5
FUNICULAR

PROYECTO DE ESTRUCTURAS

6 FASES:

1) **Diseño: elección del sistema y definición geométrica**

2) **Modelización: elaboración de modelo físico**

3) **Análisis: cálculo de solicitaciones y deformaciones de los elementos**

4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos

5) Representación

6) Ejecución

ESTRUCTURAS DE “SECCIÓN ACTIVA”

Estructuras de geometría definida, normalmente elementos rectos verticales y horizontales que **resisten las acciones con el tamaño de sus secciones**:

SOLICITACIONES N, M → TAMAÑOS

ESTRUCTURAS DE “FORMA ACTIVA”

Estructuras donde **se elige la geometría** para que sea óptima a fin de que las solicitaciones que aparecen solo sean axiles y no aparezcan momentos flectores (muy dañinos), lo que conlleva usualmente espesores pequeños:

FORMA → SOLICITACIÓN N

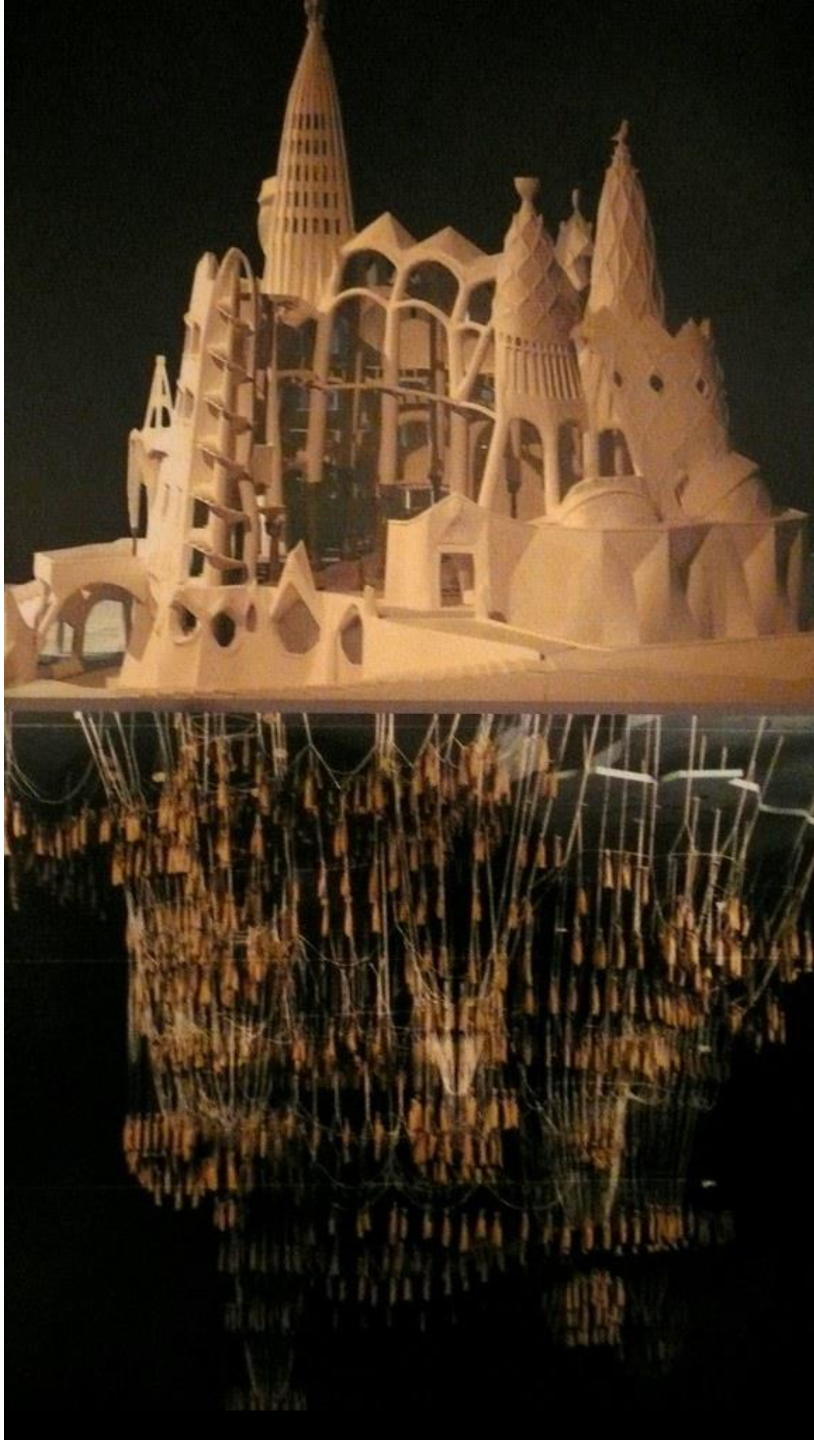
FUNICULARES Y ANTIFUNICULARES

Funicular: del latín *funicŭlus* (cuerda)

FUNICULARES Y ANTIFUNICULARES

<u>**Antifunicular:**</u> estructura rígida y resistente tanto a axil (compresión o tracción) como a momento flector, pero cuya geometría le permite trabajar solo a compresión, ya que su forma es de curvatura opuesta a la que adoptaría un cable sometido a las mismas cargas

<u>**Funicular:**</u> cable que adapta su forma a las cargas actuantes para encontrar el único equilibrio que le permite trabajar solo a tracción (lo único que puede resistir)



FUNICULARES

Puentes colgantes

FUNICULARES

Puentes colgantes

FUNICULARES

Pasarelas “banda tesa”

