ADHÉMAR

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

P. G.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
RUE RACINE, 28, PRÈS DE L'ODÉON.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR J. ADHÉMAR.

Troisième Édition.

REVUE ET CORRIGÉE.

PARIS.

MATHIAS, LIBRAIRE,
Quai Malaquais, 15;

BACHELIER, LIBRAIRE,
Quai des Augustins, 55;

CARILIAN-GOEURY et V$^{\text{or}}$ DALMONT, LIBRAIRES,
quai des Augustins, N$^{\text{os}}$ 39 et 41;

1846.

PRÉFACE.

Si j'avais eu pour but, en publiant ce *Traité de Géométrie descriptive*, d'exposer une théorie nouvelle ou de compléter les théories connues, j'aurais commencé par établir le classement des surfaces de la manière la plus générale, et j'en aurais déduit, par analyse, les propriétés qui se rattachent à chaque cas particulier.

Mais en procédant de cette manière, j'aurais été conduit à exposer, dans les premières pages, la théorie des surfaces réglées, et c'est principalement ce que j'ai voulu éviter.

Cet ouvrage étant destiné aux personnes qui commencent l'étude de la Géométrie descriptive, j'ai cru devoir adopter la méthode d'induction qui permet d'augmenter graduellement les difficultés et de ne généraliser les principes qu'après avoir familiarisé le lecteur, par la comparaison de nombreux exemples, avec les caractères qui distinguent chacun d'eux et qui déterminent la place qu'il doit occuper dans l'ordre général.

Mon but étant surtout de préparer aux applications, j'ai dû attirer l'attention sur les propriétés particulières, d'autant plus que c'est dans l'habitude de découvrir ces propriétés et d'en profiter pour abréger le travail ou lui donner plus de précision, que consiste toute l'habileté du praticien.

Les Traités d'applications que j'ai publiés m'ont fait sentir la nécessité de donner plus d'extension à quelques parties des principes. Ainsi, j'ai cherché à rendre aussi complète que possible, la théorie des surfaces cylindriques et coniques, parce qu'elles forment la base de presque toutes les applications.

Je me suis appliqué à bien faire comprendre le parti avantageux que l'on peut tirer des projections auxiliaires; et j'ai tâché, surtout, de familiariser le lecteur avec les dispositions d'épure usitées dans la pratique.

J'ai dû admettre quelques théorèmes qui ne peuvent être convenablement démontrés que par l'algèbre; je n'ai fait, en cela, que suivre l'exemple des auteurs qui m'ont précédé.

Il est généralement reconnu que le langage algébrique est nécessaire pour mettre en évidence certaines propriétés dont la Géométrie descriptive ne peut donner que la traduction.

Le lecteur qui voudra compléter ses études, devra donc avoir recours aux traités de Géométrie analytique, pour la démonstration des théorèmes dont je viens de parler. D'ailleurs, lorsqu'il s'agit des lignes ou des surfaces du second degré, il est tout naturel de renvoyer aux ouvrages qui traitent de ces matières; de même que l'on renvoie à la Géométrie élémentaire, toutes les fois qu'il s'agit des propriétés du cercle, de la ligne droite ou du plan.

Au surplus, les questions de ce genre étant peu nombreuses, et n'ayant qu'un rapport indirect avec les principes généraux de la géométrie descriptive, elles n'arrêteront pas dans leur étude les personnes qui ne connaissent pas l'algèbre.

Quelques personnes donnent le nom de *ligne de terre* à la droite suivant laquelle se coupent les deux plans de projection; mais cette dénomination m'a paru manquer d'exactitude. En effet, dans la coupe des pierres, par exemple, le plan horizontal de projection passe presque toujours par les lignes de naissance de la voûte. Dans les épures de charpente, ce plan est ordinairement un peu au-dessous des sablières et de l'enrayure.

Dans la Géométrie descriptive, enfin, le plan horizontal ne représente pas la terre dont il n'est jamais question dans les épures de principes; j'ai donc cru pouvoir employer l'expression de *ligne AZ*, qui a l'avantage d'être conforme à la notation adoptée dans le langage analytique.

Avant de terminer cet avertissement, je dois prévenir le lecteur qu'il ne peut apprendre la Géométrie descriptive que la règle et le compas à la main; il ne doit lire qu'en faisant à mesure toutes les constructions indiquées. Je l'engage même à tâcher de résoudre seul, et sans consulter le texte, les divers problèmes proposés. S'il éprouve d'abord quelque difficulté, il en sera bien dédommagé plus tard, par l'habitude qu'il acquerra d'analyser et de décomposer ses idées.

Nota. Les nombres placés en tête et du côté opposé au numéro de chaque page, indiquent la planche. Les numéros des figures sont indiqués dans le texte. Enfin, les nombres placés seuls entre parenthèses sont des renvois aux articles.

Le numéro de chaque article est au commencement de l'*alinéa*.

GÉOMÉTRIE
DESCRIPTIVE.

LIVRE PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires.

1. La Géométrie descriptive a principalement pour but de *décrire* les corps et de les *exécuter*.

2. On décrit un corps, lorsqu'au moyen d'une certaine combinaison de lignes et de points, on parvient à en exprimer toutes les dimensions.

3. Pour exécuter le corps que l'on a décrit, il faut déduire, du dessin que l'on a fait, les dimensions de ce corps, et reporter ces dimensions sur la matière dont il doit être composé.

4. Il y a deux manières d'exprimer les dimensions d'un corps que l'on se propose d'exécuter : l'une consiste à représenter ces dimensions par des nombres, après avoir choisi une certaine unité; l'autre moyen consiste à dessiner le corps.

Mais il ne faut pas entendre par là que l'on doive le dessiner comme on le voit. Il suffit de jeter les yeux sur le premier objet venu, pour s'apercevoir qu'on ne le voit pas dans ses véritables dimensions : il est d'ailleurs facile de reconnaître que le plus petit déplacement, à droite ou à gauche, fait varier la forme sous laquelle nous apercevons cet objet. On peut conclure de là que nos yeux ne nous font voir que des formes apparentes, des formes relatives et qui dépendent, non-seulement de la grandeur véritable du corps que nous regardons, mais encore de la place d'où nous le regardons. C'est dans la Perspective que nous nous occuperons de cette espèce de dessin.

On voit, par ce qui vient d'être dit, que ce n'est qu'au moyen de conventions particulières que l'on peut parvenir à représenter par le dessin les véritables dimensions d'un corps.

Il est évident que la forme exacte d'un corps, et sa grandeur, seront parfaitement déterminées lorsque l'on connaîtra les positions relatives de tous les points qui composent ou terminent sa surface. On est donc conduit d'abord à chercher comment on peut déterminer la position d'un point.

DU POINT.

5. L'espace n'ayant pas de limites, on ne peut déterminer la position d'un point qu'en le rapportant à des limites de convention.

6. De tous les moyens que l'on pourrait employer pour déterminer la position d'un point dans l'espace, un des plus simples est de donner la distance de ce point à trois plans choisis arbitrairement et connus de position.

Mais la méthode des projections permet souvent de n'employer que deux plans, et les constructions seront encore simplifiées, si l'on suppose ces deux plans rectangulaires entre eux.

Ces plans sont nommés *plans de projection*.

Nous pourrons supposer que l'un soit horizontal et l'autre vertical.

7. Soit, *Pl.* 1 (*fig.* 1), un point M dont on veut déterminer la position dans l'espace. Concevons un plan horizontal ZAX, et un plan vertical ZAY.

Si du point M nous abaissons la ligne Mm perpendiculaire sur le plan horizontal, le pied m de cette perpendiculaire sera la *projection horizontale* du point M, et si l'on abaisse Mm', perpendiculaire sur le plan vertical ZAY, le point m' sera la *projection verticale* de M.

Nous emploierons dorénavant les grandes lettres pour désigner les points ou les lignes dans l'espace, et les petites lettres correspondantes, pour leurs projections, en réservant la lettre sans accent pour la projection horizontale, et la même lettre avec l'accent, pour la projection verticale.

On voit que si l'on donnait les deux projections m, m', d'un point, ce point serait déterminé; car il est évident qu'il devrait se trouver à l'intersection des deux lignes mM, m'M menées perpendiculairement aux plans de projection.

8. Concevons maintenant que l'on fasse tourner le plan horizontal ZAX jusqu'à ce qu'il se trouve dans le prolongement du plan vertical; le point m viendra se placer dans le prolongement de la ligne pm' et au-dessous du point p, et la figure YZX (*fig.* 2) sera ce que l'on appelle une *Épure*.

La droite AZ représente l'*intersection des plans de projection*. On la nomme quelquefois *ligne de terre*; cela vient de ce que, dans les applications, le plan horizontal de projection représente quelquefois la terre. Nous la nommerons la ligne AZ.

Les épures se font ordinairement sur du papier que l'on tend sur une planche bien plane et bien dressée; quelquefois cependant les constructeurs font leurs épures sur des murs, sur des planches, ou sur la terre; mais, dans tous les cas, les projections tracées sur une épure doivent être dessinées avec le plus grand soin.

9. Le plan qui contiendrait les deux droites Mm, Mm', serait évidemment perpendiculaire aux deux plans de projection, et par conséquent à leur intersection AZ; de sorte que les lignes mp, $m'p$ deviennent le prolongement l'une de l'autre, lorsque l'on suppose le rabattement du plan horizontal; d'où il résulte que:

Les deux projections d'un même point doivent toujours, dans l'épure, se trouver sur une même droite perpendiculaire à la ligne AZ.

10. La *fig.* Mmpm' étant un rectangle, on a Mm=$m'p$ et Mm'=mp.

Donc, *la distance de la projection horizontale d'un point à la ligne* AZ *est toujours égale à la distance de ce point au plan vertical.*

11. *La distance de la projection verticale d'un point à la ligne* AZ *est toujours égale à la distance de ce point au plan horizontal.*

12. Les lignes et les plans, considérés ici comme conceptions géométriques et comme moyens de solution de problèmes, doivent être regardés comme infinis. On doit se rappeler que, dans les figures de géométrie, on ne les termine par des points ou lignes, qu'afin de faire sentir leur position; en attendant que l'on soit familiarisé avec

les moyens plus exacts fournis par la science que nous étudions.

La distance d'un point à un autre, le côté d'un triangle ou d'un polygone quelconque, doivent être regardés comme des portions de lignes droites; les faces d'un polyèdre, la surface d'un cercle, ne sont que des portions de plans. Il est évident, d'après cela, que les plans de projection étant infinis, partagent l'espace en quatre parties également infinies. Or, quelque grand que soit l'objet que l'on veut projeter, fût-ce un monument de la plus grande dimension, on conçoit que l'on peut toujours supposer le plan horizontal au-dessous des premières fondations, et le plan vertical au delà des constructions les plus éloignées; de sorte que l'on peut supposer tous les corps que l'on veut projeter placés au-dessus du plan horizontal et devant le plan vertical; mais on verra par la suite, que la nature des questions que l'on aura à résoudre exigera quelquefois que l'on sache déterminer la position d'un point situé derrière le plan vertical ou dessous le plan horizontal. Voyons ce qu'il faut faire pour cela.

13. Les plans de projection étant infinis, il est évident que lorsqu'on forme le rabattement de l'épure, la partie ZAX du plan horizontal (*fig.* 3) s'applique sur la partie inférieure ZAY′ du plan vertical, tandis que le prolongement ZAX′ du plan horizontal se relève et vient se placer derrière la partie supérieure du plan vertical. Il résulte de là que, dans une épure, l'espace qui est au-dessus de la ligne AZ représente en même temps la partie supérieure du plan vertical et le prolongement du plan horizontal, tandis que la portion de l'épure qui est au-dessous de AZ représente le plan horizontal et la partie inférieure du plan vertical.

14. Supposons actuellement qu'un point s'éloigne ou

s'approche du plan horizontal. Il est évident qu'il aura toujours la même projection horizontale, et que la projection verticale seule s'éloignera ou s'approchera de la ligne AZ. Il est encore facile de voir que, tant que le point M (*fig.* 4) sera au-dessus du plan horizontal, sa projection verticale sera au-dessus de AZ, tandis qu'au contraire, quand ce point sera au-dessous du plan horizontal, sa projection verticale sera au-dessous de AZ; et cette même projection serait sur AZ, si le point que l'on veut projeter était situé dans le plan horizontal même. Donc, *selon qu'un point dans l'espace sera au-dessus du plan horizontal, dans le plan horizontal ou au-dessous, la projection verticale de ce point sur l'épure sera au-dessus de la ligne* AZ, *sur la ligne* AZ *ou au-dessous.*

15. De même, *selon qu'un point dans l'espace sera en deçà du plan vertical, dans le plan vertical ou au delà, la projection horizontale de ce point sur l'épure sera au-dessous de la ligne* AZ, *sur cette même ligne ou au-dessus.* Car il est évident que, lorsque le point sera en deçà du plan vertical, sa projection horizontale *n* (*fig.* 5) viendra, par le rabattement de l'épure, se placer au-dessous de AZ, tandis que si le point N est au delà du plan vertical, sa projection horizontale *n* étant sur le prolongement du plan horizontal, viendra se placer, par le rabattement, dans la partie supérieure de l'épure.

