4
CERCHAS Y CELOSÍAS

PROYECTO DE ESTRUCTURAS

6 FASES:

1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica

2) **Modelización: elaboración de modelo físico**

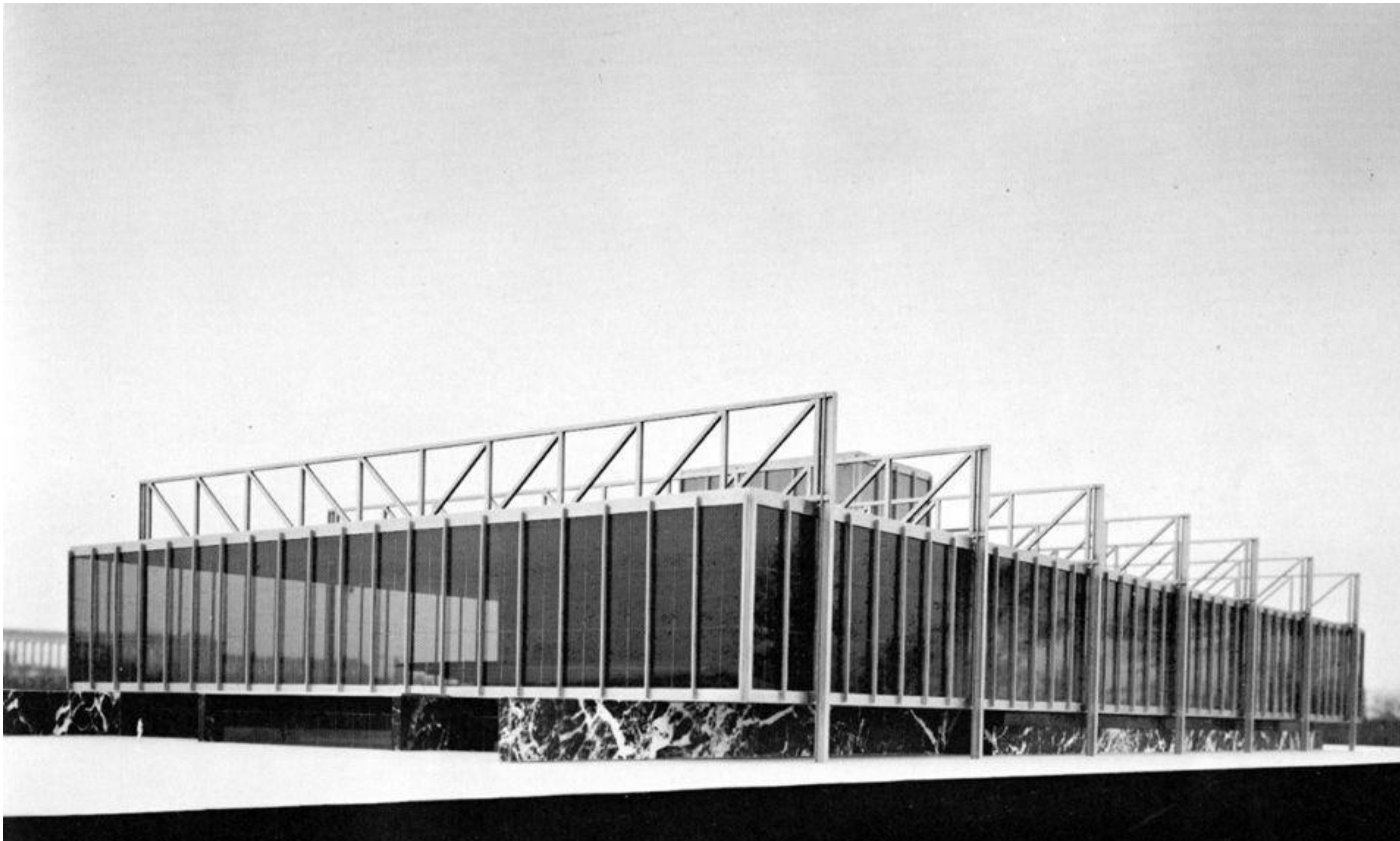
3) **Análisis: cálculo de solicitaciones y deformaciones de los elementos**

4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos

5) Representación

6) Ejecución

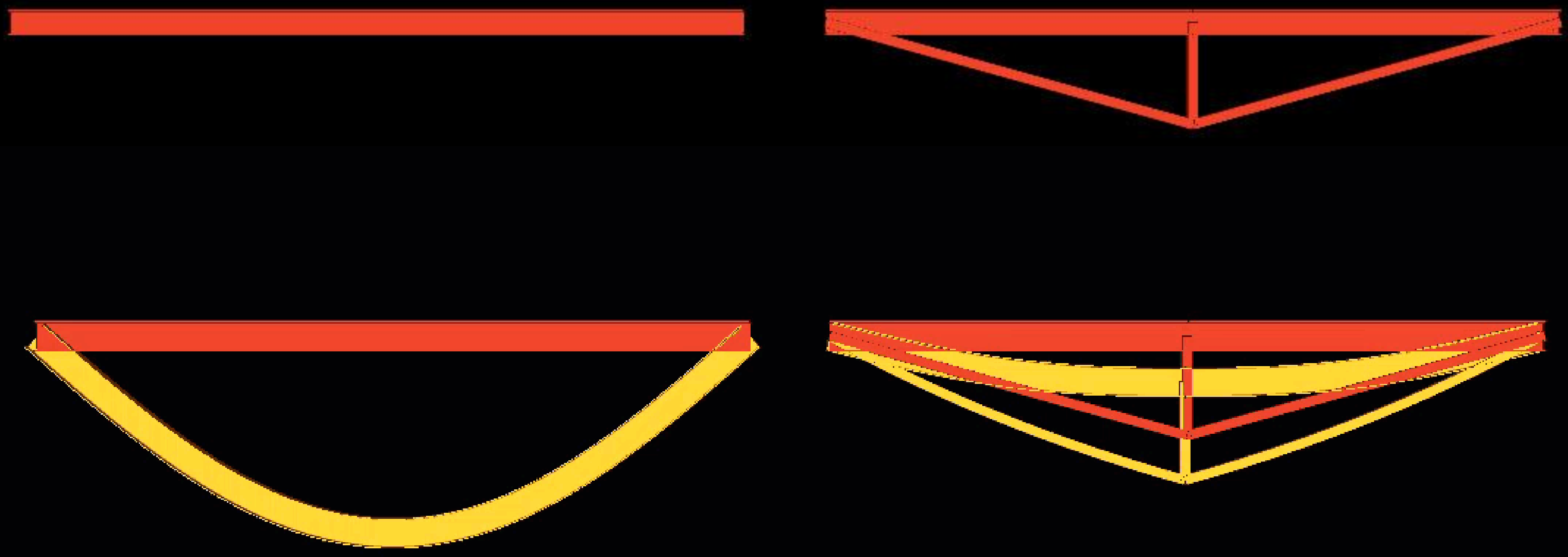
CERCHAS



CERCHAS

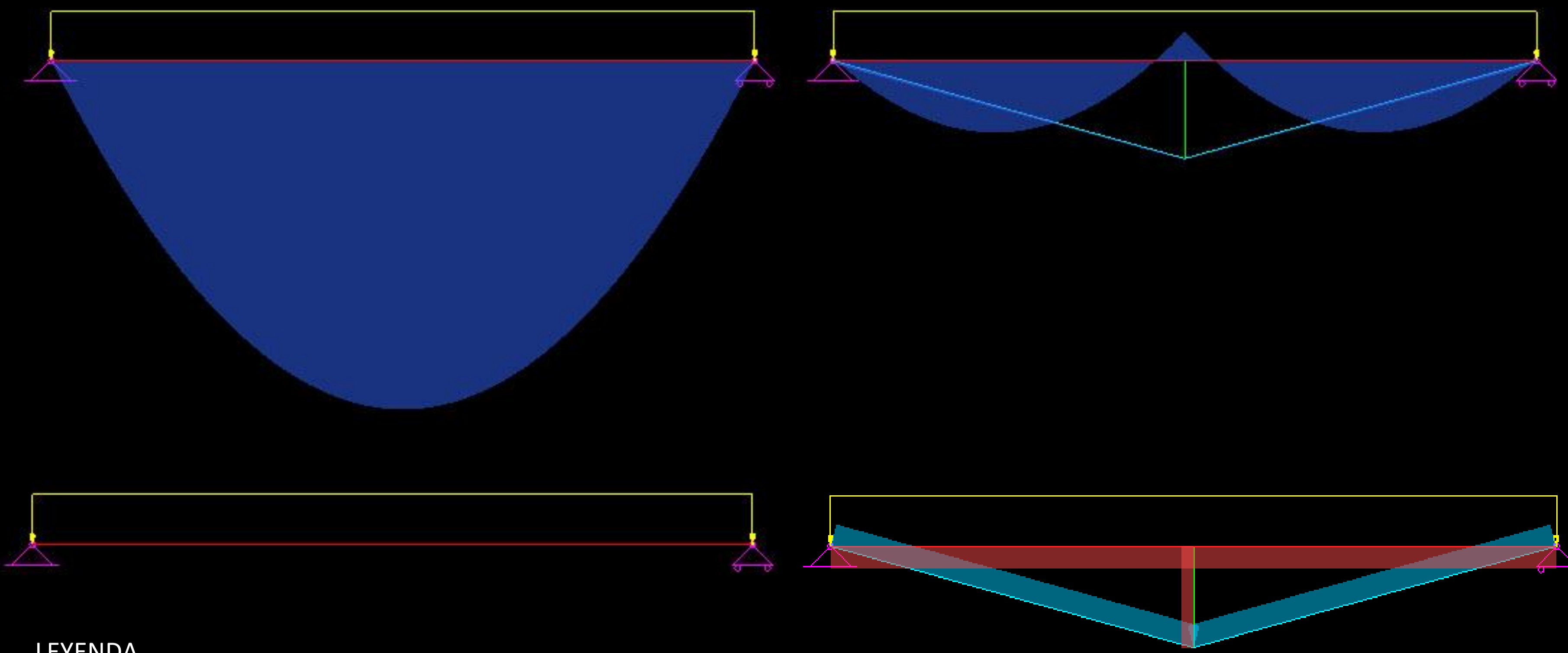
CONCEPTO

Origen 1: apoyar viga de luz excesiva en pilares en el vacío (“king post”)



CONCEPTO

Origen 1: apoyar viga de luz excesiva en pilares en el vacío (“king post”)



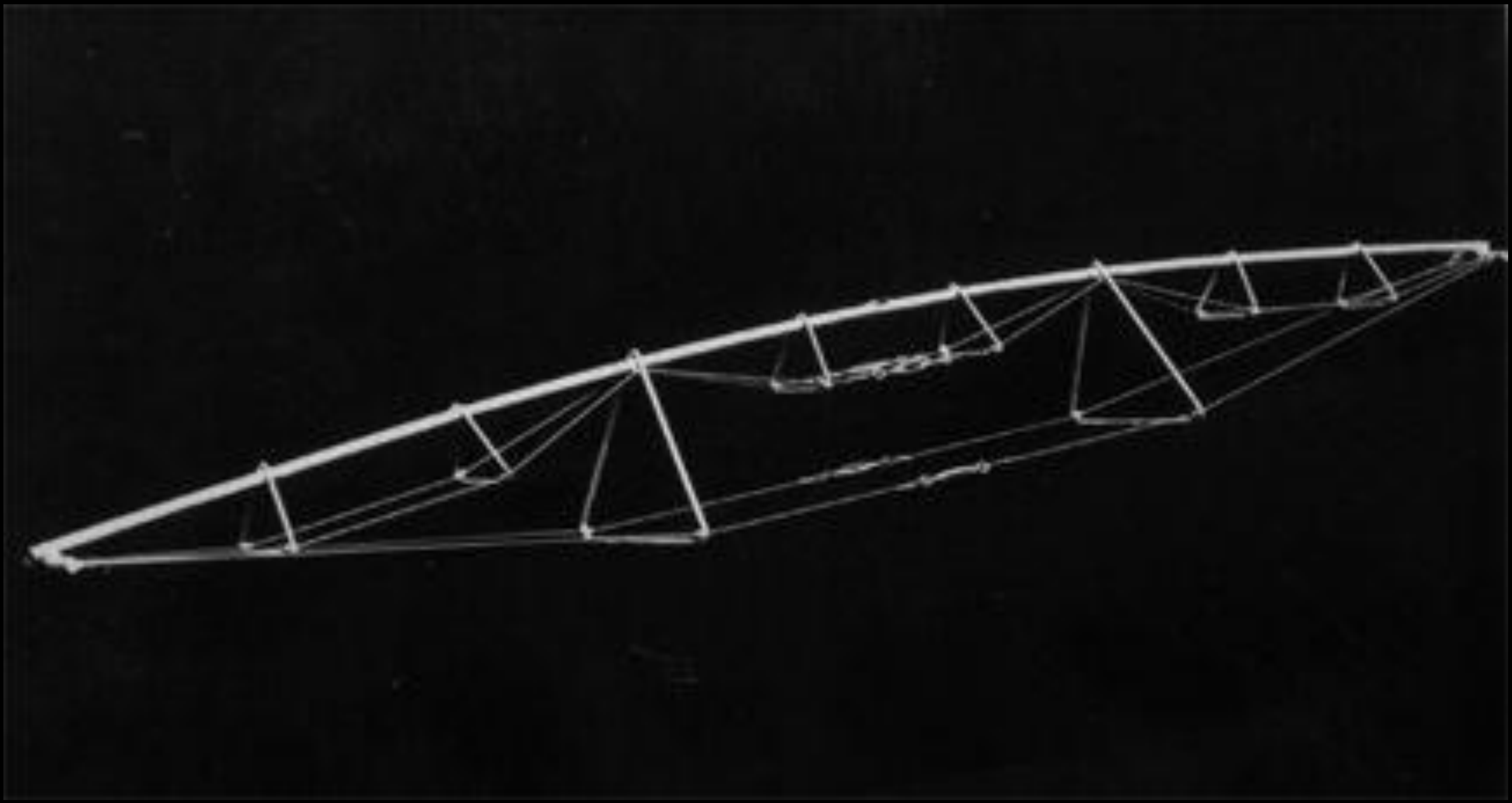
LEYENDA
Azul oscuro: momento flector
Rojo: axil negativo (compresión)
Cián: axil positivo (tracción)

CONCEPTO

Precursor: viga atirantada, generalmente pretensada

CONCEPTO

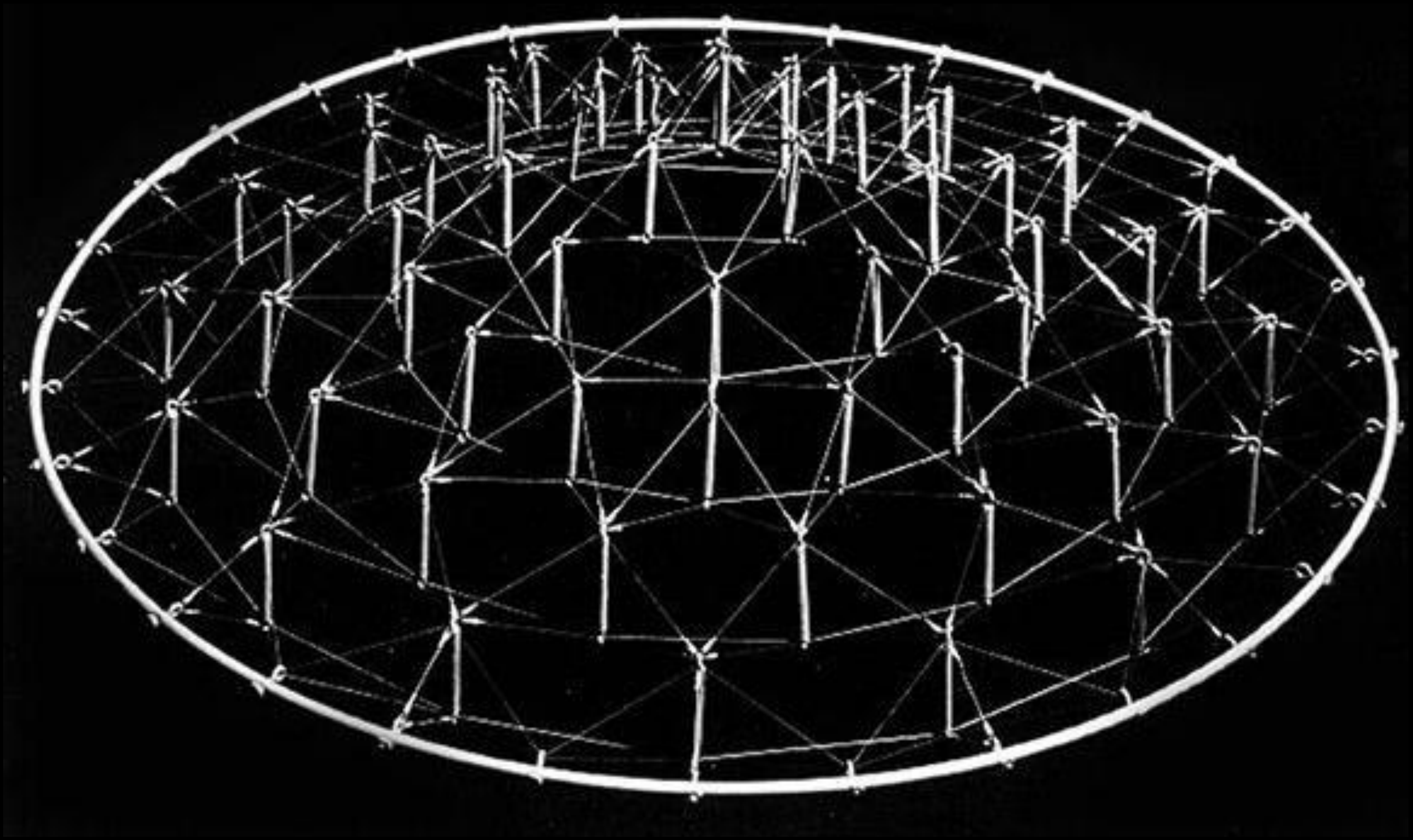
Derivados conceptuales:
- Estructuras autocompensadas
- Estructuras tensegrity



CONCEPTO

Derivados conceptuales:

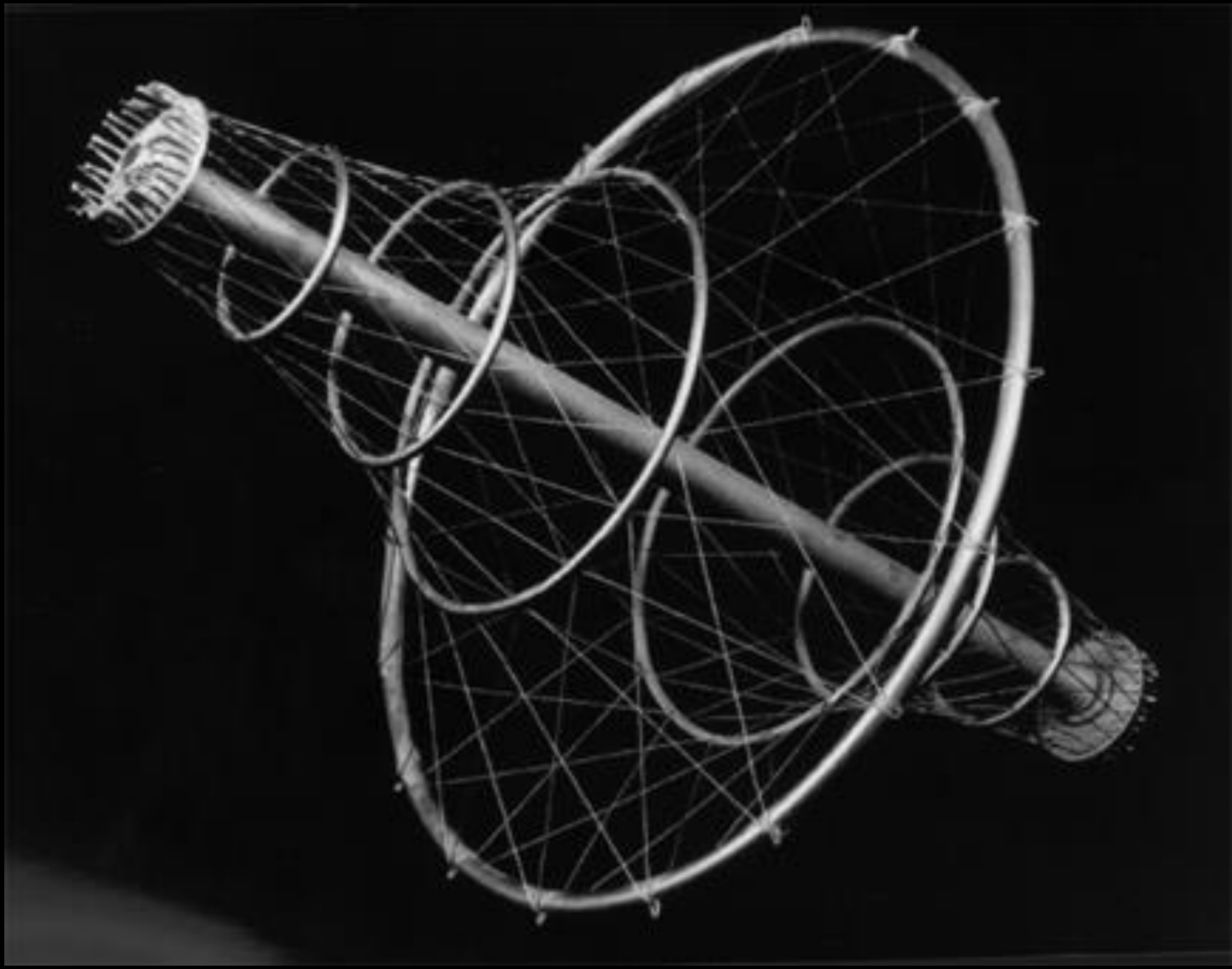
- Estructuras autocompensadas
- Estructuras tensegrity



CONCEPTO

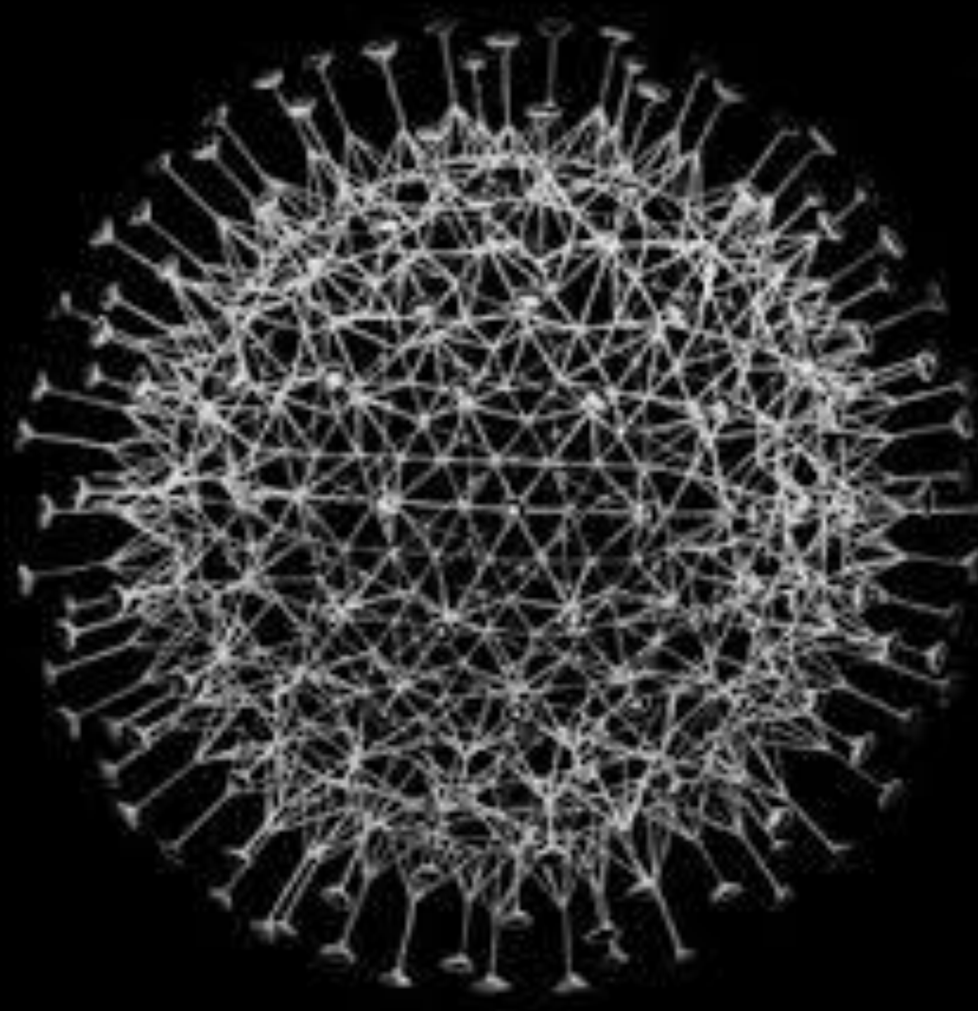
Derivados conceptuales:

- Estructuras autocompensadas
- Estructuras tensegrity



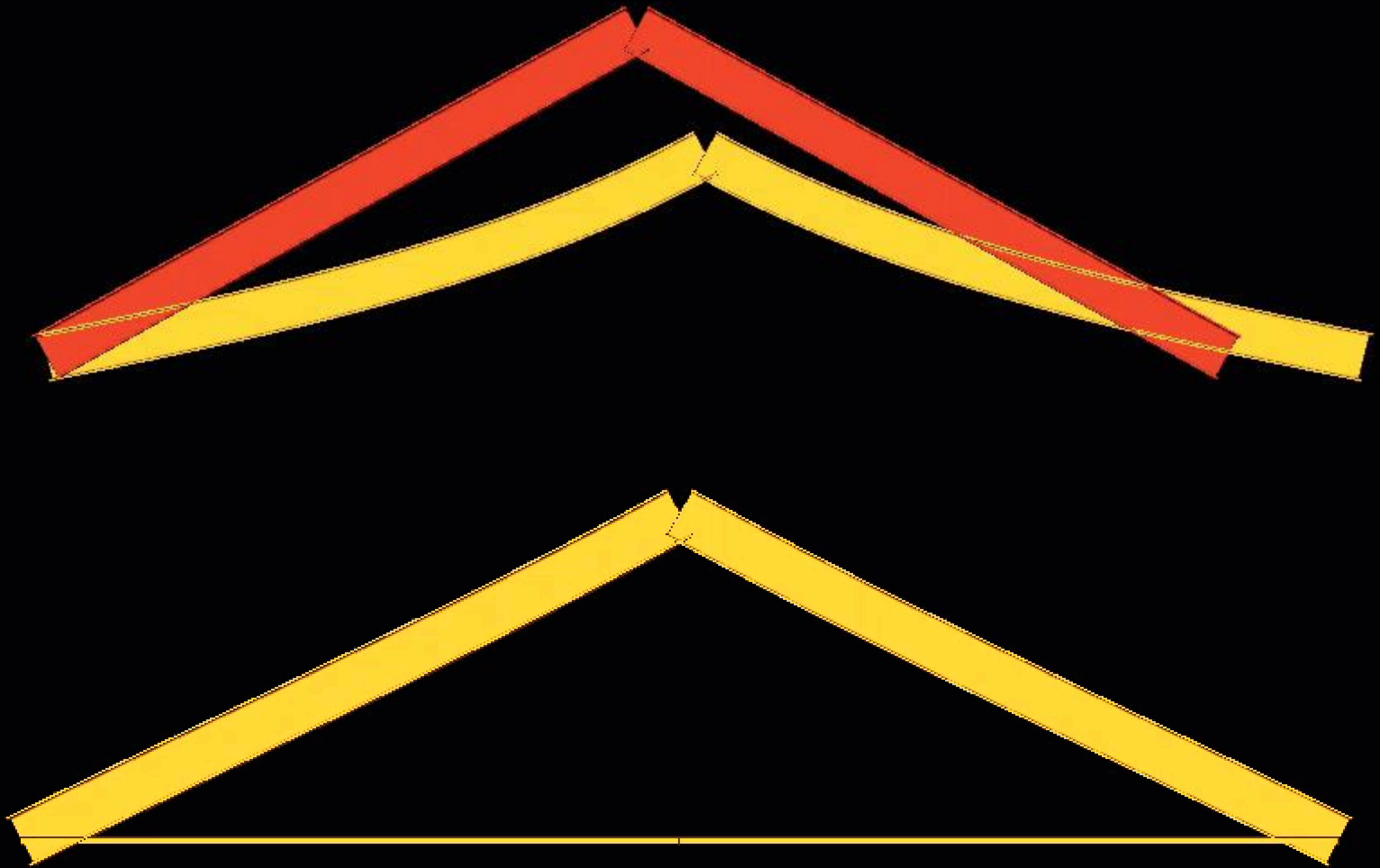
CONCEPTO

Derivados conceptuales:
- Estructuras autocompensadas
- Estructuras tensegrity



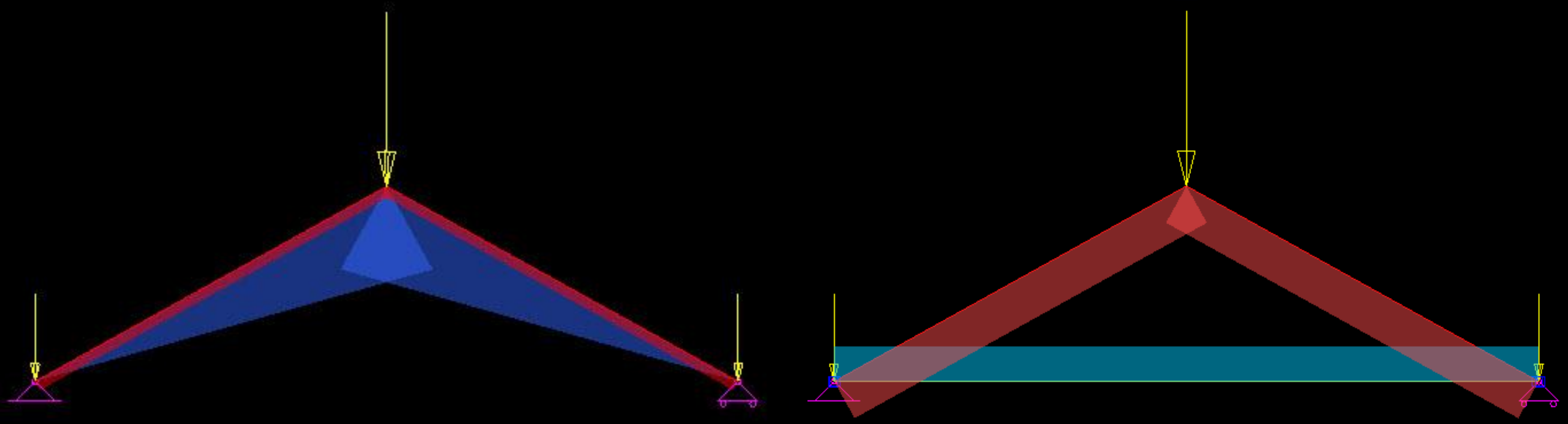
CONCEPTO

Origen 2: evitar apertura de vigas de cubierta inclinada



CONCEPTO

Origen 2: evitar apertura de vigas de cubierta inclinada



CONCEPTO

Origen 2: evitar apertura de vigas de cubierta inclinada

CONCEPTO

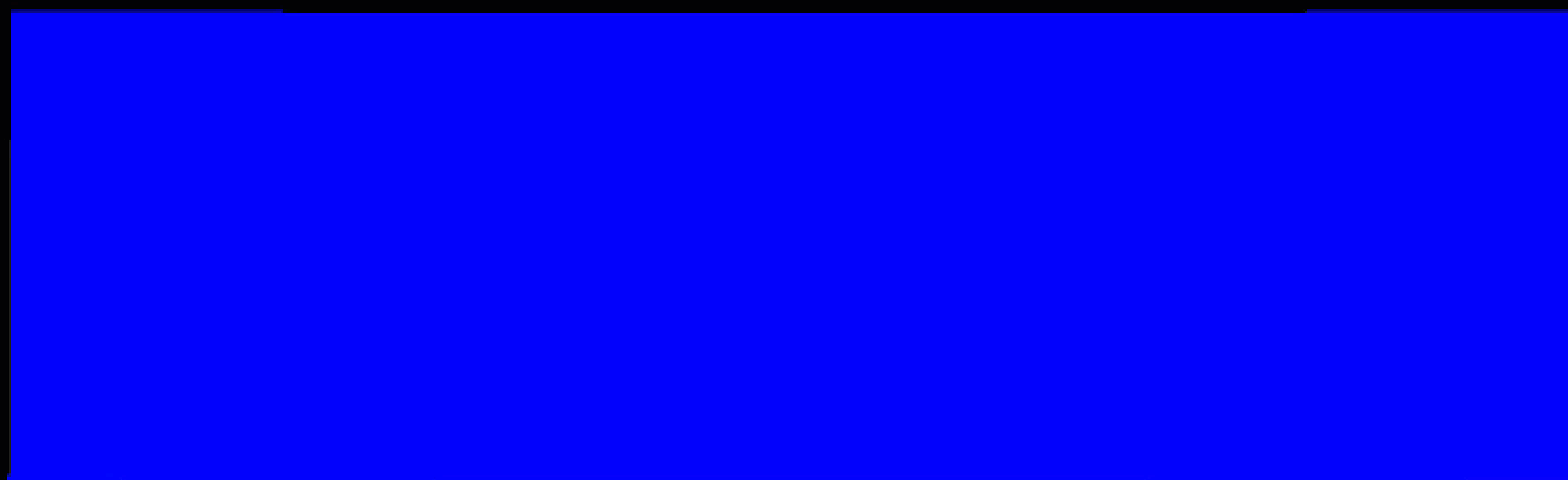
Origen 3: aligerar viga de alma llena

CONCEPTO

Origen 3: aligerar viga de alma llena

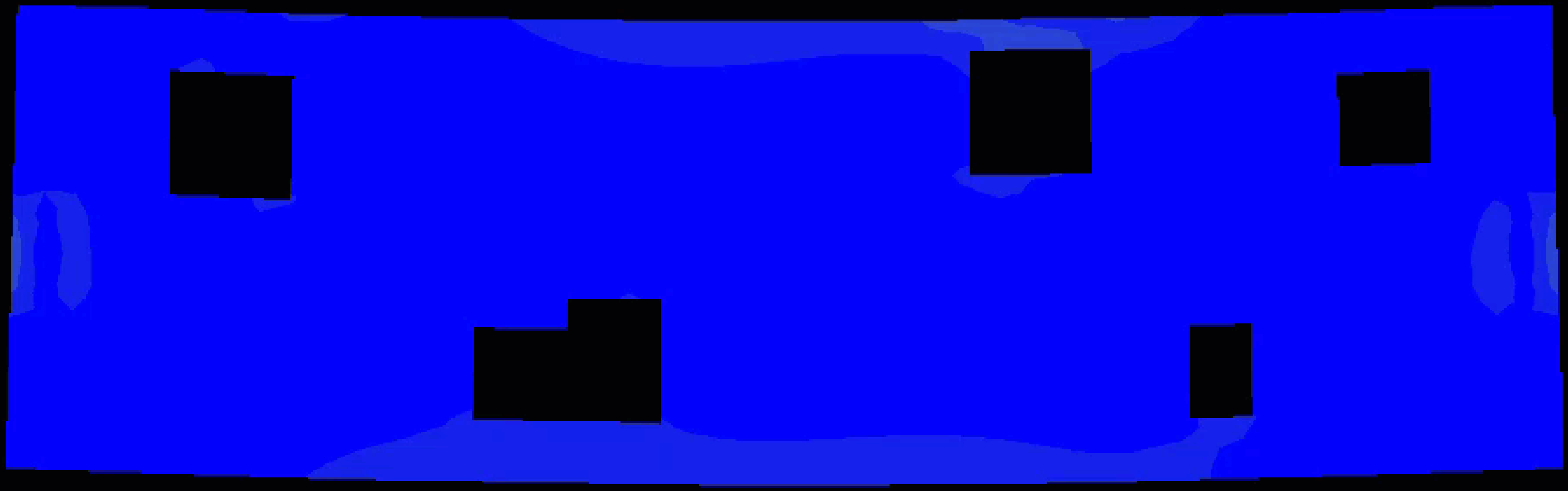
CONCEPTO

Origen 3: aligerar viga de alma llena



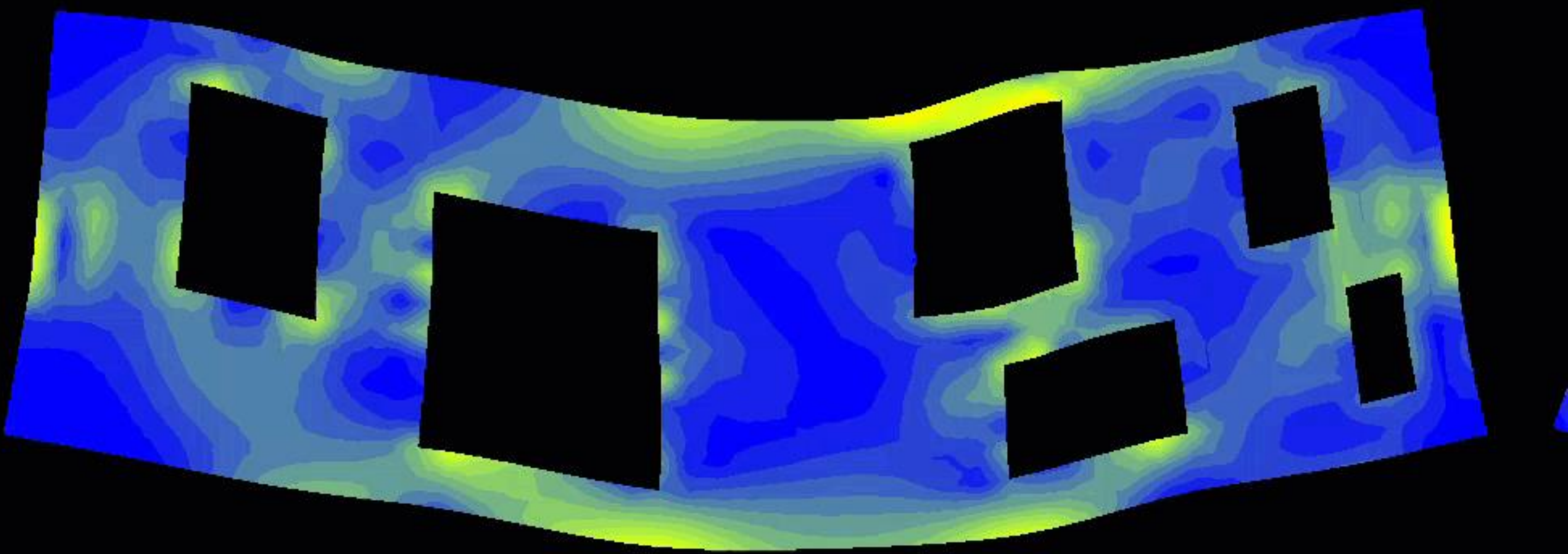
CONCEPTO

Origen 3: aligerar viga de alma llena



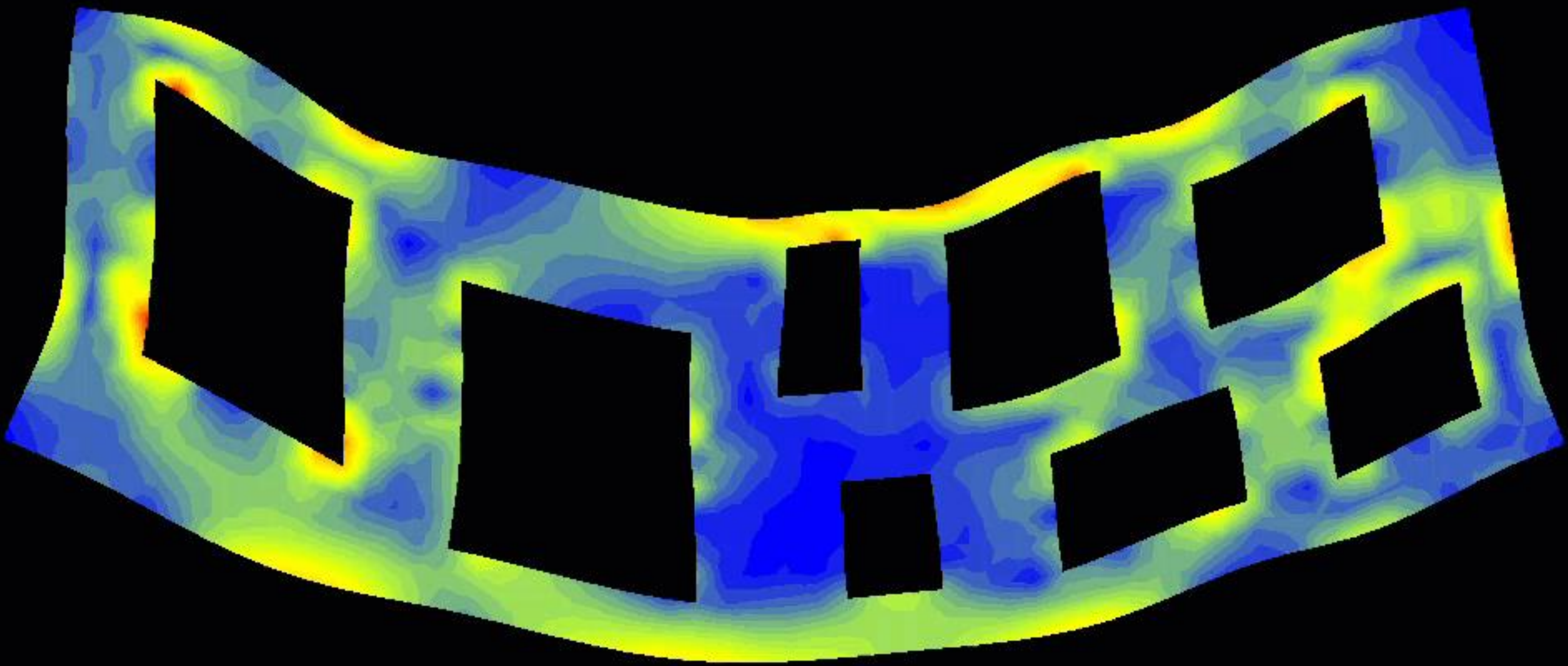
CONCEPTO

Origen 3: aligerar viga de alma llena



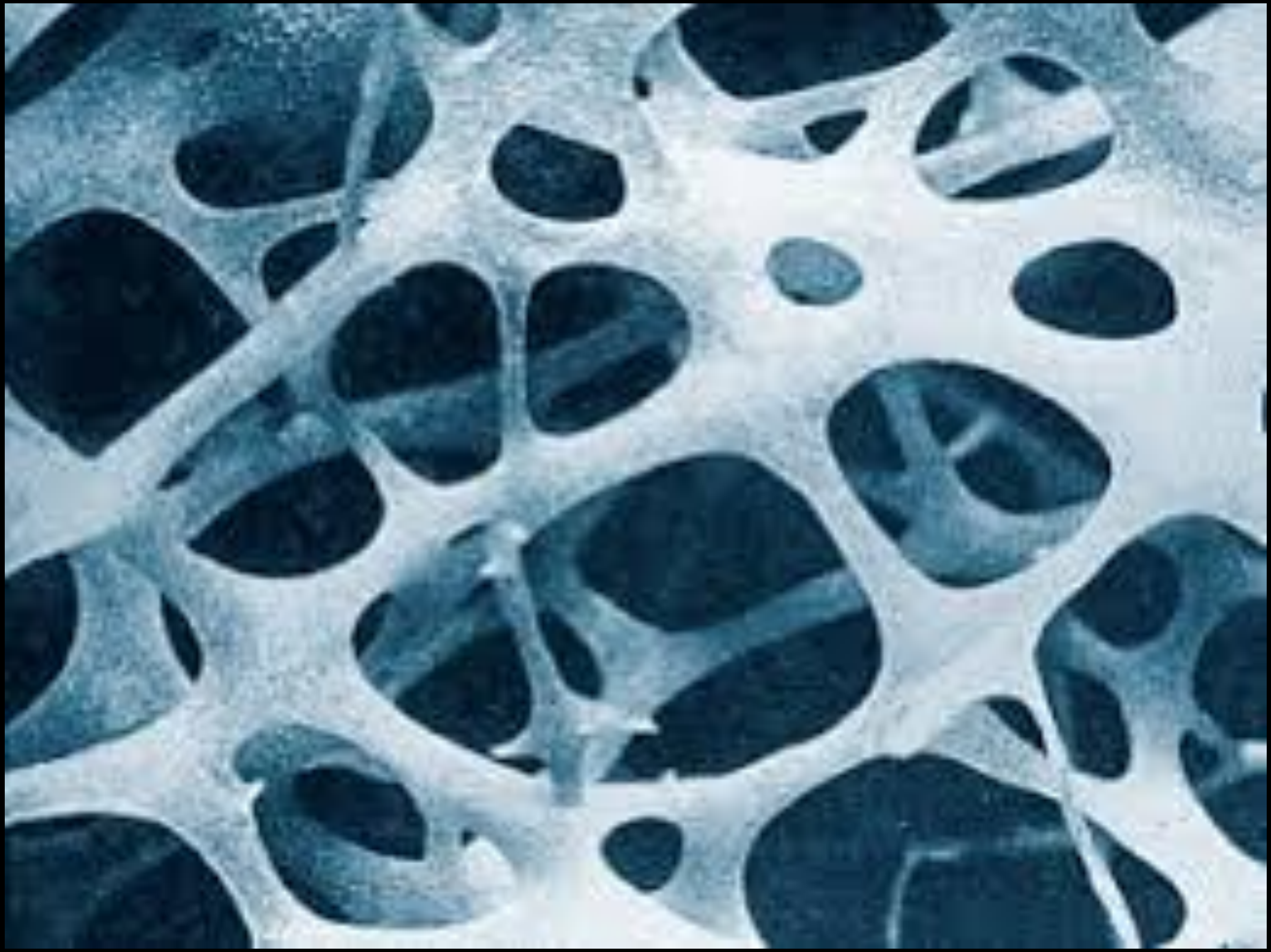
CONCEPTO

Origen 3: aligerar viga de alma llena



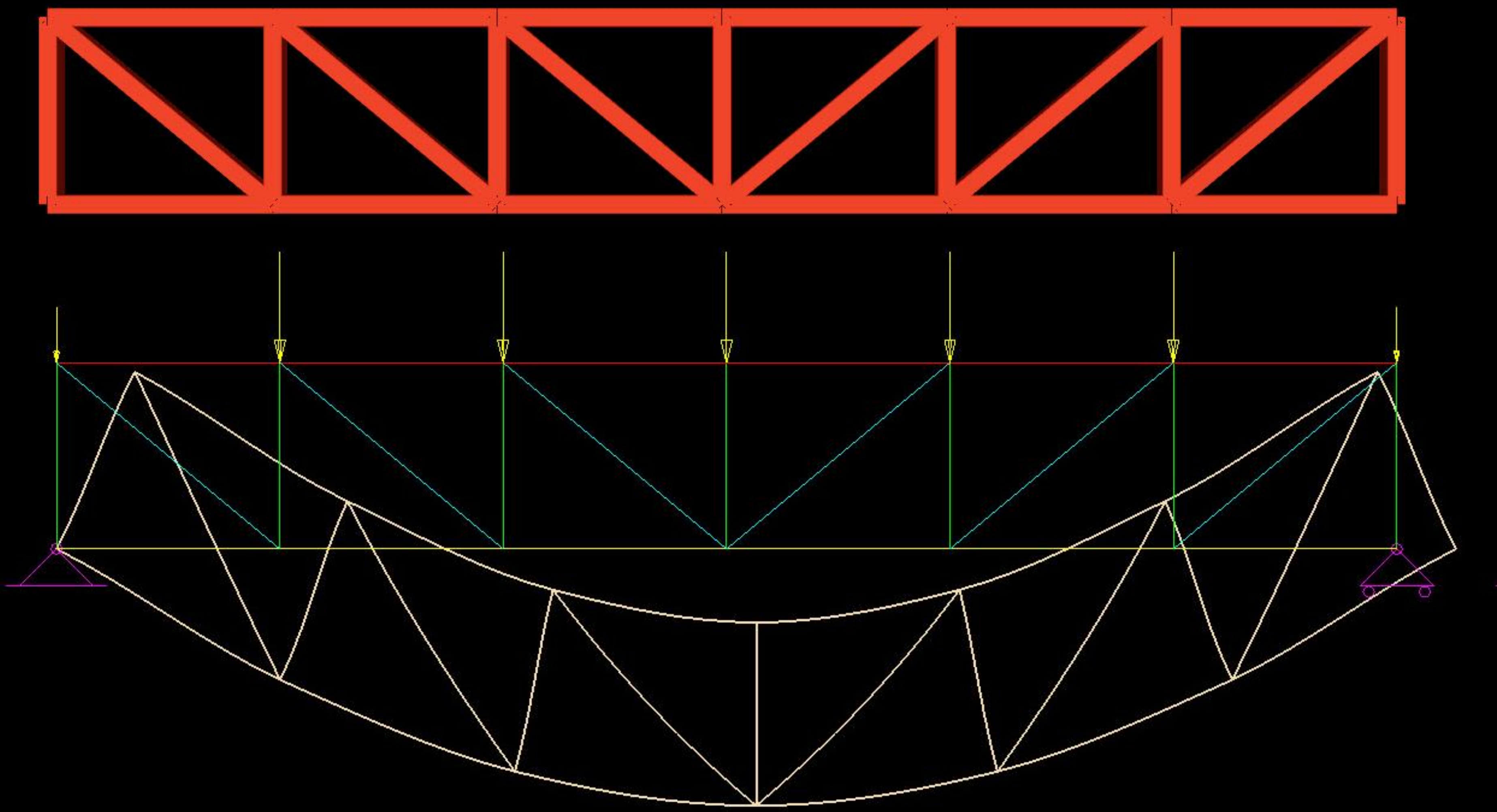
CONCEPTO

