3
AXIL

**PROYECTO DE ESTRUCTURAS**

6 FASES:

1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica

2) Modelización: elaboración de modelo físico

3) Análisis: cálculo de solicitaciones y deformaciones de los elementos

4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos

5) Representación

6) Ejecución

**PROYECTO DE ESTRUCTURAS**

6 FASES:

1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica

2) **Modelización: elaboración de modelo físico**

3) **Análisis: cálculo de solicitaciones** y deformaciones de los elementos

4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos

5) Representación

6) Ejecución

**PROYECTO DE ESTRUCTURAS**

6 FASES:

1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica

2) Modelización: elaboración de modelo físico

3) Análisis: cálculo de solicitaciones y deformaciones de los elementos

4) **Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos**

5) Representación

6) Ejecución

| Dimensionado de barras: requisitos | | |
|---|---|---|
| | ESTABILIDAD: | No pandea, no vuelca, etc. |
| | RIGIDEZ: | Deformación ≤ Valores admisibles |
| | **RESISTENCIA:** | **Acción ≤ Resistencia** |

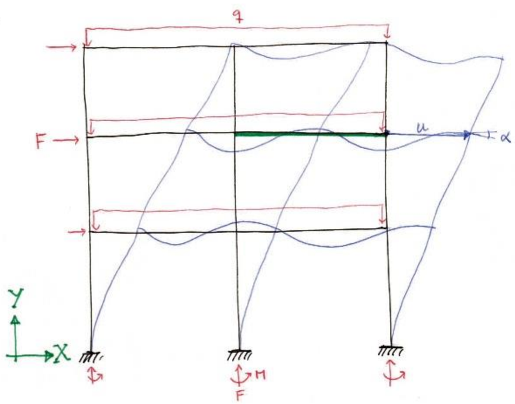
**TEMARIO**

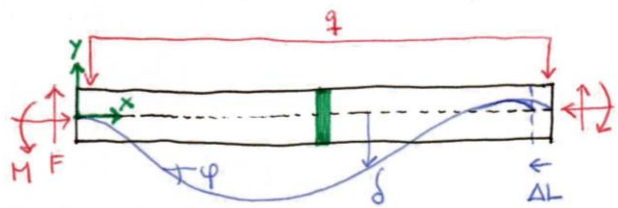
| | |
|---|---|
| 1. Hipótesis fundamentales | CONCEPTOS BÁSICOS |
| 2. Leyes de esfuerzos | |
| **3. Esfuerzo axil** | ESFUERZOS Y TENSIONES |
| **4. Cerchas y celosías** | EN ISOSTÁTICAS |
| **5. Geometría funicular** | |
| 6. Flexión | |
| 7. Teoremas de Mohr | DEFORMACIONES EN ISOSTÁTICAS |
| 8. Vigas hiperestáticas | ESFUERZOS Y |
| 9. Método matricial | DEFORMACIONES EN |
| 10. Vigas continuas | HIPERESTÁTICAS |
| 11. Simetría y antimetría | |

# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

## ESTRUCTURA

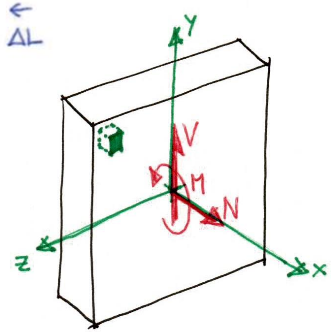
Fuerzas y reacciones externas:
q, F, M
Movimientos absolutos:
desplazamientos (u) y
giros absolutos (α)



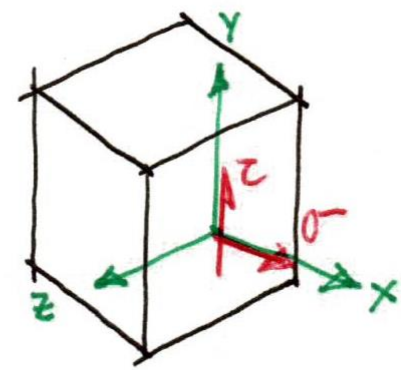

## BARRA

Fuerzas y reacciones de
extremo: q, F, M
Movimientos relativos:
elongación (ΔL), deflexión (δ) y
giros relativos (φ)




## REBANADA

Solicitaciones:
N, V, M
Deformaciones: elongación,
distorsión y curvatura (κ)




## PUNTO

Tensiones:
σ, τ
Deformaciones:
elongación (ε) y distorsión (γ)

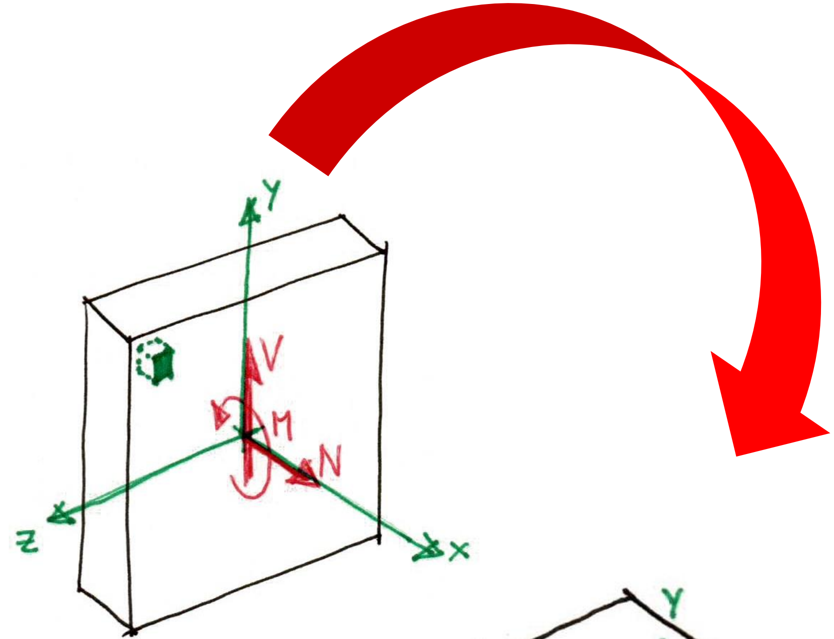
# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

## ESTRUCTURA

Fuerzas y reacciones externas:
q, F, M
Movimientos absolutos:
desplazamientos (u) y
giros absolutos (α)

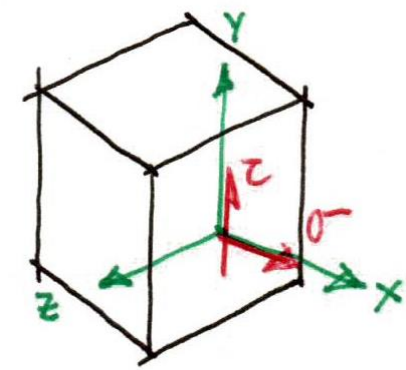
## BARRA

Fuerzas y reacciones de
extremo: q, F, M
Movimientos relativos:
elongación (ΔL), deflexión (δ) y
giros relativos (φ)




## REBANADA

Solicitaciones:
N, V, M
Deformaciones: elongación,
distorsión y curvatura (κ)




## PUNTO

Tensiones:
σ, τ
Deformaciones:
elongación (ε) y distorsión (γ)

Dimensionado de barras: requisitos

- ESTABILIDAD: No pandea, no vuelca, etc.
- RIGIDEZ: Deformación ≤ Valores admisibles
- **RESISTENCIA: Acción ≤ Resistencia**

# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

## Dimensionado a Resistencia:

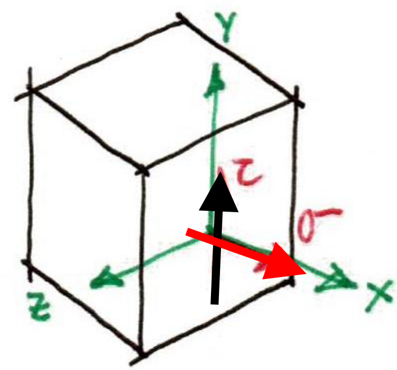
Garantizar que en todos los puntos de todas las secciones de todas las barras de la estructura, la tensión actuante es menor que la tensión admisible.
Basta hacer la comprobación en los puntos críticos, donde la tensión es máxima:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{adm}$$

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm}$$

**REBANADA**

Solicitaciones:
N, V, M
Deformaciones: elongación, distorsión y curvatura (κ)




**PUNTO**

Tensiones:
σ, τ
Deformaciones:
elongación (ε) y distorsión (γ)

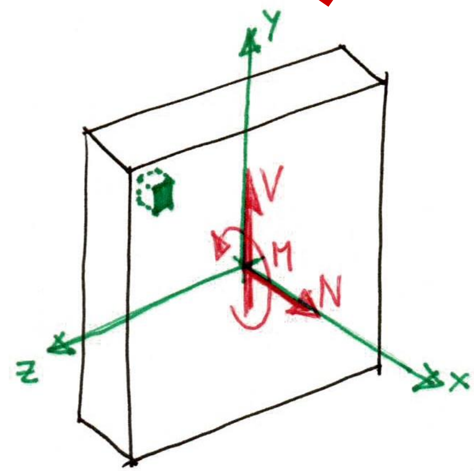
# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

## ESTRUCTURA

Fuerzas y reacciones externas:
q, F, M
Movimientos absolutos:
desplazamientos (u) y
giros absolutos (α)

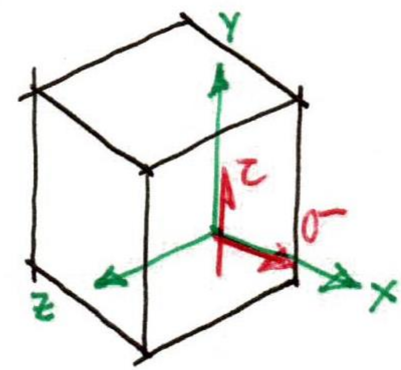
## BARRA

Fuerzas y reacciones de
extremo: q, F, M
Movimientos relativos:
elongación (ΔL), deflexión (δ) y
giros relativos (φ)