16. L'épure 6 représente toutes les positions d'un point par rapport aux plans de projection, savoir :

— *Au-dessus du plan horizontal et en deçà du plan vertical.*

— *Au-dessus du plan horizontal et au delà du plan vertical.*

— *Au-dessous du plan horizontal et en deçà du plan vertical.*

— *Au-dessous du plan horizontal et au delà du plan vertical.*

— *Situé dans le plan horizontal et en deçà du plan vertical.*

— *Situé dans le plan horizontal et au delà du plan vertical.*

— *Situé dans le plan vertical et au-dessus du plan horizontal.*

— *Situé dans le plan vertical et au-dessous du plan horizontal.*

— *Situé en même temps dans les deux plans de projection.*

DE LA LIGNE DROITE.

17. Si par tous les points d'une droite MN (*fig.* 7) on conçoit des perpendiculaires au plan horizontal de projection,

La droite *mn*, qui passe par les pieds de toutes ces perpendiculaires, sera la projection horizontale de MN; le plan qui contient toutes ces perpendiculaires se nomme *plan projetant.*

La projection verticale de MN est la droite *m'n'*, qui passe par les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées des divers points de MN sur le plan vertical.

Deux points suffisant toujours pour déterminer la position d'une ligne droite, on peut dire que,

La projection d'une droite est la droite qui passe par les projections de deux points de la ligne projetée. Si l'on donnait les deux projections *mn*, *m'n'* (*fig.* 8), il est évident que la droite serait déterminée, car devant être en même temps dans les deux plans projetants *mn* MN, *m'n'* MN, il est évident qu'elle ne peut être que leur intersection.

18. L'épure 9 représente les diverses positions qu'une droite peut prendre par rapport aux plans de projection, savoir :

— *Oblique aux deux plans de projection.*

— *Perpendiculaire au plan horizontal.*

— *Perpendiculaire au plan vertical.*

— *Perpendiculaire à la ligne* AZ.

— *Parallèle au plan horizontal.*

— *Parallèle au plan vertical.*

— *Parallèle aux deux plans de projection.*

— *Située dans le plan horizontal.*

— *Située dans le plan vertical.*

— *Située en même temps dans les deux plans de projection.*

DU PLAN.

19. Si l'on conçoit dans l'espace un plan quelconque *pqs* (*fig.* 10), ce plan coupera les deux plans de projection suivant deux lignes *pq*, *qs*. Ce sont ces deux lignes que l'on est convenu d'adopter pour déterminer la position du plan.

On les nomme *traces du plan.*

La ligne *pq* est la trace verticale.

La ligne *qs* est la trace horizontale.

On voit qu'un plan sera connu et déterminé de position toutes les fois que l'on donnera ses traces : car on sait, en Géométrie, que, par deux lignes qui se coupent, on ne peut faire passer qu'un plan.

20. La *figure* 12 représente toutes les positions d'un plan par rapport aux plans de projection, savoir :

— *Oblique aux deux plans de projection.*

— *Perpendiculaire au plan horizontal.*

— *Perpendiculaire au plan vertical.*

— *Perpendiculaire aux deux plans de projection.*
— *Parallèle au plan horizontal.*
— *Parallèle au plan vertical.*
— *Parallèle à la ligne* AZ.
— *Passant par la ligne* AZ.

21. Il est quelquefois nécessaire de recourir à un troisième plan de projection. Ainsi, par exemple, lorsqu'une droite est perpendiculaire à AZ, ses deux projections étant toutes deux perpendiculaires à cette même ligne, n'en font, pour ainsi dire, qu'une seule, et la ligne donnée resterait indéterminée. Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter d'autres conditions, comme, par exemple, de déterminer les projections de deux points de cette ligne, ou de la projeter sur un troisième plan de projection, que l'on prend souvent perpendiculaire aux deux autres, et que l'on rabat sur l'épure, comme on a fait pour le plan horizontal.

22. La *figure* 13, *Pl.* 2, représente un point M projeté sur trois plans de projection, et la *figure* 14 est le développement de l'épure. m, m', m'' sont les trois projections du point M; pq, $p'q'$, $p''q''$ sont les trois projections d'une même droite, et As est la trace sur le plan auxiliaire, d'un plan passant par la ligne AZ.

GÉNÉRATION DU PLAN.

23. Le plan étant l'élément géométrique dont nous ferons le plus d'usage, il est de la plus grande importance d'en bien étudier toutes les propriétés.

24. On peut toujours supposer qu'une surface est engendrée par le mouvement d'une ligne dont la définition est donnée, et qui se meut suivant certaines conditions.

On dit qu'une ligne engendre une surface, lorsque, par suite de son mouvement, elle occupe successivement tous les points de cette surface.

25. D'après cela, si l'on conçoit deux lignes droites qui se coupent et si l'on suppose que l'une d'elles restant immobile, la seconde se meut parallèlement à elle-même, de manière à couper toujours la première, la droite mobile, par son mouvement, engendrera un plan.

On dit qu'une droite se meut parallèlement à elle-même, lorsque toutes ses positions sont parallèles entre elles.

La droite mobile sera nommée *génératrice du plan ;* la droite sur laquelle elle s'appuie se nomme *la directrice*, et le point où ces deux lignes se coupent se nomme *le pied de la génératrice.*

26. On peut prendre pour génératrice et directrice d'un plan, deux lignes quelconques de ce plan; mais il est presque toujours plus simple de prendre l'une des traces pour génératrice et l'autre pour directrice.

27. *On propose de construire pour toutes ses positions les projections de la génératrice d'un plan.*

Soit (*fig.* 15) le plan PdG dont on veut représenter la génération. Supposons que la trace horizontale Gd, prise pour génératrice, prenne successivement toutes les positions marquées Gd; comme elle restera parallèle à elle-même, et par conséquent au plan horizontal, sa projection verticale $g'd'$ sera toujours parallèle à la ligne AZ. La trace verticale servant de directrice, le point d', pied de la génératrice, fait partie du plan vertical de projection, et sa projection horizontale sera sur AZ. Enfin, toutes les positions de la ligne Gd devant être parallèles entre elles, leurs plans projetants seront parallèles et, par conséquent, toutes les projections ~~horizontales gd~~ verticales $g'd'$ seront parallèles entre elles et à la ligne AZ.

28. Quand la génératrice descend au-dessous du plan horizontal, sa projection verticale $g''d''$ doit être au-dessous de la ligne AZ.

29. Le plan étant infini (12), toutes ses génératrices seront infinies, de sorte qu'en traçant les prolongements de ces lignes, on représentera sur l'épure les parties du plan donné qui se trouvent au delà des plans de projection. Cependant, pour ne pas embarrasser les épures, on ne construit ces prolongements qu'au moment où ils deviennent nécessaires pour la solution de la question dont on s'occupe.

La *figure* 16 représente la construction, sur l'épure, de toutes les positions de la génératrice horizontale d'un plan P*d*G. Ainsi, en général,

Si l'on veut construire une des positions de la génératrice horizontale d'un plan, on construira parallèlement à la trace horizontale une ligne gd, *qui sera la projection horizontale de la génératrice. On mènera la ligne* dd' *perpendiculaire à la ligne* AZ, *et le point* d', *où cette ligne rencontrera la trace verticale, sera le pied de la génératrice. Enfin la ligne* d'g', *menée par le point* d' *parallèlement à la ligne* AZ, *sera la projection verticale de la génératrice demandée.*

On pourrait commencer par construire la projection verticale $g'd'$.

30. Les *figures* 17 et 18 représentent la génération d'un plan pour lequel on a employé, comme génératrice, une droite parallèle à la trace verticale.

On voit que, dans ce cas, toutes les projections horizontales de la génératrice sont parallèles à la ligne AZ, et toutes les projections verticales sont parallèles à la trace verticale.

On en conclut que,

Si l'on veut construire une des positions de la génératrice parallèle à la trace verticale, on construira (fig. 18) *une ligne* g'd' *parallèle à cette trace ; on mènera* d'd *perpendiculaire à la ligne* AZ, *ce qui donnera en* d *le pied de la génératrice. Enfin* dg, *menée parallèlement à la ligne* AZ, *sera la projection horizontale de cette génératrice.*

Je recommande au lecteur les deux épures précédentes comme très-essentielles. Il faut, après les avoir bien comprises, en faire l'application à toutes sortes de plans, variés de toutes les manières quant à la position.

31. Les *figures* 19, 20, 21, représentent quelques générations de plans. Dans la *figure* 20, on a pris pour directrice la trace sur le plan auxiliaire de projection. Dans la *figure* 21, on a pris pour génératrice une ligne oblique aux plans de projection.

32. J'engage les commençants, pour fixer leurs idées et se familiariser avec les diverses positions des points, des plans et des lignes dans l'espace, à tailler deux cartes et à les ployer à angle droit, de manière qu'elles puissent figurer les deux plans de projection; puis, après avoir tracé sur ces cartes, des projections de points ou des traces de plans, ils feront le développement de l'épure, afin de s'habituer à juger de la position d'un point ou d'une ligne par ses projections, et réciproquement. Mais je leur conseille en même temps de faire tous leurs efforts pour se mettre le plus promptement possible en état de se passer de ces moyens, qui ne doivent être employés que pour les premières leçons, et qui même, si l'on en faisait usage trop longtemps, deviendraient un obstacle au développement de l'esprit d'analyse et de généralité nécessaire pour bien concevoir les principes de Geométrie descriptive.

CHAPITRE II.

DU POINT, DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN.

Problèmes.

33. *Faire passer une ligne droite par un point dont on a les projections.*

Lorsque l'on projette une droite MN (*fig.* 22, *Pl.* 3), le plan projetant MNmn, contenant toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de cette droite sur le plan de projection, sa trace mn, ou autrement la projection de la droite, doit contenir la projection de chacun des points de cette droite. Ainsi, pour exprimer qu'une droite située dans l'espace contient un certain point A, il suffit de faire passer les projections de la droite par celles du point. On conçoit que cette question est indéterminée, c'est-à-dire que l'on peut construire une infinité de droites qui passent par un point donné. Ainsi (*fig.* 24), l'une quelconque des lignes qui passent par la projection horizontale a d'un point avec l'une de celles qui passent par sa projection verticale a', peuvent toujours être considérées comme les deux projections d'une droite passant par ce point.

Réciproquement, et par la même raison, si l'on voulait exprimer qu'un point est sur une droite, il faudrait placer les projections du point sur celles de la droite, et sur une même perpendiculaire à la ligne AZ (9).

Il résulte encore de ce que nous venons de dire, que le point a,a' (*fig.* 25) ne fait pas partie de la droite $mn,m'n'$.

34. Si l'on voulait *faire passer une droite par deux points*, il est évident, d'après ce qui vient d'être dit, qu'il

faudrait faire passer les projections de la droite par les projections des deux points.

35. *Mesurer la distance de deux points.*

Après avoir joint ces deux points par une droite, il ne restera plus qu'à obtenir la grandeur de cette droite. Or, si nous représentons la droite donnée par MN (*fig.* 26), et le plan de projection par PQ, il est facile de voir qu'en général la droite MN sera plus longue que sa projection *mn*; mais si par le point N, on mène la droite N*o*, parallèle au plan de projection, et par conséquent égale à la projection de la ligne donnée, on pourra reconnaître qu'en général une ligne droite située comme on voudra dans l'espace, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle M*o*N, dans lequel un des côtés N*o* de l'angle droit est égal à la projection de la droite, et l'autre côté M*o* doit être la différence entre les distances M*m*, N*n* des extrémités de cette droite, au plan sur lequel elle a été projetée. Il résulte de là, que pour avoir la longueur d'une droite, il suffira de construire, dans ses véritables dimensions, le triangle rectangle dont elle est l'hypoténuse. Pour cela,

Soit (*fig.* 27) mn, $m'n'$, les projections de la droite dont on veut avoir la longueur. On fera (*fig.* 28) l'angle droit BAC, on portera sur AC, de A en N, la projection horizontale mn, on portera pareillement sur AB, de A en M, la ligne $m'o$, égale à la différence entre les perpendiculaires $m'p$, $n'q$, qui représentent les distances des points m' et n' à la ligne AZ ou au plan horizontal, et l'hypoténuse MN sera la grandeur de la droite donnée.