Origen 3: aligerar viga de alma llena



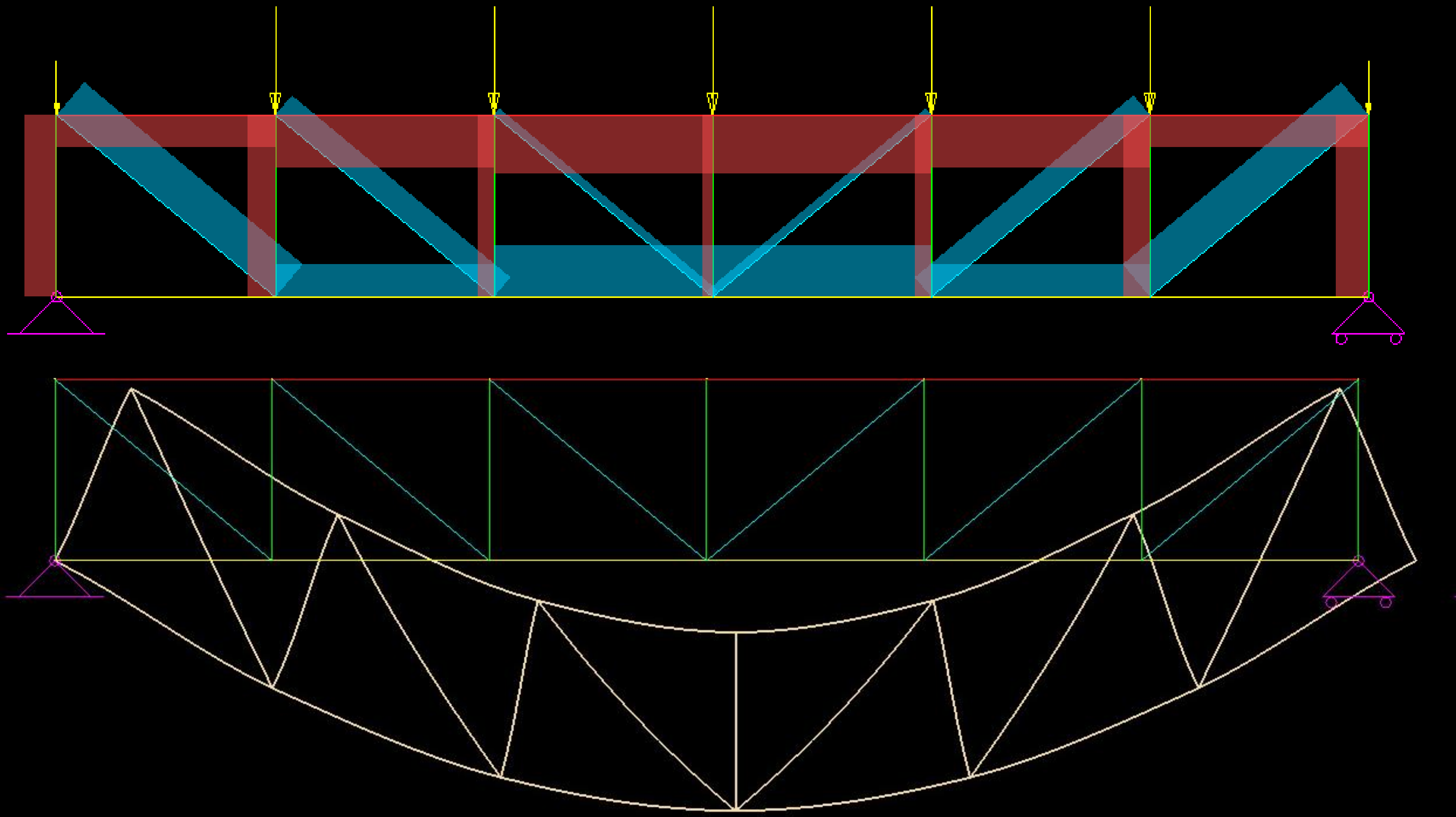
COMPORTAMIENTO

A gran escala: viga flectada. A pequeña escala: entramado de barras a axil



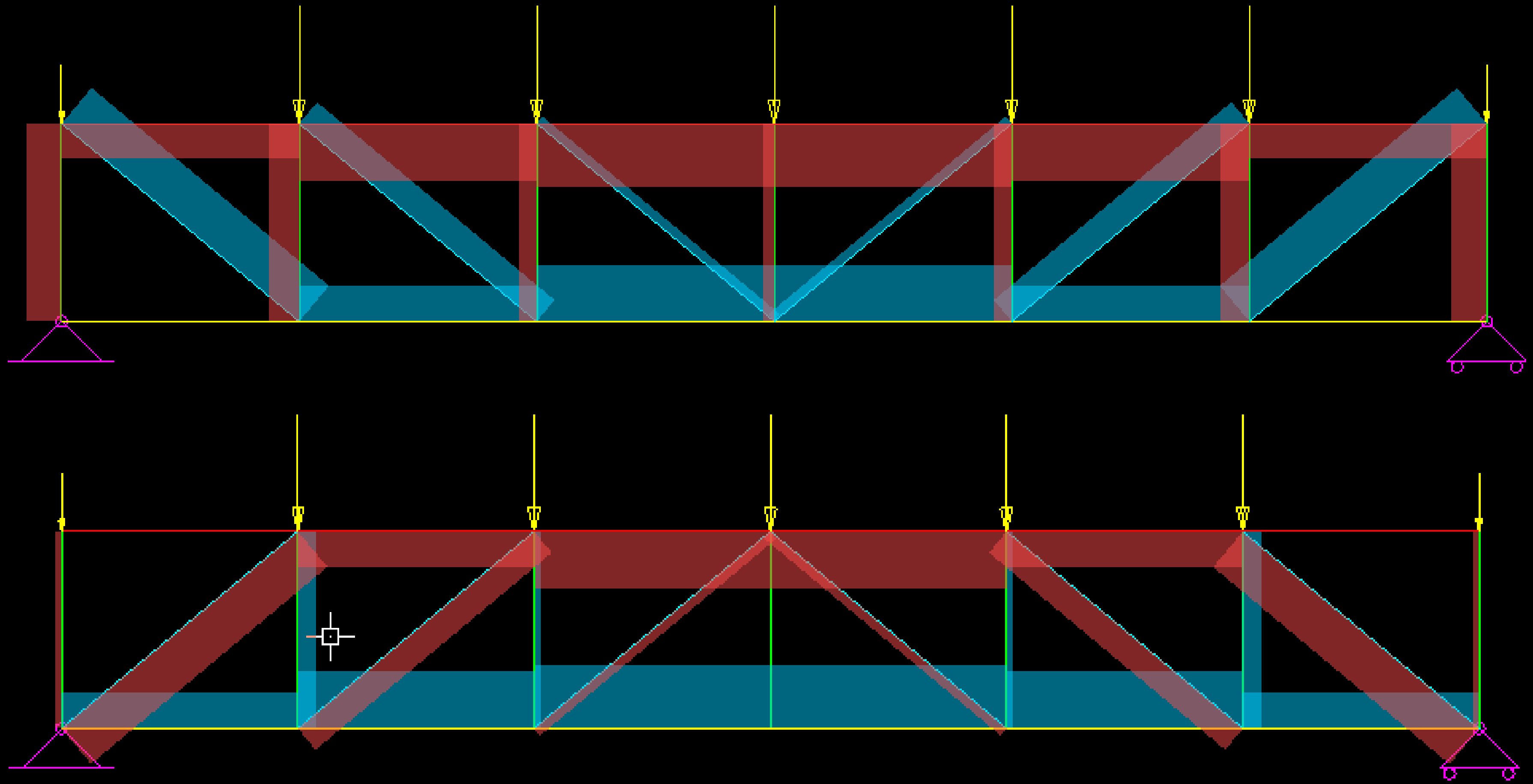
COMPORTAMIENTO

A gran escala: viga flectada. A pequeña escala: entramado de barras a axil



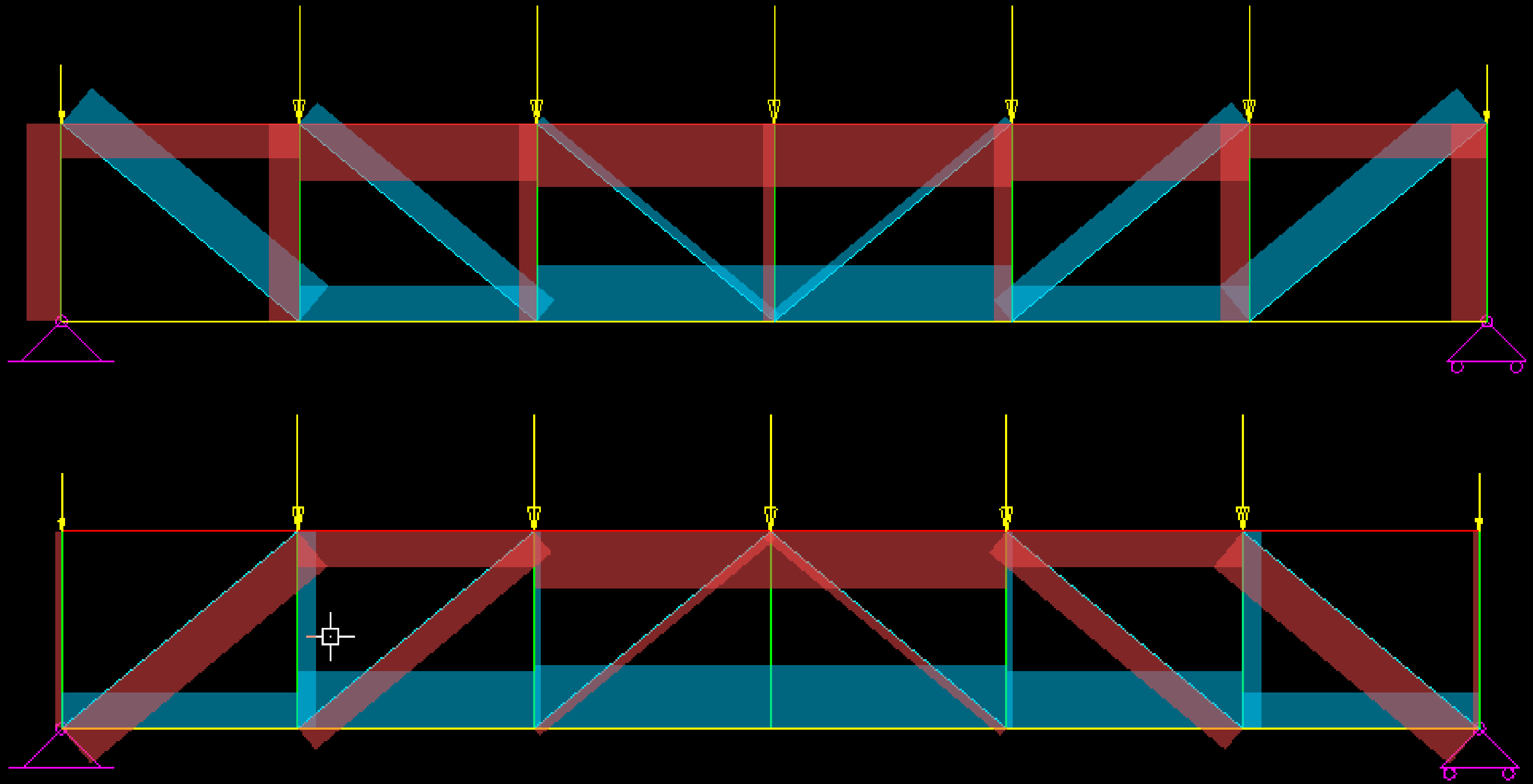
COMPORTAMIENTO

Normalmente cordón superior a compresión y cordón inferior a tracción
Montantes verticales: comprimidos/traccionados según carga superior/inferior
Diagonales: traccionadas si apuntan hacia la deflexión



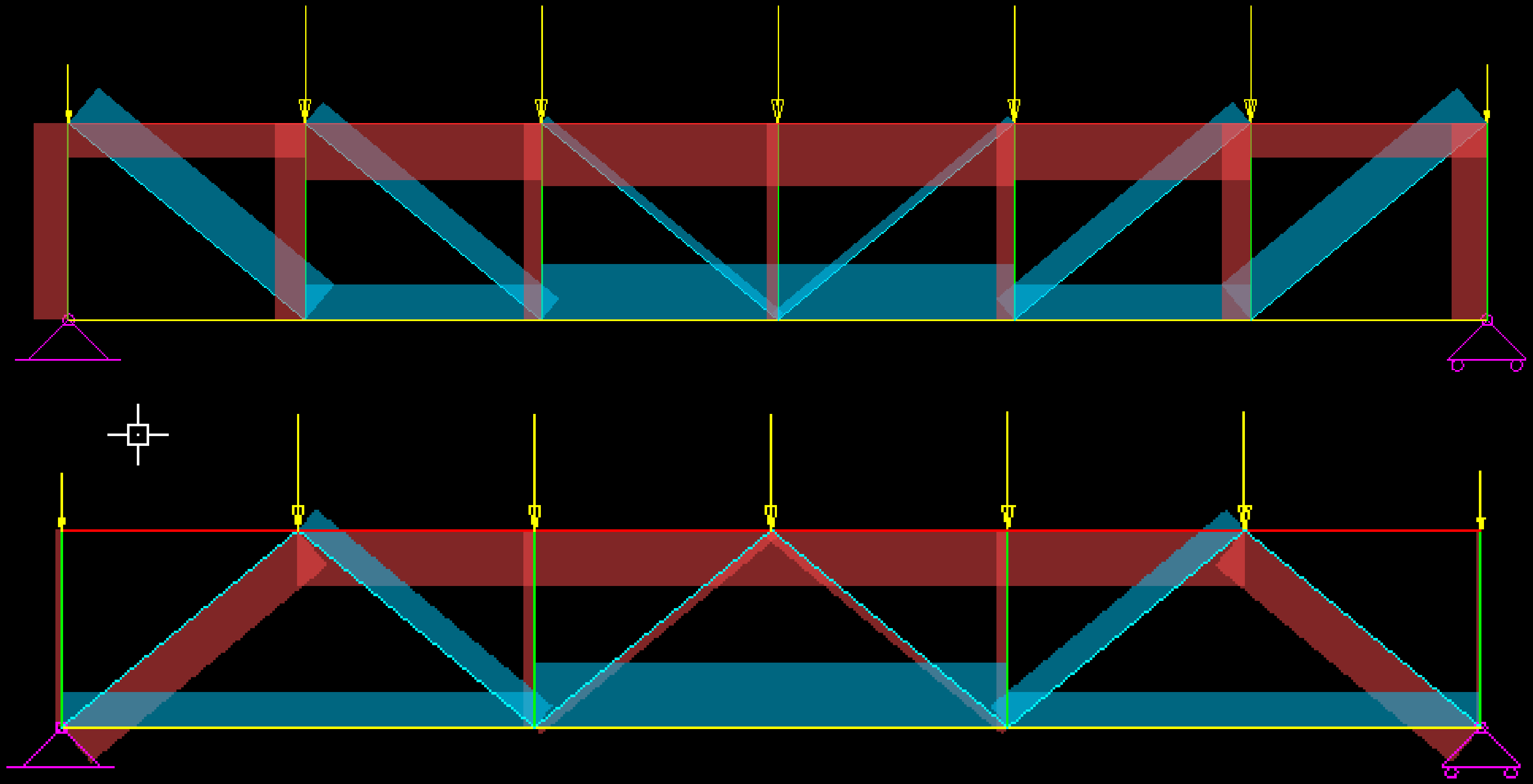
COMPORTAMIENTO

En cerchas rectas:
Cordones más solicitados hacia el centro
Montantes y diagonales más solicitados hacia los extremos



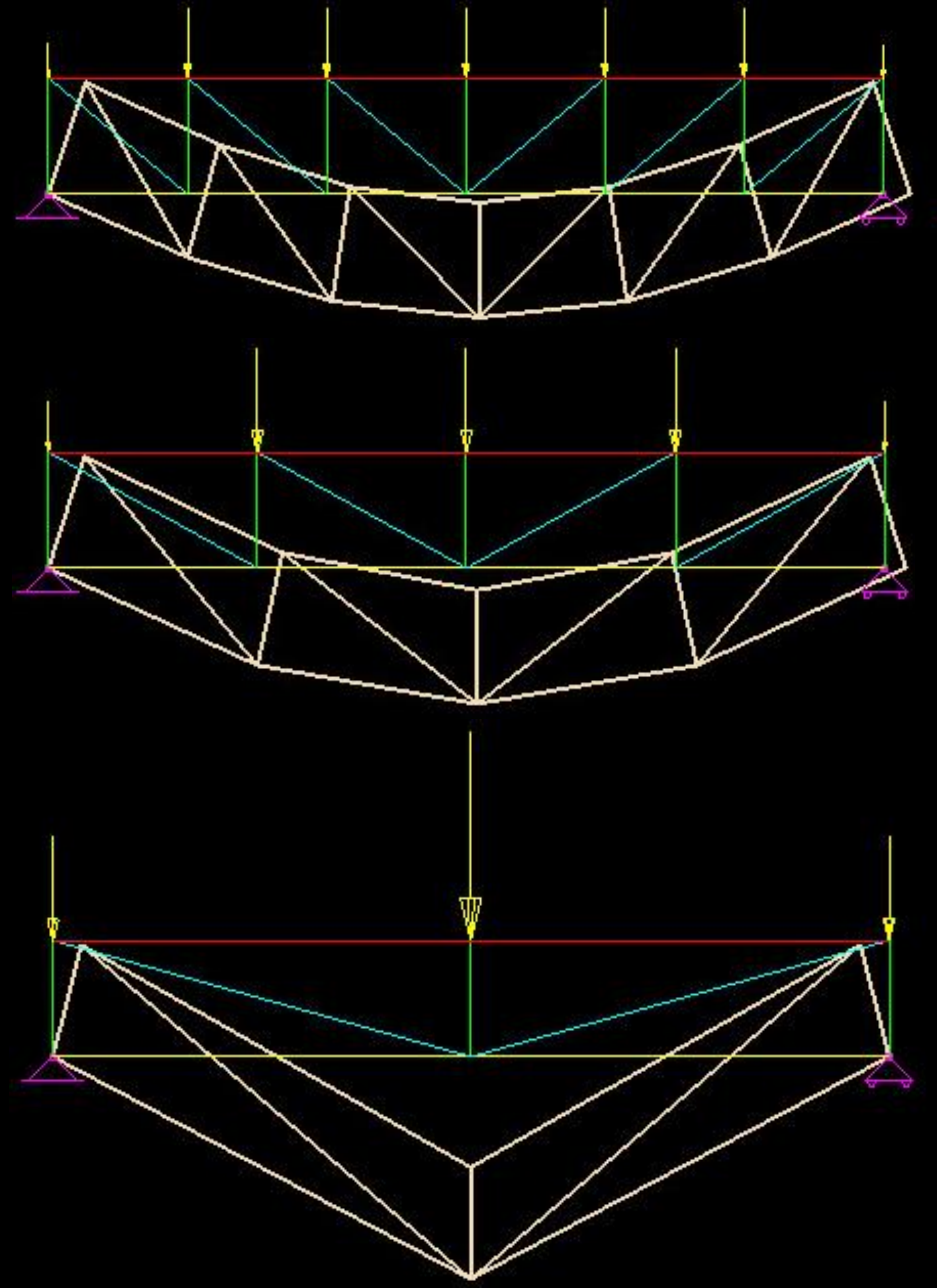
COMPORTAMIENTO

Normalmente cordón superior a compresión y cordón inferior a tracción
Montantes verticales: comprimidos/traccionados según carga superior/inferior
Diagonales: traccionadas si apuntan hacia la deflexión