## REBANADA

Solicitaciones:
N, V, M
Deformaciones: elongación,
distorsión y curvatura (κ)

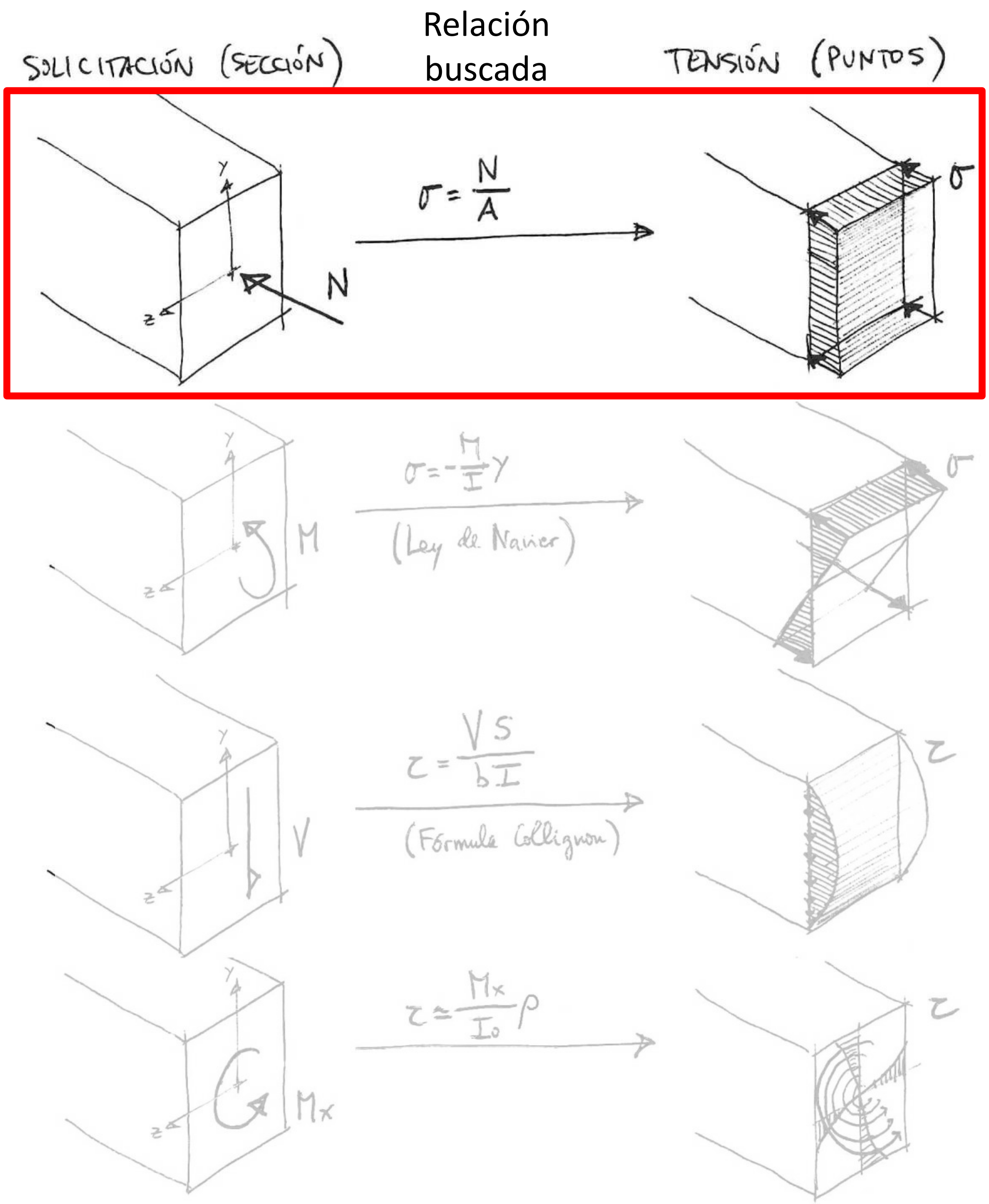



## PUNTO

Tensiones:
σ, τ
Deformaciones:
elongación (ε) y distorsión (γ)

**Comprobamos tensiones →**
**Necesario encontrar relación entre solicitaciones y tensiones!**

# TIPO DE TENSIÓN SEGÚN LA SOLICITACIÓN ACTUANTE

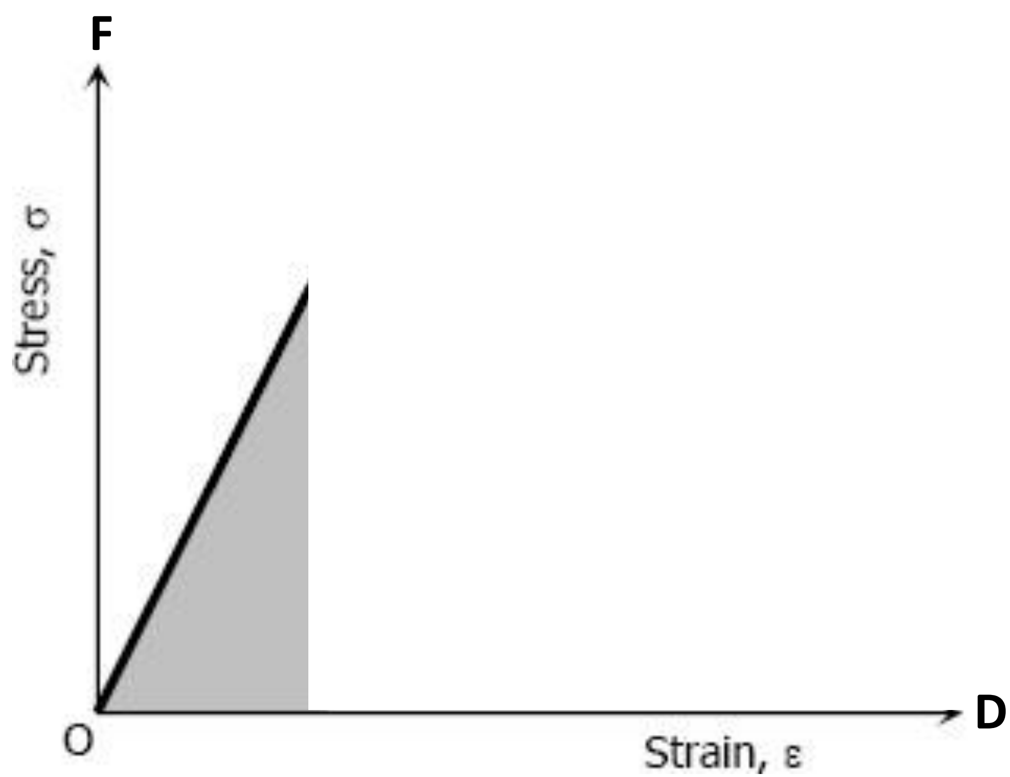


## PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

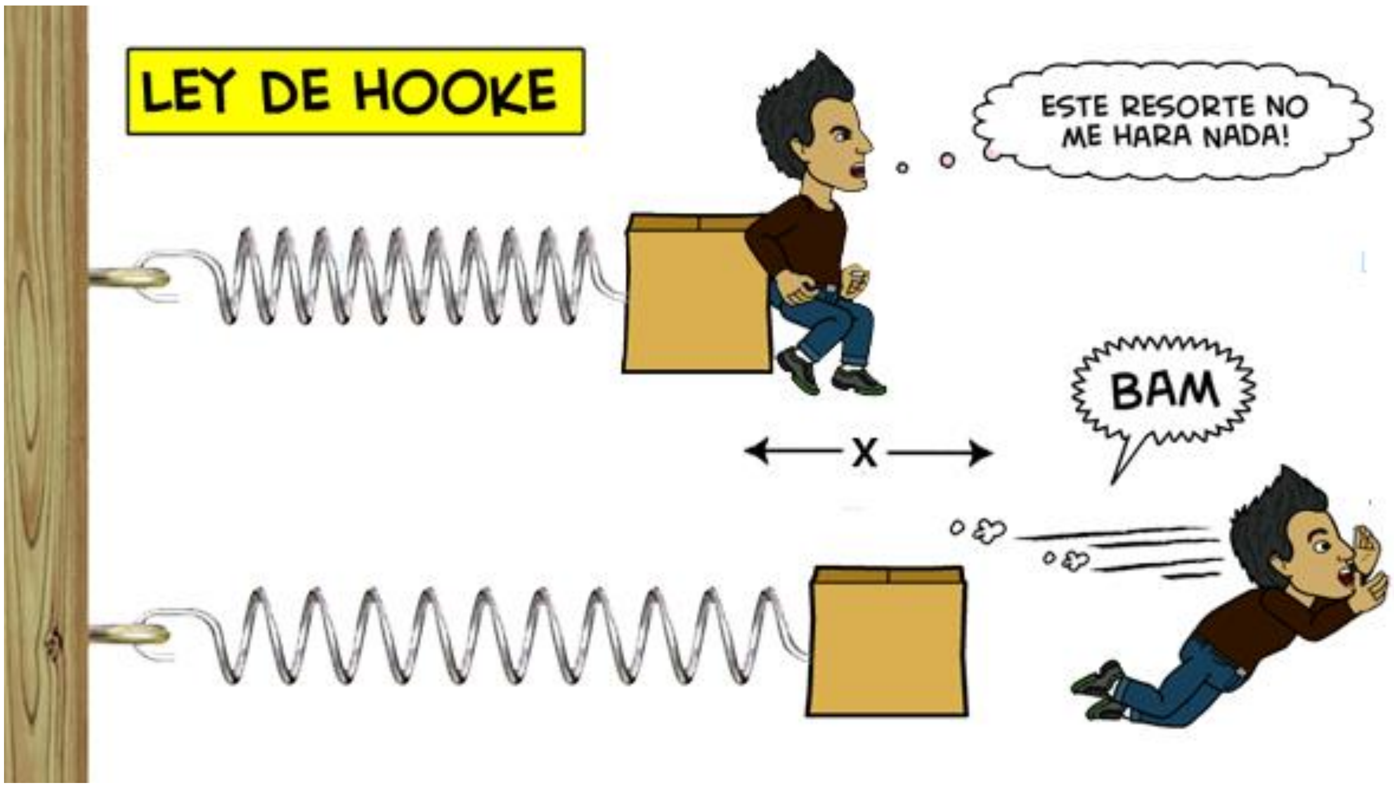
1) Principio de rigidez relativa (o pequeñas deformaciones)
2) **Principio de proporcionalidad**
3) Principio de superposición de efectos
4) **Principio de equilibrio estático**
5) **Principio de compatibilidad de deformaciones**
6) Principio de Saint-Venant
7) Hipótesis de Navier-Bernoulli