On peut faire la construction avec plus de simplicité, en opérant de la manière suivante On mènera par le point n' la ligne $n'o$ parallèle à la ligne AZ, et par cette construction, on aura déterminé l'angle droit en o, et la différence $m'o$ des hauteurs des extrémités de la droite, de sorte que, pour achever le triangle, il n'y aura plus qu'à prendre avec le compas la grandeur de la projection horizontale *mn*; puis après l'avoir portée de *o* en N, l'hypoténuse *m'*N sera la longueur de la droite donnée.

36. On peut encore expliquer, d'une autre manière, la construction précédente.

Soit *mn*, *m'n'* (*fig.* 29) les projections de la droite dont on cherche la longueur.

Supposons que cette droite tourne autour de la verticale projetante du point M, en conservant toujours la même inclinaison par rapport à cette ligne. Le point *n*, *n'* décrira un arc de cercle horizontal. Cet arc étant parallèle au plan horizontal, aura pour sa projection sur ce plan l'arc *nn''*, et sa projection verticale *n'*N sera parallèle à la ligne AZ Or si nous arrêtons le mouvement de la droite au moment où sa projection horizontale aura pris la position *mn''*, la projection verticale correspondante *m'*N sera la longueur cherchée, car la droite étant parallèle au plan vertical, il est facile de concevoir qu'elle sera projetée sur ce plan suivant sa grandeur.

On aurait pu faire tourner la droite autour de l'horizontale projetante du point *m*, *m'*, jusqu'à ce que sa projection verticale fût devenue *m'n'''*; alors elle aurait été parallèle au plan horizontal, et sa nouvelle projection *m*N' aurait été la longueur cherchée.

On peut aussi concevoir que le trapèze MN*mn* (*fig.* 26) tourne autour du côté horizontal *mn*, jusqu'à ce qu'il soit rabattu dans la position *mn*M''N'' (*fig.* 29). Alors, M''N'' sera la ligne elle-même couchée sur le plan horizontal.

37. Ces derniers moyens, auxquels on donne le nom de *rabattements*, seront fréquemment employés par la suite; nous en ferons surtout usage pour avoir la grandeur

d'une figure plane. On conçoit, en effet, que pour cela il faut construire cette figure dans ses véritables dimensions; ce qui peut se faire, soit en cherchant les grandeurs de toutes les parties qui la composent, soit en la faisant tourner tout entière, jusqu'à ce qu'elle soit parallèle à l'un des plans de projection; car il est évident que si on la projette de nouveau dans cette position, elle sera égale à sa projection. On donne ordinairement le nom de *charnière* ou *axe* à la ligne autour de laquelle se fait le rabattement; nous reviendrons plus tard sur ce sujet, ainsi que sur le choix le plus convenable des lignes que l'on doit prendre pour charnières.

On voit, dans la même figure, des arcs de cercles qui ont pour but de lier les constructions, et de faire voir, autant que possible, quelles sont les lignes qui sont égales entre elles.

Dans l'épure 30, l'une des extrémités n, n' de la droite dont on cherche la longueur, est située derrière le plan vertical.

La droite (*fig.* 31) est perpendiculaire à la ligne AZ, et celle de la *figure* 32 coupe la ligne AZ.

38. Pour exprimer qu'*une droite dans l'espace est partagée en parties proportionnelles à des lignes ou à des nombres donnés*, il suffit de partager ses projections dans le même rapport (*fig.* 33).

39. En effet, les trois lignes Mm, Ss, Nn (*fig.* 26) étant perpendiculaires à un même plan, sont parallèles; donc elles coupent la droite MN et sa projection mn en parties proportionnelles.

40. Pour *partager une ligne en parties égales*, on partagera ses projections en parties égales.

41. *Exprimer qu'un point est situé dans un plan.*

Soit *a* (*fig.* 34, *Pl.* 4) la projection horizontale d'un point situé dans un plan P; on demande la projection verticale de ce point.

Nous avons vu (27) que lorsqu'une droite engendre un plan, elle en occupe successivement tous les points; d'où il résulte que, par chaque point d'un plan, on peut toujours concevoir une position de sa génératrice. D'après cela,

Menons (*fig.* 34 et 35) par *a* une génératrice horizontale; sa projection verticale contiendra celle du point, de sorte qu'il n'y aura plus qu'à construire la perpendiculaire aa', pour obtenir le point a'.

On vérifiera l'exactitude de la construction, en prenant la génératrice parallèle à la trace verticale du plan.

J'engage le lecteur à changer les données de ce problème de toutes les manières, non-seulement pour la position du point, mais encore pour celle du plan.

42. Dans les *figures* 36, 37, on a appliqué la construction précédente à des points situés derrière le plan vertical et au-dessous du plan horizontal.

On peut encore, comme dans la *figure* 37, employer une ligne oblique au plan de projection, et située dans le plan donné. Cela deviendra surtout nécessaire lorsque les pieds des génératrices parallèles aux traces ne se trouveront pas dans les limites de l'épure.

43. *Par un point donné, faire passer une parallèle à une ligne donnée.*

Le plan projetant d'une ligne droite doit contenir cette ligne, et toutes les perpendiculaires abaissées de ses différents points sur le plan de projection. On peut donc dire qu'une de ces perpendiculaires, avec la ligne donnée, suffisent pour déterminer la position du plan projetant. Donc, si deux lignes sont parallèles dans l'espace, leurs plans projetants seront parallèles, et les traces de ces plans, ou autrement les projections des lignes données seront parallèles. D'après cela (*fig.* 38), *pour construire par un point une parallèle à une ligne donnée, il faut faire passer par les projections du point des parallèles aux projections de la ligne donnée.*

44. *Exprimer que deux lignes droites se coupent dans l'espace.*

On conçoit facilement qu'il suffit pour cela de les faire passer par un même point (33); ainsi, les deux droites représentées (*fig.* 39) se coupent, et celles de la *figure* 40 ne se coupent pas.

45. *Trouver les traces d'une droite.*

On donne le nom de *traces* aux points suivant lesquels la ligne donnée perce les plans de projection.

Soit donc la droite $ab, a'b'$ (*fig.* 41, 42, *Pl.* 5). Il est évident que le point v, v' appartient à la droite, puisque ses projections appartiennent à celles de la droite (17); de plus il appartient au plan vertical de projection, puisque sa projection horizontale v est sur la ligne AZ (16). Donc, il est l'intersection de la ligne donnée, avec le plan vertical; de même, le point h, h' étant en même temps dans le plan horizontal et sur la ligne donnée, représente l'intersection de cette ligne avec le plan horizontal.

Il résulte de ce que nous venons de dire, que *pour obtenir les traces d'une droite, il faut prolonger ses projections; puis au point où la projection horizontale rencontrera la ligne AZ, on élèvera sur cette dernière ligne une perpendiculaire qui, par son intersection avec la projection verticale de la droite proposée, donnera la trace verticale de cette droite. De même, par le point où la projection verticale rencontrera la ligne AZ, on mènera à cette* *ligne une perpendiculaire dont l'intersection avec la projection horizontale de la ligne donnée sera la trace horizontale de cette ligne.*

46. Pour rendre les épures plus faciles à comprendre, on est convenu de tracer en ligne pleine, ou de ponctuer d'une manière particulière, les portions de lignes droites situées au-dessus du plan horizontal, et en deçà du plan vertical, et de tracer en points les portions de ces lignes qui passent derrière ou dessous les plans de projection.

C'est encore dans le même but que l'on adopte plusieurs manières de ponctuer. Indépendamment de la convention dont je viens de parler, on trace quelquefois en lignes pleines les données et les résultats de la question; et en points, les lignes nécessaires à la construction de l'épure, en ayant soin surtout de ponctuer toujours de la même manière les deux projections d'une même droite.

47. *Étant données les traces d'un plan et l'une des projections d'une droite de ce plan, trouver l'autre projection de cette même droite.*

Soient donnés (*fig.* 43, 44) le plan p et la projection verticale $a'b'$ d'une droite située dans le plan. La droite donnée étant prolongée, s'il est nécessaire, coupera la trace verticale du plan donné en un point v', qui fera partie du plan vertical de projection, et aura, pour cette raison (16), sa projection horizontale v sur la ligne AZ. Ensuite, le point de la droite ab, dont la projection verticale se trouve en h' sur la ligne AZ, est, par cette raison, nécessairement situé dans le plan horizontal; et comme, de plus, il fait partie du plan donné, puisqu'il est situé sur une droite de ce plan, il sera sur l'intersection du plan horizontal avec le plan donné, c'est-à-dire sur la trace horizontale de ce plan. Donc,

Étant donnés la projection verticale $a'b'$ d'une ligne droite, et les traces du plan qui la contient, *on mènera par les points* v′ *et* h′ *deux perpendiculaires à la ligne* AZ ; *puis joignant le point* v, *où la perpendiculaire menée par le point* v′ *rencontre la ligne* AZ, *avec le point* h, *où la seconde perpendiculaire rencontre la trace horizontale du plan*, *on aura la projection horizontale* vh *de la droite.*

On ferait une construction analogue, si l'on donnait la projection horizontale de la ligne, et que l'on voulût déterminer sa projection verticale.

On pourrait vérifier l'opération en construisant (30), par un point de la droite, une des génératrices du plan.

48. Il résulte de ce qui précède, et il est très-essentiel de remarquer que, *pour exprimer qu'une droite fait partie d'un plan*, *il faut faire en sorte que les traces de la droite soient situées sur les traces du plan.*

On peut dire plus généralement encore que *pour exprimer qu'une droite fait partie d'un plan*, *il faut faire les constructions nécessaires pour que deux points quelconques de la droite soient situés dans le plan* (41).

49. *Étant donnés un plan et un point de ce plan*, *construire les projections d'une droite qui passe par ce point et qui soit située dans le plan.*

On mènera par l'une des projections du point donné (*fig.* 45), et arbitrairement, l'une des projections de la droite demandée ; puis l'on déterminera la seconde projection par le moyen que nous venons d'indiquer (47). Le problème admet une infinité de solutions. Dans la *figure* 46, le plan donné est parallèle à la ligne AZ, et sa trace verticale est au-dessous de cette ligne. Le point *s* est l'intersection de la droite demandée avec le plan auxiliaire de projection.

50. *Étant données les projections d'un point* g,g′, *construire les traces d'un plan qui contienne ce point.*

On construira (*fig.* 47, *Pl.* 6) une trace pq à volonté ; cette trace déterminera la direction de la génératrice $g'd'$, dont la projection horizontale gd doit être (27) parallèle à la ligne AZ ; puis abaissant $d'd$, on aura en d le pied de la génératrice, qui, étant joint avec la point q, déterminera la trace horizontale.

Cette construction donnera tous les plans qui, passant par le point g, g' auraient leurs traces verticales parallèles à pq. En recommençant dans une autre direction, on aura une autre série de plans. On pourrait aussi commencer par construire la trace horizontale.

51. *Étant données* (*fig.* 48) *les deux projections d'une droite, faire passer un plan par cette droite.*

Il suffira (48) de faire passer les traces du plan par les traces (v', h) de la droite.

Le problème admet une infinité de solutions; les plus importantes sont celles représentées *figure* 49.

Le plan p contient la droite, et est parallèle à la ligne AZ ; le plan p' est perpendiculaire au plan horizontal, et le plan p'' est perpendiculaire au plan vertical. On voit qu'en général,

52. *Pour mener par une droite un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, il suffit de prendre pour trace, sur ce plan, la projection même de la droite, et pour l'autre trace une perpendiculaire à la ligne* AZ.

Il est évident, d'après ce que nous avons dit (17), que le plan construit de cette manière sera le plan projetant de la droite donnée.

53. Supposons (*fig.* 50) qu'ayant les deux traces (v', h) d'une droite, et la trace verticale d'un plan qui contient cette droite, on n'ait pas sur l'épure le point où cette trace rencontre la ligne AZ ; on prendra sur la droite un point

quelconque (m, m'), et menant par ce point une génératrice parallèle à la trace connue, le pied de cette génératrice déterminera un second point h' de la trace cherchée.