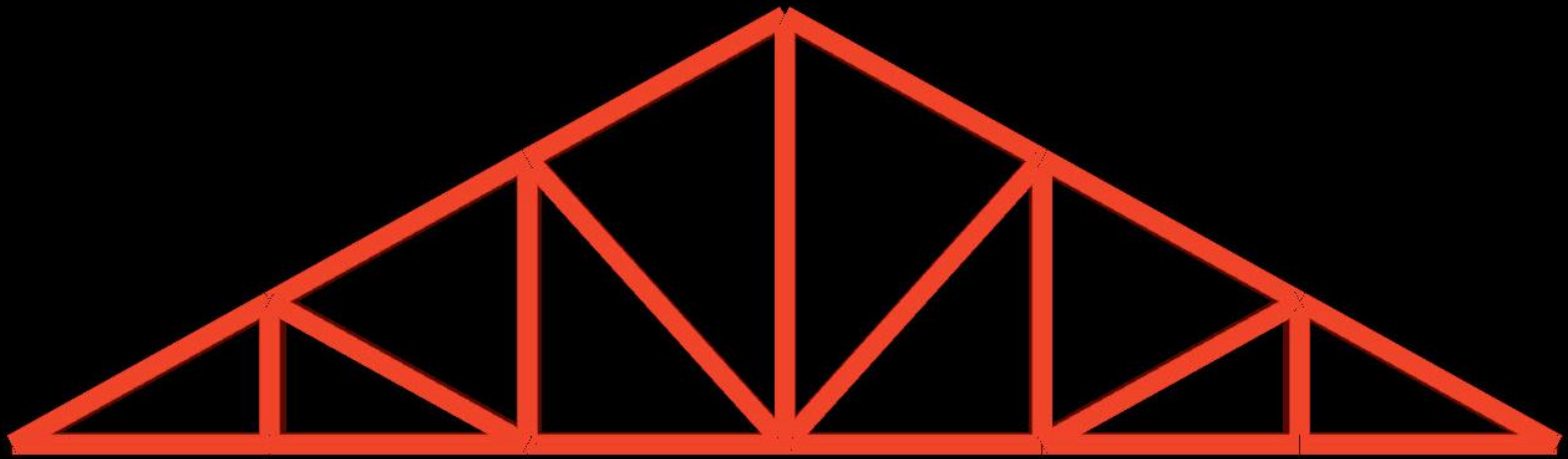
COMPORTAMIENTO

Mejor comportamiento cuanto más material (número de barras o sección transversal



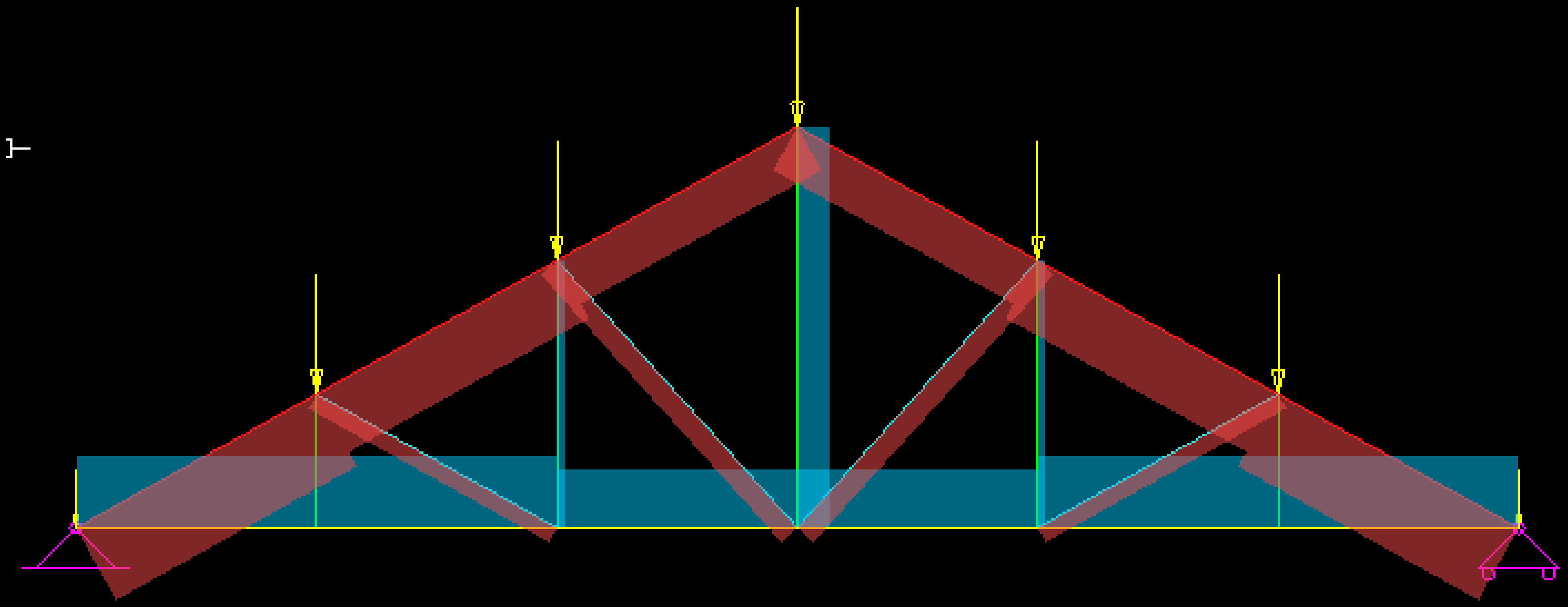
COMPORTAMIENTO

Cerchas a dos aguas: comportamiento ligeramente diferente, especialmente en las diagonales (comprimidas si apuntan hacia la deflexión)



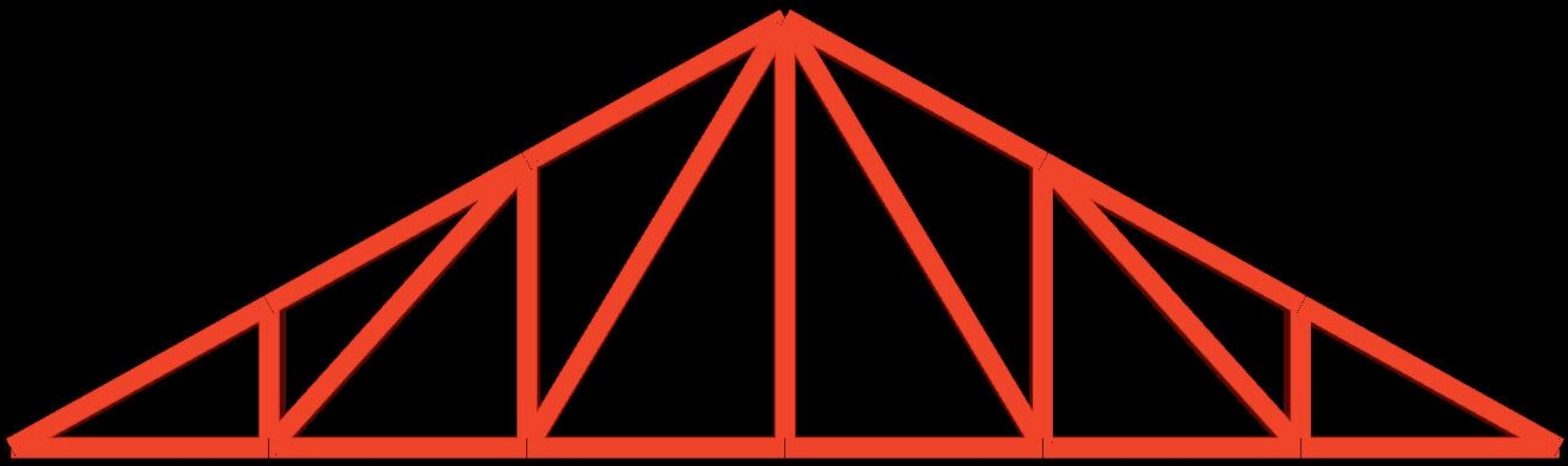
COMPORTAMIENTO

Cerchas a dos aguas: comportamiento ligeramente diferente, especialmente en las diagonales (comprimidas si apuntan hacia la deflexión)



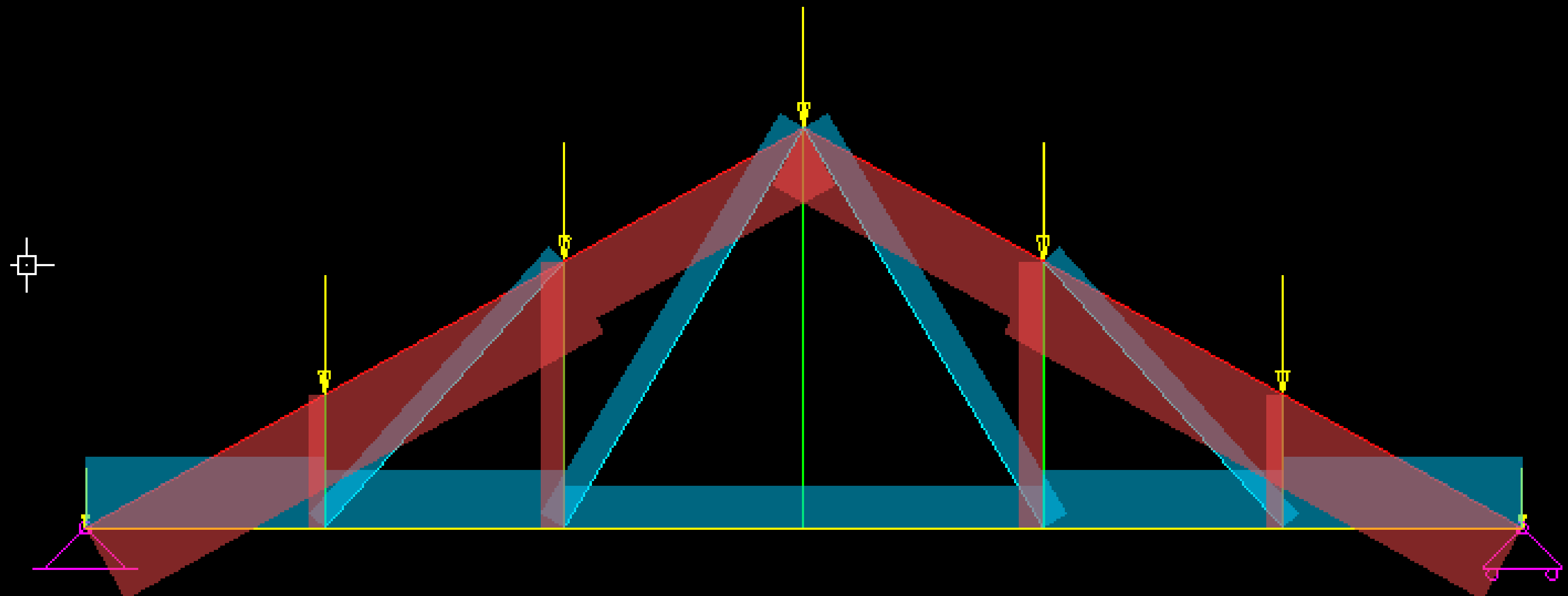
COMPORTAMIENTO

Cerchas a dos aguas: comportamiento ligeramente diferente, especialmente en las diagonales (comprimidas si apuntan hacia la deflexión)



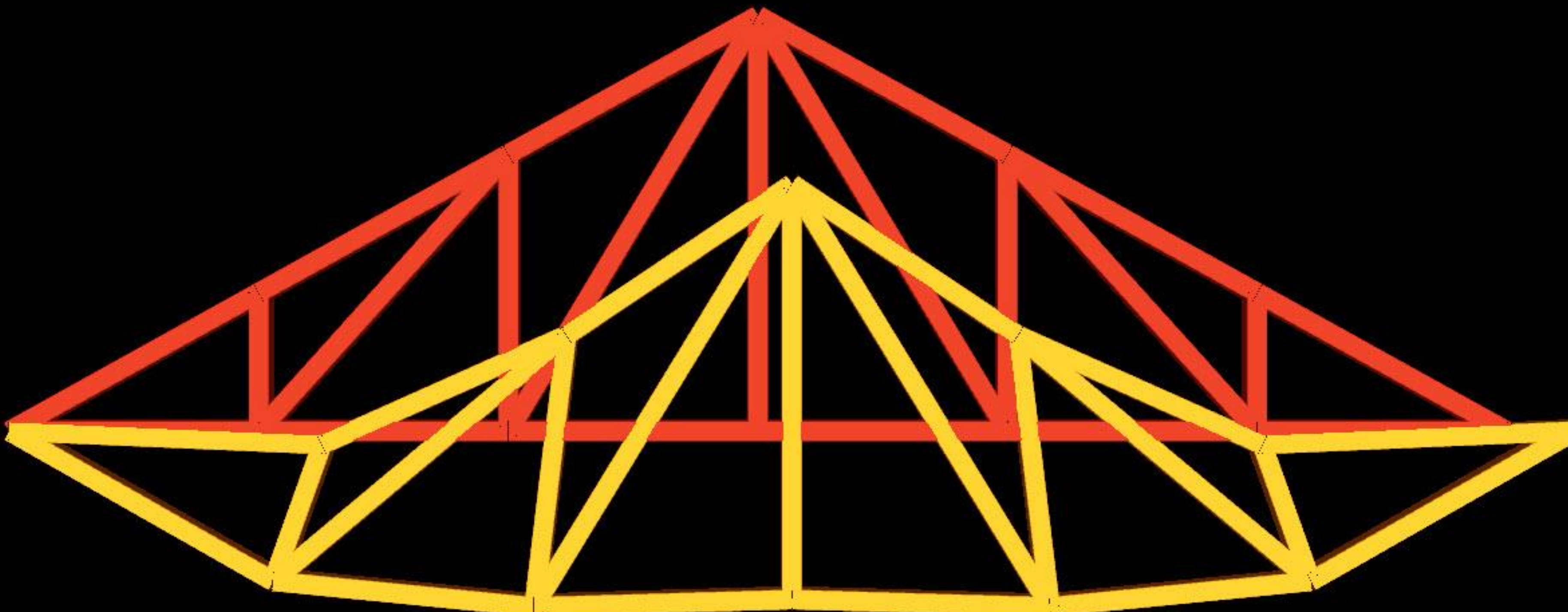
COMPORTAMIENTO

En <u>cerchas a dos aguas</u>:
Cordones más solicitados hacia el los extremos
Montantes y diagonales más solicitados hacia el centro
Pendolón no trabaja si no tiene carga colgada



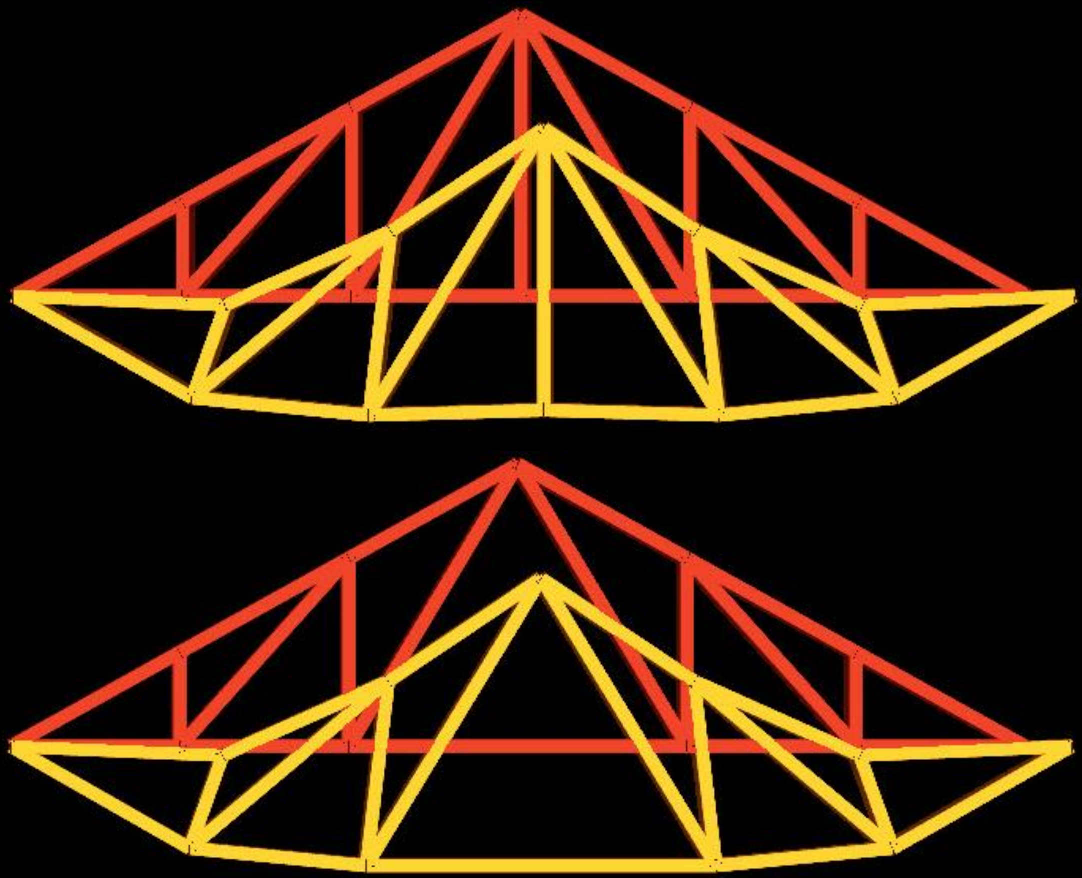
COMPORTAMIENTO

En <u>cerchas a dos aguas</u>:
Cordones más solicitados hacia el los extremos
Montantes y diagonales más solicitados hacia el centro
Pendolón no trabaja si no tiene carga colgada



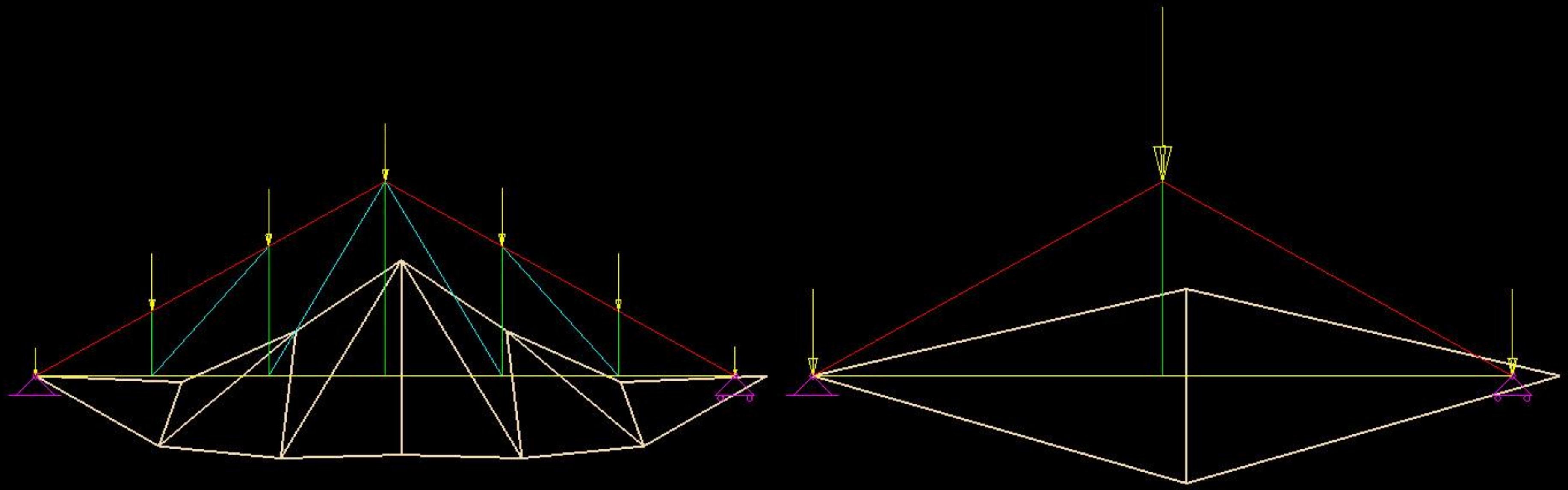
COMPORTAMIENTO

En <u>cerchas a dos aguas</u>:
Cordones más solicitados hacia los extremos
Montantes y diagonales más solicitados hacia el centro
Pendolón no trabaja si no tiene carga colgada



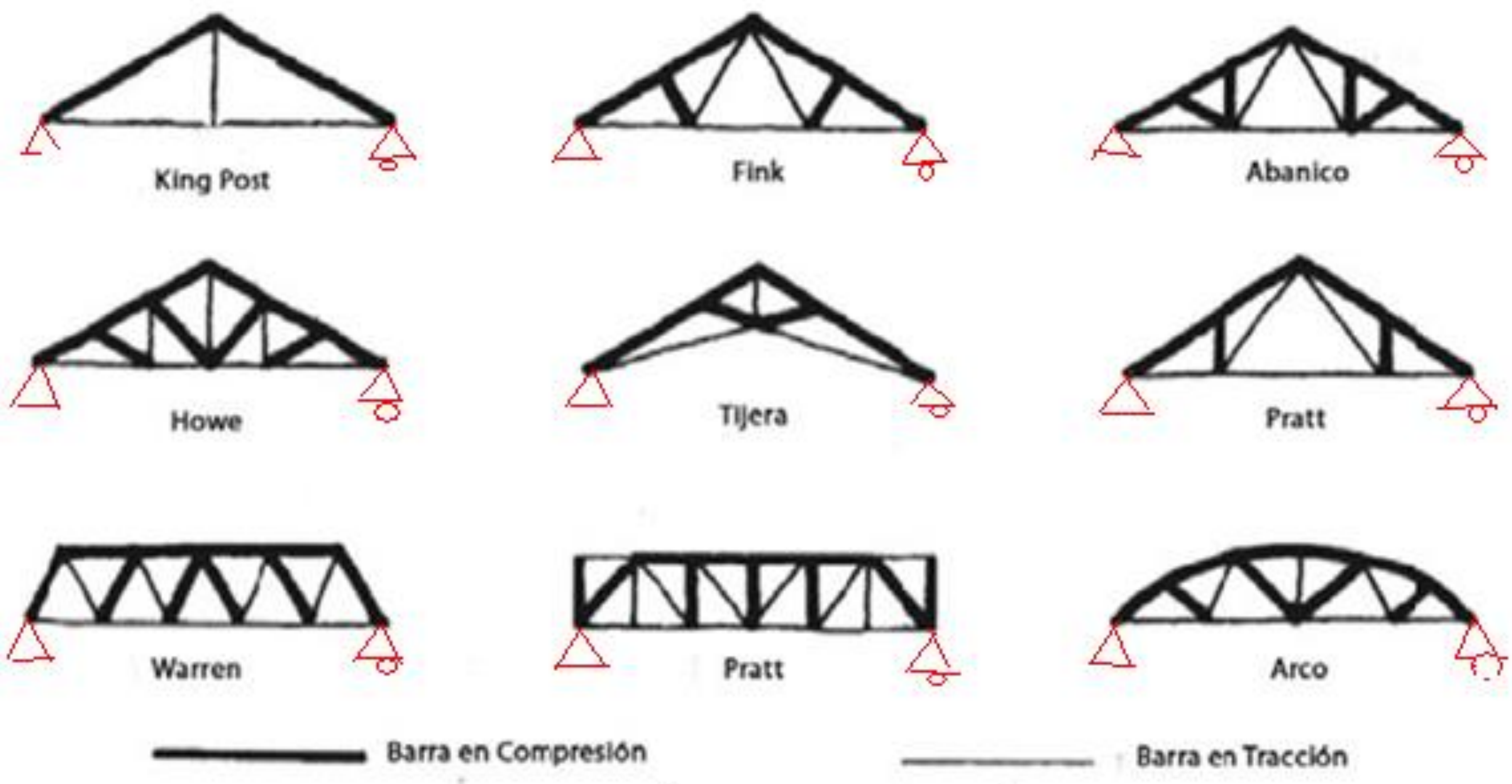
COMPORTAMIENTO

En cerchas a dos aguas:
Cordones más solicitados hacia el los extremos
Montantes y diagonales más solicitados hacia el centro
Pendolón no trabaja si no tiene carga colgada



TIPOLOGÍAS

Gran variedad, facilidad para adaptarse a formas complejas



CONDICIÓN DE CERCHA

Para poder clasificar una estructura como articulada plana debe(ría) cumplir:

1) Barras y cargas coplanarias (estructura plana)
2) Ejes de barra concurrentes en nudos
3) Nudos articulados
4) Cargas concentradas en nudos

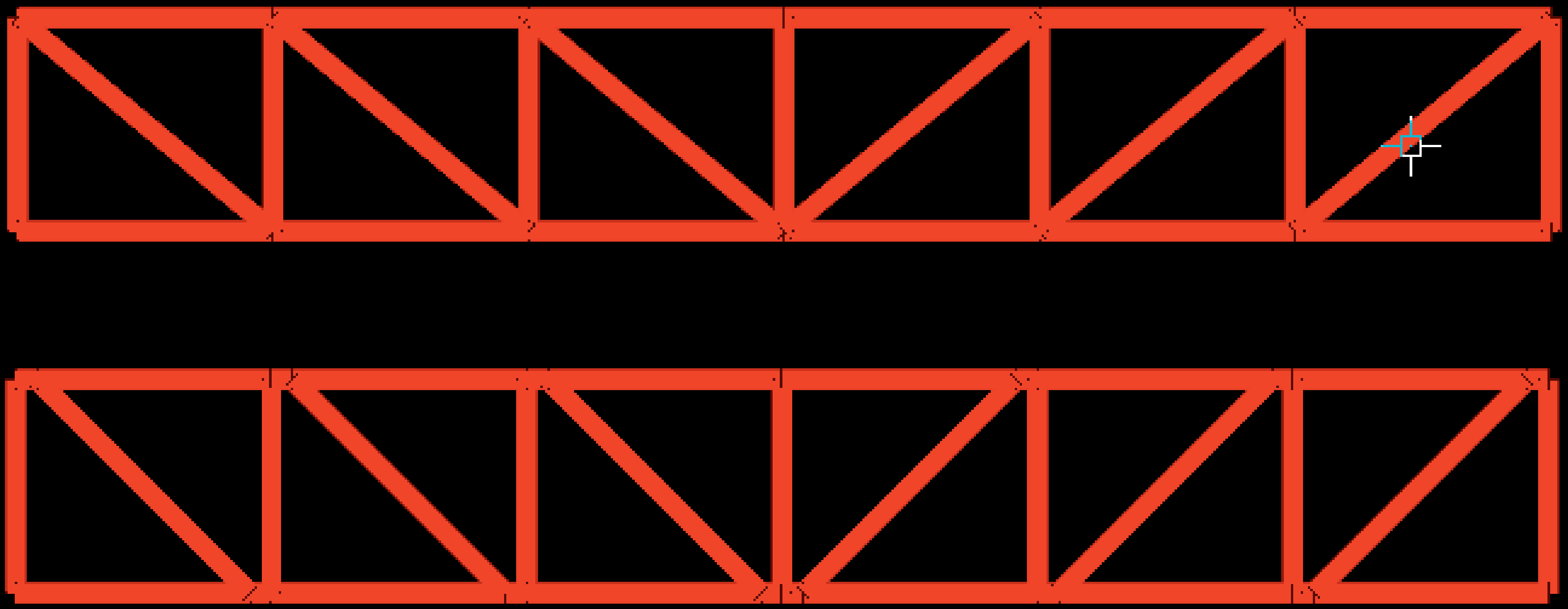
Sin embargo, se demuestra que no es necesario que una estructura cumpla estrictamente cada condición para que sea suficientemente aproximado modelizarla como articulada plana (siempre que la tolerancia no sea excesiva)