FUNICULARES

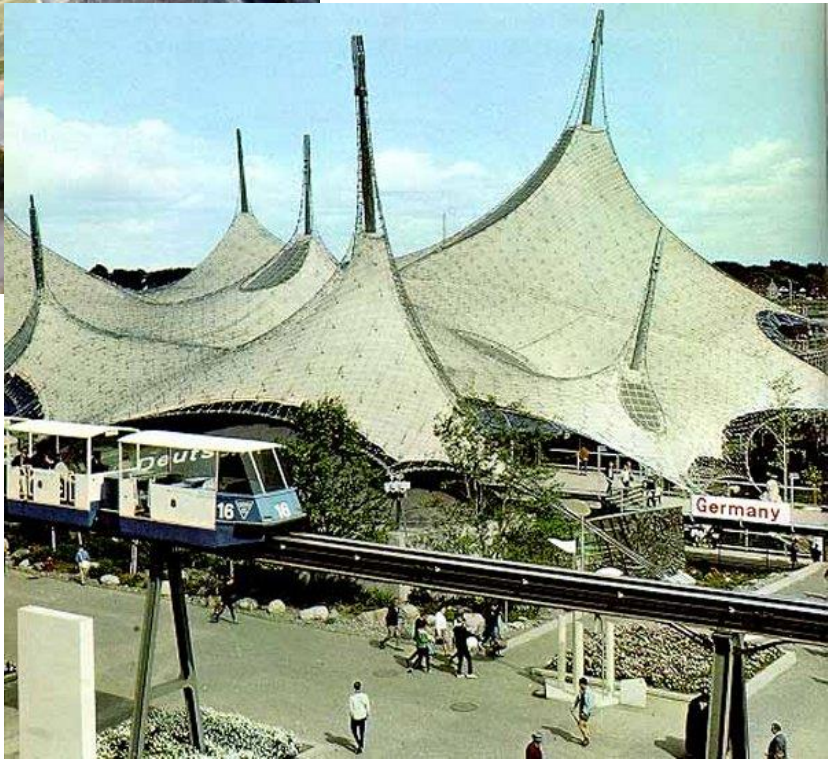
Anillos perimetrales

FUNICULARES

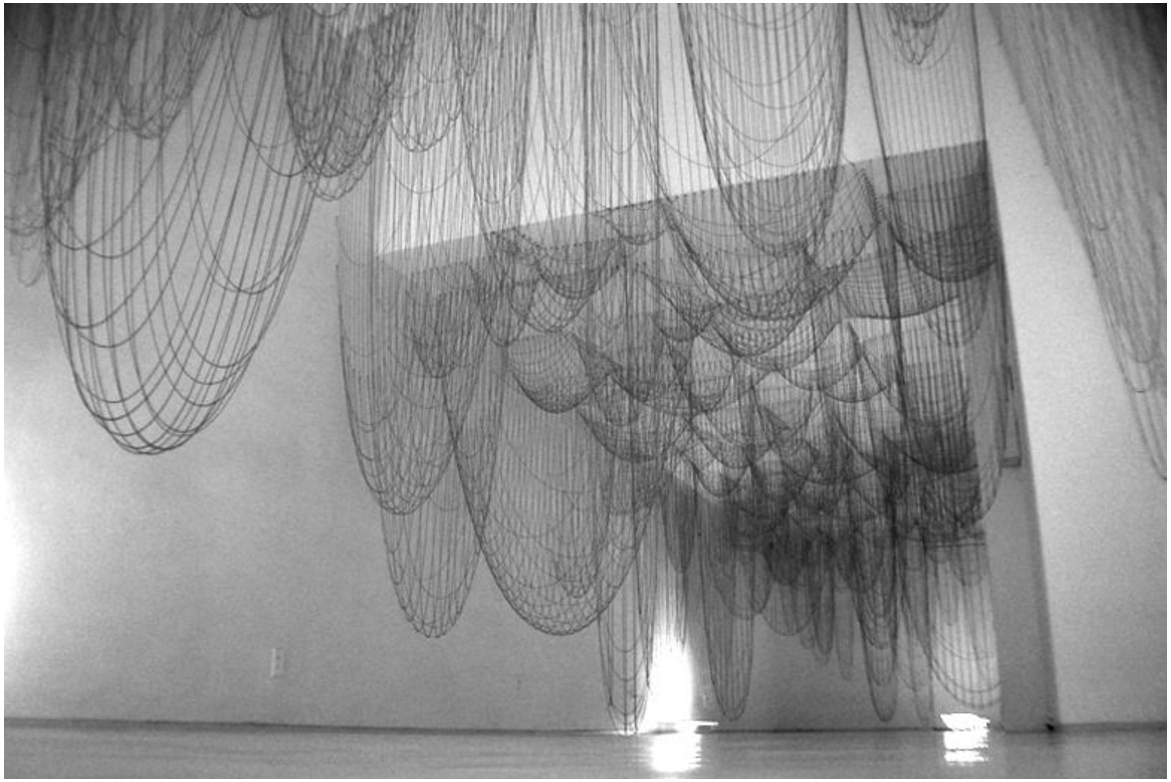
Anillos perimetrales

FUNICULARES

Lonas tensadas

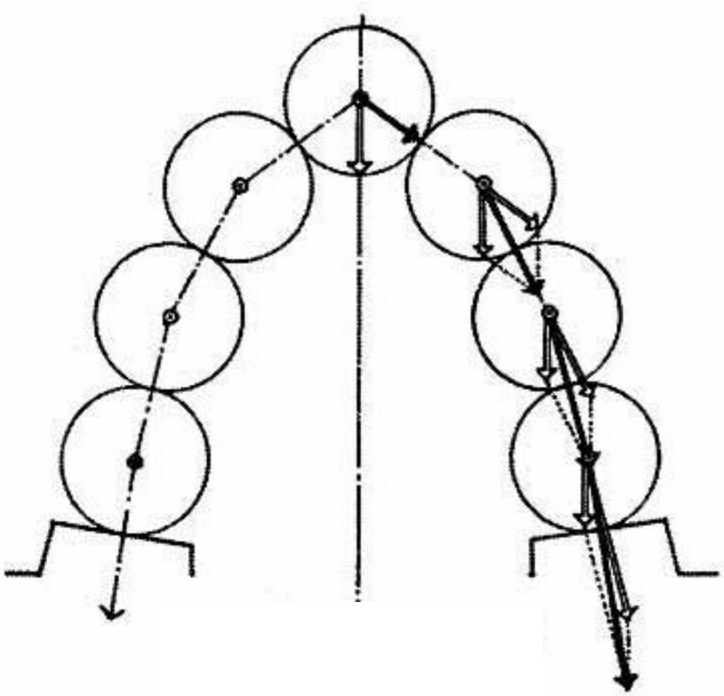


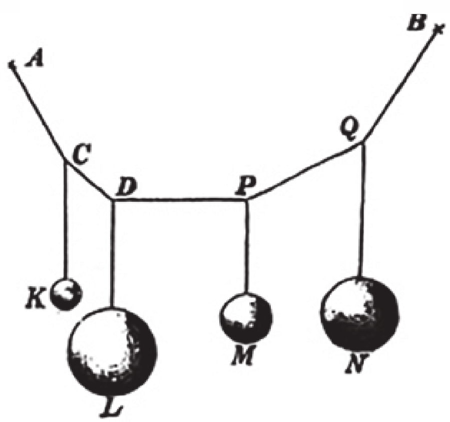
FUNICULARES
Interiorismo

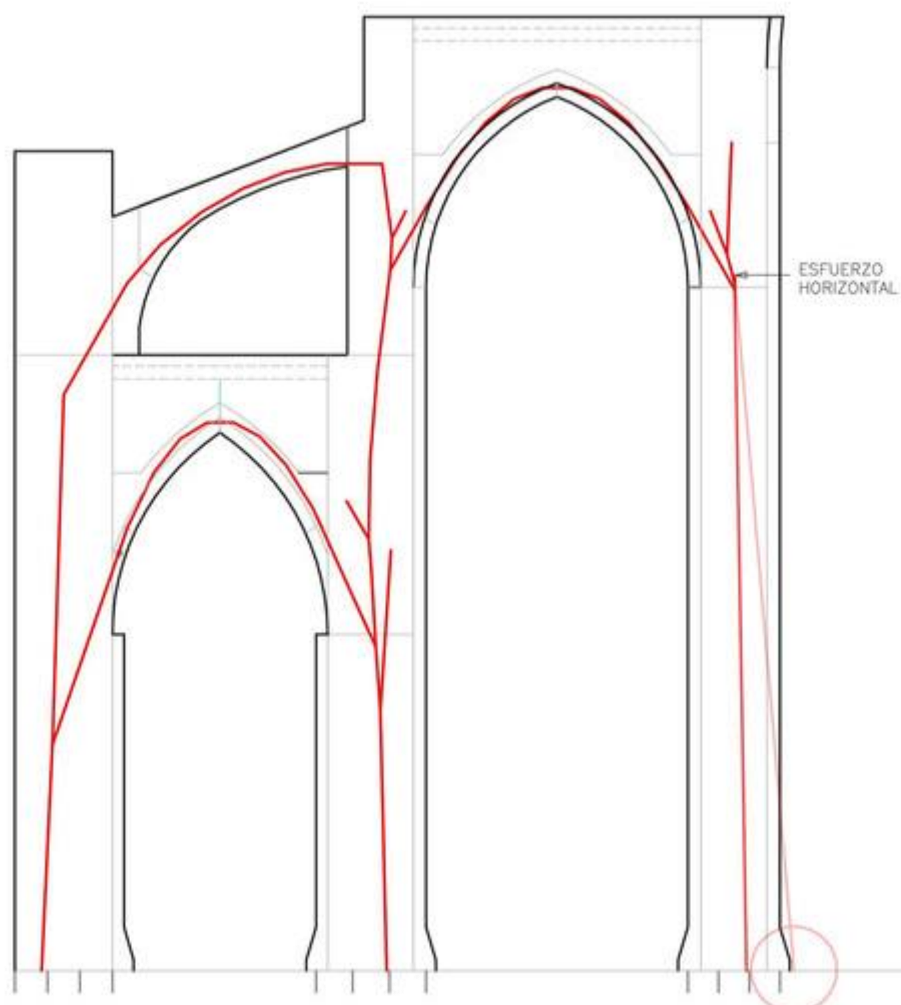


ANTIFUNICULARES

ANTIFUNICULARES
Empujes de catedrales





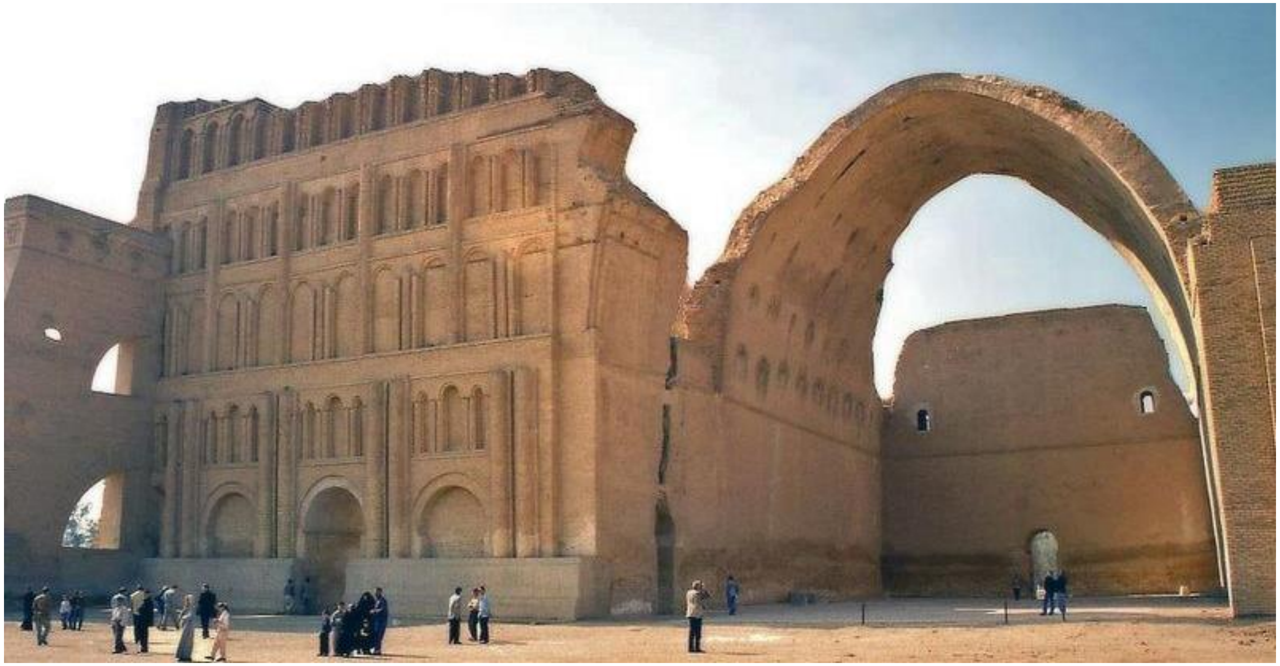


ANTIFUNICULARES

Puentes en arco

ANTIFUNICULARES

Bóvedas



ANTIFUNICULARES

Bóvedas tabicadas

ANTIFUNICULARES

Cúpulas

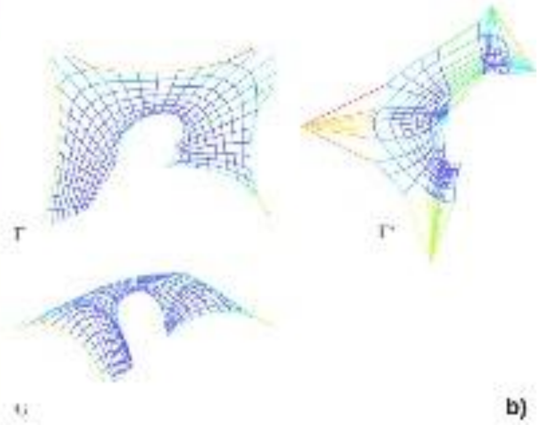
ANTIFUNICULARES

Anillos comprimidos

ANTIFUNICULARES

Estructuras neumáticas

ANTIFUNICULARES
Láminas de forma libre

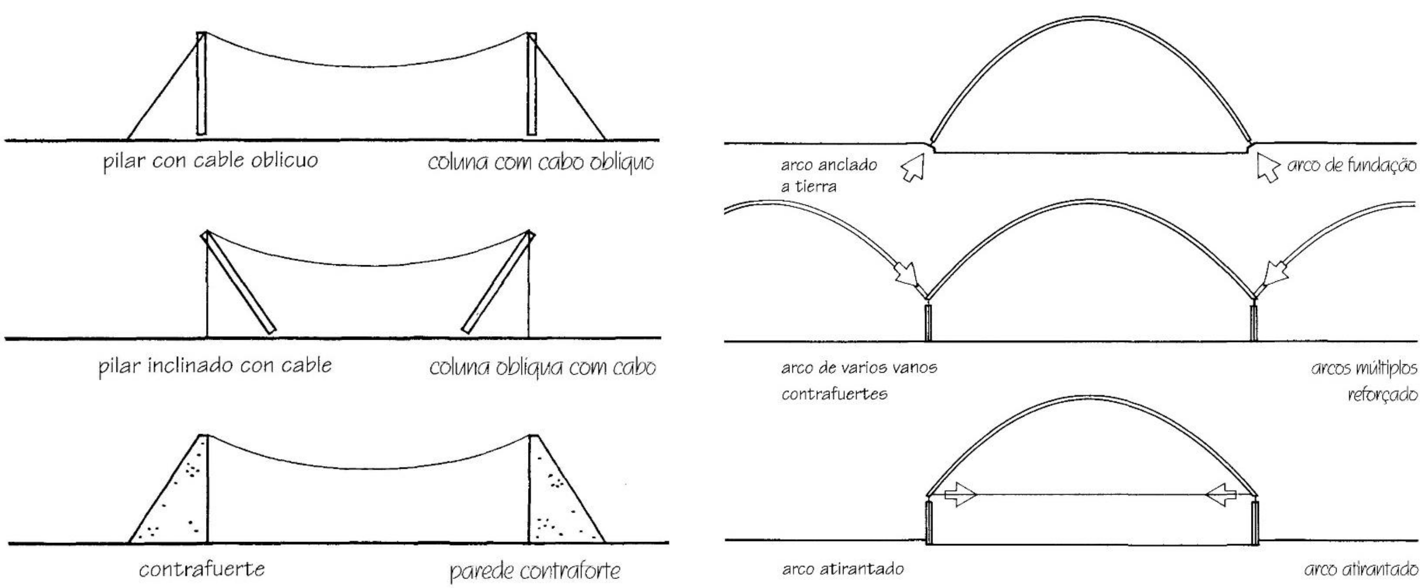


¿POR QUÉ SE CONSTRUYEN MÁS ANTIFUNICULARES QUE FUNICULARES?

FUNICULARES vs. ANTIFUNICULARES

A pesar de que los funiculares son elementos muy ligeros porque no sufren pandeo al estar traccionados, el camino de las cargas es mayor porque deben ascender para luego descender por elementos comprimidos que además tienen mucha flexión si no existen otros cables que resistan los empujes.

En los funiculares, aunque la compresión exige secciones mayores, las cargas bajan directamente y es más sencillo contener los empujes con el terreno, mediante arcos adosados o mediante tirantes



OBJETIVOS DEL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA FUNICULAR

1) Encontrar la forma que convierte a una estructura en funicular o antifunicular, es decir, en estructura de FORMA ACTIVA

2) Utilizar el trazado de funiculares como método auxiliar para la obtención de **reacciones de forma gráfica** en estructuras de SECCIÓN ACTIVA

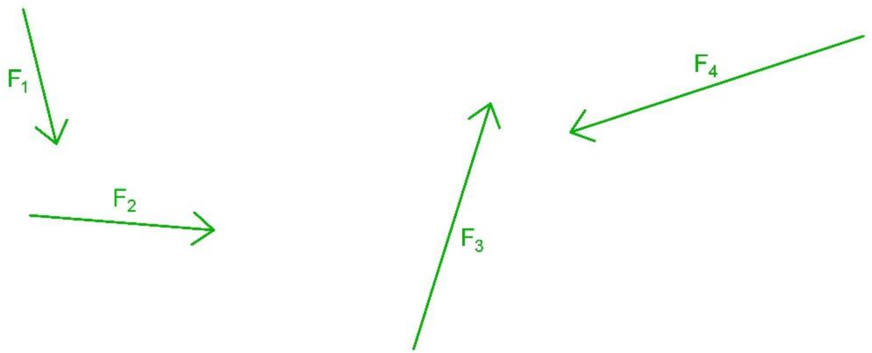
Por tanto, en todo el tema se va alternando entre utilizar el trazado funicular como:

1) Representación **real** de un cable estructural
2) Método gráfico **auxiliar** cuyas propiedades permiten resolver problemas en otras estructuras

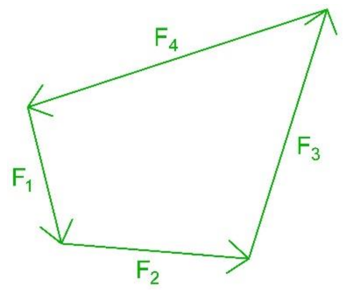
ESTÁTICA GRÁFICA

En muchas ocasiones se puede analizar una estructura (obtener reacciones y solicitaciones) de manera gráfica, considerando las **<u>fuerzas como vectores</u>**.

Gráficamente, las ecuaciones de equilibrio para un conjunto de fuerzas cualesquiera tienen la siguiente interpretación:



$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \rightarrow$ Las fuerzas forman un **polígono cerrado.**

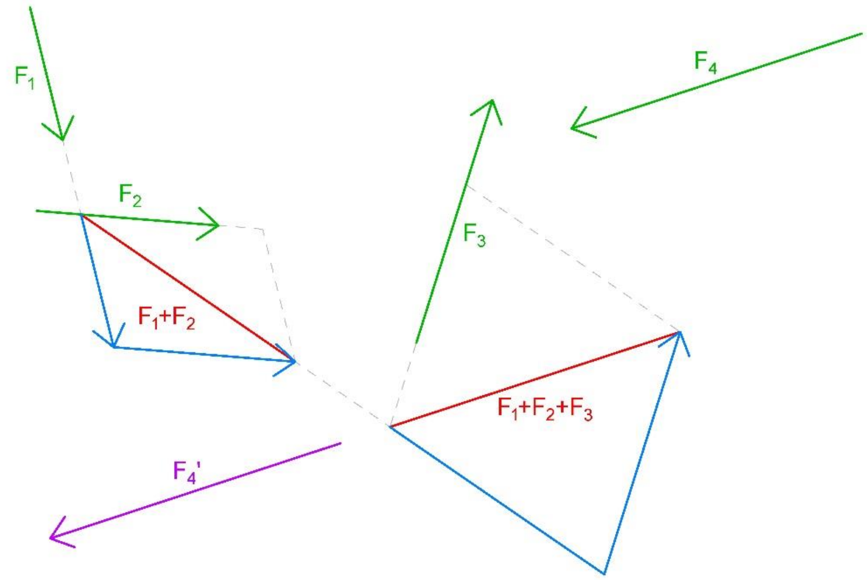


ESTÁTICA GRÁFICA

En muchas ocasiones se puede analizar una estructura (obtener reacciones y solicitaciones) de manera gráfica, considerando las **fuerzas como vectores**.

Gráficamente, las ecuaciones de equilibrio para un conjunto de fuerzas cualesquiera tienen la siguiente interpretación:

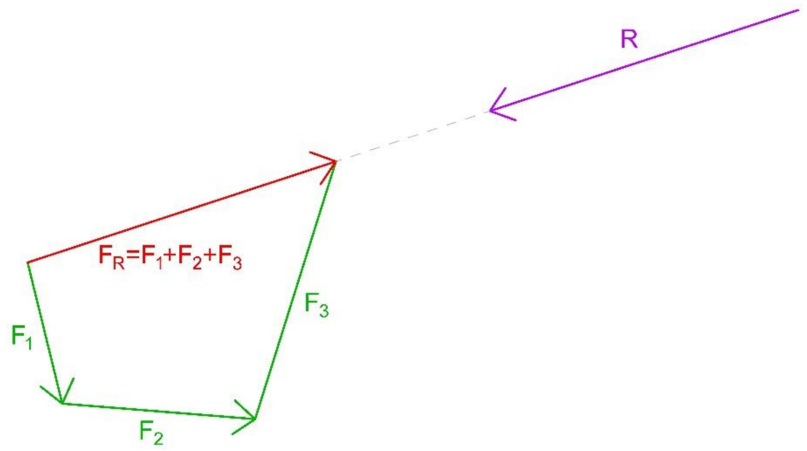
$\sum M = 0 \rightarrow$ Al componerlas de dos en dos, la última composición es de dos fuerzas opuestas **concurrentes**. Si no, existe un par de fuerzas y no hay equilibrio.



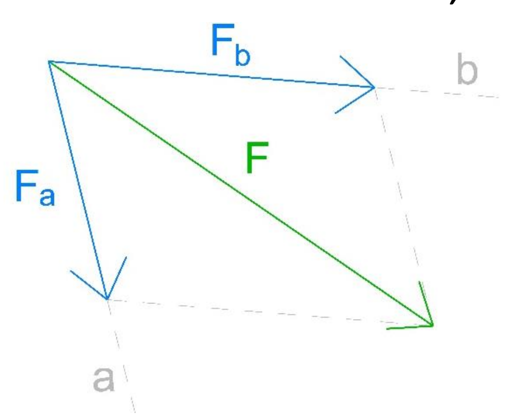
ESTÁTICA GRÁFICA

Suma, descomposición, resultante y reacción

Para sumar varias fuerzas, se colocan una a continuación de otra, y la fuerza resultante es el vector que une el principio con el final. La reacción total a estas fuerzas, es decir, la suma de reacciones, tiene que ser necesariamente la opuesta a la resultante.



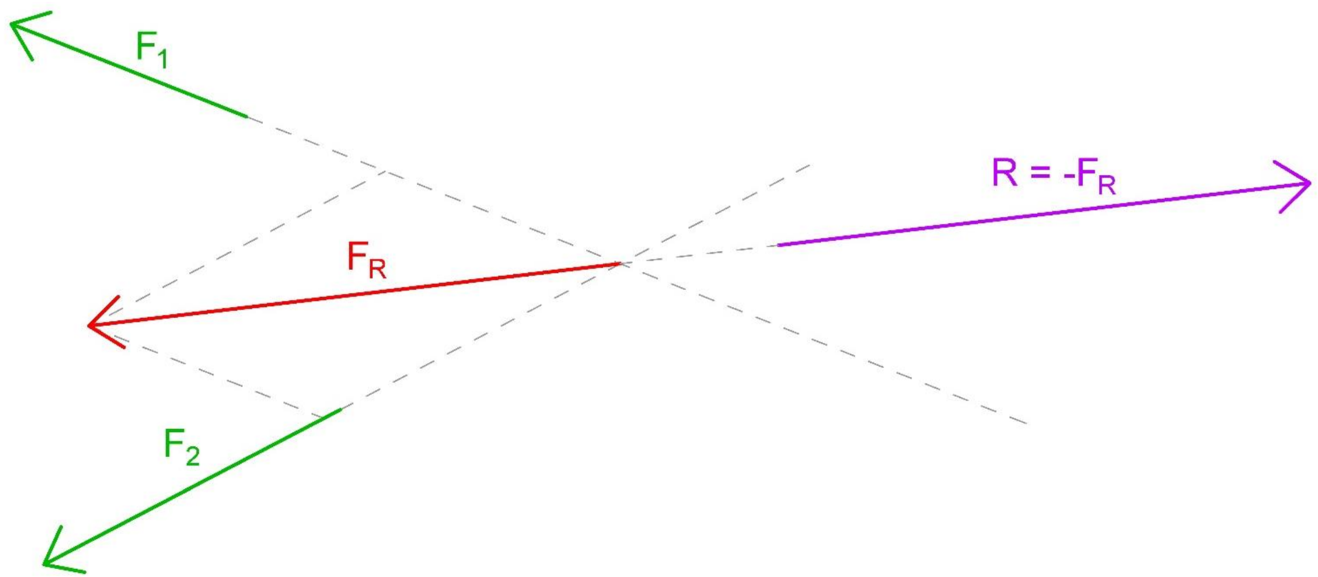
Para descomponer una fuerza en dos direcciones, se usa la Ley del Paralelogramo:



ESTÁTICA GRÁFICA

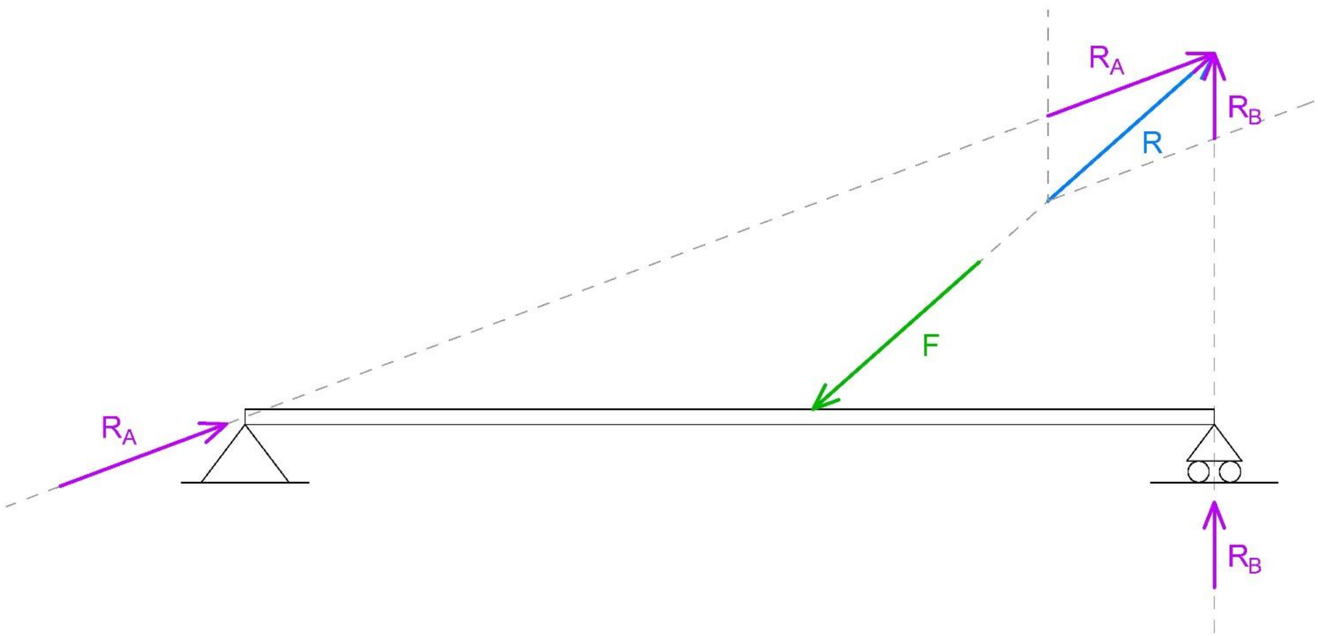
Teorema de las 3 fuerzas (T3F)

En el plano, 3 fuerzas en equilibrio tienen necesariamente que ser concurrentes; es decir, 2 fuerzas están en equilibrio con la opuesta de su resultante, que pasa por el punto de concurrencia.