54. Je n'ai pas besoin de rappeler ici que les épures doivent être dessinées avec beaucoup de soin. Ainsi, un point devant être déterminé par l'intersection de deux lignes, on doit, par un choix convenable de ces lignes, tâcher que leur intersection se fasse suivant un angle approchant le plus possible de l'angle droit. Pareillement, dans la détermination d'une ligne droite, il faudra toujours choisir les moyens de solution qui donneraient deux points très-éloignés l'un de l'autre. Ainsi, dans la *figure* 50, on doit choisir la position du point m, m', de manière que le point h' soit le plus loin possible du point h.

55. *Faire passer un plan par deux droites qui se coupent.*

On cherchera (*fig.* 51) les traces de ces droites; et faisant passer deux droites par ces traces, ces lignes représenteront les traces du plan demandé (48). Si l'on a bien opéré, ces deux droites doivent se couper en un point de la ligne AZ; dans le cas où ce point serait hors de l'épure, on pourra construire une droite quelconque située dans le plan obtenu (47); et si cette ligne coupe les deux lignes données, l'exactitude des constructions sera vérifiée.

56. *Faire passer un plan par trois points donnés*

On joindra (*fig.* 51) ces points deux à deux par des droites, et la construction se fera comme dans le cas précédent.

57. *Faire passer un plan par deux lignes parallèles.*

On cherchera encore (*fig.* 52) les traces des deux lignes données, et les droites passant par ces traces seront les traces du plan cherché. On vérifiera les constructions, comme nous l'avons dit (55).

INTERSECTIONS DES LIGNES ET DES PLANS.

58. *Trouver l'intersection de deux droites.*

Nous avons vu (44) comment on reconnaît que deux lignes droites se coupent, et dans ce cas leur intersection est toute trouvée ; *elle a pour projections les points suivant lesquels se coupent les projections des deux droites.*

59. *Deux plans étant donnés par leurs traces, construire leur intersection.*

L'intersection de deux plans étant une ligne droite, il suffit de trouver deux points de cette ligne pour qu'elle soit déterminée ; or (*fig.* 53, 54, *Pl.* 7), le point v', intersection des traces verticales, est un point commun aux deux plans, donc il appartient à leur intersection; mais, comme faisant partie des traces verticales, il est nécessairement situé dans le plan vertical de projection, et par conséquent sa projection horizontale v sera sur la ligne AZ. Par la même raison, le point h, intersection des traces horizontales, faisant partie du plan horizontal de projection, sa projection verticale h' sera sur la ligne AZ.

Il ne reste plus maintenant qu'à tracer (34) la droite qui passerait par les deux points (v, v') et (h, h').

On peut s'assurer, par le moyen indiqué (41), qu'un point quelconque de la droite (vh) $(v'h')$ est situé en même temps dans les deux plans. On conclura de ce que nous venons de dire, qu'en général,

60. *Pour obtenir l'intersection de deux plans dont on a les traces, il faut, par le point d'intersection des traces verticales, abaisser une perpendiculaire à la ligne* AZ, *et joignant le pied de cette perpendiculaire avec le point de rencontre des traces horizontales, on aura la projection horizontale de la ligne demandée ; puis, du point*

où les traces horizontales se rencontrent, on abaissera une perpendiculaire sur la ligne AZ; *et joignant le pied de cette perpendiculaire avec le point de rencontre des traces verticales, on aura la projection verticale de cette même ligne.*

61. Cette question est une de celles qu'il faut s'exercer à résoudre dans tous les cas. J'engage le lecteur à changer de toutes les manières possibles la position des plans donnés. Dans la *figure* 54, par exemple, les deux traces horizontales se rencontrent derrière le plan vertical.

62. Dans la *figure* 55, la projection horizontale de la ligne cherchée se confond avec la trace de l'un des plans donnés, qui est perpendiculaire au plan horizontal, et qui, par cette raison, devient le plan projetant de l'intersection. Nous ferons souvent usage de cette combinaison de plans.

63. Dans la *figure* 56, l'un des plans donnés est horizontal; d'où il résulte que la ligne cherchée et la trace de l'autre plan doivent être parallèles, puisqu'elles sont les intersections de deux plans parallèles par un troisième (*Géom.*). Dans ce cas, le point hh' est situé à l'infini.

Les *figures* 57 et 58 sont encore des cas particuliers du même problème. Dans la dernière, les deux plans proposés sont parallèles à la ligne AZ, et leur intersection s, s', aussi parallèle à AZ, se projette sur le plan auxiliaire de projection par un point s''.

64. Voici encore quelques cas du même problème, qui méritent toute notre attention.

Si les deux plans proposés, que je nommerai p et p', étaient disposés comme dans la *fig.* 59, *Pl.* 8, il est évident que les quatre points (v, v', h, h'), qui d'après le principe (60) nous ont servi à déterminer les projections de l'intersection des deux plans, se trouvant confondus en un seul poit m, ils ne suffiraient plus pour faire connaître la direction de cette ligne; mais comme, dans ce cas, le point m de la ligne AZ est un point commun aux deux plans, les deux projections de la ligne cherchée doivent y aboutir. Il n'y aura donc plus qu'à déterminer sa direction; pour cela, on construira le plus loin possible du plan p', un plan p'' qui lui sera parallèle, puis cherchant (60) l'intersection des plans p' et p'', on aura une ligne (t, t') parallèle à la ligne cherchée comme intersection de deux plans parallèles par un troisième plan (*Géom.*). Il n'y aura donc plus qu'à mener par le point m deux lignes ms, ms', parallèles aux lignes t et t'. Ces droites seront les projections demandées.

On pourrait encore recourir à ce moyen, si (*fig.* 60) les quatre points (v, v', h, h') étaient tellement rapprochés, que la direction de la ligne cherchée ne pût pas être déterminée avec exactitude.

65. Enfin, il peut arriver que l'un des points d'intersection des traces ou tous les deux soient situés hors de l'épure.

Soient (*fig.* 61) les deux plans p et p' dont on demande l'intersection; on a déjà le point (h, h') qui appartient à cette ligne; il ne reste plus qu'à trouver un second point commun aux deux plans; pour cela, on construira un plan auxiliaire p'', que l'on prendra horizontal pour plus de simplicité. Ce plan p'' coupera le plan p suivant une ligne a parallèle à sa trace (63), et le plan p' suivant une ligne b; de plus, ces deux lignes a et b étant toutes deux dans un même plan p'', se couperont en un point m qui appartiendra aux deux plans donnés, puisqu'il sera situé sur des lignes faisant partie de ces plans. Le point m appartenant au plan horizontal p'', sa projection verticale sera en m', de sorte que les deux lignes hm, $h'm'$, seront les deux projections de la ligne demandée.

66. Si les points vv', hh' étaient tous deux hors de l'épure il faudrait faire deux fois la construction précédente ; seulement, pour avoir le plus grand éloignement possible (54) entre les deux points mm', nn', qui déterminent la ligne cherchée, il faudra prendre l'un des plans auxiliaires p'' horizontal, et l'autre p''' parallèle au plan vertical de projection, tous deux le plus loin que l'on pourra de la ligne AZ. On pourrait employer le même moyen dans le cas des *figures* 59 et 60.

67. *Déterminer le point d'intersection de trois plans donnés.*

Soient p, p', p'' les trois plans donnés ; nommons m le point cherché.

Ce point devant appartenir aux deux premiers plans, sera sur leur intersection, que je nommerai s, et que l'on obtiendra par la construction (59). Par la même raison, le point m devant appartenir aux plans p' et p'', sera sur leur intersection, que je nommerai k. Donc le point cherché devant être en même temps sur les lignes s et k, sera où ces deux lignes se coupent.

On conçoit que si l'on cherche l'intersection des plans p et p'', cette ligne, que nous nommerons u, doit passer par le point m ; ce qui donne un moyen de vérifier l'exactitude des opérations précédentes.

68. Une des difficultés qui arrêtent le plus les commençants dans l'étude de la géométrie descriptive, provient des efforts qu'ils font pour se figurer la position, dans l'espace, des lignes et des surfaces sur lesquelles ils opèrent. Mais, je l'ai dit plus haut, cela n'est pas nécessaire, cette manière d'agir est même contraire à l'esprit d'analyse. On

conçoit, en effet, que lorsqu'on cherche l'intersection de deux plans, on doit opérer en conséquence des relations générales qui ont lieu lorsque deux plans se coupent, et non pas d'après la position particulière de deux plans plutôt que de deux autres. Ainsi, celui qui veut faire une opération de calcul, s'occupe davantage de la manière générale d'opérer que de la valeur des chiffres qu'il a sous les yeux dans la question proposée.

Dans le dernier problème que nous venons de résoudre, par exemple, il ne faut pas chercher à voir dans son imagination tel plan plutôt que tel autre; il n'est pas nécessaire de chercher à reconnaître si le plan p est plus incliné que le plan p'; il suffit d'opérer comme nous l'avons fait, en appliquant deux fois de suite le principe de l'intersection de deux plans.

Si toutefois on voulait familiariser son imagination avec les conceptions géométriques, et se représenter dans l'espace les données de la question, il faudrait concevoir, non pas nécessairement les trois plans donnés, mais trois plans quelconques inclinés comme on voudra. On sait qu'en général ces trois plans formeront, par leur intersection, un angle trièdre, qui aurait pour sommet le point cherché, et dont les trois droites s, k et u seraient les arêtes.

69. On voit encore que si les trois droites données par la construction de l'épure étaient parallèles, cela indiquerait que les trois plans sont disposés comme les faces d'un prisme triangulaire, et que le point m est situé à l'infini. Enfin,

Si deux des plans donnés étaient parallèles, deux des trois arêtes seraient parallèles, et la troisième n'existerait pas.

J'engagerai cependant les commençants à s'habituer à juger, par l'inspection de l'épure, de la position des éléments géométriques qui y sont représentés; mais c'est ce qu'ils ne doivent faire que lorsque la question est complétement résolue dans la pensée, et tout au plus avant de commencer l'épure, afin de trouver les moyens les plus simples d'exécution.

70. *Trouver l'intersection d'une ligne droite avec un plan.*

Soient aa', la droite dont on demande l'intersection avec le plan p (*fig.* 65, *Pl.* 9) ;on fera passer par la droite un plan quelconque p', que, pour plus de simplicité, on prendra perpendiculaire à l'un des plans de projection. Ce plan contenant la droite donnée, contiendra le point cherché; de plus, ce point, d'après la question, doit faire partie du plan donné p; donc il sera sur l'intersection du plan p avec le plan p'; on construira cette intersection (59), et le point cherché devant être en même temps sur les deux droites a' et s', sera au point m', où ces deux lignes se coupent.

On s'assurera de l'exactitude des constructions, en faisant usage du plan p'' perpendiculaire au plan vertical, ou bien en construisant par le point m une génératrice du plan p.

Il faut changer de toutes les manières la position des données de cette question. Dans la *figure* 66, la trace verticale du plan donné p, et celle du plan p', se rencontrent au-dessous du plan horizontal.

Dans la *figure* 67, le plan donné est parallèle à la ligne AZ.

71. Dans la *figure* 68, la ligne ($ab, a'b'$) est perpendiculaire à la ligne AZ, de sorte que ses deux projections sont le prolongement l'une de l'autre, et le plan p' est perpendiculaire aux deux plans de projection. Dans ce cas, on fera tourner ce plan autour de sa trace verticale, pour le rabattre sur l'épure; la ligne donnée sera représentée, dans ce rabattement, par $a''b''$, et $v's'$ sera l'intersection des plans p et p'. Le point m'', où ces deux lignes se coupent,

étant ramené à sa place, aura pour ses projections les deux points m, m'. On pourra vérifier les constructions en construisant, par le point que l'on aura trouvé, une génératrice du plan p (27).

72. Dans la *figure* 69, les traces verticales du plan donné p et du plan auxiliaire p', ne se rencontrant pas sur l'épure, on trouvera l'intersection de ces deux plans par la construction indiquée (65).

73. Dans la *figure* 70, on a employé, comme surface auxiliaire, un plan p' parallèle à la ligne AZ, et contenant la ligne donnée (51). On peut vérifier les constructions en construisant la projection m'' du point demandé sur le plan auxiliaire de projection (21).

PARALLÉLISME DES LIGNES ET DES PLANS.

74. Nous avons vu (43) que *lorsque deux lignes sont parallèles, leurs projections sont parallèles.*

75. Nous admettrons pareillement que *lorsque deux plans sont parallèles, leurs traces sont parallèles*, puisqu'elles sont les intersections de deux plans parallèles par le plan de projection (*Géom.*). D'après cela,

76. *Étant donnés un plan et un point, construire par le point un second plan parallèle au premier.*

Soient donnés (*fig.* 71, *Pl.* **10**) le plan p et le point aa'. On construira par le point a' une parallèle à la trace verticale du plan p, et par conséquent à celle du plan cherché p'. Cette droite, considérée comme génératrice du plan cherché, aura pour projection horizontale ad, et son pied d sera un point de la trace horizontale demandée. On construira cette trace parallèle à celle du plan donné, et le point où cette trace rencontrera la ligne AZ appartiendra à la trace verticale cherchée, que l'on mènera parallèlement à celle du plan p.