## TENSIÓN ADMISIBLE

Se toma como $\boldsymbol{\sigma}_{adm}$ el valor del límite elástico del material
Hasta ese valor admisible, se considera que se cumple la Ley de Hooke



# LEY DE HOOKE

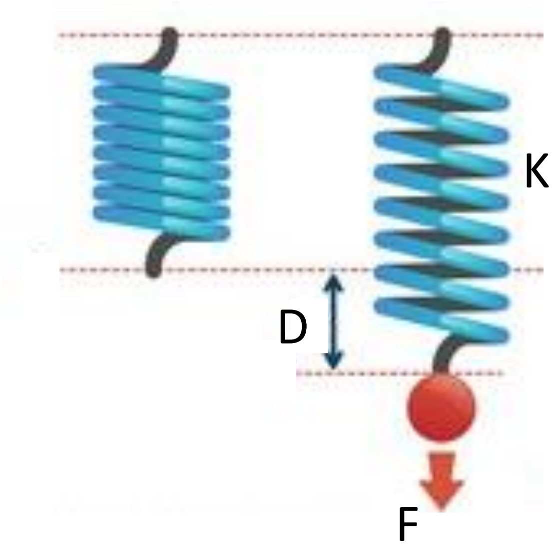


**LEY DE HOOKE**

**Concepto central de la teoría de estructuras.**

Cualquier elemento estructural (es decir, estable y rígido en primera instancia) se opone a su deformación con su **RIGIDEZ (K)**, de tal manera que, a mayor rigidez, mayor fuerza (F) hay que ejercer para deformarlo una misma cantidad (D)

$$\boxed{F = K \cdot D}$$

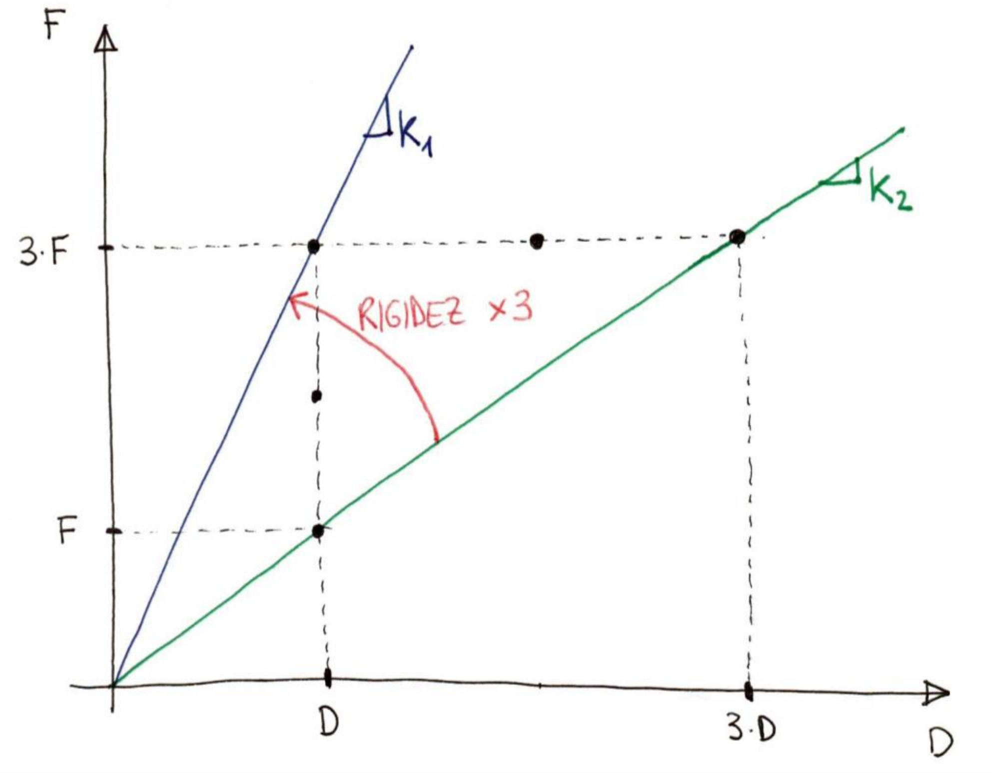



La rigidez K = F/D se define como:
*La fuerza que hay que aplicar a un elemento para que se deforme una unidad*

**LEY DE HOOKE**

Rigidez: pendiente de la gráfica F-D

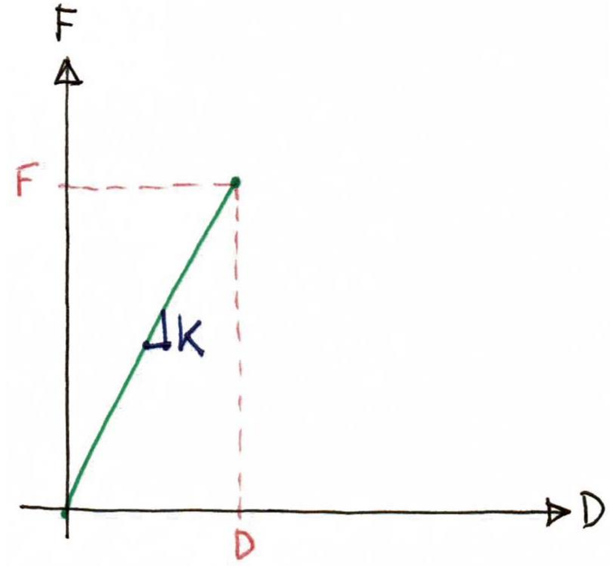
$$\boxed{F = K \cdot D}$$




La estructura azul es 3 veces más rígida que la verde puesto que hace falta 3 veces más fuerza para deformarla lo mismo, o equivalentemente, porque ante la misma fuerza se deforma 1/3 de la verde

**LEY DE HOOKE**

Aplicable a cualquier sistema que se oponga a deformarse →
Aplicable a los 4 niveles estructurales




**ESTRUCTURA**

**BARRA**

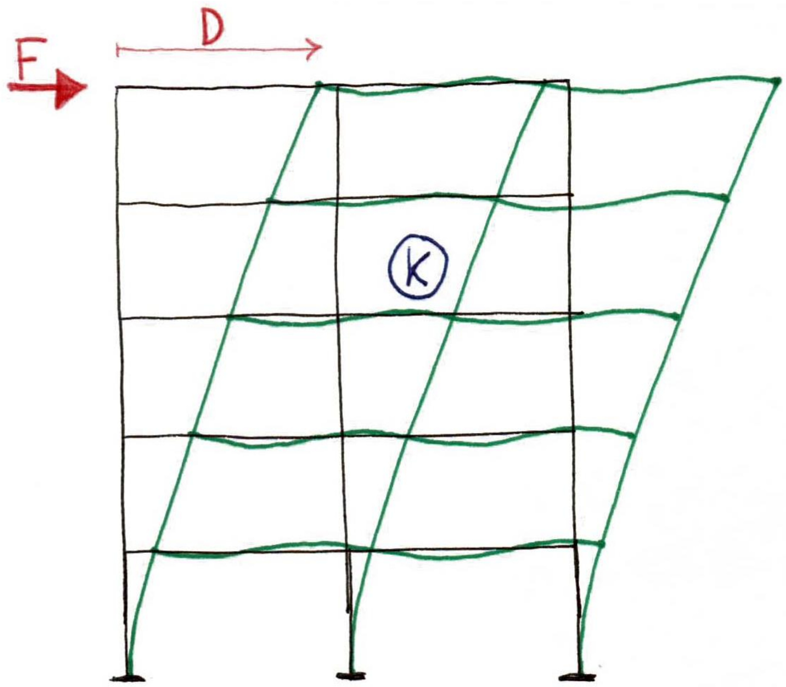
**REBANADA**

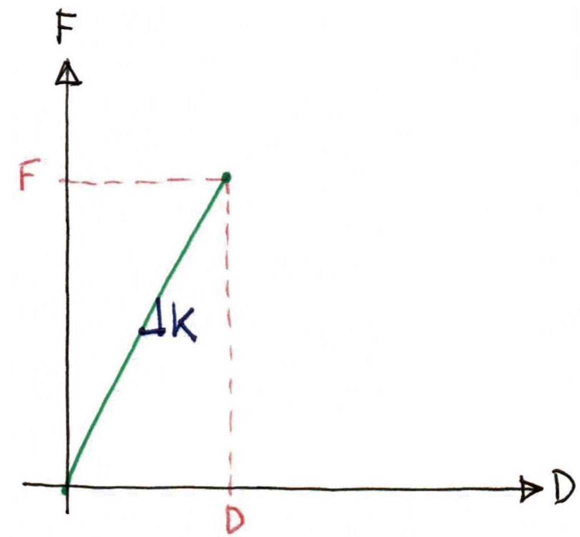
**PUNTO**

**LEY DE HOOKE**

Aplicable a cualquier sistema que se oponga a deformarse, independientemente del tamaño, cantidad de elementos o tipo de deformación → 4 NIVELES