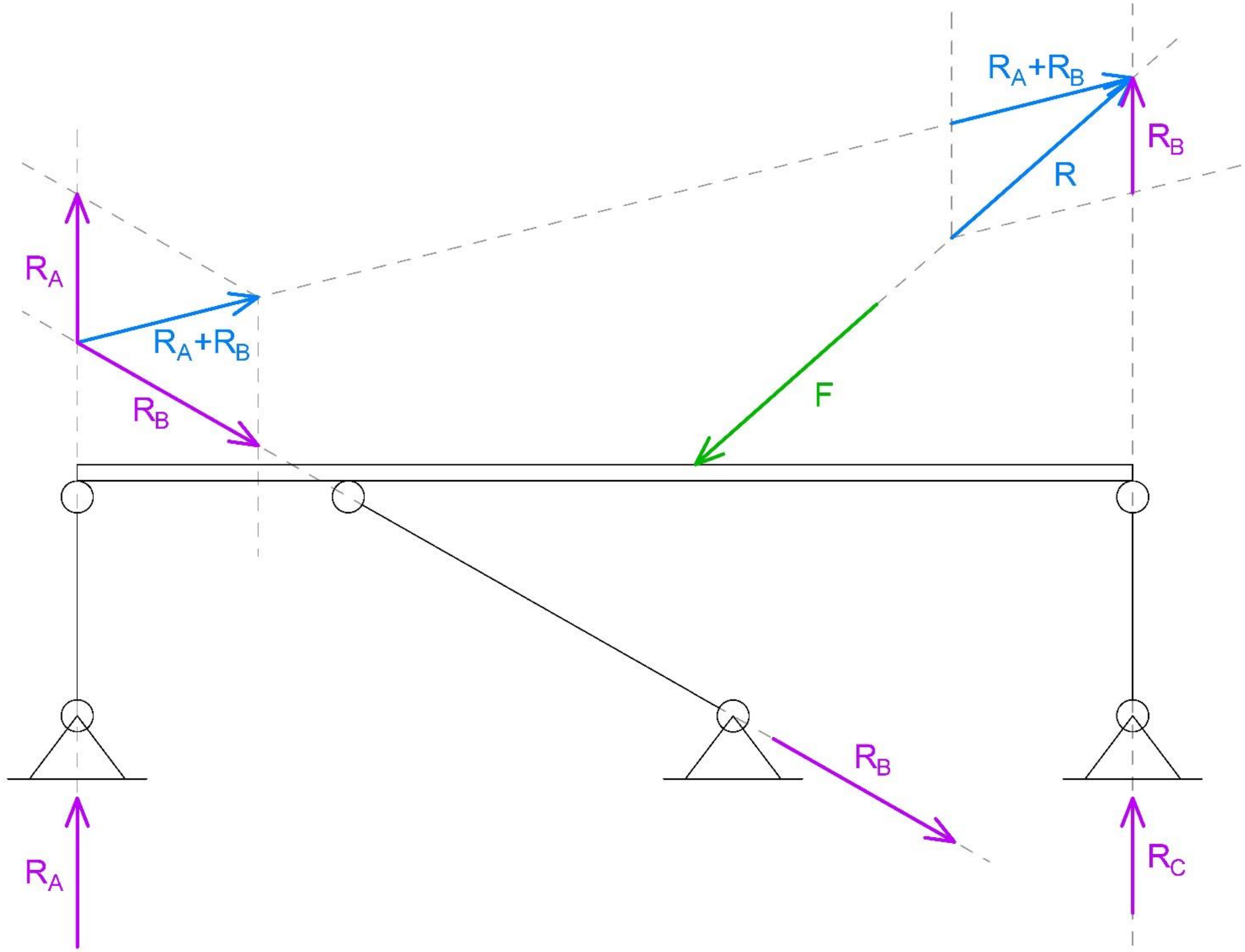
ESTÁTICA GRÁFICA

El T3F se puede usar para hallar las reacciones de una estructura gráficamente. Sabiendo que la resultante de las fuerzas tiene que estar en equilibrio con las dos reacciones, el sistema de tres fuerzas debe ser concurrente en un punto conocido, y de ahí es posible obtener la dirección de las reacciones en apoyos articulados si más que unir ambos puntos



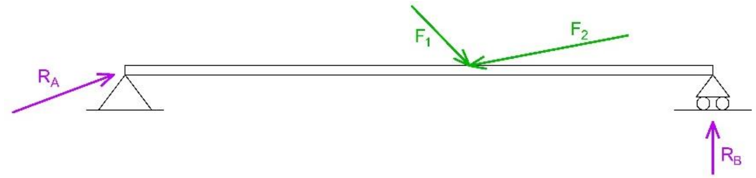
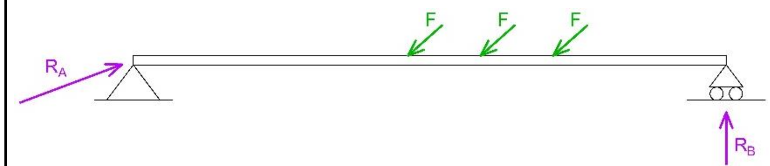
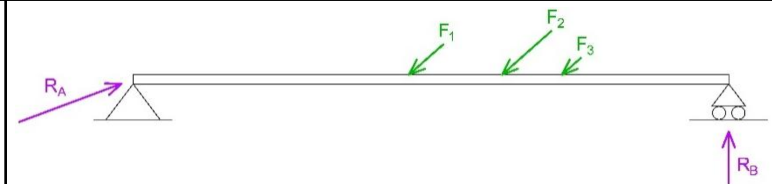
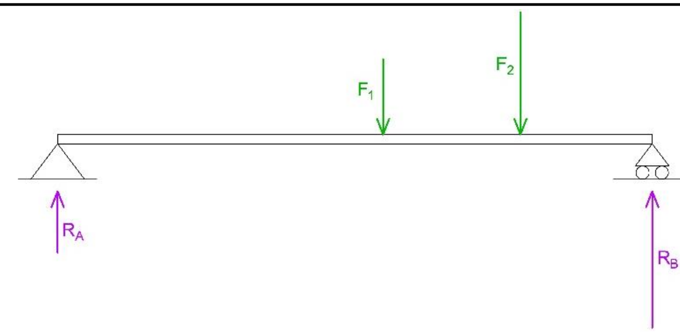
ESTÁTICA GRÁFICA

Para llegar a un sistema de una fuerza resultante con dos reacciones, en ocasiones es necesario componer fuerzas o reacciones previamente



OBTENCIÓN GRÁFICA DE REACCIONES

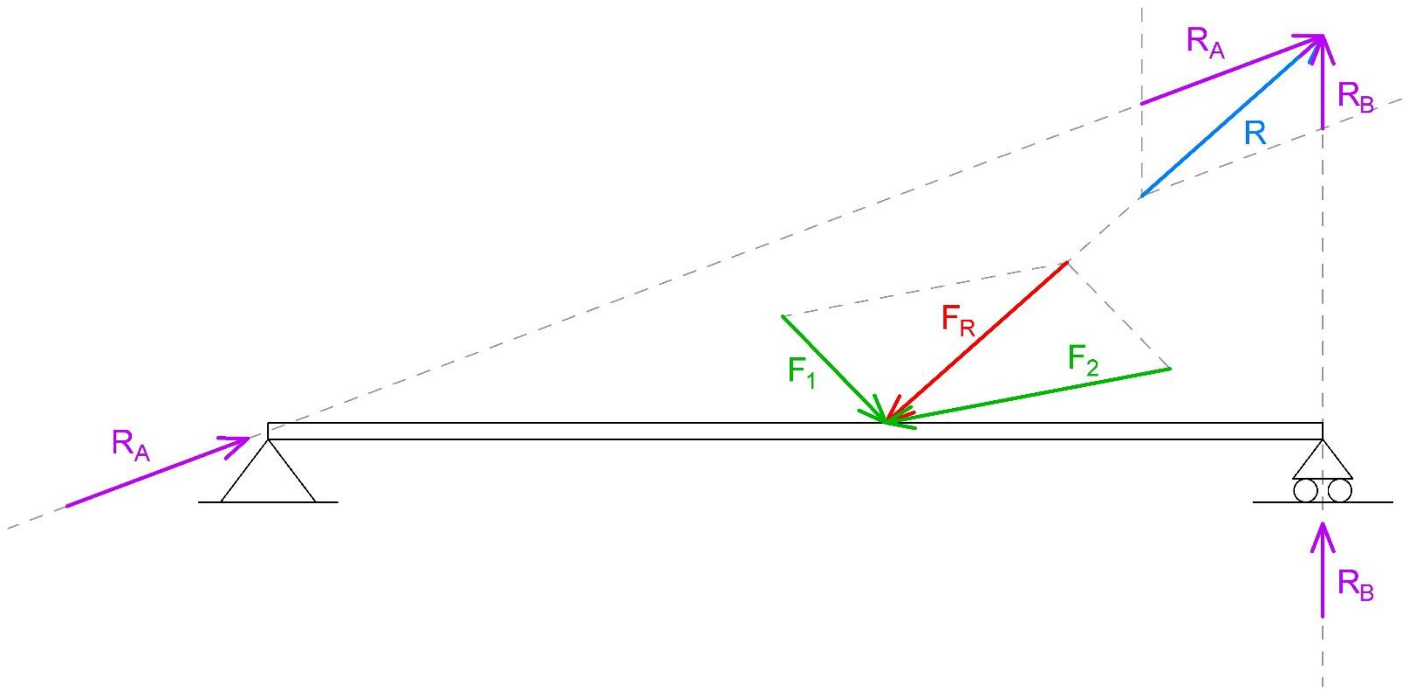
Hay 4 casos, según las herramientas que se necesiten para su resolución: T3F y funicular. Se recomienda evitar el uso de un funicular siempre que sea posible.

Caso	Descripción	Ejemplo
A	Ninguna fuerza o reacción es paralela a otra	
B	Fuerzas iguales y paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
C	Fuerzas desiguales pero paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
D	Todas las fuerzas y reacciones son paralelas	

OBTENCIÓN GRÁFICA DE REACCIONES

Caso A: Ninguna fuerza o reacción es paralela a otra

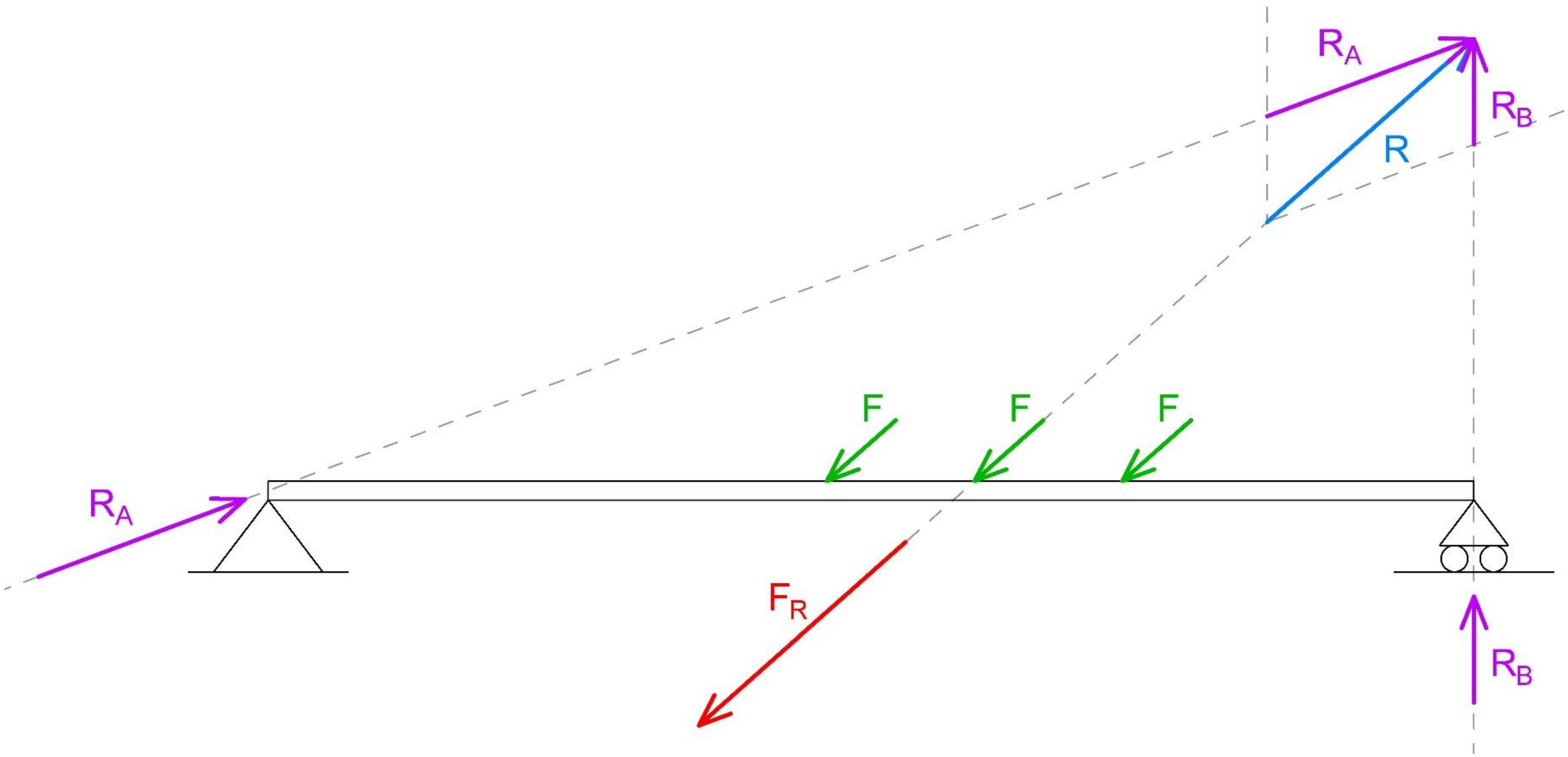
Si hay más de una fuerza, se obtiene la resultante (F_R). A continuación se emplea el T3F asumiendo que, como se conocen las direcciones de F_R y de la reacción en el apoyo deslizante (R_B), en su intersección deberá concurrir también la reacción en la articulación (R_A), de dirección desconocida. Uniendo el punto de concurrencia con la articulación, se obtiene dicha dirección, y finalmente desde la concurrencia se descompone la reacción total (opuesta de F_R) en las dos reacciones.



OBTENCIÓN GRÁFICA DE REACCIONES

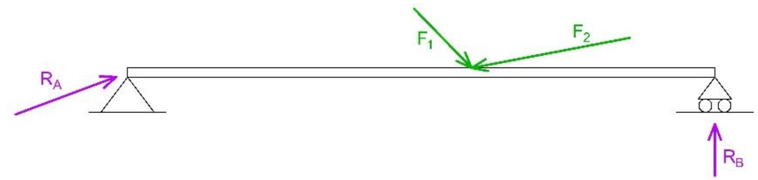
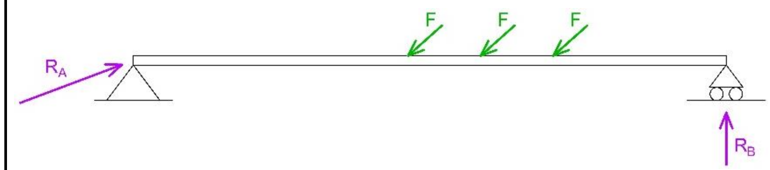
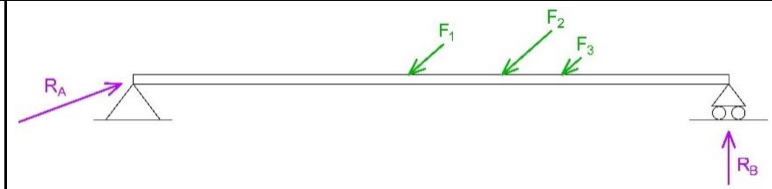
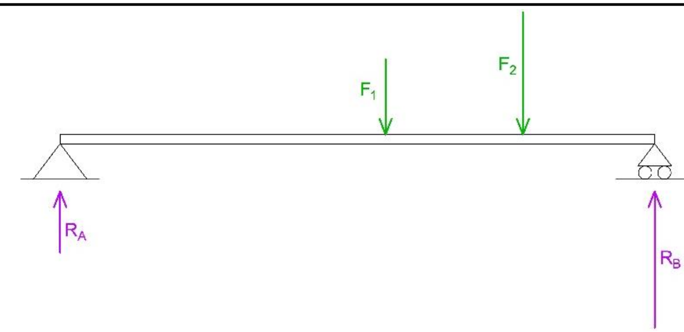
Caso B: Fuerzas iguales y paralelas, reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas

Igual que el caso anterior, pero la fuerza resultante se obtiene asumiendo que se encuentra en el eje de gravedad del conjunto de fuerzas y su módulo es la suma de ellas.