CONDICIÓN DE CERCHA

Ejes de barras no exactamente concurrentes

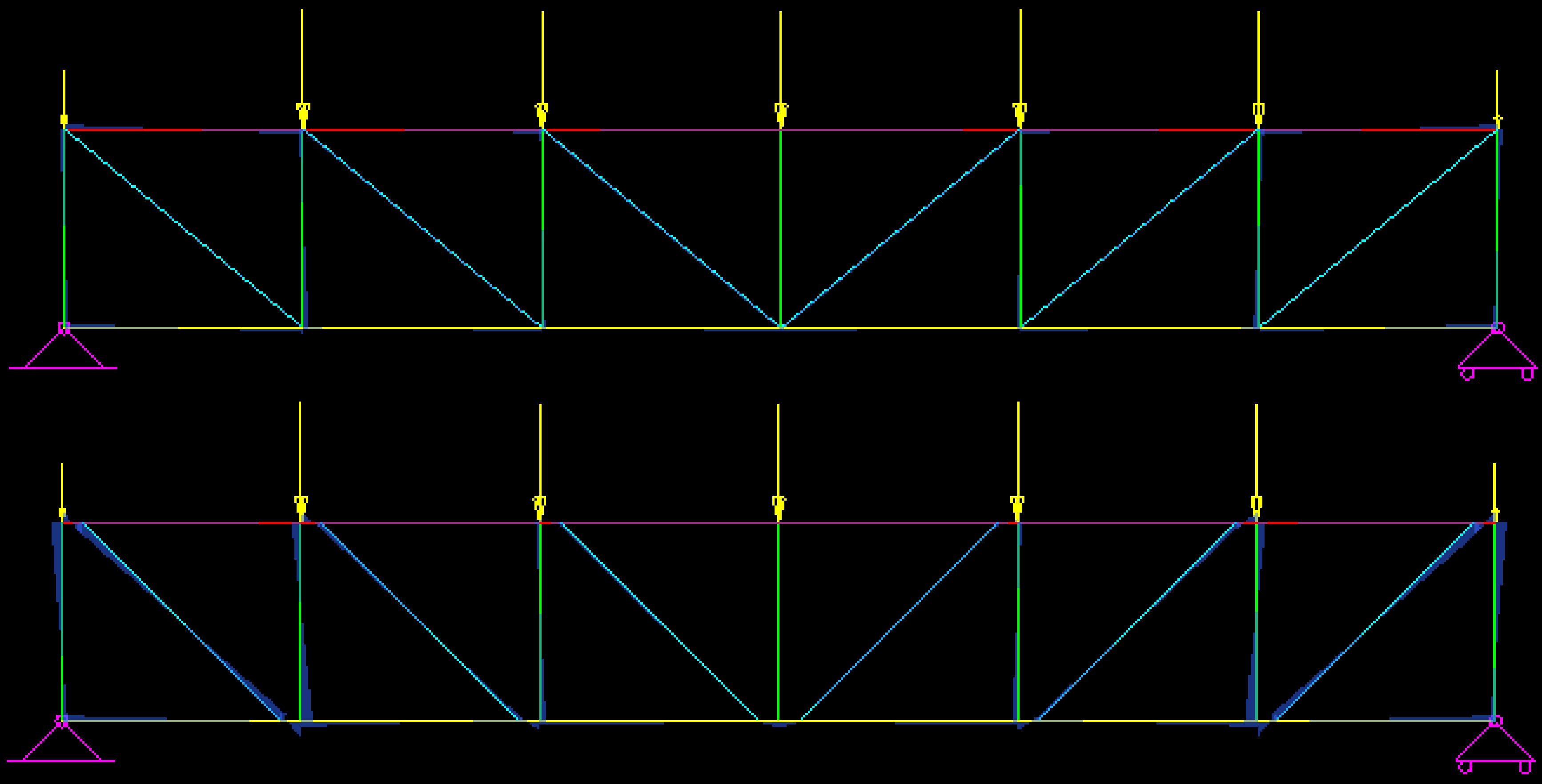
CONDICIÓN DE CERCHA

Ejes de barras no exactamente concurrentes



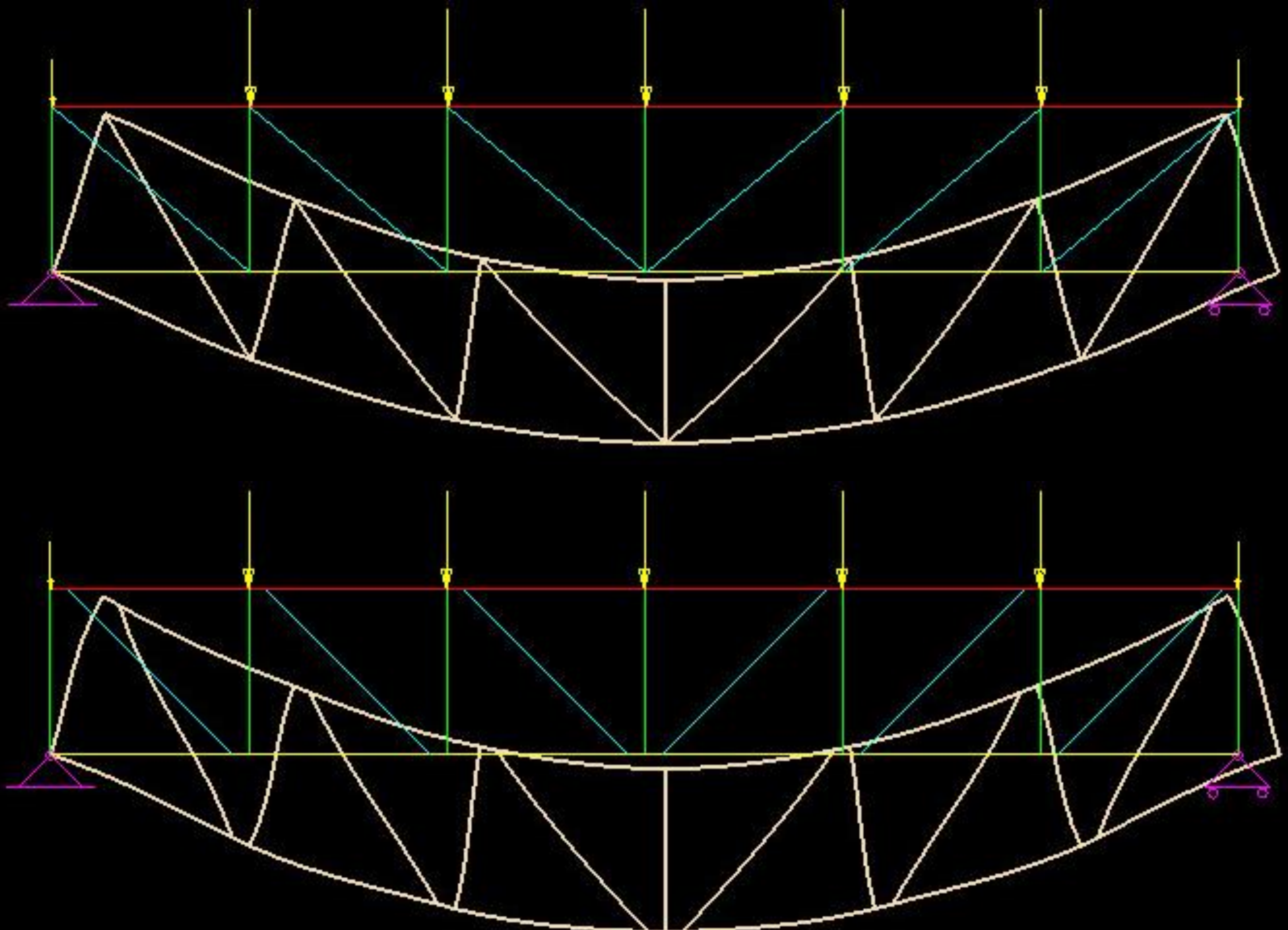
CONDICIÓN DE CERCHA

Ejes de barras no exactamente concurrentes



CONDICIÓN DE CERCHA

Ejes de barras no exactamente concurrentes

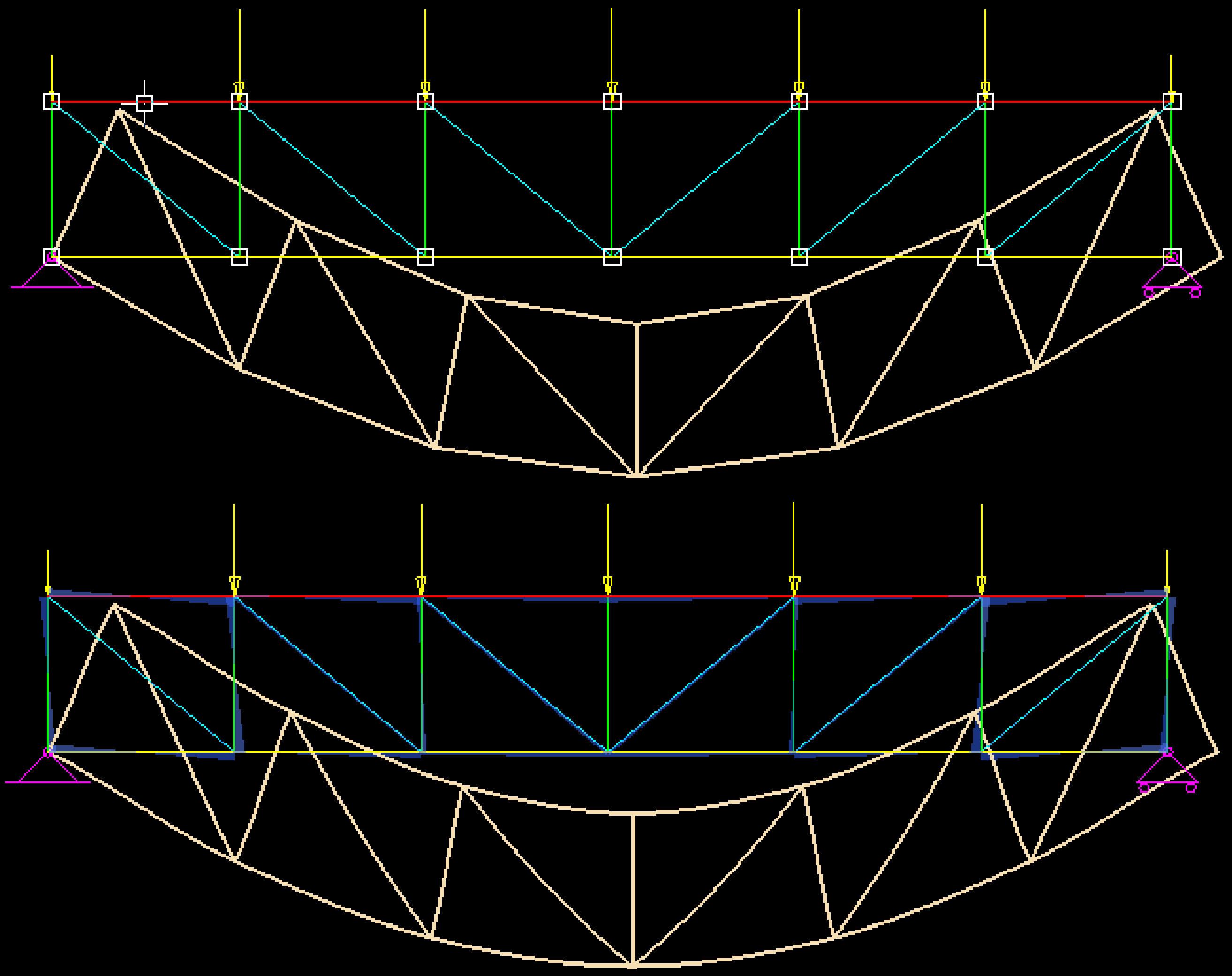


CONDICIÓN DE CERCHA

Nudos rígidos en lugar de articulados

CONDICIÓN DE CERCHA

Nudos rígidos en lugar de articulados

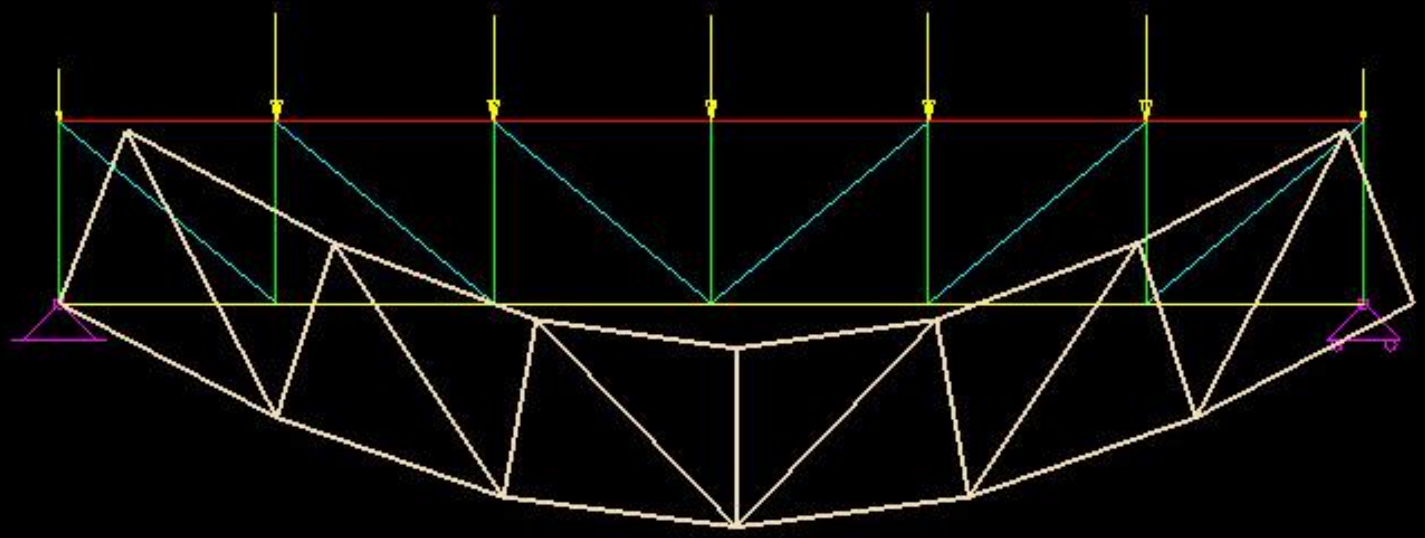


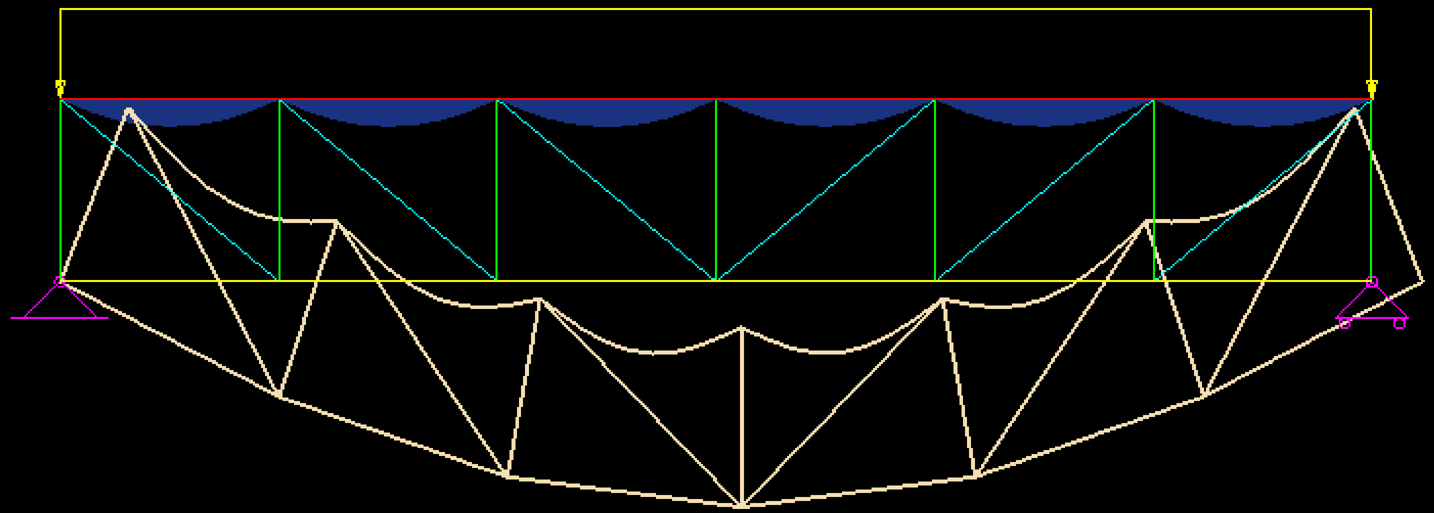
CONDICIÓN DE CERCHA

Cargas no concentradas en nudos

CONDICIÓN DE CERCHA

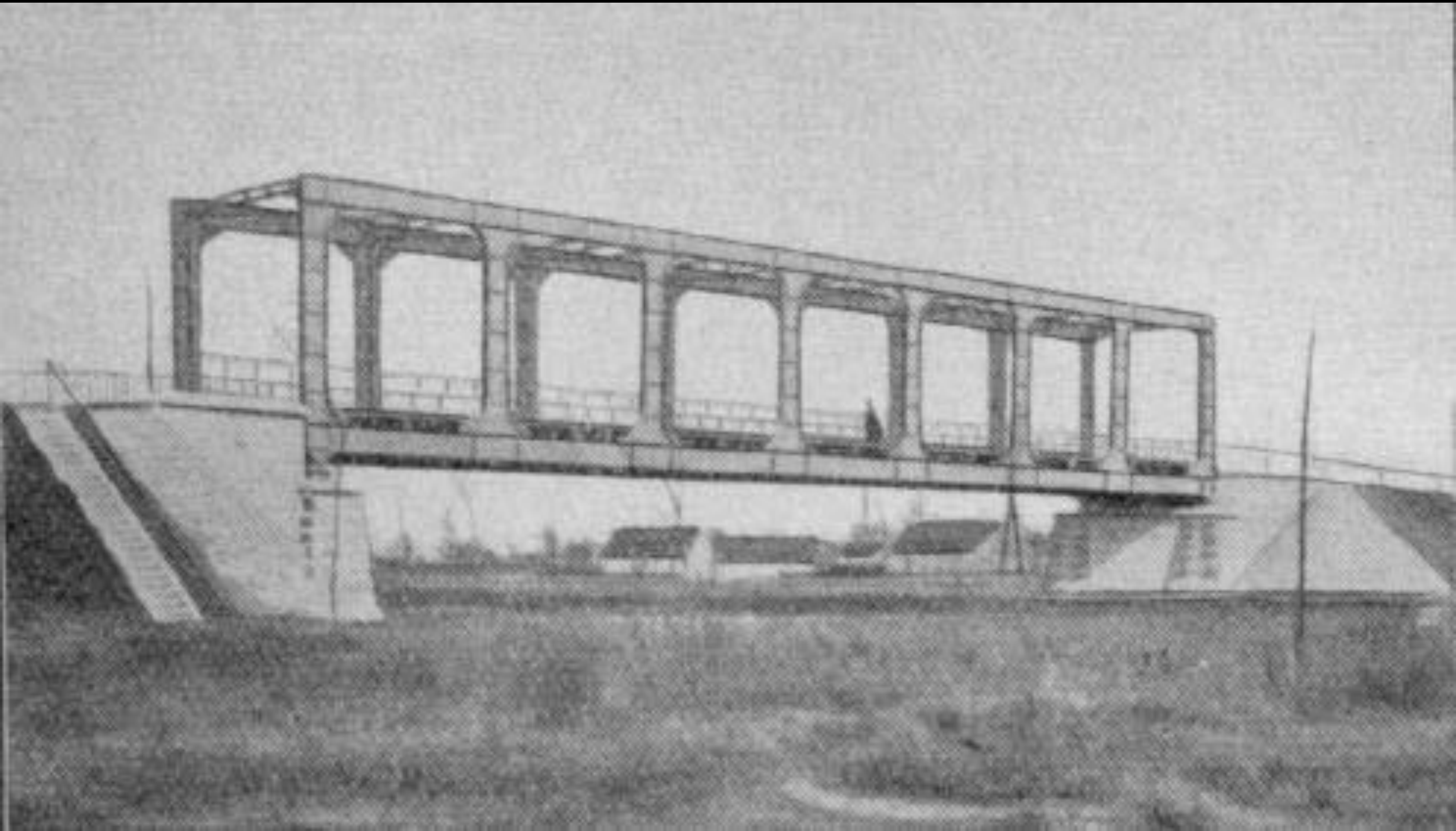
Cargas no concentradas en nudos





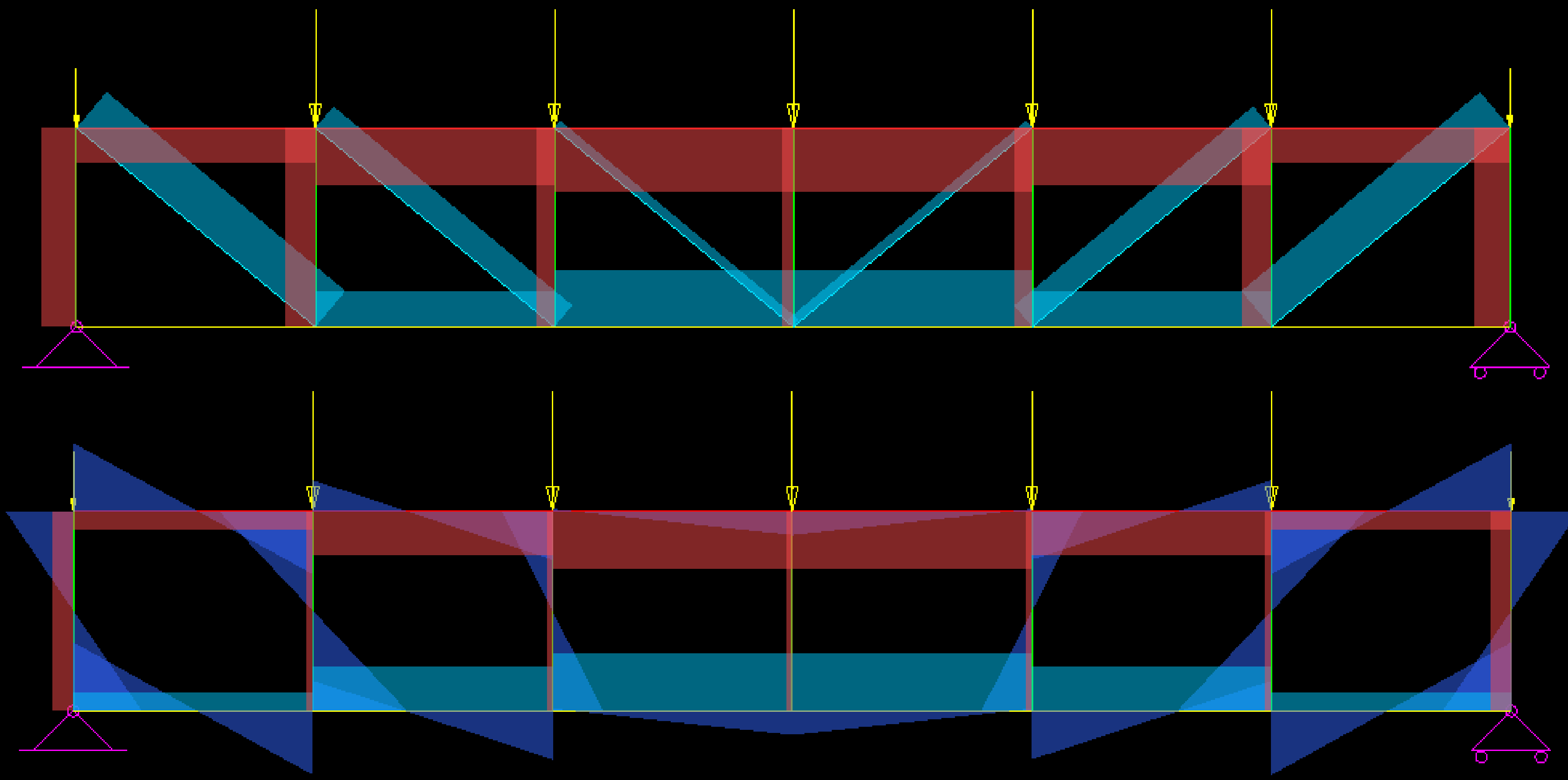
CONDICIÓN DE CERCHA

Viga <u>Vierendeel:</u> no es una cercha, pero se usa para resolver casos similares