77. On aurait pu, par une construction analogue, chercher d'abord un point de la trace verticale.

78. Dans la *figure* 72, on a projeté le point aa' sur le plan auxiliaire, puis, par la projection a'' de ce point, on a mené parallèlement à la trace du plan p, la ligne su, que l'on a prise pour trace du plan cherché; ce qui a donné en s et en u' un point pour chacune des deux autres traces de ce plan.

79. *Étant donnés un plan et un point, construire par ce point une parallèle au plan donné.*

Étant donnés (*fig.* 73) le plan p et le point aa', on prendra un point *quelconque* bb', situé où l'on voudra dans le plan p; puis, après avoir mené par ce point une ligne *quelconque* bc, $b'c'$, située dans le plan p, on construira parallèlement à cette ligne, et par le point donné une ligne (ad, $a'd'$) qui sera parallèle au plan p, puisqu'elle sera parallèle à une droite (bc, $b'c'$) située dans ce plan (*Géom.*).

On voit que le problème est indéterminé, et qu'en recommençant la construction dans toutes les directions, on aura autant de droites que l'on voudra passant par le point donné, et parallèles au plan donné.

Il est encore facile de reconnaître que toutes ces droites seront dans un même plan; d'où résulte un moyen plus élégant de résoudre la même question.

80. On construira d'abord par le point (aa') (*fig.* 74), et par le moyen indiqué (76), un plan p' parallèle au plan p, et il n'y aura plus qu'à mener (49), par le point donné, des droites qui soient situées dans le plan p'.

81. Il résulte de ce qui précède, que lorsque deux

lignes sont parallèles entre elles, ou que deux plans sont parallèles, on le voit à l'inspection de l'épure, puisque les projections des lignes dans le premier cas, et les traces des plans dans le second, sont parallèles; mais il n'en est pas de même du parallélisme d'une ligne avec un plan. Lorsqu'une ligne est parallèle à un plan, les projections de la ligne ne sont pas pour cela parallèles aux traces du plan; de sorte que si l'on avait sur une épure les traces d'un plan et les projections d'une droite, et que l'on voulût savoir si la droite est parallèle au plan, il faudrait voir (47) si l'on peut construire dans le plan une parallèle à la droite, ou bien (51) si l'on peut construire par la droite un plan parallèle au plan donné.

82. *Étant donnés une droite et un point, faire passer par le point un plan parallèle à la droite.*

Soient (*fig.* 75) aa' le point donné, bb' la droite donnée, on mènera (43) par le point, et parallèlement à la droite bb', la ligne $(ac, a'c')$; et tout plan construit suivant cette dernière ligne sera nécessairement parallèle à la première (*Géom.*). La question admet une infinité de solutions.

83. *Deux droites étant données, faire passer par l'une d'elles un plan parallèle à l'autre.*

Par un point quelconque mm' de la ligne bb' (*fig.* 76), on fera passer une ligne cc' parallèle à la droite aa'; puis, construisant (55) le plan qui contiendra les deux droites (bb') (cc'), on aura satisfait à la question. En effet, les lignes aa', cc' étant parallèles, tout plan contenant l'une d'elles sera parallèle à l'autre (*Géom.*).

PERPENDICULARITÉ DES LIGNES ET DES PLANS.

84. *Lorsqu'une ligne droite est perpendiculaire à un plan, les projections de cette ligne sont perpendiculaires sur les traces du plan.*

Soit, (*fig.* 77, *Pl.* 11.) la droite AB perpendiculaire sur le plan P; représentons le plan de projection par P', et par P'' le plan projetant la droite; alors *ac* sera la projection de cette droite, et *bc* sera la trace du plan P. Or, le plan P'', comme plan projetant, est nécessairement perpendiculaire sur le plan de projection P'; de plus, il est perpendiculaire sur le plan P, puisqu'il contient la droite AB, qui, d'après la question, est perpendiculaire à ce plan. Il résulte donc de là que le plan P'' étant perpendiculaire en même temps sur le plan P et sur le plan de projection P', sera perpendiculaire à leur intersection *bc*, qui n'est autre chose que la trace du plan P; et réciproquement, cette ligne *bc* sera perpendiculaire au plan P'', et par conséquent à toute ligne telle que *ac* qui passerait par son pied dans ce plan : ce qu'il fallait démontrer.

85. Réciproquement (*fig.* 78), *si par les projections* a, a' *d'un point, on mène deux droites perpendiculaires aux traces d'un plan* p, *on pourra regarder ces lignes comme étant les projections d'une droite située dans l'espace, perpendiculairement au plan* p; car les deux plans projetant *p'* et *p''* étant perpendiculaires sur les traces du plan *p*, seront tous deux perpendiculaires à ce plan (*Géom.*), et par conséquent la ligne *ab*, *a'b'*, qui est leur intersection, sera aussi perpendiculaire au plan *p*.

86. *Donc, pour exprimer qu'une ligne est perpendiculaire à un plan, ou réciproquement, il faut faire en sorte*

que les projections de la ligne soient perpendiculaires sur les traces du plan (*fig.* 78).

87. Le théorème précédent conduit à la solution de toutes les questions de perpendicularité ; mais, avant de passer à l'application, je rappellerai ce que j'ai déjà dit plus haut.

Les difficultés que l'on éprouve, dans le commencement, à résoudre les questions de Géométrie descriptive proviennent en grande partie de ce que l'on se préoccupe trop de la position des données.

On doit d'abord chercher à découvrir quelles sont les relations géométriques desquelles dépend la solution du problème, et ce n'est qu'après avoir trouvé ces relations qu'on les traduit dans le langage particulier à la Géométrie descriptive.

Il faut que l'on ait bien reconnu quelles sont toutes les opérations à faire, et que la question soit complétement *résolue*, avant de tracer la première ligne sur l'épure.

C'est alors seulement que l'on doit examiner les données, afin de reconnaître si, dans leur disposition particulière, il y a quelques moyens de simplifier l'application du principe général.

88. Les questions à résoudre sont ordinairement de deux espèces ; les unes, que je nommerai questions *simples*, se déduisent directement de la géométrie ordinaire. Les autres, que je nomme *composées*, résultent de la combinaison de plusieurs questions précédemment résolues.

Pour résoudre une question simple, il suffit de découvrir le théorème exprimant les relations géométriques qui existent entre les quantités que l'on connaît et celles que l'on cherche ; et, dans ce cas, l'épure n'est plus qu'une traduction graphique de ces mêmes relations. Ainsi, par exemple, dès que nous avons démontré qu'un plan perpendiculaire sur une droite doit avoir ses traces perpendiculaires sur les projections de cette droite, il est évident qu'il suffit d'établir cette perpendicularité sur l'épure pour construire un plan perpendiculaire à une ligne donnée.

Mais lorsqu'une question est composée, il faut, *avant de commencer l'épure*, découvrir toutes les questions simples dont se compose la question principale, et déterminer bien exactement l'ordre suivant lequel doivent être faites toutes ces opérations.

89. Qu'il s'agisse, par exemple, de *déterminer la distance d'un point à un plan*, on dira presque toujours qu'il faut abaisser du point une perpendiculaire sur le plan; après quoi on devra chercher la longueur de cette perpendiculaire.

Cette réponse, qui paraît exacte au premier abord, est cependant loin d'être complète; et l'erreur provient surtout de ce qu'on oublie que les droites et les plans employés ici comme moyens de solution, doivent toujours être considérés comme infinis (12); de sorte qu'il n'est point exact de dire que l'on mesurera la longueur de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan, puisque cette ligne est infinie.

Voici de quelle manière la question devait être résolue.

Étant donnés (*fig.* 80) le plan P et le point A,

1[re] *opération.* On tracera par le point A une droite *mn* perpendiculaire au plan donné.

2[e] *opération.* On déterminera le point B suivant lequel la perpendiculaire *mn* perce le plan P.

3[e] *opération.* On mesurera la longueur de la portion AB de perpendiculaire comprise entre le point donné et le plan.

La question étant ainsi décomposée, on commencera l'épure en exécutant successivement chacune des *trois* opérations précédentes, dans l'ordre suivant lequel nous venons de les indiquer.

Ainsi :

1re *opération*. On tracera (*fig.* 79) par les points a et a' les deux droites ab, $a'b'$ respectivement perpendiculaires sur les traces du plan p. Ces deux lignes seront les projections de la droite AB perpendiculaire sur le plan P (*fig.* 80).

2e *opération*. On déterminera (70) le point b, b' suivant lequel la droite ab, $a'b'$ perce le plan p ; de sorte que ab, $a'b'$ seront les deux projections de la portion de perpendiculaire comprise entre le point et le plan donné.

3e *opération*. On fera tourner la droite ab, $a'b'$ autour de la verticale projetante du point aa' ; ce qui donnera a'B pour la distance du point aa' au plan p.

Dans la *figure* 81, le plan donné est parallèle à la ligne AZ, et la ligne ab, $a'b'$, qui mesure la distance du point a au plan, se trouve rabattue en $a''b''$ suivant sa véritable grandeur.

90. Supposons actuellement que l'on veuille *déterminer la distance de deux plans parallèles* p *et* p' (fig. 83).

Représentons d'abord les deux plans donnés par P et P' (*fig.* 82), et cherchons quel doit être l'ordre des opérations.

1° On construira (86) une droite quelconque mn perpendiculaire en même temps aux deux plans P et P'.

La distance de ces plans étant partout la même, il est évident que la droite mn pourra être tracée où l'on voudra.

2° On déterminera (70) le point A, suivant lequel la droite mn perce le plan P.

3° On déterminera de la même manière le point B, suivant lequel la droite *mn* perce le plan P'.

Alors AB sera la portion de perpendiculaire comprise entre les deux plans P et P', et représentera par conséquent leur distance.

4° On cherchera la grandeur de AB en opérant comme nous l'avons dit au n° 35.

Quoique j'aie indiqué par des renvois aux articles précédents l'ordre des constructions graphiques qui doivent être successivement exécutées, je répète qu'il ne faut pas commencer l'épure avant d'avoir reconnu complétement quelles sont toutes les opérations simples dont se compose la question principale.

91. On pourrait encore, pour obtenir la distance demandée, prendre un point *quelconque* situé dans l'un des deux plans (41), puis mesurer la distance de ce point à l'autre plan, en opérant comme dans la question du n° 89.

92. Dans la *figure* 84, les plans donnés sont parallèles à la ligne AZ, et leur distance se trouve projetée en $a''b''$, suivant sa véritable longueur.

93. *Étant donnés un plan et un point, construire par le point un plan perpendiculaire au premier.*

Soient (*fig.* 85, *Pl.* 12) le plan *p* et le point *aa'*; on fera 1° passer par le point une droite perpendiculaire au plan *p* (86); 2° on construira (51) autant de plans que l'on voudra contenant cette droite; tous ces plans seront perpendiculaires au plan donné. En effet, on sait (*Géom.*) que si une droite *mn* (*fig.* 86) est perpendiculaire à un plan P, tout plan contenant cette droite *mn* sera aussi perpendiculaire au plan P.

94. Nous reconnaissons, par le résultat, qu'on ne peut

pas, à la vue d'une épure, savoir si deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, et que l'angle suivant lequel se coupent les deux traces n'apprend rien à cet égard. Mais si l'on voulait mettre en évidence la perpendicularité de deux plans, on prendrait un point de leur intersection (59); puis, après avoir mené par ce point une perpendiculaire à l'un des plans (86), on ferait les constructions nécessaires pour reconnaître si elle est contenue dans l'autre plan (48).

95. *Étant donnés un plan et une droite, construire par cette droite un second plan perpendiculaire au premier.*

Soient (*fig.* 87) le plan p et la droite aa'; on prendra sur la droite un point quelconque mm'; puis après avoir mené par ce point une droite bb' perpendiculaire au plan donné, il n'y aura plus qu'à construire (55) un plan qui contienne ces deux droites; car il est évident qu'il sera perpendiculaire au plan donné, puisqu'il contiendra une droite bb' perpendiculaire à ce plan.

