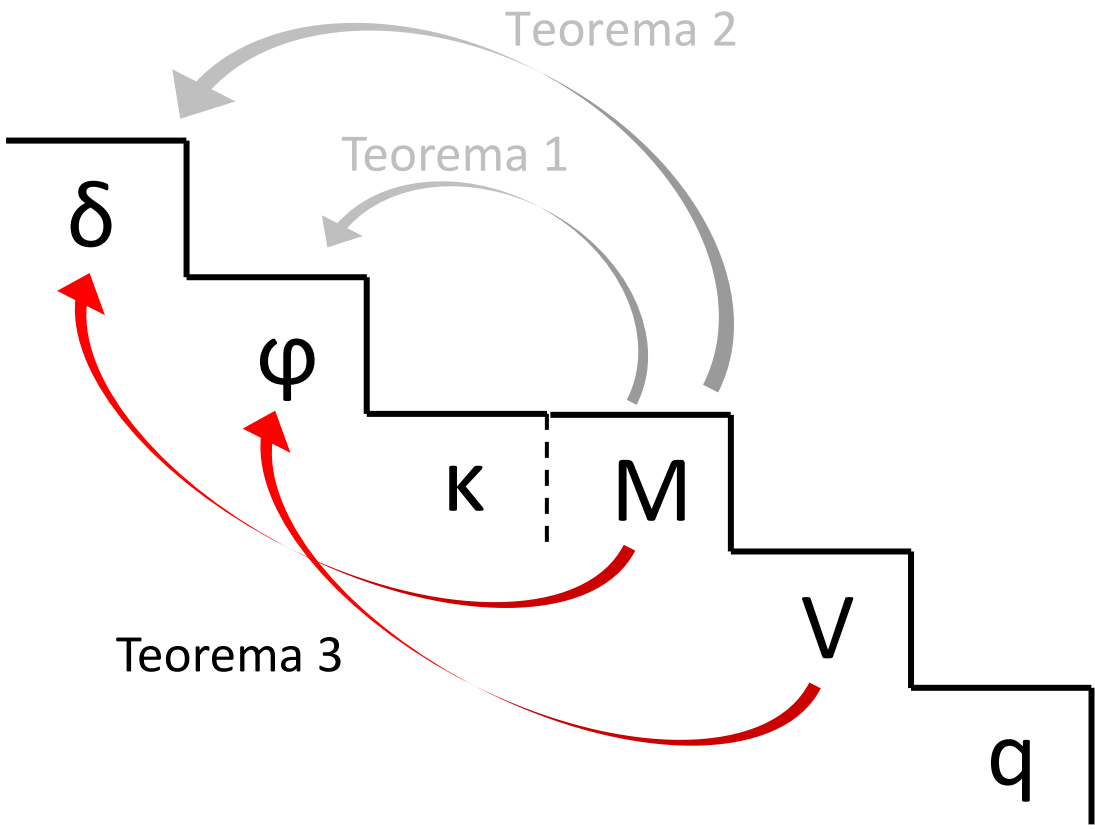


J. A. Charles Bresse (1822 – 1883)

TEOREMAS DE ÁREA DE MOMENTO



TEOREMAS DE ÁREA DE MOMENTO



(PRELIMINARES: CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA)

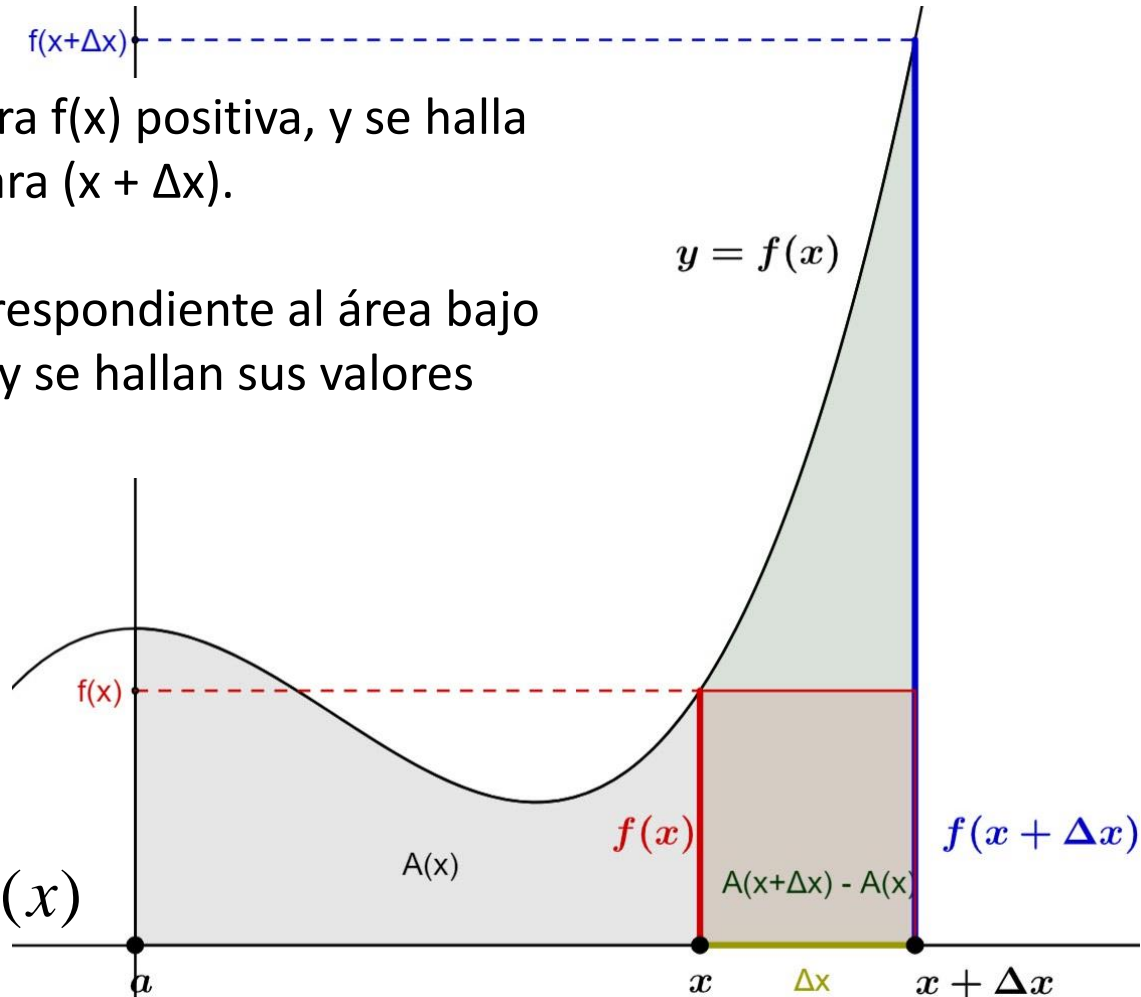
El Teorema Fundamental del Cálculo relaciona los conceptos de derivada e integral con el área bajo funciones. → <https://www.geogebra.org/m/hBHqwT4N>

Se define una función cualquiera $f(x)$ positiva, y se halla su valor para una abscisa x y para $(x + \Delta x)$.

Se define otra función $A(x)$ correspondiente al área bajo la función en el intervalo $[a, x]$, y se hallan sus valores para x y para $(x + \Delta x)$.

El área hasta $(x + \Delta x)$ se obtiene aproximadamente como suma del área hasta x más el rectángulo de base Δx y altura $f(x)$:

$$A(x + \Delta x) = A(x) + \Delta x \cdot f(x)$$



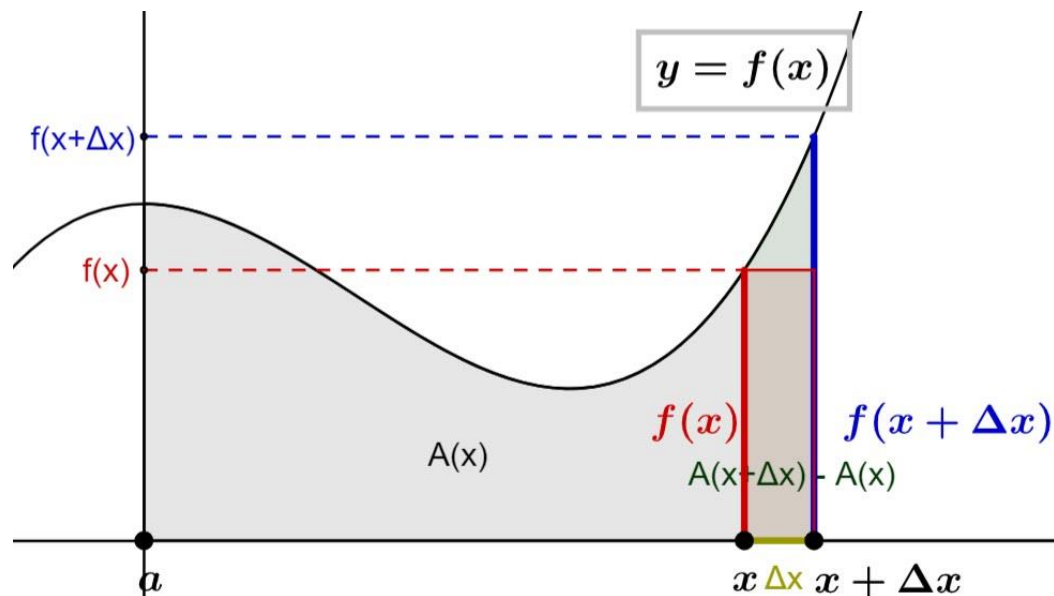
(PRELIMINARES: CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA)

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta x \approx dx$, y la suma del área más el rectángulo es exacta, no aproximada, y el rectángulo es un diferencial de área:

$$A(x + dx) = A(x) + dx \cdot f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{A(x + dx) - A(x)}{dx} = \frac{dA}{dx}$$

$$f(x) = A'(x) \Rightarrow A(x) = \int f(x)dx + cte$$

Se demuestra así que la función $f(x)$ y la función $A(x)$, definida como el área bajo $f(x)$, tienen relación de derivación/integración



(PRELIMINARES: CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA)

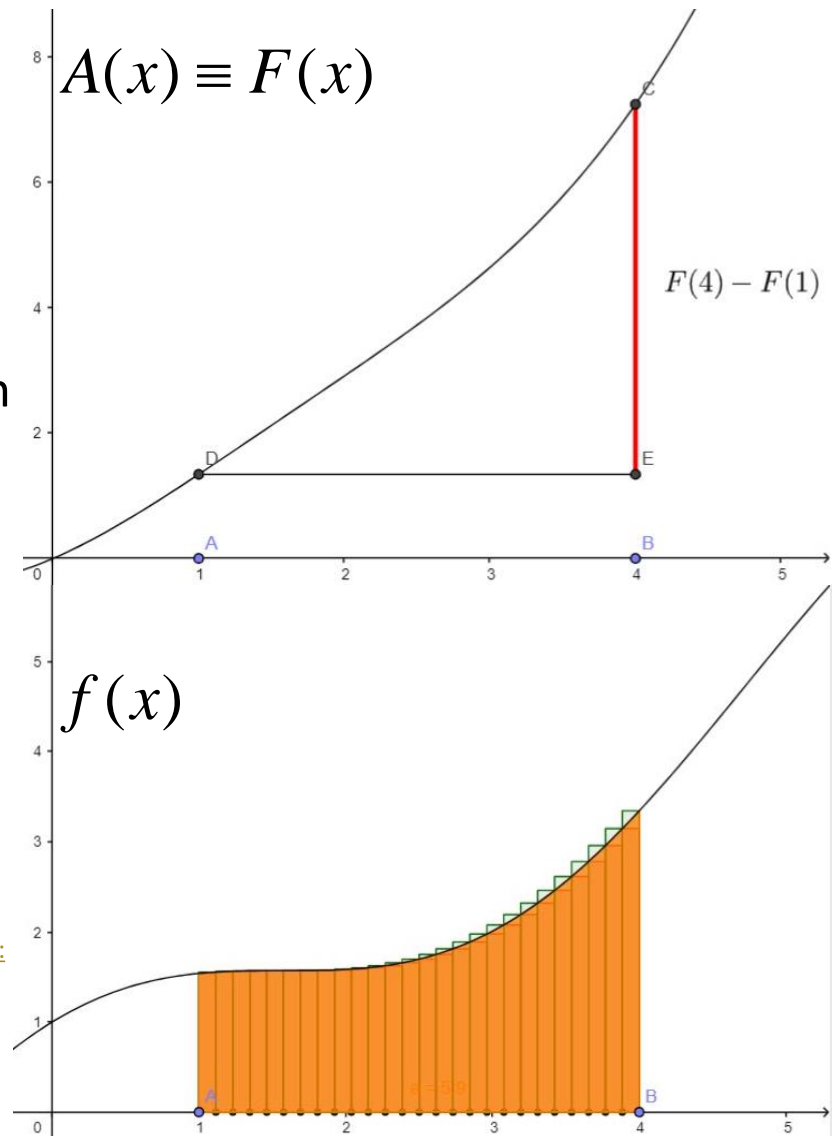
Si se representan gráficamente ambas funciones, $f(x)$ y $A(x)$ (a la cual llamamos $F(x)$), se comprueba que la pendiente de $F(x)$ es igual a $f(x)$ (definición de derivada), mientras que, por definición, el valor del área bajo la curva de $f(x)$ desde el origen es $F(x)$. Esta área se puede interpretar como un sumatorio de infinitos diferenciales de área rectangulares.

→ <https://www.geogebra.org/m/ekURHKh2>

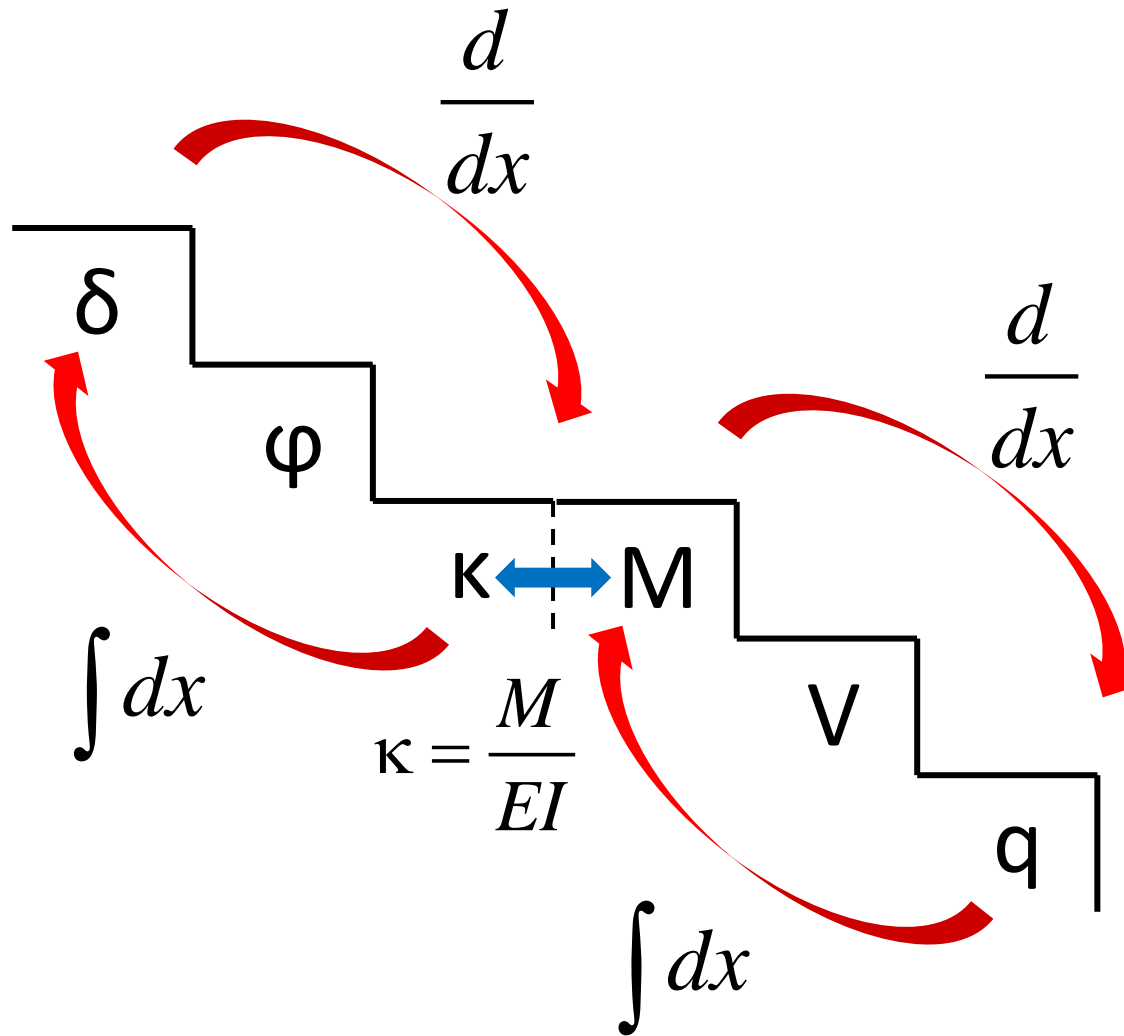
Por tanto, el valor del área bajo la curva entre dos puntos A y B se puede calcular como la diferencia de la función F (integral) entre A y B (Regla de Barrow)

→ [https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo#/media/File:Fundamental_theorem_of_calculus_\(animation\).gif](https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo#/media/File:Fundamental_theorem_of_calculus_(animation).gif)

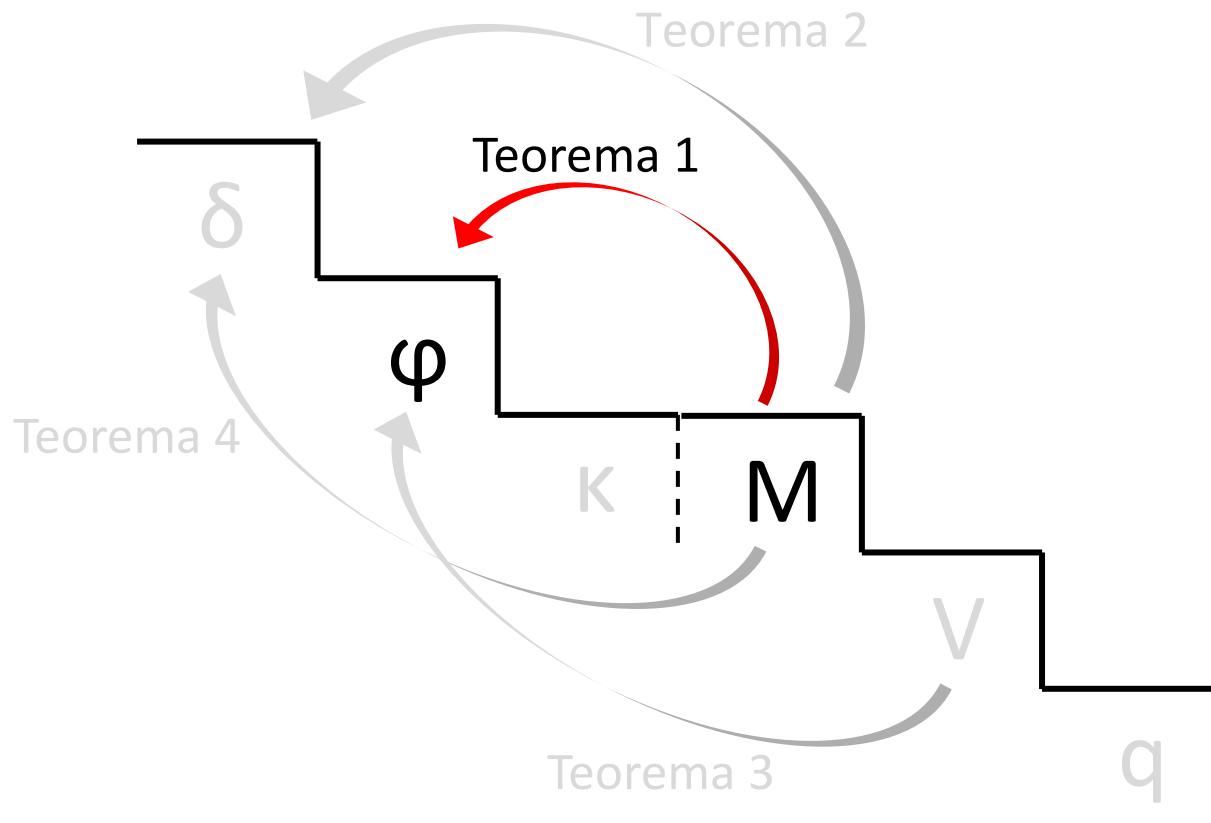
$$\int_A^B f(x)dx = F(B) - F(A)$$



RELACIÓN DE DERIVACIÓN/INTEGRACIÓN ENTRE MOVIMIENTOS Y FUERZAS



1^{ER} TEOREMA DE MOHR



1^{ER} TEOREMA DE MOHR

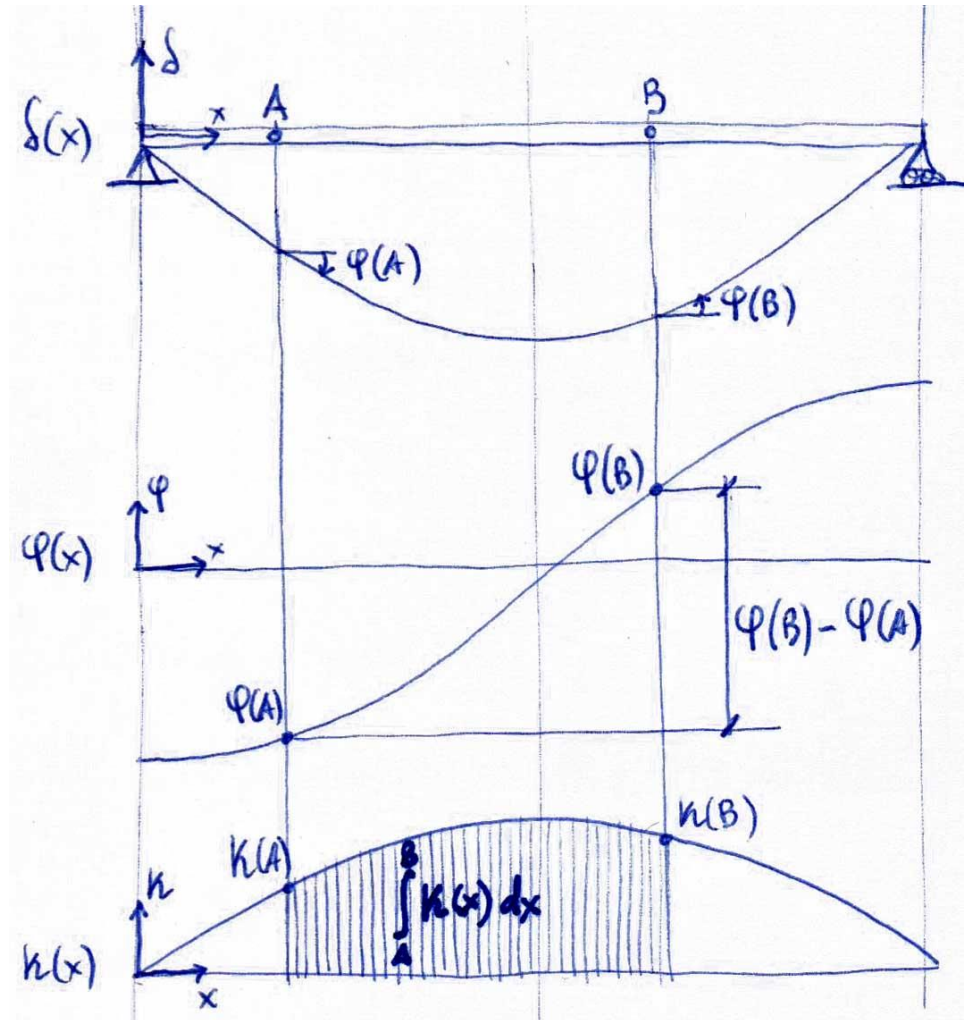
El 1^{er} Teorema es simplemente la aplicación de la Regla de Barrow, donde la función derivada es la curvatura $\kappa(x)$ y la función integral (área) es el giro $\varphi(x)$.

