

# HIPÓTESIS FUNDAMENTALES

# PROYECTO DE ESTRUCTURAS

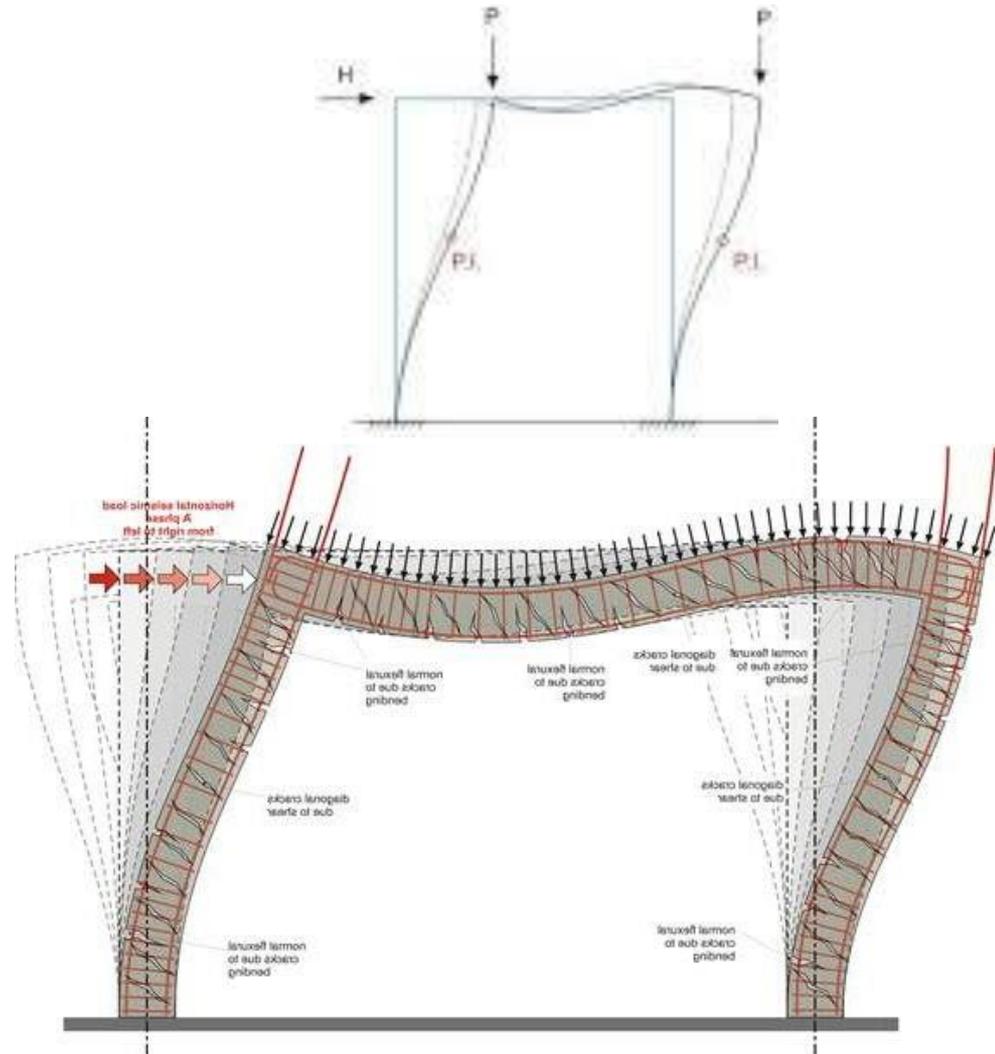
6 FASES:

- 1) Diseño: elección del sistema y definición geométrica
- 2) Modelización: elaboración de modelo físico
- 3) Análisis: cálculo de solicitaciones y deformaciones de los elementos
- 4) Dimensionado: elección de secciones que satisfagan requisitos
- 5) Representación
- 6) Ejecución

# MODELIZACIÓN ESTRUCTURAL

Representar estructura real mediante 4 tipos de elementos:

- Geometría
- Material
- Apoyos
- Acciones



# TIPOS DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

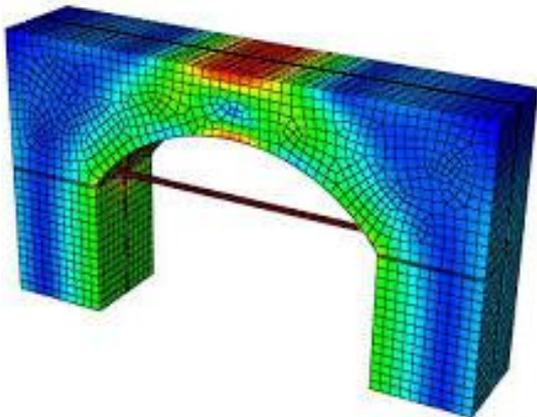
1D – Barra



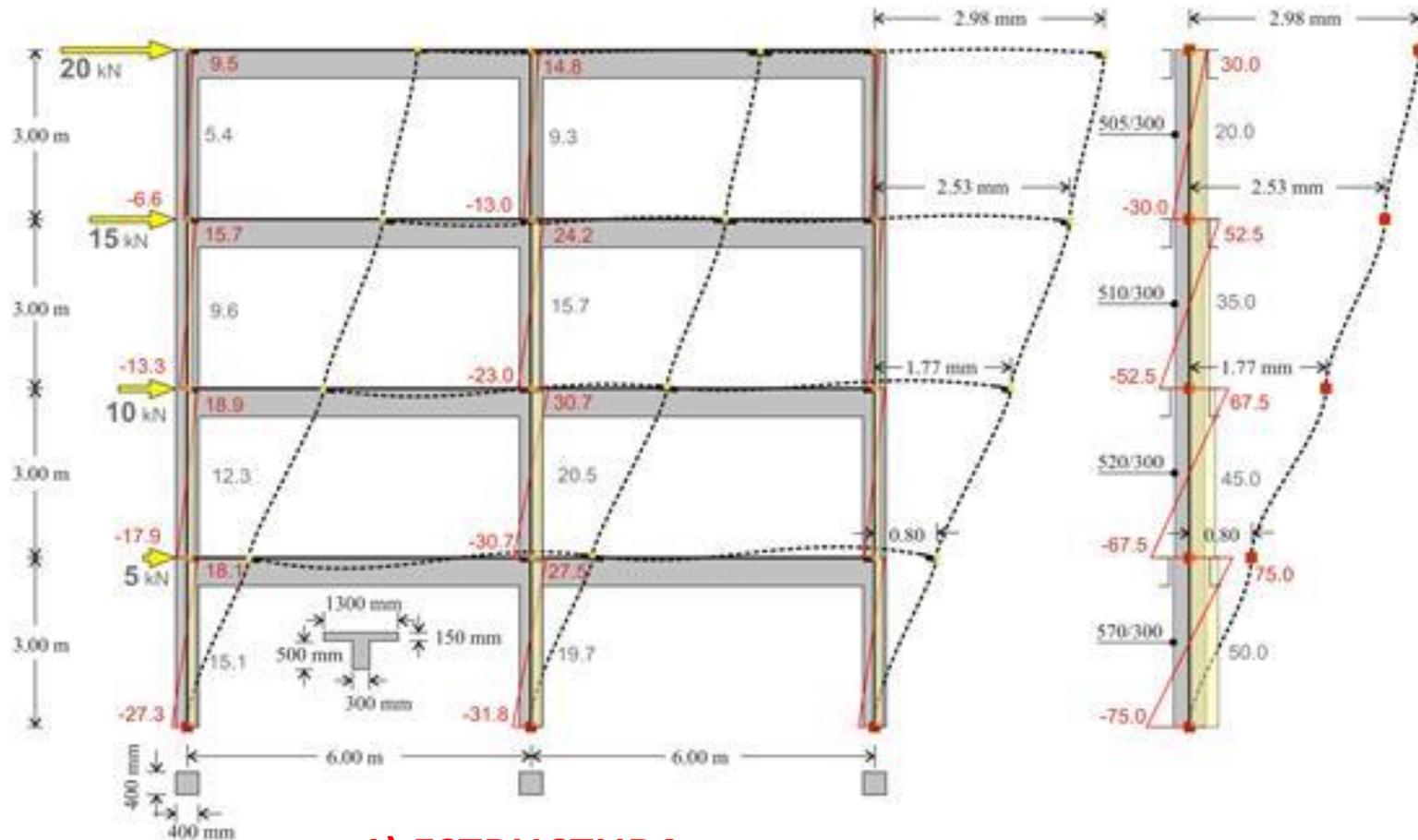
2D – Membrana/Placa



3D – Sólido volumétrico



# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

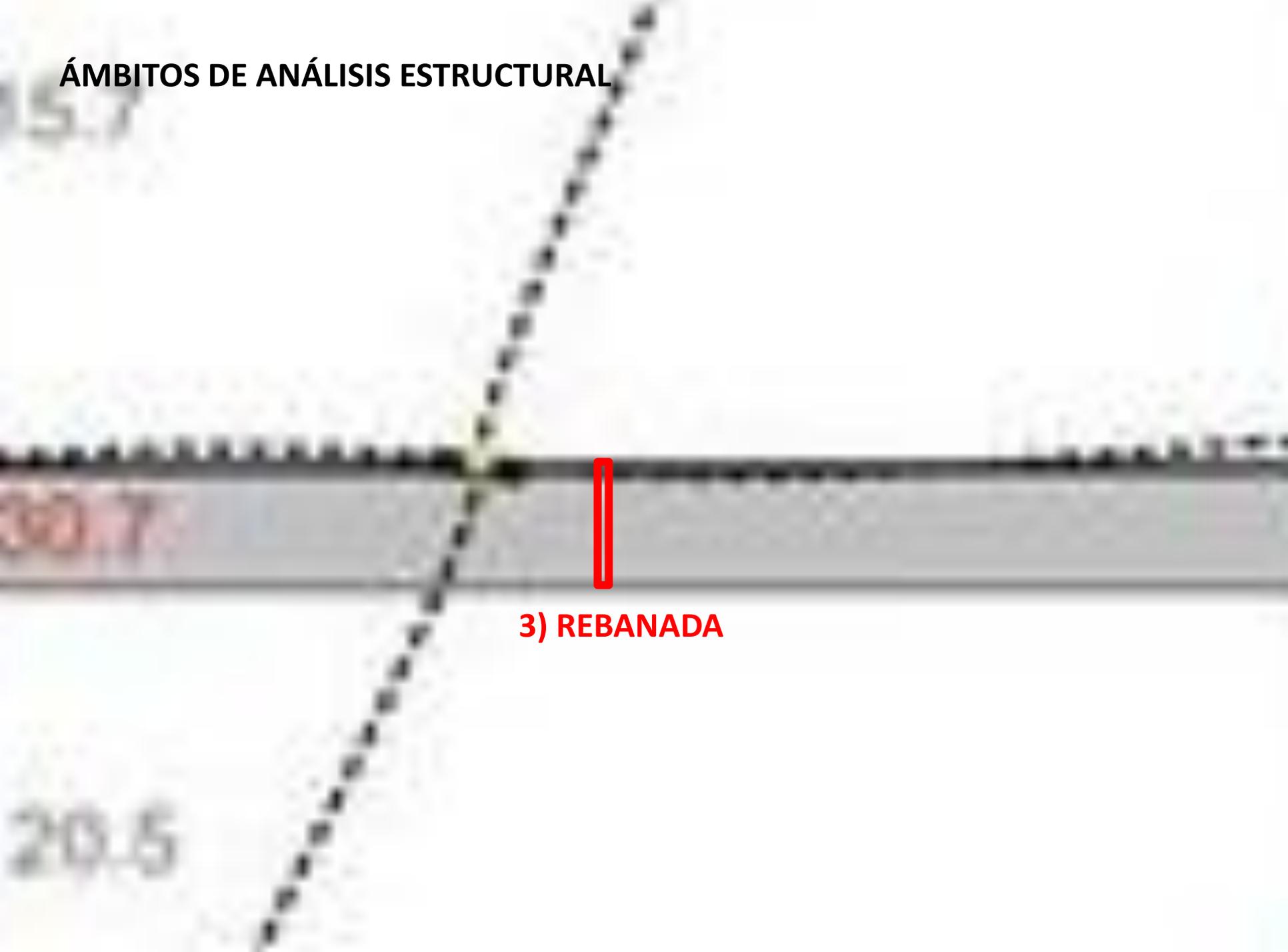


## 1) ESTRUCTURA

# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

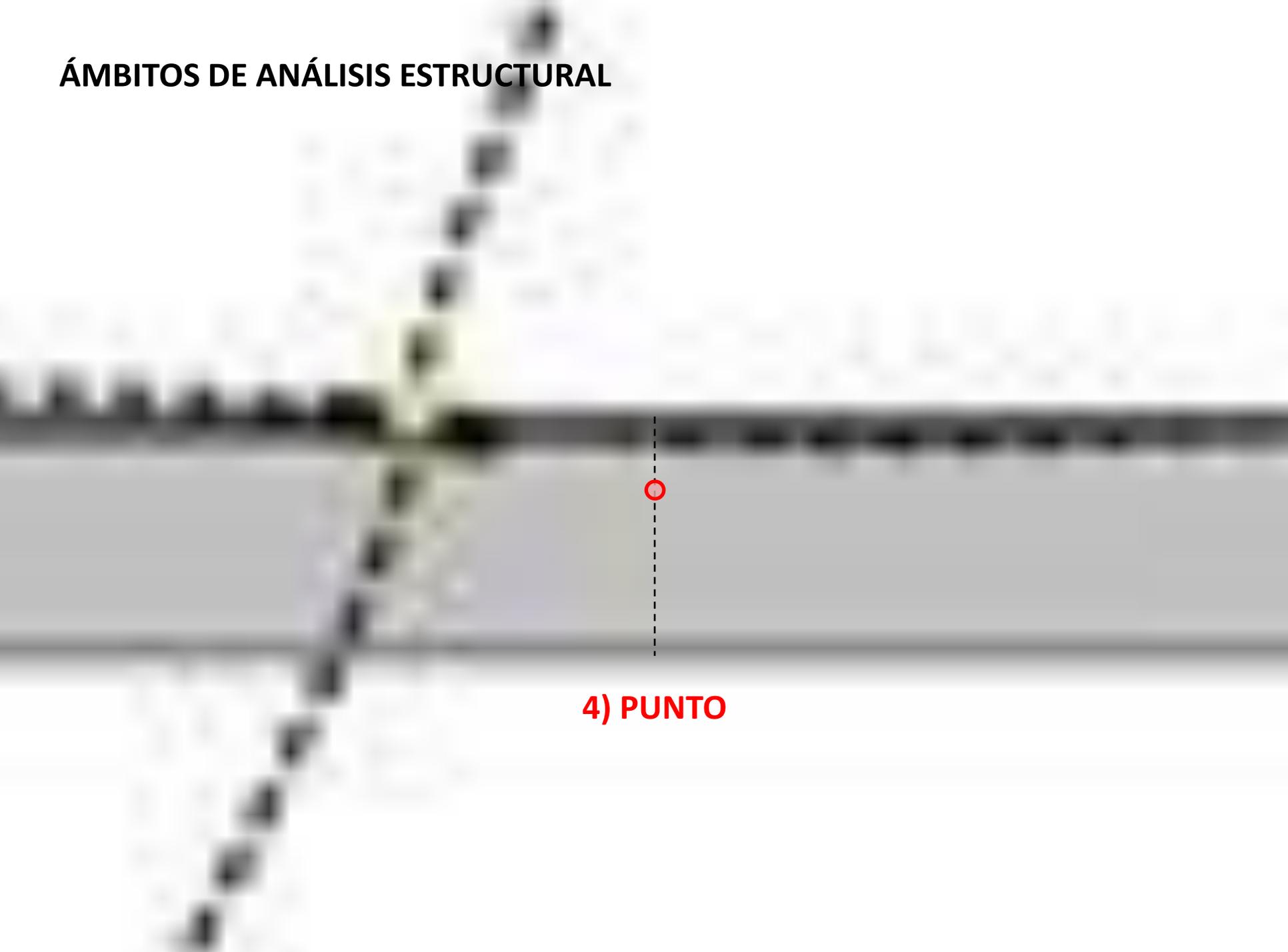


# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL



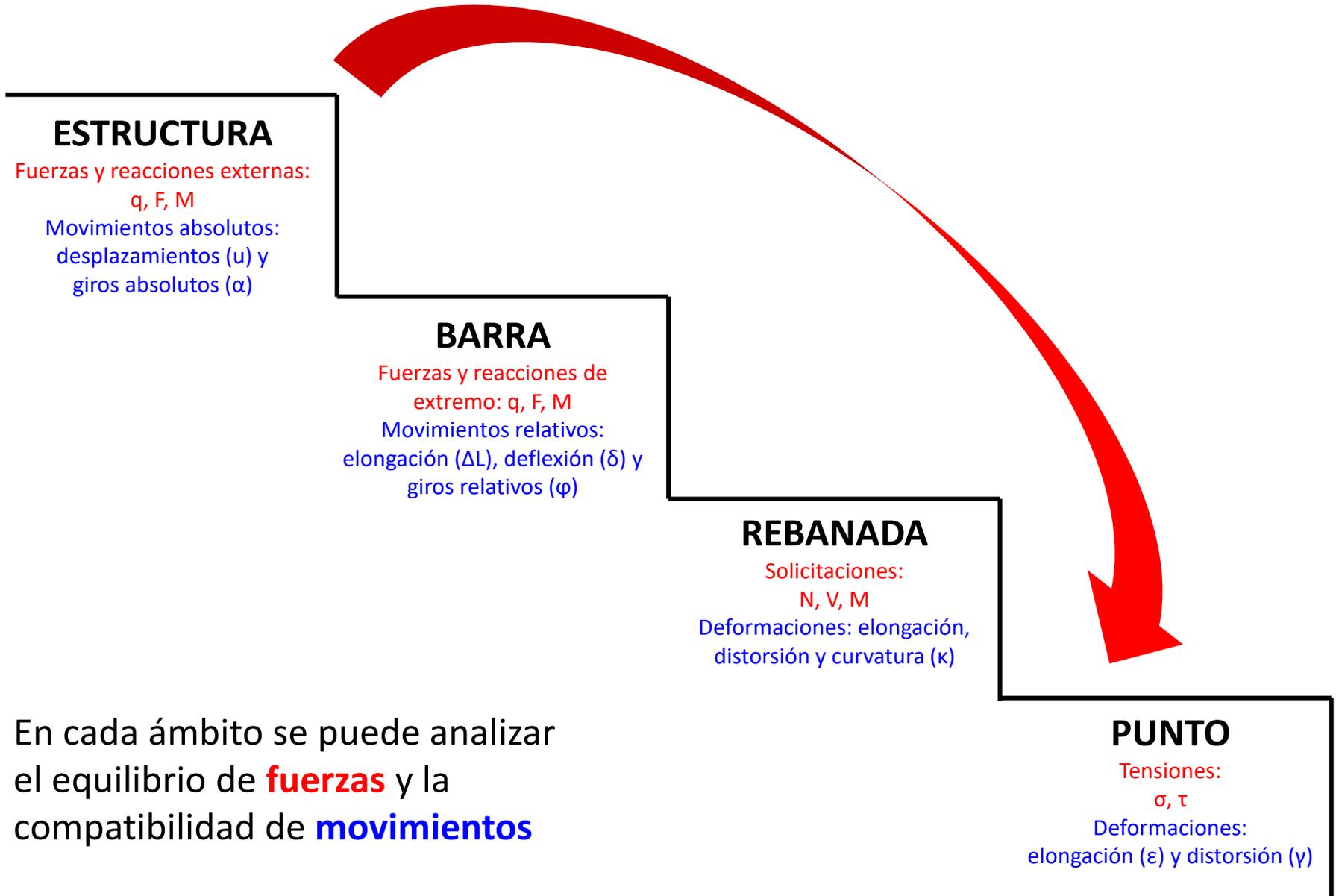
3) REBANADA

# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL



4) PUNTO

# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL



En cada ámbito se puede analizar el equilibrio de **fuerzas** y la compatibilidad de **movimientos**

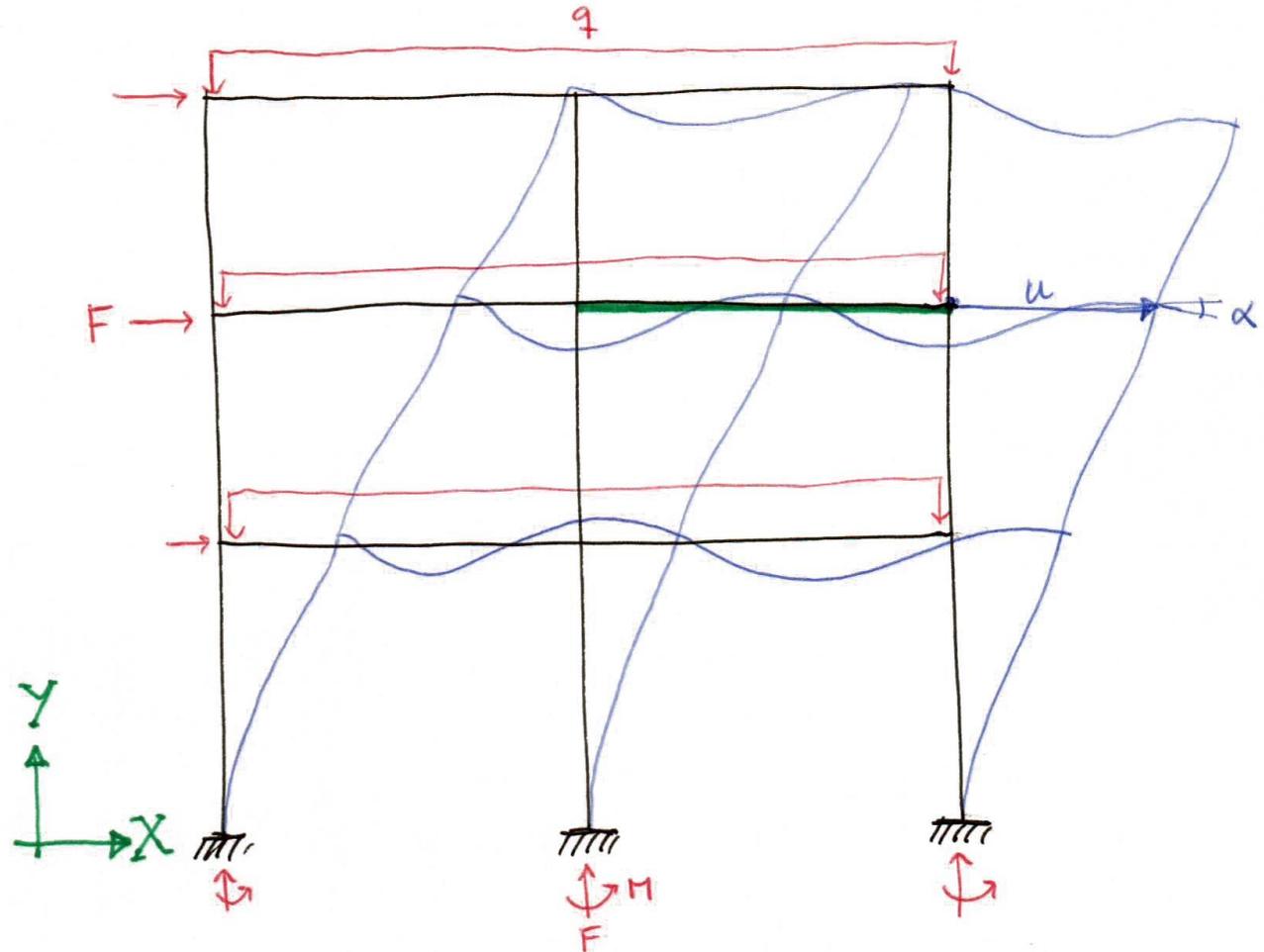
# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

## ESTRUCTURA

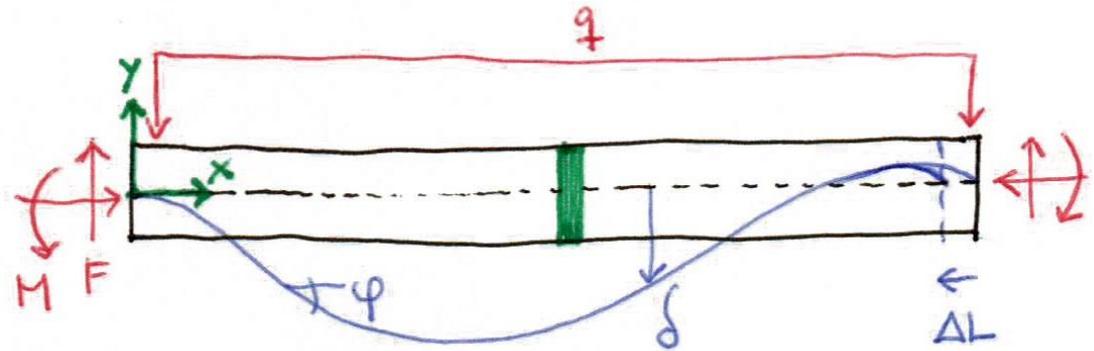
Fuerzas y reacciones externas:

$q, F, M$

Movimientos absolutos:  
desplazamientos ( $u$ ) y  
giros absolutos ( $\alpha$ )



# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

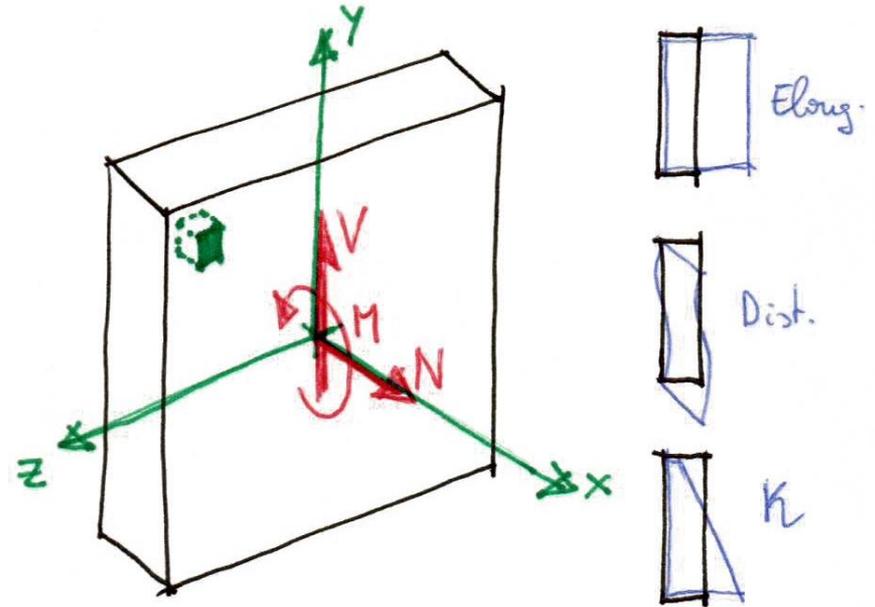


## BARRA

Fuerzas y reacciones de extremo:  $q$ ,  $F$ ,  $M$

Movimientos relativos: elongación ( $\Delta L$ ), deflexión ( $\delta$ ) y giros relativos ( $\varphi$ )

# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL



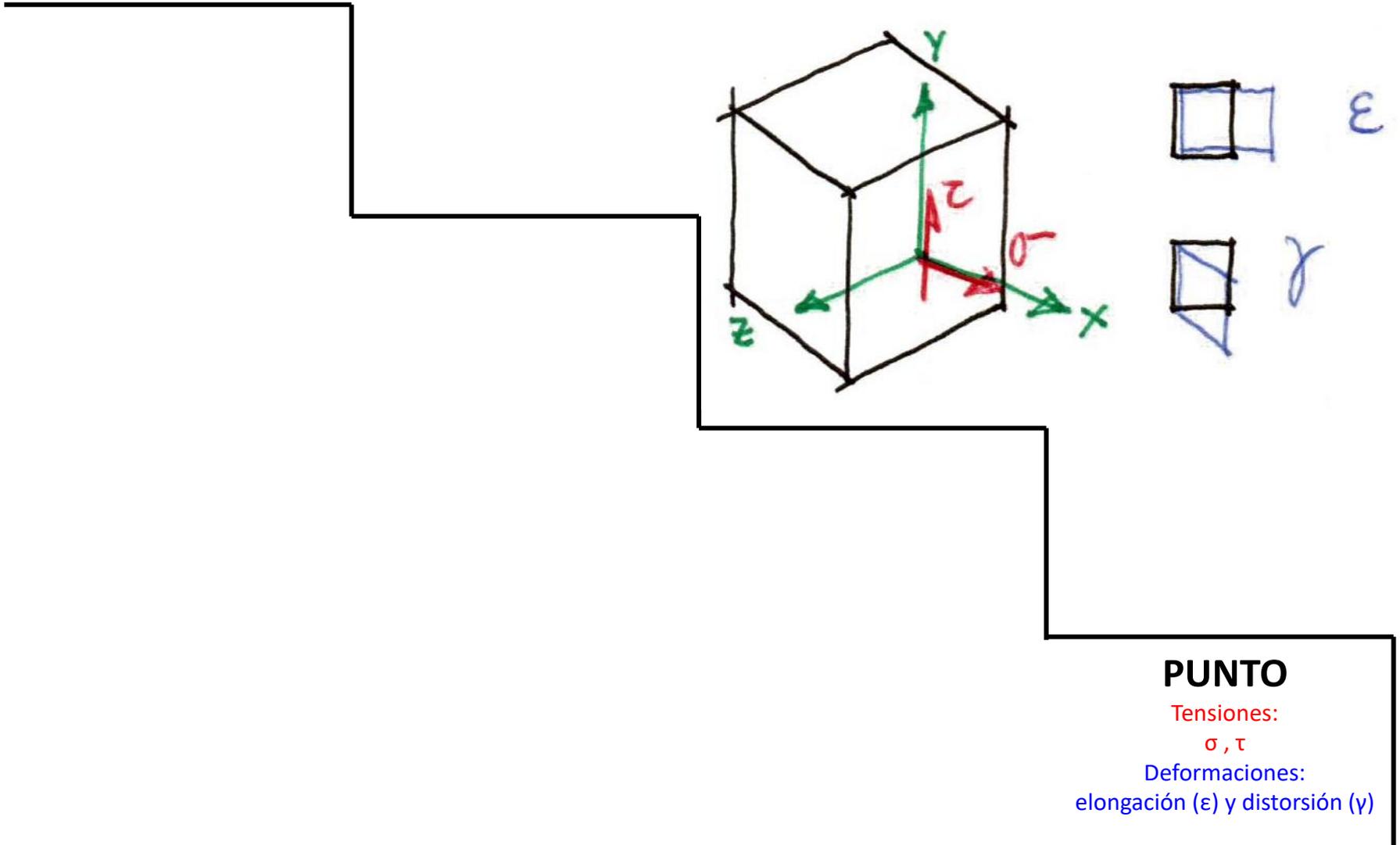
## REBANADA

Solicitaciones:

$N, V, M$

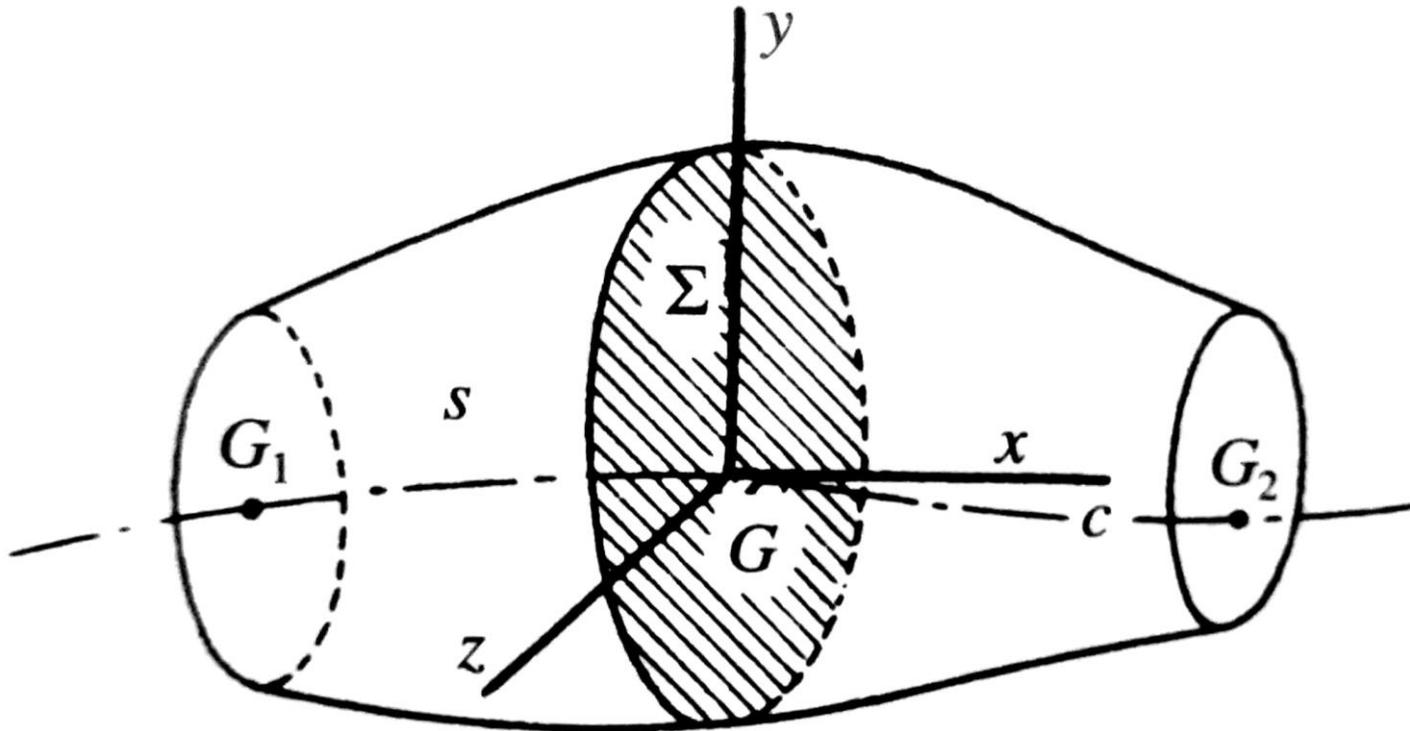
Deformaciones: elongación,  
distorsión y curvatura ( $\kappa$ )

# ÁMBITOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL



## BARRA: PRISMA MECÁNICO

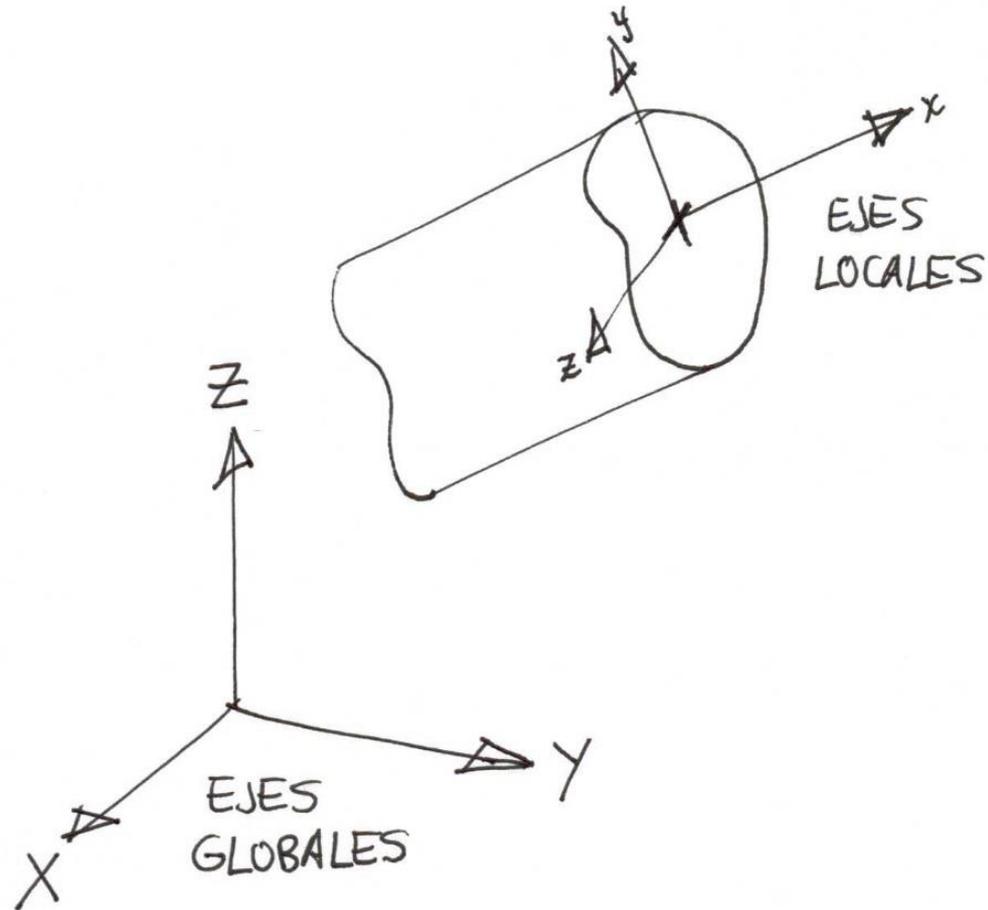
Sólido engendrado por una sección variable cuyo CDG describe una curva, manteniéndose la sección perpendicular a dicha curva



# SISTEMA DE REFERENCIA

Ejes globales: Estructura completa o nudos

Ejes locales: Barras y secciones

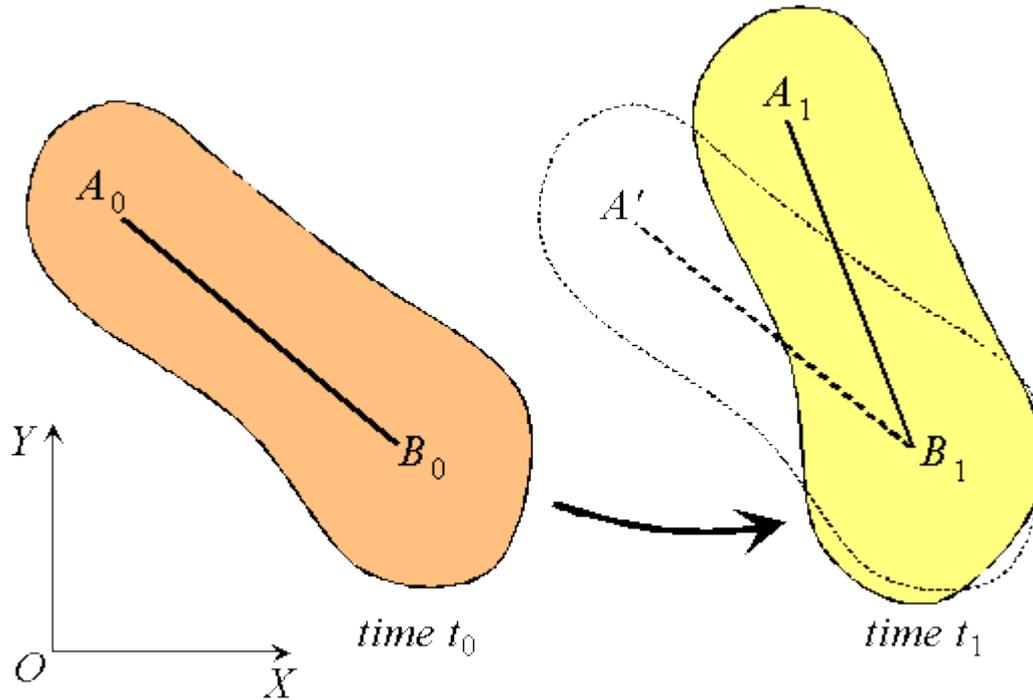


# SÓLIDO RÍGIDO

No existe movimiento relativo entre sus puntos

El cuerpo únicamente se desplaza (traslación y rotación), sin deformarse

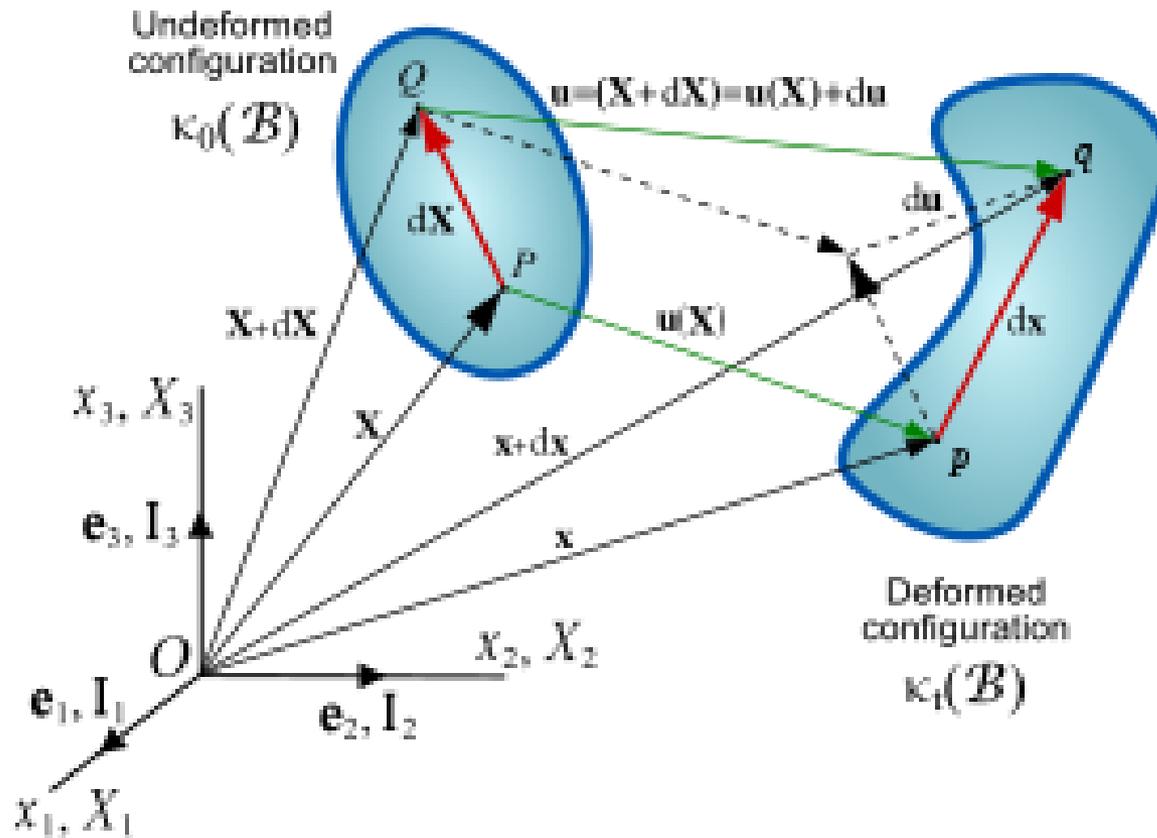
(NO ES OBJETO DE ESTA ASIGNATURA)



# SÓLIDO DEFORMABLE

Existe movimiento relativo entre sus puntos

El cuerpo se desplaza como sólido rígido y además se deforma



## SÓLIDO DEFORMABLE

Las fuerzas NO las podemos ver

Las deformaciones SÍ las podemos ver



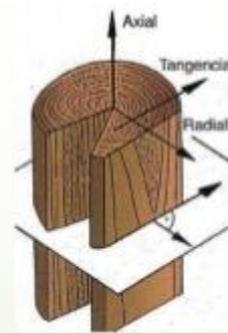
# SÓLIDO DEFORMABLE

Las estructuras de edificación se comportan como sólidos deformables

Requisitos para un análisis dentro de los límites de la Resistencia de Materiales:

- Continuidad: no existen poros ni espacios vacíos dentro del contorno del sólido
- Homogeneidad: tiene propiedades idénticas en todos sus puntos
- Isotropía: tiene propiedades idénticas en todas direcciones

**Anisotropía:** Todas las propiedades de la madera difieren en las tres direcciones básicas de su anatomía (axial, radial, tangencial)



# CONDICIONES DE CONTORNO Y ENLACES

Grados de libertad (GDL): Variables mínimas para definir cualquier movimiento de un nudo. En el plano (2D): 3 GDL ( $D_x$ ,  $D_y$ ,  $G_z$ )

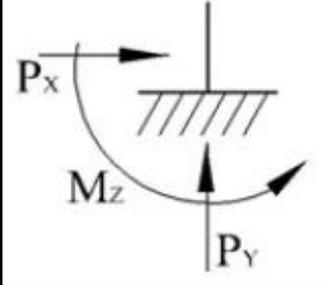
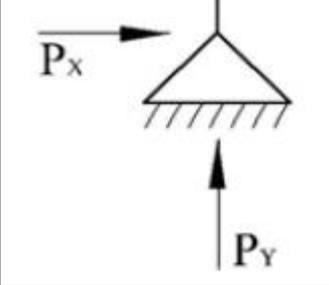
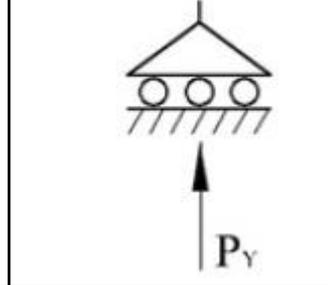
Condiciones de contorno (apoyos, ligaduras): vínculos de la estructura con el exterior. Fijan GDL → Por cada GDL impedido aparece una reacción

Enlaces (uniones): vínculos de barras entre sí en sus extremos



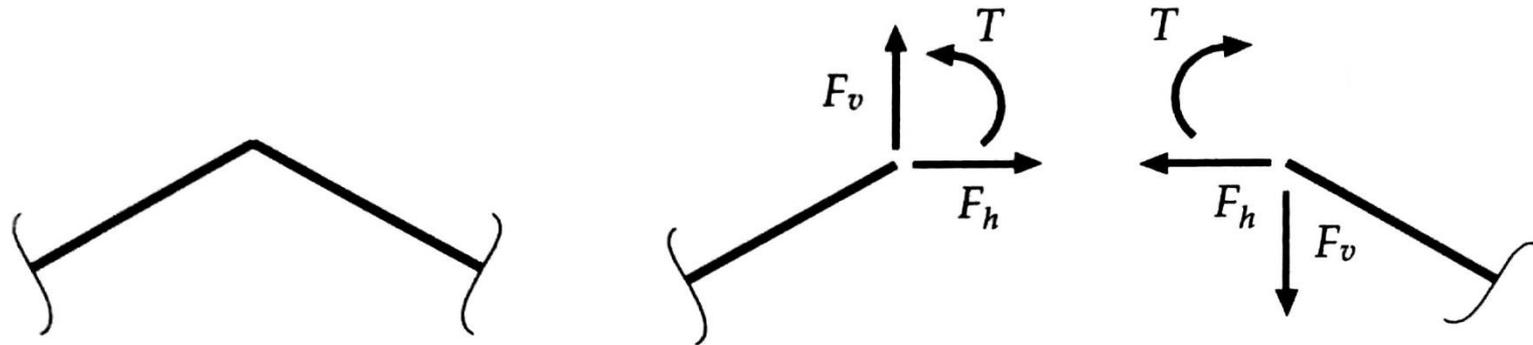
# TIPOS DE APOYOS

Donde hay movimiento no hay fuerza, y viceversa

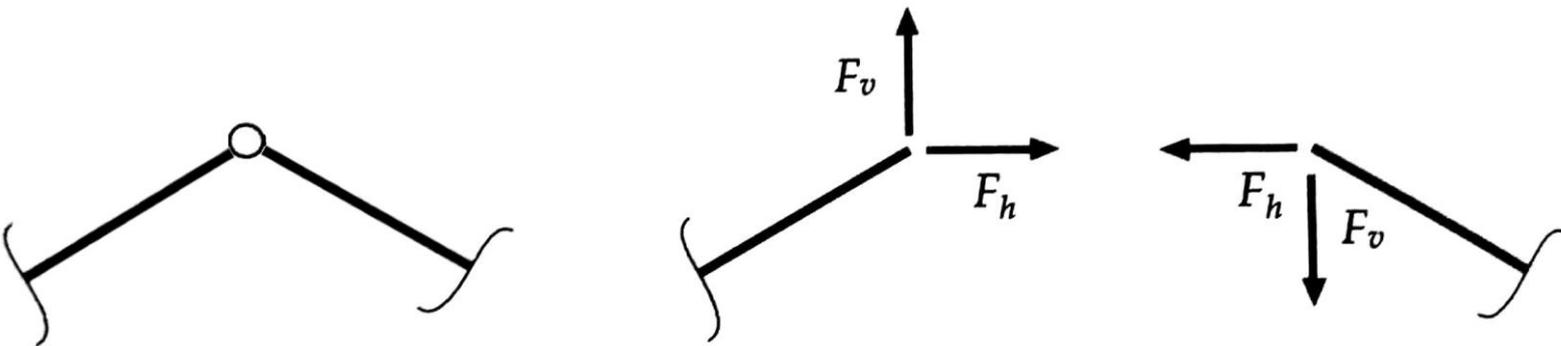
GDL			
	Empotramiento	Articulación	Carro
Dx	0	0	Libre
Dy	0	0	0
Gz	0	Libre	Libre
Rx	≠0	≠0	0
Ry	≠0	≠0	≠0
Mz	≠0	0	0

## TIPOS DE ENLACES

Nudo rígido (3 reacciones internas)

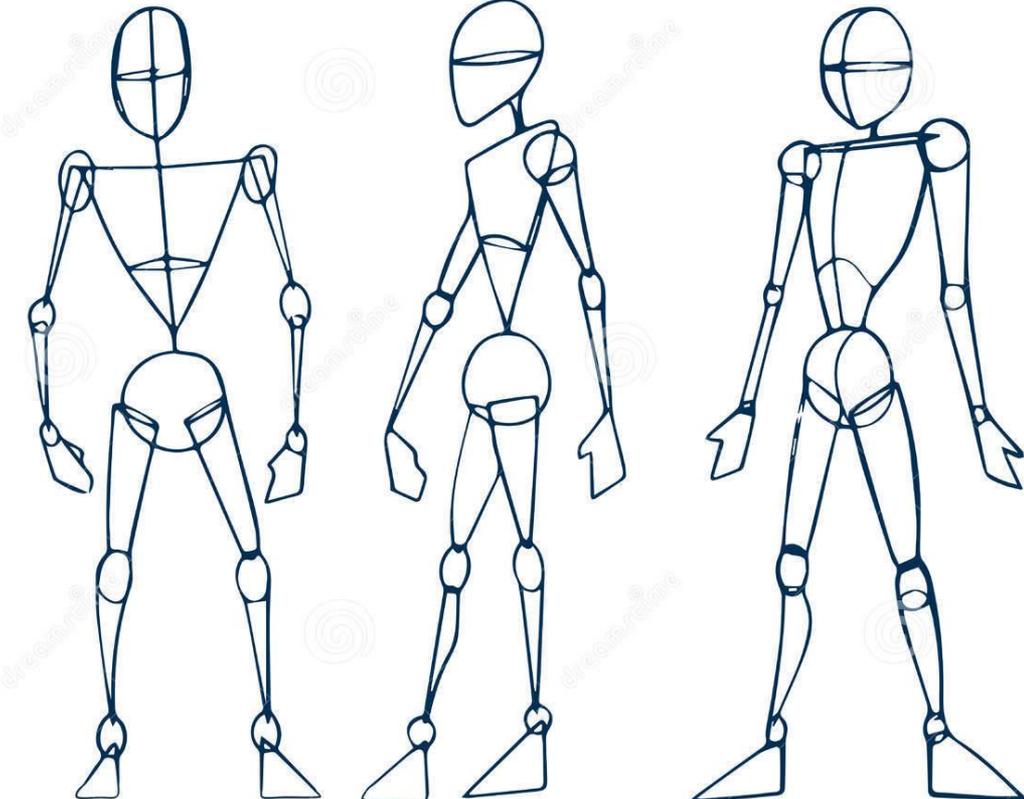


Nudo articulado (2 reacciones internas)

