**TEMA 4: CERCHAS Y CELOSÍAS**
**Método de la carga unidad**

El método de la carga unidad es un procedimiento analítico para calcular desplazamientos reales de nudos de estructuras, en este caso de cerchas. Se basa en el concepto de energía de deformación y se deduce aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) a barras sometidas a esfuerzo axil.

1. Energía de deformación axil

Se tiene una barra sometida a un esfuerzo axil incremental (Fig. 1), donde la velocidad de deformación es constante y muy lenta, es decir, no se producen impulsos. Cuando se alcanza la fuerza máxima ($F_{max}$), el extremo de la barra experimenta un desplazamiento máximo ($\delta_{max}$), que coincide en este caso con el alargamiento de la barra ($\Delta L$).

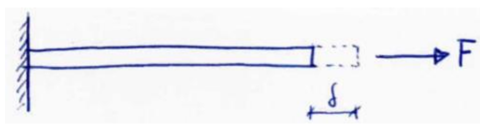


Fig. 1: Barra sometida a esfuerzo axil incremental

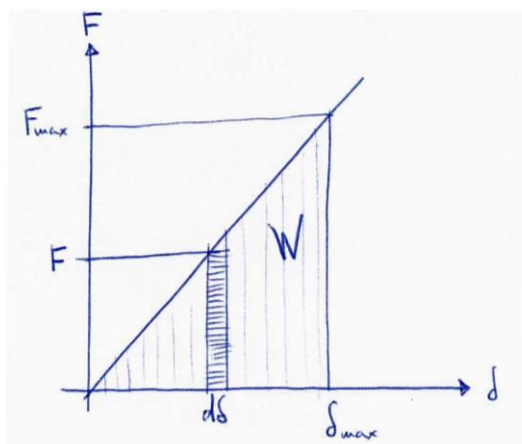


Fig. 2: Gráfica $F$-δ y concepto de trabajo realizado

Asumiendo un comportamiento elástico del material, la gráfica $F$-δ es lineal (Fig. 2). En un determinado instante de tiempo a mitad de la aplicación de la fuerza incremental, se puede considerar que cada pequeño incremento de deformación ($d\delta$), se produce a una fuerza constante $F$, generándose un diferencial de trabajo $dW$, representado en la figura como un rectángulo rayado horizontalmente. El trabajo total sería el área bajo la gráfica de la función $F(\delta)$, es decir, el área del triángulo rayado verticalmente, que coincide con la integral de la función entre $\delta = 0$ y $\delta = \delta_{max}$. Se debe notar que el trabajo cuando la fuerza se aplica lentamente es la mitad que si la carga se aplicara impulsivamente:

$$dW = F \cdot d\delta$$
$$W = \int_0^{\delta_{max}} dW = \int_0^{\delta_{max}} F \cdot d\delta = \frac{1}{2} F_{max} \cdot \delta_{max}$$

Dicho trabajo se puede definir como el "trabajo de las fuerzas exteriores" o "trabajo exterior" ($W_{ext}$). Si se sustituye $F$ y $\delta$ (magnitudes referidas a la barra) por sus valores análogos referidos a la sección ($N$ y $\Delta L$), se obtiene la expresión del "trabajo de las fuerzas interiores (solicitaciones)" o "trabajo interior" ($W_{int}$):

$$W_{ext} = \frac{1}{2} F \cdot \delta$$
$$W_{int} = \frac{1}{2} N \cdot \Delta L$$

Si no se produce ninguna disipación de energía por rozamiento o calor, ambos trabajos coinciden debido a la ley de conservación de la energía: $W_{ext} = W_{int}$. El trabajo interior se llama también "energía de deformación", pues conceptualmente se entiende como la energía que transmiten las fuerzas exteriores hacia el interior del sólido, que se emplea en deformarlo. Se puede sustituir en la expresión de $W_{int}$ el alargamiento $\Delta L$ por su valor en función del axil:

$$N = \frac{EA}{L} \Delta L \Leftrightarrow \Delta L = \frac{NL}{EA}$$
$$W_{int} = \frac{1}{2} N \cdot \Delta L = \frac{1}{2} N \frac{NL}{EA} = \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{EA}$$

## 2. Principio de los Trabajos Virtuales (PTV)

De manera resumida, el PTV sobre un punto o un sólido rígido establece que "al desplazar virtualmente un punto (es decir, un desplazamiento ejercido por una entidad externa), cualquier conjunto de fuerzas en equilibrio sobre el punto realiza un trabajo virtual nulo". En efecto, la condición de equilibrio impone que el sumatorio de fuerzas es nulo, mientras que el trabajo virtual de cada fuerza es el producto escalar de cada fuerza por el desplazamiento virtual; sacando factor común dicho desplazamiento virtual se demuestra el PTV:

$$W = \sum_i \left( \vec{F_i} \cdot \vec{\delta^*} \right) = \vec{\delta^*} \sum_i \vec{F_i} = \vec{\delta^*} \cdot \vec{0} = 0$$