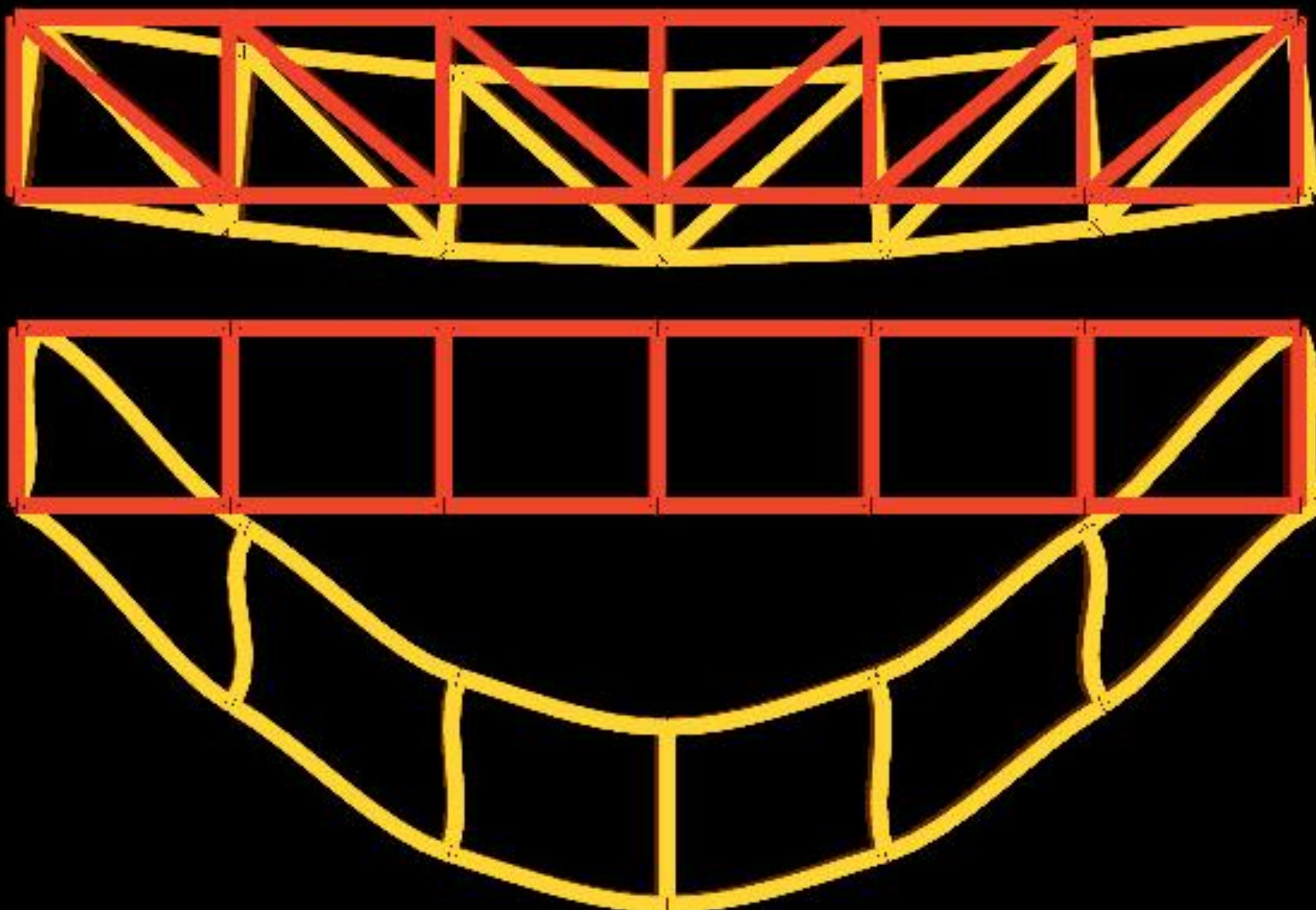
CONDICIÓN DE CERCHA

Viga Vierendeel: sustituye la rigidez de las diagonales por la rigidez a flexión de los marcos



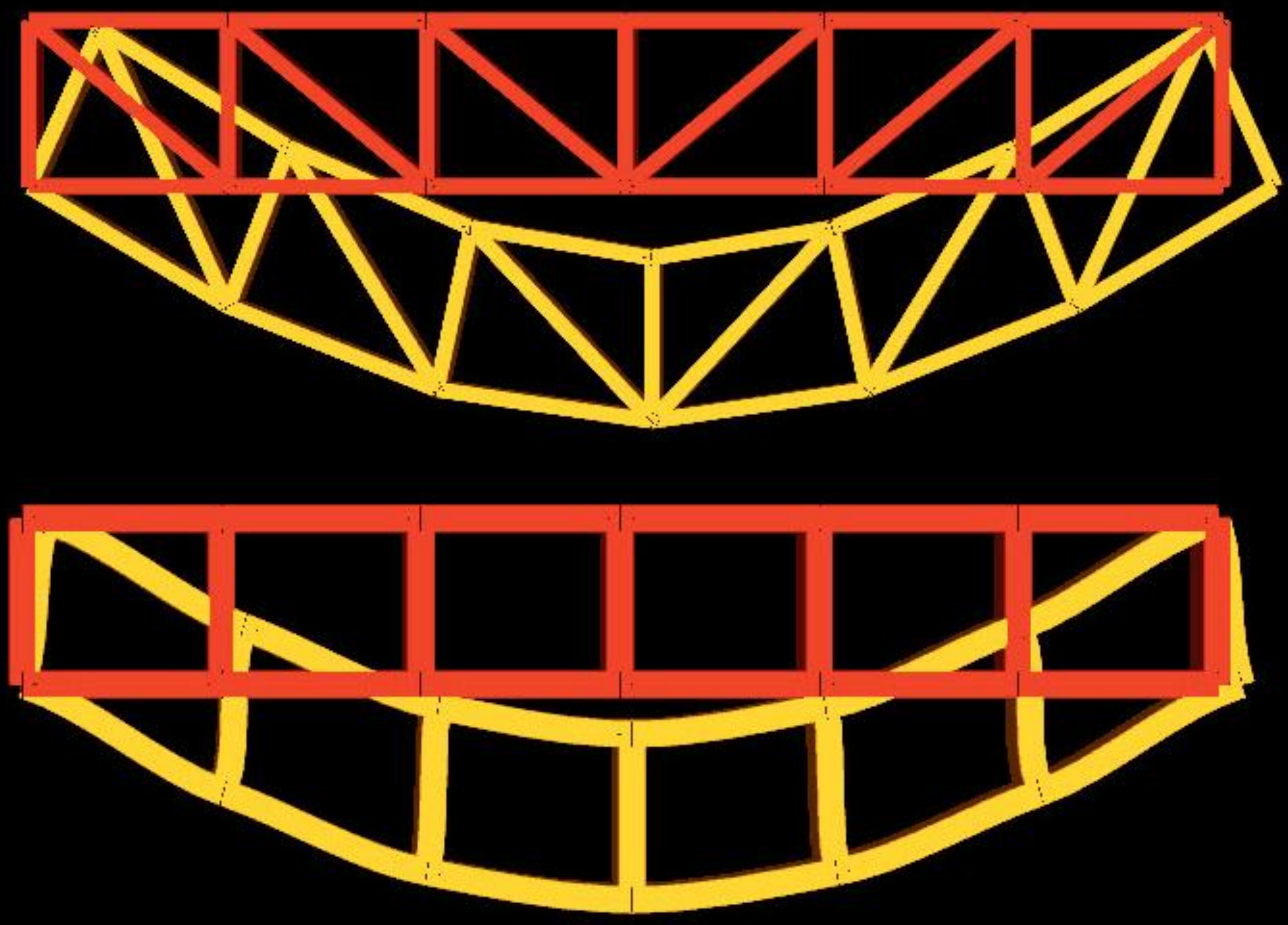
CONDICIÓN DE CERCHA

Viga Vierendeel: necesita mayores secciones para un buen comportamiento

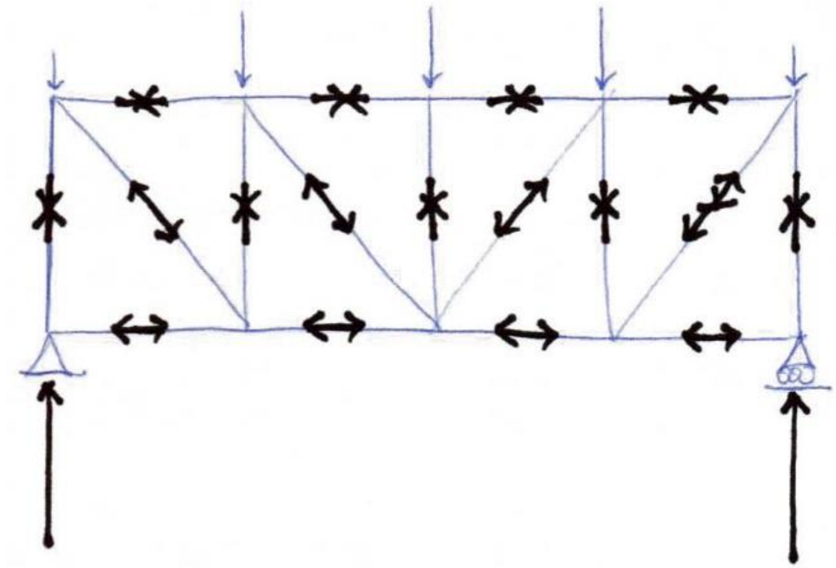


CONDICIÓN DE CERCHA

Viga <u>Vierendeel</u>: necesita mayores secciones para un buen comportamiento



ESTATICIDAD DE CERCHAS



De manera análoga al resto de estructuras, se puede evaluar el grado de hiperestaticidad de cerchas planas como:

GH = I – E
I: Incógnitas
E: Ecuaciones

En el caso particular de las cerchas, dado que los nudos son articulados, si se plantea el equilibrio de cada nudo, se dispone de dos ecuaciones por cada nudo ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$) y las incógnitas que aparecen son los axiles de las barras y además –solo en los nudos correspondientes a los vínculos con el exterior— las reacciones de la estructura. Por tanto:

Incógnitas (I) = barras (b) + reacciones (r)
Ecuaciones (E) = 2·nudos (n)

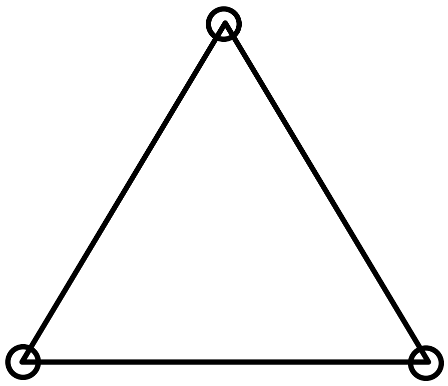
GH = I – E = b + r – 2n

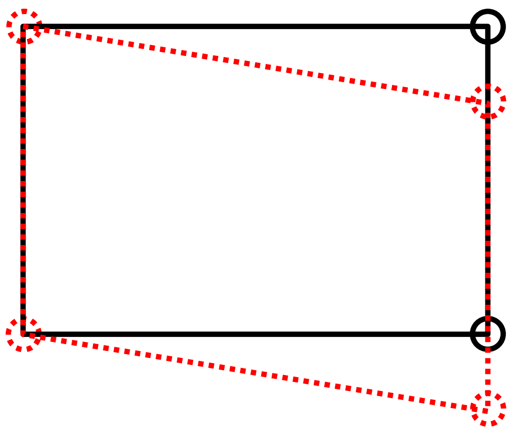
ESTATICIDAD DE CERCHAS

Sin embargo, es muy útil la obtención del grado de hiperestaticidad como suma de un grado de hiperestaticidad interno (GHI) y otro externo (GHE).

Grado de hiperestaticidad interno (GHI)
Una estructura de nudos articulados es isostática internamente si es estable, es decir, si es indeformable cuando no actúan cargas, y por tanto se comporta como un sólido rígido que sólo puede desplazarse o girar.

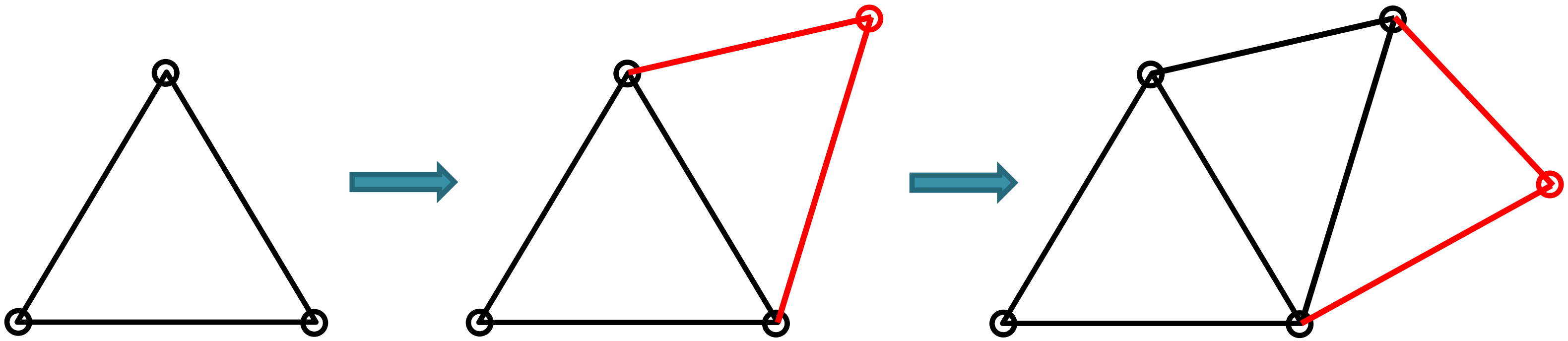
Por definición, un triángulo es estable, mientras que un cuadrilátero no lo es.





ESTATICIDAD DE CERCHAS

Cualquier estructura procedente de construir triángulos adosados a uno dado es estable. En cada paso, se añade un nudo (n') por cada dos barras (b'):



$$b' = 2n'$$

Por tanto, en cada paso el número de barras total (b) es igual a las 3 originales más las barras añadidas (b'), y análogo para los nudos (n) con respecto a los añadidos (n'):

$$b = 3 + b' \rightarrow b' = b - 3$$

$$n = 3 + n' \rightarrow n' = n - 3$$

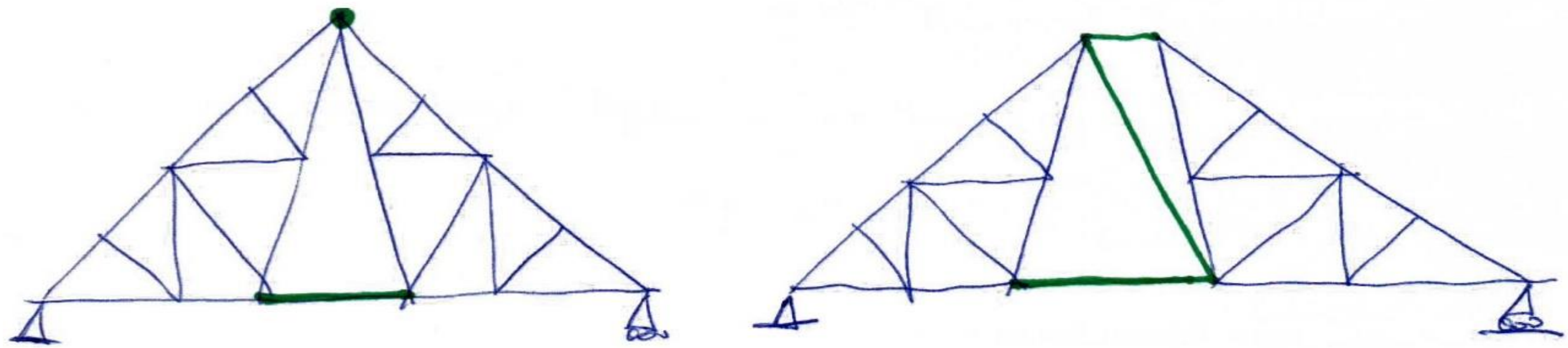
Sustituyendo los valores de b' y n' en la ecuación b' = 2n' y operando, queda:

$$\mathbf{b = 2n - 3}$$

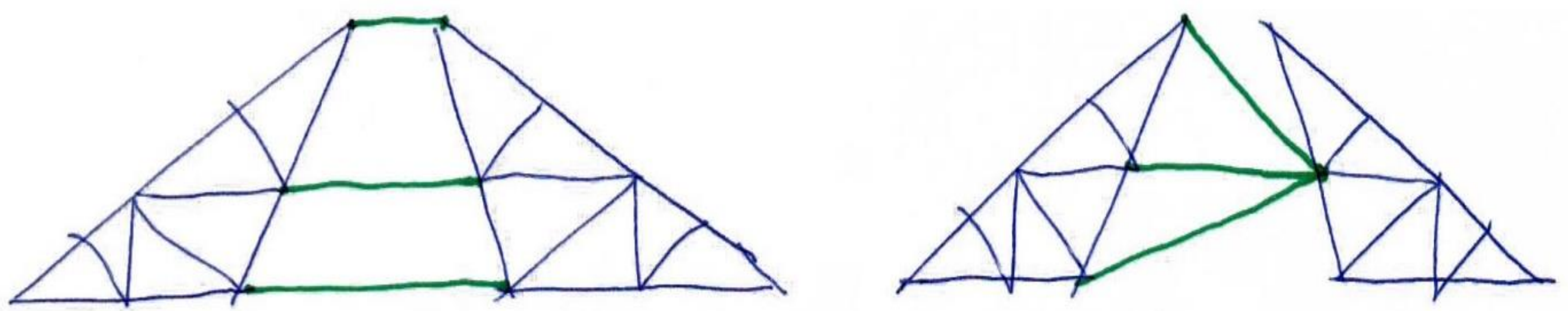
Que es la condición necesaria pero no suficiente de **isostatismo interno**

ESTATICIDAD DE CERCHAS

Las cerchas compuestas se obtienen por yuxtaposición de cerchas simples (conjuntos de triángulos adyacentes), mediante la adición de una barra (si se comparte un nudo) o de tres barras:



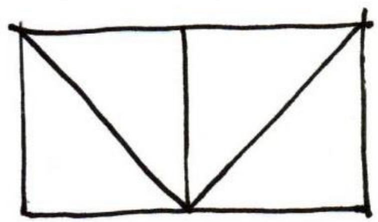
Sin embargo, si las tres barras son concurrentes o paralelas, el resultado es un mecanismo interno:



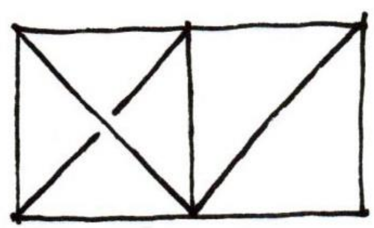
ESTATICIDAD DE CERCHAS

De esta manera, se obtiene la expresión del grado de hiperestaticidad interno (GHI) como el exceso de barras respecto de la condición de isostatismo interno:

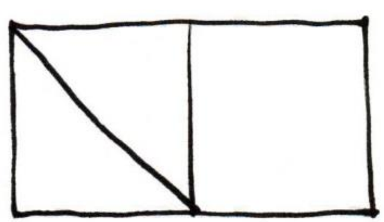
GHI = b – 2n + 3



GHI = 9 – 2·6 + 3 = 0
Isostática interna



GHI = 10 – 2·6 + 3 = +1
Hiperestática interna +1



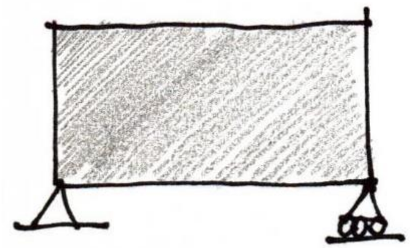
GHI = 8 – 2·6 + 3 = -1
Hipostática interna -1

Por tanto: partiendo de una estructura isostática internamente, añadir o quitar barras añade o quita tantos grados de hiperestaticidad como barras.

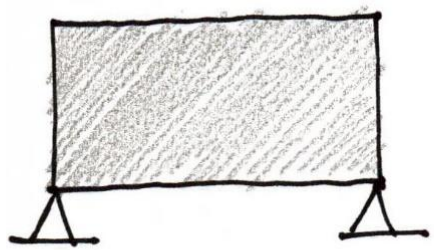
ESTATICIDAD DE CERCHAS

Grado de hiperestaticidad externo (GHE)

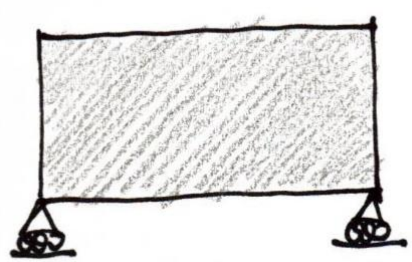
Al igual que el resto de estructuras planas, el isostatismo externo se cumple cuando el número de reacciones es 3; esta condición también es necesaria pero no suficiente. Por tanto, el grado de hiperestaticidad externo (GHE) es igual al número de reacciones en exceso a partir de 3.