OBTENCIÓN GRÁFICA DE REACCIONES

Los casos C y D no pueden resolverse solo con el T3F; es necesario el trazado de un funicular de las fuerzas

Caso	Descripción	Ejemplo
A	Ninguna fuerza o reacción es paralela a otra	
B	Fuerzas iguales y paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
C	Fuerzas desiguales pero paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
D	Todas las fuerzas y reacciones son paralelas	

CONDICIÓN DE FUNICULAR

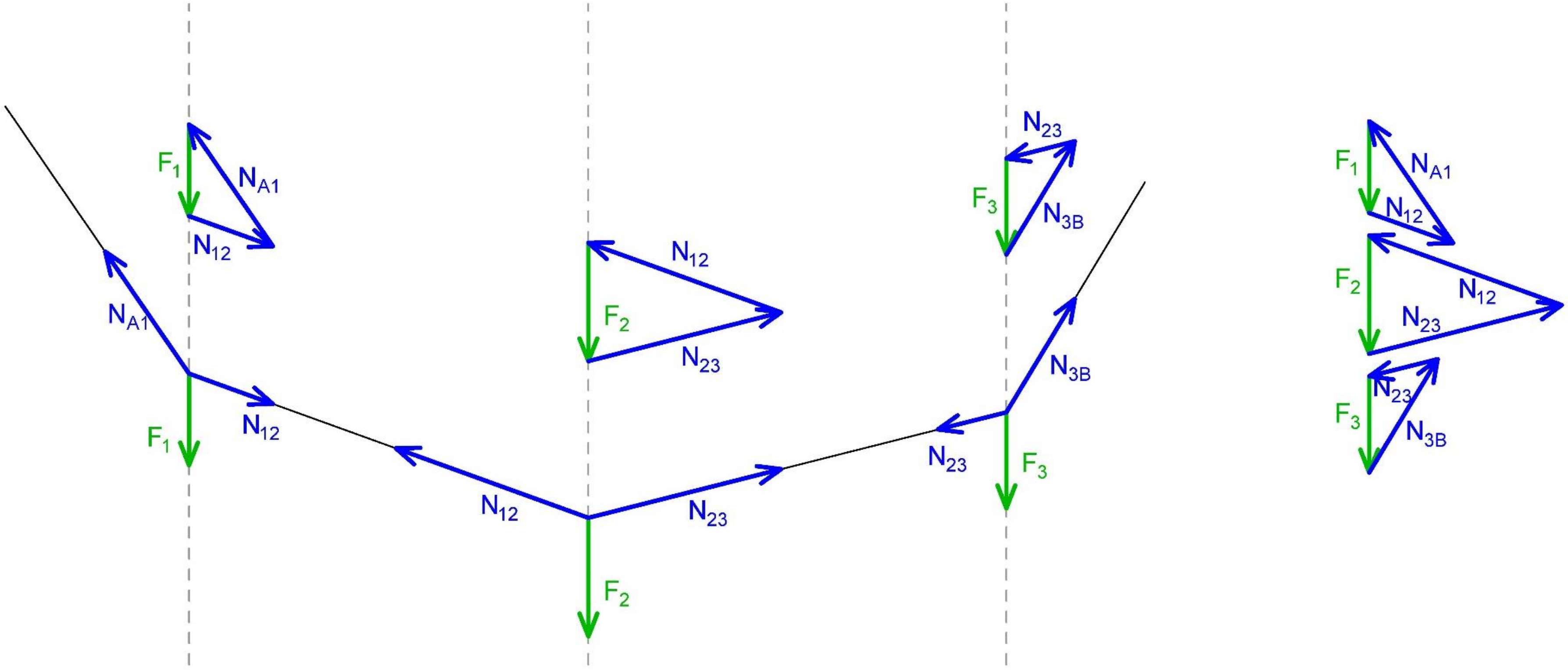
Ante un conjunto de fuerzas dadas (cargas gravitatorias, viento, empujes de otros elementos…), se puede colocar un cable que adopta una forma única (funicular) siempre que estén definidos tres de estos posibles condicionantes de proyecto (geométricos o mecánicos):

- Posición del apoyo inicial
- Posición del apoyo final
- Longitud del cable
- Descuelgue máximo
- Tensión máxima en el cable
- Empuje máximo en los elementos que lo sostienen

CONDICIÓN DE FUNICULAR

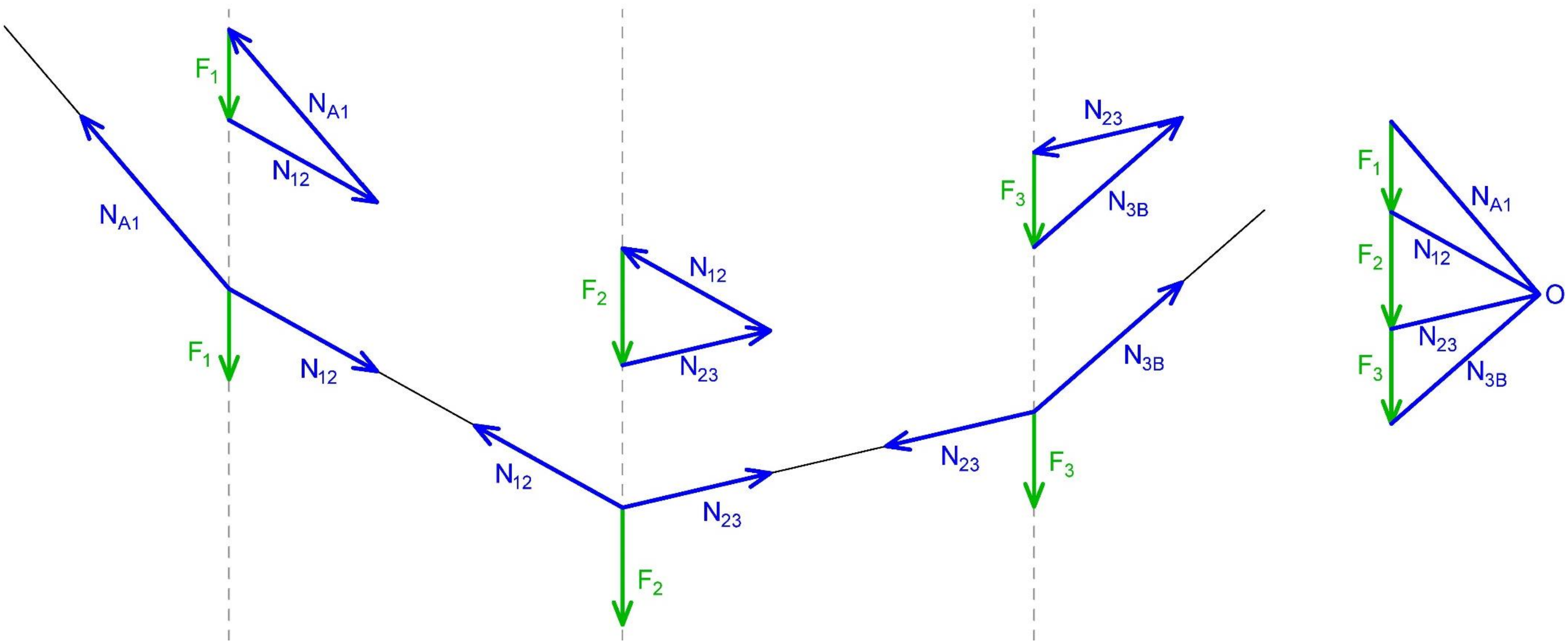
Dadas tres condiciones, la forma del cable es única. ¿Cómo hallarla?
Si se supone una forma cualquiera, el equilibrio en cada vértice se satisface siempre que los dos axiles y la fuerza formen un triángulo cerrado.

Sin embargo, no cualquier forma satisface el requisito de compatibilidad, es decir, que el axil de cada tramo tiene que coincidir en sus dos extremos.



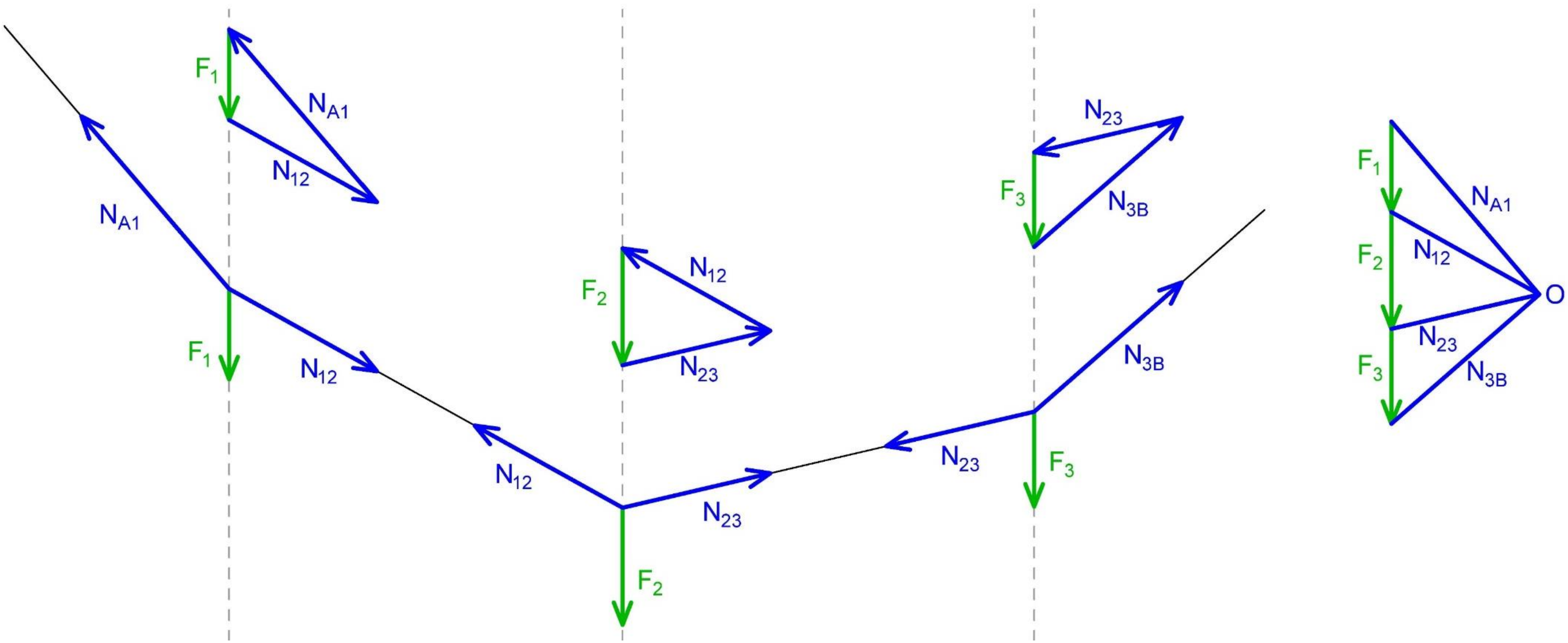
CONDICIÓN DE FUNICULAR

Solo una forma de funicular satisface el equilibrio y la compatibilidad, pudiendo obtenerse los axiles reales. Es posible “apilar” los triángulos correspondientes al equilibrio de cada nudo (una fuerza y dos axiles), formando un grafo (**polígono auxiliar**) donde las fuerzas externas están a la izquierda una detrás de otra, y los axiles son las líneas que parten de los extremos de cada fuerza y convergen en el polo O.



TRAZADO DE UN FUNICULAR CUALQUIERA

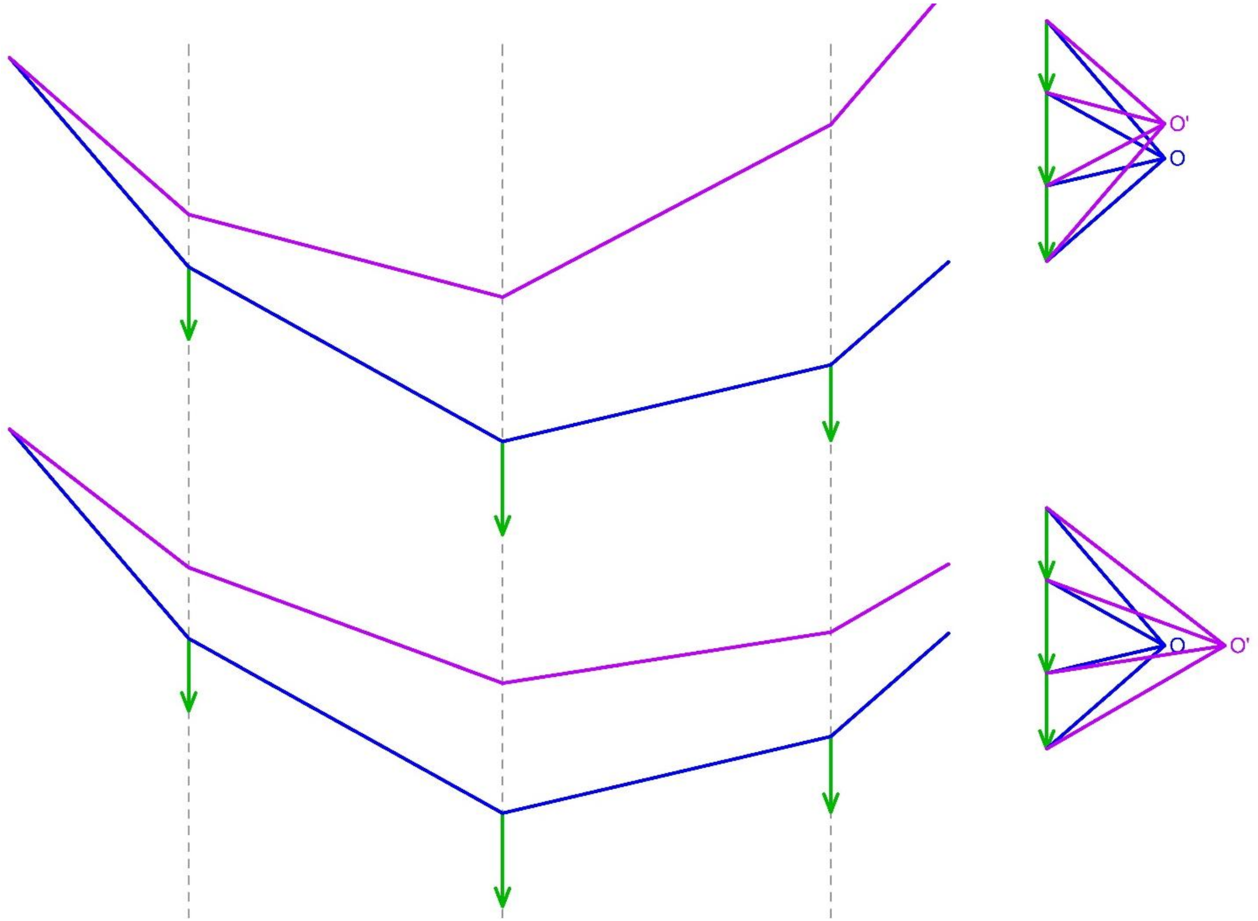
Se utiliza el procedimiento inverso para trazar el funicular: en el polígono auxiliar se establece un polo O cualquiera, se trazan las direcciones de los axiles y, sabiendo que los tramos de cable son paralelos a dichos axiles del polígono, se traza el funicular. Hay infinitos funiculares posibles, uno por cada polo que se elija.