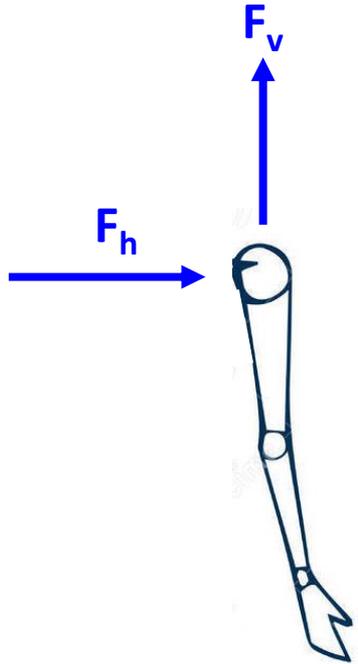
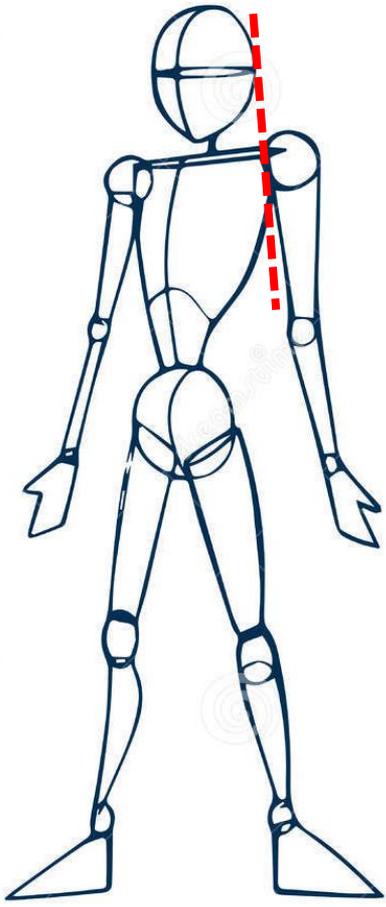


(más todas las combinaciones posibles entre rígido, articulado y deslizante)

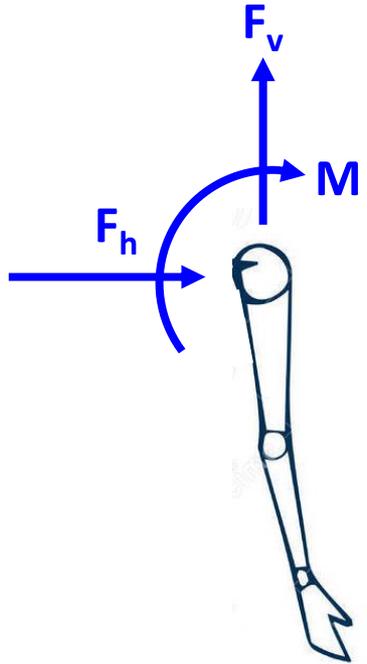
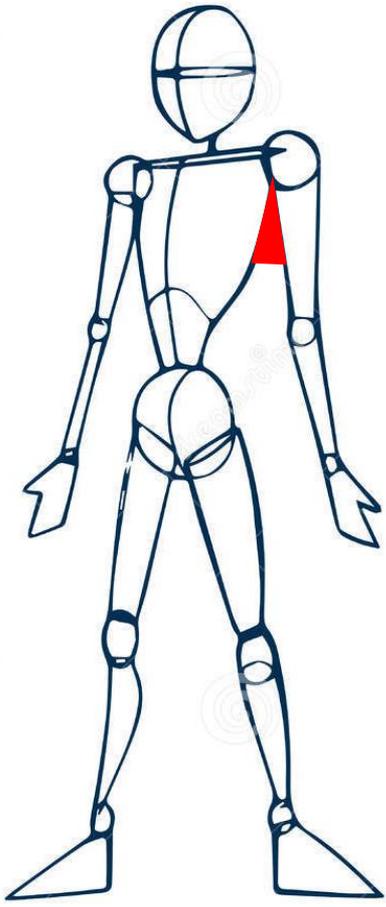
# TIPOS DE ENLACES



# TIPOS DE ENLACES



# TIPOS DE ENLACES



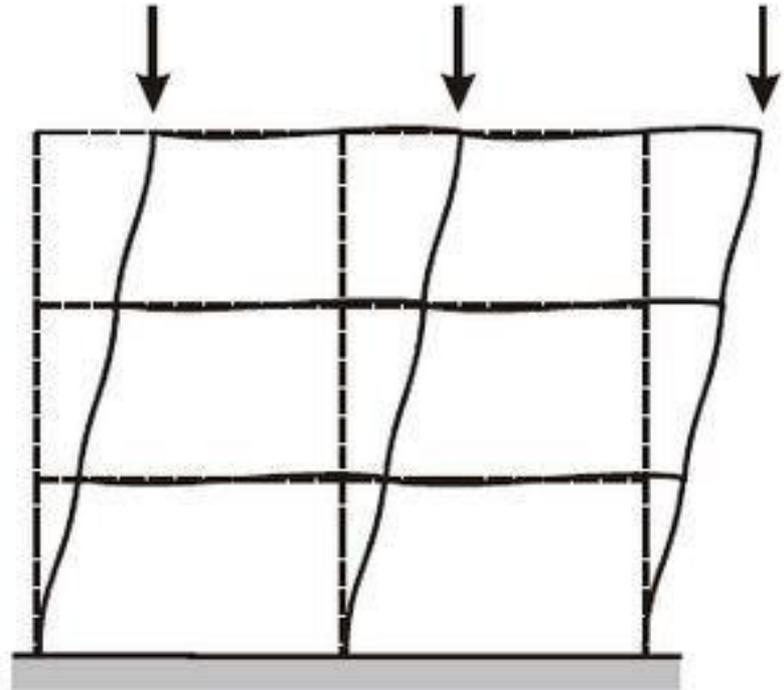
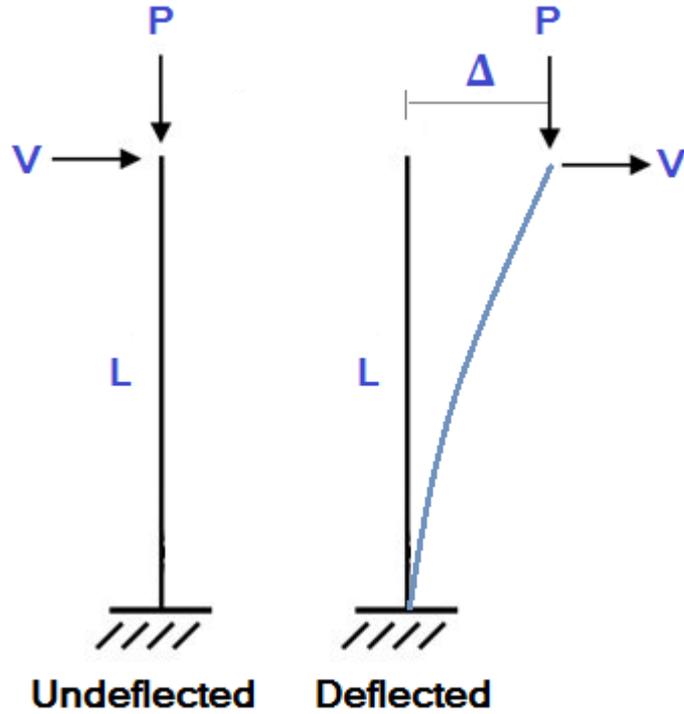
# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

- 1) Principio de rigidez relativa (o pequeñas deformaciones)
- 2) Principio de proporcionalidad
- 3) Principio de superposición de efectos
- 4) Principio de equilibrio estático
- 5) Principio de compatibilidad de deformaciones
- 6) Principio de Saint-Venant
- 7) Hipótesis de Navier-Bernoulli

# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 1) Principio de rigidez relativa (o pequeñas deformaciones)

Las deformaciones son suficientemente pequeñas como para asumir que las fuerzas no cambian su línea de acción



# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 1) Principio de rigidez relativa (o pequeñas deformaciones)

Las deformaciones son suficientemente pequeñas como para asumir las siguientes simplificaciones geométricas:

( $\varphi$  en radianes!!)

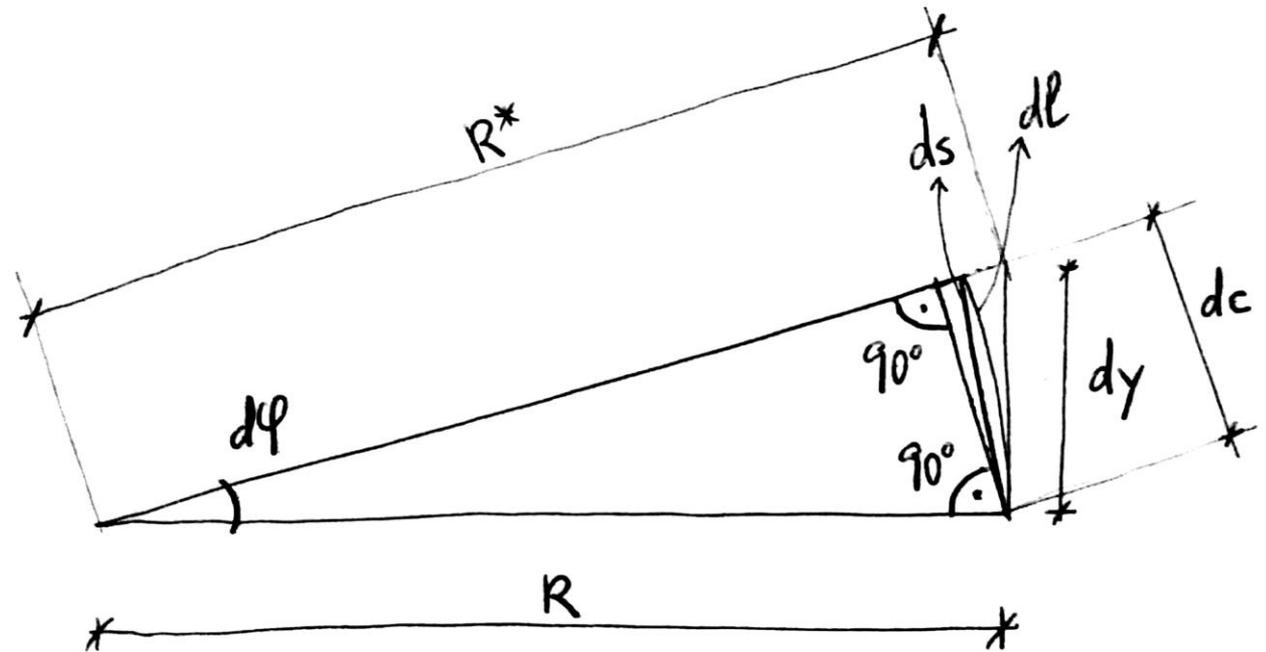
$$\tan(d\varphi) = d\varphi$$

$$\sin(d\varphi) = d\varphi$$

$$\cos(d\varphi) = 1$$

$$R = R^*$$

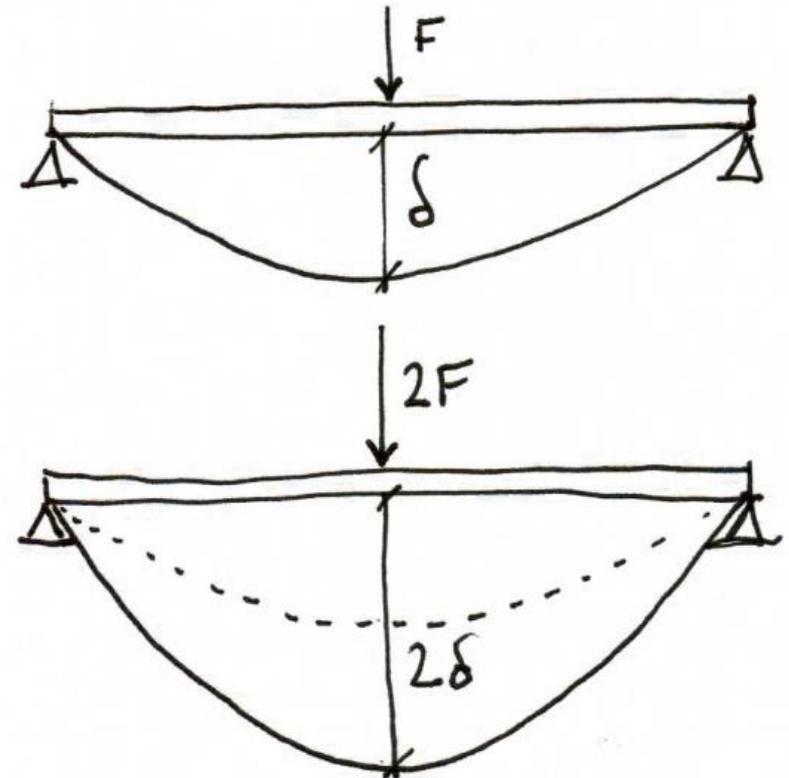
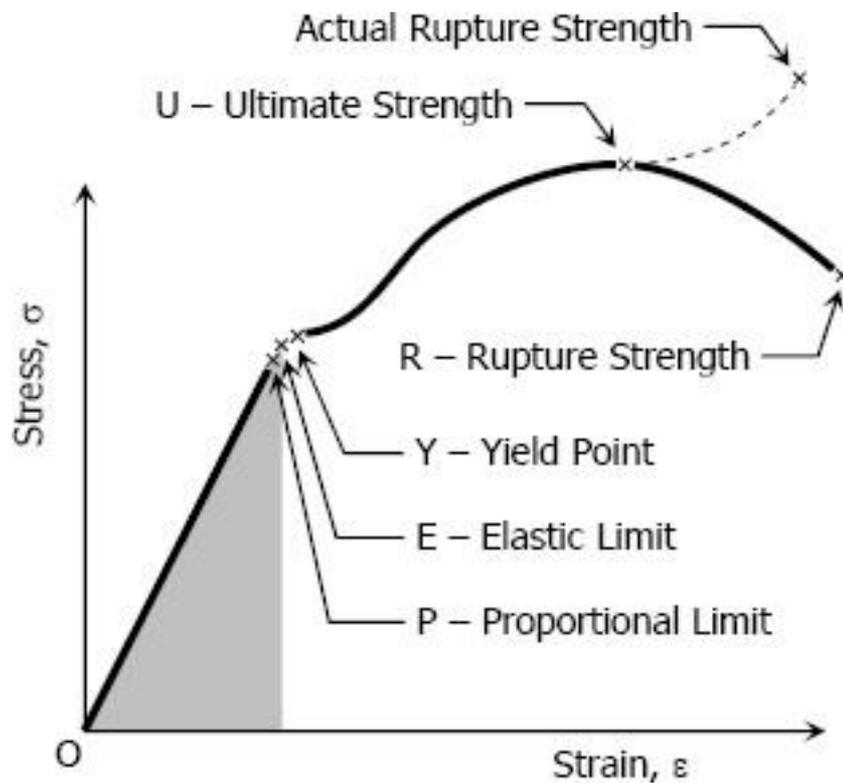
$$dy = dl = ds = dc$$



# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 2) Principio de proporcionalidad