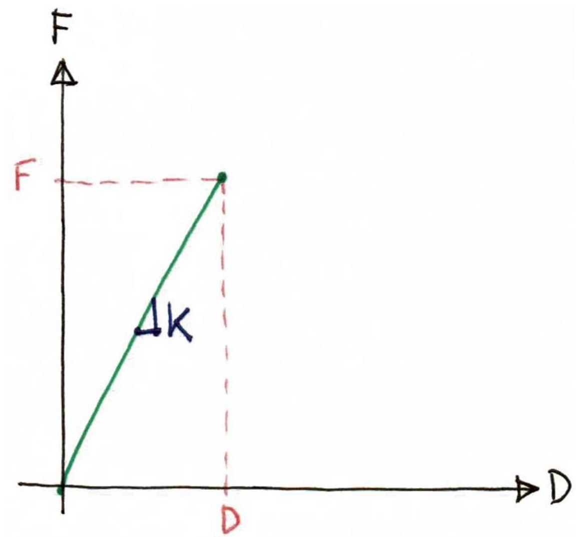
**ESTRUCTURA**



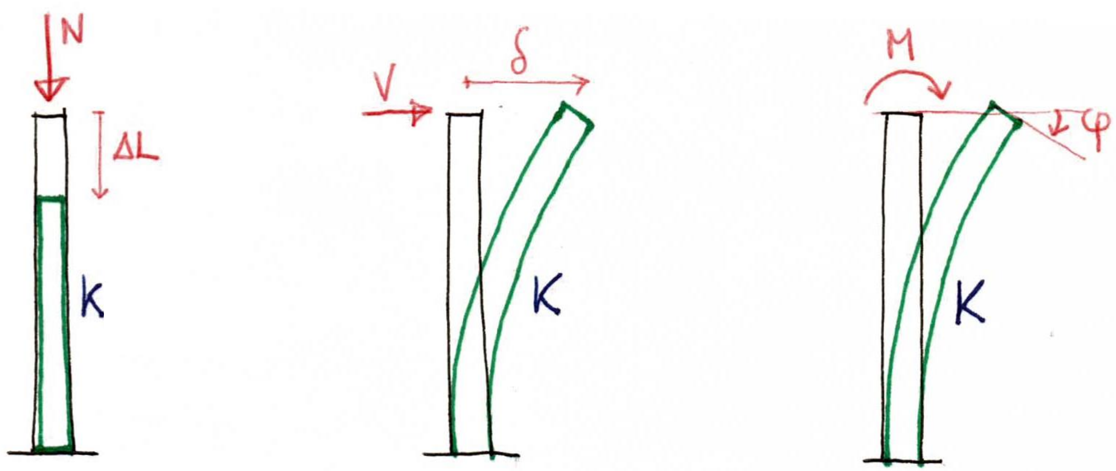



**LEY DE HOOKE**

Aplicable a cualquier sistema que se oponga a deformarse, independientemente del tamaño, cantidad de elementos o tipo de deformación → 4 NIVELES

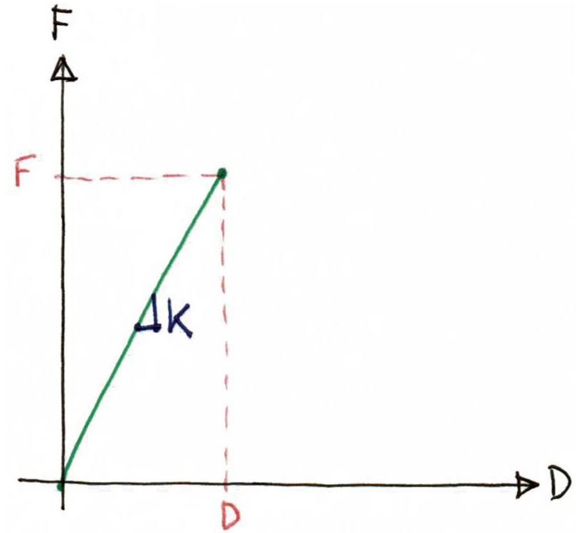



**BARRA**

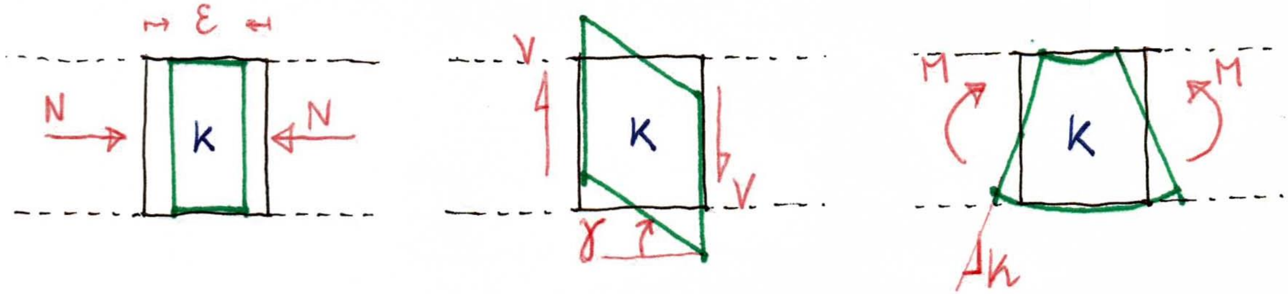


## LEY DE HOOKE

Aplicable a cualquier sistema que se oponga a deformarse, independientemente del tamaño, cantidad de elementos o tipo de deformación → 4 NIVELES

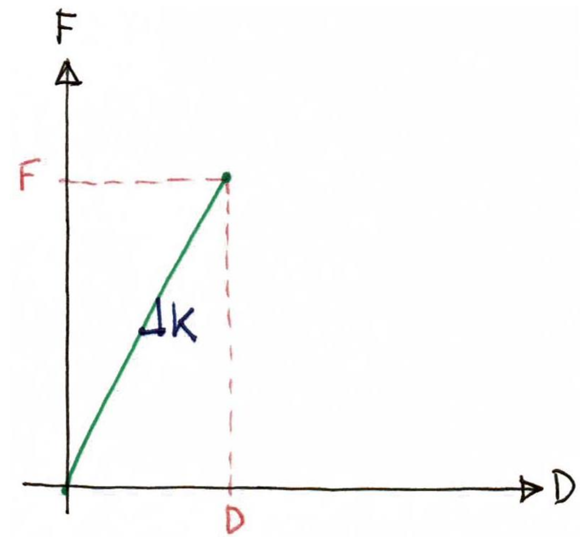



**REBANADA**



**LEY DE HOOKE**

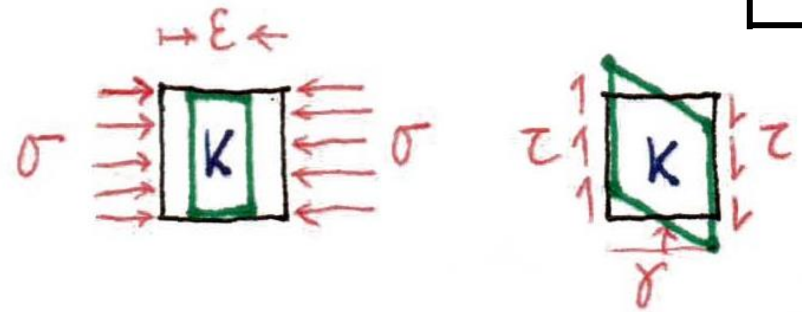
Aplicable a cualquier sistema que se oponga a deformarse, independientemente del tamaño, cantidad de elementos o tipo de deformación → 4 NIVELES




(La rigidez del punto ante tensión normal es el módulo de deformabilidad del material, **E**)

(La rigidez del punto ante tensión tangencial es el módulo de cizalladura del material, **G**)

PUNTO



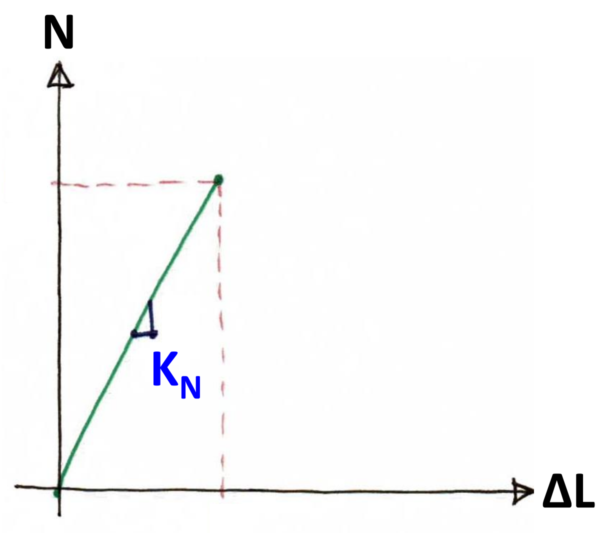
**RIGIDEZ A AXIL DE BARRA RECTA**

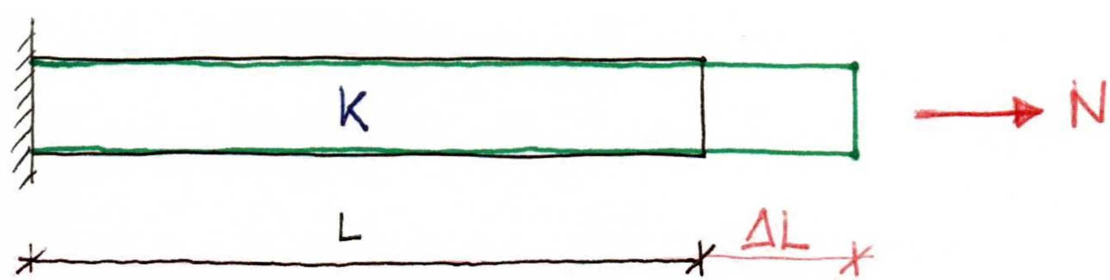
Típicamente pilar comprimido o cable traccionado.