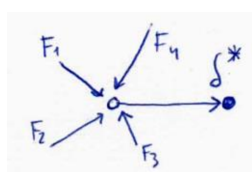


Fig. 3: Trabajo virtual de un punto en equilibrio

Es de vital importancia comprender que el desplazamiento virtual está totalmente desvinculado de las fuerzas reales y de la deformación real. De hecho, usualmente se entiende el problema como la combinación de dos sistemas: uno real y otro virtual, ambos con sus fuerzas y desplazamientos, de tal manera que se combinan las fuerzas del sistema real con los desplazamientos del sistema virtual. Igualmente importante es asumir que los desplazamientos se realizan de manera instantánea, no progresiva, luego el trabajo y la energía de deformación no se reducen a la mitad.

Este principio se puede extrapolar a una rebanada de barra sometida a axil, en equilibrio. Si se alarga virtualmente la barra, de tal manera que cada sección se desplaza longitudinalmente una cierta magnitud virtual $\phi$, se puede establecer que el trabajo de las fuerzas totales actuantes sobre la rebanada es nulo, puesto que están en equilibrio, o lo que es lo mismo, que el valor absoluto de los trabajos de las fuerzas exteriores e interiores (solicitaciones) coincide y se anula: $W^*_{ext} = W^*_{int}$.

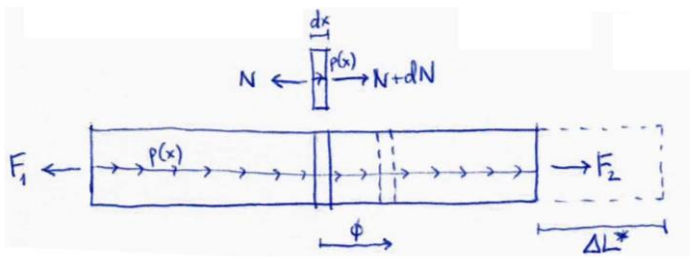


Fig. 4: Trabajo virtual de una rebanada en equilibrio

Finalmente, a nivel de barra se puede ejercer desplazamientos sobre ambos extremos, de tal manera que es posible entender el movimiento de la barra como la composición de un desplazamiento, un giro y un alargamiento. Los dos primeros movimientos (desplazamiento y giro) corresponden a un comportamiento de sólido rígido. De esta manera, el trabajo realizado se puede descomponer como el trabajo de las fuerzas exteriores cuando la barra se mueve como sólido rígido sumado con el trabajo de las solicitaciones interiores cuando la barra se alarga. El trabajo como sólido rígido es nulo (véase PTV aplicado al punto o al sólido rígido), luego el único trabajo realizado es el producido por el alargamiento (instantáneo):

$$W^*_{ext} = W^*_{\text{int}} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{\delta^*_1} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{\delta^*_2} = N \cdot \Delta L^*$$

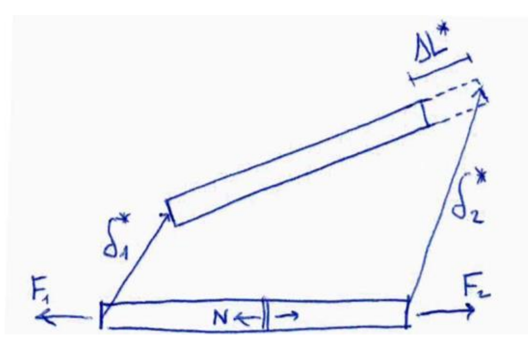


Fig. 5: Trabajo virtual de una barra en equilibrio

Es muy importante entender que el alargamiento virtual $\Delta L^*$ está totalmente desvinculado del axil real *N*. De hecho, el alargamiento virtual se puede entender como la deformación producida por un axil virtual que nada tiene que ver con el estado real. Ese axil virtual vendría dado por:

$$N^* = \frac{EA}{L}\Delta L^* \Leftrightarrow \Delta L^* = \frac{N^* L}{EA}$$

Luego el PTV para la barra se puede reescribir como:

$$\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{\delta_1^*} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{\delta_2^*} = N \cdot \frac{N^* L}{EA}$$

Para un conjunto de $n$ barras a axil concurrentes en $m$ nudos (cercha), el PTV se puede expresar como el sumatorio de los valores correspondientes a todos los elementos (nudos y barras para trabajo exterior e interior, respectivamente):

$$W_{ext}^* = W_{\text{int}}^* \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m}\left(\overrightarrow{F_j} \cdot \overrightarrow{\delta_j^*}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i \cdot N_i^* L_i}{E_i A_i}$$

3. <u>Método de la carga unidad</u>

El método de la carga unidad se utiliza para calcular desplazamientos desconocidos en estructuras (en este caso cerchas) de las que conocemos sus fuerzas exteriores (incluidas reacciones) y los axiles de todas sus barras. Este procedimiento se sirve del PTV en su sentido más amplio: plantear el problema en términos de someter una misma estructura a dos sistemas de fuerzas distintos (lo que previamente se ha denominado fuerzas reales y virtuales) que producen cada uno un campo de desplazamientos distinto. En este apartado se denominarán sistema "asterisco" y sistema "no-asterisco" en lugar de real y virtual, por las razones que se verán más adelante (ver Fig. 5).