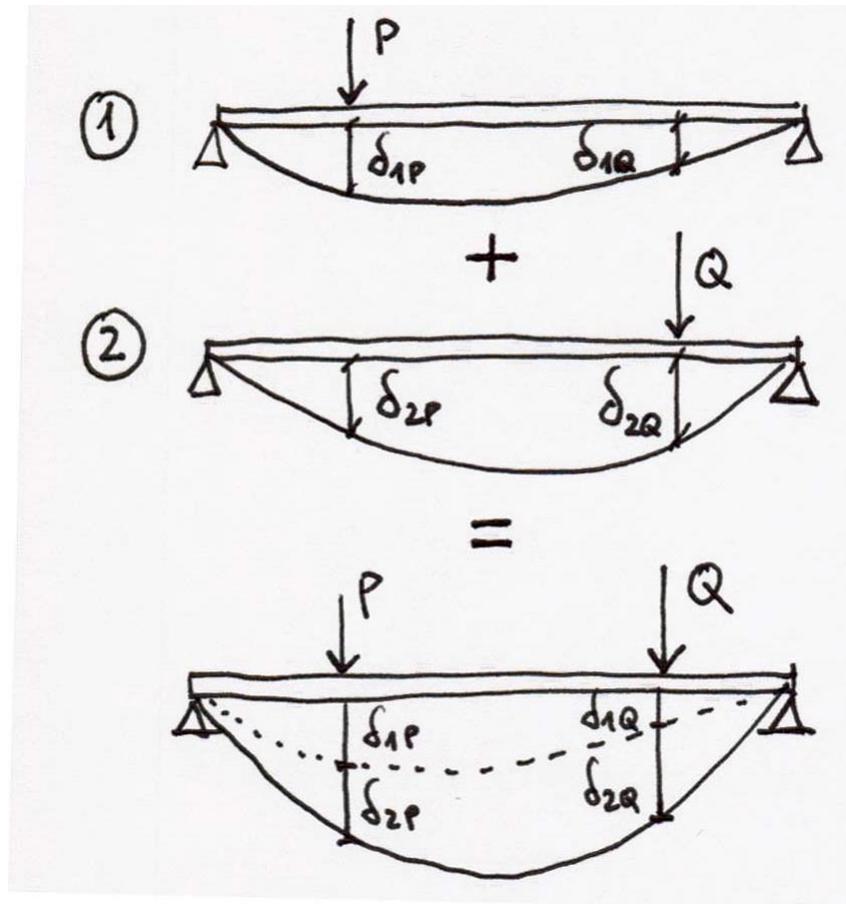
El material se comporta en fase elástica  $\rightarrow$  Fuerza  $\propto$  Deformación



# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 3) Principio de superposición de causas y efectos

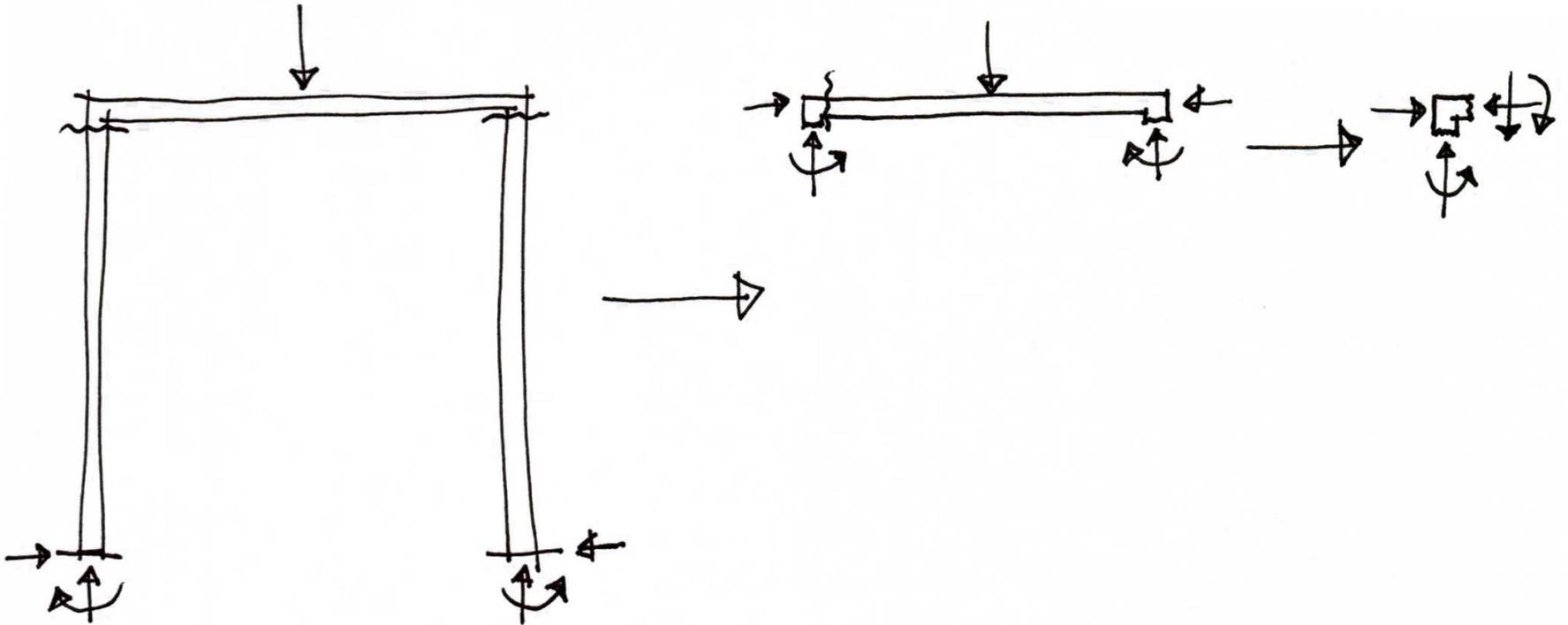
Se puede componer y descomponer cualquier estado de fuerzas y deformaciones



# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 4) Principio de equilibrio estático

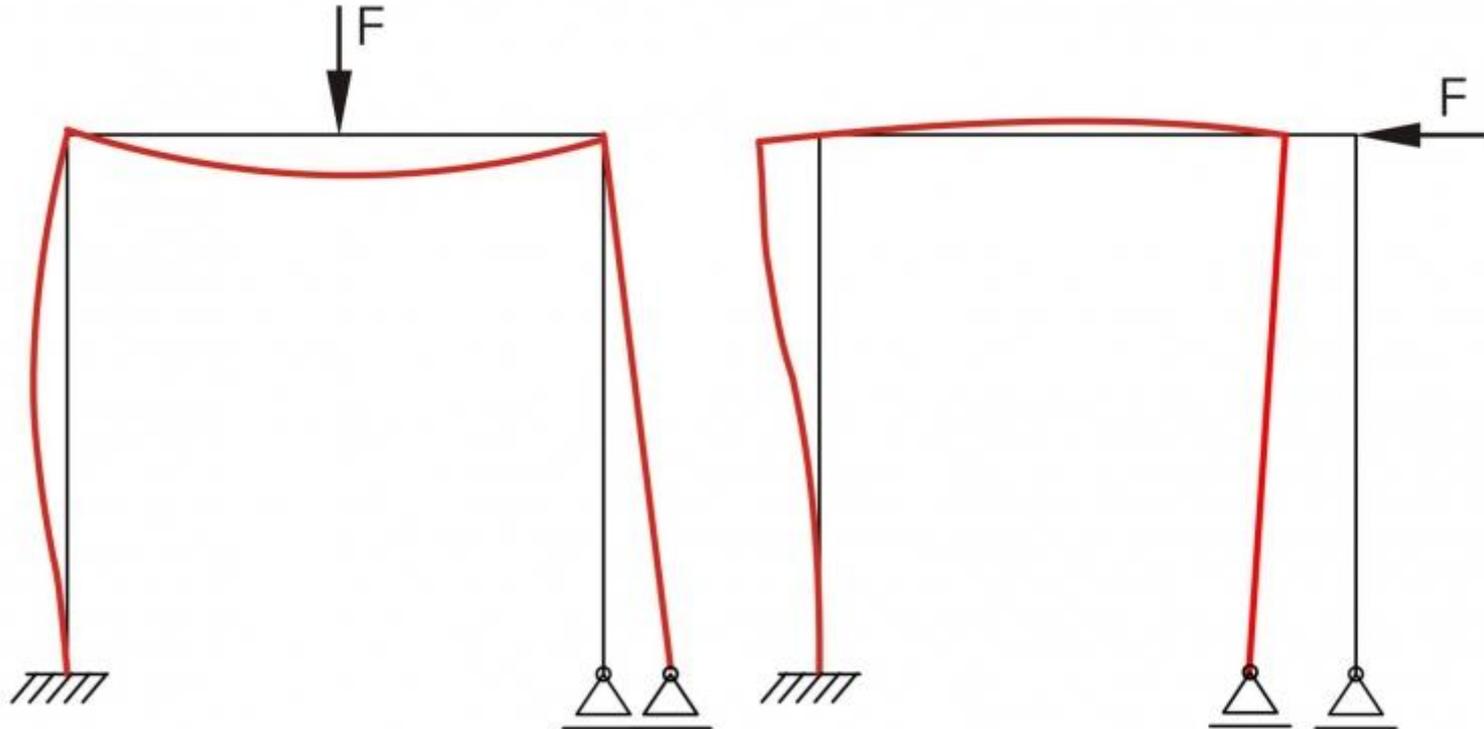
Si la estructura está en equilibrio, cualquier porción (barra, nudo...) también lo está



# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 5) Principio de compatibilidad de deformaciones

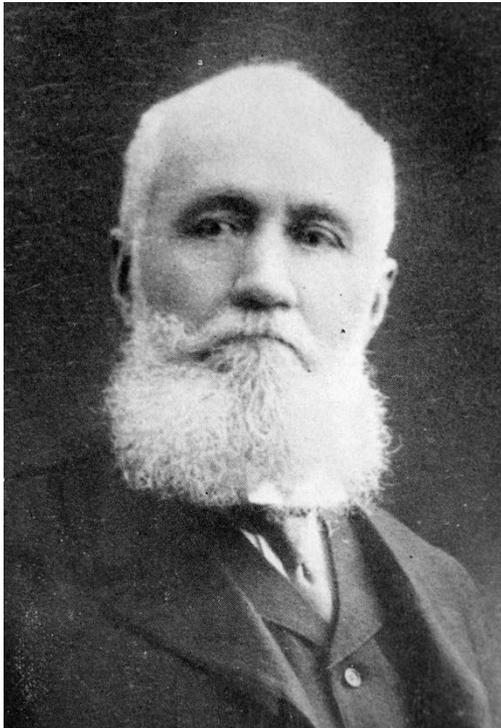
Los movimientos de la estructura respetan los vínculos en los apoyos y ligaduras de los nudos



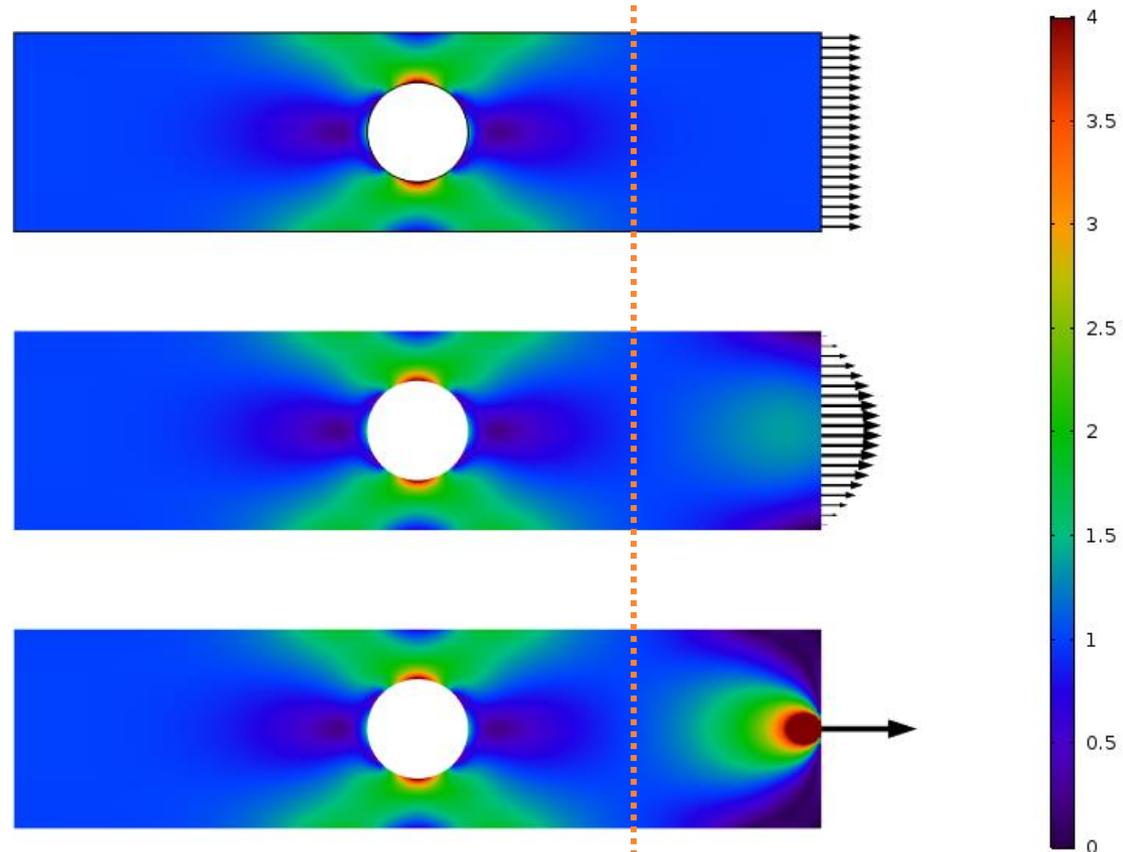
# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 6) Principio de Saint-Venant

Si a una sección de un mismo sólido se le aplican dos sistemas de cargas equivalentes, las tensiones y deformaciones a una cierta distancia de dicha sección son idénticas



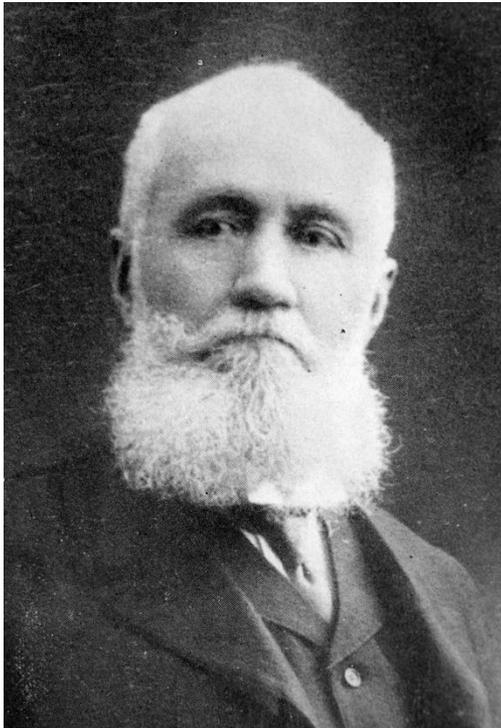
Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant  
(1797 – 1886)



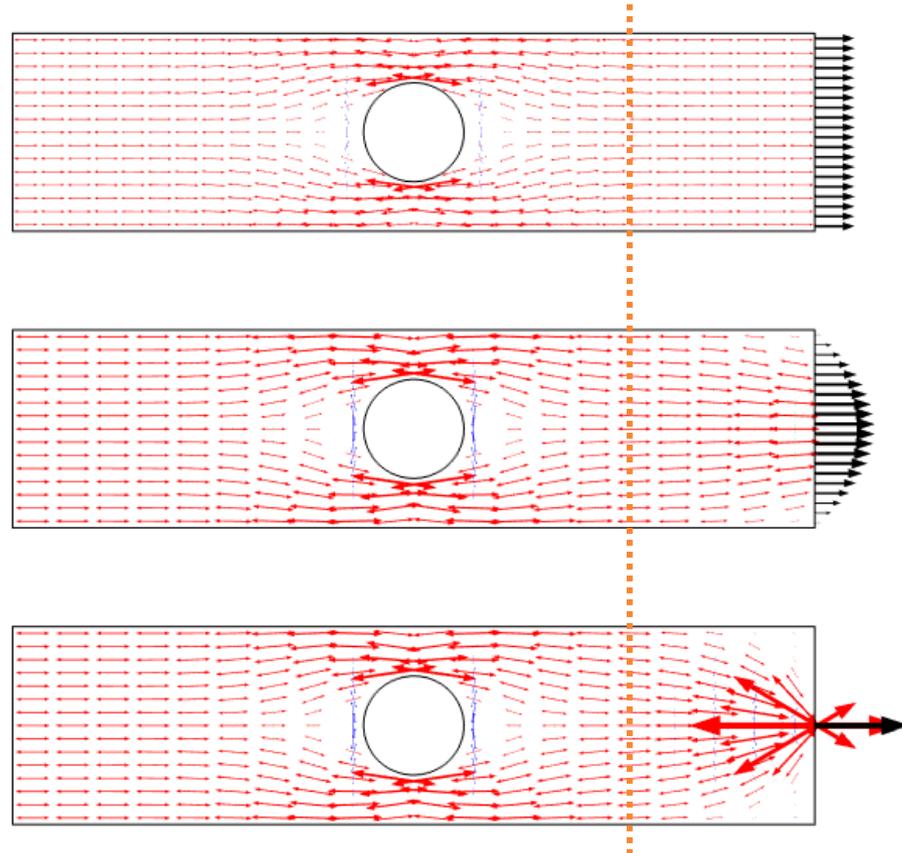
# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 6) Principio de Saint-Venant

Si a una sección de un mismo sólido se le aplican dos sistemas de cargas equivalentes, las tensiones y deformaciones a una cierta distancia de dicha sección son idénticas