Regla de Barrow:

$$\int_A^B f(x) dx = F(B) - F(A)$$

1er Teorema de Mohr:

$$\int_A^B \kappa(x) dx = \varphi(B) - \varphi(A)$$



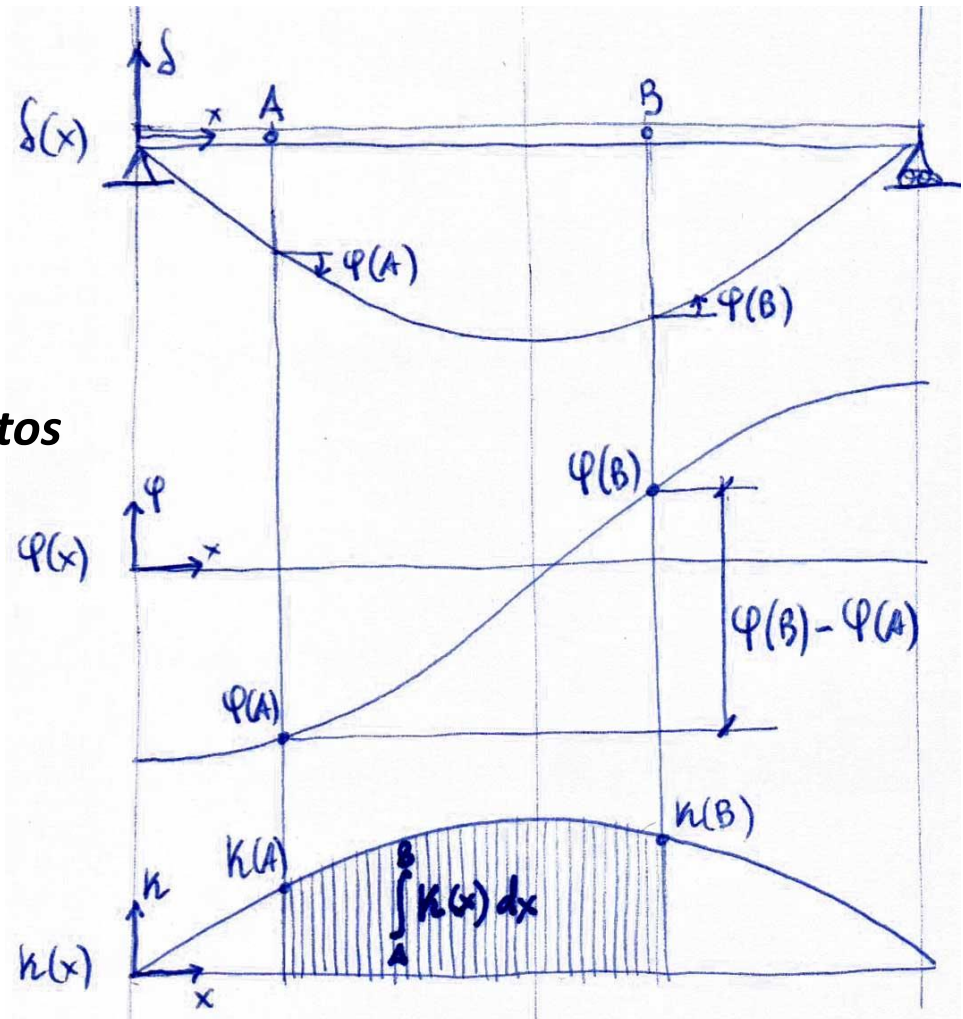
1^{ER} TEOREMA DE MOHR

Dado que es más frecuente haber calculado la ley de momentos en lugar de la de curvaturas, el 1^{er} Teorema se suele expresar en función de $M(x)$:

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

*“El **ángulo** que forman las tangentes a la deflexión en dos puntos A y B es igual al **área del diagrama de momentos dividida por la rigidez de la sección**”*

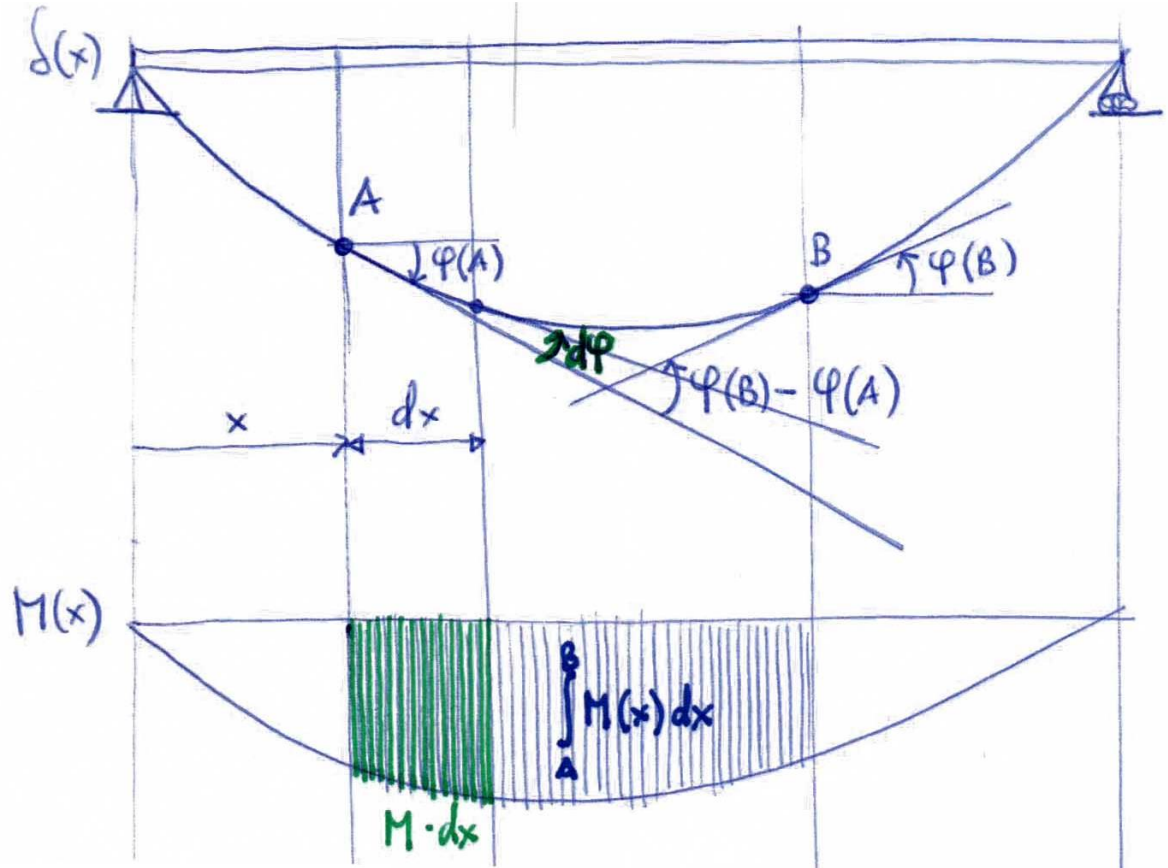
El producto $E \cdot I$ suele ser constante en la barra; de lo contrario habría que expresarlos como $E(x)$ e $I(x)$



1^{ER} TEOREMA DE MOHR

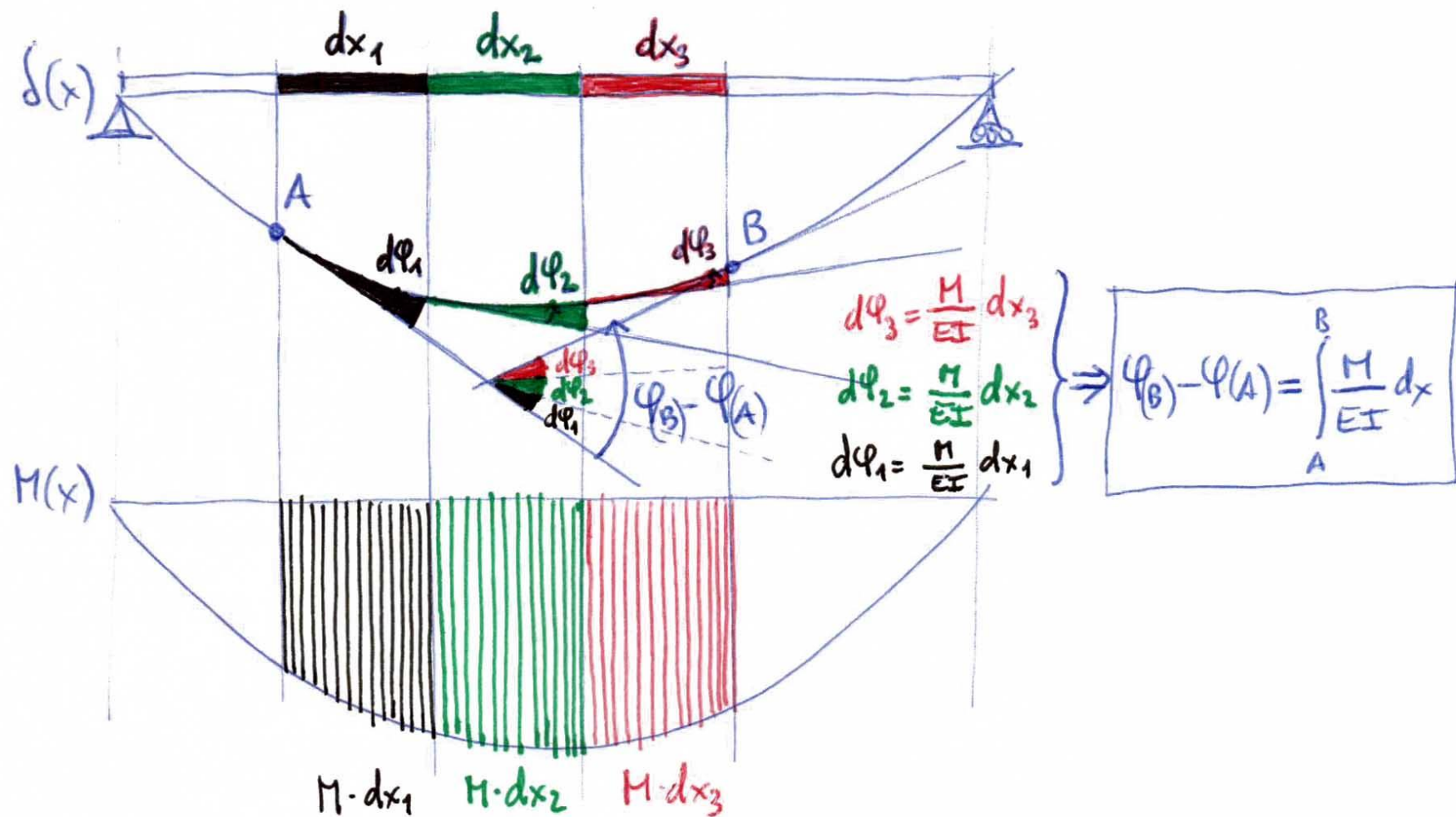
La interpretación gráfica es simple: se divide el ángulo relativo, $\varphi(B) - \varphi(A)$, en infinitos diferenciales de ángulo ($d\varphi$) correspondiente a cada porción de viga (dx), y sabiendo que cada $d\varphi$ es igual al área rectangular de base dx y altura $M(x)/EI$, se concluye que la suma (integral) de todos los $d\varphi$ es igual al **área bajo la gráfica de $M(x)/EI$ entre A y B**:

$$\left. \begin{aligned} \kappa(x) &= \frac{M(x)}{EI} \\ \kappa(x) &= \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d\varphi = dx \frac{M(x)}{EI}$$



1^{ER} TEOREMA DE MOHR

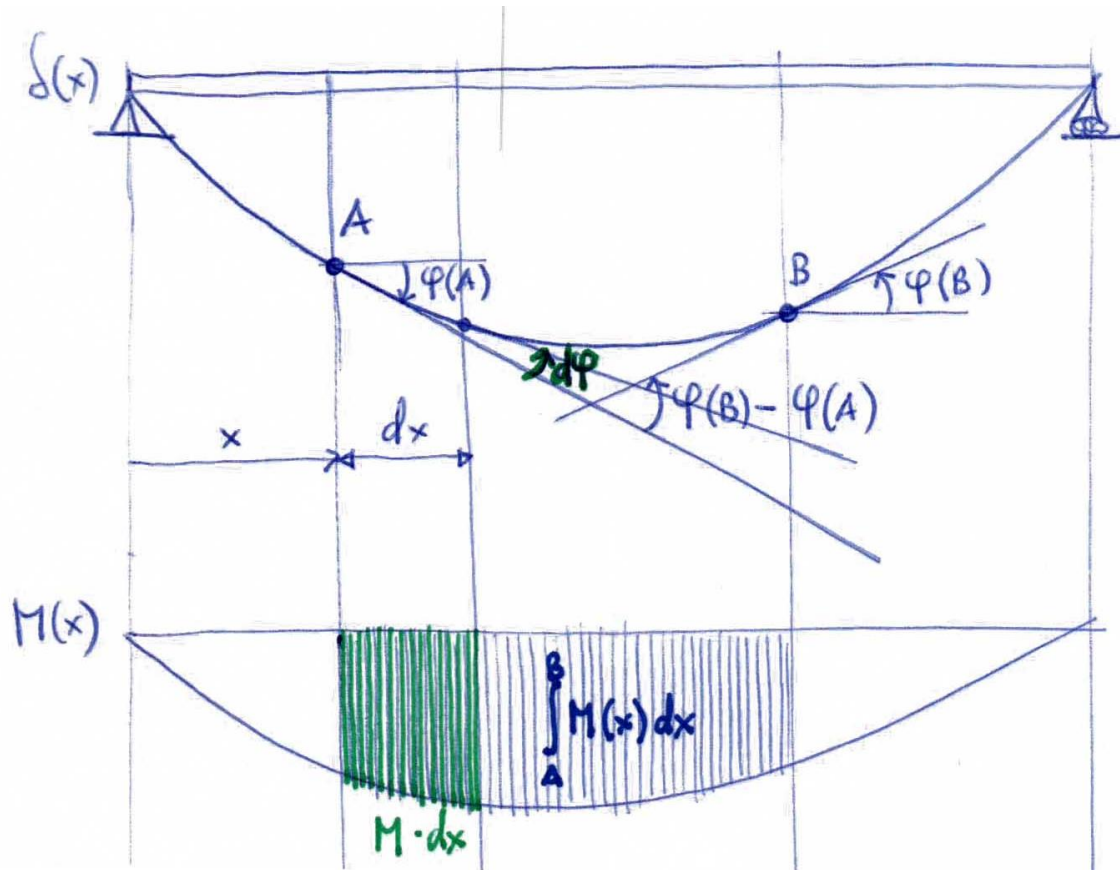
→ <https://www.geogebra.org/m/RJvwsdNJ>



1^{ER} TEOREMA DE MOHR

Por tanto, desde un punto de vista gráfico, la expresión del 1^{er} Teorema sería:

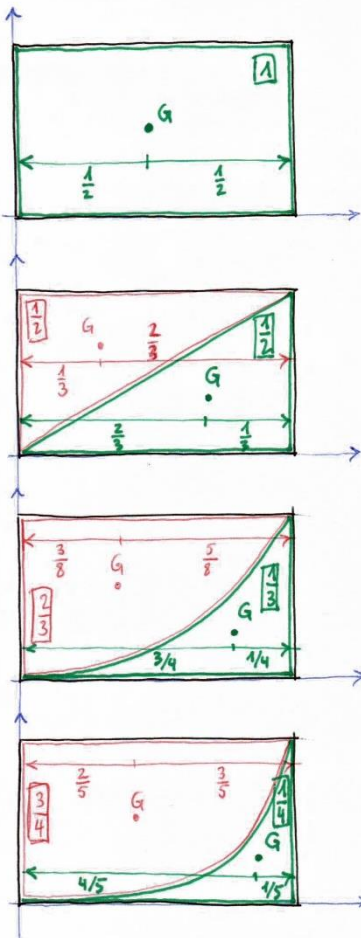
$$\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{A_{M,A \rightarrow B}}{EI}$$



1^{ER} TEOREMA DE MOHR

Para el cálculo de áreas de gráficas de momentos de 2º o 3er grado, en algunos casos simples se pueden usar prontuarios en lugar de resolver analíticamente la integral:

Grado función (n)	Área / Área rectángulo = $1/(n + 1)$
0	1/1
1	1/2
2	1/3
3	1/4



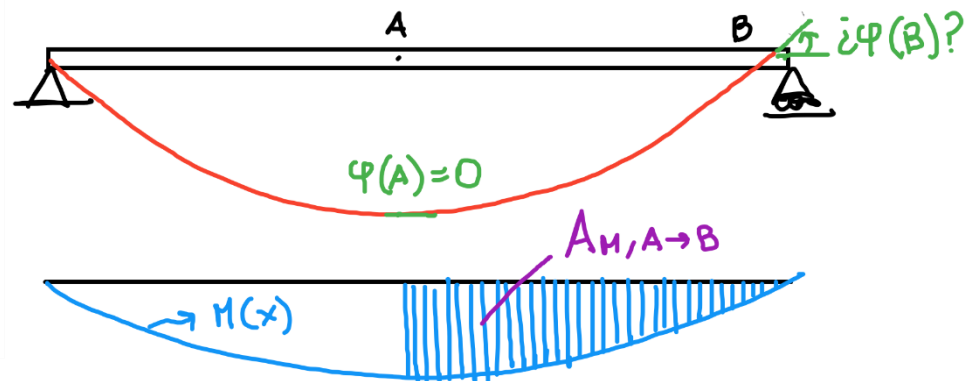
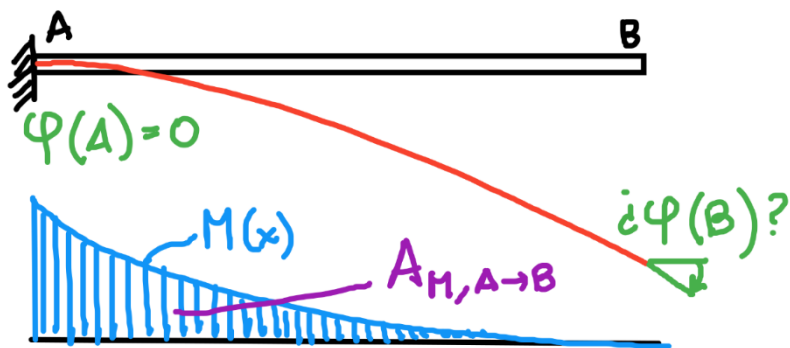
1^{ER} TEOREMA DE MOHR: APLICACIÓN A CÁLCULO DE GIROS

El 1^{er} Teorema de Mohr no permite obtener directamente el valor del giro en un punto cualquiera B sino el giro relativo entre dos de ellos: $\varphi(B) - \varphi(A)$.

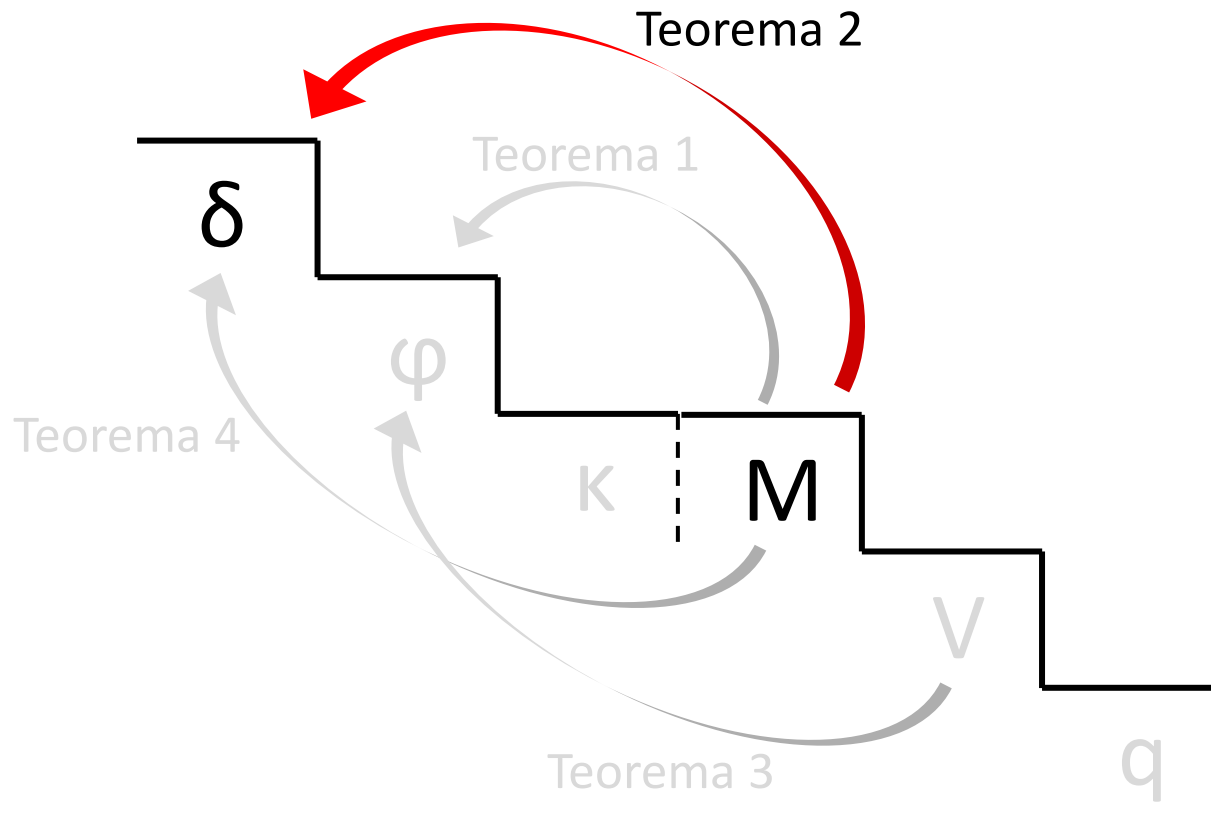
La única manera de obtener explícitamente $\varphi(B)$ es aplicar dicho teorema entre el punto de interés (B) y otro punto auxiliar A cuyo giro sea conocido, típicamente un giro nulo:

- En empotramientos de ménsulas
- En centros de vigas simétricas de geometría y cargas

De lo que resulta:
$$\varphi(B) = \varphi(B) - 0 = \varphi(B) - \varphi(A) = \frac{A_{M,A \rightarrow B}}{EI}$$



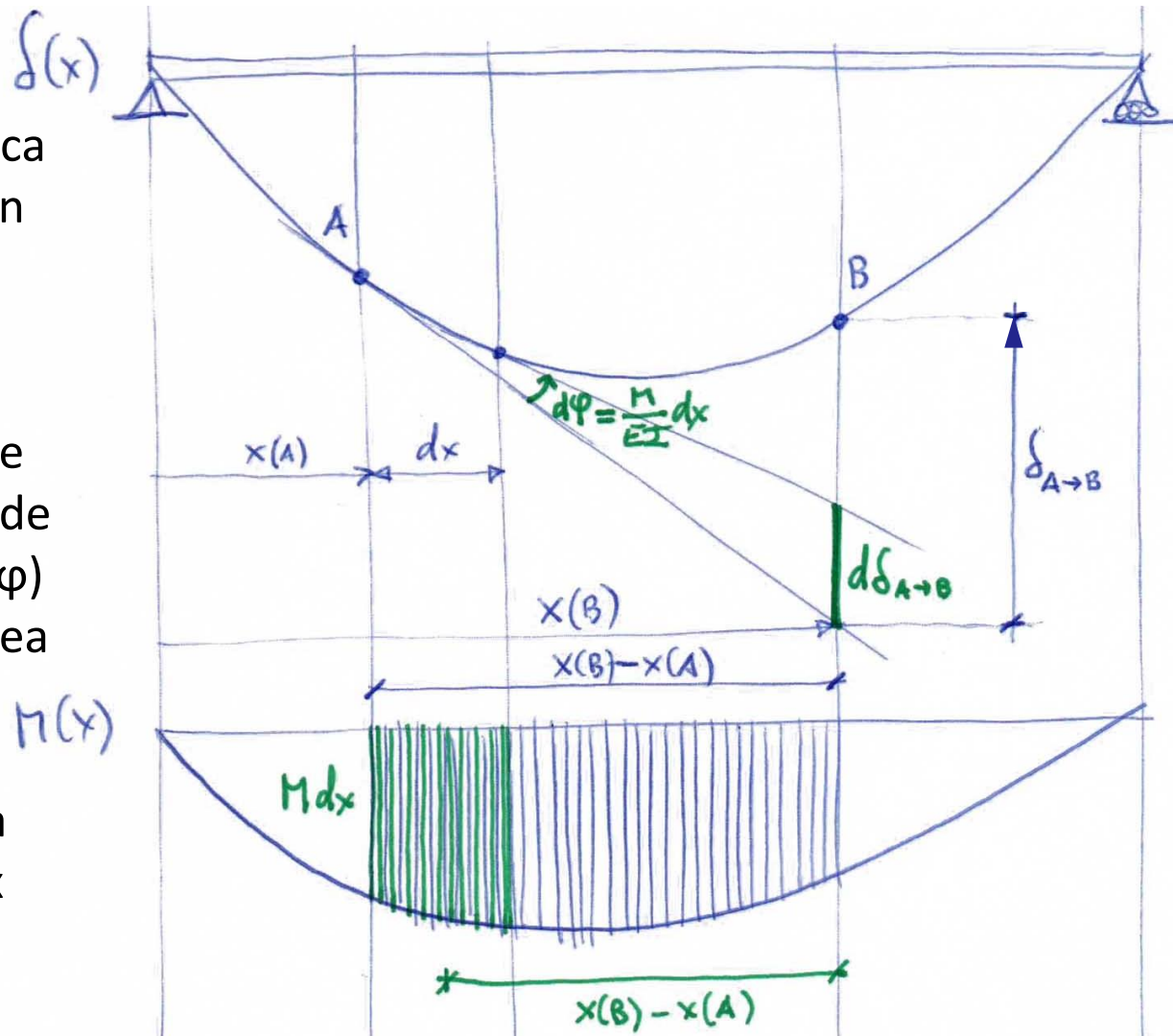
2º TEOREMA DE MOHR



2º TEOREMA DE MOHR

El 2º Teorema sirve para hallar la distancia vertical entre la tangente trazada desde un punto A de la deflexión y otro punto B de la misma, con ese sentido.

La interpretación geométrica es similar al 1º Teorema. En este caso se divide la distancia $\delta_{A \rightarrow B}$ en infinitos diferenciales de distancia ($d\delta_{A \rightarrow B}$), donde cada uno de ellos es igual al diferencial de ángulo correspondiente ($d\phi$) por la distancia sobre la línea tangente, que por el principio de pequeñas deformaciones es igual a la distancia horizontal $x(B) - x$



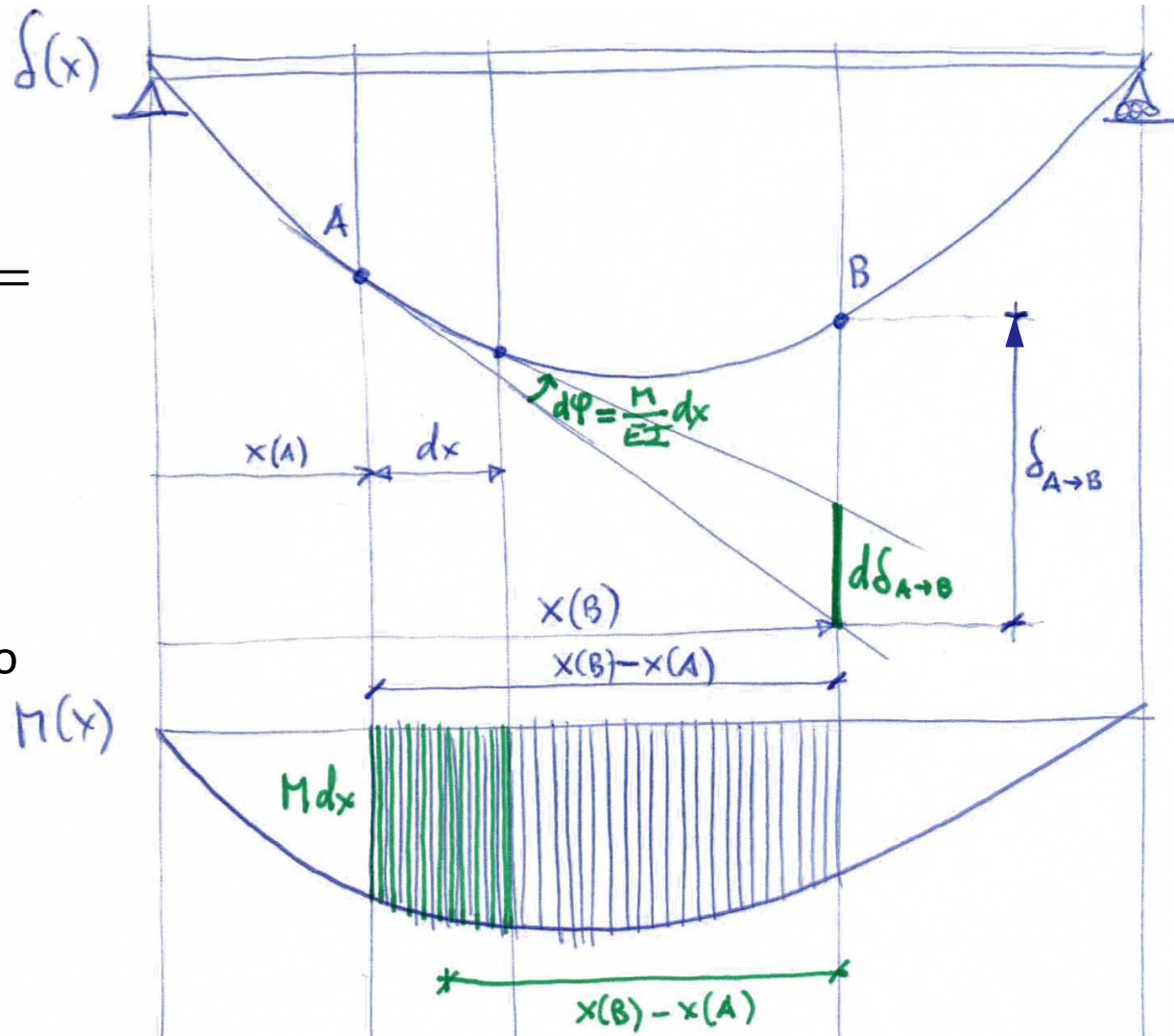
2º TEOREMA DE MOHR

Por el 1º Teorema se conoce la relación entre $d\varphi$ y $M(x)$: $d\varphi = dx \frac{M(x)}{EI}$