POLÍGONO AUXILIAR

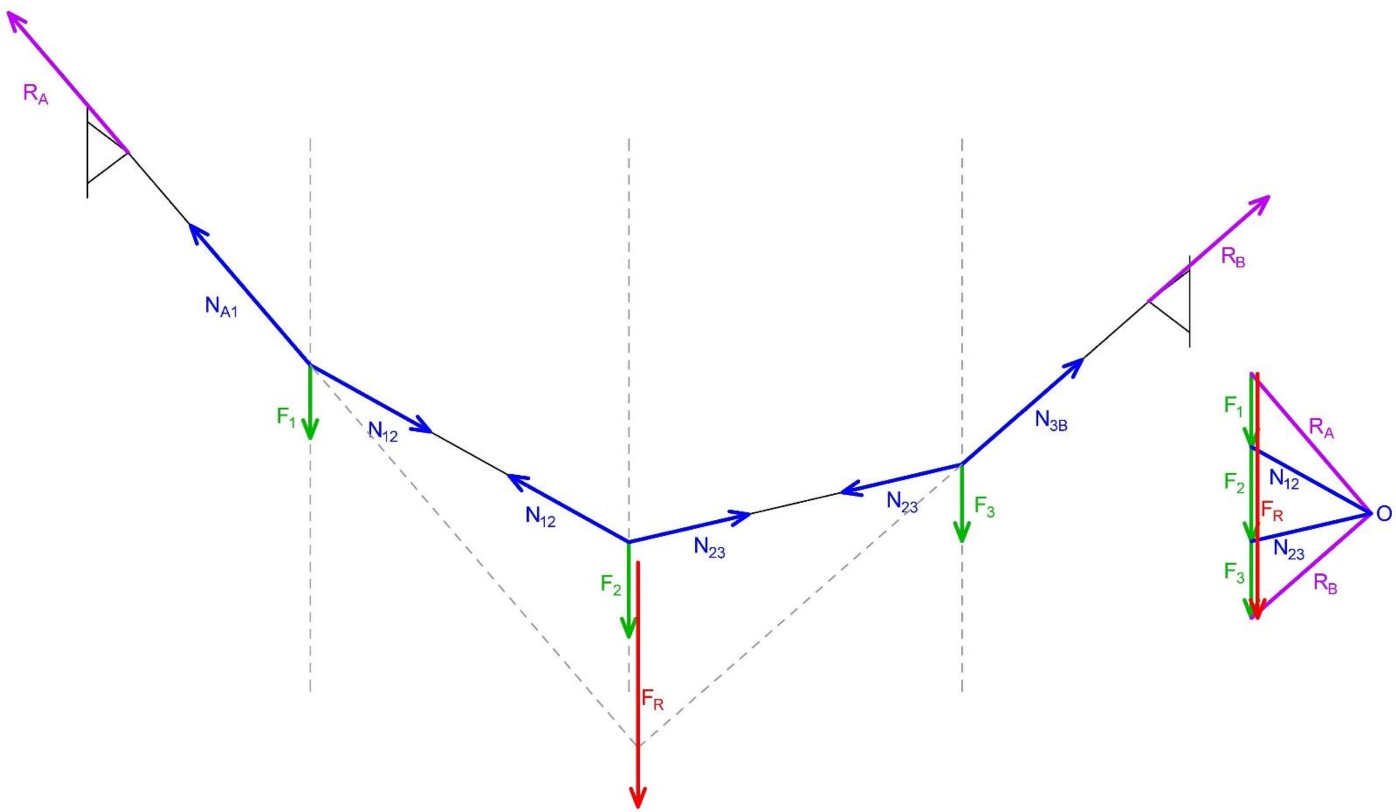
Existe una interdependencia entre el trazado funicular y el polígono auxiliar:

- Polo sube → Apoyo derecho sube
- Polo se aleja → Menos descuelgue, menos longitud, más empujes…



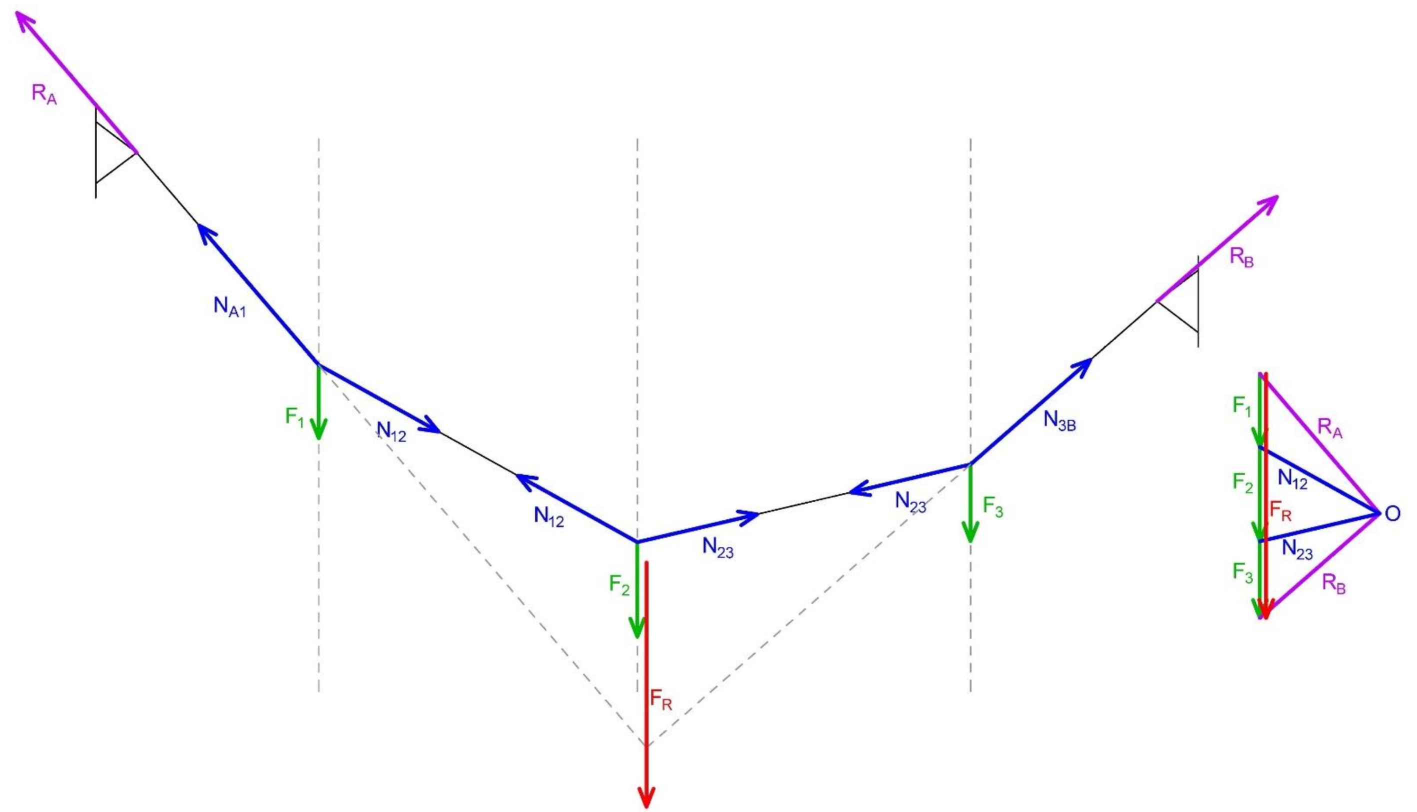
TRAZADO DE UN FUNICULAR CUALQUIERA

Los axiles de los tramos extremos del cable son iguales a las reacciones externas en los puntos de sujeción. Por tanto, asumiendo que las dos reacciones están en equilibrio con la resultante de las cargas, se puede hallar la posición de la resultante F_R sabiendo que, por el T3F, debe ser concurrente con las dos reacciones. En el polígono auxiliar, equivale al triángulo formado por los axiles extremos y la resultante.



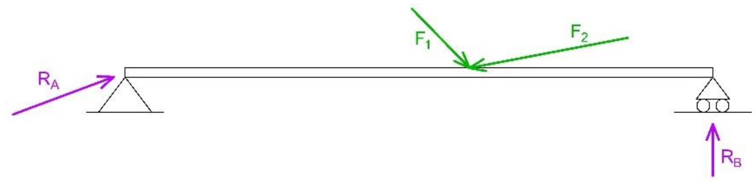
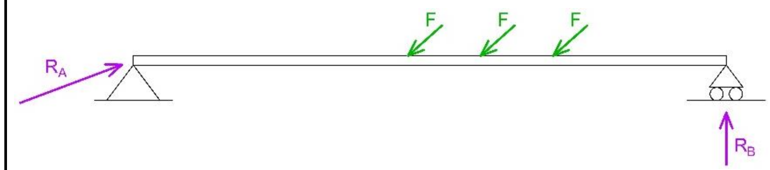
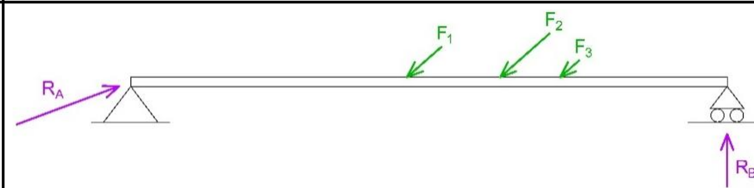
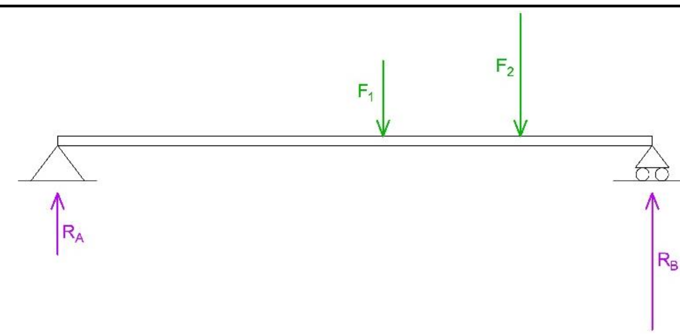
TRAZADO DE UN FUNICULAR CUALQUIERA

Esta propiedad sirve para conocer la <u>posición de la resultante de un conjunto de fuerzas cualesquiera sobre una estructura cualquiera</u>, no necesariamente cable.



OBTENCIÓN GRÁFICA DE REACCIONES

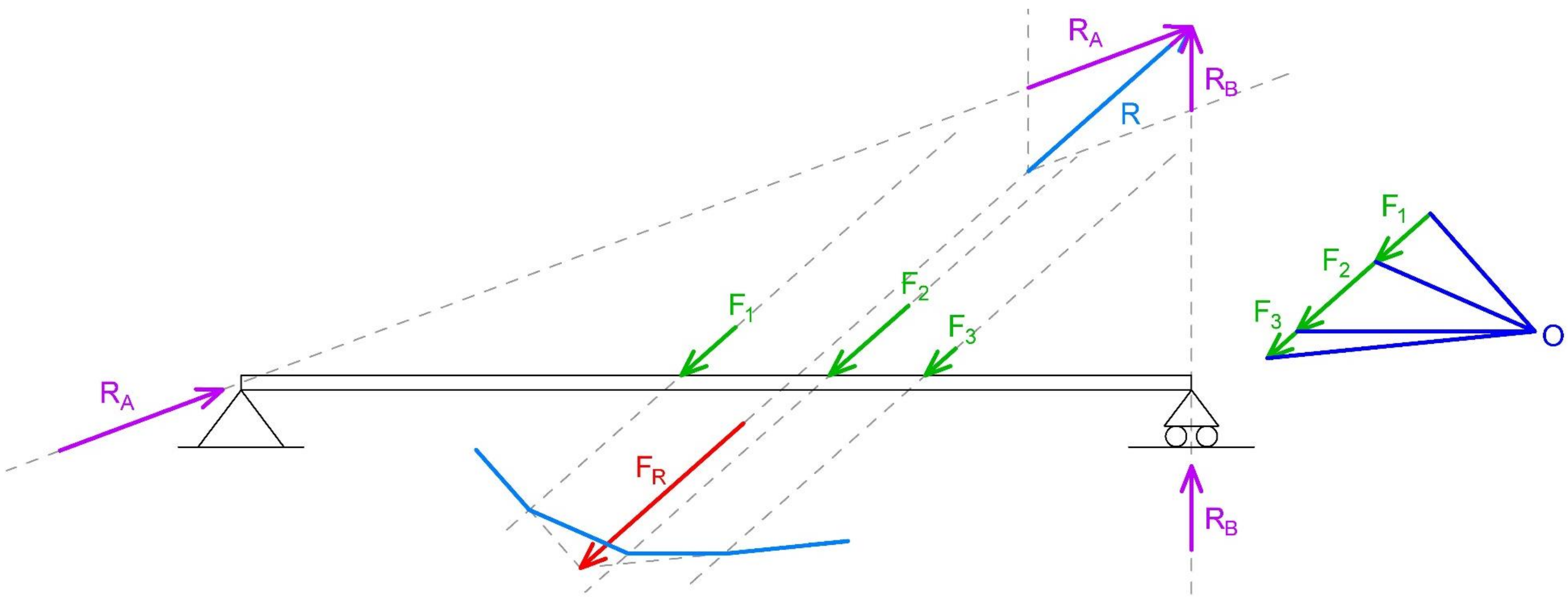
Aprovechando esta propiedad, se pueden obtener gráficamente las reacciones del caso C:

Caso	Descripción	Ejemplo
A	Ninguna fuerza o reacción es paralela a otra	
B	Fuerzas iguales y paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
C	Fuerzas desiguales pero paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
D	Todas las fuerzas y reacciones son paralelas	

OBTENCIÓN GRÁFICA DE REACCIONES

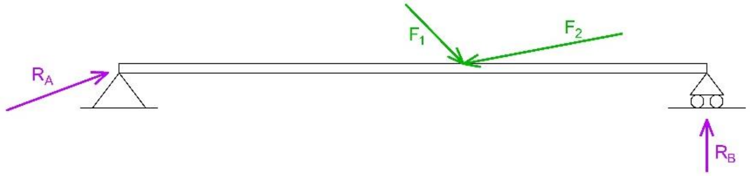
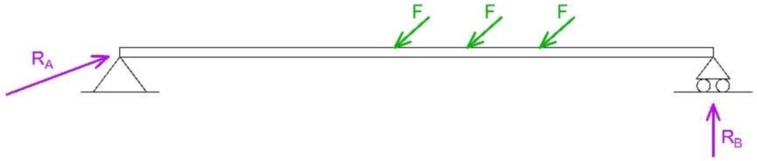
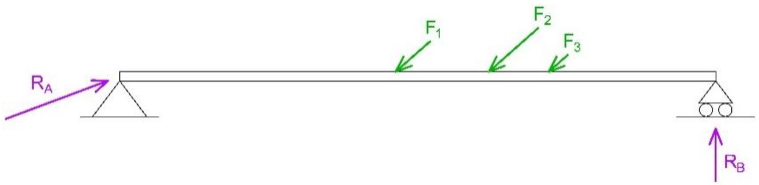
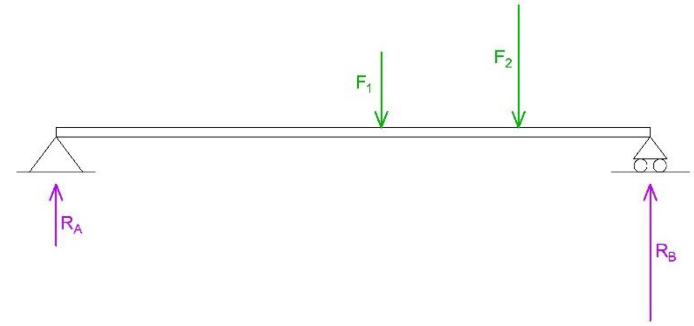
<u>Caso C: Fuerzas desiguales pero paralelas, reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas</u>

Igual que los casos anteriores, una vez se haya obtenido la resultante, el problema termina con la aplicación del T3F. En este caso particular, la posición de la resultante se obtiene utilizando un funicular auxiliar que nada tiene que ver con la estructura real, simplemente es un artificio para hallar dicha posición.



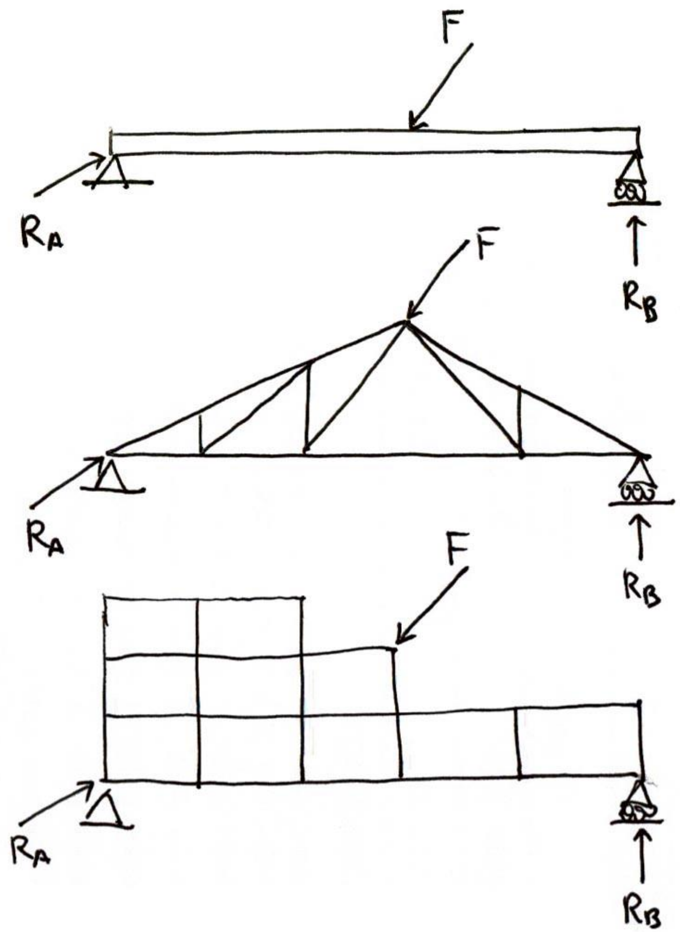
OBTENCIÓN GRÁFICA DE REACCIONES

Finalmente, para resolver el caso D se requiere de otra propiedad del funicular, particularmente de un cable que formara parte de una viga atirantada.