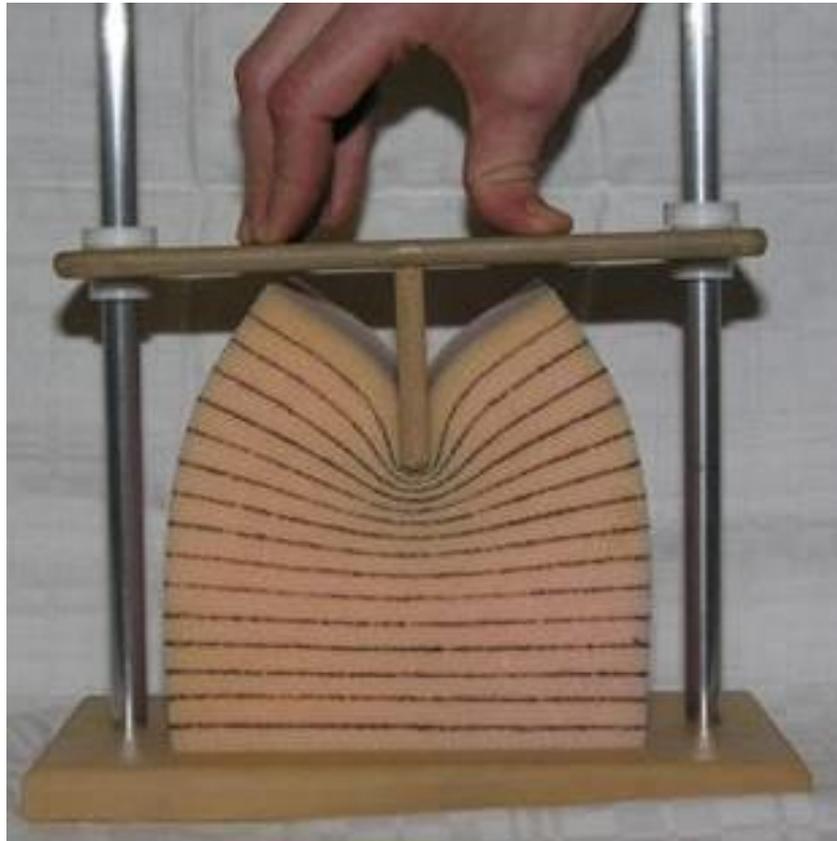
Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant  
(1797 – 1886)

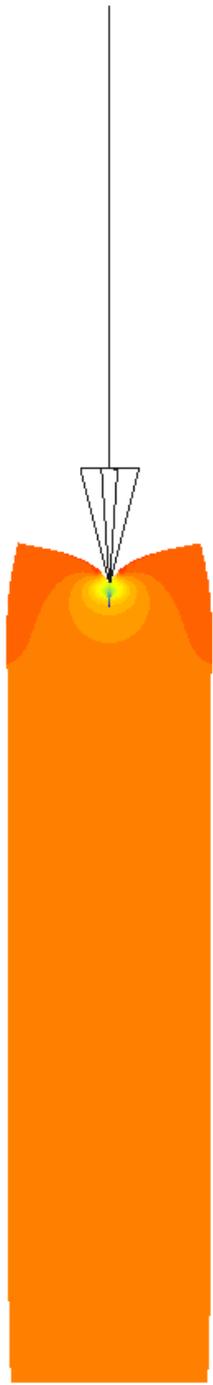


# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 6) Principio de Saint-Venant

Los efectos localizados se disipan a una cierta distancia →  
Se trabaja con la resultante sobre la sección





# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 7) Hipótesis de Navier-Bernoulli

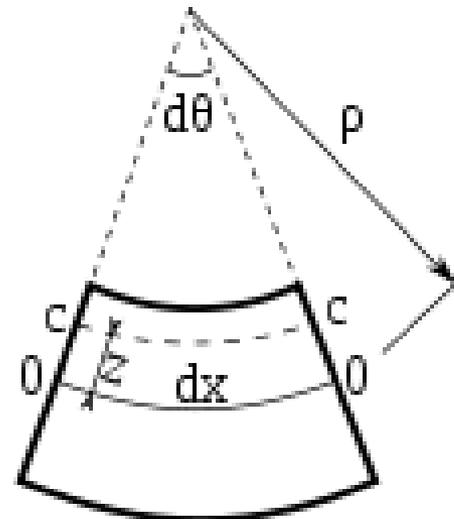
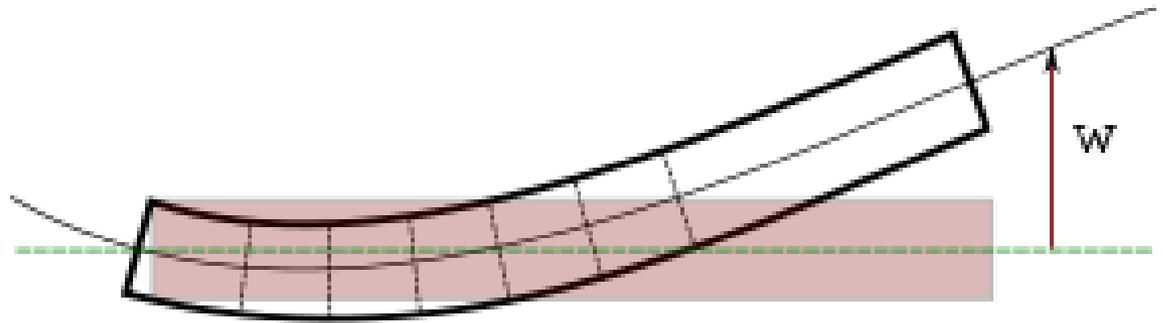
Las secciones de las barras se mantienen planas y perpendiculares a la directriz después de la deformación



Claude-Louis  
Marie Henri  
Navier  
(1785 – 1836)



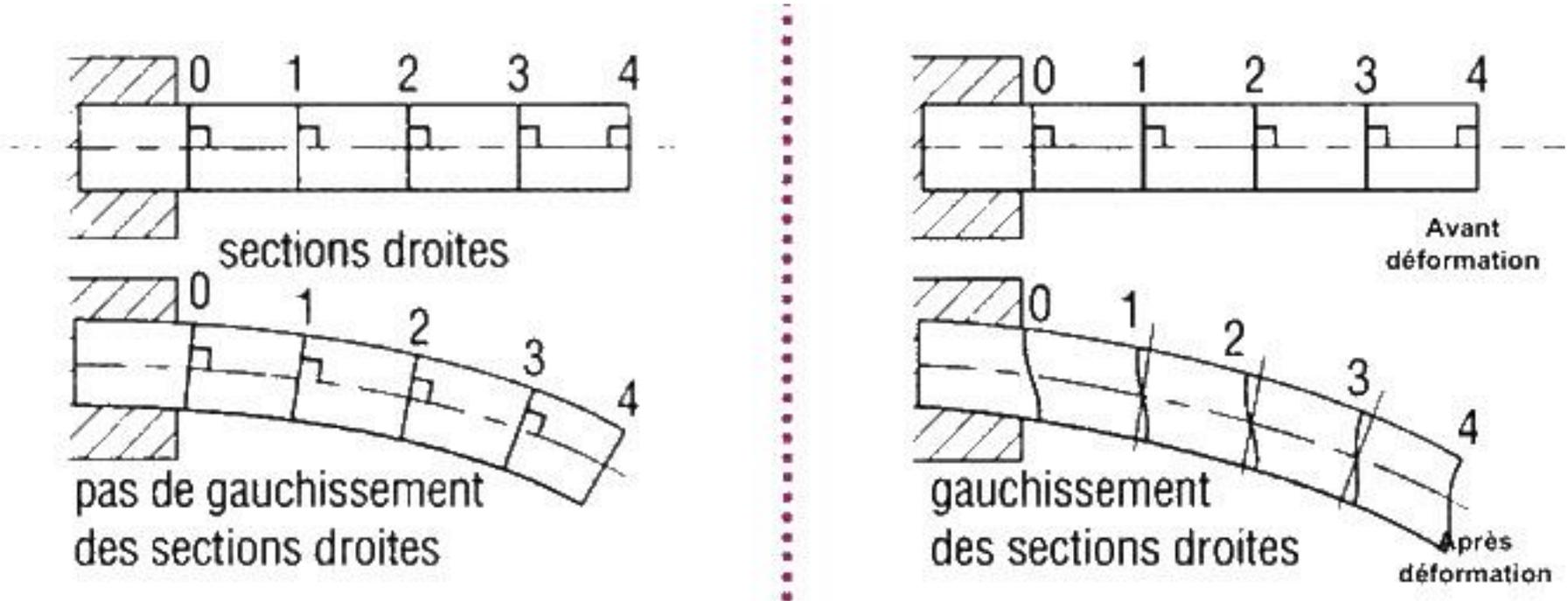
Jakob  
Bernoulli  
(1654 – 1705)



# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

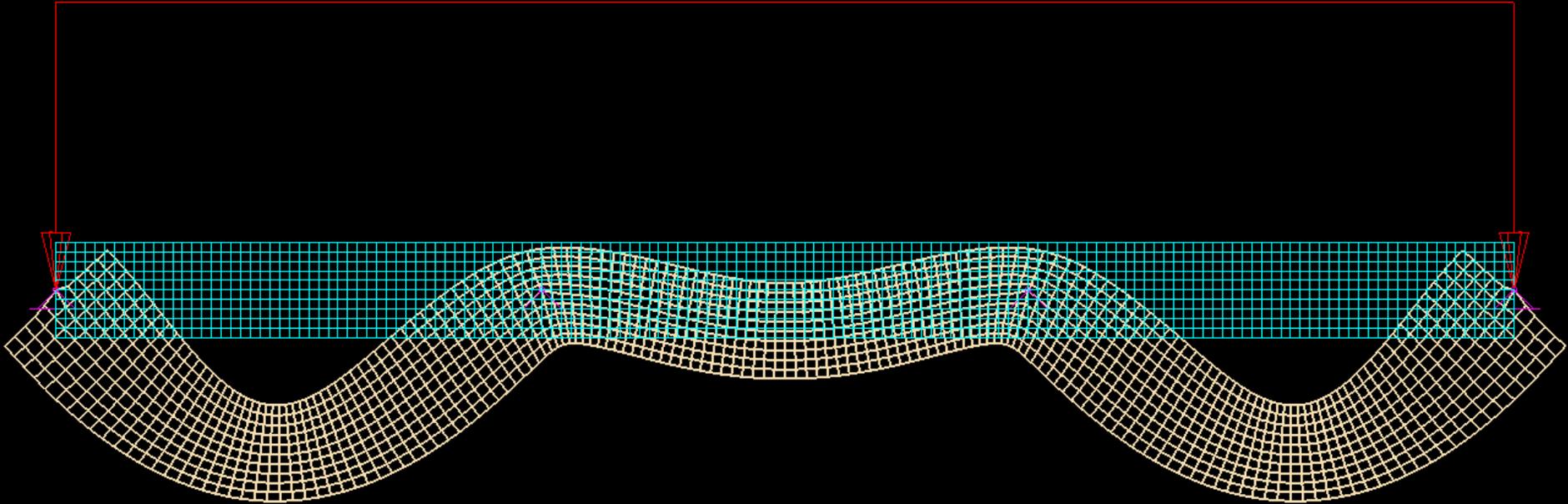
## 7) Hipótesis de Navier-Bernoulli

Esta hipótesis no se cumple para tensiones tangenciales, que producen alabeo de secciones, pero se considera despreciable



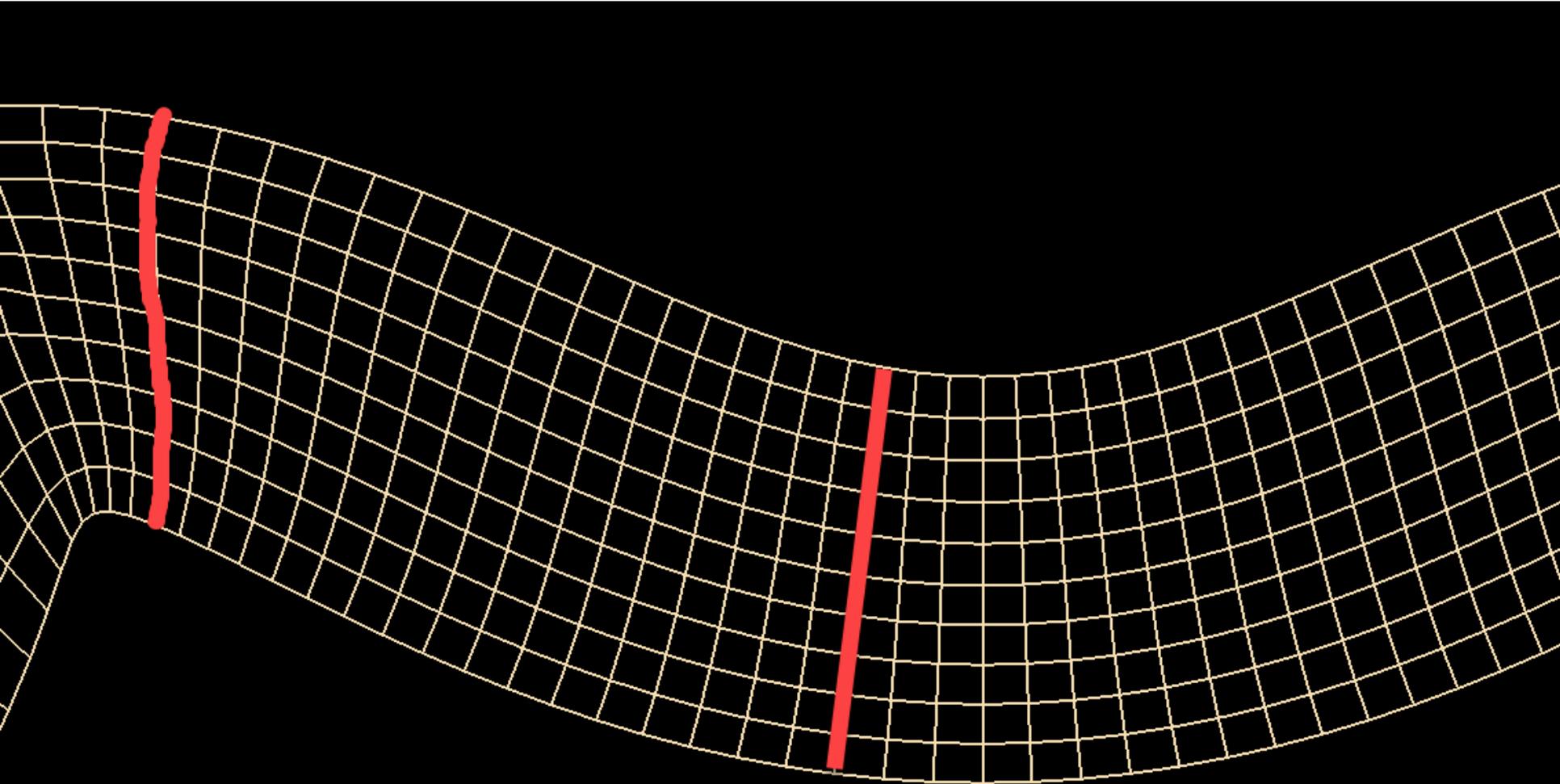
# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 7) Hipótesis de Navier-Bernoulli



# PRINCIPIOS GENERALES DE LA TEORÍA DE RESISTENCIA DE MATERIALES

## 7) Hipótesis de Navier-Bernoulli



# EQUILIBRIO ESTÁTICO

Para que un sólido (estructura, barra, nudo, rebanada, punto...) esté en equilibrio, debe satisfacer 3 ecuaciones:

$$\sum F_x = 0$$

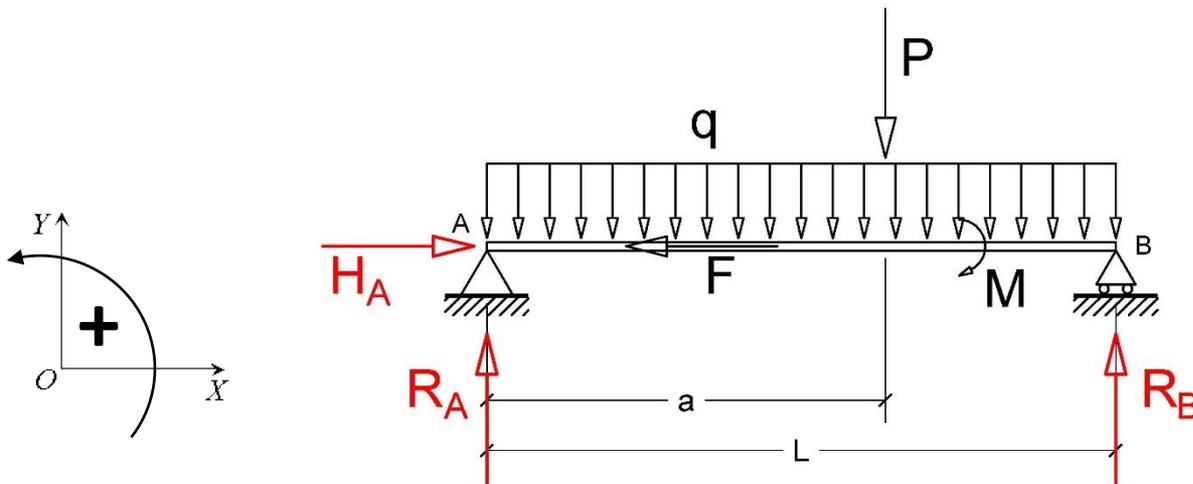
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$