Luego el diferencial de distancia vertical ($d\delta_{A \rightarrow B}$) es:

$$\begin{aligned} d\delta_{A \rightarrow B} &= d\varphi \cdot (x_B - x) = \\ &= dx \frac{M(x)}{EI} (x_B - x) \end{aligned}$$

Que es igual al **momento estático** de cada rectángulo de área de momento (diferencial de área por la distancia horizontal al punto B)



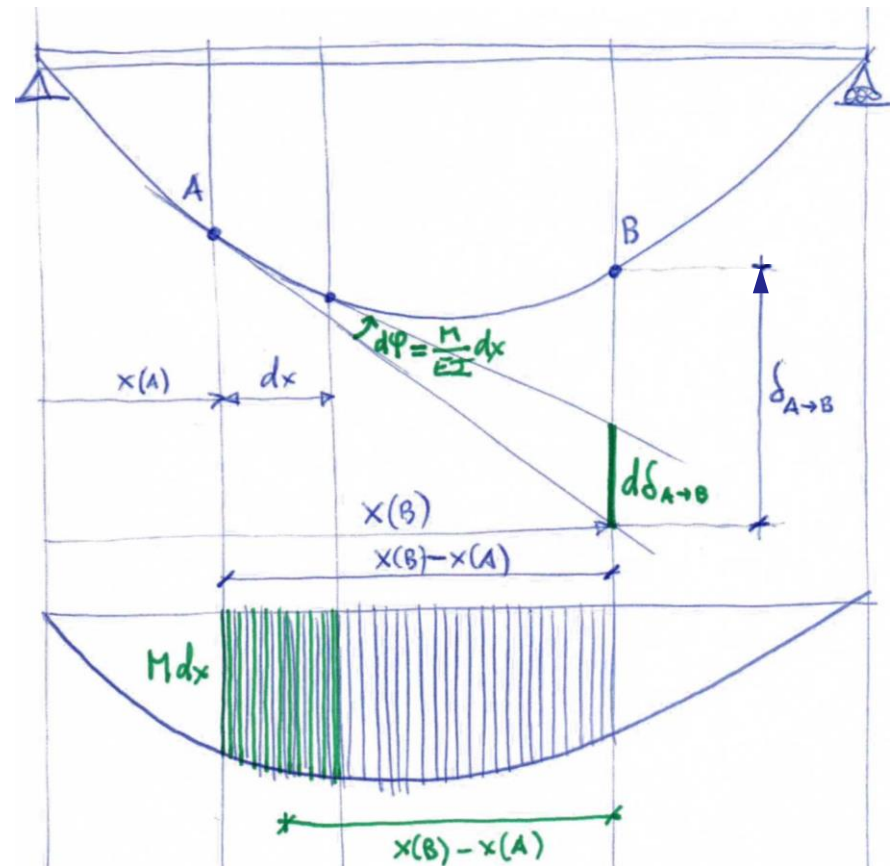
2º TEOREMA DE MOHR

Luego la distancia vertical total ($\delta_{A \rightarrow B}$) se obtiene integrando todos los diferenciales, o lo que es lo mismo, como el **momento estático respecto de B del área bajo la gráfica de $M(x)/EI$ entre A y B:**

$$\delta_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{M(x)}{EI} (x_B - x) dx$$

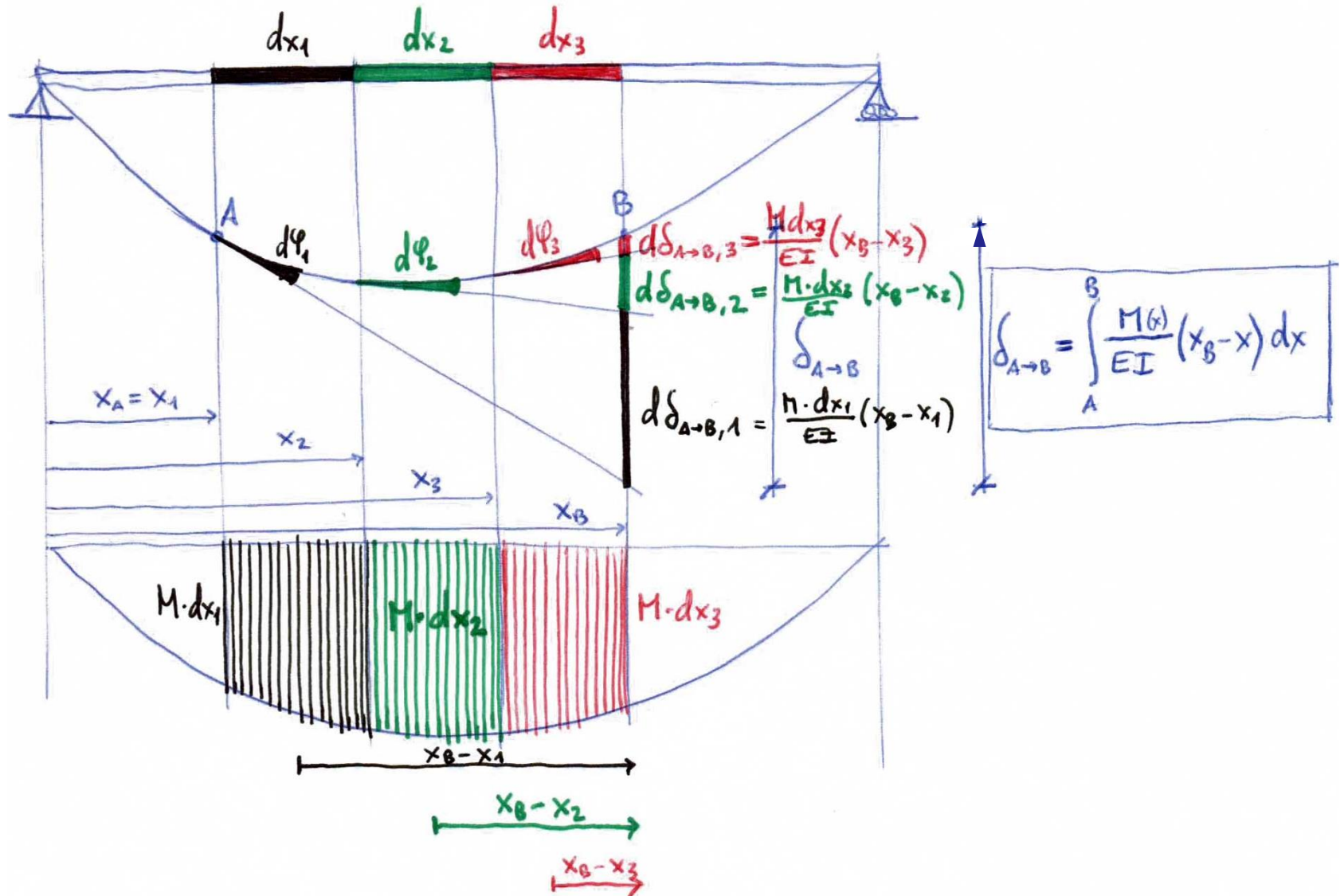
$$\delta_{A \rightarrow B} = \frac{S_{M,A \rightarrow B}}{EI} = \frac{A_{M,A \rightarrow B} \cdot d_{G \rightarrow B}}{EI}$$

“La **distancia vertical** entre la tangente trazada desde un punto A de la deflexión y la vertical desde otro punto B es igual al **momento estático respecto de B del área del diagrama de momentos dividida por la rigidez de la sección**”



2º TEOREMA DE MOHR

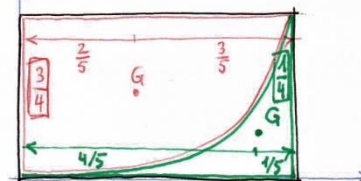
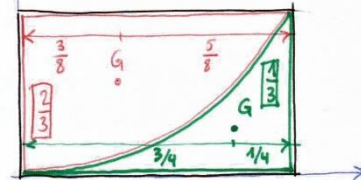
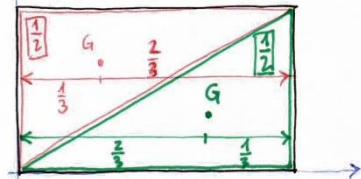
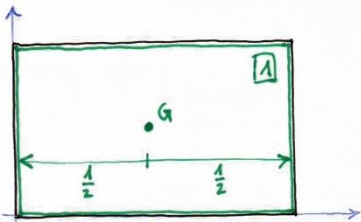
→ <https://www.geogebra.org/m/RJvwsdNJ>



2º TEOREMA DE MOHR

Análogamente, para el cálculo de los momentos estáticos de las gráficas de momentos en algunos casos simples se pueden utilizar prontos de área y centroide:

Grado función (n)	Área / Área rectángulo = $1/(n + 1)$	x_G / Base rectángulo = $(n + 1)/(n + 2)$
0	1/1	1/2
1	1/2	2/3
2	1/3	3/4
3	1/4	4/5



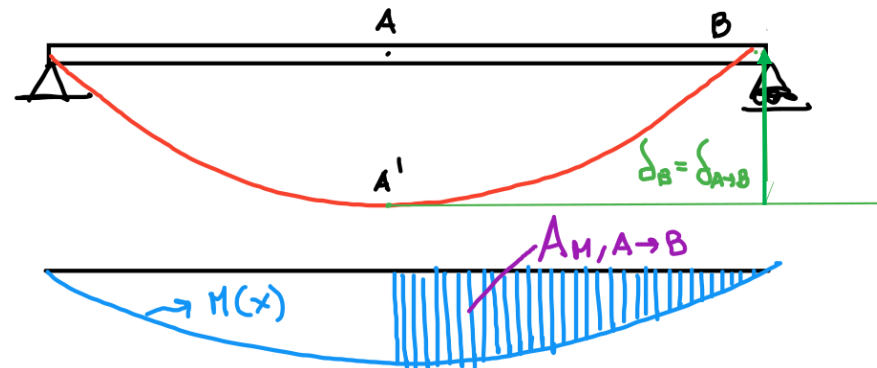
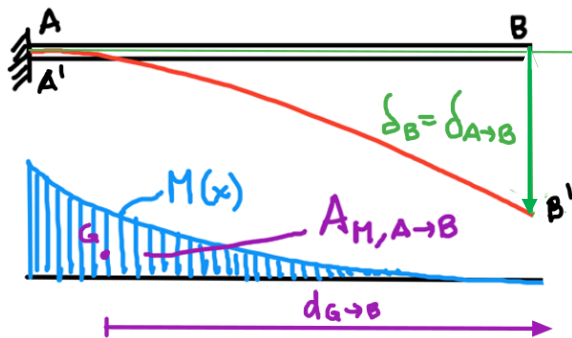
2º TEOREMA DE MOHR: APLICACIÓN A CÁLCULO DE FLECHAS

El 2º Teorema de Mohr no permite obtener directamente el valor de la flecha en un punto cualquiera B sino la distancia vertical desde una tangente por otro punto A hasta dicho punto B.

La única manera de obtener explícitamente $\delta(B)$ es aplicar dicho teorema entre el punto de interés (B) y otro punto auxiliar A con tangente horizontal:

- En empotramientos de ménsulas
- En centros de vigas simétricas de geometría y cargas

De lo que resulta (interpretando signos):
$$\delta(B) = \pm \delta_{A \rightarrow B} = \frac{S_{M, A \rightarrow B}}{EI}$$



1^{ER} Y 2^O TEOREMA DE MOHR

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{A_{M, A \rightarrow B}}{EI}$$

*“El **ángulo** que forman las tangentes a la deflexión en dos puntos A y B es igual al **área del diagrama de momentos dividida por la rigidez de la sección**”*

$$\delta_{A \rightarrow B} = \frac{S_{M, A \rightarrow B}}{EI}$$

*“La **distancia vertical** entre la tangente trazada desde un punto A de la deflexión y la vertical desde otro punto B es igual al **momento estático respecto de B del área del diagrama de momentos dividida por la rigidez de la sección**”*

1^{ER} Y 2^O TEOREMAS DE MOHR GENERALIZADOS

Los teoremas de Mohr son especialmente útiles para el cálculo de giros y desplazamientos en ménsulas de una sola barra. Para aprovechar su eficacia también en ménsulas de varias barras (“ménsulas de directriz recta con puntos angulosos”), se hace necesario definir los Teoremas de Mohr generalizados:

- **1^{er} Teorema de Mohr generalizado** → Cálculo de **giro** absoluto en cualquier punto de una ménsula de directriz recta con puntos angulosos
- **2^o Teorema de Mohr generalizado** → Cálculo de **desplazamiento** absoluto en **cualquier dirección y sentido**, en cualquier punto de una ménsula de directriz recta con puntos angulosos

Además, mediante el principio de superposición de causas y efectos, se pueden usar estas dos extensiones para calcular movimientos en pórticos biapoyados.

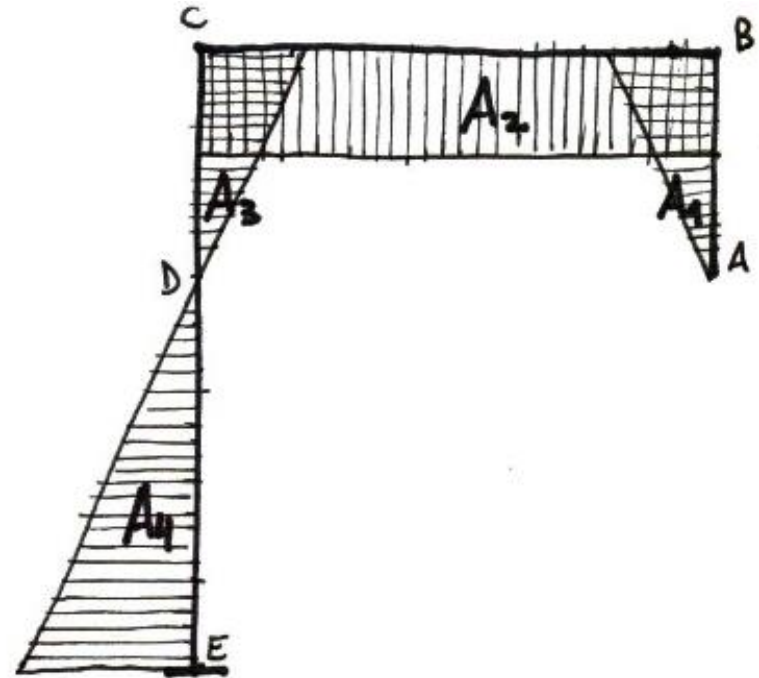
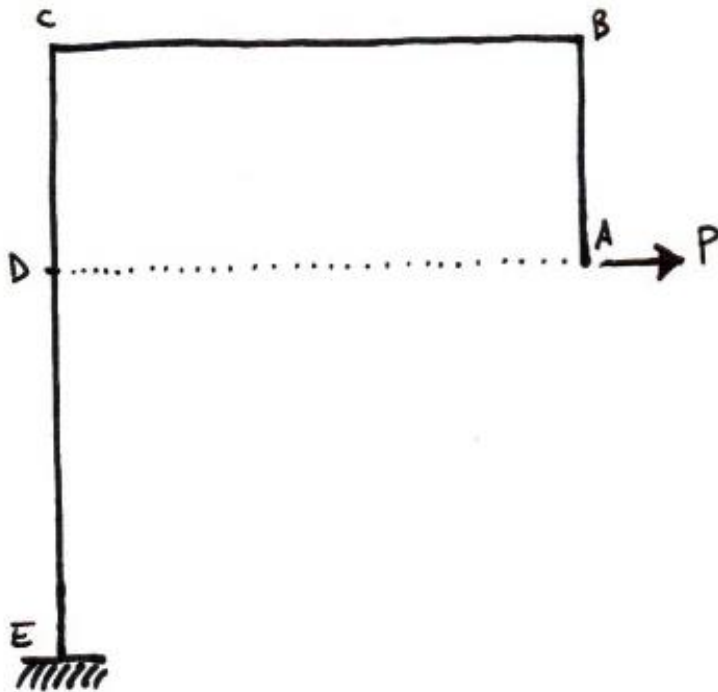
1^{ER} Y 2^O TEOREMAS DE MOHR GENERALIZADOS

Los teoremas de Mohr son especialmente útiles para el cálculo de giros y desplazamientos en ménsulas de una sola barra. Para aprovechar su eficacia también en ménsulas de varias barras (“ménsulas de directriz recta con puntos angulosos”), se hace necesario definir los Teoremas de Mohr generalizados.



1^{ER} TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO

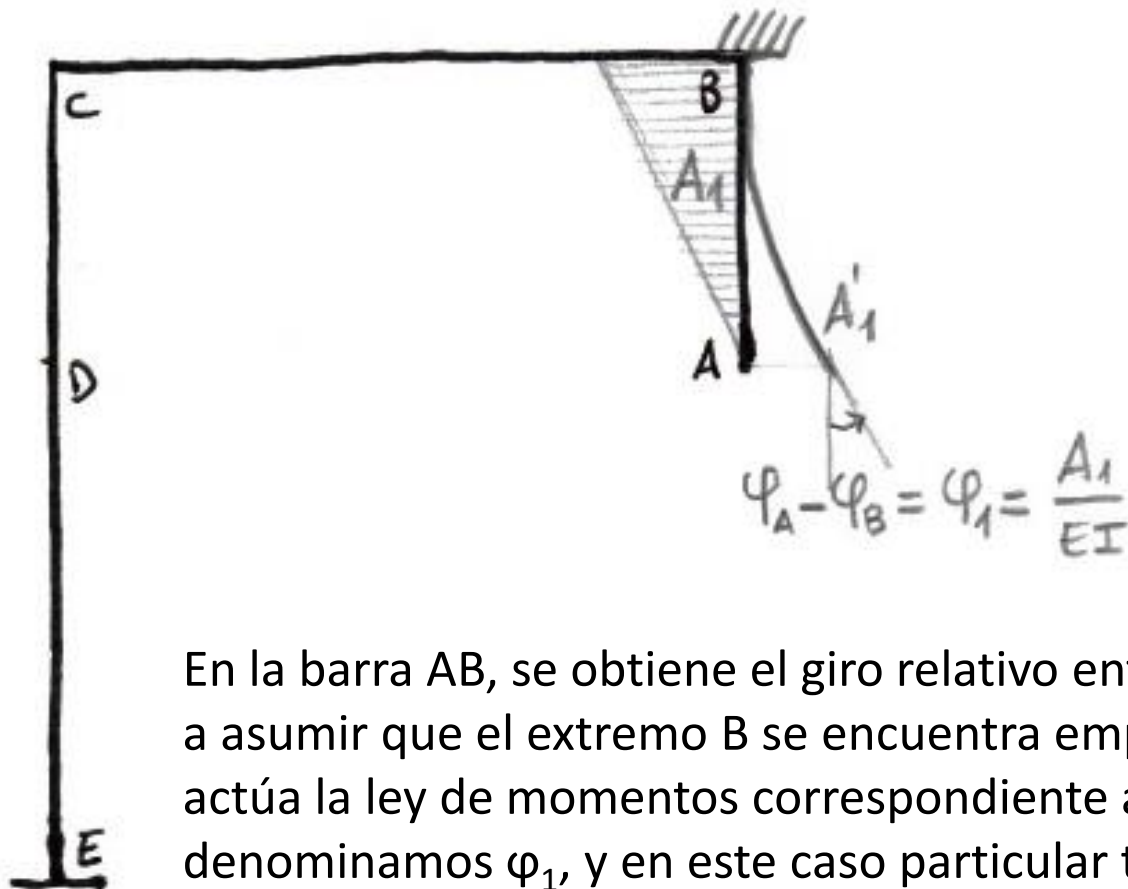
Se toma una ménsula de directriz recta con puntos angulosos, con un estado de cargas tal que se tiene una ley de momentos que puede cambiar de signo a lo largo de la estructura:



Los nudos y las áreas de momento (A_i) se nombran comenzando desde el extremo libre hasta el empotramiento. Se hace necesario un nudo D en el punto donde la ley de momentos en el pilar izquierdo cambia de signo.

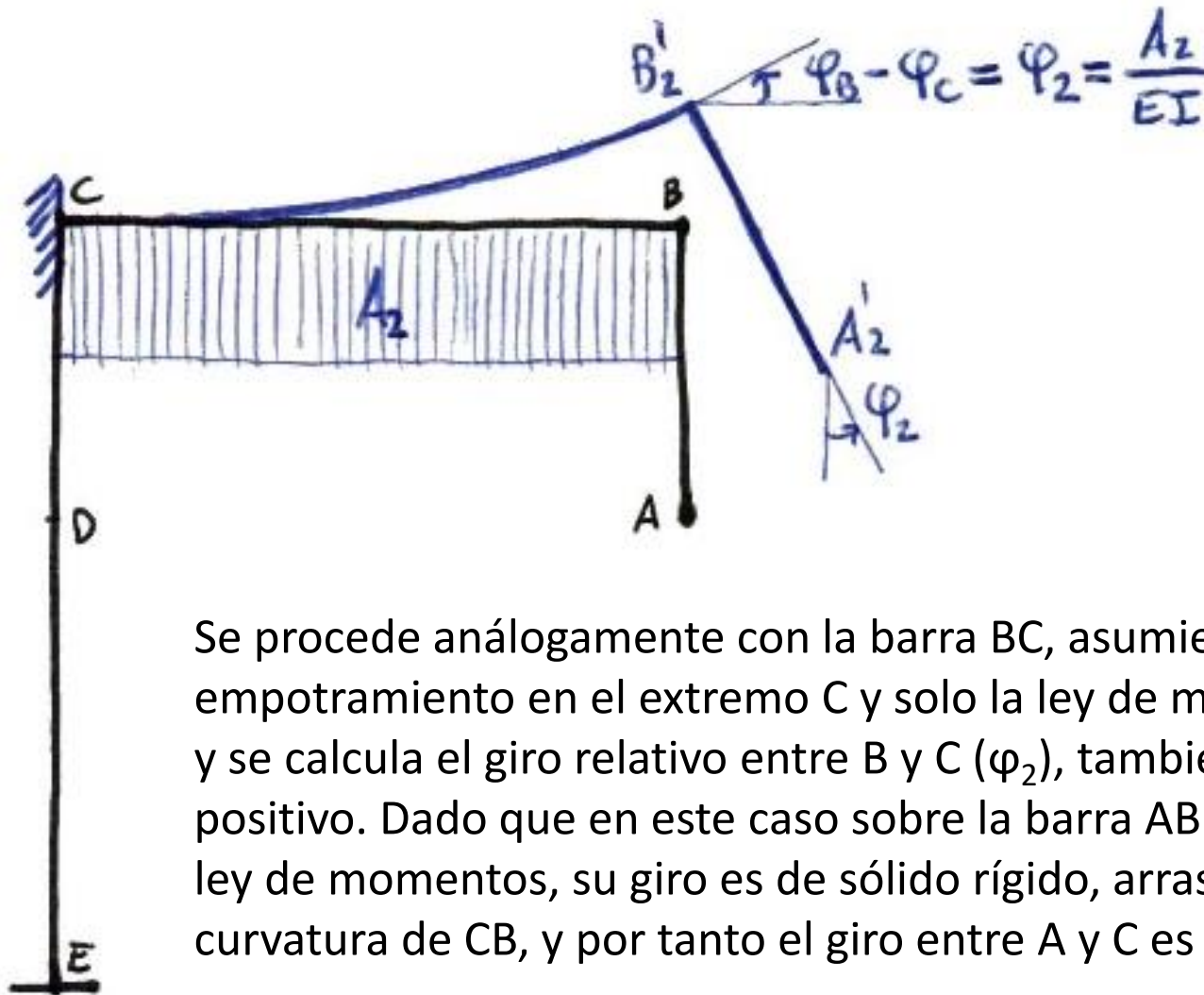
1^{ER} TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO

En una primera aproximación, se aplica el 1^{er} Teorema de Mohr de manera independiente para cada barra, recorriendo la ménsula desde el extremo libre hasta el empotramiento.

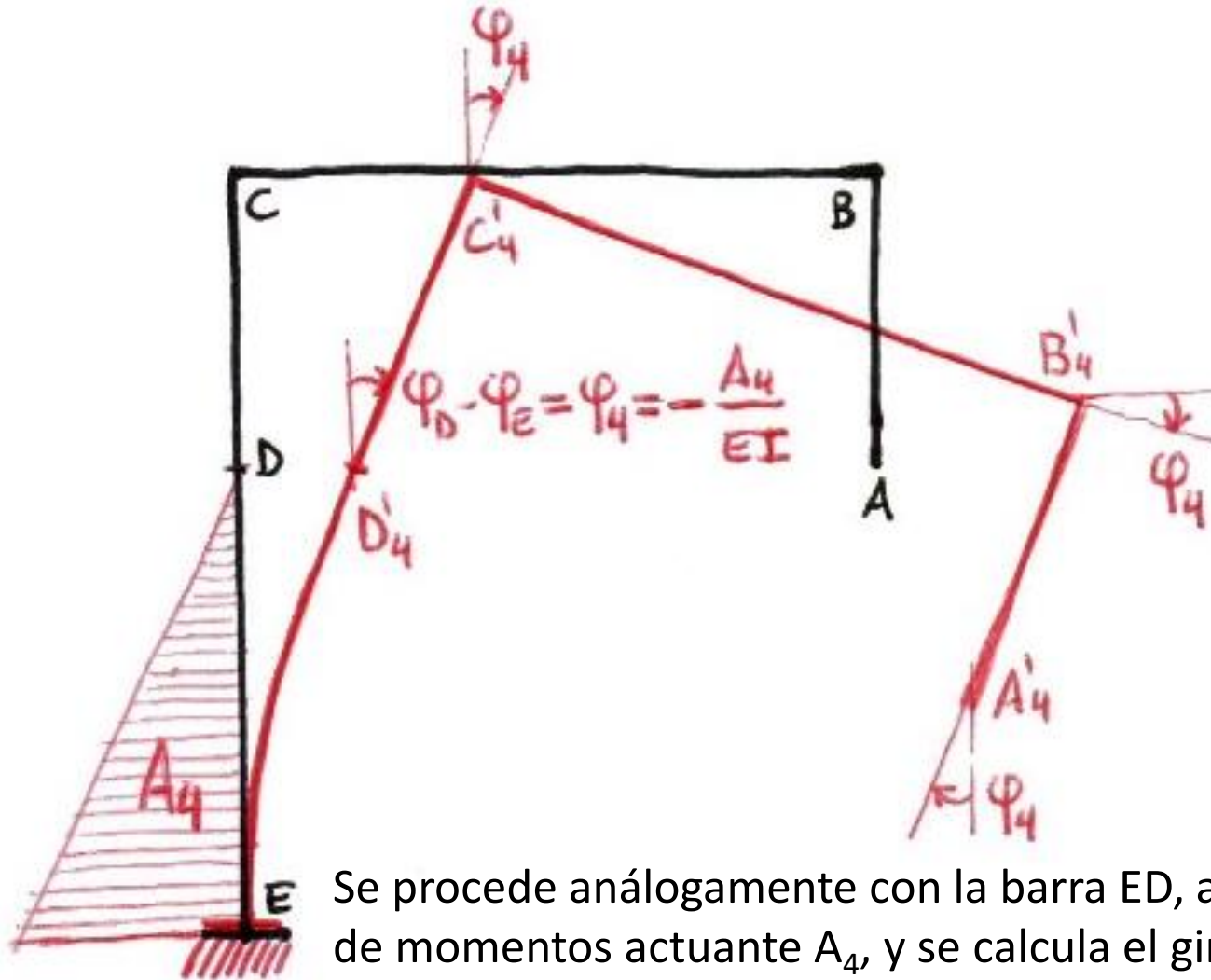


En la barra AB, se obtiene el giro relativo entre A y B, que es equivalente a asumir que el extremo B se encuentra empotrado y sobre la barra actúa la ley de momentos correspondiente a A_1 . Este giro lo denominamos φ_1 , y en este caso particular tiene signo global positivo.