96. Nous avons vu (86) que *pour exprimer qu'un plan est perpendiculaire sur une droite, il faut mener les traces du plan perpendiculaire sur les projections de la droite.* D'après cela,

97. *Par un point donné, faire passer un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

Soient (*fig.* 88) aa' la droite donnée, et bb' le point donné; on mènera $b'd'$ perpendiculaire à la projection verticale de la droite donnée. Cette ligne, considérée comme génératrice du plan demandé, aura pour projection horizontale bd, et son pied d appartiendra à la trace horizontale du plan cherché; alors on pourra construire cette trace perpendiculairement à la projection horizontale de la ligne donnée, et par suite la trace verticale.

On aurait pu commencer par chercher un point de la trace verticale.

98. *Par un point pris sur une droite, mener des perpendiculaires à cette droite.*

Étant donnée (*fig.* 90) la droite $ab,a'b'$ on veut par le point bb' mener des perpendiculaires à cette droite ; on construira par le point bb' un plan p perpendiculaire à la droite donnée, puis on fera passer par le point bb' des droites situées dans le plan p (49) ; toutes ces droites seront perpendiculaires sur la droite donnée (*fig.* 89).

99. On voit, par la solution de ce problème, que lorsque deux droites sont perpendiculaires entre elles, leurs projections ne sont pas pour cela perpendiculaires ; de sorte que *si l'on avait les projections de deux droites, et que l'on voulût savoir si elles sont perpendiculaires entre elles, il faudrait voir si, parmi tous les plans que l'on peut faire passer par l'une d'elles* (51), *il peut y en avoir un dont les traces seraient perpendiculaires sur les projections de l'autre ligne.*

100. *Mesurer la distance d'un point à une droite.*

Il est évident qu'il faut d'abord obtenir la perpendiculaire abaissée du point sur la droite donnée; pour cela, représentons (*fig.* 91) par A le point donné, et par B la droite donnée; 1° on mènera par le point A un plan P perpendiculaire sur la droite; 2° on déterminera (70) l'intersection de la droite avec ce plan, ce qui donnera en C le pied de la perpendiculaire; 3° joignant ce point avec le point donné, on aura la perpendiculaire AC abaissée du point A sur la droite donnée; 4° il n'y aura plus qu'à chercher la véritable grandeur de la perpendiculaire AC par le moyen indiqué (35).

Les constructions précédentes ont été exécutées (*fig.* 92).

101. *Mesurer la distance de deux droites parallèles.*

Soient A, B (*fig.* 94) les deux droites données; 1° on construira le plan P perpendiculaire sur ces droites; 2° on déterminera (70) le point C suivant lequel ce plan coupe la droite A; 3° on obtiendra de la même manière le point D, intersection du même plan avec la droite B; 4° joignant CD, on aura une perpendiculaire aux deux parallèles données; car ces deux lignes étant toutes deux perpendiculaires au plan *p*, sont perpendiculaires à la droite qui joint leurs pieds dans ce plan; 5° il n'y a plus qu'à chercher (35) la véritable grandeur de la perpendiculaire commune CD.

La *figure* 93 contient les opérations.

102. Parmi les problèmes que nous venons de résoudre, les plus remarquables sont ceux qui résultent de la combinaison de deux plans, de deux lignes, ou d'une ligne avec un plan.

103. Je rappellerai que l'inspection de l'épure suffit pour faire connaître le parallélisme de deux plans ou de deux lignes, tandis que l'on ne peut s'assurer que par une construction du parallélisme d'une ligne avec un plan.

Le contraire a lieu pour la perpendicularité; car, lorsqu'une ligne est perpendiculaire à un plan ou réciproquement, les projections de la ligne sont perpendiculaires sur les traces du plan, au lieu que la perpendicularité de deux plans ou de deux lignes ne peut être reconnue que par une construction, puisque cette perpendicularité est indépendante de l'angle que font les traces des deux plans ou les projections des deux lignes que l'on compare.

104. *Mesurer la distance de deux droites quelconques.*

Soient, par exemple (*fig.* 96, *Pl.* 13), les deux droites A et B, 1° on prendra sur B un point quelconque M; 2° on mènera par le point M une ligne C parallèle à la droite A, 3° par les deux lignes B et C on construira un plan P (55). Ce plan sera parallèle à la droite A (83); 4° on prendra ensuite sur la droite A un point quelconque N; 5° l'on abaissera de ce point une ligne ND perpendiculaire au plan P (86); 6° on déterminera en D le pied de cette perpendiculaire; 7° on la fera mouvoir parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle soit venue prendre la position KS. Je dis qu'alors elle sera perpendiculaire sur les deux droites données. En effet, KS étant parallèle à ND, sera, comme cette dernière ligne, perpendiculaire au plan P, et par conséquent à la droite SB qui passe par son pied dans ce plan; de plus, elle sera perpendiculaire à la droite AK qui est parallèle au même plan (*Géom.*). 8° Quand on a obtenu la ligne KS perpendiculaire sur les deux droites données, il ne reste plus qu'à en chercher la véritable grandeur (35).

L'épure (95) représente les constructions que l'on n'avait qu'indiquées dans la figure 96. Pour obtenir le résultat, il suffit d'exécuter ces constructions dans l'ordre suivant lequel on vient de les énoncer, en faisant pour cela usage des principes établis précédemment.

Pour plus de clarté, j'ai eu soin d'employer les mêmes lettres dans l'épure 95 et dans la figure auxiliaire 96, pour désigner les mêmes points ou les mêmes lignes; seulement la ligne A est représentée sur l'épure par celle dont les projections sont aa', et ainsi pour les autres.

105. *Trouver le centre et le rayon de la sphère dont la surface passerait par quatre points donnés.*

Le centre d'une sphère étant à égale distance de tous les points de sa surface, il est évident (*Géom.*) que si l'on joint par une ligne droite deux points de cette surface, et que par le milieu de cette droite on mène un plan qui lui soit perpendiculaire; ce plan passera par le centre. D'après cela, étant donnés (*fig.* 97) quatre points aa, bb', cc', dd', on joindra le point a avec le point b; puis, par le point vv', milieu de la corde ab, on mènera (97) un plan p perpendiculaire à cette corde : ce plan contiendra le centre de la sphère demandée. De même par le point zz', milieu de la corde bc, on mènera un plan p' perpendiculaire à cette corde : ce plan passera encore par le centre, enfin par le point uu', milieu de cd. On mènera un troisième plan perpendiculaire à cette corde, et qui, par conséquent, contiendra aussi le centre de la sphère.

On aura par ce moyen trois plans contenant le centre de la sphère demandée. Cherchant (67) le point commun à ces trois plans, on aura le centre de cette sphère.

Après avoir obtenu le point mm', qui représente le centre de la sphère, on joindra ce point avec un quelconque des points donnés qui, d'après la question, appartiennent à la surface, et la droite am, $a'm'$, sera le rayon de la sphère. Cherchant enfin (35) la véritable longueur de ce rayon, on obtiendra la ligne Am' avec laquelle, des points m et m' comme centres, on décrira deux cercles qui seront les projections verticale et horizontale de la sphère.

Il serait bon, avant de décrire les deux cercles dont je viens de parler, de s'assurer de l'exactitude des constructions. Pour cela, on joindrait le point m avec chacun des quatre points donnés, ce qui donnerait quatre rayons dont on chercherait la véritable longueur; et si ces longueurs étaient égales, ce serait une preuve suffisante que le point obtenu est à égale distance des quatre points donnés, et que, par conséquent, il est le centre de la sphère qui passerait par ces quatre points.

106. Pour déterminer le point *m*, nous avons fait usage des plans perpendiculaires sur les milieux des trois cordes *ab*, *bc*, *cd*; mais si ces plans n'étaient pas commodément placés pour l'exécution de l'épure, il serait facile d'en trouver d'autres. En effet, si l'on joint par des droites et de toutes les manières possibles les quatre points donnés, on aura six cordes *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*. Or, si par les milieux de chacune de ces six cordes on mène des plans qui leur soient perpendiculaires, on obtiendra six plans passant par le centre de la sphère cherchée ; et comme trois de ces plans suffisent, on choisira ceux qui donneront les constructions des plus simples.

Si les quatre points étaient dans un même plan, les cordes qui joindraient ces points seraient aussi contenues dans ce plan. Les plans menés perpendiculairement à ces cordes seraient, ainsi que leurs intersections, perpendiculaires au plan qui contiendrait les points donnés. Le centre de la sphère serait infiniment loin, et cette sphère ayant un rayon infiniment grand, sa surface se confondrait avec le plan passant par les points donnés.

Enfin, si ces quatre points étant dans un même plan, se trouvaient situées sur la circonférence d'un cercle, on le reconnaîtrait, parce que les plans perpendiculaires sur les milieux des cordes passeraient tous par une même droite perpendiculaire au plan de ce cercle, et qui en contiendrait le centre, de sorte que le problème serait indéterminé, et que l'on pourrait prendre tel point de cette droite que l'on voudrait pour centre de la sphère demandée, et pour rayon la distance de ce point à l'un des points donnés.

On voit que dans ce cas le rayon pourrait être aussi grand que l'on voudrait, mais qu'il ne pourrait pas être plus petit que celui du cercle qui passerait par les points donnés.

107. Nous avons résolu la question précédente d'une manière générale, mais assez souvent sans rien changer aux données d'une question; on peut, par quelques considérations particulières, en rendre la solution plus simple.

En effet, nous n'avons donné à nos plans de projection les noms de plan horizontal et de plan vertical, que parce que souvent, dans les applications, l'un de ces plans représente la terre ou un plan qui lui est parallèle; mais il ne faut pas en conclure que cela doive toujours être ainsi, et que l'on ne puisse pas s'écarter de cette convention.

Il est certain que, pourvu que l'on ne change rien aux données d'une question, il n'y aura rien non plus de changé dans le résultat, et que, par conséquent, l'on doit rester le maître de choisir le système de plan de projection que l'on jugera le plus favorable à l'exécution de l'épure; on peut même dire que si le but de la théorie est de généraliser les idées en dégageant les questions principales de toutes les circonstances particulières, l'art du praticien, au contraire, consiste à profiter de ces mêmes circonstances pour résoudre le cas particulier dont il s'occupe, de la manière la plus simple.

108. Ainsi, dans le problème précédent, on conçoit que, sans rien changer à la position relative des quatre points donnés, on peut prendre (*fig.* 98) pour l'un des plans de projection, celui qui contiendrait trois de ces points, a, b, c, par exemple, et pour second plan de projection, un plan perpendiculaire au premier et parallèle à la droite cd, qui joindrait l'un des trois premiers points avec le quatrième. Par ce moyen, les deux plans p et p' se couperont suivant une droite s perpendiculaire au plan abc, et le troisième plan p'' étant perpendiculaire au second plan de projection, sera percé par la droite s en un point mm' qui sera le centre de la sphère. Quant au rayon

(am, $a'm'$) on en cherchera la véritable longueur par le moyen connu (35).

CHAPITRE III.

Rabattements.

109. Nous avons dit au n° 35 que, pour avoir la grandeur véritable de la portion de ligne droite qui joint deux points, il fallait faire tourner cette ligne jusqu'à ce qu'elle fût parallèle à l'un des plans de projection.

L'opération que je viens d'énoncer, et que l'on nomme *rabattement*, a servi dans la solution de plusieurs questions précédentes.

L'importance que les rabattements doivent acquérir par la suite dans les applications de la Géométrie descriptive doit nous engager dès à présent à présenter quelques considérations générales sur ce genre d'opération.

110. Je ferai d'abord remarquer qu'une épure, quelle qu'elle soit, n'est elle-même autre chose que le résultat d'un rabattement.

En effet, les deux plans de projection devant toujours faire un angle dans l'espace, ce n'est qu'au moyen d'un rabattement que l'un de ces plans a pu devenir le prolongement de l'autre.

Nous avons supposé (8) que le plan horizontal avait tourné autour de la droite AZ, jusqu'à ce qu'il fût rabattu sur le prolongement du plan vertical; on peut tout aussi bien admettre que c'est le plan vertical que l'on a rabattu sur le prolongement du plan horizontal. Cette dernière supposition sera même plus naturelle, toutes les fois que l'épure sera placée sur une table, comme cela est nécessaire pour l'exécution du travail graphique.

Les plans de projection n'étant autre chose que des conceptions géométriques destinées à faciliter la solution des problèmes, ils sont toujours à la disposition de celui qui opère, et par conséquent on devra tâcher de choisir ces plans, de manière que les opérations graphiques qui en dépendent soient les plus simples possible.