Caso	Descripción	Ejemplo
A	Ninguna fuerza o reacción es paralela a otra	
B	Fuerzas iguales y paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
C	Fuerzas desiguales pero paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
D	Todas las fuerzas y reacciones son paralelas	

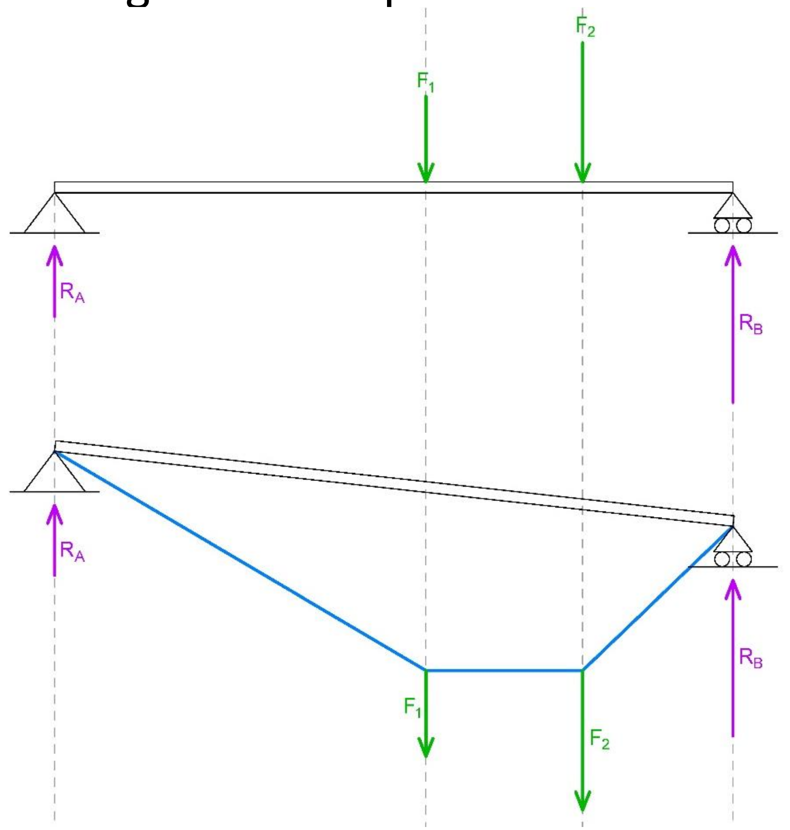
PROPIEDADES DEL FUNICULAR DE UNA VIGA ATIRANTADA

De cara al cálculo de las reacciones de una estructura, podemos considerarla como un sólido rígido apoyado. Por tanto, dos estructuras distintas internamente pero que tengan las mismas cargas y los mismos apoyos, tendrán las mismas reacciones.



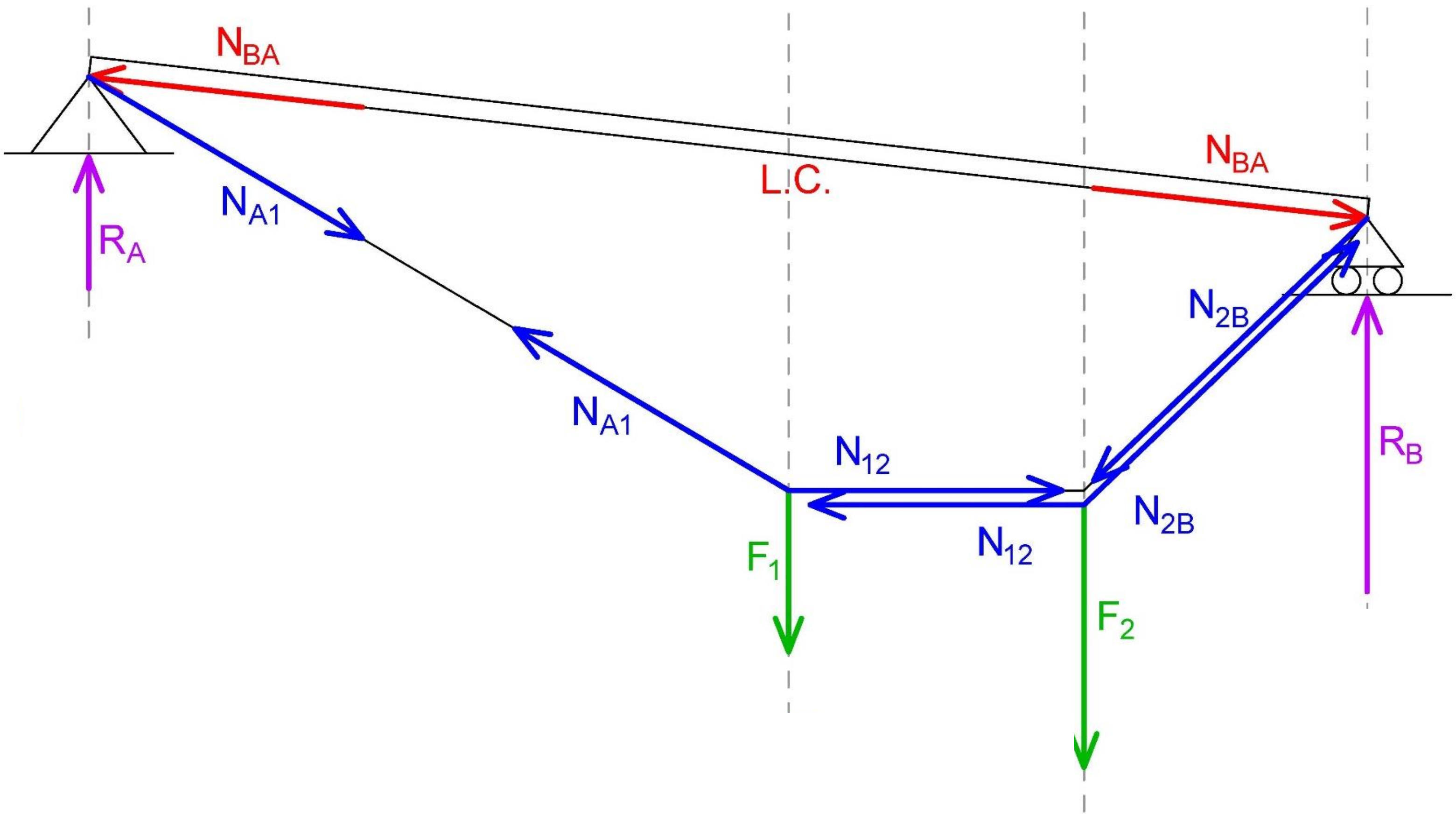
PROPIEDADES DEL FUNICULAR DE UNA VIGA ATIRANTADA

Se puede usar esta propiedad para calcular las reacciones de una viga simple, pues serán idénticas a la que tendría una viga atirantada, donde sí sabemos obtener las reacciones por métodos gráficos. La viga atirantada tiene las mismas cargas y apoyos, actuando las fuerzas sobre el cable inferior traccionado, que no provoca empujes en los apoyos porque los resiste el codal superior, comprimido. Se está sustituyendo una viga a flexión por un entramado a axil.



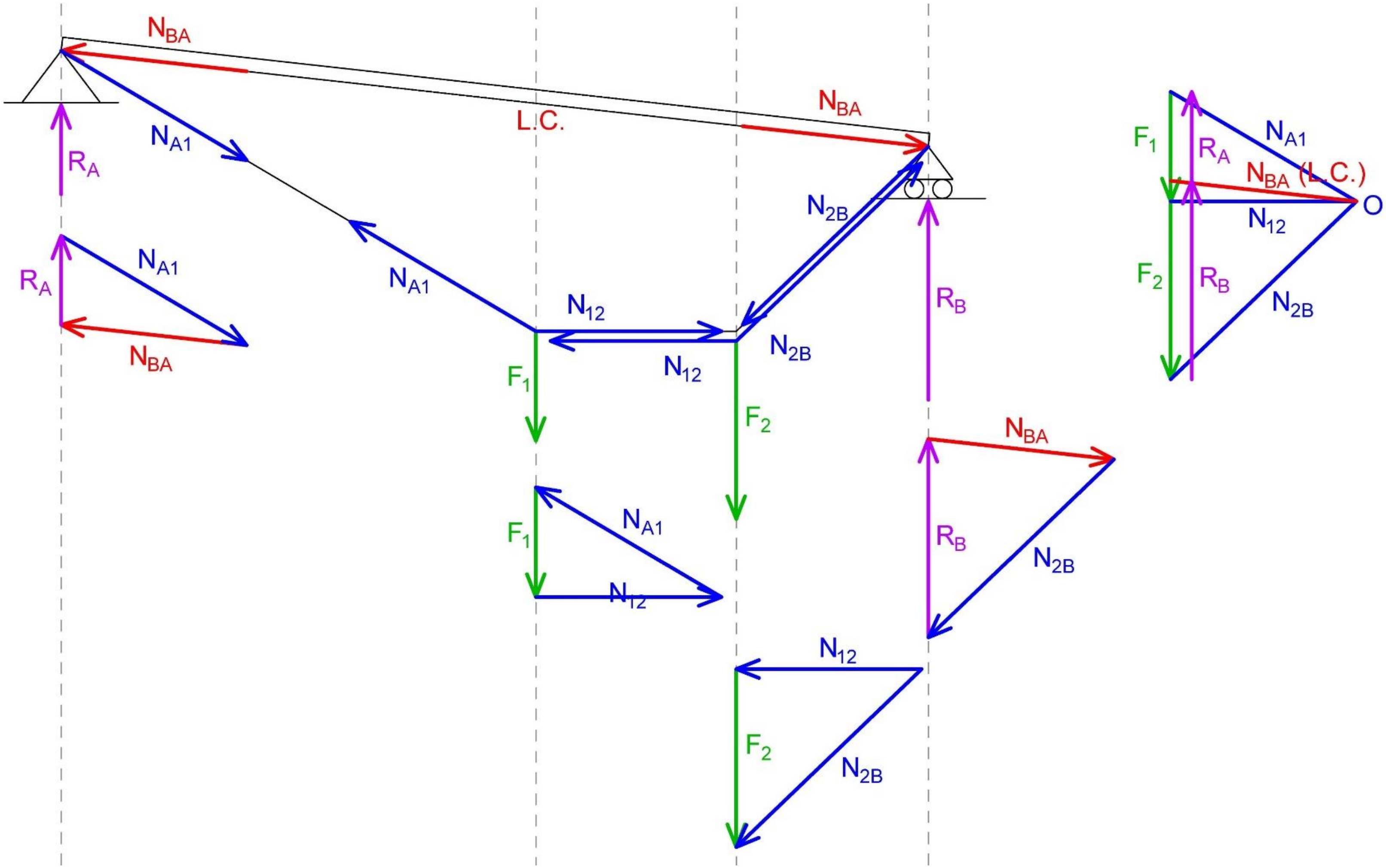
PROPIEDADES DEL FUNICULAR DE UNA VIGA ATIRANTADA

El cable es un funicular de las cargas. Pero si consideramos las reacciones como otras fuerzas, el conjunto cable+codal es un funicular del conjunto fuerzas+reacciones:



PROPIEDADES DEL FUNICULAR DE UNA VIGA ATIRANTADA

Los triángulos de equilibrio de axiles de cada nudo se pueden apilar formando el correspondiente polígono auxiliar, donde también aparecen las reacciones. Al axil del codal también se le llama **línea de cierre** (L.C.)



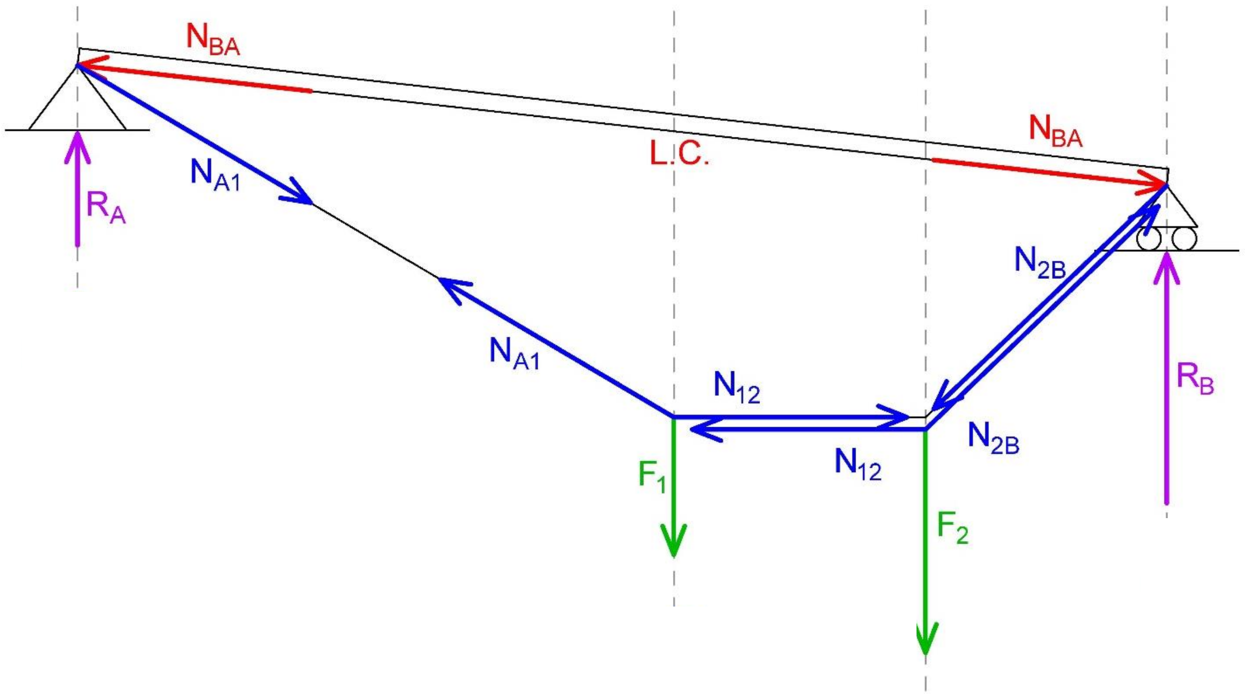
PROPIEDADES DEL FUNICULAR DE UNA VIGA ATIRANTADA

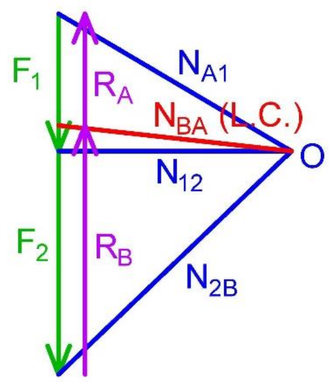
Su polígono auxiliar asociado cumple que:

- Fuerzas y reacciones forman polígono cerrado (aquí colapsado en una línea)
- Fuerzas y reacciones se recorren en la viga atirantada en el mismo orden que en el polígono
- El axil del codal es paralelo al codal, análogamente a los tramos de cable
- Esta **línea de cierre separa a ambas reacciones en el polígono**