1^{ER} TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO

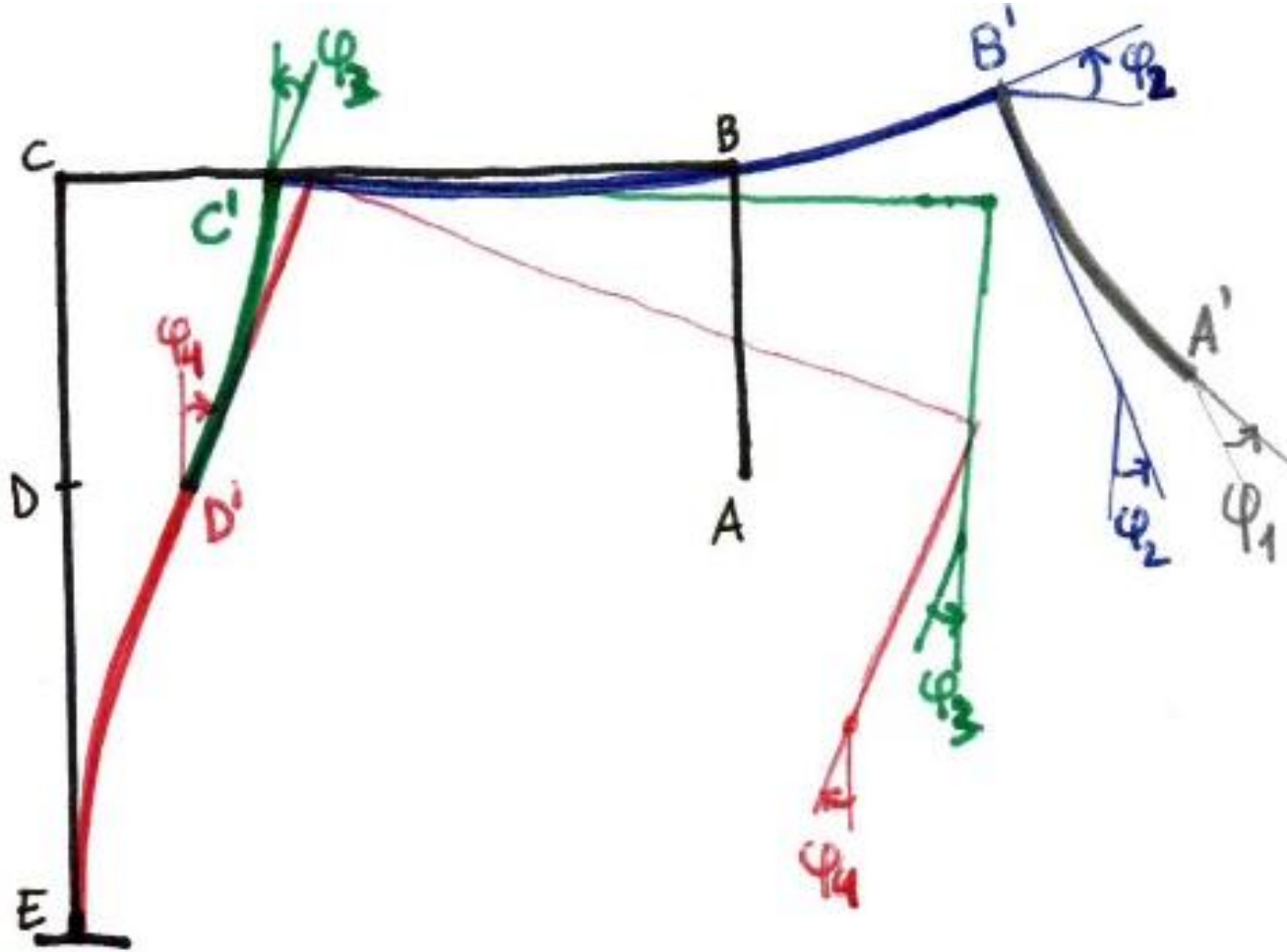


1^{ER} TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



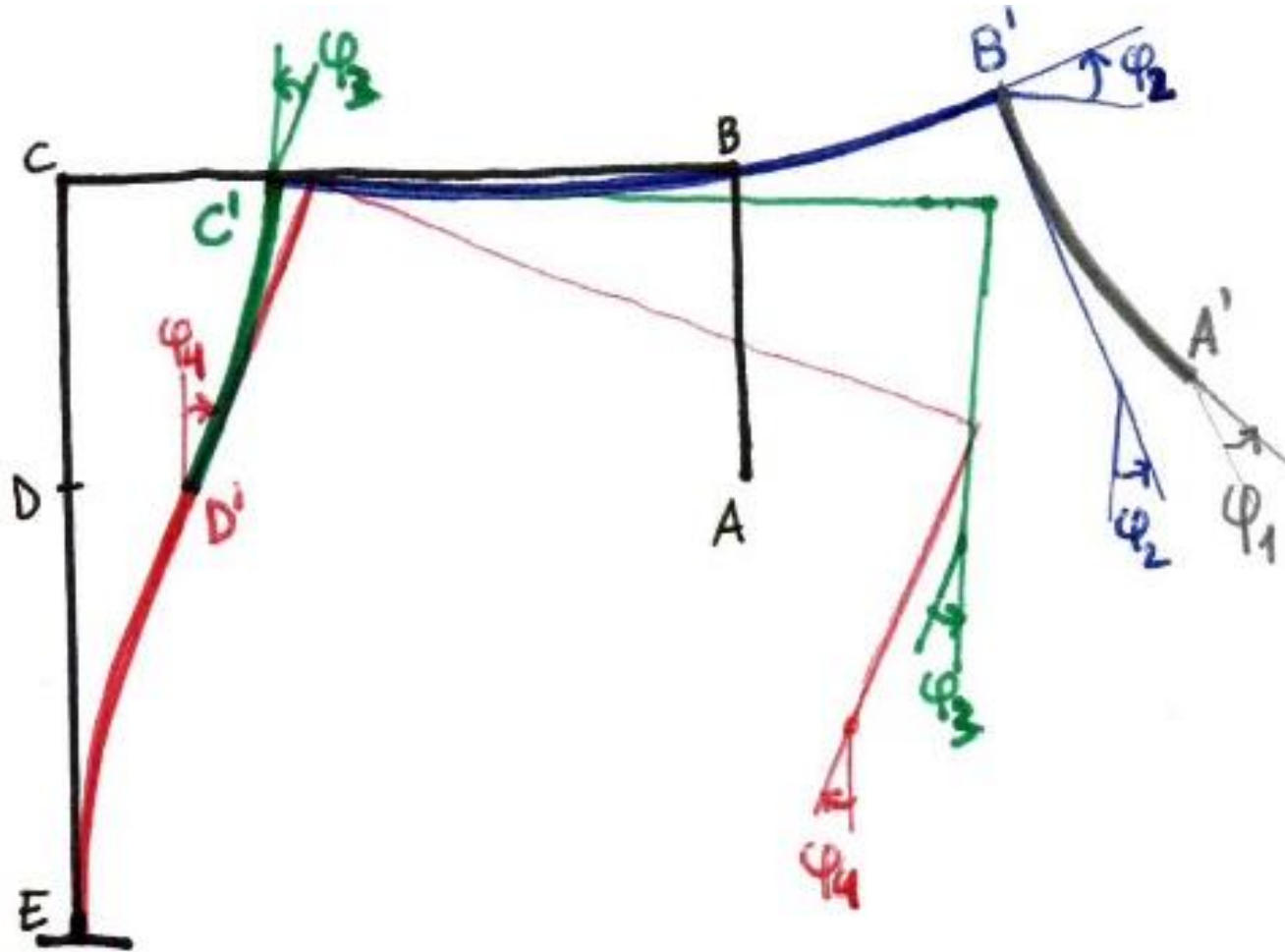
Se procede análogamente con la barra ED, asumiendo solo la ley de momentos actuante A_4 , y se calcula el giro relativo entre D y E (φ_4), en este caso negativo. El giro de las barras AB, BC y CD es de sólido rígido, arrastrada por la curvatura de ED, y por tanto el giro entre A y D, entre B y D y entre C y D es también φ_4 .

1^{ER} TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



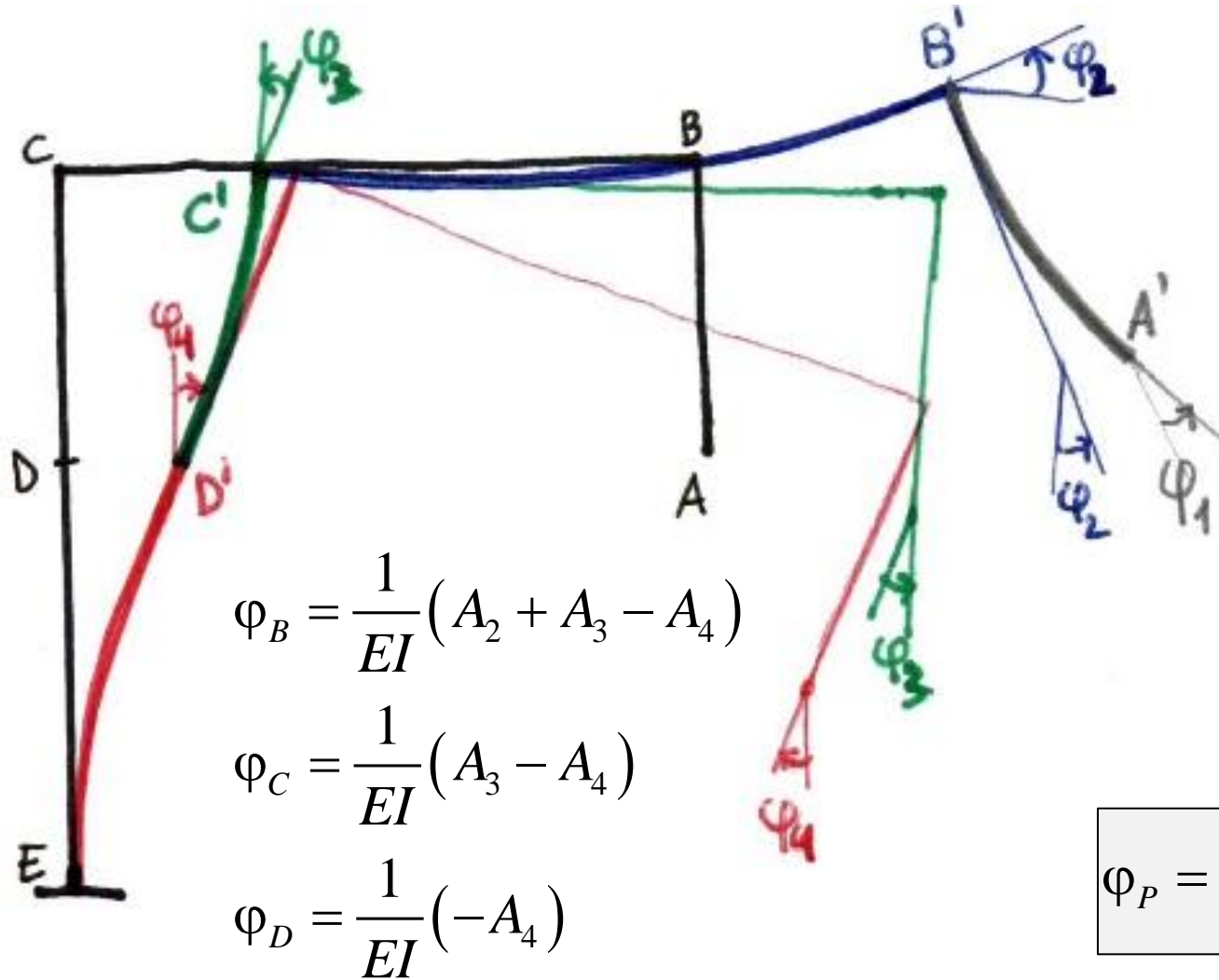
Por tanto, las deformaciones encadenadas de cada barra curvada por su ley de momentos correspondiente proporciona la deformada real de la ménsula (en línea gruesa del color correspondiente), siendo el giro relativo entre A y D la acumulación de giros calculados previamente, con sus signos.

1^{ER} TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



$$\begin{aligned} \varphi_A &= \varphi_A - 0 = \varphi_A - \varphi_E = (\varphi_A - \varphi_B) + (\varphi_B - \varphi_C) + (\varphi_C - \varphi_D) + (\varphi_D - \varphi_E) = \\ &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \frac{1}{EI} (A_1 + A_2 + A_3 - A_4) = \frac{1}{EI} \sum_i \pm A_i \end{aligned}$$

1^{ER} TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO

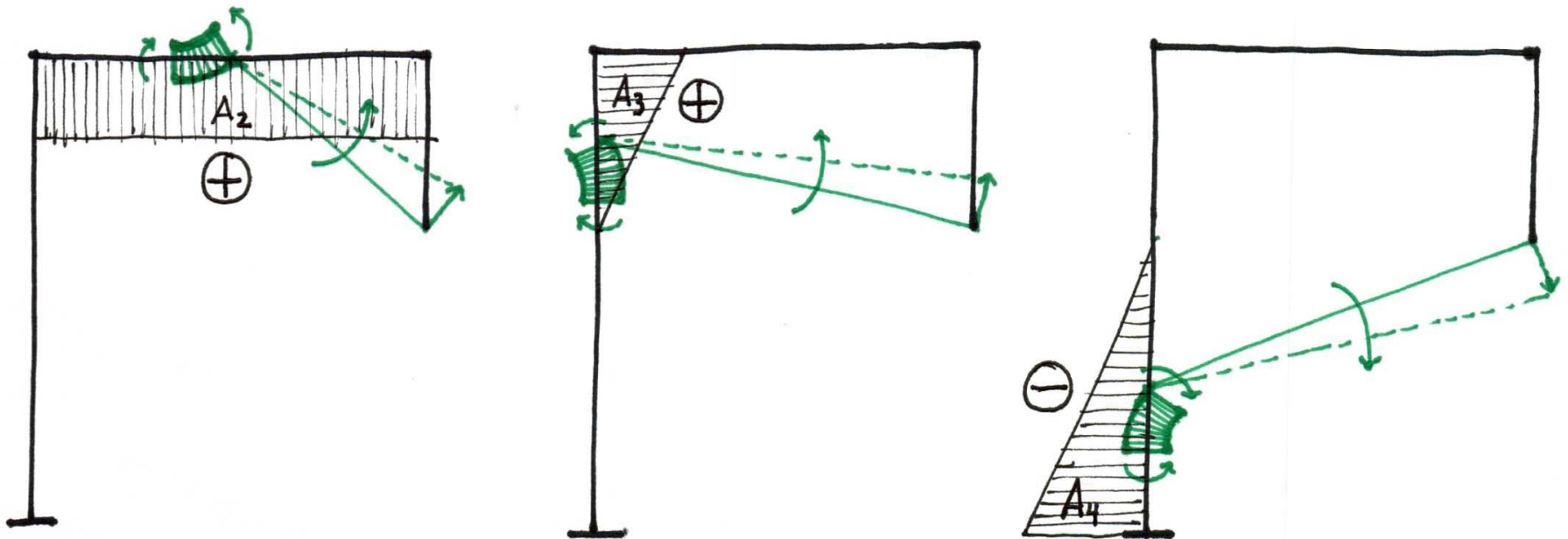


En general, para calcular el giro absoluto de cualquier punto P, basta sumar las contribuciones de momentos situadas entre ese punto y el empotramiento

1^{ER} TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO

El signo de cada contribución al giro no tiene por qué coincidir con el signo de las leyes de momentos (además de que no existe un criterio claro sobre tal signo en pilares con directriz vertical).

El signo se puede hallar gráficamente sin más que interpretar cuál sería el movimiento, debido a la curvatura de cada barra, de un radiovector que una rebanada cualquiera de cada barra, desde su cara más alejada del empotramiento, con el extremo donde se calcula el giro:

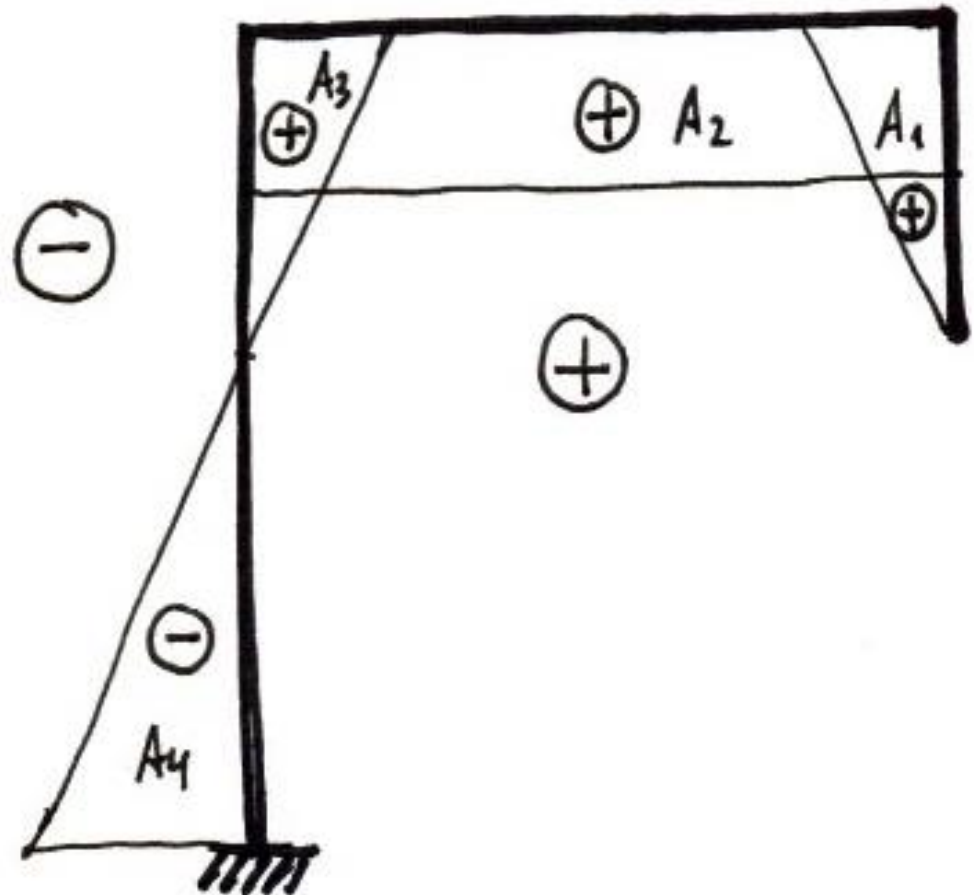


1^{ER} TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO

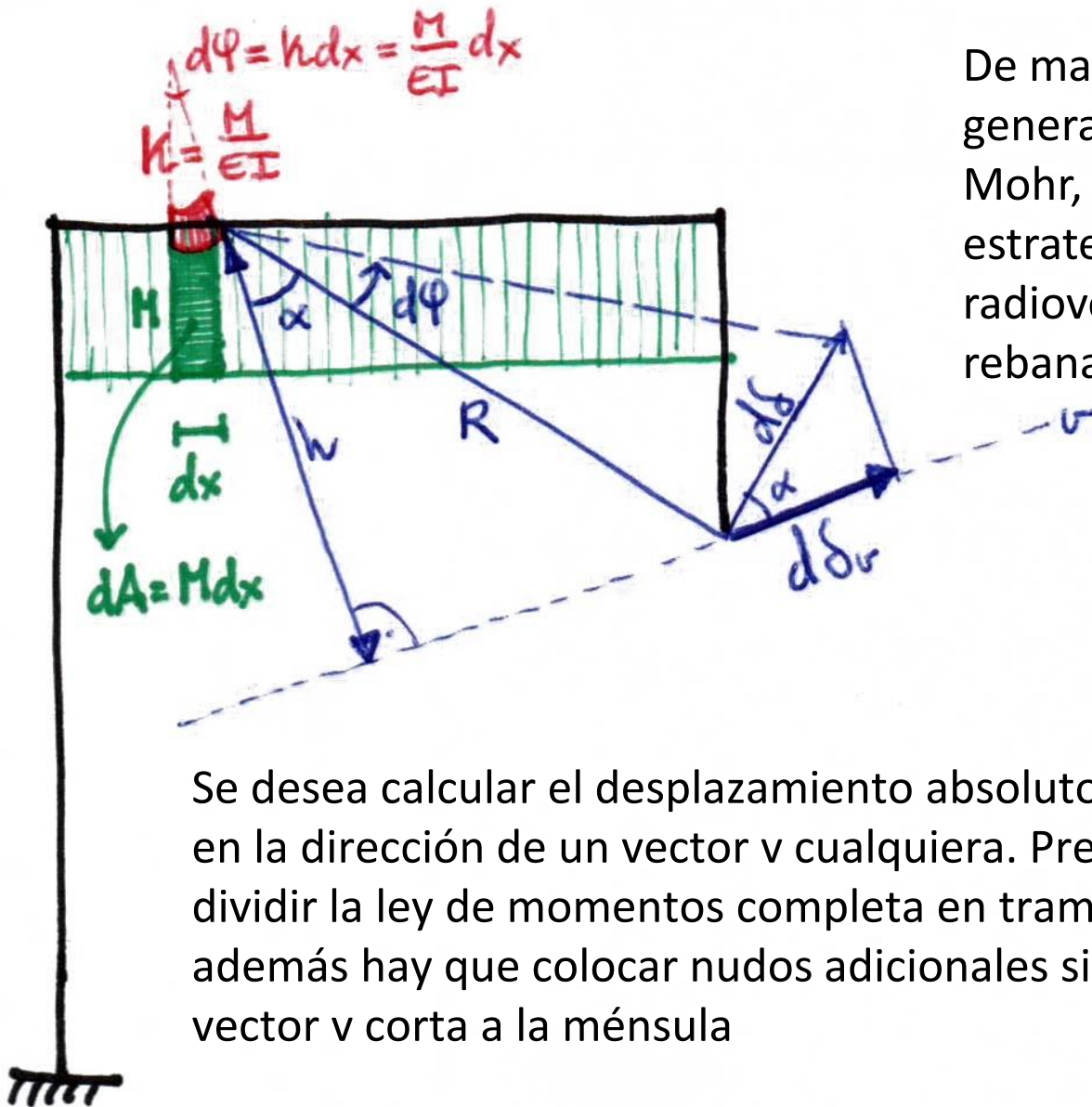
Se demuestra así que todas las áreas de momento situadas a **un mismo lado de la directriz de la ménsula tienen el mismo signo.**

En este caso, recorriendo la ménsula desde el empotramiento hasta el extremo libre, las áreas de momento situadas a la derecha tienen signo positivo y las situadas a la izquierda signo negativo.

Se recomienda utilizar siempre el criterio de signos global para la caracterización de giros.



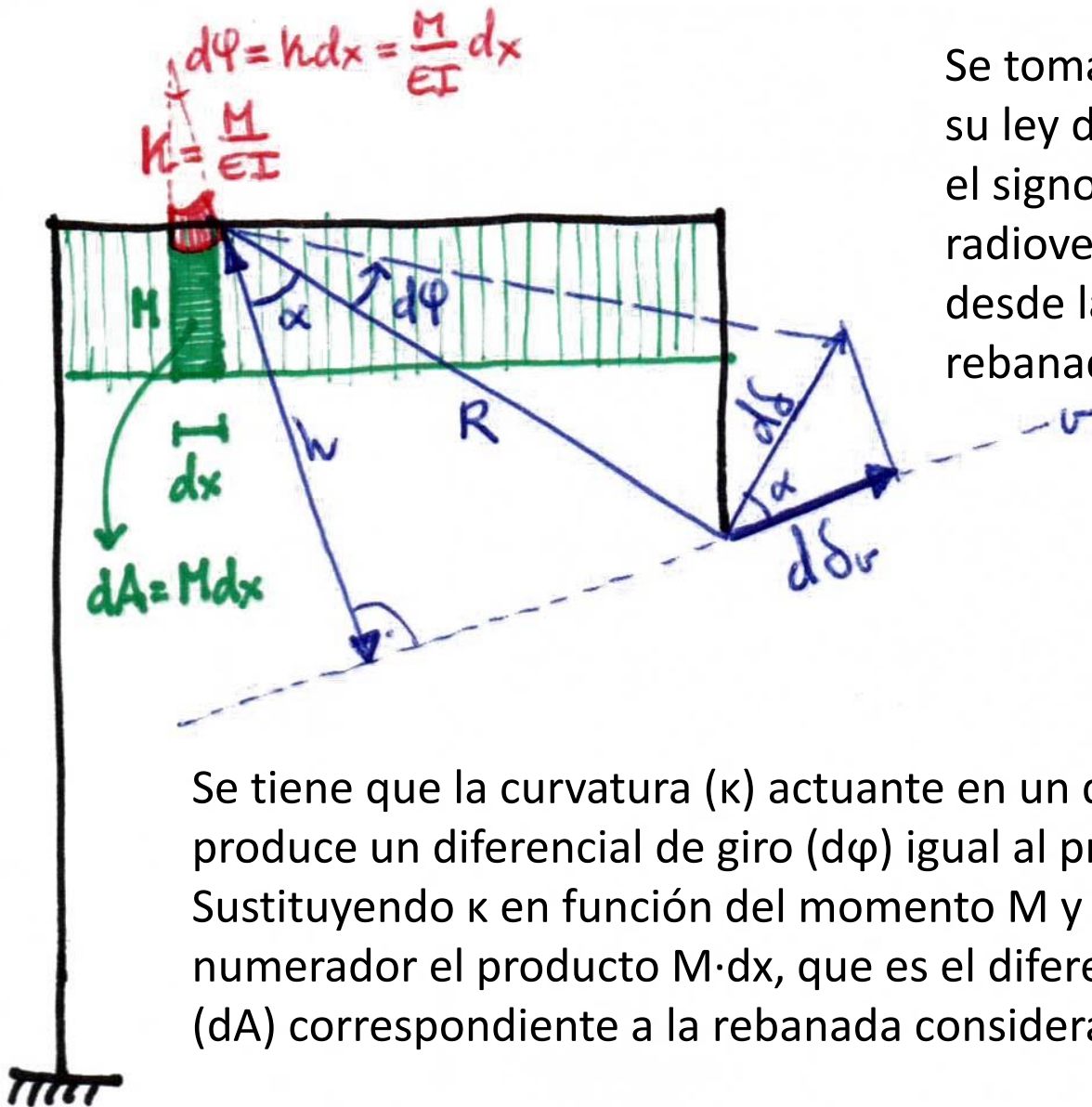
2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



De manera análoga se puede generalizar el 2º Teorema de Mohr, aplicando esta última estrategia del trazado de radiovectores desde las rebanadas curvadas.