La barra, ante un axil **N** constante en toda su longitud **L**, se alarga (o acorta) una distancia **ΔL**

La rigidez a axil, $\mathbf{K_N}$, es la magnitud que relaciona la solicitación con la deformación:

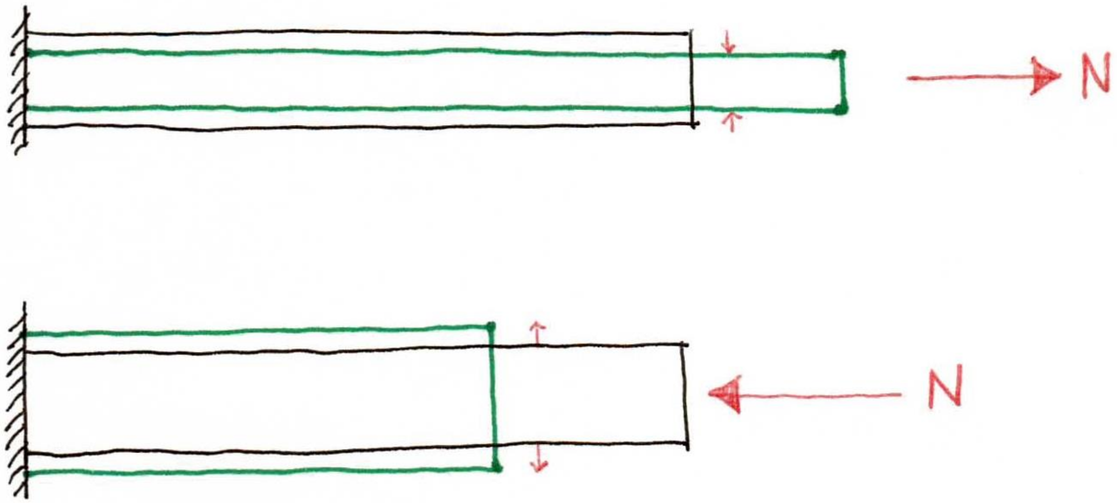
$$N = K_N \cdot \Delta L$$



## COEFICIENTE DE POISSON

En realidad, al alargar una barra se produce un “adelgazamiento” transversal de la sección, para en cierta manera permitir dicho alargamiento. Y viceversa: al acortar una barra se produce un engrosamiento.

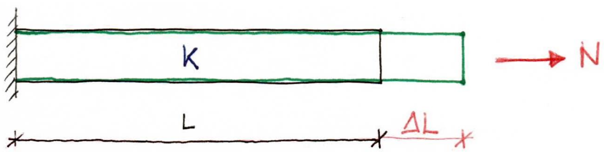



La relación entre ambas deformaciones, transversal y longitudinal, viene dada por el **Coeficiente de Poisson**:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{long}}$$

**RIGIDEZ A AXIL DE BARRA RECTA**

A partir de la leyes de Hooke para la barra y para cualquier punto interior se obtiene la expresión de $\mathbf{K_N}$




Ley de Hooke para la barra completa: $$N = K_N \cdot \Delta L \quad (1)$$

Ley de Hooke para un punto interior: $$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2)$$

Definición de tensión normal debida al axil: $$\sigma = \frac{N}{A} \quad (3)$$

Definición de deformación longitudinal debida al axil: $$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2): $$\frac{N}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow N = \frac{EA}{L}\Delta L \quad (5)$$

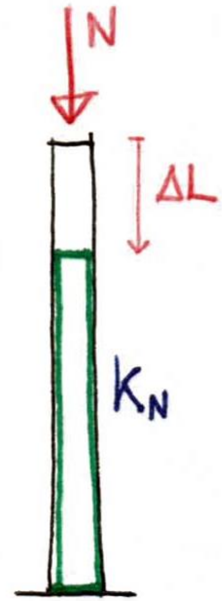
Y comparando (1) y (5), se tiene que: $$\boxed{K_N = \frac{EA}{L}}$$

**RIGIDEZ A AXIL DE BARRA RECTA**

El significado de la expresión es que un pilar comprimido o un cable traccionado se comporta "mejor" (≈ es más rígido):

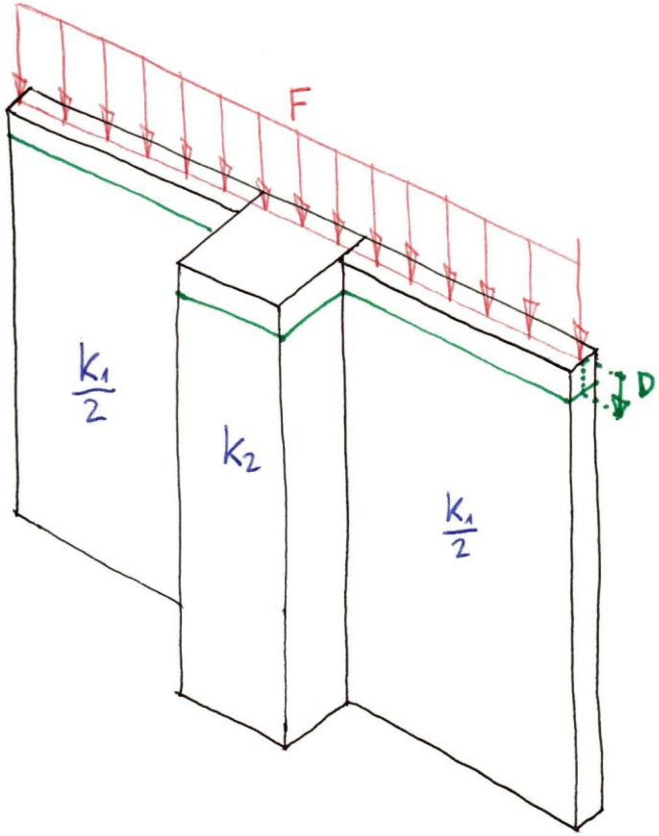
- Cuanto mejor sea el material (E)
- Cuanto mayor sea la sección transversal (A)
- Cuanto menor sea su longitud (L)

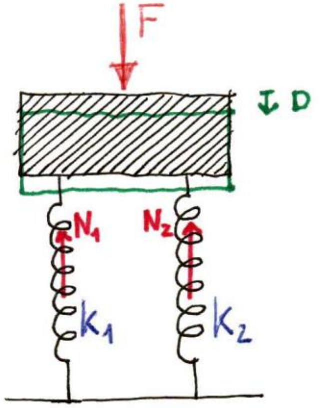
$$\boxed{K_N = \frac{EA}{L}}$$



**SISTEMAS HIPERESTÁTICOS DE BARRAS A AXIL**

Si un sistema de barras es hiperestático pero todas ellas solo trabajan a axil (compresión o tracción), dichas solicitaciones axiles se pueden obtener añadiendo a las ecuaciones de equilibrio (la fuerza aplicada debe ser igual a los axiles en la dirección de la fuerza) otras en las que interviene su disposición geométrica y, sobre todo, su rigidez $K_N$.



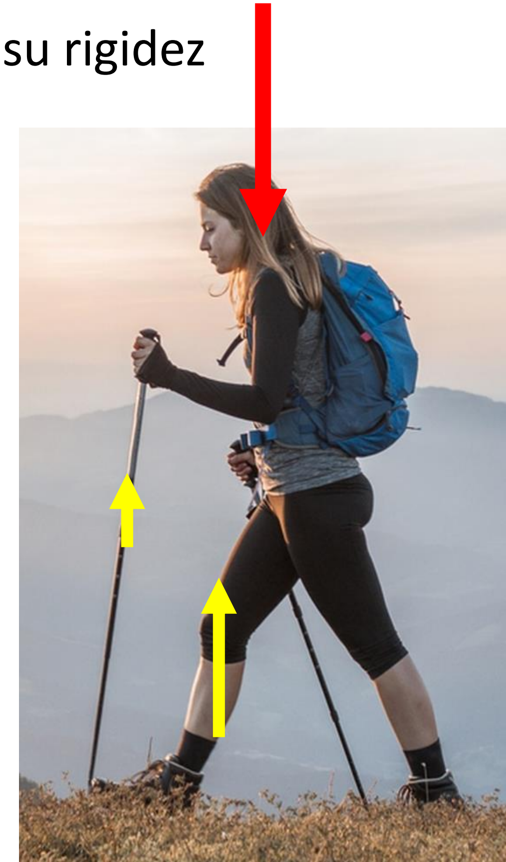
## SISTEMAS HIPERESTÁTICOS DE BARRAS A AXIL

Para niveles bajos de fuerza aplicada (es decir, que no esté cerca de hacer romper ninguna barra), dicha fuerza aplicada se reparte entre los elementos dependiendo únicamente de:

- Su **inclinación**: una barra se lleva más carga cuanto más alineada esté con la fuerza
- Su **rigidez**: una barra se lleva más carga cuanto mayor sea su rigidez

En esta situación, nada influye la resistencia que tenga cada barra, solo su inclinación y rigidez.

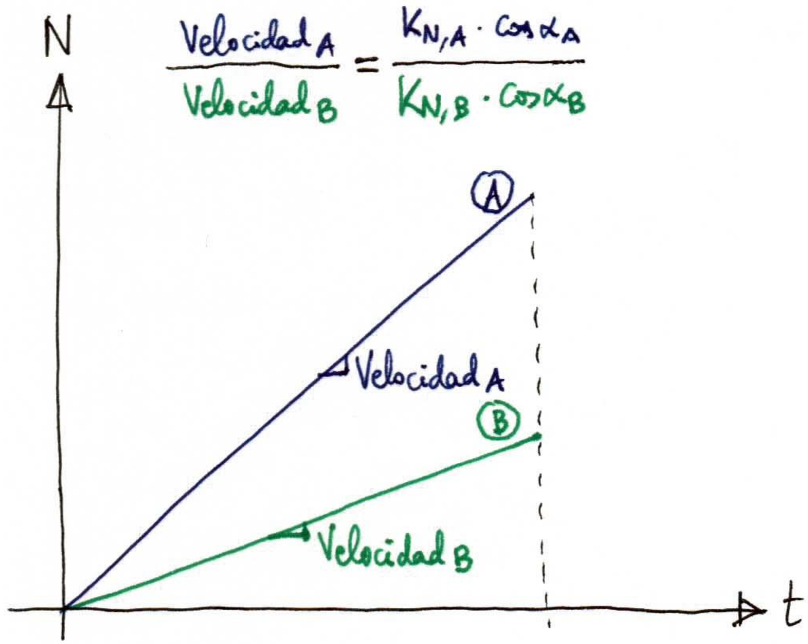
Ejemplo: al usar bastones de trekking, el peso corporal en cada paso se reparte entre dos elementos casi verticales: la pierna y el sistema bastón+brazo, constituyendo un sistema hiperestático. La descarga de peso hacia el bastón no depende de la resistencia del mismo, sino de lo rígido que se ponga el brazo: a mayor rigidez, mayor axil en el bastón.