PROPIEDADES DEL FUNICULAR DE UNA VIGA ATIRANTADA

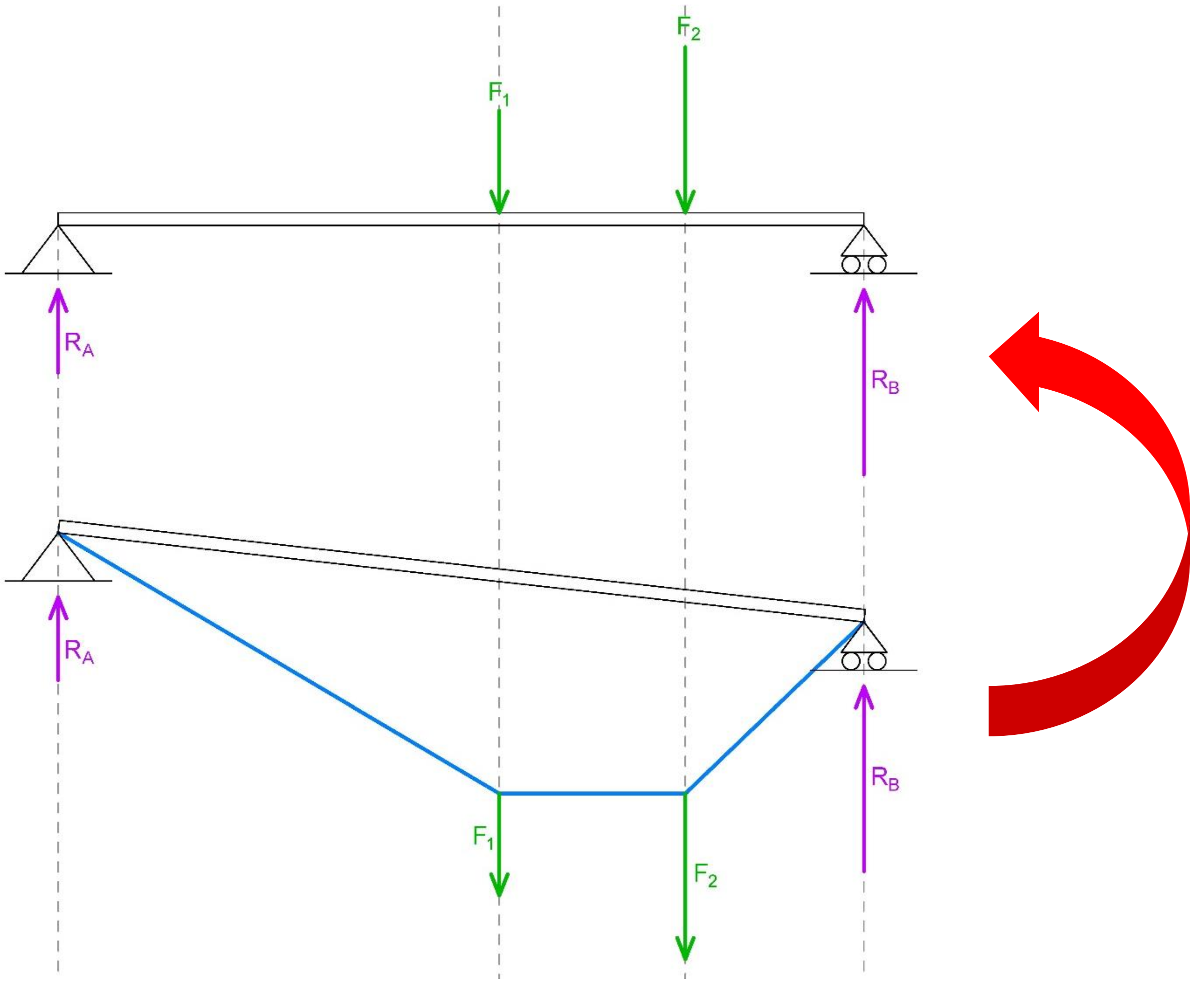
El cable es un funicular de las cargas. Pero si consideramos las reacciones como otras fuerzas, el conjunto cable+codal es un funicular del conjunto fuerzas+reacciones:





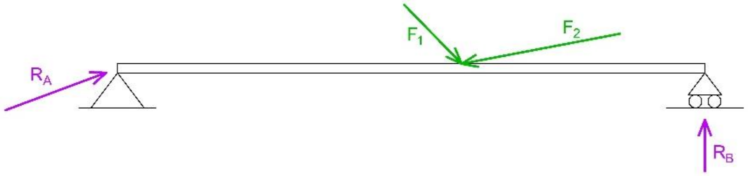
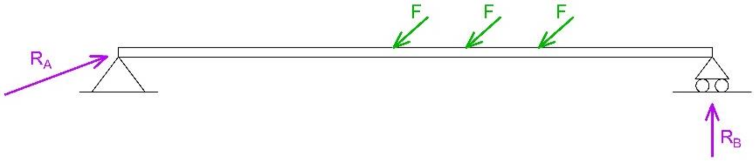
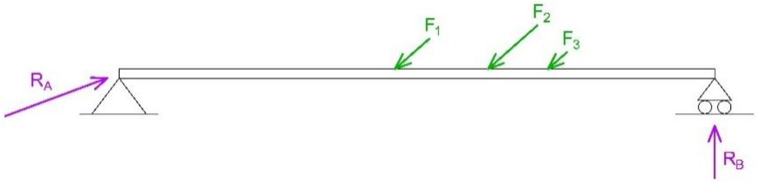
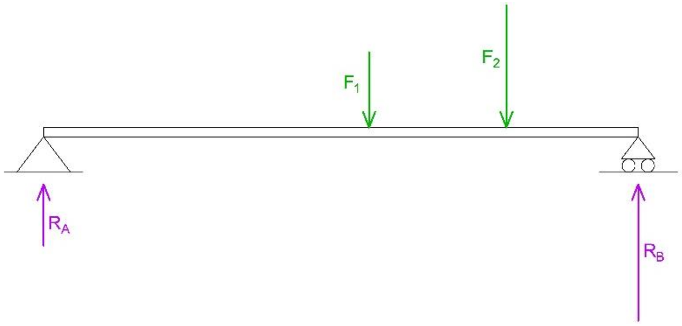
PROPIEDADES DEL FUNICULAR DE UNA VIGA ATIRANTADA

Tenemos así las reacciones de la viga atirantada ficticia, que coinciden con las reacciones de la viga que nos interesa



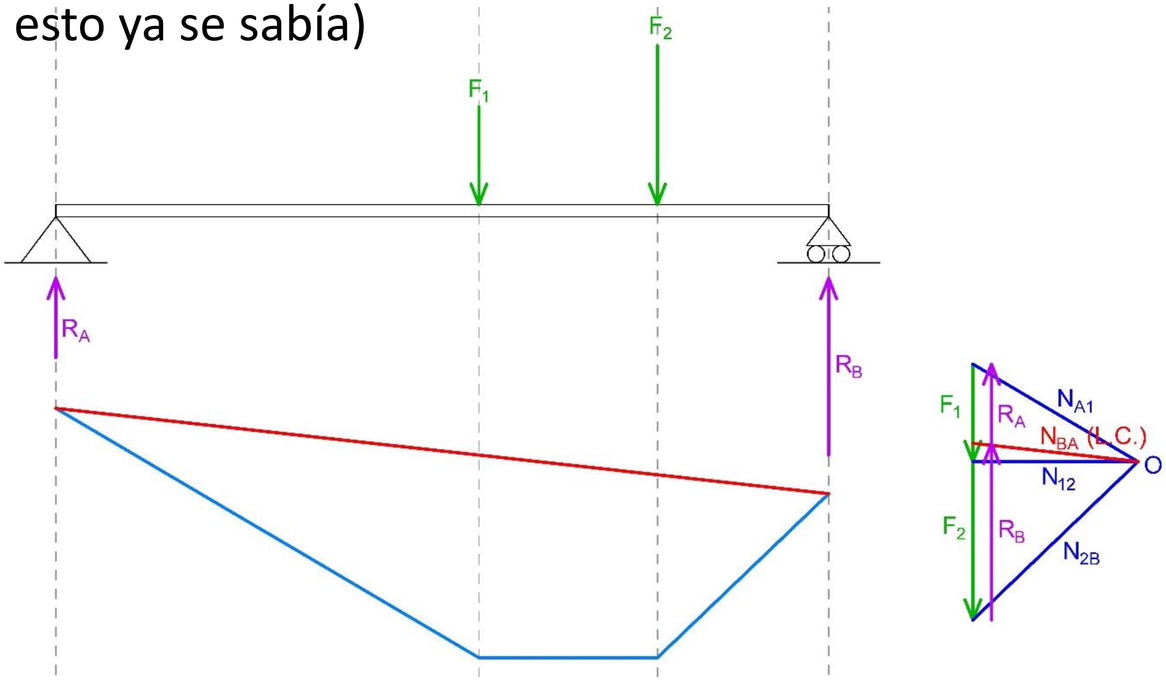
OBTENCIÓN GRÁFICA DE REACCIONES

Finalmente, para resolver el caso D se requiere de otra propiedad del funicular, particularmente de un cable que formara parte de una viga atirantada.

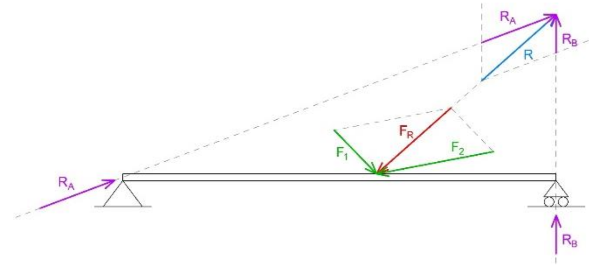
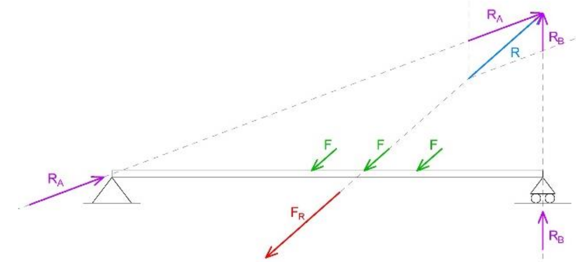
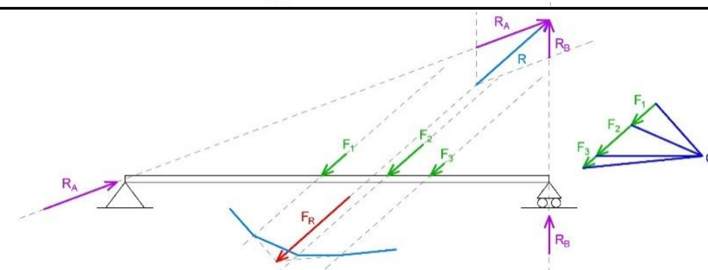
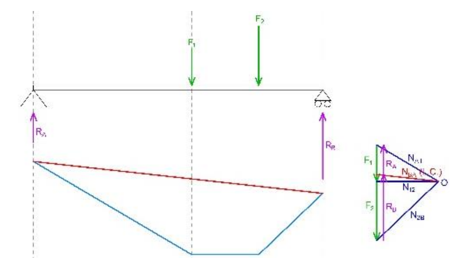
Caso	Descripción	Ejemplo
A	Ninguna fuerza o reacción es paralela a otra	
B	Fuerzas iguales y paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
C	Fuerzas desiguales pero paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
D	Todas las fuerzas y reacciones son paralelas	

OBTENCIÓN GRÁFICA DE REACCIONES

1) Construir funicular de las cargas empezándolo por el apoyo articulado de la viga (o desplazado en la dirección de las cargas y reacciones si todas son paralelas), suponiendo cualquier polo O en el polígono auxiliar.
2) Colocar el codal o línea de cierre en la viga atirantada, y trazar su axil correspondiente en el polígono auxiliar (pasar paralela al codal por O).
3) El punto donde el axil del codal en el polígono corta a la dirección de la reacción correspondiente, es el punto de separación entre ambas reacciones, que quedan definidas en magnitud y dirección (si todas son paralelas esto ya se sabía)



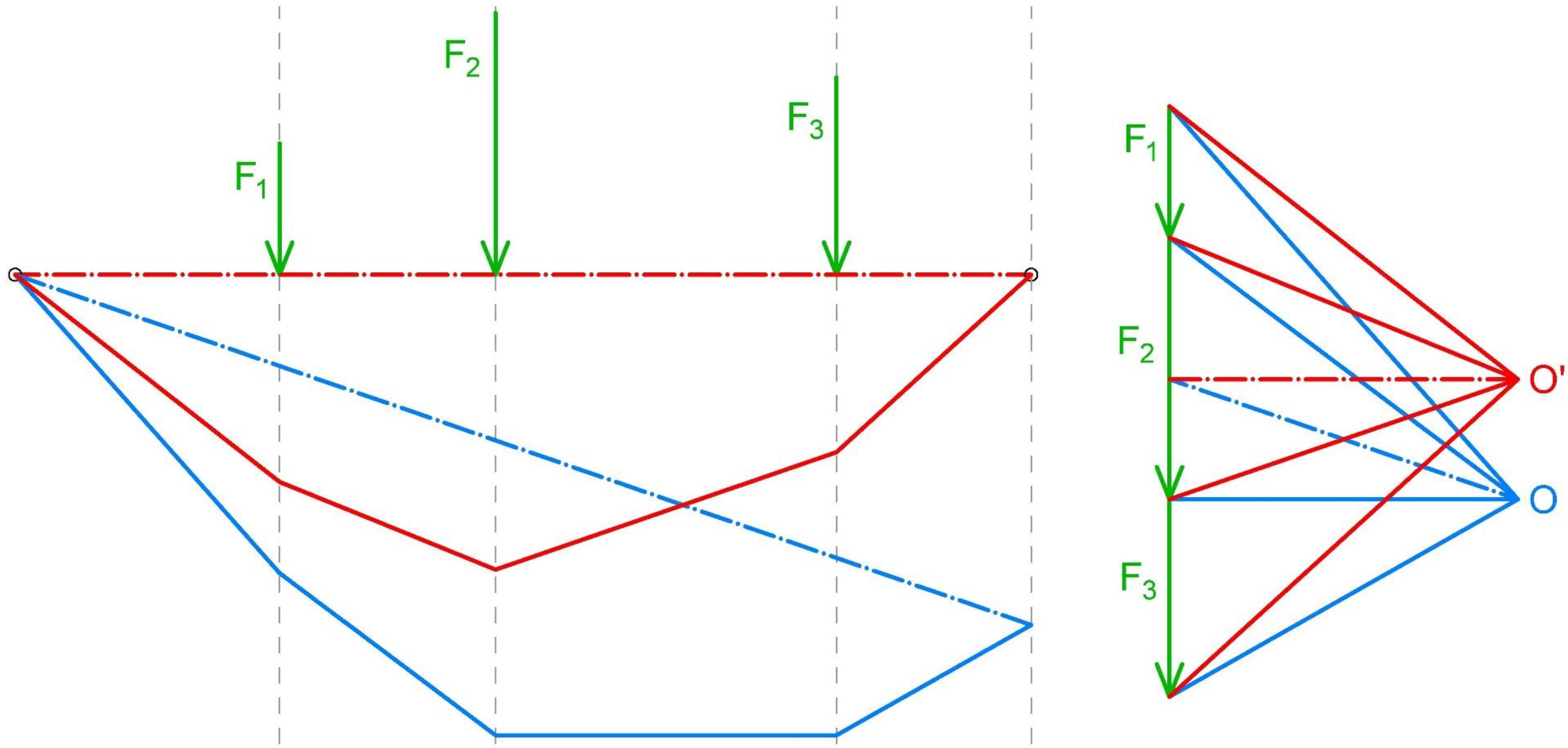
RESUMEN DE OBTENCIÓN GRÁFICA DE REACCIONES

Caso	Descripción	Ejemplo
A	Ninguna fuerza o reacción es paralela a otra	
B	Fuerzas iguales y paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
C	Fuerzas desiguales pero paralelas Reacciones no paralelas ni entre sí ni con las fuerzas	
D	Todas las fuerzas y reacciones son paralelas	

PROYECTO PRÁCTICO DE FUNICULARES ANTE CARGAS GRAVITATORIAS

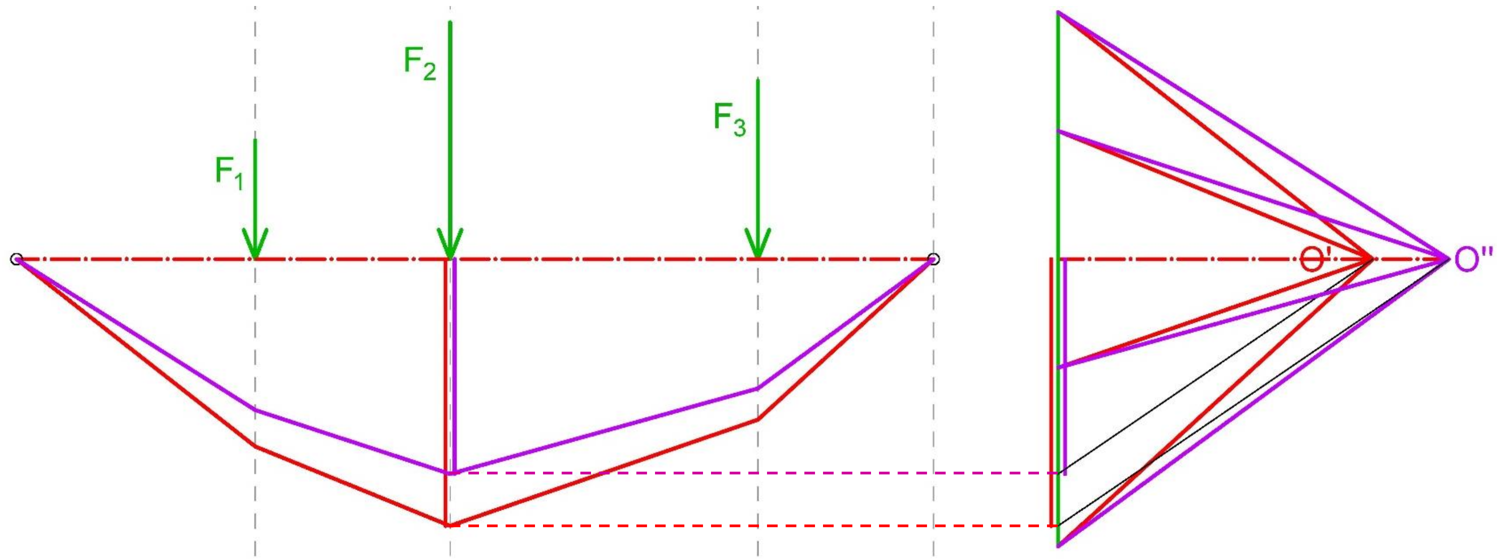
Funicular (infinitos) con dos extremos fijos:

Se construye una viga atirantada ficticia eligiendo un polo cualquiera O en el polígono auxiliar, y posteriormente se impone en el polígono un desplazamiento de polo O a O' a fin de que el axil del codal tenga la misma dirección que el propio codal ficticio (la línea que une los apoyos reales). Desde este nuevo polo se trazan los nuevos axiles y los tramos de cable (paralelos a axiles)



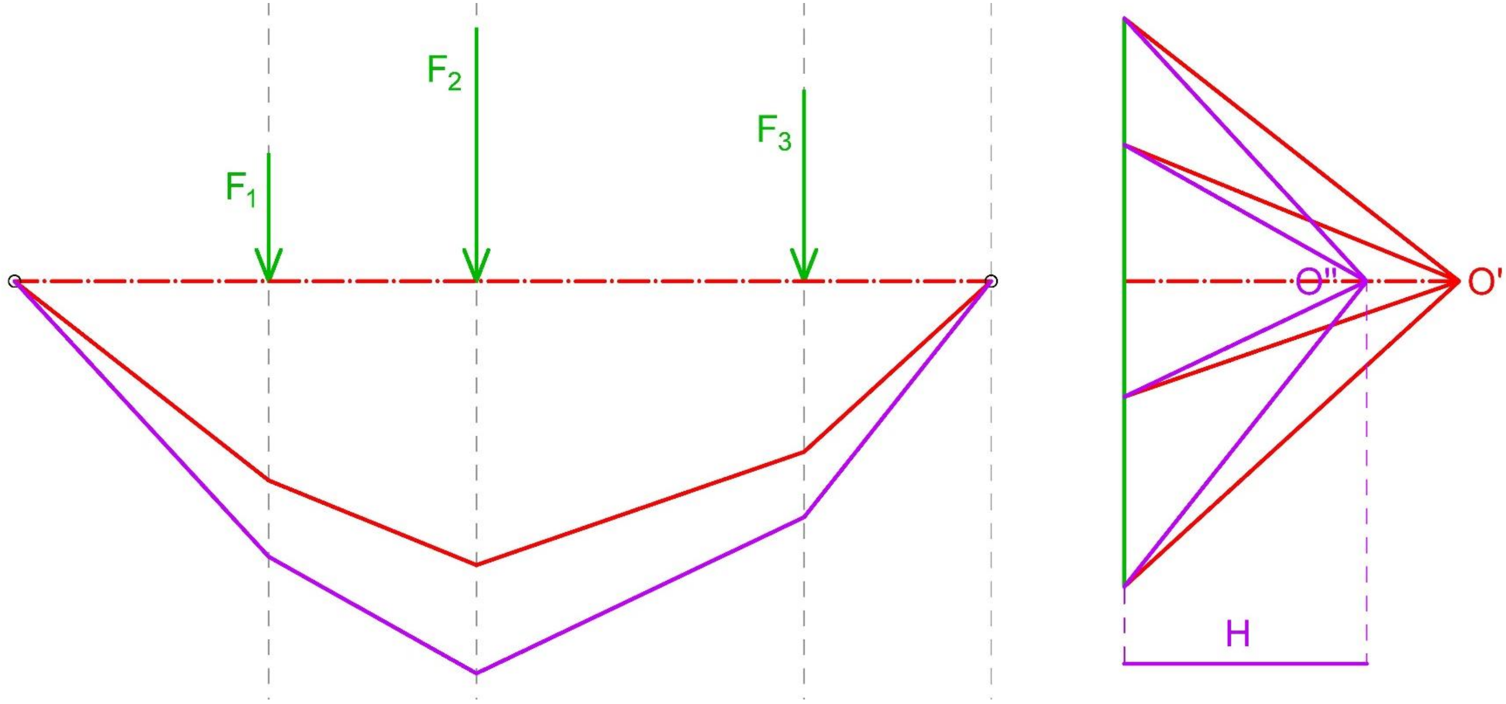
PROYECTO PRÁCTICO DE FUNICULARES ANTE CARGAS GRAVITATORIAS

<u>Funicular (único) con dos extremos fijos y un descuelgue definido:</u>
A partir del anterior, para reducir el descuelgue hay que alejar el polo O’ hasta O’’ en la dirección del codal ficticio, y viceversa. Al ser inversamente proporcional el movimiento del polo con el cambio de descuelgue, se usa un Teorema de Tales inverso. Se colocan en el polígono auxiliar, desde la intersección del axil del codal con las fuerzas, las dos magnitudes de descuelgue: el actual y el nuevo. Se une el final del descuelgue deseado con el polo actual, y se traza una paralela por el final del nuevo. Su corte con la dirección del codal ficticio da la nueva posición del polo O’’, y desde este nuevo polo se trazan los nuevos axiles y se conocen los tramos de cable (paralelos a axiles)



PROYECTO PRÁCTICO DE FUNICULARES ANTE CARGAS GRAVITATORIAS

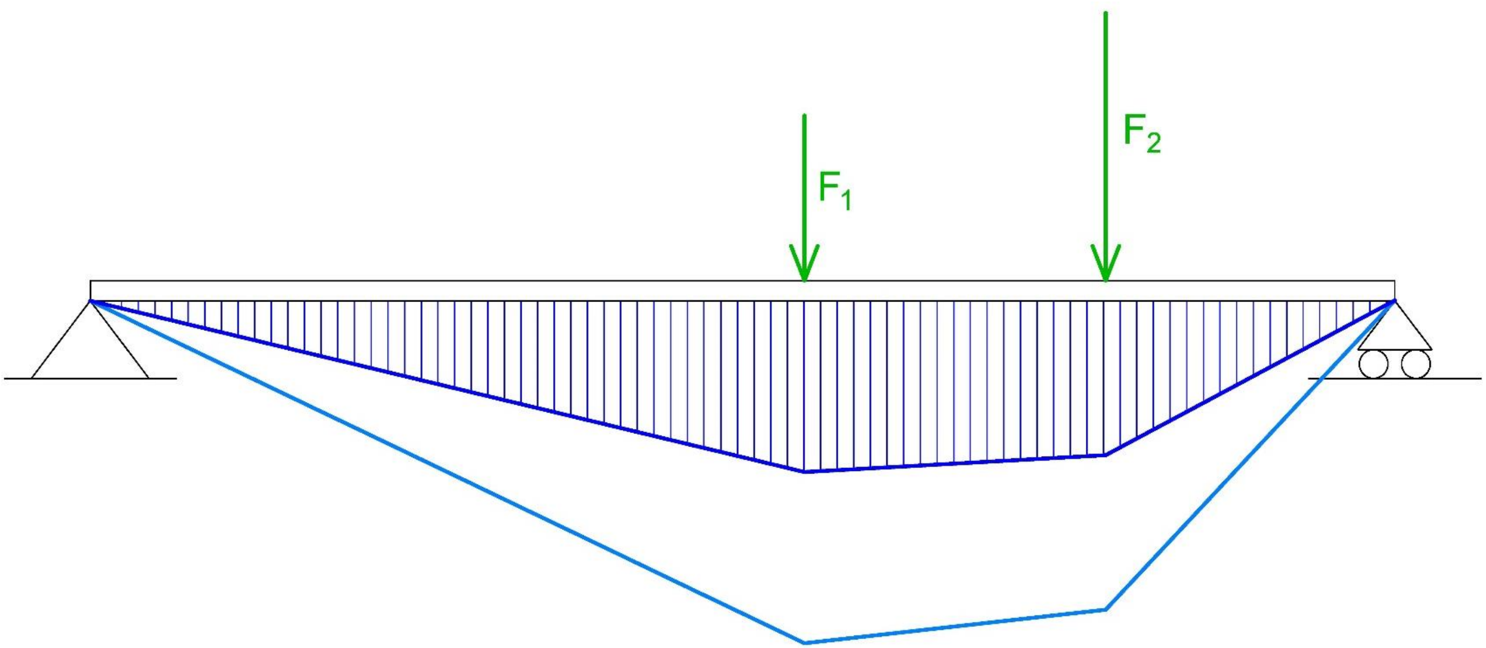
<u>Funicular (único) con dos extremos fijos y un empuje máximo:</u>
El polo O', se mueve hasta una posición O''' de tal manera que la proyección horizontal del conjunto de axiles no supere una magnitud determinada de empuje H



RELACIÓN ENTRE FUNICULAR Y LEY DE MOMENTOS

Se demuestra que existe una relación de analogía entre el funicular de unas cargas y la ley de momentos que provocaría en una viga a flexión. Si los extremos del funicular coinciden con los extremos de la viga, la analogía es de homotecia (proporcionalidad). Esta relación permite:

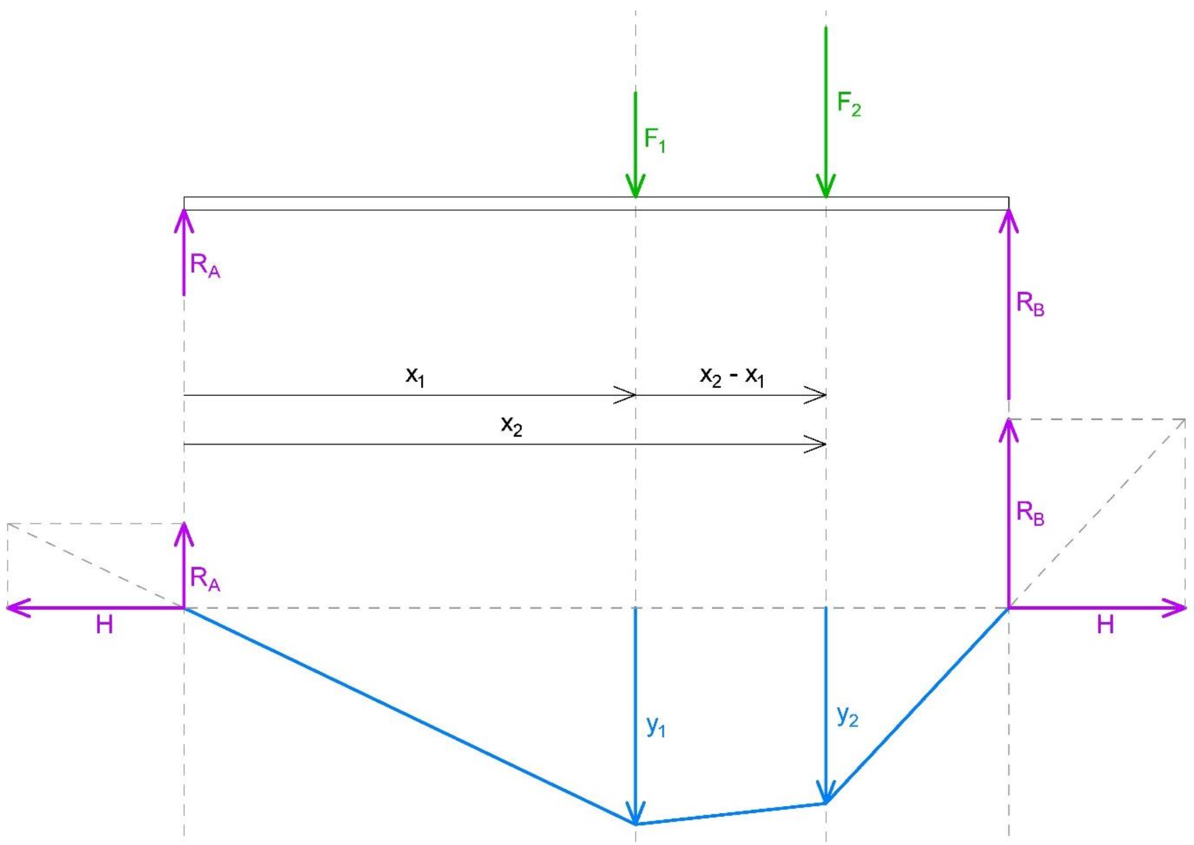
- Diseñar un funicular o antifunicular a partir de una ley de momentos compleja proporcionada por un software
- Obtener leyes de momentos gráficamente



RELACIÓN ENTRE FUNICULAR Y LEY DE MOMENTOS

En la viga, el momento flector en x_2 es:

$$M(x_2) = R_A \cdot x_2 - F_1(x_2 - x_1)$$

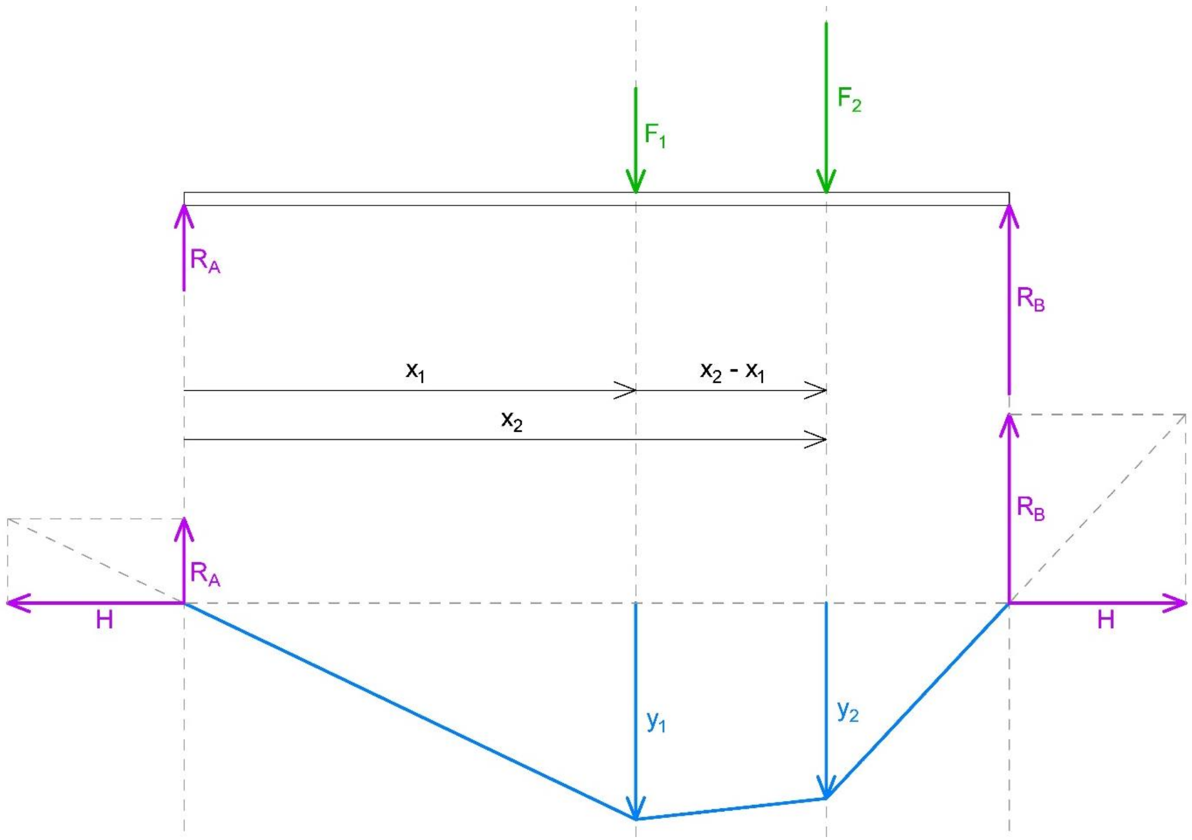


RELACIÓN ENTRE FUNICULAR Y LEY DE MOMENTOS

En el cable, tomando momentos en el punto análogo (x_2,y_2), se tiene:

$$\sum M_{(x_2,y_2)} = 0 \Rightarrow -R_A \cdot x_2 + H \cdot y_2 + F_1(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{R_A \cdot x_2 - F_1(x_2 - x_1)}_{M(x_2)\text{ en la viga}} = H \cdot y_2 \Rightarrow \underbrace{M(x_2)}_{\text{viga}} = \underbrace{H \cdot y_2}_{\text{cable}}$$



RELACIÓN ENTRE FUNICULAR Y LEY DE MOMENTOS

$$M(x_2) = H \cdot y_2 \Rightarrow M(x) \sim y$$

Como H es un valor constante para cada geometría de cable, se demuestra que el **momento flector en una viga es proporcional al funicular ante las mismas cargas** (descuelgue del cable)