Se desea calcular el desplazamiento absoluto del extremo de la ménsula en la dirección de un vector v cualquiera. Preliminarmente hay que dividir la ley de momentos completa en tramos de signo constante, pero además hay que colocar nudos adicionales si la dirección marcada por el vector v corta a la ménsula

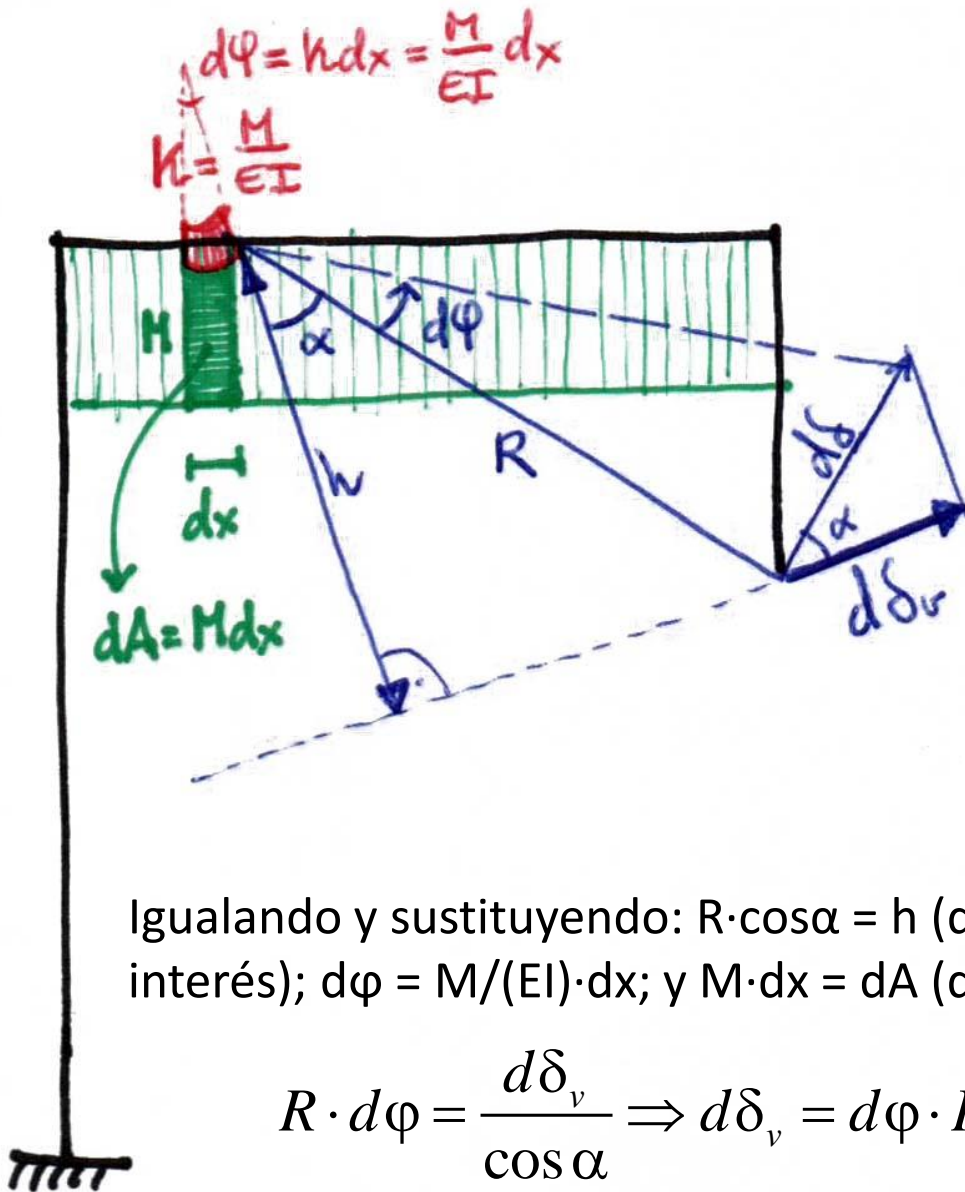
2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



Se toma un tramo cualquiera con su ley de momentos, se interpreta el signo de la curvatura y se traza el radiovector (R) correspondiente desde la sección dorsal de la rebanada hasta el punto de interés.

Se tiene que la curvatura (κ) actuante en un diferencial de longitud (dx) produce un diferencial de giro ($d\phi$) igual al producto de ambos. Sustituyendo κ en función del momento M y la rigidez EI , se tiene en el numerador el producto $M \cdot dx$, que es el diferencial de área de momento (dA) correspondiente a la rebanada considerada.

2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



El diferencial de ángulo ($d\varphi$) produce un desplazamiento infinitesimal del extremo de la ménsula en la dirección perpendicular ($d\delta$) que cumple:

$$d\varphi \approx \tan(d\varphi) = \frac{d\delta}{R} \Rightarrow d\delta = R \cdot d\varphi$$

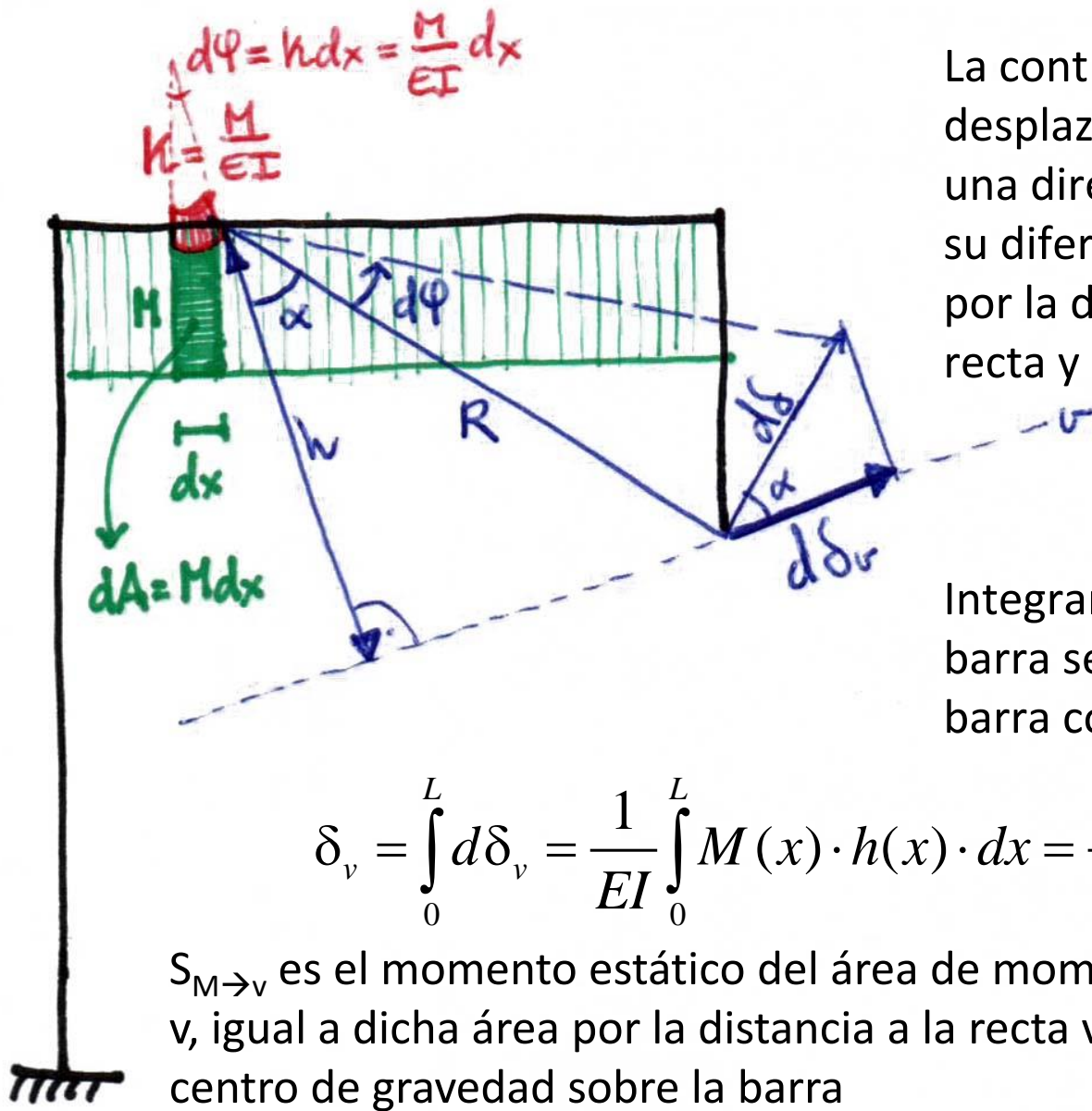
La proyección de $d\delta$ sobre la dirección deseada ($d\delta_v$) cumple:

$$\cos \alpha = \frac{d\delta_v}{d\delta} \Rightarrow d\delta = \frac{d\delta_v}{\cos \alpha}$$

Igualando y sustituyendo: $R \cdot \cos \alpha = h$ (distancia de la rebanada a la recta de interés); $d\varphi = M/(EI) \cdot dx$; y $M \cdot dx = dA$ (diferencial de área de momento)

$$R \cdot d\varphi = \frac{d\delta_v}{\cos \alpha} \Rightarrow d\delta_v = d\varphi \cdot R \cdot \cos \alpha = \frac{M}{EI} dx \cdot h = \frac{dA \cdot h}{EI}$$

2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



La contribución de la rebanada al desplazamiento de un punto en una dirección cualquiera es igual a su diferencial de área de momento por la distancia de la rebanada a la recta y dividido por la rigidez:

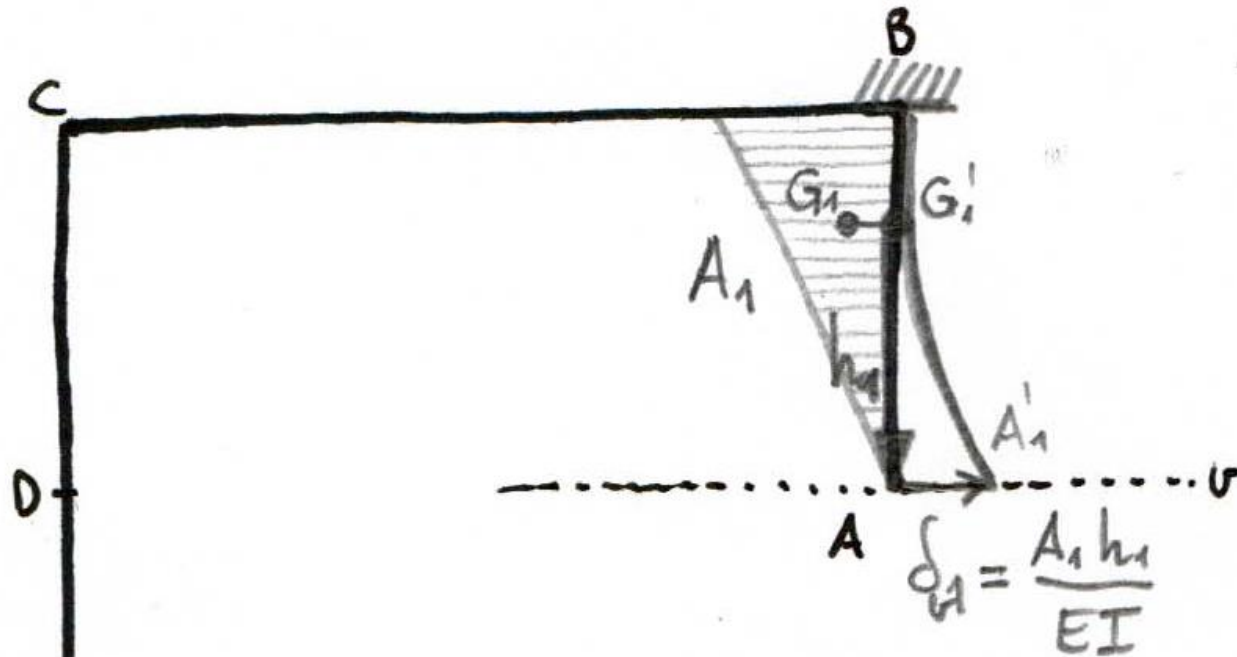
$$d\delta_v = \frac{dA \cdot h}{EI}$$

Integrando a lo largo de toda la barra se tiene la contribución de la barra completa:

$$\delta_v = \int_0^L d\delta_v = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \cdot h(x) \cdot dx = \frac{S_{M \rightarrow v}}{EI} = \frac{A \cdot h_G}{EI}$$

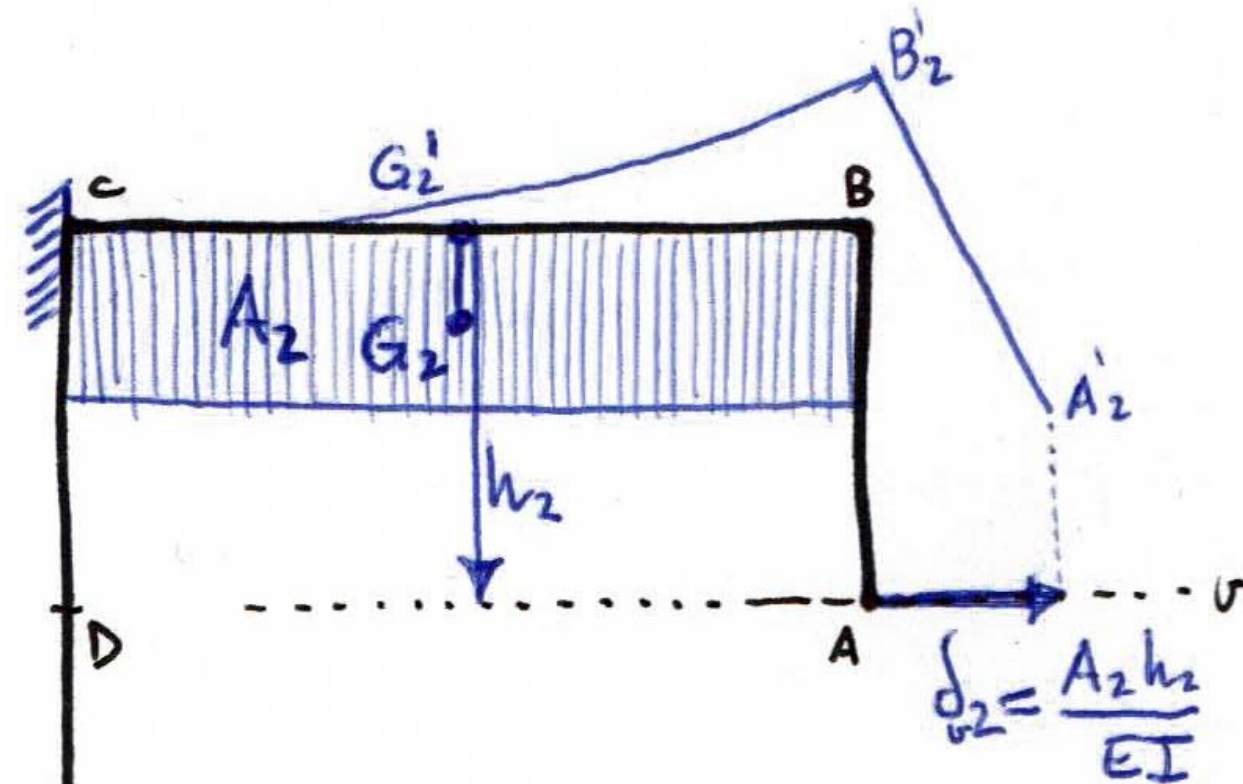
$S_{M \rightarrow v}$ es el momento estático del área de momentos respecto de la recta v , igual a dicha área por la distancia a la recta v desde la proyección de su centro de gravedad sobre la barra

2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



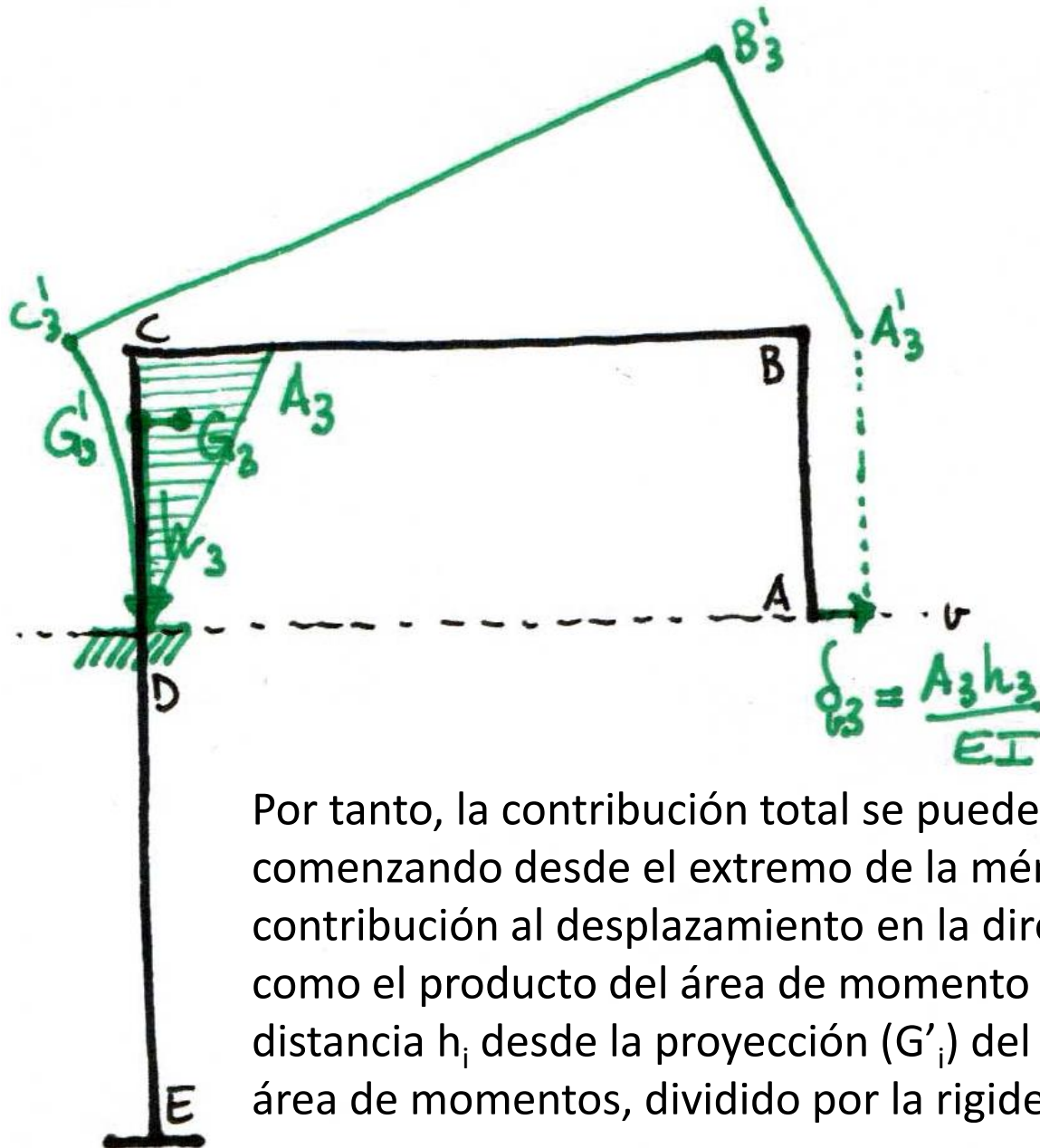
Por tanto, la contribución total se puede acumular barra a barra comenzando desde el extremo de la ménsula. En cada barra i , la contribución al desplazamiento en la dirección v (δ_{v_i}) se obtiene como el producto del área de momento correspondiente (A_i) por la distancia h_i desde la proyección (G'_i) del centro de gravedad (G_i) del área de momentos, dividido por la rigidez seccional (EI)

2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



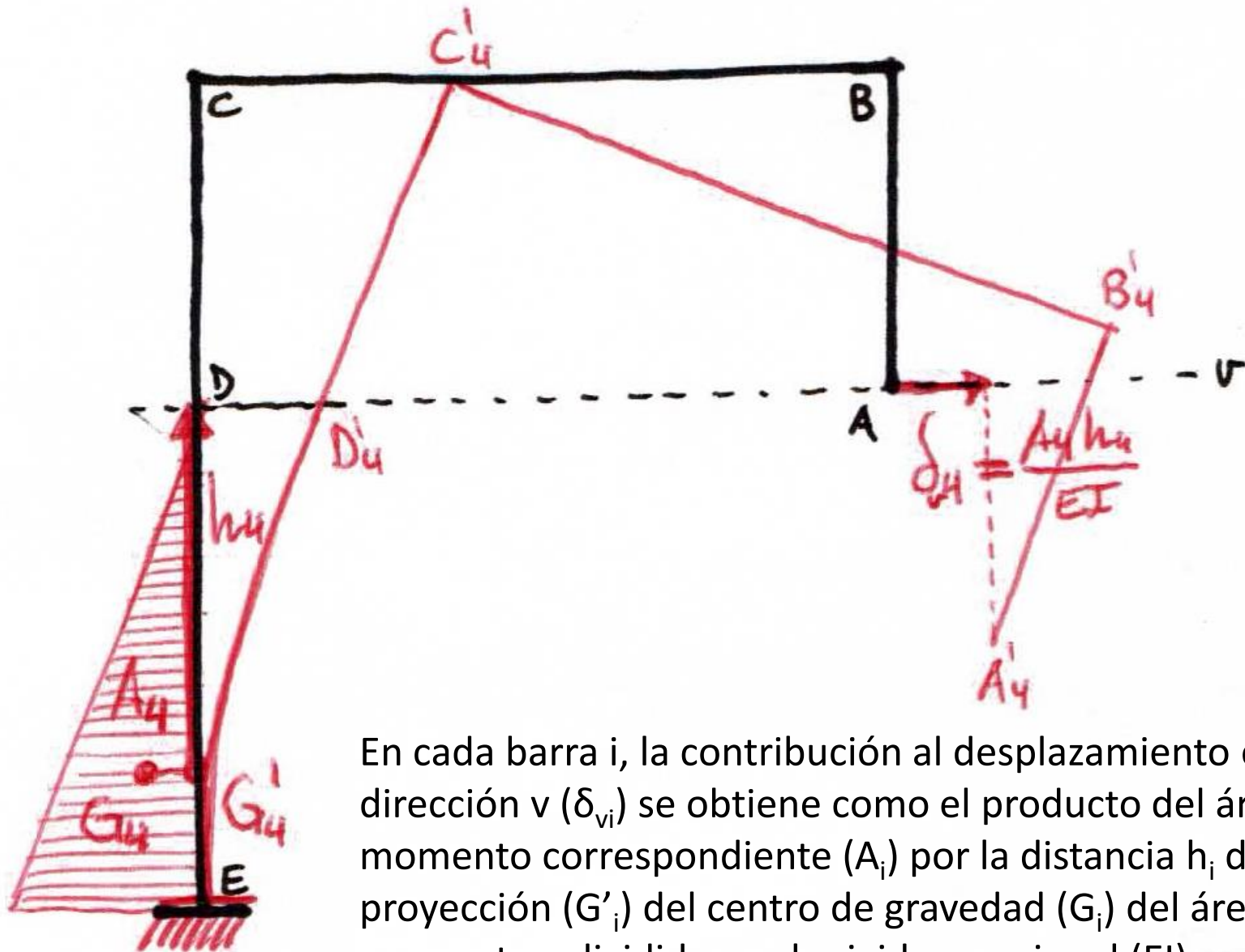
Por tanto, la contribución total se puede acumular barra a barra comenzando desde el extremo de la ménsula. En cada barra i , la contribución al desplazamiento en la dirección v (δ_{v_i}) se obtiene como el producto del área de momento correspondiente (A_i) por la distancia h_i desde la proyección (G'_i) del centro de gravedad (G_i) del área de momentos, dividido por la rigidez seccional (EI)

2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



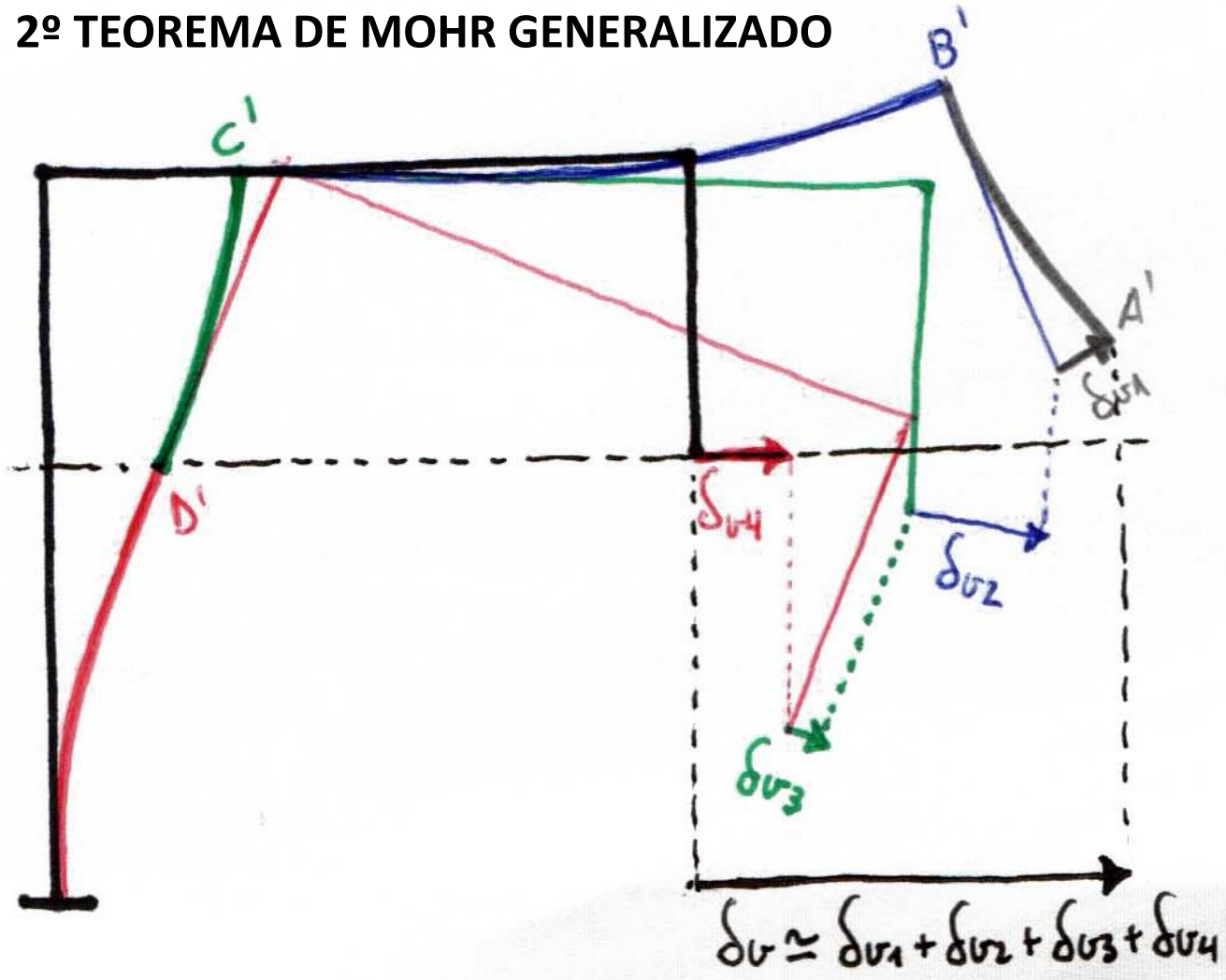
Por tanto, la contribución total se puede acumular barra a barra comenzando desde el extremo de la ménsula. En cada barra i , la contribución al desplazamiento en la dirección v (δ_{vi}) se obtiene como el producto del área de momento correspondiente (A_i) por la distancia h_i desde la proyección (G'_i) del centro de gravedad (G_i) del área de momentos, dividido por la rigidez seccional (EI)