Or, il est évident que, dans les exemples des n^os 35 et suivants, on aurait évité le rabattement de la droite MN, si au lieu du plan vertical qui contient la ligne AZ, on avait pu prendre un plan vertical de projection parallèle à MN; parce qu'alors la droite donnée $mn, m'n'$, aurait été projetée sur ce plan dans sa véritable grandeur; mais on ne pourra pas toujours prendre dès l'origine le plan de projection le plus simple; c'est-à-dire que le plan qui serait le plus commode pour résoudre une certaine partie de la question ne sera pas toujours celui qui conviendrait le mieux pour une autre opération dépendant du même problème. Dans ce cas, on sera quelquefois conduit à prendre autant de plans de projections différents qu'il y aura d'opérations particulières dans la question principale, et toutes ces projections auxiliaires devront être rabattues sur l'épure, chacune selon sa position.

111. Il existe d'ailleurs une classe particulière de questions qui peut presque toujours être résolue avec avantage par le moyen des rabattements.

On sait que les questions de géométrie sont de deux espèces : les unes appartiennent à la géométrie plane, et les autres dépendent de la géométrie à trois dimensions.

On dit qu'une question appartient à la Géométrie plane, lorsque les données, les résultats, et toutes les lignes d'opérations sont dans un même plan.

Or, toutes les fois que, parmi les questions particulières qui, par leur combinaison, devront concourir à la solution d'une question principale, il y aura quelques constructions qui devront être exécutées dans un plan oblique; on rabattra ce plan sur l'épure; puis, après avoir exécuté les opérations nécessaires, on ramènera le tout à la place qu'il doit occuper dans l'espace.

La première chose à faire, lorsqu'on veut exécuter un rabattement, c'est de choisir la droite autour de laquelle on veut faire tourner le plan que l'on rabat.

Nous donnerons à cette droite le nom d'*axe* ou de *charnière* de rabattement, et nous la supposerons toujours immobile.

112. Les rabattements ayant principalement pour but d'obtenir certaines figures planes dans leur véritable grandeur, il faut *que la droite prise pour axe soit parallèle à l'un des plans de projection;* car si on faisait tourner une figure plane autour d'une droite qui ne satisferait pas à la condition que nous venons d'énoncer, la figure que l'on ferait tourner, ne pouvant *jamais* être parallèle au plan de projection, ne se projetterait jamais sur ce plan dans sa véritable grandeur.

Lorsque l'on fait un rabattement, chaque point décrit dans l'espace un cercle qui a son centre sur l'axe de rotation, et qui a pour rayon la distance de cet axe au point que l'on rabat.

Les notions précédentes étant admises, nous allons compléter cette théorie par quelques exemples.

113. Supposons que l'on veuille rabattre le point m, m' (*fig.* 99, *Pl* 14) sur le plan horizontal qui contient la droite $ab, a'b'$ et que l'on ait choisi cette droite pour l'axe du rabattement.

Dans ce mouvement, le point mm' ne quittera pas le plan vertical, qui a pour trace la droite mm^{IV} perpendiculaire sur ab; et pour connaître la place que ce point doit venir occuper sur le plan horizontal qui contient la droite ab, il suffit de chercher la véritable grandeur de la droite mo, qui n'est autre chose que le rayon de l'arc de cercle parcouru par le point mm', dans son mouvement autour de la droite ab, $a'b'$.

Pour obtenir la grandeur de la droite mo, $m'o'$, il faudra opérer, comme nous l'avons dit aux nos 35, 36, etc.; c'est-à-dire que l'on fera tourner cette ligne autour de l'horizontale projetante du point o.

Le point mm' décrit alors un arc de cercle $m'm''$ parallèle au plan vertical de projection, et qui, par cette raison, doit avoir sa projection horizontale mm''' parallèle à la ligne AZ.

Par suite de cette opération, on aura $m'''o$ pour la véritable grandeur de la droite $mo, m'o'$, et par conséquent pour la distance du point mm' à la droite $ab, a'b'$; de sorte qu'en ramenant $m'''o$ dans la position $m^{\text{IV}}o$, le point m^{IV} sera la place occupée par le point mm' rabattu en tournant autour de ab, sur le plan horizontal qui contient cette droite.

114. Il est très-essentiel de remarquer que, dans l'opération précédente, il y a deux rabattements. L'un, qui se fait autour de ab, a pour but de rabattre le point mm' sur le plan horizontal $a'b'$.

Le second, qui a lieu autour de l'horizontale projetante du point o, sert à déterminer la distance du point mm' à la droite ab, que l'on a prise pour axe du rabattement.

115. L'opération serait bien plus simple, si la droite que l'on prend pour axe du rabattement était perpendiculaire à l'un des plans de projection.

En effet, dans ce cas (*fig.* 100), l'arc de cercle parcouru par le point mm' autour de la droite aa' sera parallèle au plan vertical de projection, et la place du point mm', rabattu en m''' sur le plan horizontal $a'm''$, sera déterminée directement, puisque l'on connaît la distance $a'm'$ de ce point à la droite aa'.

Nous conclurons de ce qui précède,

1° Que les conditions essentielles pour qu'une droite puisse servir d'axe de rabattement, c'est qu'elle soit *parallèle à l'un des plans de projection* (112).

2° Que les constructions seront encore plus simples lorsque l'axe du rabattement sera *perpendiculaire au plan de projection* (115).

Or, dans un plan incliné quelconque, on pourra toujours choisir un axe parallèle à tel plan de projection que l'on voudra; mais on ne pourra obtenir de perpendiculaire au plan de projection que dans les plans qui satisferaient eux-mêmes à cette condition.

116. Cependant ce résultat pourra toujours être obtenu en prenant un plan auxiliaire de projection perpendiculaire au plan que l'on veut rabattre.

En effet, reprenons la question que nous avons déjà résolue au n° 113, et proposons nous, comme alors, de rabattre le point mm' sur le plan horizontal $a'b'$, en le faisant autour de la droite ab, $a'b'$.

Si nous remplaçons le plan vertical de projection par le plan auxiliaire pcm^{IV}, et que nous concevions ce dernier plan rabattu sur l'épure en tournant autour de sa trace horizontale cm^{IV}, le point mm' aura pour nouvelle projection verticale le point m'', que l'on obtiendra en faisant $mm''=vm'$, et la droite horizontale $ab, a'b'$ étant perpendiculaire au nouveau plan vertical de projection pcm^{IV}, elle se projettera sur ce plan par un seul point o', de sorte que le chemin parcouru par le point mm' sera représenté sur le nouveau plan de projection par l'arc de cercle $m''m'''$, ce qui donnera m^{IV} pour la place que vient occuper le point mm' rabattu sur le plan horizontal $a'b'$.

117. Cette disposition d'épure contribue beaucoup à faire comprendre l'enchaînement des idées, parce qu'elle permet de projeter les arcs parcourus par chacun des points que l'on fait tourner.

118. On devra aussi éviter, autant que possible, de faire un rabattement sur une partie de l'épure qui serait déjà occupée par un autre rabattement ou par une projection.

119. Les principes que nous venons d'exposer, et qui seront fréquemment employés par la suite, correspondent au problème connu dans l'analyse algébrique sous le nom de *transformation de coordonnées*. Là, comme ici, le choix des axes ou des plans coordonnés est une des parties les plus importantes de la solution des problèmes.

Nous allons reprendre, comme exercices, quelques-unes des questions qui ont été résolues dans le chapitre précédent.

120. *Déterminer la distance d'un point à un plan.*

Supposons qu'il s'agisse de *déterminer la distance du point* aa′ *au plan* p (fig. 102).

1^re^ *opération.* On construira d'abord le plan vertical p' perpendiculaire sur la trace horizontale du plan p, et par conséquent perpendiculaire à ce plan.

Le plan p' contiendra la perpendiculaire abaissée du point aa' sur le plan p.

2^e^ *opération.* On fera tourner le plan p' autour de sa trace verticale, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan vertical de projection.

Dans ce mouvement, le point aa' viendra se placer en a'', et le point s en s', après avoir décrit deux arcs horizontaux dont les centres o et o' ont tous deux le point o pour projection horizontale.

3^e^ *opération.* On tracera la ligne vs', qui sera l'intersection du plan donné p par le plan auxiliaire p'; et la droite $a''b''$, perpendiculaire sur vs', sera la distance du point aa'' au plan p.

En effet, les deux plans p et p' étant perpendiculaires entre eux, la droite $a''b''$, située dans le plan p' et perpendiculaire à l'intersection vs', est aussi perpendiculaire au plan p, et mesure par conséquent la distance de ce plan au point donné aa'.

Si on voulait avoir la projection verticale de la perpendiculaire $a''b''$, on ramènerait cette ligne dans le plan p, ce qui donnerait $a'b'$.

Il est évident qu'au lieu du plan vertical p', on aurait pu employer un plan perpendiculaire à la trace verticale du plan donné. Dans ce cas on rabattrait ce plan sur le plan horizontal.

121. *Mesurer la distance de deux plans parallèles* (fig. 103).

1^{re} *opération.* On construira le plan p'' perpendiculaire sur les traces horizontales des deux plans donnés, et par conséquent perpendiculaire à ces deux plans.

2^e *opération.* On rabattra le plan p'' en le faisant tourner autour de sa trace verticale, ce qui donnera les deux droites $vs, v's'$ provenant de l'intersection des deux plans p et p' par le plan auxiliaire p''.

On remarquera que les deux droites $vs, v's'$ doivent être parallèles entre elles, puisqu'elles sont les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan.

3^e *opération.* La droite mn, perpendiculaire aux deux droites $vs, v's'$, sera la distance des deux plans p et p'.

122. *Déterminer la distance d'un point à une droite* (fig. 104).

1^{re} *opération.* Concevons par le point donné aa' un plan horizontal p.

L'intersection de ce plan par la droite donnée bb' sera un point n' que l'on projettera en n sur le plan horizontal.

2ᵉ *opération.* La ligne droite $an, a'n'$ sera une horizontale située dans le plan qui contient le point et la droite donnée.

3° *opération.* Nous ferons tourner la droite $bm, b'm'$ autour de l'horizontale $an, a'n'$, jusqu'à ce qu'elle soit ramenée dans le plan horizontal p.

Dans ce mouvement, le point nn' ne changera pas de place, puisqu'il appartient à la droite $an, a'n'$, que nous prenons pour axe de rabattement. Mais si nous prenons, sur la droite donnée, un point quelconque mm', il est évident que ce point, en tournant autour de an, ne quittera pas le plan vertical qui aurait pour trace la droite mm^{IV} perpendiculaire sur an. De sorte qu'en cherchant, comme nous l'avons fait au n° 113, la distance om^{IV} du point mm' à la droite $an, a'n'$, nous obtiendrons m^{IV} pour la place occupée par le point mm' rabattu sur le plan p.

Il ne restera donc plus qu'à tracer la droite nm^{IV} et la perpendiculaire au, qui sera la distance demandée.

123. *Mesurer la distance de deux droites parallèles* (fig. 105).

1° On coupera, comme précédemment, les deux droites données par un plan horizontal ; ce qui donnera deux points s et r.

2° On joindra ces deux points par la droite sr, qui sera une horizontale située dans le plan des deux droites données, et qui, pour cette raison, remplira les conditions nécessaires pour former un axe de rabattement (112).

3° On cherchera, comme précédemment, la distance om^{IV} d'un point quelconque mm' à la droite sr, de sorte que rm^{IV} sera l'une des parallèles données rabattue sur le plan horizontal.

La deuxième parallèle sa'' sera déterminée, puisque l'on connaît un de ses points s et sa direction parallèle à rm^{IV}.

4° Il ne restera plus qu'à construire la perpendiculaire nu, qui sera la distance cherchée.

124. *Mesurer la distance de deux droites quelconques.*

Nous remarquerons d'abord (*fig.* 110, *Pl.* 15) que si l'une des deux droites données aa' était perpendiculaire à l'un des plans de projection, la perpendiculaire commune $ac, a''c''$ serait parallèle au même plan de projection et par conséquent se projetterait sur ce plan dans sa véritable grandeur.

Il sera facile de parvenir à ce résultat par deux rabattements successifs.

1er *rabattement.* On fera tourner les deux droites données (*fig.* 106) jusqu'à ce que l'une d'elles, la droite a par exemple, soit parallèle au plan vertical de projection.

Si on choisit pour l'axe de ce premier rabattement la verticale qui contient le point m, les points m' et m'' resteront immobiles.

Le point u, pris où l'on voudra sur la droite a, viendra se placer en u', après avoir parcouru l'arc horizontal uu'; de sorte que a', a' seront les nouvelles projections de la droite a.