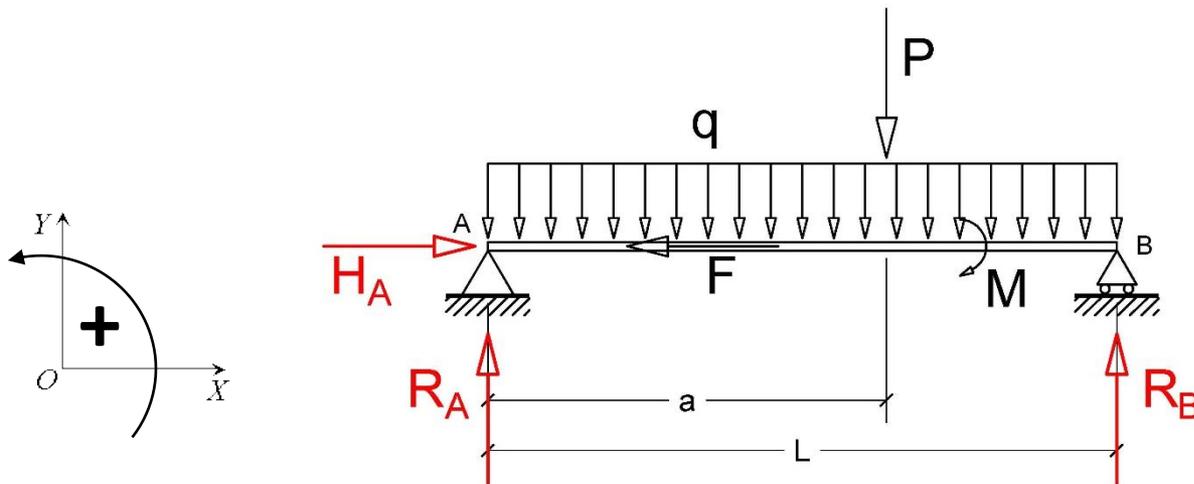
# CÁLCULO DE REACCIONES

- 1) Se usan **EJES GLOBALES!** (Giro antihorario positivo)
- 2) Identificar las cargas actuantes, que pueden ser de tipo carga repartida (constante  $\equiv$  rectangular o variable  $\equiv$  triangular/trapezoidal), carga puntual o momento aplicado. Se puede operar con sus resultantes. Intentar representarlas con tamaños relativos entre ellas



## CÁLCULO DE REACCIONES

- 3) Identificar la cantidad y dirección de las reacciones según el tipo de apoyo. A las reacciones verticales les solemos llamar  $R$ , y a las horizontales  $H$ .
- 4) Asignar un sentido a cada reacción, preferentemente el sentido esperado a la vista de las cargas (mejor que asignar sentidos positivos en ejes globales). Si el resultado posterior da un valor positivo, la reacción tenía el sentido estimado; si da un valor negativo, la reacción tenía el sentido contrario al estimado.



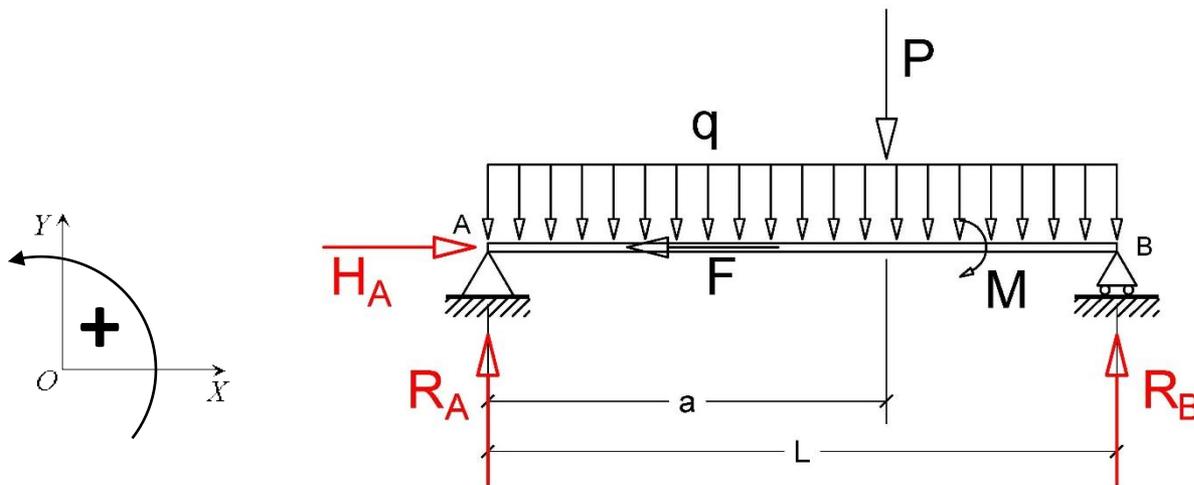
## CÁLCULO DE REACCIONES

- 5) Aplicación de las 3 ecuaciones a la estructura completa (o a cada una de las partes, si tiene más de 3 reacciones). El orden de las ecuaciones es importante para evitar los sistemas de ecuaciones y tener siempre una ecuación con una incógnita. El orden preferido es:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_{\text{articulación}} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

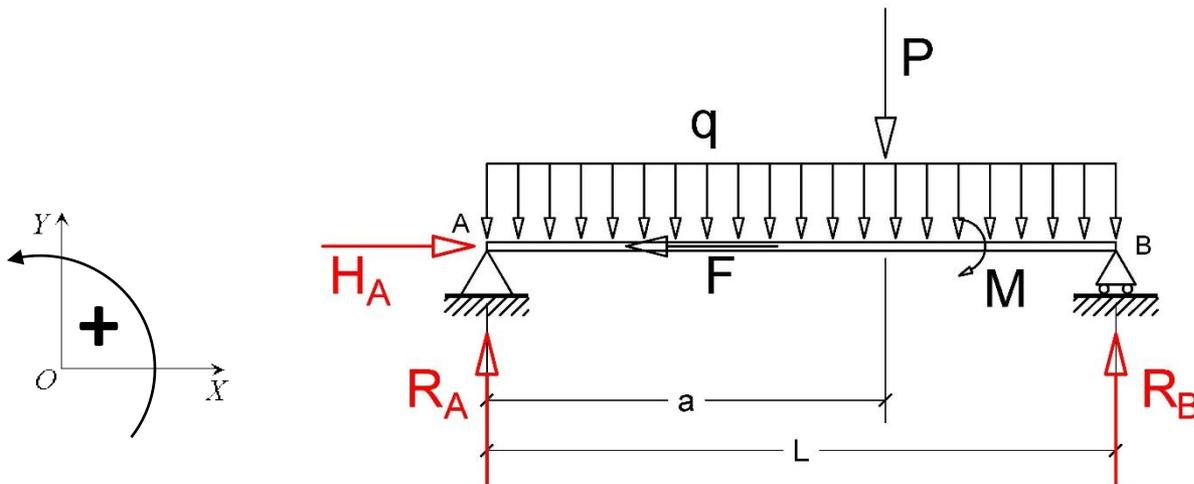


## CÁLCULO DE REACCIONES

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - F = 0 \Rightarrow H_A = F$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M - \underbrace{H_A \cdot 0}_0 + \underbrace{F \cdot 0}_0 + \underbrace{R_A \cdot 0}_0 - P \cdot a + R_B \cdot L - (q \cdot L) \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_B = \frac{M + P \cdot a + \frac{q \cdot L^2}{2}}{L}$$

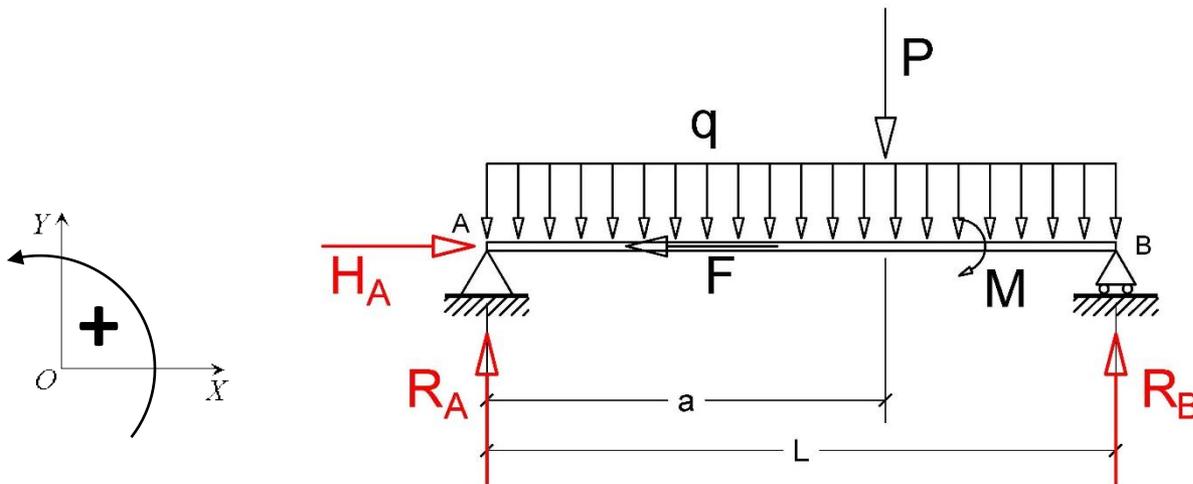
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P - (q \cdot L) + R_A + R_B = 0 \Rightarrow R_A = P + (q \cdot L) - R_B$$



## CÁLCULO DE REACCIONES

- 6) Comprobar los resultados!!!!!! Con los valores obtenidos, tomar momentos en el apoyo deslizante y corroborar que el resultado es 0

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M - R_A \cdot L + P(L - a) + (q \cdot L) \frac{L}{2} = 0$$



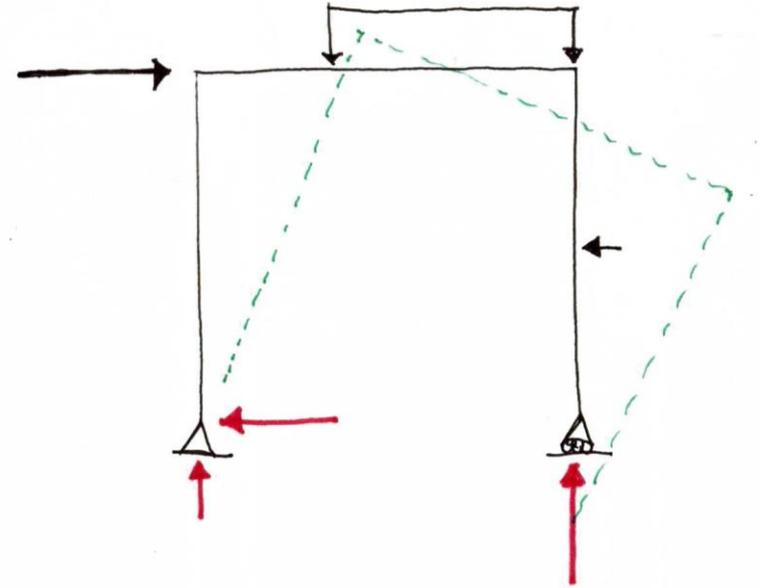
# CÁLCULO DE REACCIONES

Cálculo de reacciones en pórticos →

<https://www.youtube.com/watch?v=Mw-ihR8DDCY>

## ESTIMACIÓN DEL SENTIDO DE LAS REACCIONES

La reacción horizontal va en sentido contrario a la resultante de fuerzas horizontales sobre la estructura



# CÁLCULO DE REACCIONES

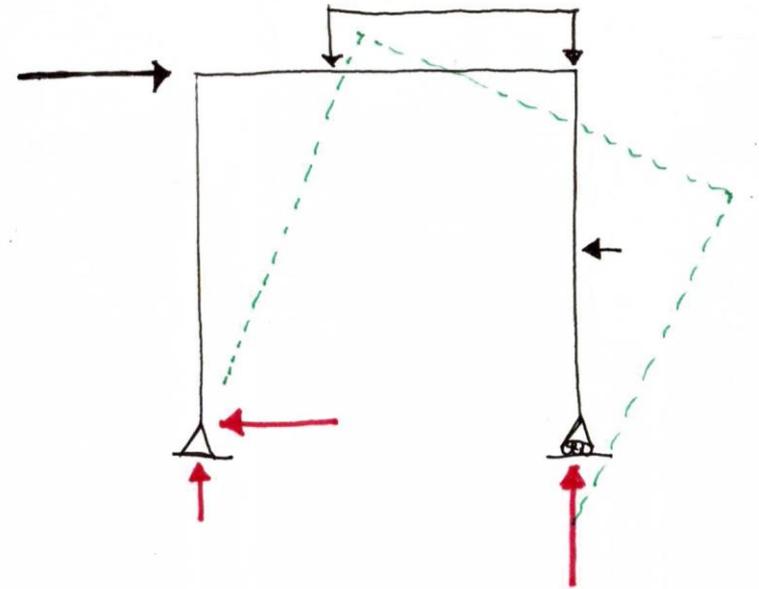
Cálculo de reacciones en pórticos →

<https://www.youtube.com/watch?v=Mw-ihR8DDCY>

## ESTIMACIÓN DEL SENTIDO DE LAS REACCIONES

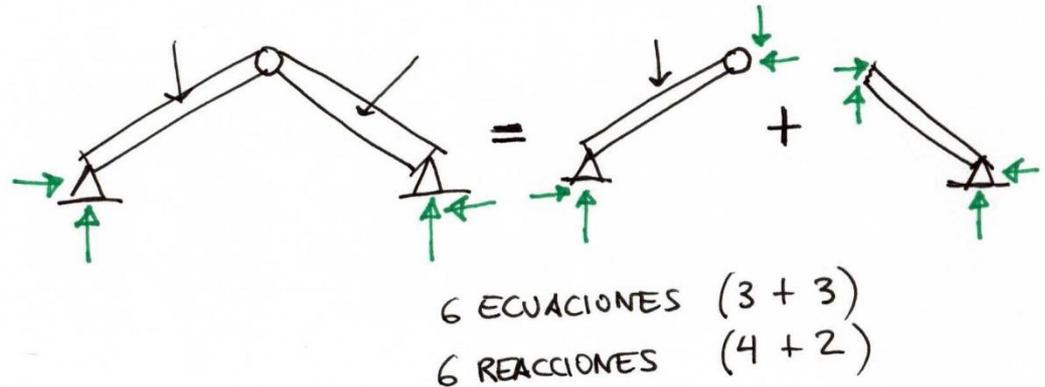
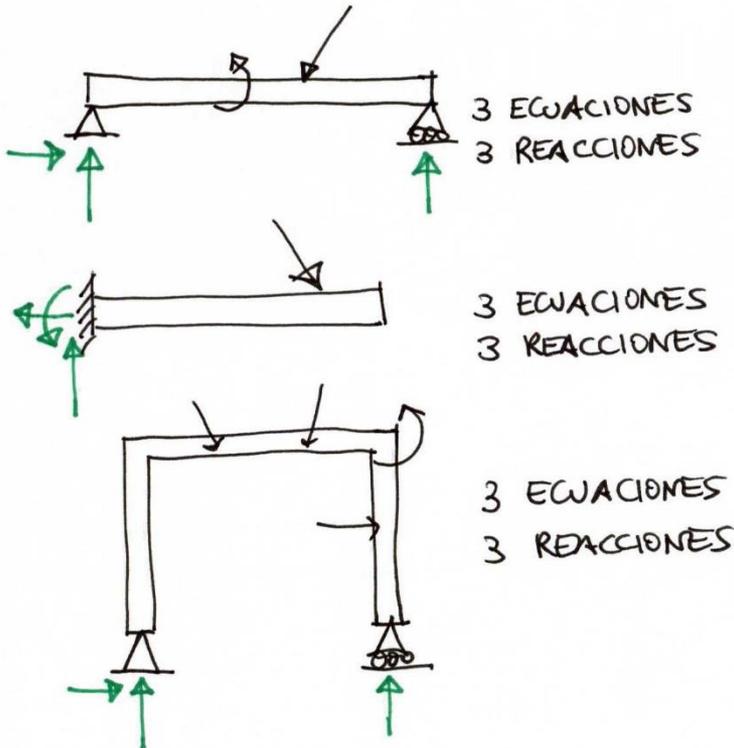
Las reacciones verticales normalmente van hacia arriba, compensando a la gravedad. Para saber cuál de ellas es mayor, hay que inspeccionar:

- Las cargas gravitatorias: si están más cerca o son mayores hacia el lado de una reacción, esa es mayor
- Las cargas horizontales: inducen vuelco en la estructura, intentando aplastar un extremo y arrancar el otro; es mayor la reacción en el extremo aplastado