## ATRACCIÓN DE CARGA AXIL

Por tanto, cada barra del sistema atrae para sí una porción de la carga que es directamente proporcional al producto de su rigidez por la inclinación (coseno del ángulo que forma con la dirección de la carga). A este producto lo podemos denominar "**velocidad de carga**", pues si a la estructura se le va aplicando la carga progresivamente, el parámetro "velocidad de carga" representa la mayor o menor rapidez con que cada elemento incrementa su propio axil:

$$Velocidad \sim K_N \cdot \cos\alpha$$

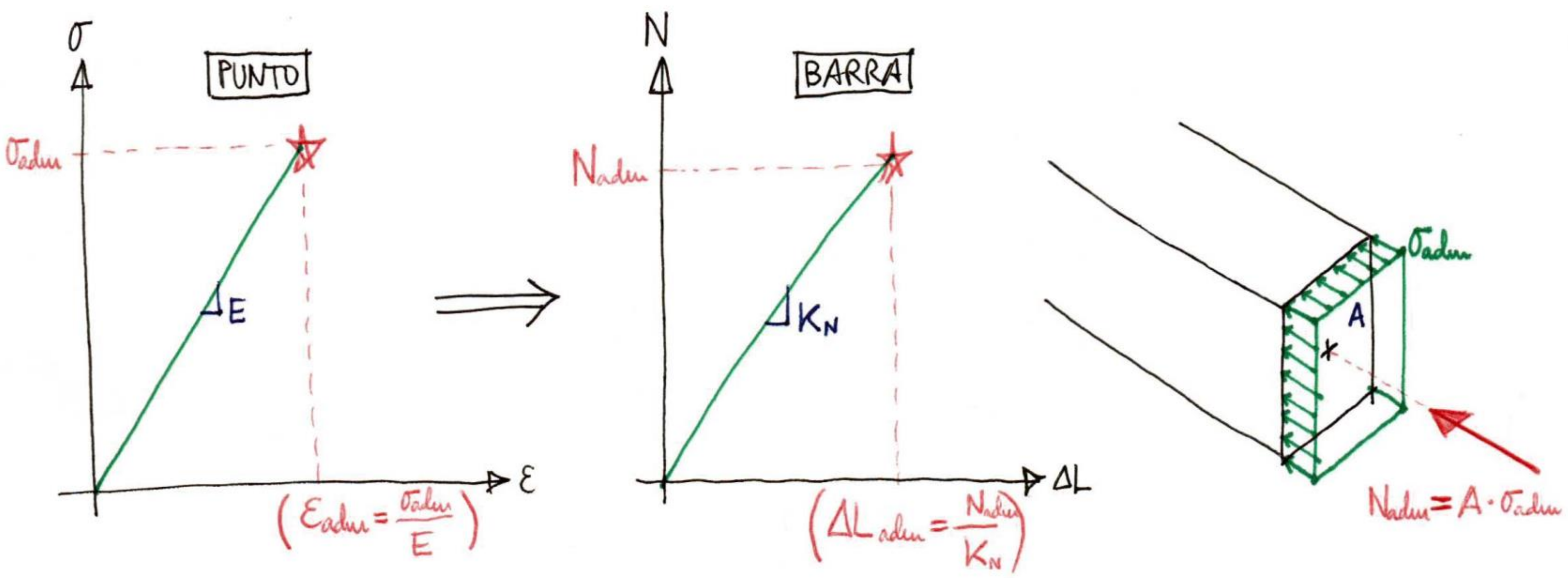


**RESISTENCIA DE BARRAS A AXIL**

Para niveles altos de fuerza aplicada, las barras pueden romperse (★) por alcanzarse en todas las secciones la resistencia (tensión admisible) del material, $\sigma_{adm}$.

El axil que produce la rotura de la barra, $N_{adm}$, se obtiene asumiendo que todos los puntos de cualquier sección están sometidos a una tensión constante igual a la admisible.

$$\sigma_{adm} = \frac{N_{adm}}{A} \Rightarrow N_{adm} = A \cdot \sigma_{adm}$$

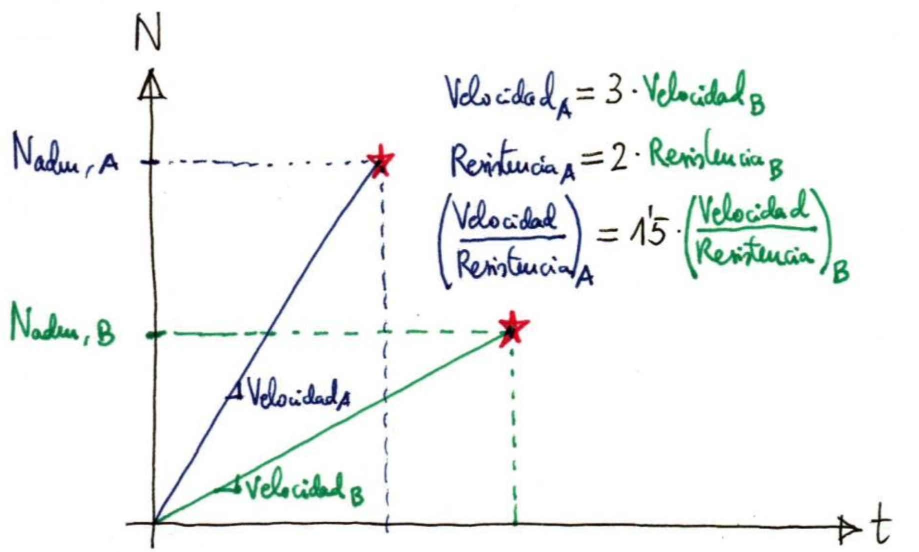


## SECUENCIA DE ROTURA DE BARRAS A AXIL

¿Qué barra del sistema se rompe antes? Si atrajeran la carga a la misma velocidad, se rompería la menos resistente. Con distintas velocidades (por tener distintas inclinaciones y rigideces), se rompe antes aquella que tenga una <u>velocidad de atraer axil grande y una resistencia pequeña</u> (gran demanda y pequeña capacidad).

Es decir, rompe la barra con el máximo valor Demanda/Capacidad:

$$\text{Rotura: } \max \frac{Demanda}{Capacidad} = \max \frac{Velocidad}{Resistencia} = \max \frac{K_N \cdot \cos\alpha}{N_{adm}}$$



# EJEMPLO ETÍLICO

**EJEMPLO ETÍLICO**

Resistencia (capacidad):
La persona A se emborracha con 8 cervezas
La persona B se emborracha con 4 cervezas
A resiste el doble (=8/4=2) que B

Velocidad (demanda):
La persona A bebe a razón de 6 cervezas por hora
La persona B bebe a razón de 2 cervezas por hora
A tiene triple velocidad (=6/2=3) que B

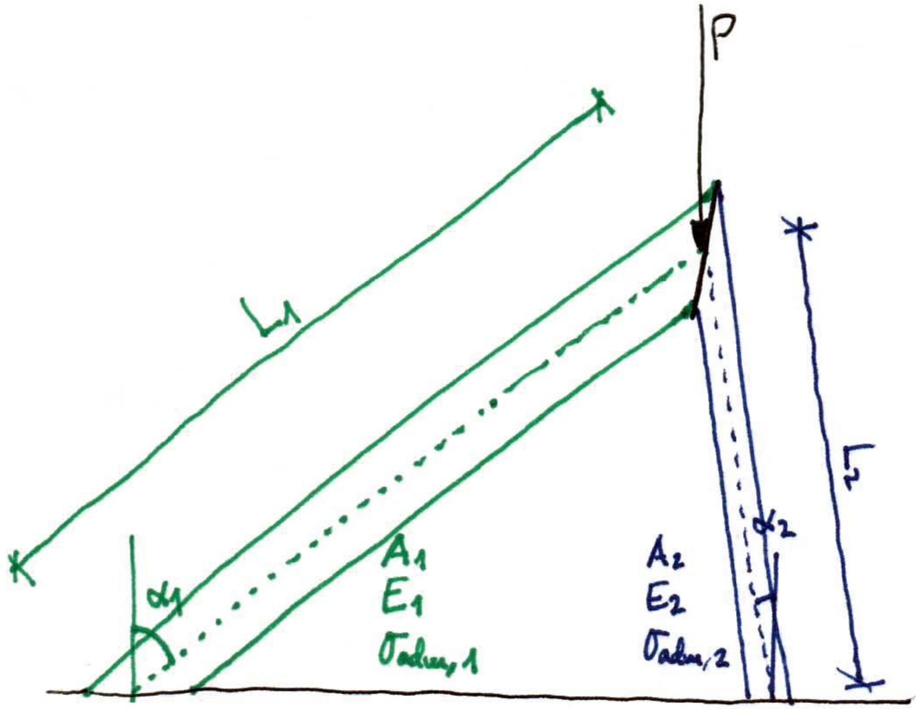
¿Quién se emborracha antes? El que tenga mayor valor demanda/capacidad:

$$\left.\begin{array}{l} A: \dfrac{Demanda}{Capacidad} = \dfrac{6}{8} = 0.75 \\ B: \dfrac{Demanda}{Capacidad} = \dfrac{2}{4} = 0.50 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Rompe A}$$

# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS DE BARRAS A AXIL

Requieren de aplicar secuencialmente ecuaciones referentes a:

1) Geometría
2) Equilibrio
3) Compatibilidad
4) Comportamiento
5) Resistencia
6) Rotura