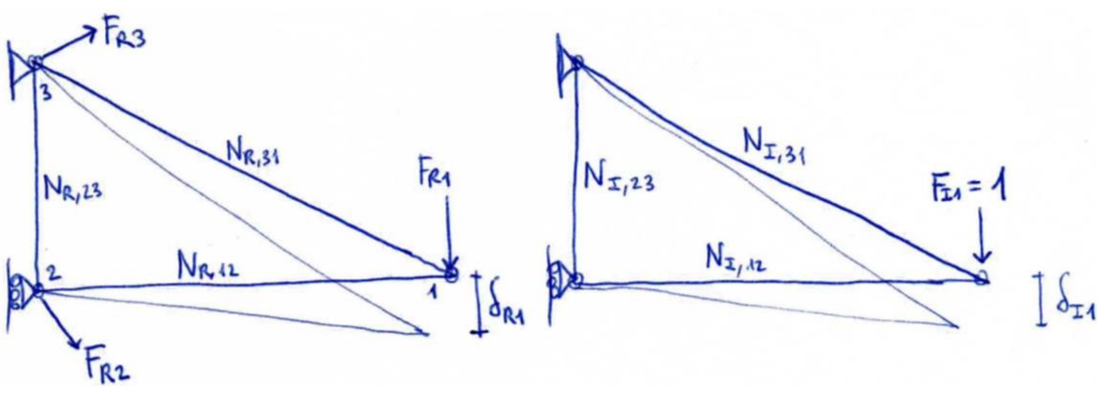


Fig. 6: Sistemas real ("asterisco") e imaginario ("no-asterisco")

Se considera una cercha con $n$ barras y $m$ nudos, que se numeran asignando el ordinal 1 al nudo donde se desea calcular el desplazamiento real. El sistema "asterisco" se define, porque así nos conviene, como la estructura sometida a las cargas (o reacciones) reales en cada nudo $j$, $F_{Rj}$, que provocan unos desplazamientos reales $\delta_{Rj}$ en dichos nudos y unos axiles reales $N_{Ri}$ en cada barra $i$. De la misma forma, se define el sistema "no-asterisco" como la estructura sometida a una sola carga imaginaria $F_{I1}$ colocada en el nudo en el que se desea calcular el desplazamiento real (nudo 1) y en su misma dirección; dicha carga provocaría unos axiles imaginarios $N_{Ii}$ (y unos desplazamientos imaginarios $\delta_{Ij}$ que no se usan). Por razones de conveniencia, se toma la carga imaginaria como una carga unitaria: $F_{I1} = 1$, de ahí el nombre del método "carga unidad". En el sistema imaginario, obviamente aparecen reacciones, pero estas no realizan trabajo pues el desplazamiento en la dirección de la reacción siempre es nulo a menos que se trate de un muelle. Por tanto, la única fuerza que realiza trabajo en el sistema imaginario es la carga unitaria.

Sustituyendo en la fórmula del PTV para cerchas los términos "no-asterisco" por los valores imaginarios (subíndice $I$) y los términos "asterisco" por los valores reales (subíndice $R$), y asumiendo que la carga imaginaria es unitaria, queda:

$$W_{ext}^{*} = W_{\text{int}}^{*} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m}\left(\overrightarrow{F_{Ij}} \cdot \overrightarrow{\delta_{Rj}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{Ii} \cdot N_{Ri} L_i}{E_i A_i} \Leftrightarrow F_{I1} \cdot \delta_{R1} + 0 + \ldots + 0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{Ii} \cdot N_{Ri} L_i}{E_i A_i} \Leftrightarrow 1 \cdot \delta_{R1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{Ii} \cdot N_{Ri} L_i}{E_i A_i} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \delta_{R1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{Ii} \cdot N_{Ri} L_i}{E_i A_i}$$

De esta manera se demuestra que para obtener el desplazamiento real de un nudo de una cercha, basta con construir un sistema equivalente con una carga unitaria en dicho nudo en la dirección del desplazamiento que se desea calcular. Los pasos a seguir son los siguientes:

1) Calcular las reacciones de la estructura real y los axiles de todas las barras
2) Construir el sistema imaginario con una carga unitaria colocada en el nudo donde se desea calcular el desplazamiento real, en su misma dirección y sentido
3) Calcular las reacciones y los axiles de todas las barras del sistema imaginario
4) Recorrer todas las barras de la cercha sumando los productos de los axiles de ambos sistemas por $L/EA$