GHE = 3 – 3 = 0
Isostática externa



GHI = 4 – 3 = +1
Hiperestática externa +1

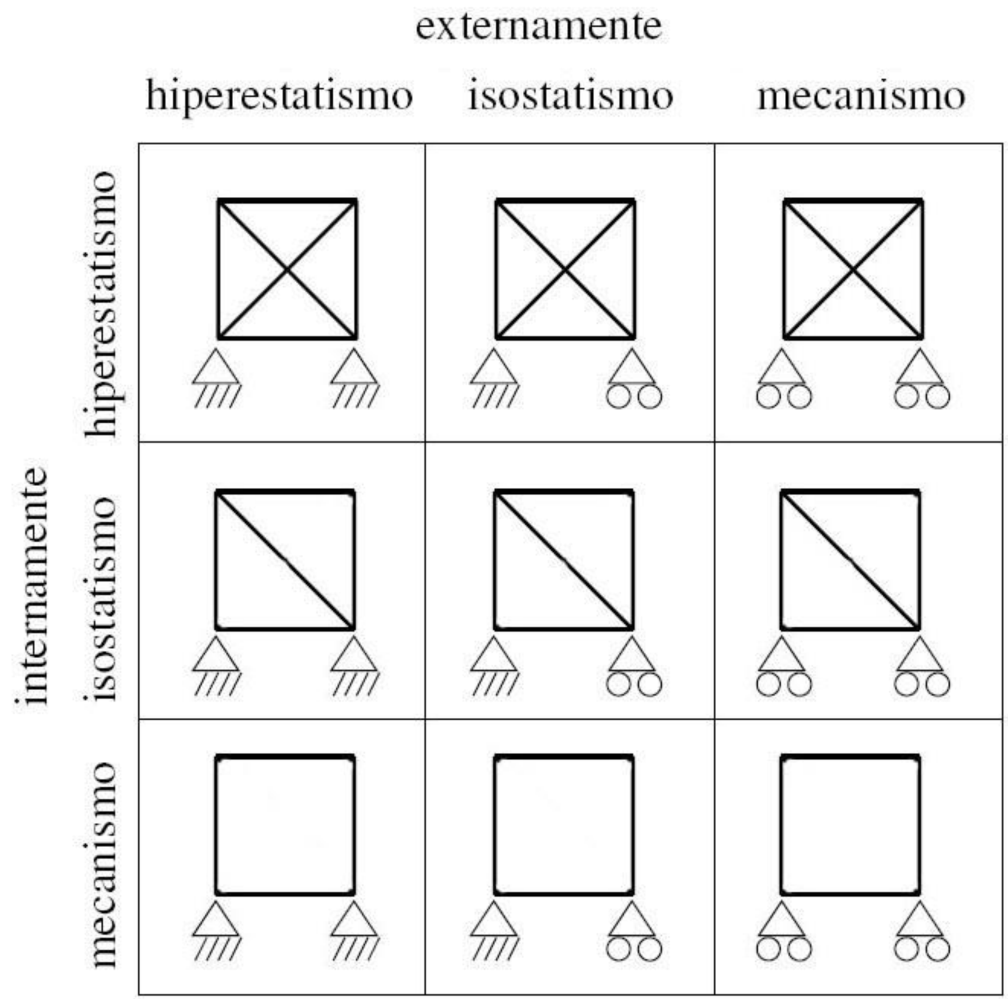


GHE = 2 – 3 = -1
Hipostática externa -1

ESTATICIDAD DE CERCHAS

Grado de hiperestaticidad total (GHT)
Se obtiene como suma de los grados interno y externo:

GHT = GHI + GHE

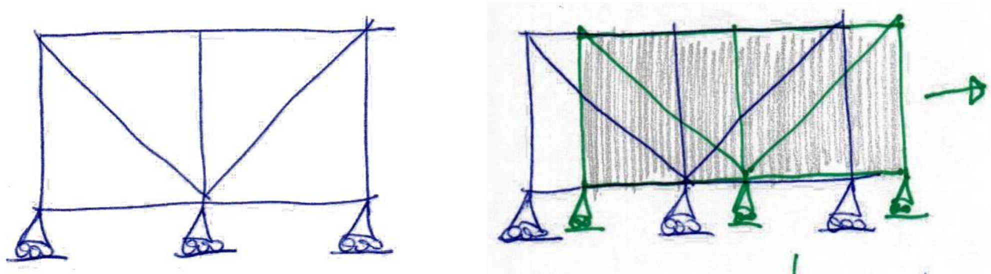


En cerchas "bien clasificadas" (aquéllas donde las fórmulas "funcionan"), el exceso o carencia de barras se puede compensar con exceso o carencia de reacciones:

ESTATICIDAD DE CERCHAS

Cerchas “mal clasificadas”

Para estudiar si una cercha algebraicamente isostática o hiperestática es en realidad un mecanismo, se debe descomponer en sus partes estables o rígidas y estudiar si es posible un movimiento compatible de dichas partes

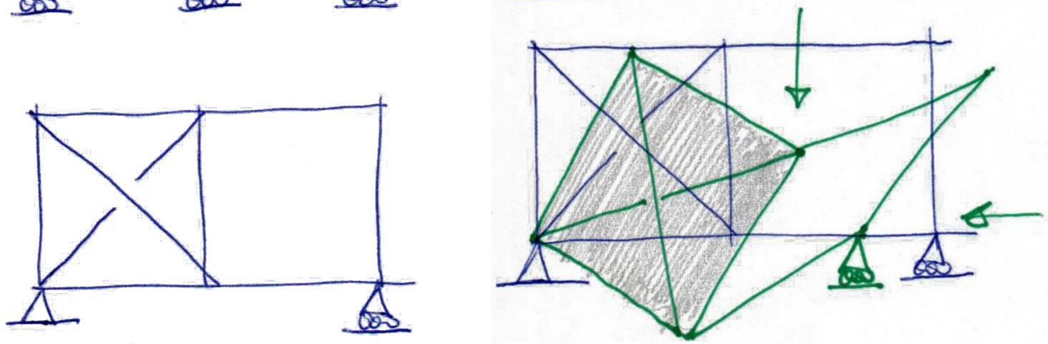


$GHE = 3 - 3 = 0$

$GHI = 9 - 2\cdot 6 + 3 = 0$

$GHT = 0 + 0 = 0$

(Mecanismo)

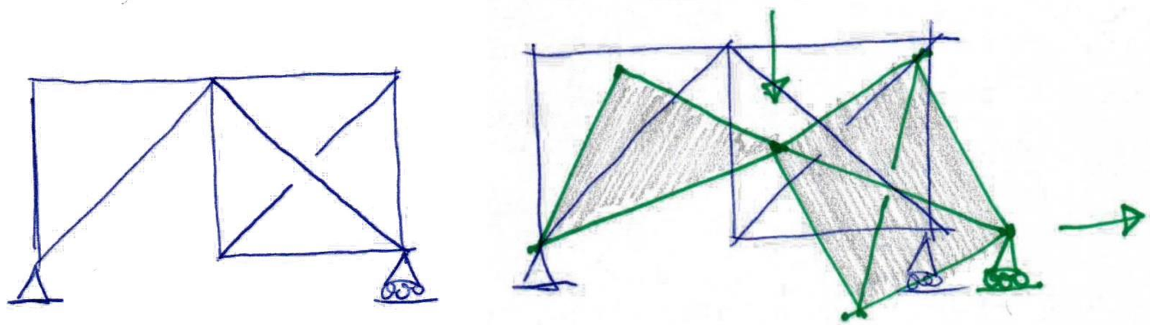


$GHE = 3 - 3 = 0$

$GHI = 9 - 2\cdot 6 + 3 = 0$

$GHT = 0 + 0 = 0$

(Mecanismo)



$GHE = 3 - 3 = 0$

$GHI = 9 - 2\cdot 6 + 3 = 0$

$GHT = 0 + 0 = 0$

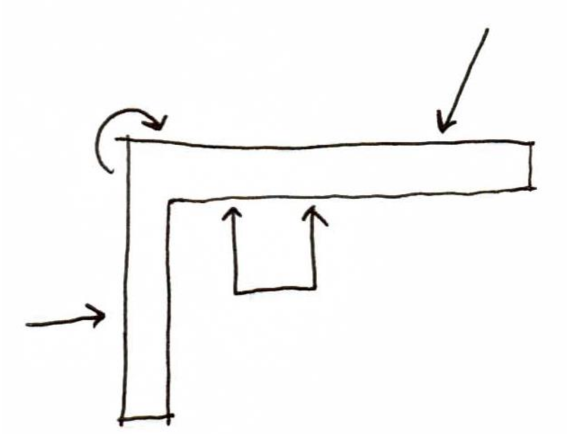
(Mecanismo)

PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES (PTV)

El cálculo de flechas en cerchas se puede obtener en algunos casos aplicando el método de la Carga Unidad, que se deriva del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV), uno de los principios básicos de la mecánica racional.

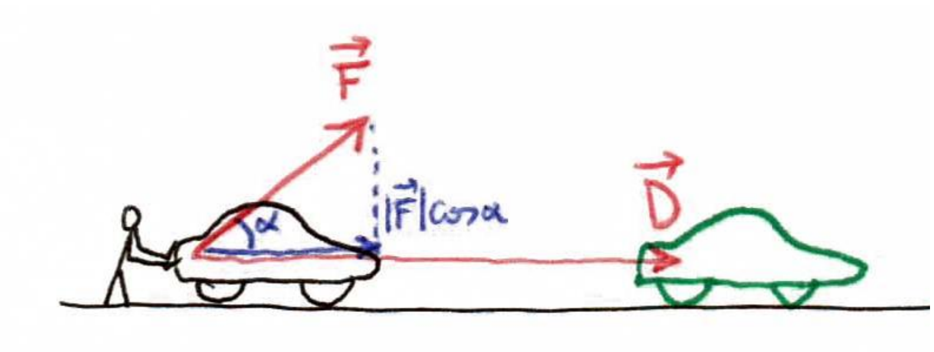
TRABAJO Y ENERGÍA

En la época newtoniana, expresar el equilibrio en forma vectorial se convierte en una dificultad.



$$\text{Equilibrio} \rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \end{cases}$$

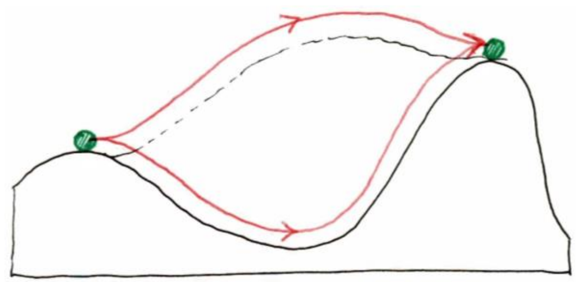
La condición **escalar** (valor simple) del **trabajo y la energía** lo convierte en una alternativa atractiva si fuera posible utilizarlos para expresar el equilibrio.

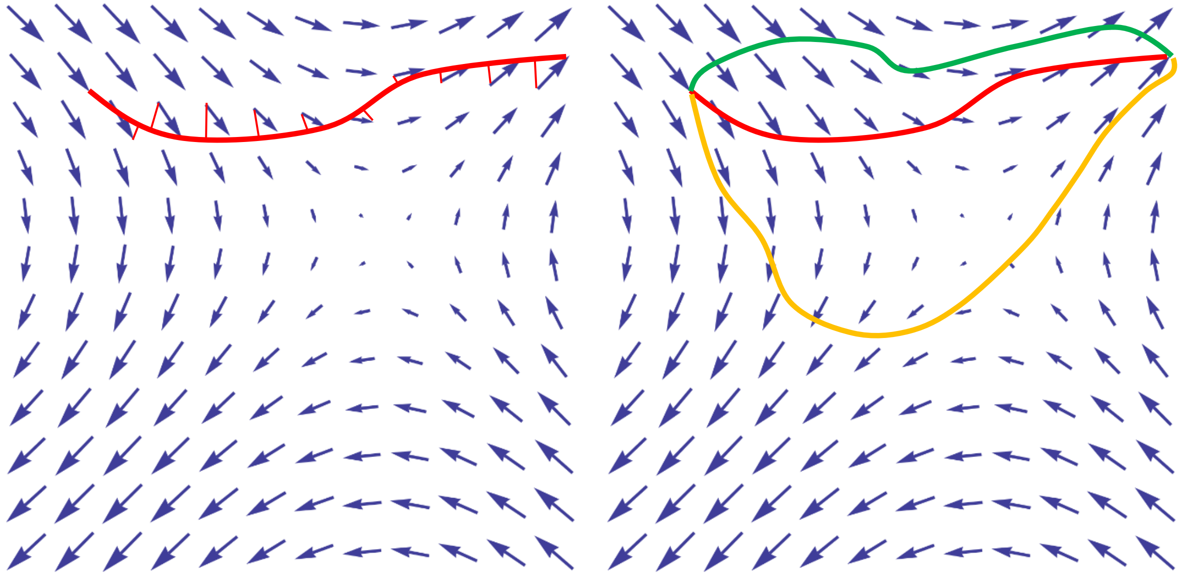


$$W = \vec{F} \cdot \vec{D} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{D}\right| \cdot \cos\alpha$$

TRABAJO Y ENERGÍA

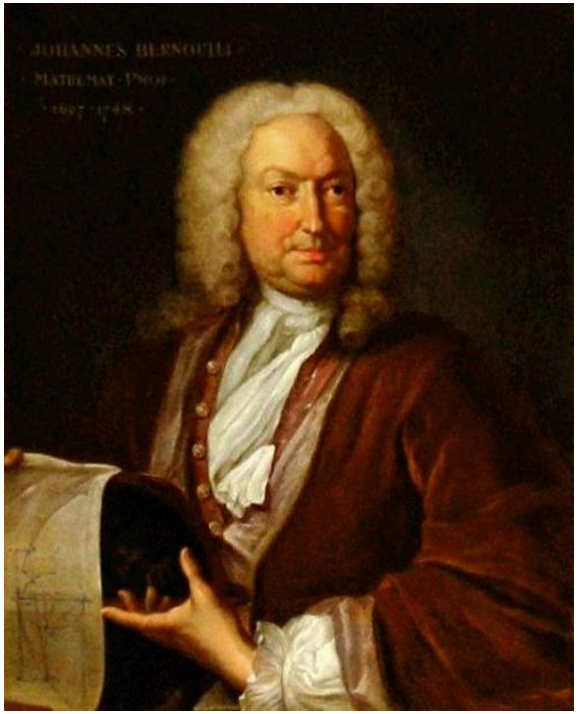
Abordar los problemas en términos energéticos tiene la ventaja de poder usar los Principios de Conservación Energética. En ambos ejemplos, la energía necesaria para desplazarse dentro de un campo gravitatorio o de cualquier otro tipo es independientemente de la trayectoria seguida.





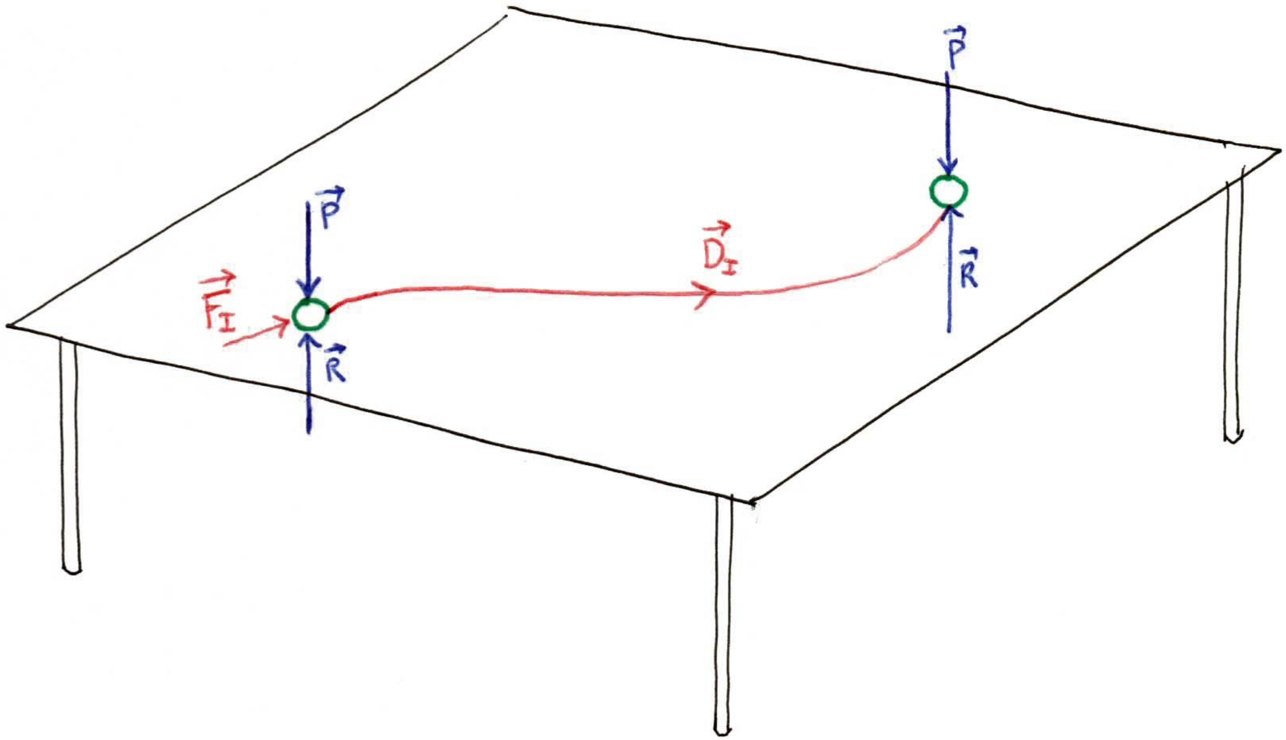
PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: SÓLIDO RÍGIDO

Sistematizado por Johann Bernoulli en el s. XVIII



PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: SÓLIDO RÍGIDO

Se tiene un sólido en equilibrio por fuerzas reales P y R.
Un "dios externo", con su fuerza imaginaria F_I, es capaz de mover el sólido hasta otra posición por una trayectoria D_I.

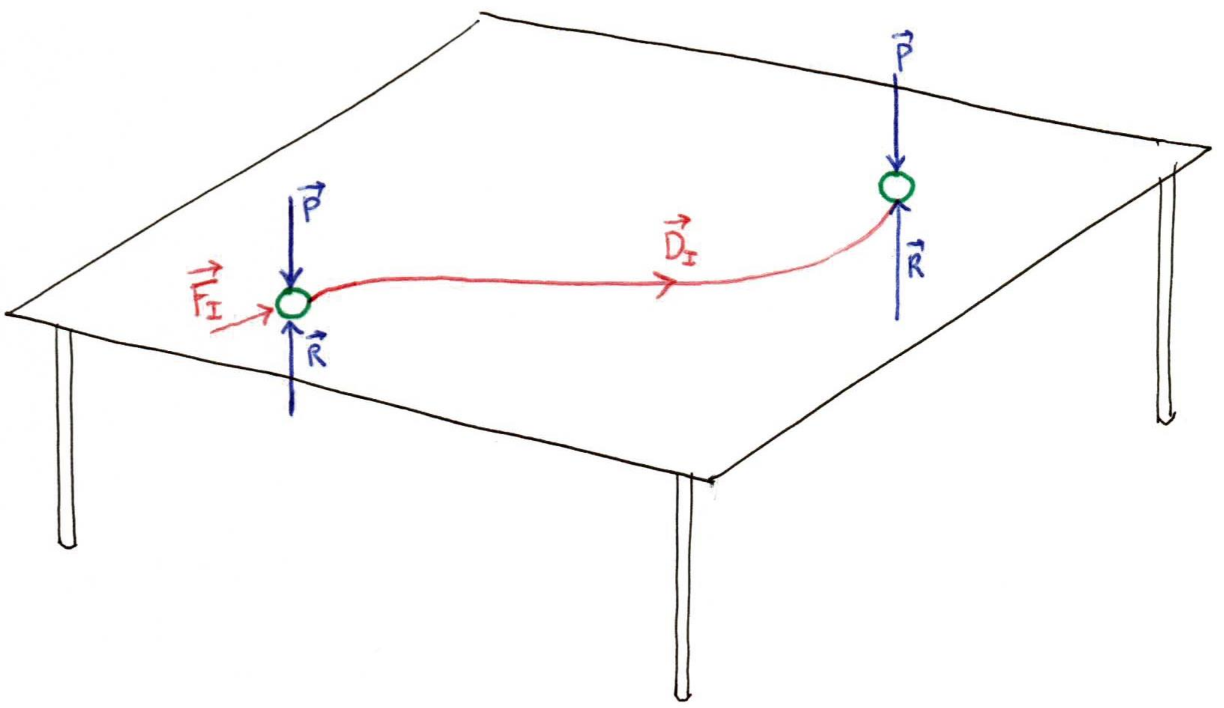


PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: SÓLIDO RÍGIDO

Las fuerzas reales no hacen trabajo puesto que su resultante es nula, por estar en equilibrio:

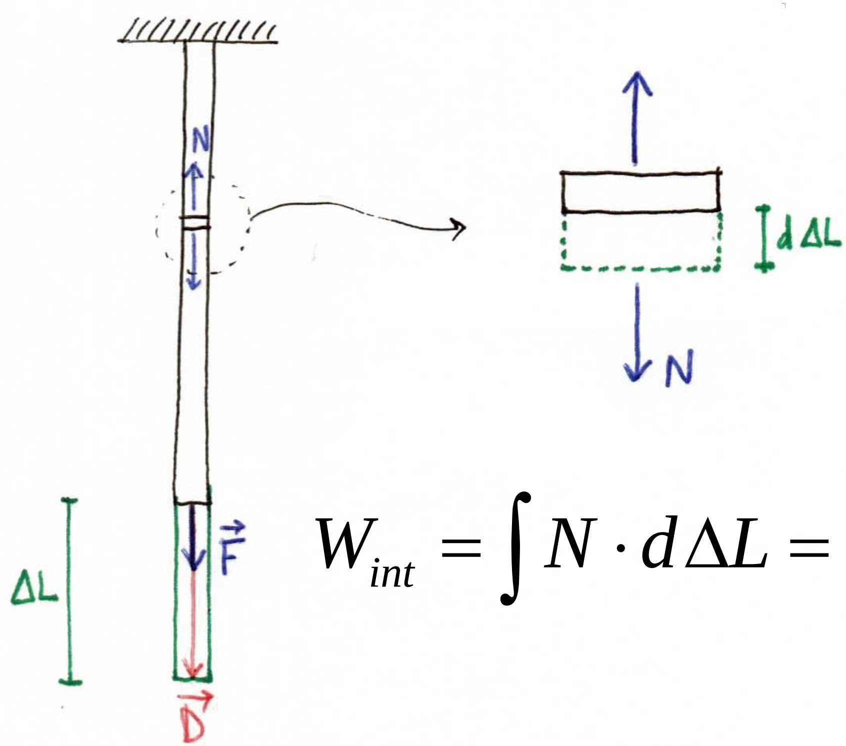
$$W = \sum\left(\overrightarrow{F_R} \cdot \overrightarrow{D_I}\right) = \underbrace{\sum \overrightarrow{F_R}}_{0} \cdot \overrightarrow{D_I} = 0$$

PTV del sólido rígido: *"Si un cuerpo en equilibrio se desplaza por causas ajenas (desplazamiento virtual), las fuerzas reales no hacen trabajo"*



TRABAJO EN SÓLIDOS DEFORMABLES

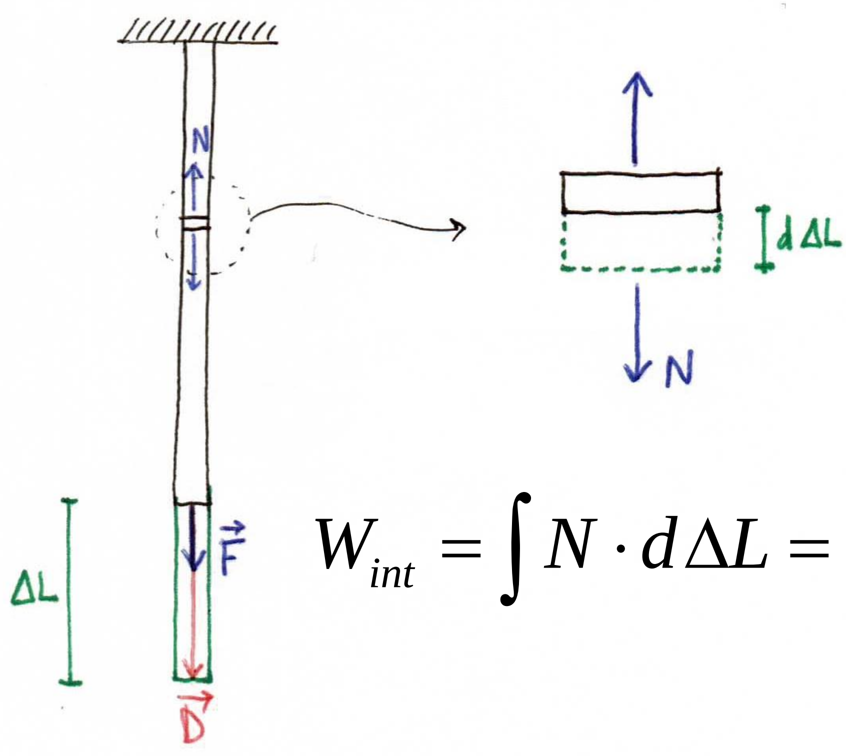
En un sólido deformable, la ley de conservación de la energía se traduce en que el trabajo externo (W_{ext}) sobre la pieza completa realizado por una fuerza F para desplazar instantáneamente ("de golpe") uno de sus puntos una magnitud D se "acumula" dentro del sólido en forma de energía o trabajo interno de deformación (W_{int}), entendido como la suma de trabajos que hace, en cada rebanada, el axil N para cada pequeño alargamiento de la rebanada dΔL, que acumulados generan el alargamiento total ΔL=D



$$W_{int} = \int N \cdot d\Delta L = N \int d\Delta L = N \cdot \Delta L = F \cdot D = W_{ext}$$