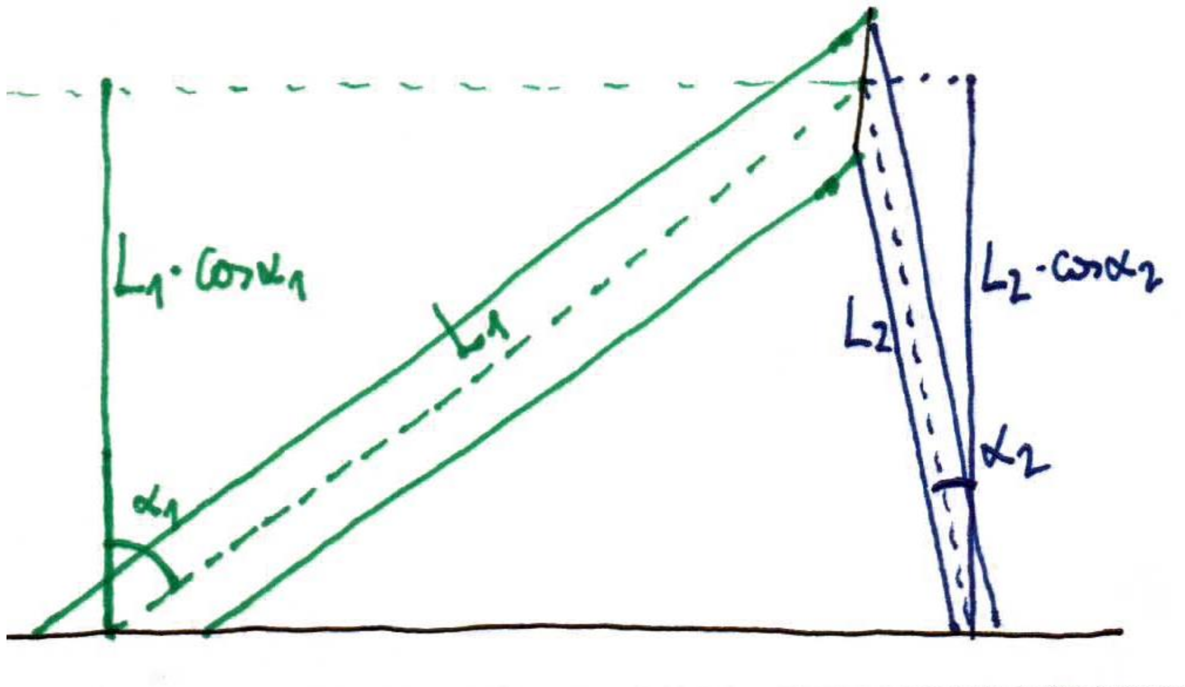



(Nota: por simplicidad, el ejemplo de la figura es isostático, no hiperestático)

# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS DE BARRAS A AXIL

1) <u>Geometría</u>

$$L_1 \cos \alpha_1 = \ldots = L_n \cos \alpha_n$$

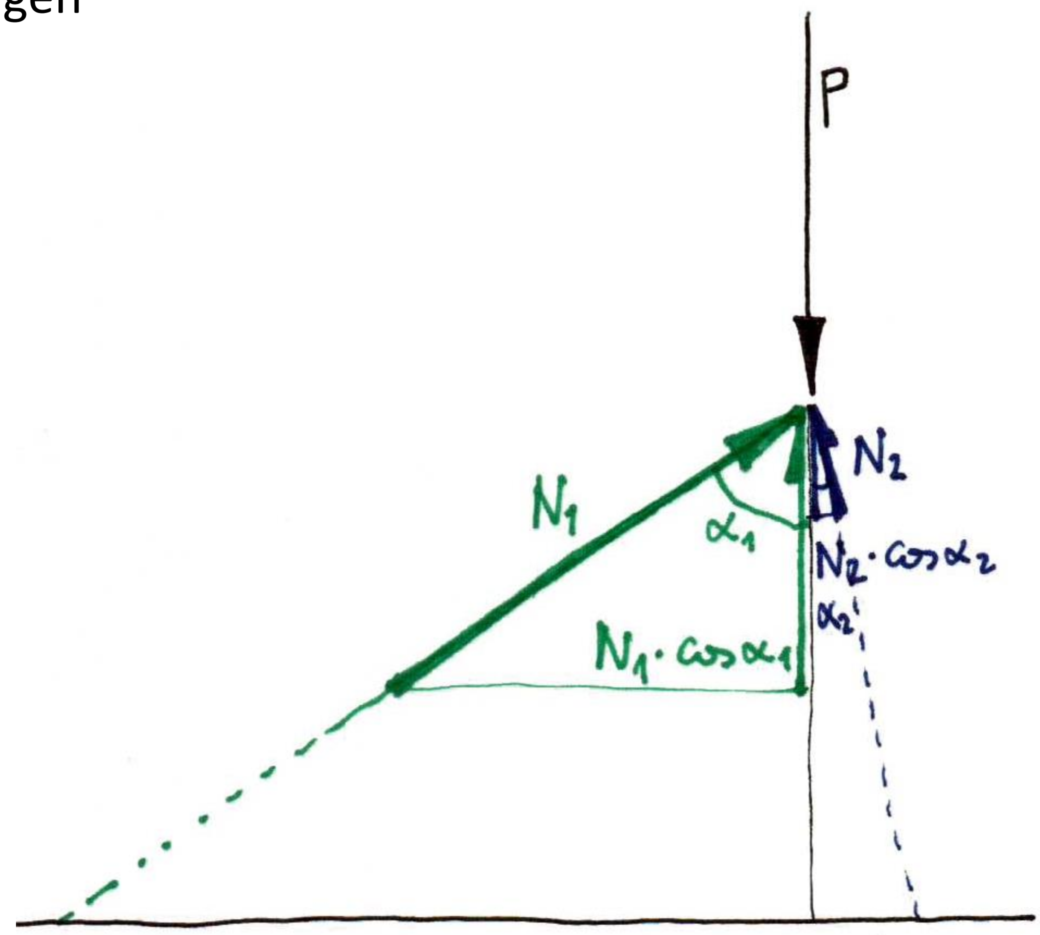


# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS DE BARRAS A AXIL

2) <u>Equilibrio:</u>

$$F = \sum N_i \cos \alpha_i$$

La fuerza actuante está en equilibrio con los axiles de las barras en el nudo donde convergen