2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



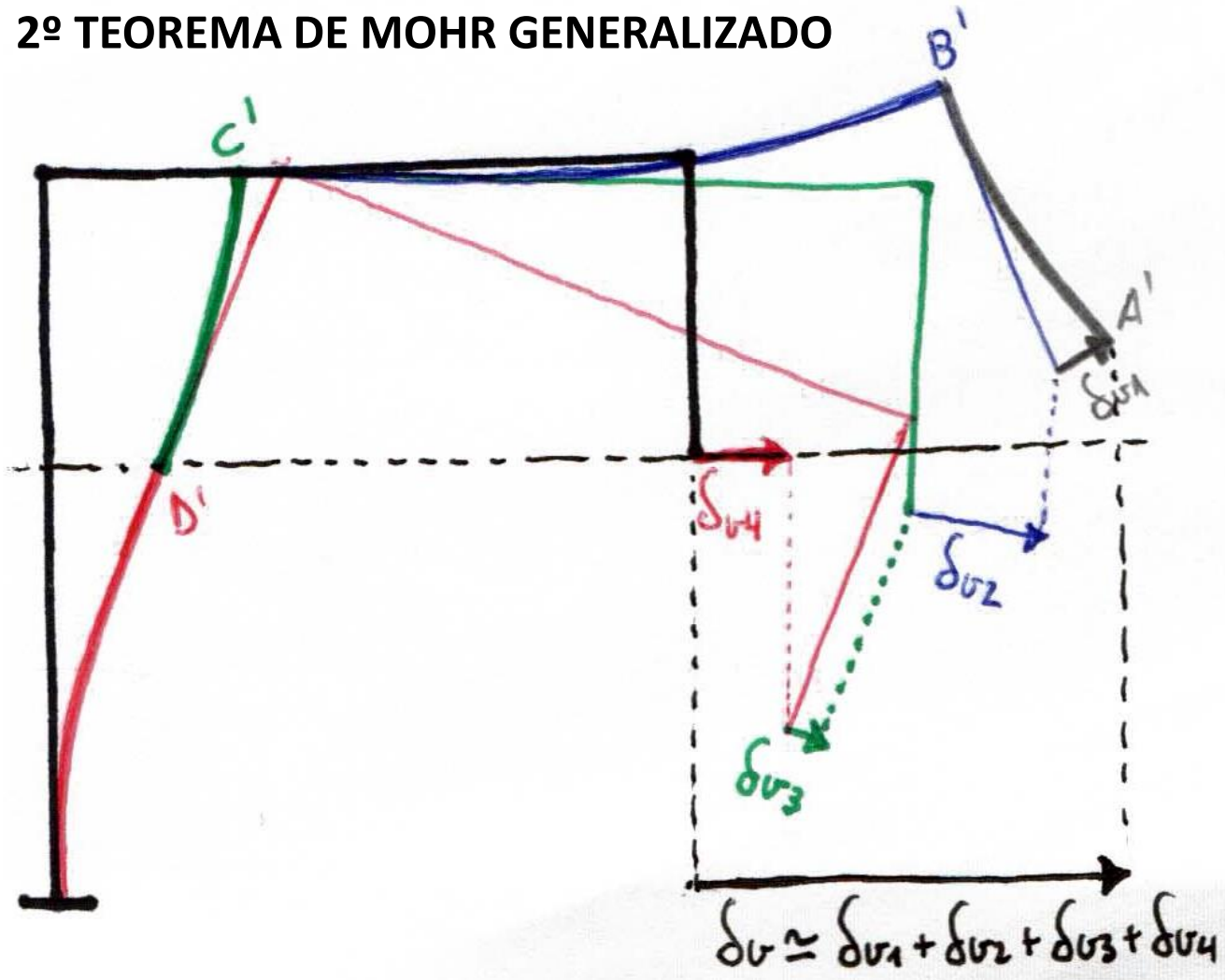
En cada barra i , la contribución al desplazamiento en la dirección v (δ_{vi}) se obtiene como el producto del área de momento correspondiente (A_i) por la distancia h_i desde la proyección (G'_i) del centro de gravedad (G_i) del área de momentos, dividido por la rigidez seccional (EI)

2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



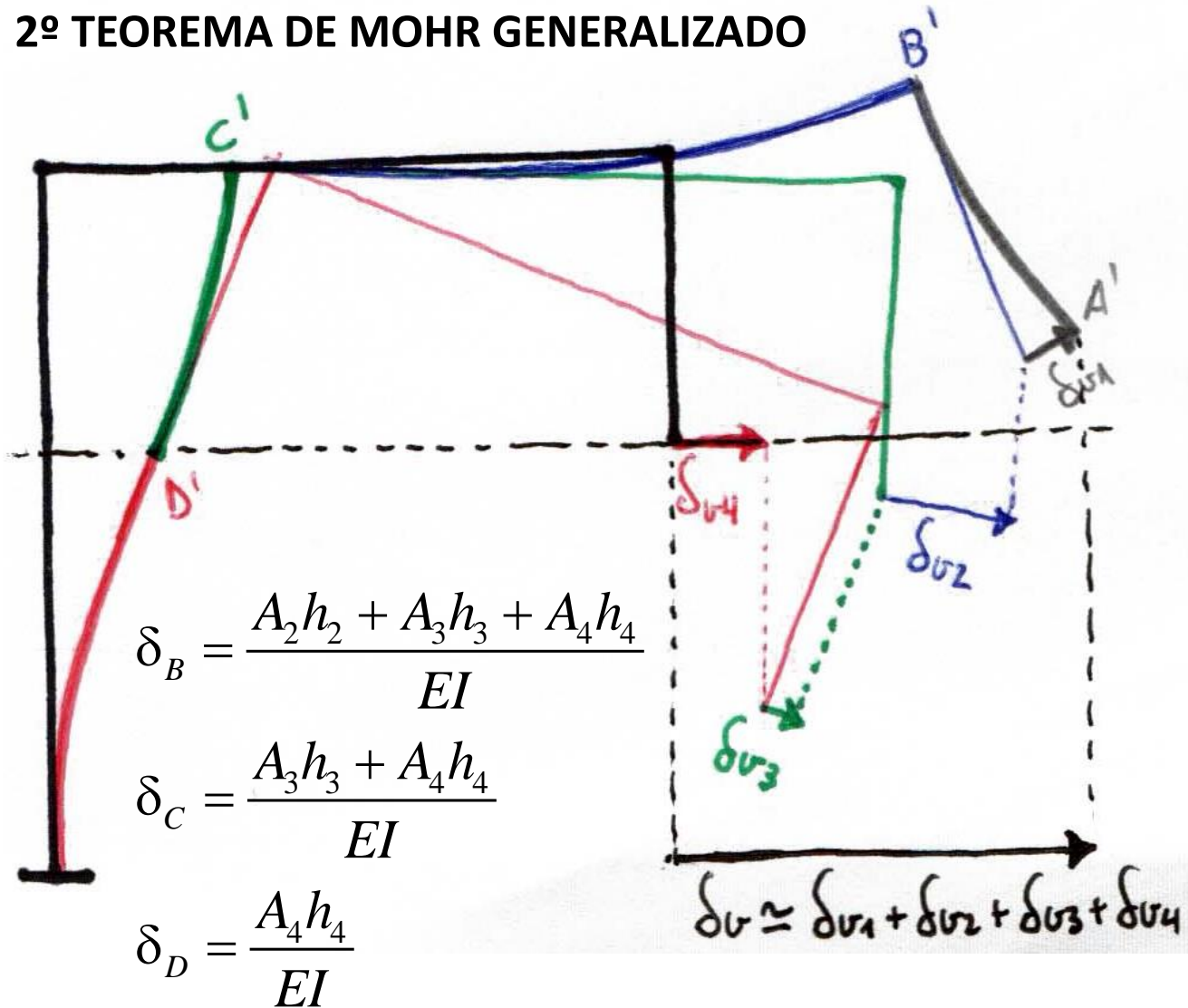
La acumulación de contribuciones puede considerarse aproximadamente igual al desplazamiento buscado, considerando que los giros sobre los que se aplican las contribuciones individuales son suficientemente pequeños para que no cambie el valor absoluto de la contribución

2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO



$$\delta_{Av} = \frac{1}{EI} (A_1 \cdot h_1 + A_2 \cdot h_2 + A_3 \cdot h_3 + A_4 \cdot h_4) = \frac{1}{EI} \sum_i \pm A_i \cdot h_i$$

2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO

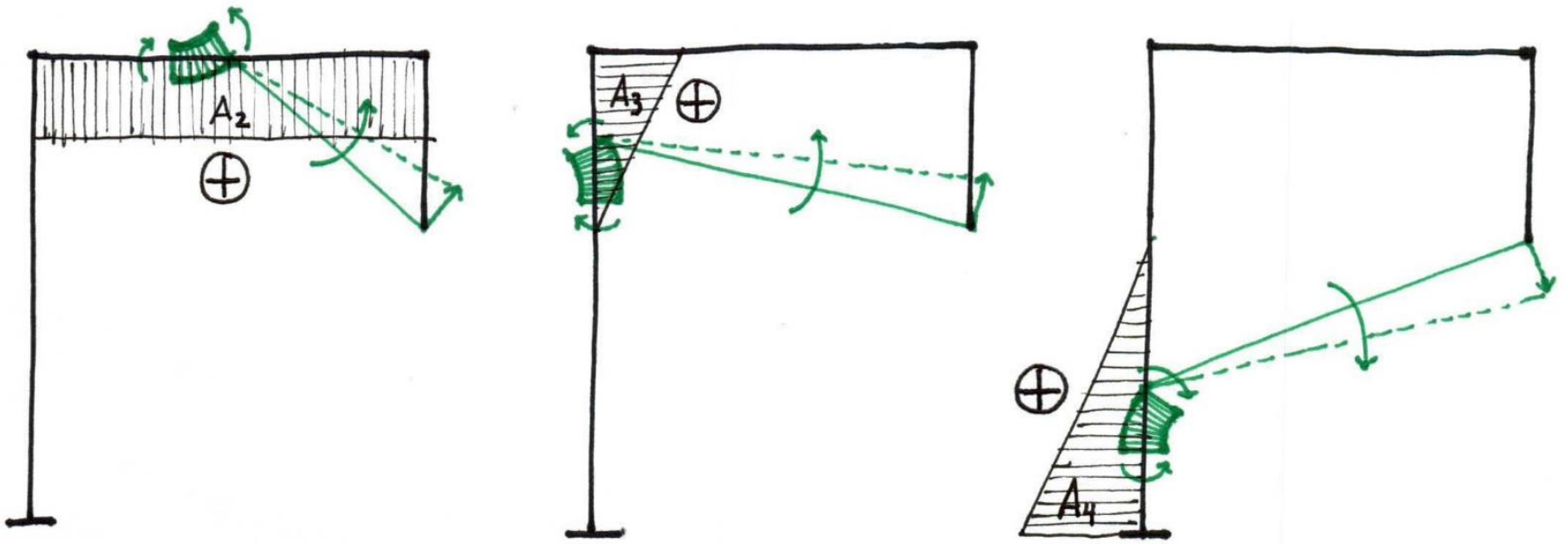


$$\delta_P = \frac{1}{EI} \sum_{i>P} \pm A_i h_i$$

En general, para calcular el desplazamiento de cualquier punto P, basta sumar las contribuciones de momentos situadas entre ese punto y el empotramiento

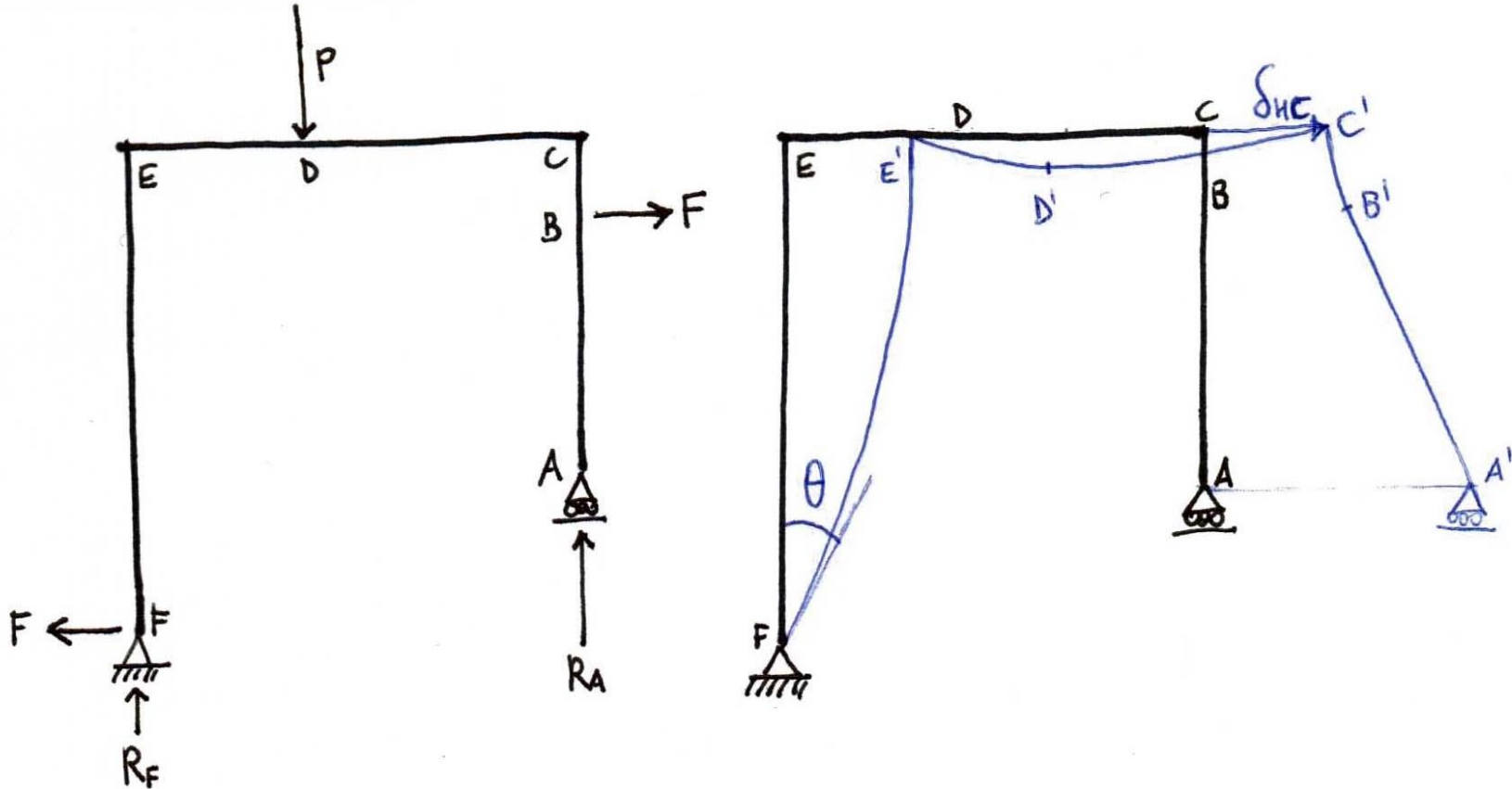
2º TEOREMA DE MOHR GENERALIZADO

El signo de las contribuciones se hallan de manera similar a como se hace con los giros: se examina la proyección, sobre la recta de interés, del movimiento, debido a la curvatura de cada barra, de un radiovector que une la rebanada central de cada barra, desde su cara más alejada del empotramiento, con el extremo donde se calcula el giro:



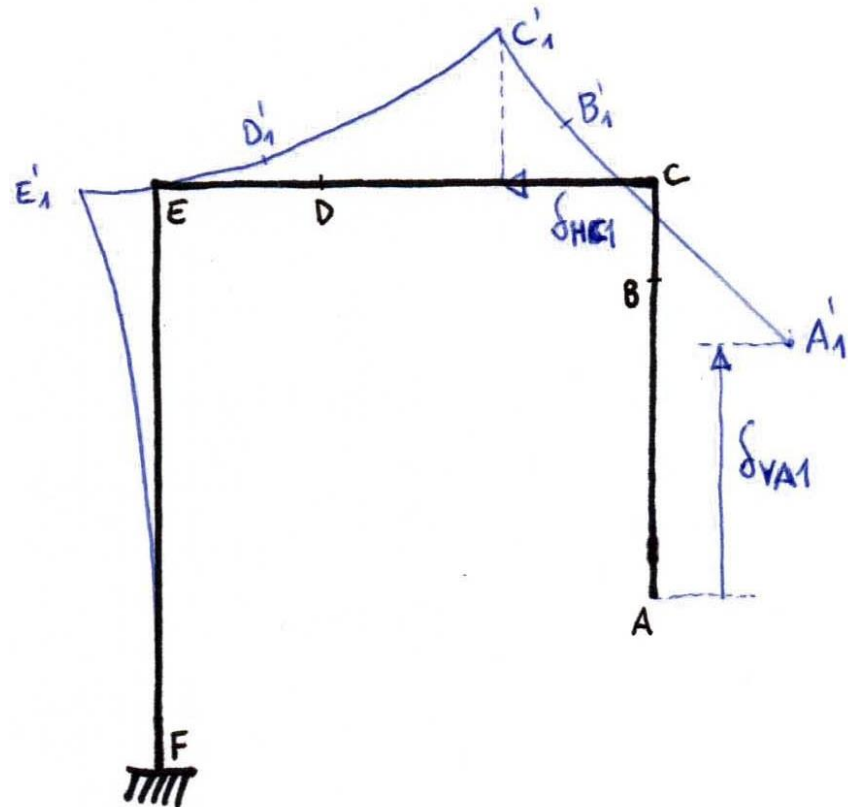
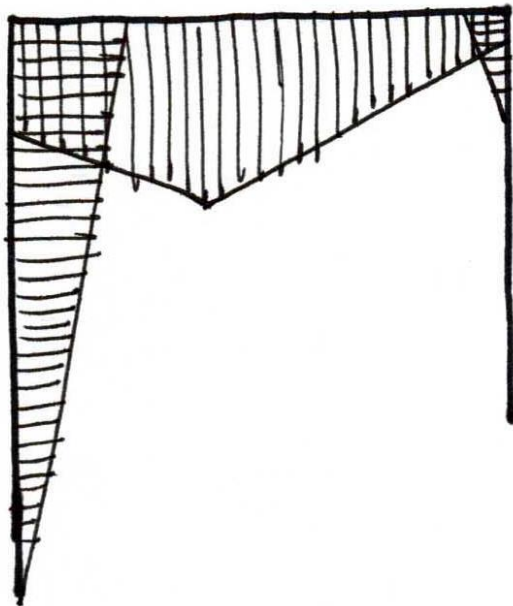
EXTENSIÓN A PÓRTICOS BIAPOYADOS

Los teoremas de Mohr no son directamente aplicables sobre pórticos biapoyados, pues al no arrancar desde un empotramiento con giro nulo, los giros y desplazamientos absolutos no se pueden calcular a partir de las áreas de momentos. En la estructura siguiente, con giro θ desconocido en la articulación, se desea calcular el movimiento horizontal del nudo C (δ_{HC}):



EXTENSIÓN A PÓRTICOS BIAPOYADOS

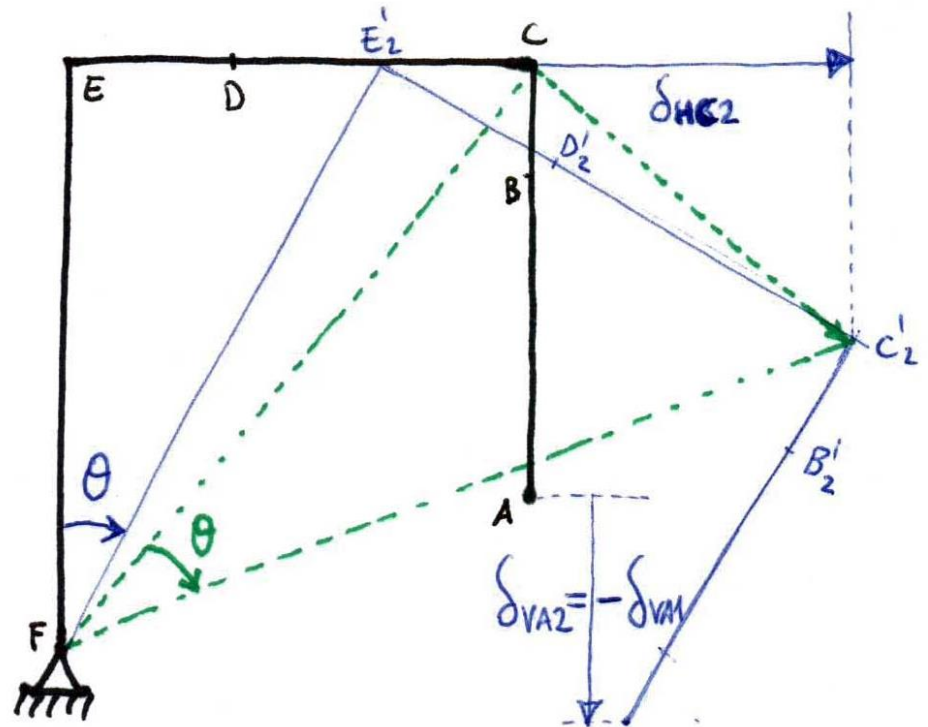
Para aprovechar los teoremas de Mohr, se asume que la estructura se puede descomponer en dos subestructuras de las cuales la primera es una ménsula con idénticas leyes de momentos y por tanto curvaturas, pudiéndose obtener una deformada idéntica a la real pero girada el mismo ángulo θ en sentido contrario, de tal manera que el ángulo en el empotramiento sea nulo. De este primer estado se calcula: el movimiento perpendicular al apoyo deslizante (δ_{VA1}) y el movimiento de interés (δ_{HC1}).



EXTENSIÓN A PÓRTICOS BIAPOYADOS

Para “deshacer” el cambio, sólo hay que sumarle al estado anterior un nuevo estado en el que se gira el pórtico completo como un sólido rígido en torno a la articulación. El ángulo girado θ debe ser el que provoque un desplazamiento en la dirección perpendicular al apoyo deslizante exactamente de valor opuesto al obtenido en el primer estado, de tal manera que el desplazamiento global perpendicular al apoyo sea nulo (condición de contorno).

De este segundo estado, conocido el giro θ , se pueden calcular los movimientos de interés (δ_{HC2}) y por tanto los movimientos reales de la estructura ($\delta_{HC} = \delta_{HC1} + \delta_{HC2}$), con la ayuda del trazado de radiovectores y las reglas trigonométricas.



1^{ER} Y 2^O TEOREMAS DE MOHR GENERALIZADOS

$$\varphi_P = \frac{1}{EI} \sum_{i>P} \pm A_i$$

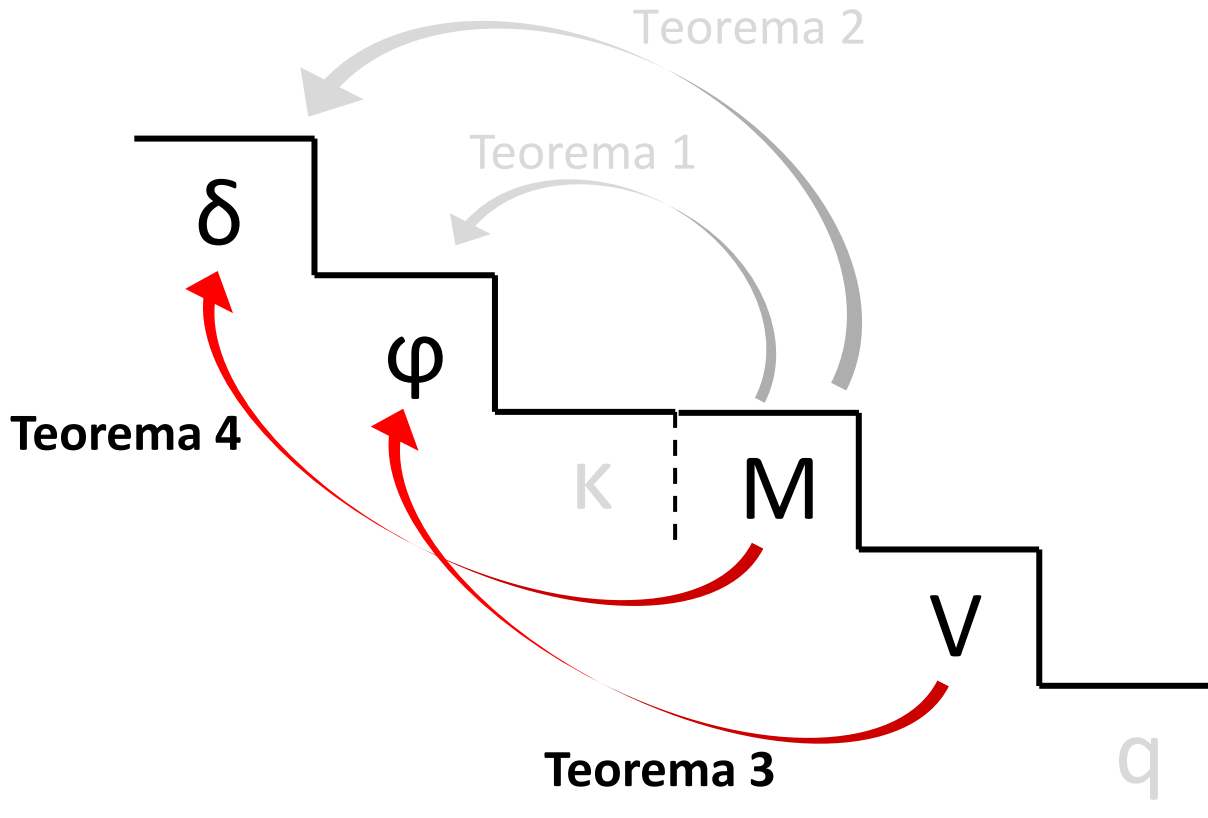
*“En ménsulas de directriz recta con puntos angulosos, el **ángulo** en cualquier punto P es igual a la **suma de las áreas de los diagramas de momentos** desde P hasta el empotramiento, cada una con su signo, **dividida por la rigidez de la sección**”*

$$\delta_P = \frac{1}{EI} \sum_{i>P} \pm A_i h_i$$

*“En ménsulas de directriz recta con puntos angulosos, el **desplazamiento** de cualquier punto P en cualquier dirección v es igual a la **suma de los productos**, desde P hasta el empotramiento, de **cada área de momento** (cada una con su signo) multiplicada por la distancia desde la proyección de su centro de gravedad sobre la barra hasta la recta v, **dividida por la rigidez de la sección**”*

3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

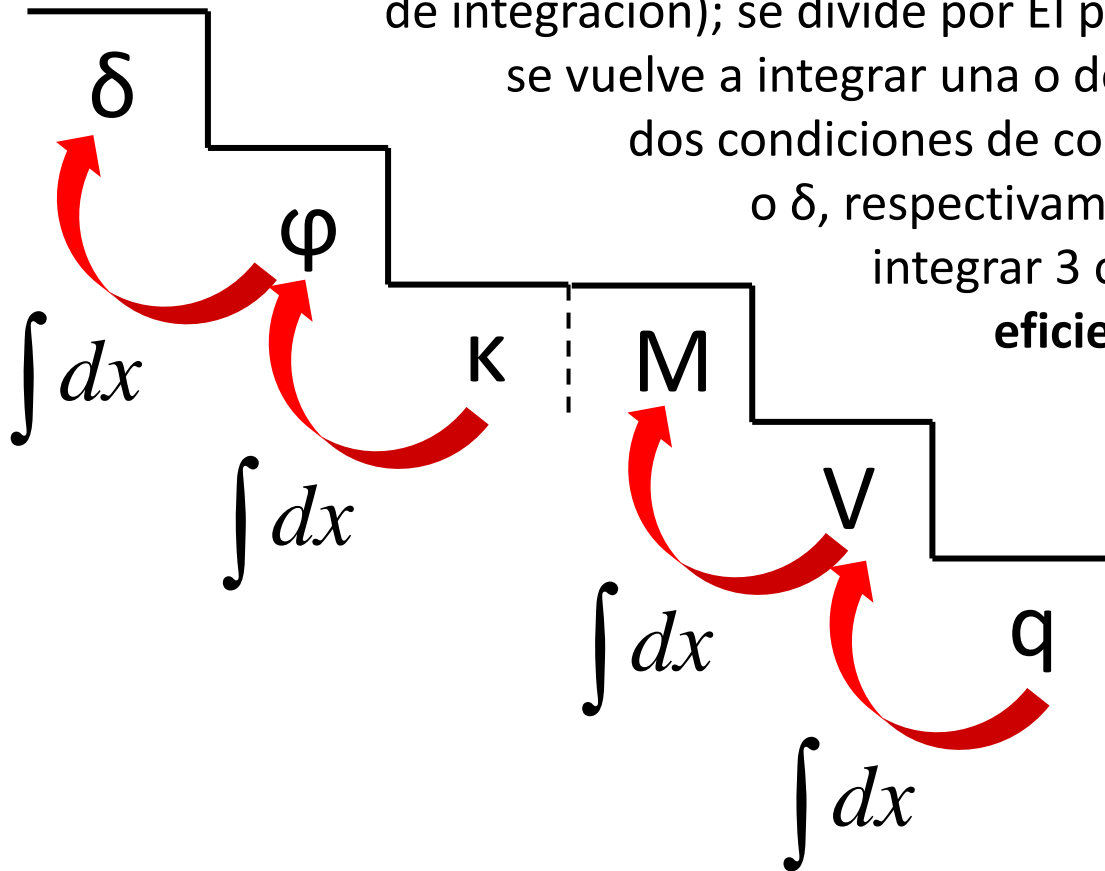
Se denominan 3^{er} y 4^º Teoremas de Mohr (o simplemente 3^{er} teorema, englobándolos a ambos) a un método alternativo de cálculo de giros y desplazamientos en vigas que se basa en **sustituir** el procedimiento de **integración** matemática encadenada por el procedimiento (más sencillo) de cálculo de cortantes y momentos, basado sólo en las **leyes de la estática**.