# ESTATICIDAD DE ESTRUCTURAS PLANAS

Una estructura está estáticamente determinada (**ISOSTÁTICA**) si el número de incógnitas (reacciones) es igual al número de ecuaciones, tomando la estructura completa o separándola en partes



# ESTATICIDAD DE ESTRUCTURAS PLANAS

Una estructura está estáticamente determinada (**ISOSTÁTICA**) si el número de incógnitas (reacciones) es igual al número de ecuaciones, tomando la estructura completa o separándola en partes

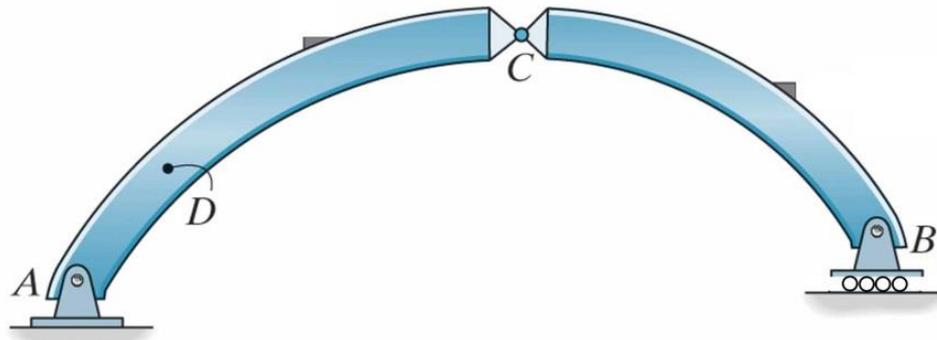
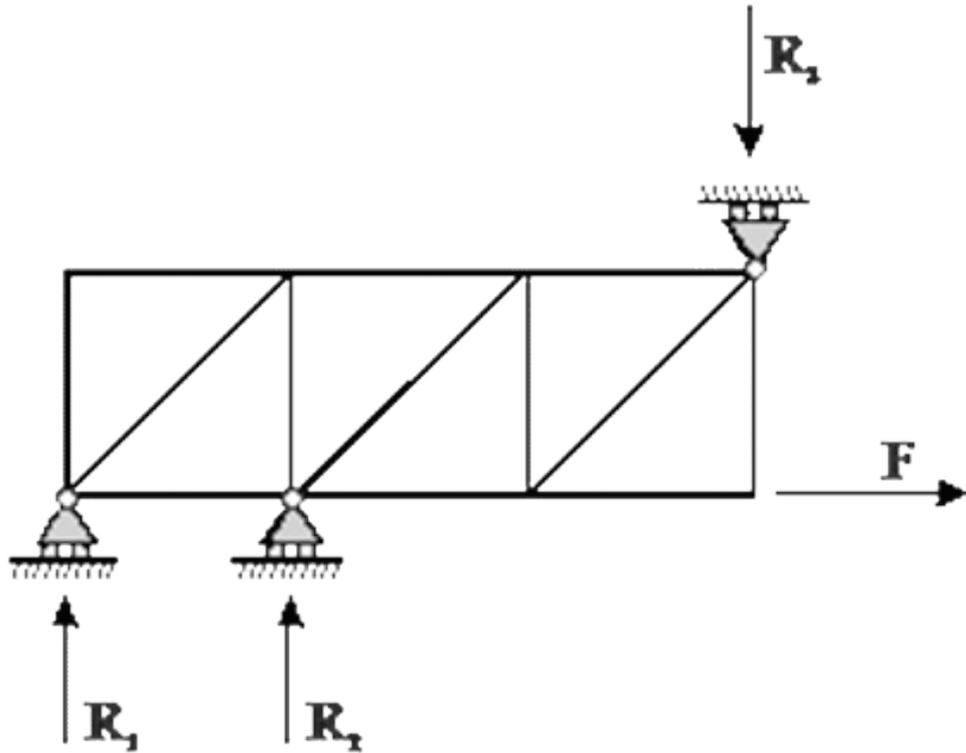
## **ISOSTÁTICA $\equiv$ VÍNCULOS JUSTOS PARA SER ESTABLE**

Si se le quita algún vínculo, tanto en los apoyos como en las uniones de barras, se convierte en inestable y se cae aunque no tenga cargas

Según el número de ecuaciones e incógnitas (reacciones), las estructuras se clasifican en:

- HIPOSTÁTICAS:  $I < E$  (pocos vínculos, mecanismo)
- ISOSTÁTICAS:  $I = E$  (vínculos justos)
- HIPERESTÁTICAS:  $I > E$  (exceso de vínculos, robustez)

# ESTRUCTURAS HIPOSTÁTICAS (MECANISMOS)



# ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS



# ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS





ESTÁS MÁS

SOLICITADA

UJMA

ESTRUCTURA

HIPERESTÁTICA





**ESTÁS MÁS  
SOLICITADO/A  
QUE UNA  
ESTRUCTURA  
ISOSTÁTICA**

# ESTATICIDAD DE ESTRUCTURAS PLANAS

GRADO DE HIPERESTATICIDAD:  $GH = I - E$

I: Incógnitas (reacciones externas e internas)

E: Ecuaciones

Número de vínculos (externos o internos) que puedo romper hasta convertir la estructura en un isostática.

Proceso: **ir rompiendo vínculos hasta obtener subestructuras isostáticas sencillas** (típicamente ménsula o articulado-apoyado)

- Cada vínculo roto: -1
- Cada vínculo macizado: +1

Se hace el sumatorio, se le cambia el signo\*, y si el resultado es:

$< 0 \rightarrow$  Hipostático

$= 0 \rightarrow$  Isostático

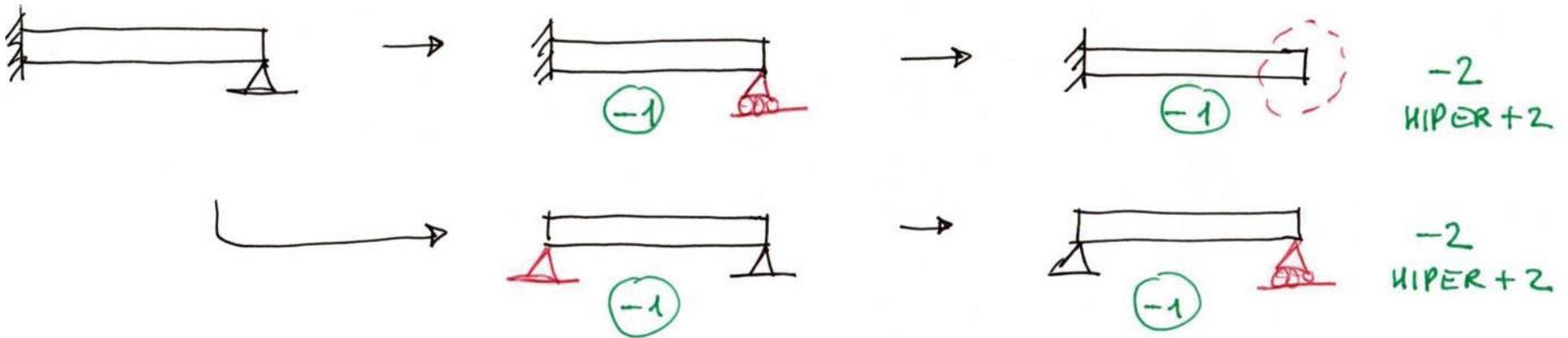
$> 0 \rightarrow$  Hiperestático

\*La razón de cambiar el signo es para obtener directamente el grado de hiperestatismo (positivo), puesto que en una estructura hiperestática el proceso de transformarla en isostática requiere de romper vínculos que sobran, y por tanto saldría un número negativo que es necesario cambiar de signo

# ESTATICIDAD DE ESTRUCTURAS PLANAS

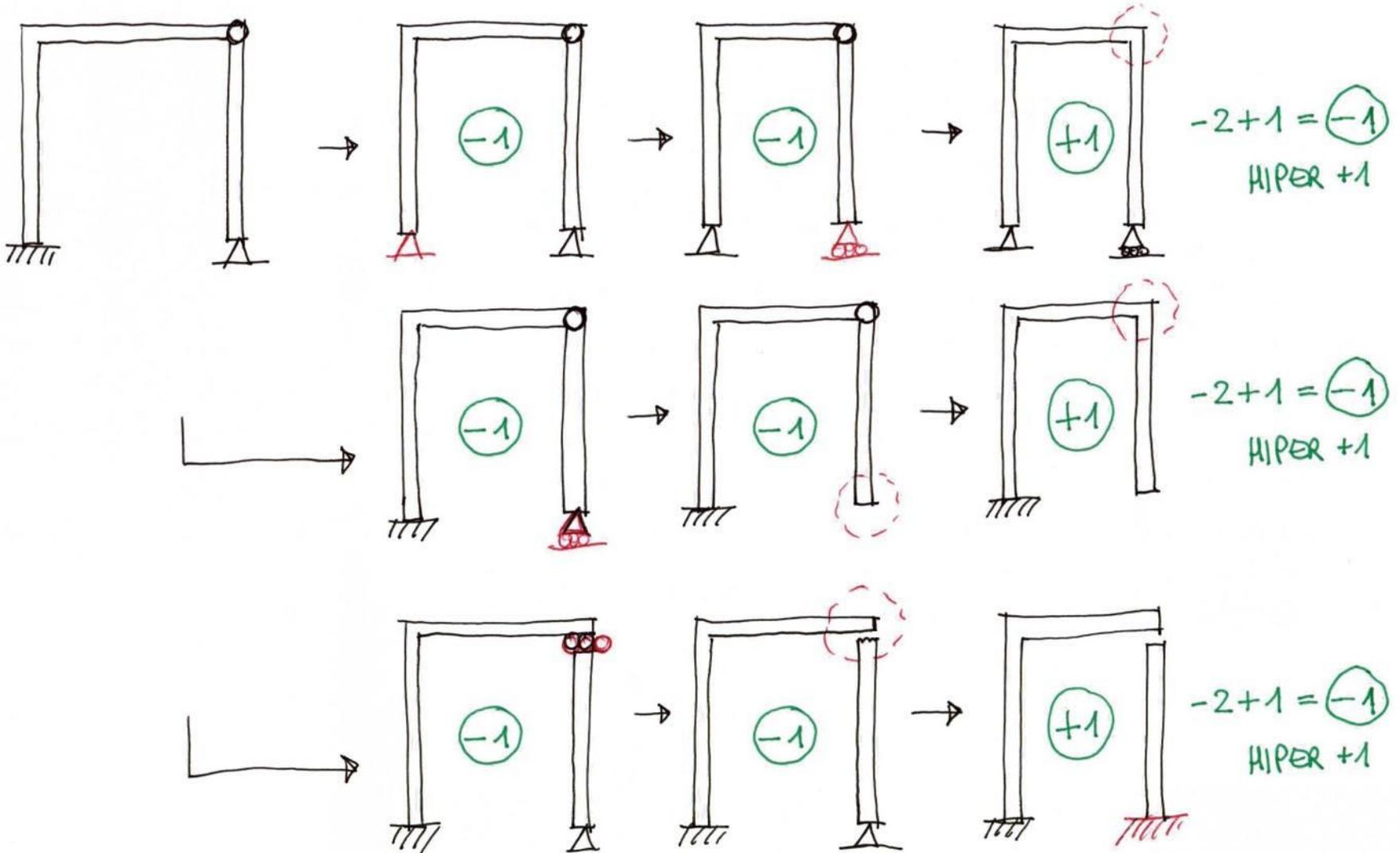
## GRADO DE HIPERESTATICIDAD →

<https://www.youtube.com/watch?v=MyqSBhMGU7Q&t=561s>



# ESTATICIDAD DE ESTRUCTURAS PLANAS

## GRADO DE HIPERESTATICIDAD



# ESTATICIDAD DE ESTRUCTURAS PLANAS

$$GH = I - E$$

I = Reacciones externas + Reacciones internas

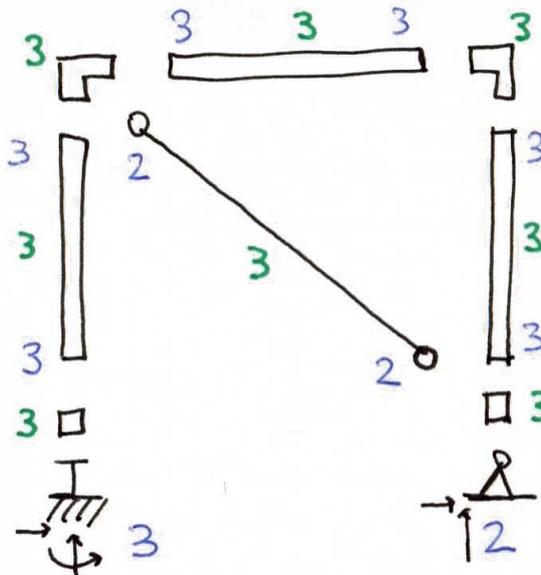
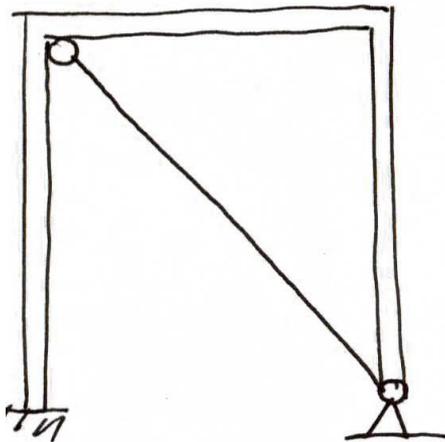
Reacc. ext.: 3·Empotramiento + 2·Articulación + 1·Carro

Reacc. int. = 3·Extremos de barra rígidos + 2·Extremos de barra articulados

E = Ecuaciones de barras + Ecuaciones de nudos

Ec. de barras = 3·Barras

Ec. de nudos = 3·Nudos (todos rígidos)

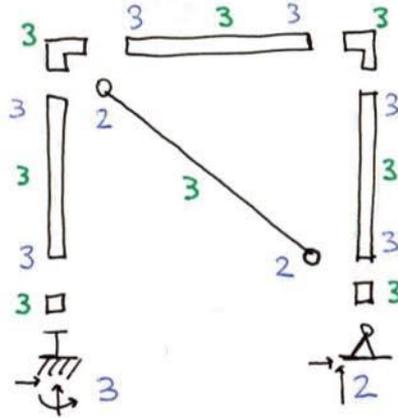
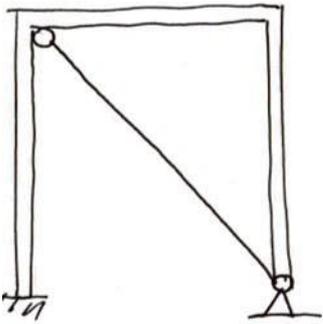


$$\begin{aligned} I &= \\ I &= 5 + 22 = 27 \\ E &= 12 + 12 = 24 \\ &\quad \quad \quad \underline{\quad} \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad + 3 \end{aligned}$$

**HIPER + 3**

# ESTATICIDAD DE ESTRUCTURAS PLANAS

## GRADO DE HIPERESTATICIDAD



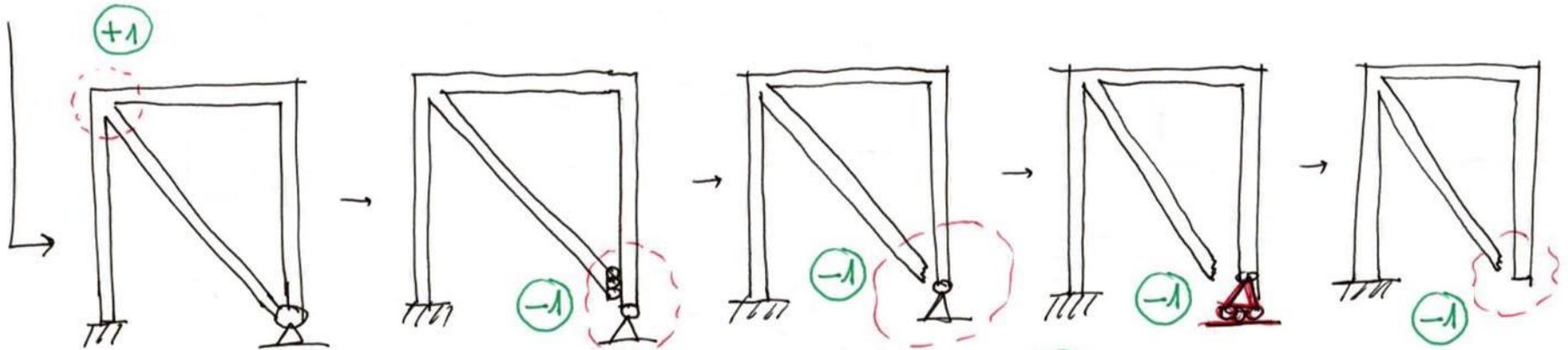
$$I =$$

$$I = 5 + 22 = 27$$

$$E = 12 + 12 = 24$$

$$\quad \quad \quad + 3$$

HIPER +3



$$+1 - 4 = -3$$

$$\text{HIPER } +3$$