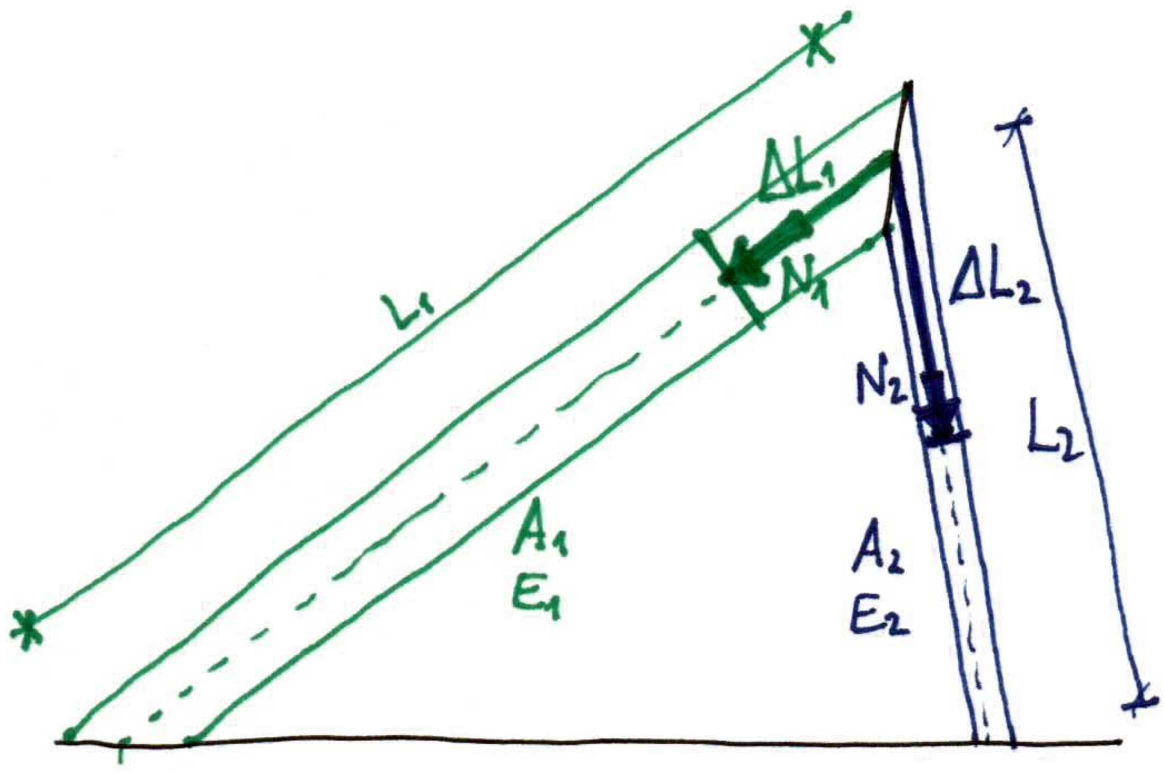


**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS DE BARRAS A AXIL**

3) <u>Comportamiento</u>

$$N_i = \frac{E_i A_i}{L_i} \Delta L_i$$

Se cumple la Ley de Hooke para cada barra por separado



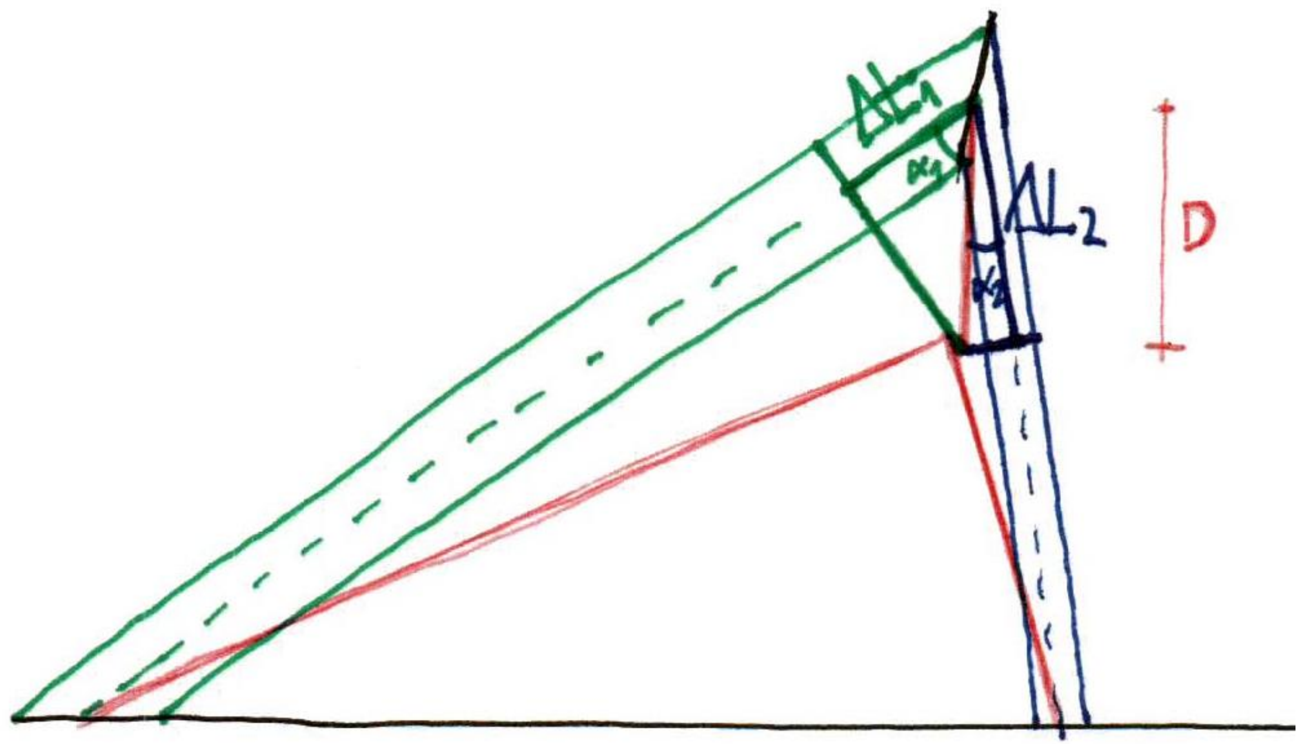
# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS DE BARRAS A AXIL

4) Compatibilidad*

$$D = \frac{\Delta L_1}{\cos\alpha_1} = \dots = \frac{\Delta L_n}{\cos\alpha_n}$$

Los alargamientos/acortamientos son tales que las barras siguen compartiendo nudo en la posición deformada, es decir, es un movimiento posible

* Fórmula solo válida cuando desplazamiento va en la dirección de la fuerza

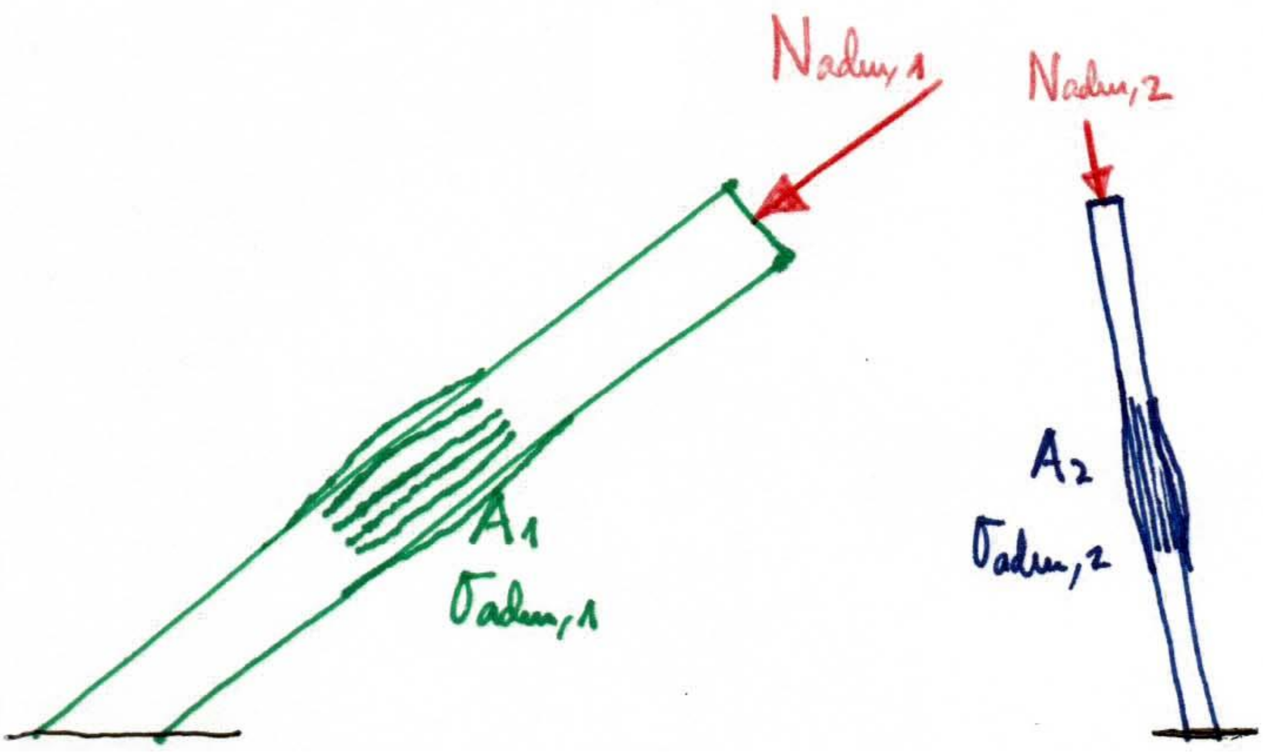


# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS DE BARRAS A AXIL

5) <u>Resistencia</u>

$$N_{adm,i} = A_i \cdot \sigma_{adm,i}$$

Cada barra por separado tiene su axil de rotura

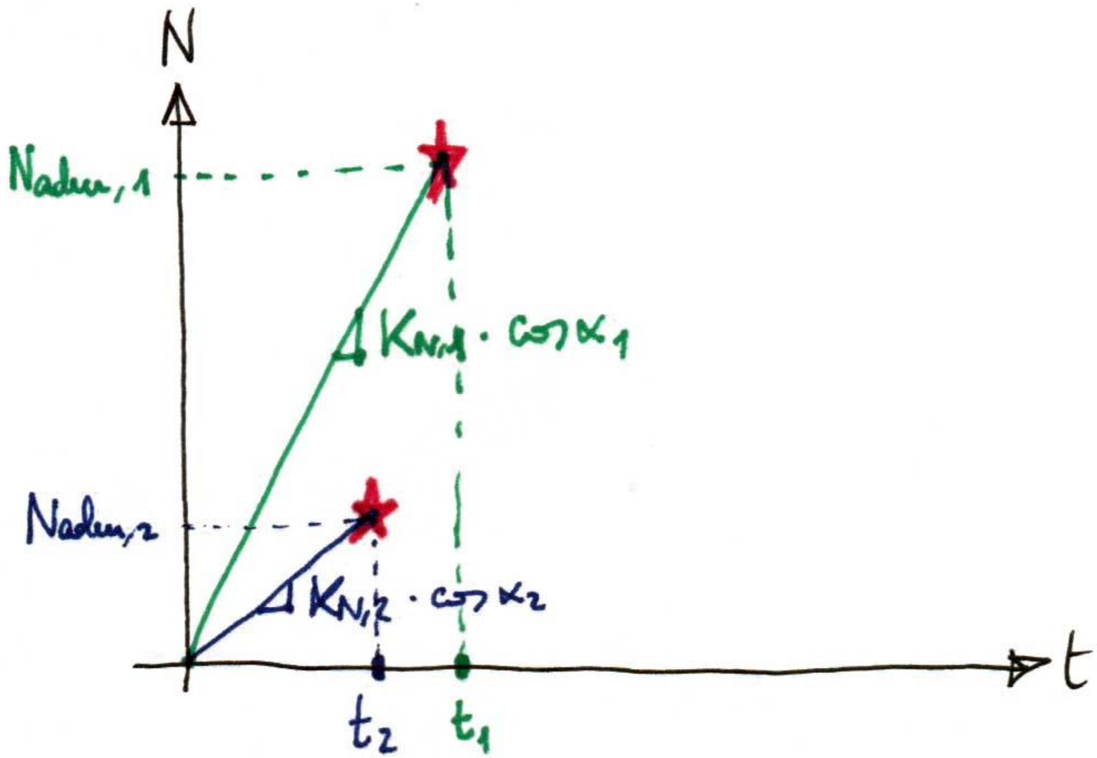


## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS DE BARRAS A AXIL

6) <u>Rotura</u>

$$\max \frac{K_{N,j} \cdot \cos\alpha_j}{N_{adm,j}}$$

Rompe primero la barra con máxima demanda/capacidad



# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS HIPERESTÁTICOS DE BARRAS A AXIL

1) Geometría

$$L_1 \cos\alpha_1 = \ldots = L_n \cos\alpha_n$$

2) Equilibrio

$$F = \sum N_i \cos\alpha_i$$

3) Comportamiento

$$N_i = \frac{E_i A_i}{L_i} \Delta L_i$$

4) Compatibilidad

$$D = \frac{\Delta L_1}{\cos\alpha_1} = \ldots = \frac{\Delta L_n}{\cos\alpha_n}$$

5) Resistencia

$$N_{adm,i} = A_i \cdot \sigma_{adm,i}$$

6) Rotura

$$\max \frac{K_{N,j} \cdot \cos\alpha_j}{N_{adm,j}}$$