Heinrich Müller-Breslau (1842 – 1903)

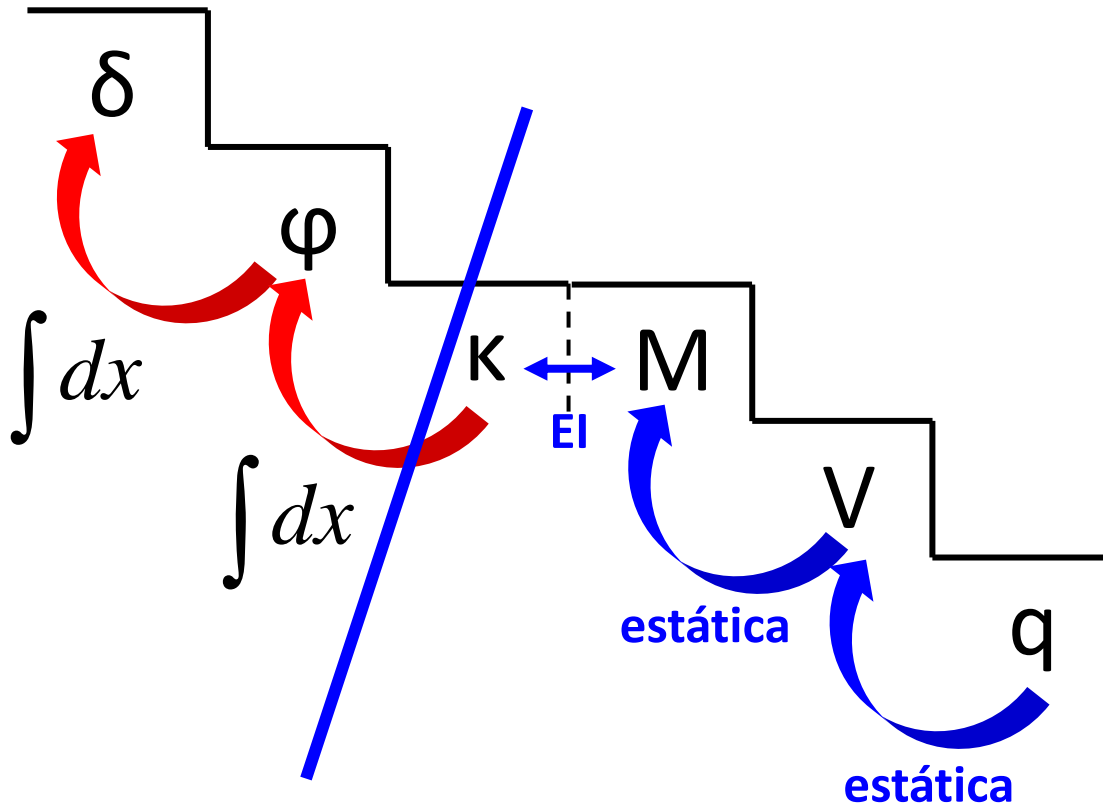
3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

Para obtener giros (φ) y deformaciones (δ) en vigas a partir de su carga repartida (q), se podría proceder a **integrar encadenadamente** (equivalente a subir los 4 peldaños de la escalera): se integra dos veces para pasar de q a M , (imponiendo dos condiciones estáticas para calcular el valor de las constantes de integración); se divide por EI para obtener la curvatura (κ), y se vuelve a integrar una o dos veces (imponiendo una o dos condiciones de compatibilidad) para calcular φ o δ , respectivamente. En total, habría que integrar 3 o 4 veces, lo cual es **poco eficiente** en términos de esfuerzo.



3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

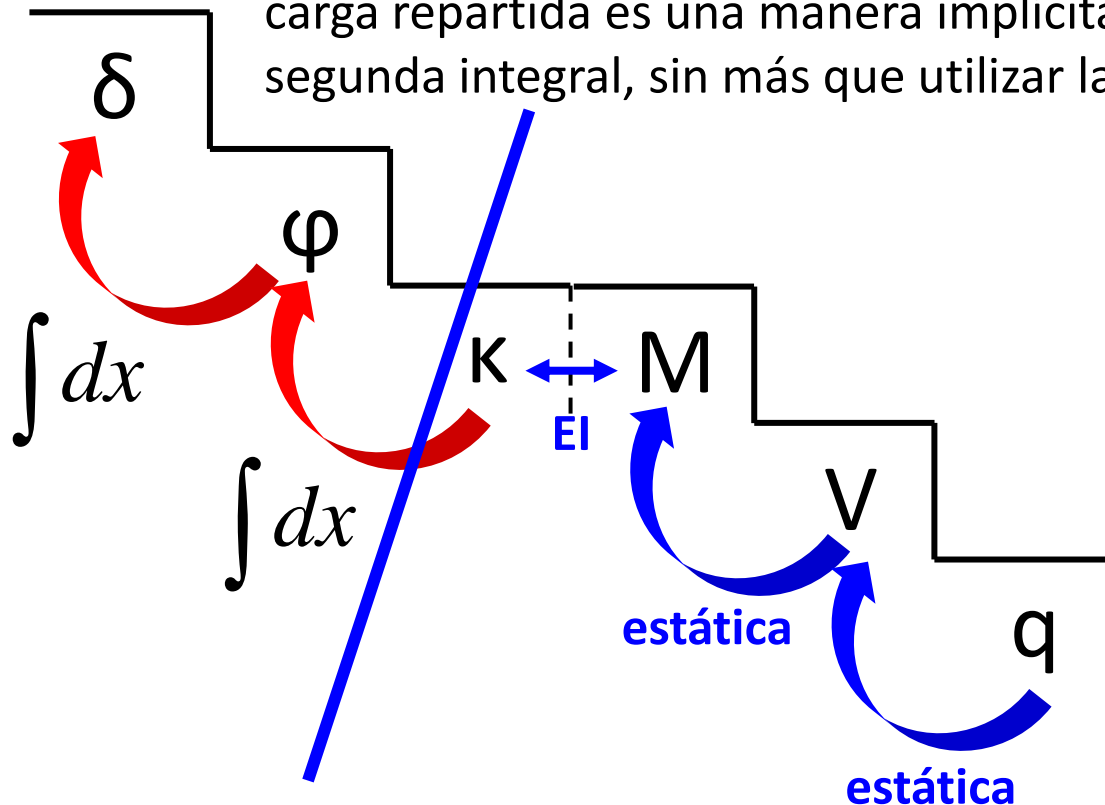
Sin embargo, **somos capaces de “escalar” hasta la curvatura sin necesidad de integrar**: el cálculo de V y M a partir de q se puede efectuar según los principios de la estática, y la relación entre κ y M es una Ley de Hooke conocida. Por tanto, para calcular φ o δ bastaría con efectuar una o dos integraciones desde κ .



A pesar de haber reducido el trabajo matemático a solo una o dos integraciones, se debe intentar por todos los medios eliminar el proceso de integración del procedimiento de análisis.

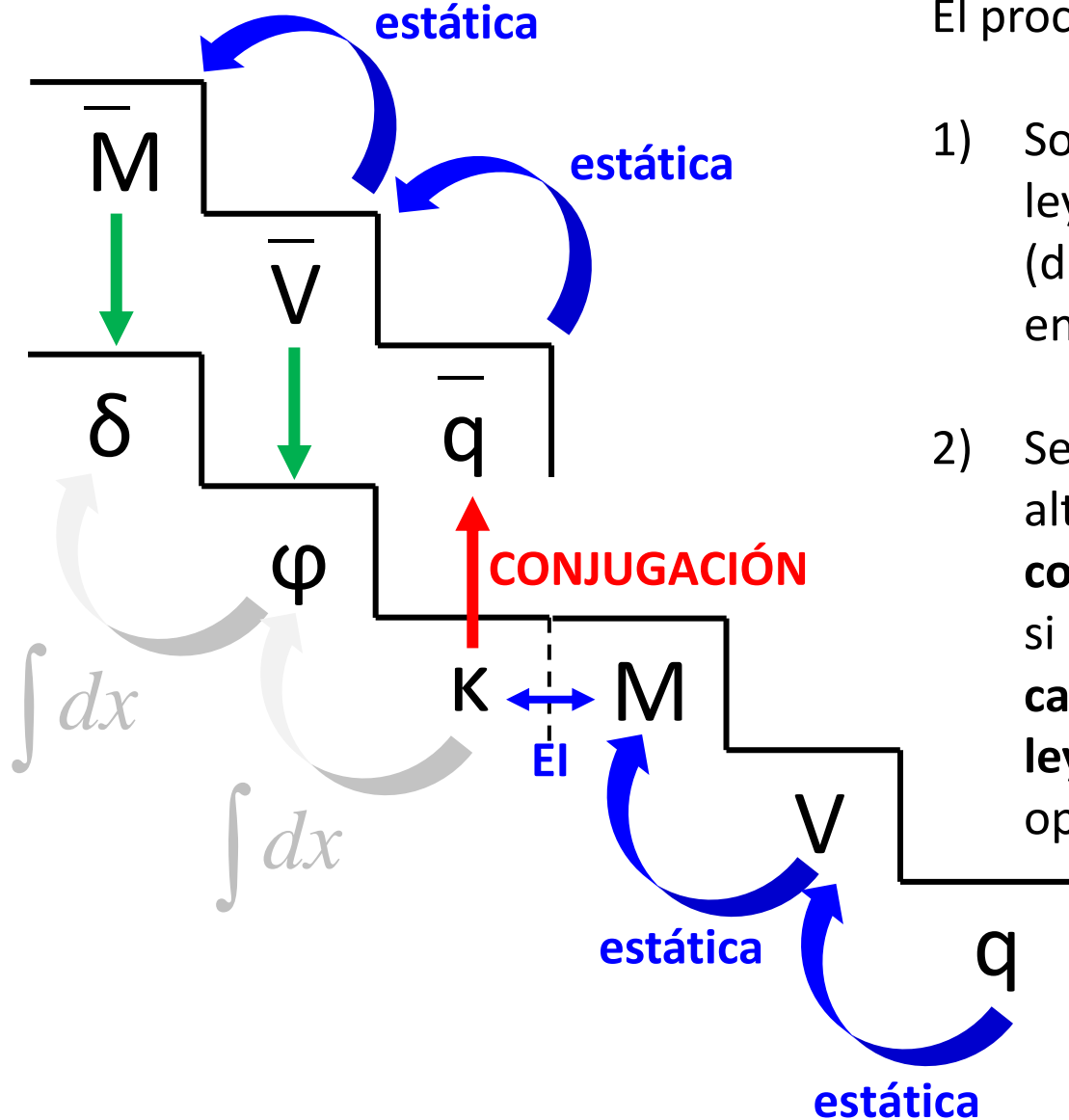
3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

Así, se debe notar que los dos primeros “escalones” ($q \rightarrow V$ y $V \rightarrow M$) se es capaz de subirlos sin integrar, es decir, que las leyes de la estática ofrecen una **manera indirecta de integrar cualquier función**: si se supone que la ordenada de esa función es una carga repartida, calcular cortantes y momentos a partir de dicha carga repartida es una manera implícita de obtener una primera y segunda integral, sin más que utilizar las leyes de la estática.



Por tanto, se puede pensar en sustituir las dos integrales restantes por este procedimiento implícito, sin más que considerar **que κ es la carga de la viga, φ los cortantes y δ los momentos**, calculados sólo mediante estática.

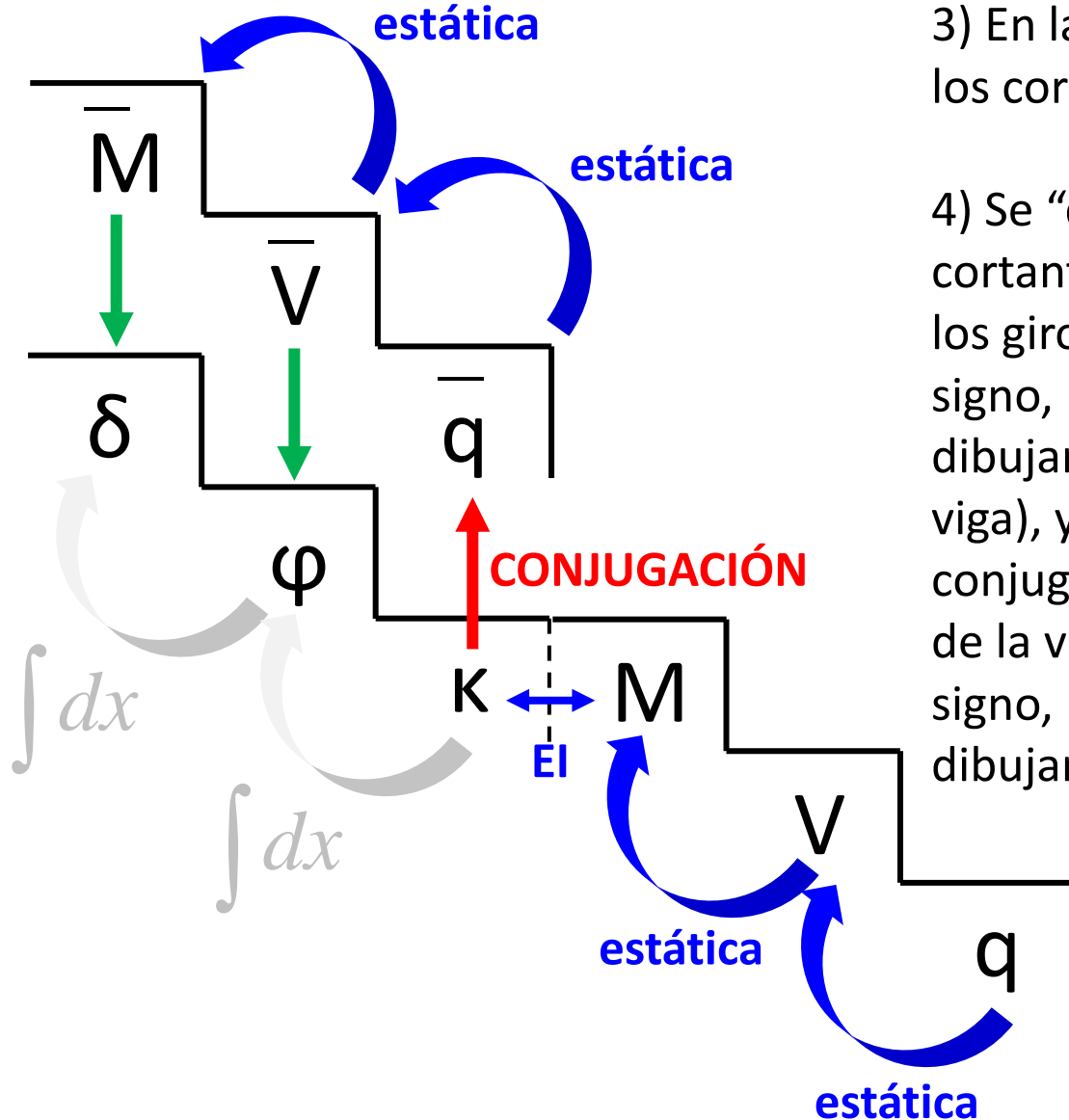
3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)



El procedimiento es como sigue:

- 1) Sobre la viga real, se calcula la ley de momentos y la **curvatura** (dibujada con positivos por encima del eje y viceversa)
- 2) Se construye una viga alternativa, llamada **viga conjugada**, con idénticos apoyos si la viga real es biapoyada, cuya **carga conjugada \bar{q} es igual a la ley de curvaturas real** con signo opuesto (y por tanto dibujada del mismo lado que la gráfica de curvaturas, pues el criterio de representación es el contrario): $\bar{q} = -\kappa$

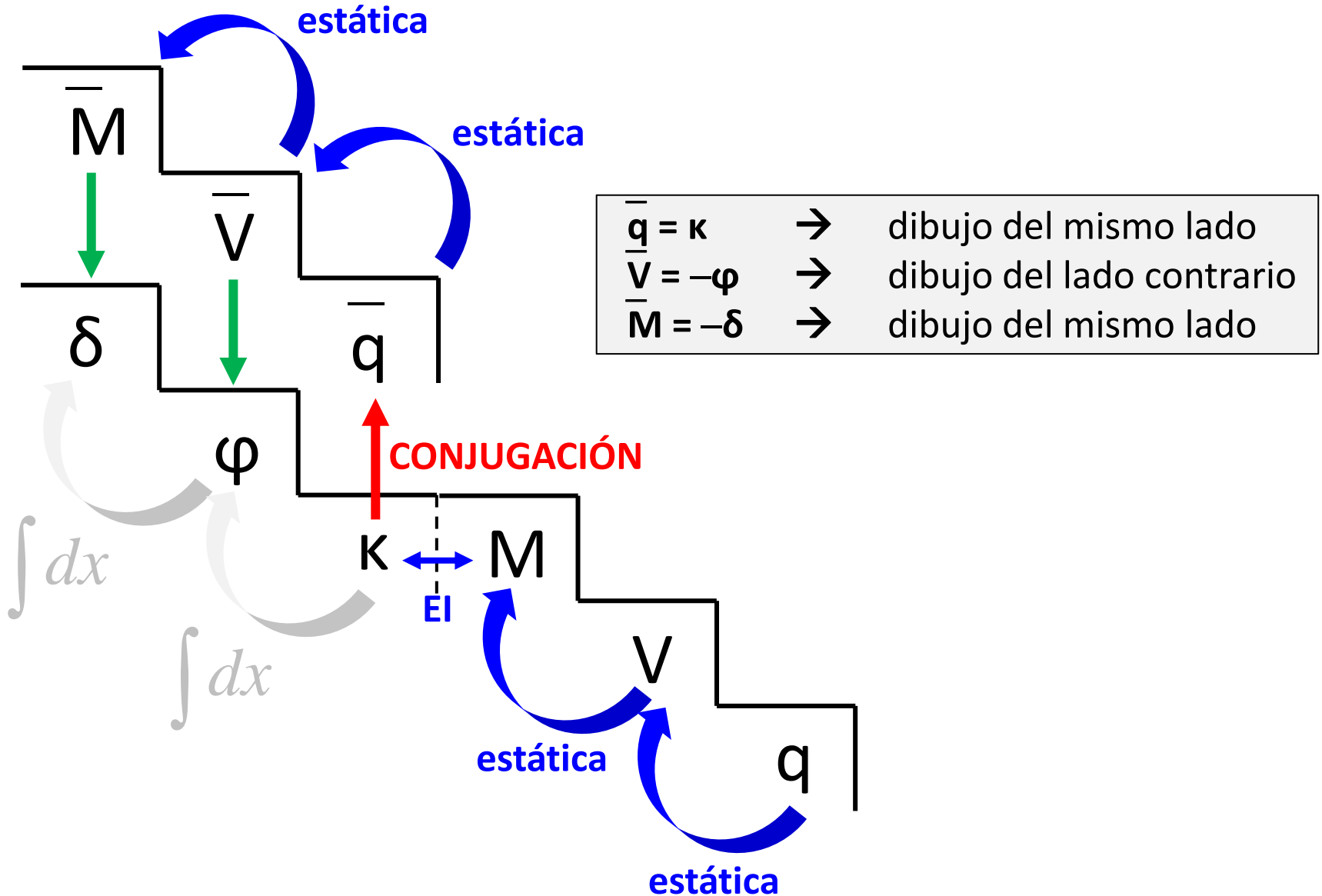
3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)



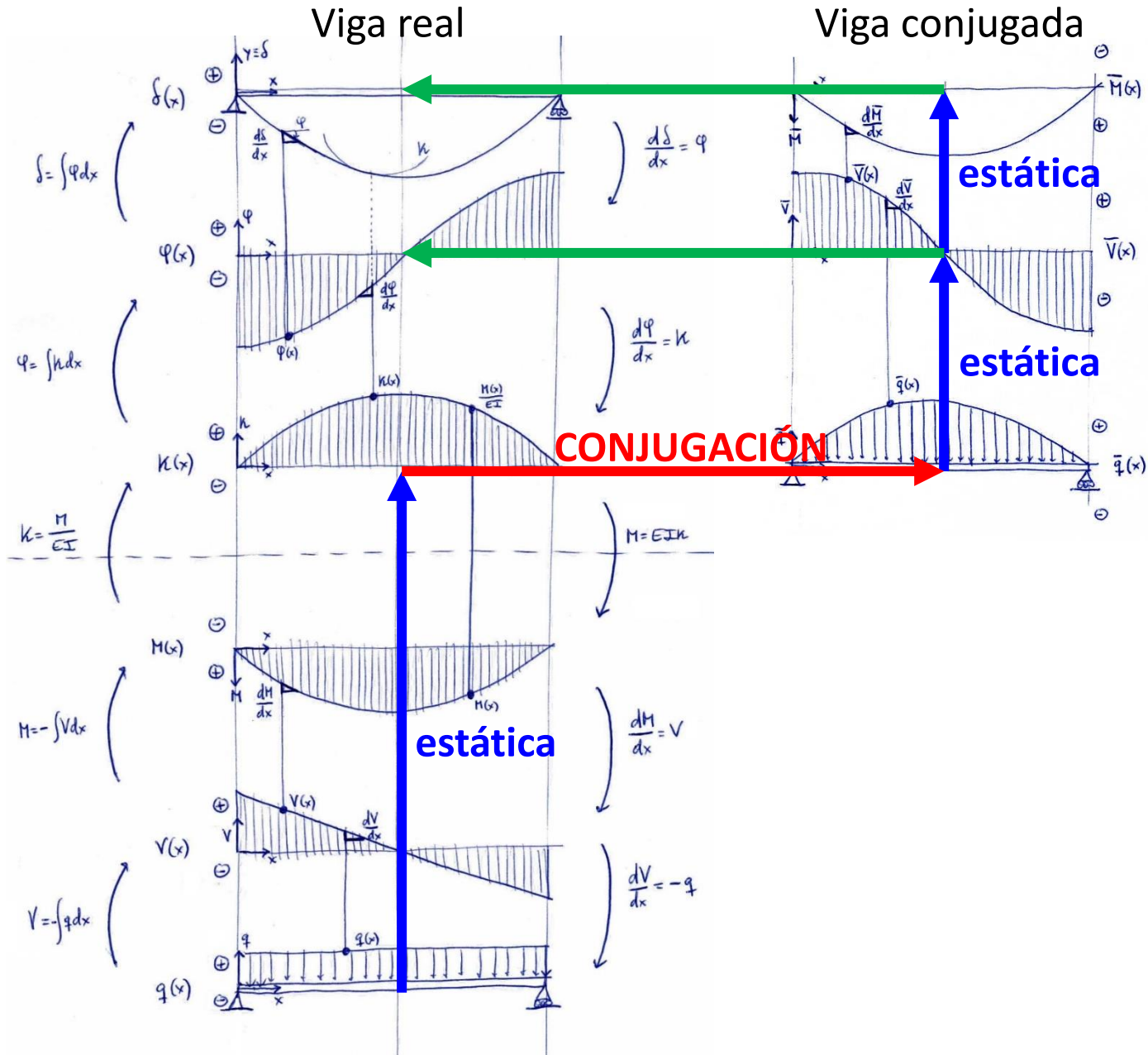
3) En la **viga conjugada**, se calculan los cortantes \bar{V} y momentos \bar{M} .

4) Se “deshace” el cambio; los cortantes en la viga conjugada son los giros de la viga real cambiados de signo, $\bar{V} = -\varphi$ (y por tanto se dibujarían del lado opuesto de la viga), y los momentos en la viga conjugada son los desplazamientos de la viga real cambiados de signo, $\bar{M} = -\delta$ (y por tanto se dibujarían del mismo lado).