TRABAJO EN SÓLIDOS DEFORMABLES

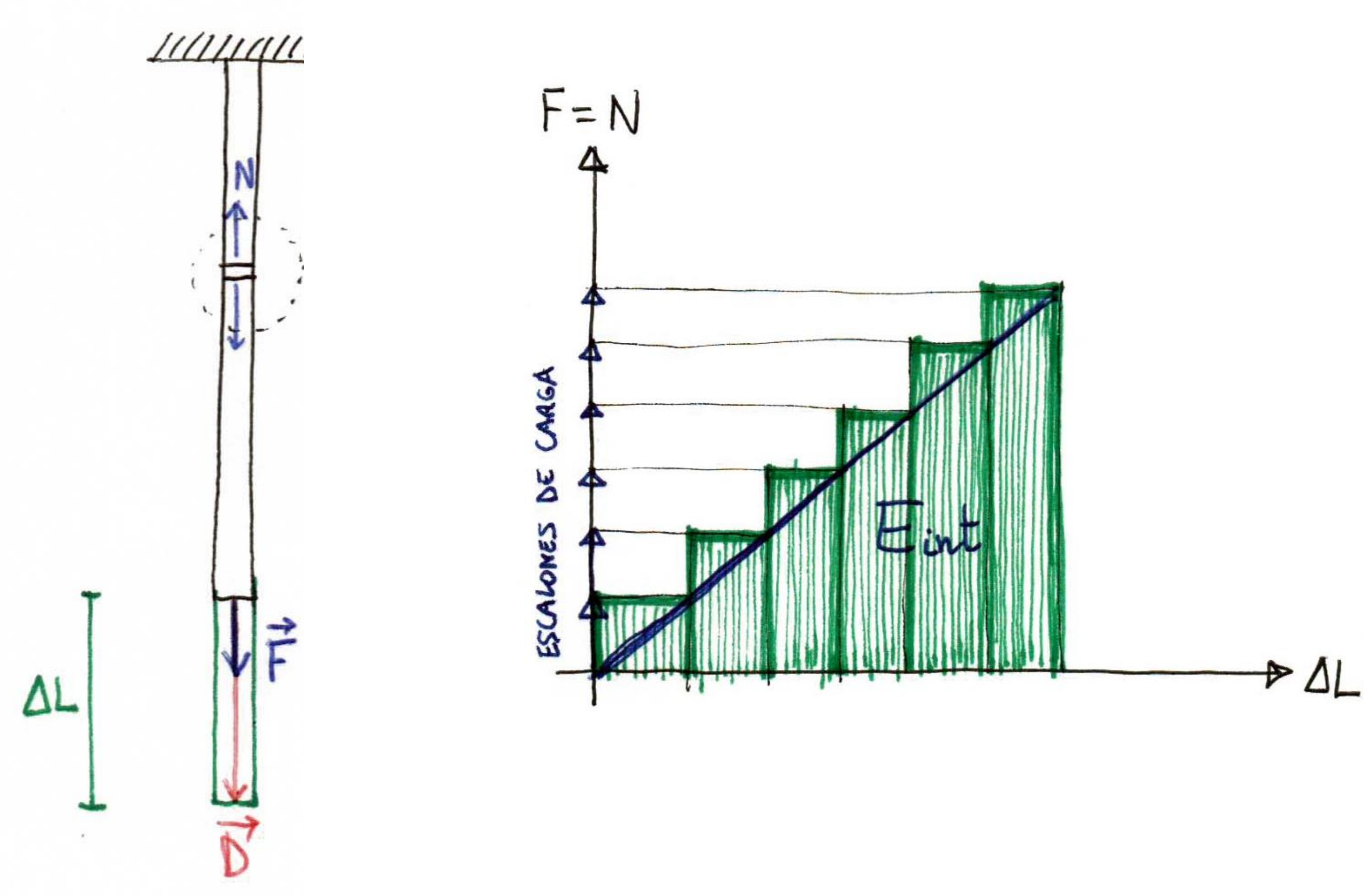
En un sólido deformable, la ley de conservación de la energía se traduce en que el trabajo externo (W_{ext}) sobre la <u>pieza completa</u> realizado por una fuerza F para desplazar instantáneamente ("de golpe") uno de sus puntos una magnitud D se "acumula" dentro del sólido en forma de energía o trabajo interno de deformación (W_{int}), entendido como la suma de trabajos que hace, en cada <u>rebanada</u>, el axil N para cada pequeño alargamiento de la rebanada dΔL, que acumulados generan el alargamiento total ΔL=D



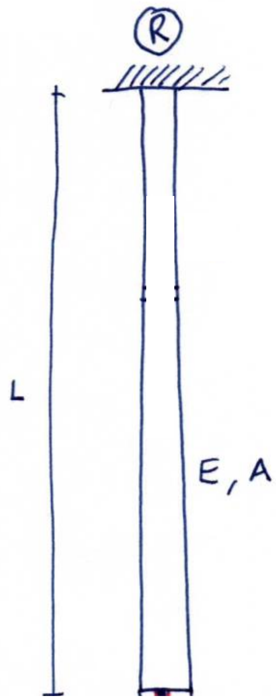
$$W_{int} = \int N \cdot d\Delta L = N \int d\Delta L = N \cdot \Delta L = F \cdot D = W_{ext}$$

TRABAJO EN SÓLIDOS DEFORMABLES

Si la carga se aplica lentamente en vez de instantáneamente, la energía de deformación es la mitad:

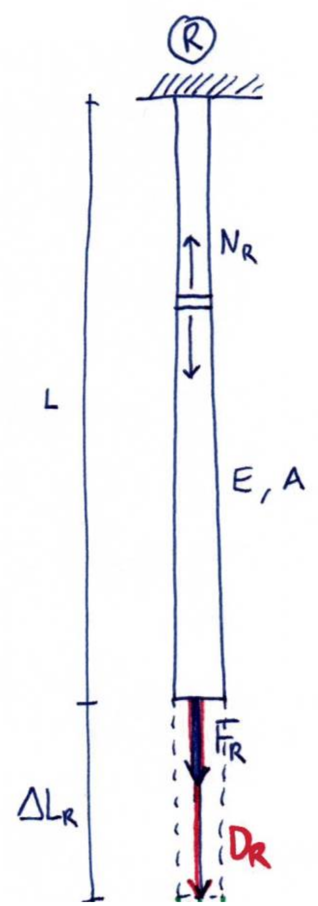


PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: BARRAS A AXIL



Se tiene una barra real (R) de longitud L y con propiedades E, A.

PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: BARRAS A AXIL



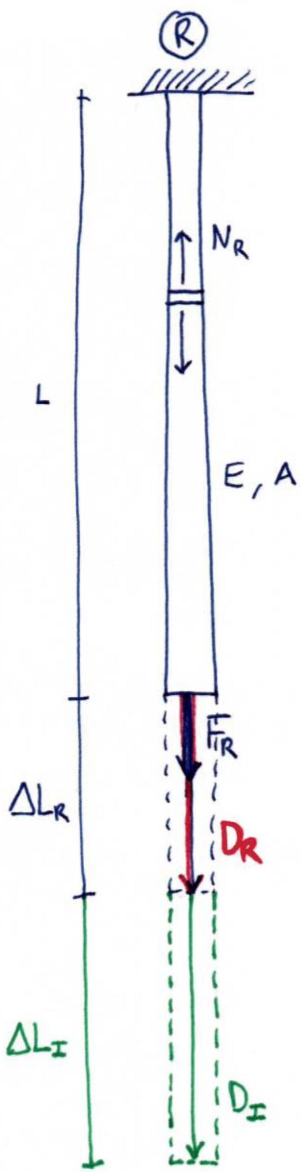
Se tiene una barra real (R) de longitud L y con propiedades E, A conocidas

Se le aplica una fuerza real conocida F_R sobre su extremo inferior, que se desplaza una magnitud D_R igual al alargamiento ΔL_R, ambos reales.

En todas las secciones de la barra se genera un axil real N_R.

Se desea calcular D_R (incógnita).

PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: BARRAS A AXIL



Se tiene una barra real (R) de longitud L y con propiedades E, A conocidas

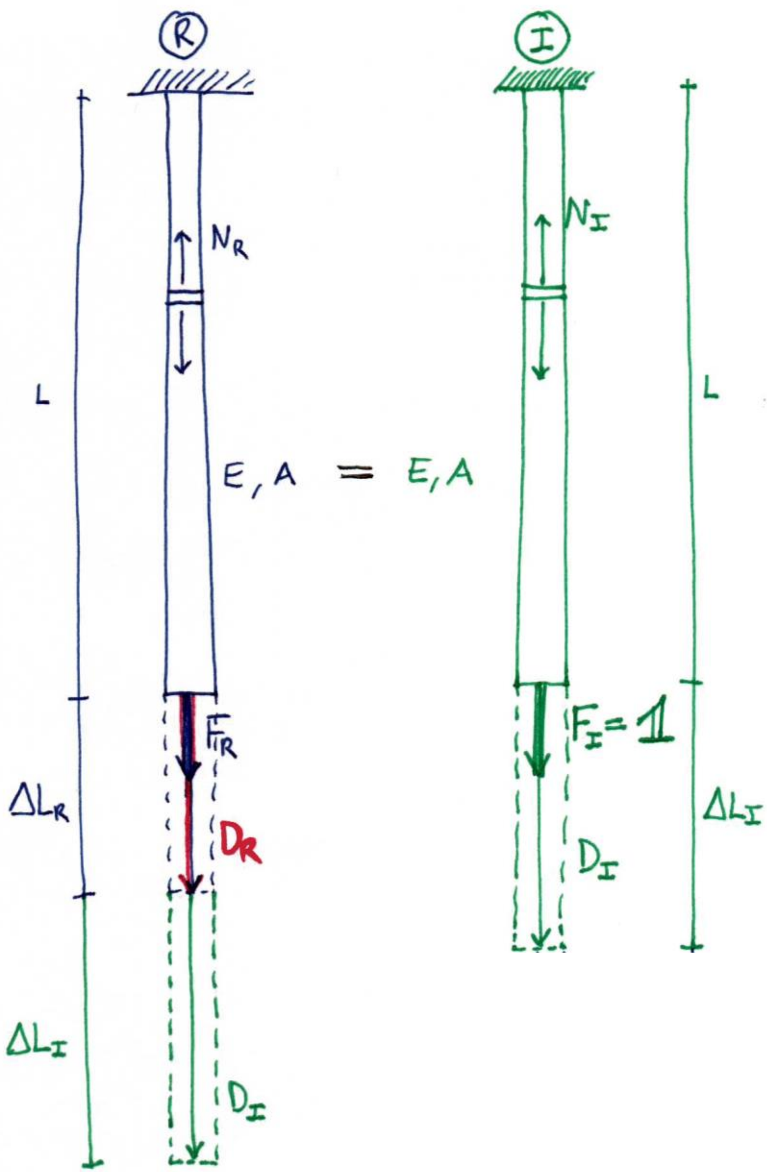
Se le aplica una fuerza real conocida F_R sobre su extremo inferior, que se desplaza una magnitud D_R igual al alargamiento ΔL_R, ambos reales.

En todas las secciones de la barra se genera un axil real N_R.

Se desea calcular D_R (incógnita).

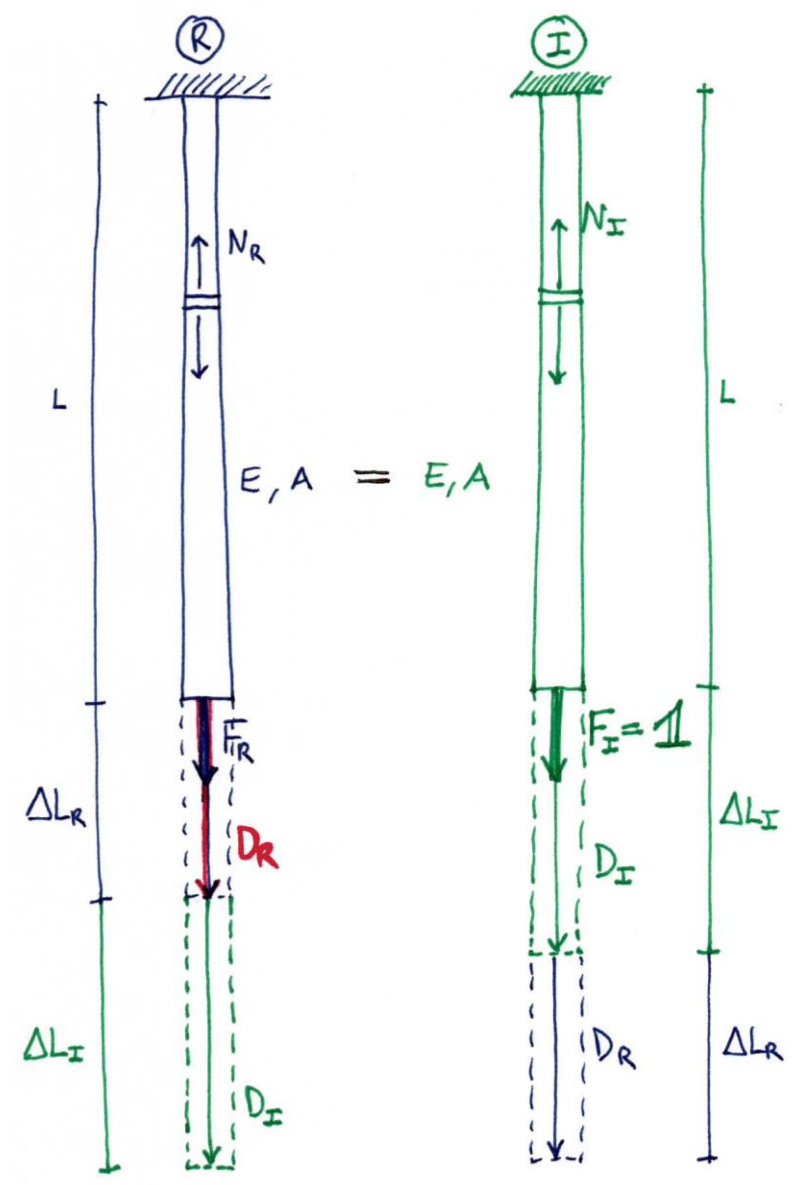
Sobre el extremo inferior deformado, se le puede aplicar adicionalmente un desplazamiento virtual D_I que coincide con el alargamiento virtual ΔL_R. Su valor podría ser cualquiera

PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: BARRAS A AXIL



Sin embargo, cabría pensar que el alargamiento virtual podría perfectamente corresponder, en un universo paralelo, al alargamiento de una barra imaginaria I idéntica a la real pero sometida a una fuerza (F_I) y axil (N_I) imaginarios e iguales a 1. (El símbolo 𝟙 indica que es imaginario).

PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: BARRAS A AXIL



Sin embargo, cabría pensar que el alargamiento virtual podría perfectamente corresponder, en un universo paralelo, al alargamiento de una barra imaginaria I idéntica a la real pero sometida a una fuerza (F_I) y axil (N_I) imaginarios e iguales a 1. (El símbolo 𝟙 indica que es imaginario).

Desde el propio punto de vista de este universo paralelo, todo lo que sucede allí es real (ver Paradoja de Zhuangzhi), y por tanto se le puede aplicar a su vez el movimiento D_R como desplazamiento adicional

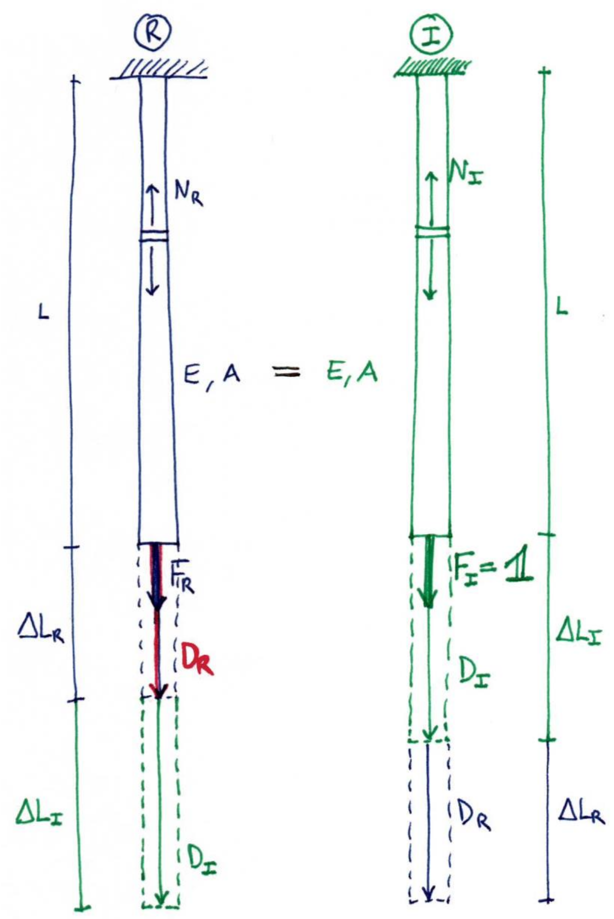
PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: BARRAS A AXIL

Si aplicamos el PTV a cada barra: trabajo instantáneo externo igual a interno, considerando fuerzas existentes sobre desplazamientos virtuales.

$$W_{ext} = W_{int} \Rightarrow$$

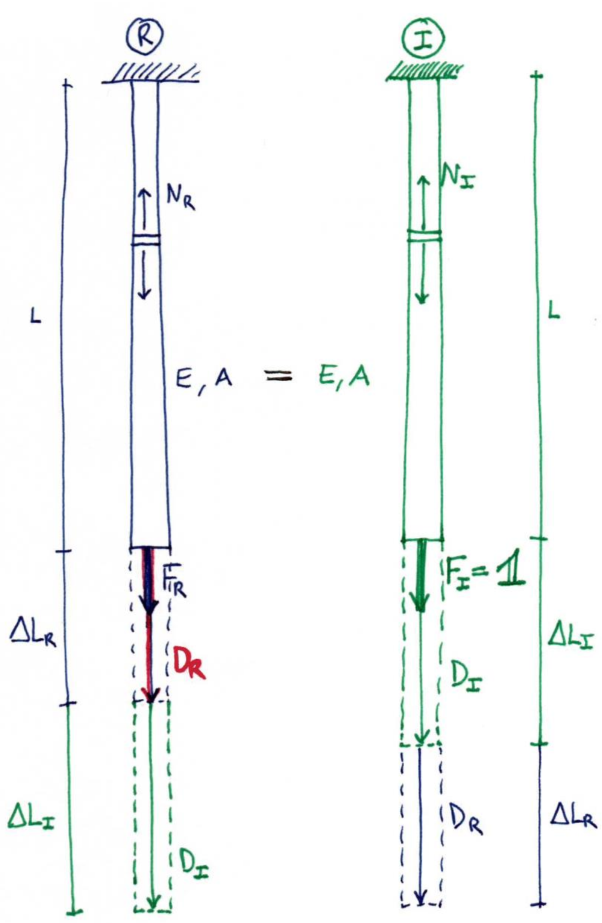
$$F_R \cdot D_I = N_R \cdot \Delta L_I$$

La barra real no nos da información sobre la incógnita, D_R



PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: BARRAS A AXIL

Si aplicamos el PTV a cada barra: trabajo instantáneo externo igual a interno, considerando fuerzas existentes sobre desplazamientos virtuales.



$$W_{ext} = W_{int} \Rightarrow \underbrace{F_I}_{1} \cdot D_R = N_I \cdot \Delta L_R$$

$$N_R = \frac{EA}{L} \Delta L_R \Rightarrow \Delta L_R = \frac{N_R L}{EA}$$

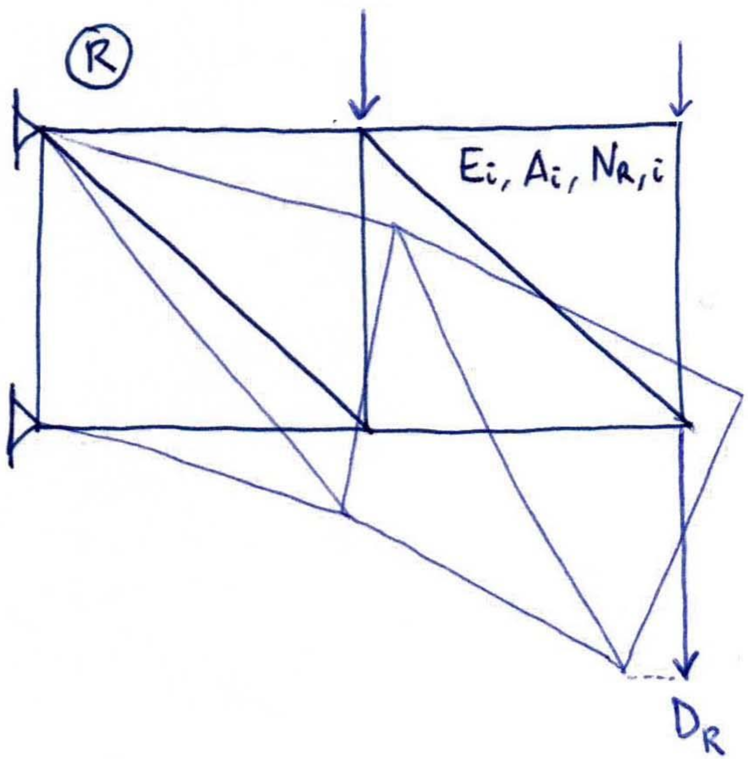
$$D_R = \frac{N_I N_R L}{EA}$$

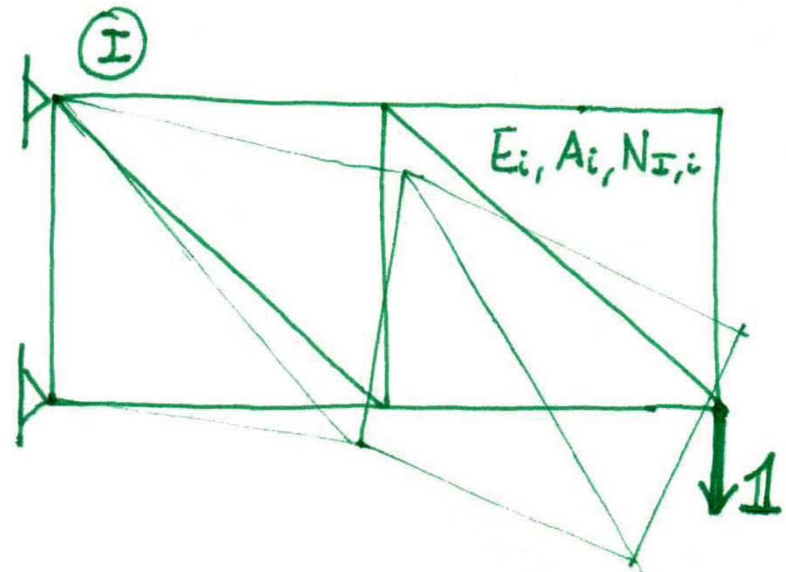
Sin embargo, la barra virtual sí nos permite despejar D_R gracias a que F_I=1.

PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: CERCHAS

Extrapolando a cerchas de varias barras, el trabajo interno sería la suma del trabajo de cada barra:

$$D_R = \sum_i \frac{N_{I,i} N_{R,i} L_i}{E_i A_i}$$





PRICIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: CERCHAS

1) Calcular los axiles reales de la cercha para cada barra i, $N_{R,i}$
2) Llevar la misma cercha a otro universo y colocarle una fuerza virtual de valor 1 (N o kN, dependiendo del resto de unidades) en el punto donde se quiere calcular el desplazamiento real y en la misma dirección y sentido
3) Calcular los axiles virtuales $N_{I,i}$ para esta fuerza unitaria
4) Calcular D_R homogeneizando unidades:

$$D_R = \sum_i \frac{N_{I,i} N_{R,i} L_i}{E_i A_i}$$