3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

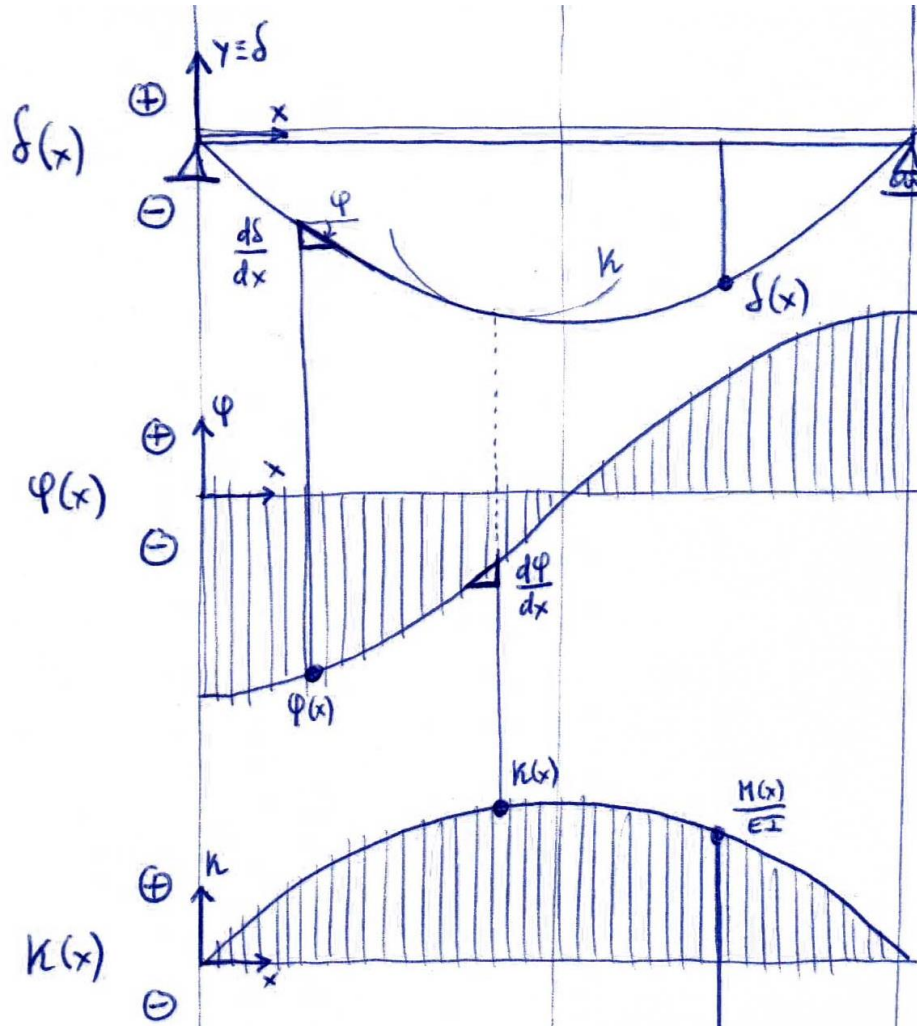


3ER Y 4º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

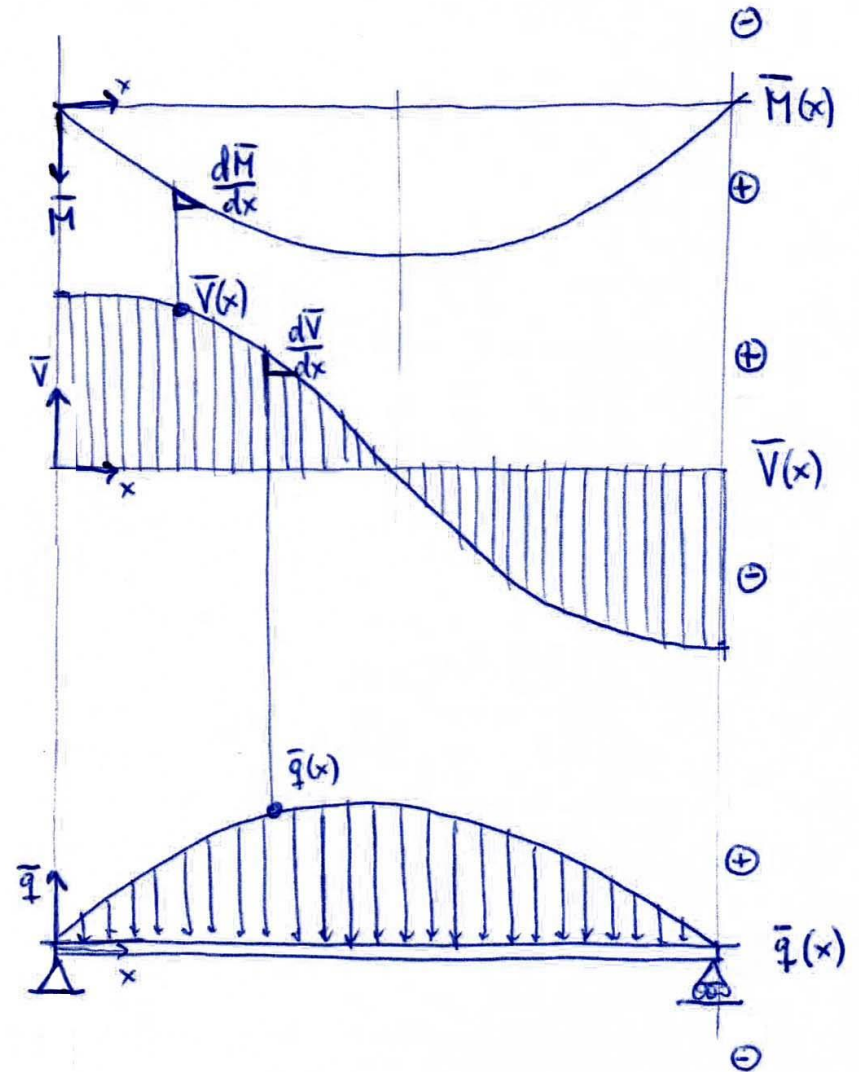


3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

Viga real



Viga conjugada



3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

Demostración del 3^{er} Teorema (o de la primera parte del 3^{er} Teorema):

$$\varphi(x) = -\bar{V}(x)$$

Los giros horarios y los descensos se toman negativos. Por trigonometría:

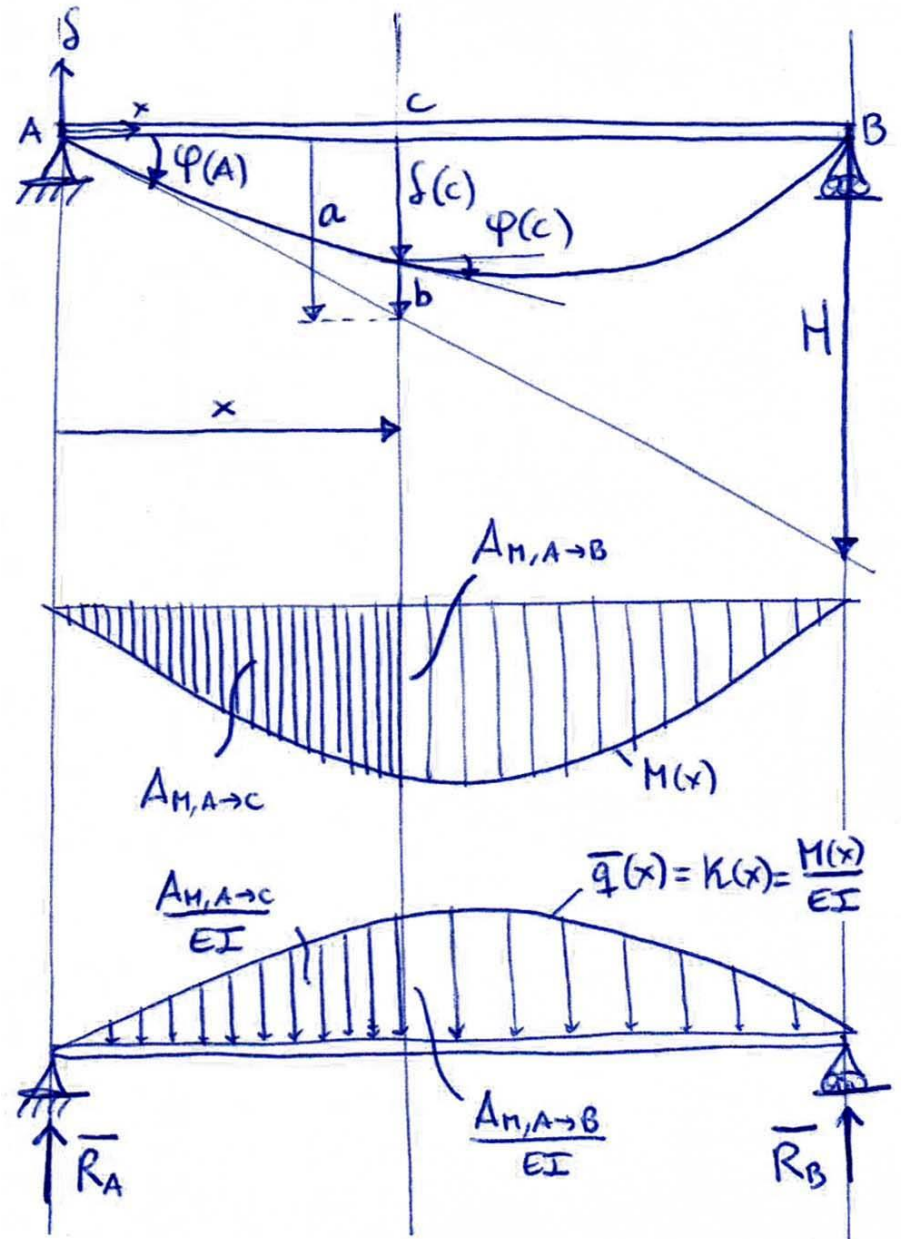
$$\varphi(A) \approx \tan(\varphi(A)) = \frac{H}{L}$$

Aplicando el 2^º Teorema de Mohr desde la tangente en A hasta la vertical en B:

$$H = -\frac{S_{M,A \rightarrow B}}{EI}$$

Sustituyendo:

$$\varphi(A) = -\frac{S_{M,A \rightarrow B}}{EIL}$$



3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

Por otra parte, aplicando el 1^{er} Teorema de Mohr entre A y C:

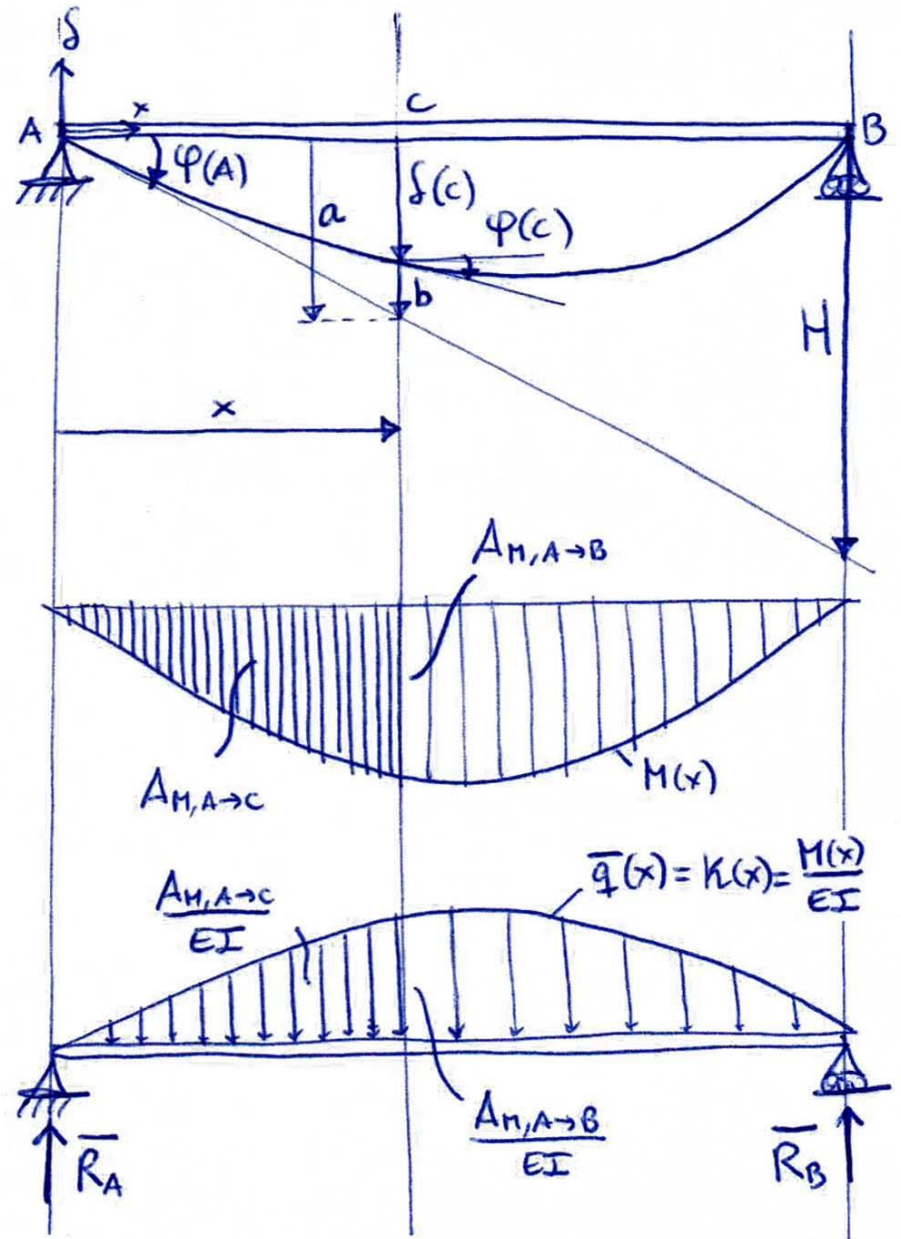
$$\varphi(C) - \varphi(A) = \frac{A_{M,A \rightarrow C}}{EI}$$

Sustituyendo $\varphi(A)$ y suponiendo que C está situado en la abscisa x:

$$\varphi(x) + \frac{S_{M,A \rightarrow B}}{EIL} = \frac{A_{M,A \rightarrow C}}{EI} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{EI} \left(A_{M,A \rightarrow C} - \frac{S_{M,A \rightarrow B}}{L} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = -\frac{1}{EI} \left(\frac{S_{M,A \rightarrow B}}{L} - A_{M,A \rightarrow C} \right)$$



3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

Por lo que respecta a la viga conjugada, su reacción en A, \bar{R}_A , se calcula tomando momentos en B, de tal manera que el momento respecto de B de la carga conjugada $\bar{q}(x)$ es igual al momento estático $S_{M,A \rightarrow B}/EI$:

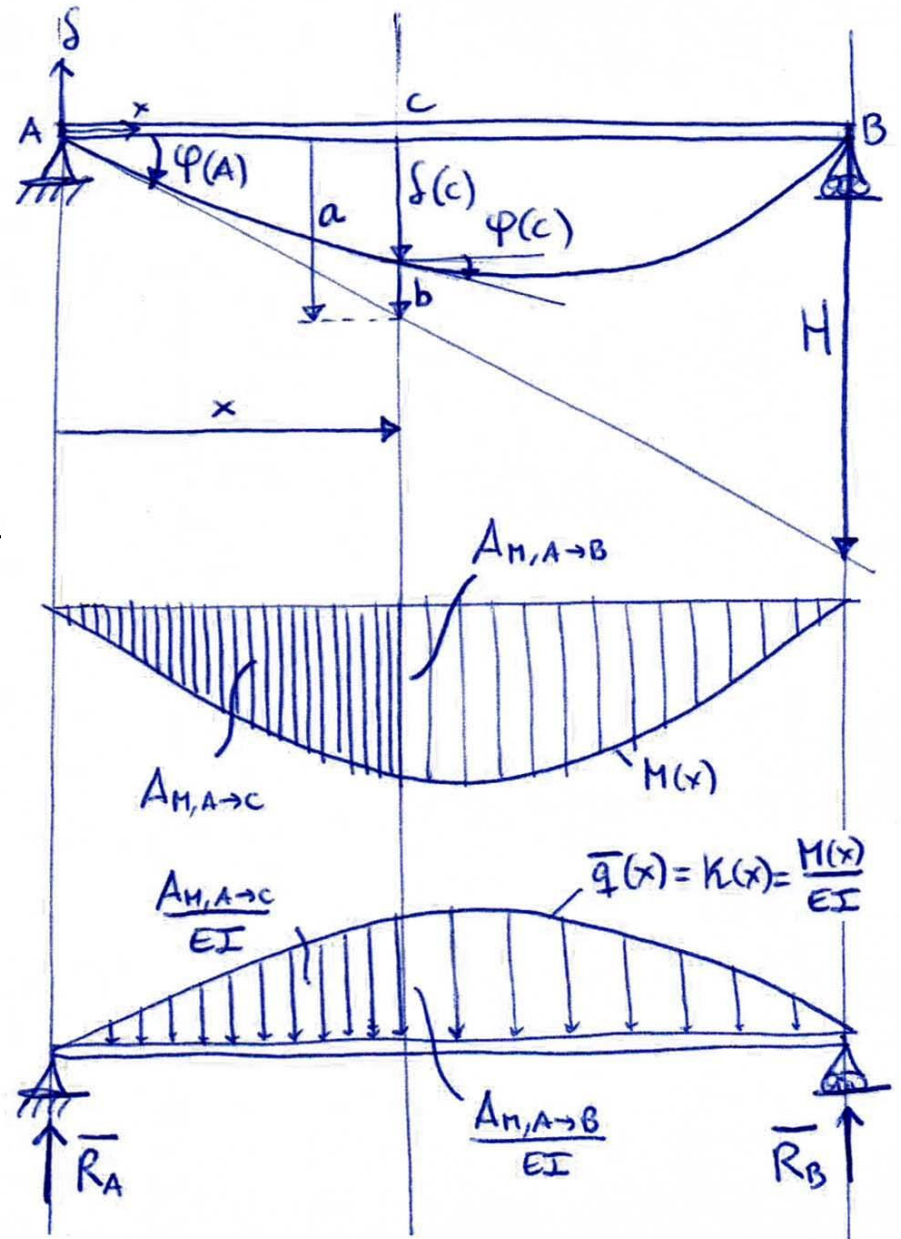
$$-\bar{R}_A \cdot L + \frac{S_{M,A \rightarrow B}}{EI} = 0 \Rightarrow \bar{R}_A = \frac{S_{M,A \rightarrow B}}{EIL}$$

Así, el cortante conjugado $\bar{V}(x)$ es:

$$\bar{V}(x) = \bar{R}_A - \frac{A_{M,A \rightarrow C}}{EI} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{V}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{S_{M,A \rightarrow B}}{L} - A_{M,A \rightarrow C} \right)$$

Cuyo valor es el opuesto de $\varphi(x)$, quedando demostrado $\varphi(x) = -\bar{V}(x)$.



3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

Demostración del 4º Teorema (o de la segunda parte del 3^{er} Teorema):

$$\delta(x) = -\bar{M}(x)$$

Geoméricamente:

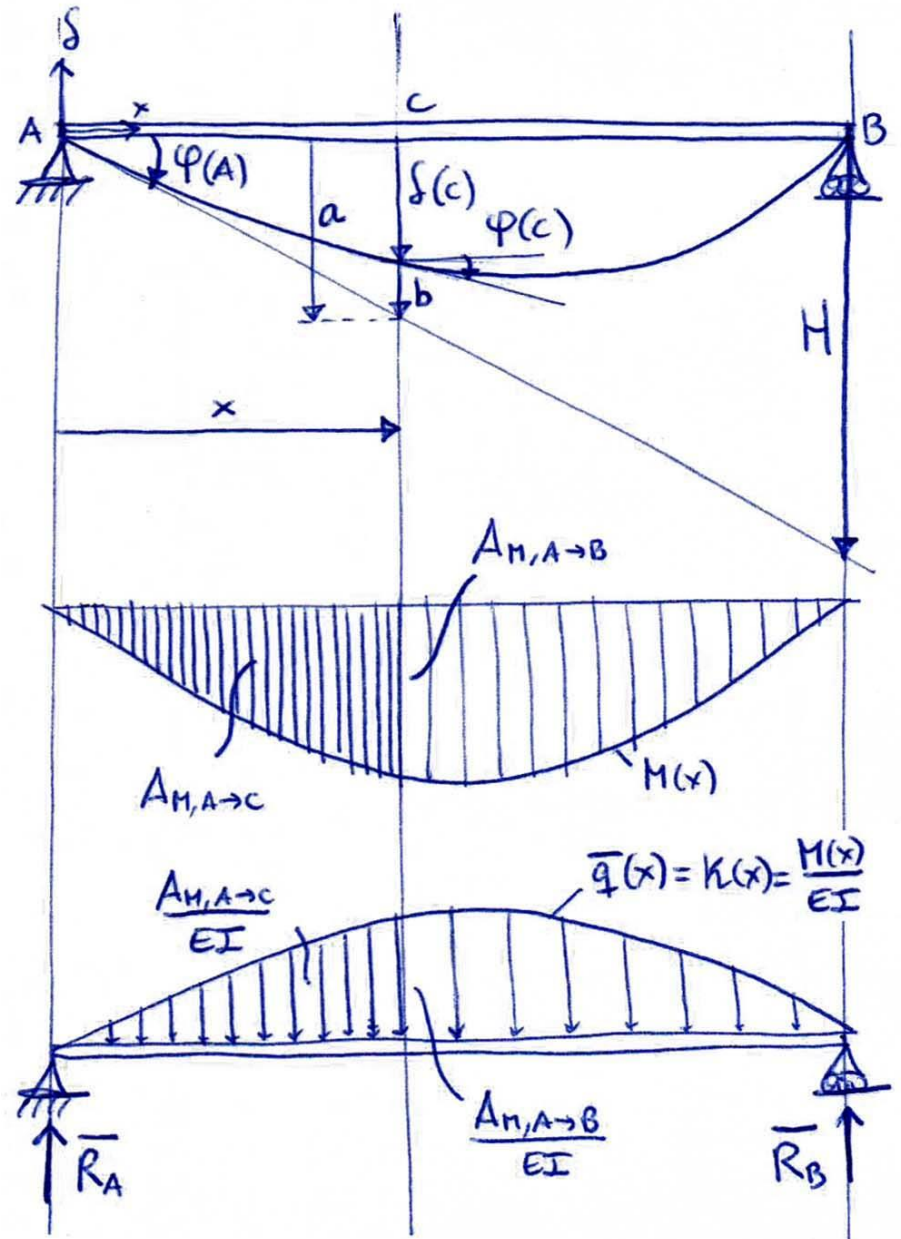
$$\delta(C) = a - b$$

Por trigonometría, y sustituyendo H por su valor según el 2º Teorema de Mohr entre A y B:

$$\frac{a}{x} = \frac{H}{L} \Rightarrow a = \frac{Hx}{L} = -\frac{S_{M,A \rightarrow B} \cdot x}{EIL}$$

Aplicando el 2º Teorema de Mohr entre A y C:

$$b = -\frac{S_{M,A \rightarrow C}}{EI}$$



3^{ER} Y 4^º TEOREMAS DE MOHR (VIGA CONJUGADA)

Sustituyendo y suponiendo que C está situado en la abscisa x :

$$\delta(C) = \delta(x) = a - b =$$

$$= \frac{1}{EI} \left(-\frac{S_{M,A \rightarrow B} \cdot x}{L} + S_{M,A \rightarrow C} \right) \Rightarrow$$

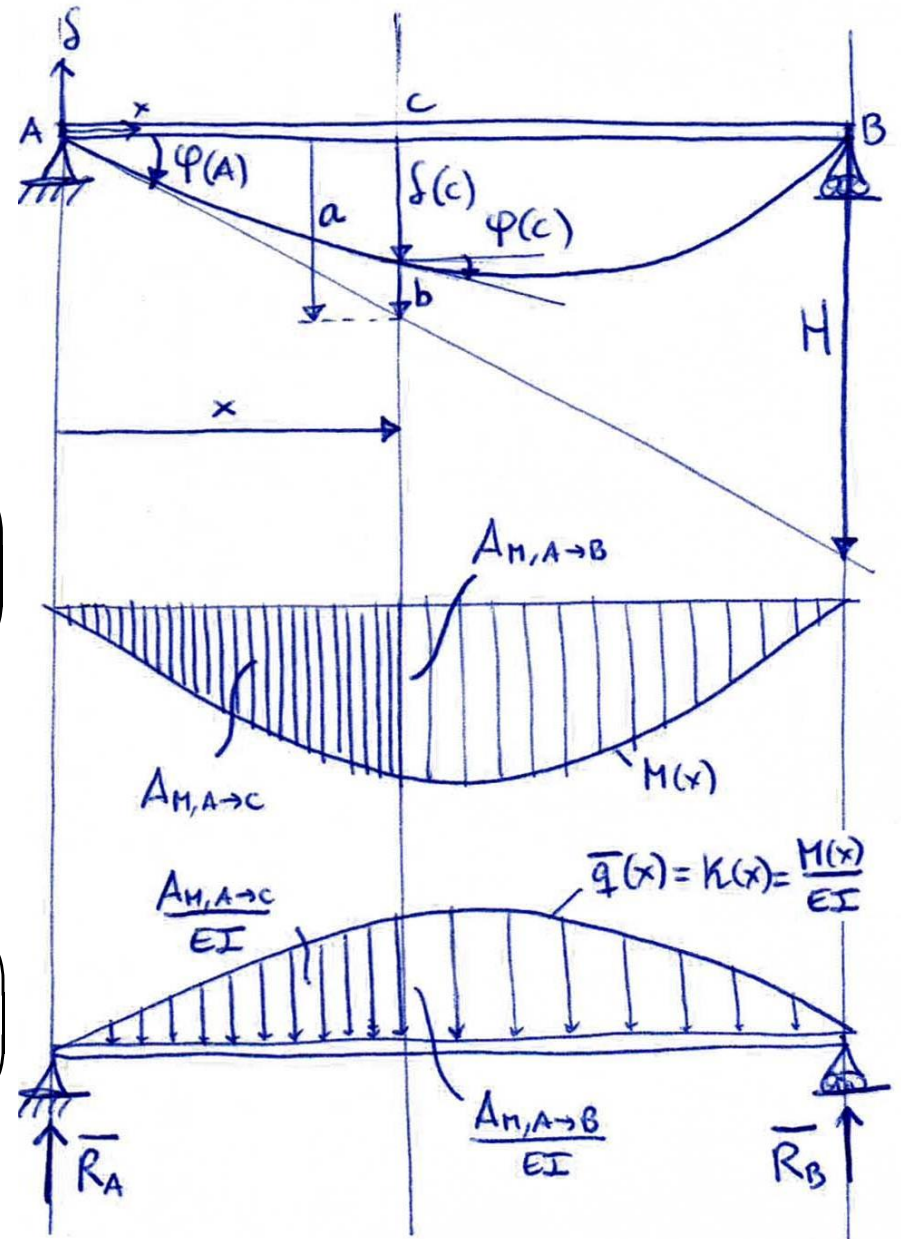
$$\Rightarrow \delta(x) = -\frac{1}{EI} \left(\frac{S_{M,A \rightarrow B} \cdot x}{L} - S_{M,A \rightarrow C} \right)$$

El momento conjugado $\bar{M}(x)$ es:

$$\bar{M}(x) = \bar{R}_A \cdot x - \frac{S_{M,A \rightarrow C}}{EI} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{M}(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{S_{M,A \rightarrow B} \cdot x}{L} - S_{M,A \rightarrow C} \right)$$

Que es el valor opuesto de $\delta(x)$, quedando demostrado $\delta(x) = -\bar{M}(x)$.



MOHR 1

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{A_{M,A \rightarrow B}}{EI}$$

MOHR 2

$$\delta_{A \rightarrow B} = \frac{S_{M,A \rightarrow B}}{EI}$$

MOHR 1 GENERALIZADO

$$\varphi_P = \frac{1}{EI} \sum_{i>P} \pm A_i$$

MOHR 2 GENERALIZADO

$$\delta_P = \frac{1}{EI} \sum_{i>P} \pm A_i h_i$$

MOHR 3 (3.1?)

$$\varphi(x) = -\overline{V}(x)$$

MOHR 4 (3.2?)

$$\delta(x) = -\overline{M}(x)$$