Pendant que le point u parcourt l'axe horizontal uu', le point v appartenant à la droite b décrit un arc vv' égal à uu'; parce que l'on peut toujours choisir les deux points v, u à égale distance de l'axe de rotation $m, m'm''$.

On joindra v' avec le point mm'', et l'on aura b', b' pour les nouvelles projections de la droite b.

2e *rabattement.* L'opération précédente avait pour but d'amener la droite a dans une position a' parallèle au plan vertical de projection. Nous allons actuellement faire tourner les deux droites a', b' jusqu'à ce que la première soit perpendiculaire au plan horizontal.

Si nous prenons pour l'axe de ce deuxième rabattement la droite qui contient le point n, et qui est perpendiculaire au plan vertical de projection, les deux points n' et n'' resteront immobiles.

Les deux points x, ν', pris à égale distance de l'axe de rotation, le premier sur la droite a' et le second sur b', décriront deux arcs égaux xx', $\nu'\nu''$ parallèles tous deux au plan vertical de projection.

Par ce mouvement, la droite a' devient perpendiculaire au plan horizontal de projection; d'où il résulte que sa projection sur ce plan se réduit à un seul point a''.

De plus, l'arc $\nu'\nu''$ décrit par le point ν' se projettera sur le plan horizontal par la droite $\nu'\nu''$ et le point ν', parvenu en ν'', étant joint avec n'', on aura nb'', $n''b''$ pour les nouvelles projections de la droite b'.

Ainsi les deux droites a', b' sont arrivées dans les positions a'', b'', et l'une d'elles étant alors perpendiculaire au plan horizontal de projection, la perpendiculaire commune sera horizontale, et sa projection $a''c$ sera la distance des deux droites données.

La solution précédente est due à M. Ollivier..

125. *Une droite* ac, a'c' (fig. 109) *étant donnée dans un plan oblique* p, *construire un quarré qui aurait pour côté la droite donnée et qui soit situé dans le plan* p.

Cette question est évidemment du genre de celles dont nous avons parlé au n° 111. Ainsi.

1^re^ *opération.* On rabattra le plan donné en le faisant tourner autour de sa trace horizontale.

Par suite de ce mouvement, la droite donnée deviendra $a''c''$.

2[e] *opération*. On construira un quarré qui ait pour côté cette droite.

3[e] *opération*. On ramènera le plan p à sa place, ce qui donnera $acxz$ pour la projection horizontale du quarré demandé.

4[e] *opération*. On déduira la projection verticale en employant le principe du n° 41.

Les constructions pourront être simplifiées en prenant un plan auxiliaire de projection p'' perpendiculaire à la trace horizontale du plan donné, parce qu'alors les arcs de cercles parcourus par les différents points du plan p, lorsque l'on rabat ce plan ou qu'on le ramène à sa place, se projetteront par des arcs de cercles sur le plan auxiliaire p'' (116).

On fera bien aussi, comme étude, de vérifier les points où les côtés prolongés du quarré rencontreront le plan horizontal, le plan vertical, ou le plan auxiliaire de projection.

126. Dans la *figure* 107 on s'est proposé de construire les deux projections d'un cercle situé dans un plan parallèle à la droite AZ.

Pour y parvenir, on a d'abord rabattu le plan donné, on a décrit le cercle, et l'on a ensuite ramené le tout à sa place.

Les arcs de cercles parcourus dans ces différentes opérations sont projetés par des arcs de cercles sur le plan auxiliaire p'.

La tangente a été construite dans le rabattement, d'où on l'a ensuite ramenée à sa place.

Ce qui précède suffit pour faire comprendre l'utilité des rabattements. Les exemples de ce genre peuvent être multipliés à l'infini, et nous rencontrerons souvent, par la suite, l'occasion d'appliquer avec avantage ce mode particulier d'opération.

127. Dans la *figure* 108 on s'est proposé de déterminer différents points sur les deux projections ae, $a'e'$ d'un cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne AZ.

CHAPITRE IV.

LES ANGLES.

Angles des lignes.

128. *Étant donné* (fig. 111, *Pl.* 16) *les projections de deux droites* (aa', bb') *on demande de construire l'angle que ces deux droites font entre elles.*

On cherchera d'abord les points (cc', dd') où les droites données vont percer le plans horizontal; puis, prenant la droite cd pour axe, on fera tourner le plan des deux droites données autour de cette ligne, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan horizontal de projection. Dans ce mouvement, le sommet de l'angle que les droites font entre elles décrira un cercle dont le centre sera placé en uu' sur l'axe du rabattement. Le plan de ce cercle étant vertical, il aura pour projection horizontale la droite uss''', et pour rayon la véritable grandeur de la droite su, $s'u'$. On cherchera (35) cette longueur représentée sur l'épure par la ligne us'', et on la portera de u en s'''; ce qui donnera la position que le sommet de l'angle viendra prendre sur le plan horizontal. Enfin, si l'on joint le point s''' avec c et d, on aura l'angle demandé $cs'''d$ rabattu sur le plan horizontal.

La construction précédente nous a donné l'angle aigu que les deux droites font entre elles; si l'on voulait avoir l'angle obtus, il suffirait de prolonger un des côtés de l'angle obtenu.

Si les points c, d, étaient hors des limites de l'épure, on pourrait faire le rabattement autour de toute autre ligne horizontale, telle que eo, $e'o'$, située dans le plan des deux lignes données.

On pourrait encore, si cela était plus commode, prendre pour axe du rabattement une ligne parallèle au plan vertical; dans ce cas, on ferait tourner le plan de l'angle jusqu'à ce qu'il soit parallèle au plan vertical de projection.

129. Dans la *figure* 112, on a cherché l'angle formé par les lignes aa' et bb'; mais comme la première de ces lignes était parallèle au plan horizontal, il était naturel de la prendre pour axe du rabattement. On a pris sur la droite bb' un point quelconque mm'; puis, après avoir cherché la véritable distance um'' de ce point à la droite sa, on a porté cette distance de u en m''', ce qui a donné la position du point m rabattu sur le plan horizontal qui contient la ligne aa'; joignant enfin m''' avec s, on a obtenu $m'''su$ pour la grandeur de l'angle cherché.

130. Dans la *figure* 113, l'un des côtés de l'angle cherché est vertical. Prenant ce côté aa' par axe, on a fait tourner le plan des deux droites jusqu'à ce qu'il soit arrivé dans la posion au. Alors il se trouve projeté en $a's'u'$ selon sa véritable grandeur.

131. Dans les exemples précédents, nous avons supposé que les droites données se coupaient; mais dans la Géométrie descriptive comme dans l'analyse algébrique, on considère l'inclinaison de deux droites indépendamment de leur intersection. D'après cela, si l'on demandait *de construire l'angle que font entre elles deux droites qui ne se coupent pas*, on prendrait un point quelconque sur l'une d'elles; puis, après avoir mené par ce point une parallèle à l'autre, l'angle que l'on formerait par ce moyen représenterait l'inclinaison des deux lignes données; on

chercherait sa grandeur par la construction précédente.

132. *Partager en deux parties égales l'angle que deux droites font entre elles.*

Soit (*fig.* 114) les deux droites (aa', bb'); on prendra la droite (cd, $c'd'$) pour axe, et l'on fera tourner l'angle jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan horizontal en $cs''d$. Dans cette position qui donne la véritable grandeur, on le partagera en deux parties égales (*Géom.*) par la droite $s''v$; mais cette ligne, qui doit être dans le plan de l'angle, est encore rabattue sur le plan horizontal, il reste donc à la ramener à sa place. Or, le point v où cette droite coupe l'axe du rabattement ne devant pas bouger, il suffira de concevoir le point s'' revenu à sa position s, ce qui donnera sv pour la projection horizontale de la droite demandée. Le point v appartenant à la droite cd fait partie du plan horizontal, et, par conséquent, se projettera en v' sur la ligne AZ; menant $s'v$, on aura la projection verticale de la même ligne.

Nous avons partagé en deux parties égales l'angle aigu formé par les deux droites données. On trouverait de la même manière les projections (su, $s'u'$) de la droite qui partagerait l'angle obtus.

On conçoit qu'il faudrait opérer de la même manière si, au lieu de partager l'angle donné en parties égales, on voulait le partager dans un autre rapport; ou bien encore si l'on voulait, dans un plan donné, construire une droite faisant un angle donné avec une autre ligne de ce plan.

Angles des lignes et des plans.

133. *Construire l'angle qu'une droite fait avec un plan.*

On sait (*Géom.*) que l'angle d'une droite avec un plan se mesure par l'angle que cette droite fait avec sa projection sur ce plan.

Ainsi l'angle que la droite SC (*fig.* 115) fait avec le plan P aurait pour mesure SCB ou son égal CSD ; mais pour éviter la construction de la ligne CB, on remarquera que l'angle demandé CSD est le complément de l'angle que la ligne donnée ferait avec la ligne SB perpendiculaire au plan P, d'où résulte la construction qui suit : 1° on prendra (*fig.* 115, 116) sur la droite donnée un point quelconque S ; 2° on abaissera de ce point la ligne SB perpendiculaire au plan donné ; 3° on rabattra l'angle BSC que ces droites font entre elles ; 4° on en prendra le complément.

134. *Construire les angles qu'une droite fait avec les plans de projection.*

Soit la droite donnée ($ab, a'b'$) (*fig.* 117) ; l'angle que cette droite fait avec le plan horizontal est situé dans le plan vertical qui contient cette droite et sa projection. Prenant pour axe la verticale $a'u'$, on fera tourner ce plan jusqu'à ce que le sommet (bb') de l'angle cherché soit arrivé au point b''. Alors cet angle étant parallèle au plan vertical, sera projeté en $a'b''u'$, selon sa véritable grandeur.

Le plan de l'angle formé par la droite avec le plan vertical, contenant cette droite et sa projection verticale $a'b'$, on le fera tourner autour de l'horizontale bv, jusqu'à ce que le sommet (aa') soit venu se placer en a'' ; ce qui donnera $ba''v$ pour la véritable grandeur de l'angle que la droite donnée fait avec le plan vertical.

135. Si la droite donnée ($ab, a'b'$) (*fig.* 118) était perpendiculaire à la ligne AZ, un même plan contiendrait les deux angles que cette droite ferait avec les plans de projection, et le rabattement de ce plan sur le plan vertical donnerait en même temps ces deux angles, dont l'un aurait le sommet en a' et l'autre en b''.

On pourrait aussi les rabattre sur le plan horizontal.

136. *Construire une droite qui fasse des angles donnés avec les plans de projection.*

Représentons (*fig.* 119) par ν l'angle que la droite demandée doit faire avec le plan vertical, et par h l'angle de cette même droite avec le plan horizontal. On construira en a l'angle h au-dessus de la ligne AZ, et l'angle ν au-dessous, puis on prendra deux distances égales ac', ad.

Supposons que ac' soit la ligne demandée rabattue sur le plan vertical; si nous ramenons cette droite à la place qu'elle doit occuper dans l'espace, en la faisant tourner autour de la verticale du point a, de manière qu'elle fasse toujours le même angle avec le plan horizontal, le point cc' décrira un cercle horizontal (cb, $c'b'$). Si, de plus, nous regardons ad comme le rabattement de la même droite sur le plan horizontal; en ramenant cette ligne à sa place, le point dd' décrira un cercle (db, $d'b'$) parallèle au plan vertical. Or, les points cc' et dd' qui appartiennent tous deux à la droite demandée étant à égale distance du point a, ne doivent faire qu'un seul et même point, et comme ce point doit se trouver en même temps sur les deux cercles dont nous venons de parler, il sera au point bb' où ces deux cercles se coupent, de sorte que (ab, $a'b'$) sont les deux projections de la droite cherchée.

On est assuré que les cercles se coupent, parce que les points b et b' sont sur une même perpendiculaire à la ligne AZ.

Si la somme des deux angles donnés était égale à un angle droit, les deux cercles se toucheraient au lieu de se couper, et la droite demandée serait perpendiculaire à la ligne AZ.

Enfin, si la somme de ces angles était plus grande qu'un angle droit, les deux cercles n'auraient pas de point commun, et le problème serait impossible. En effet, si l'on place une droite quelconque dans le plan vertical, et si, en partant de cette position, on la fait tourner de manière qu'elle fasse toujours le même angle avec le plan horizontal, on conçoit que l'angle avec le plan vertical, qui d'abord était nul, augmentera jusqu'à ce que la droite soit venue se placer dans un plan perpendiculaire à la ligne AZ. Alors la somme des deux angles vaudra un angle droit et aura atteint son *maximum;* car il est évident que si l'on continue à faire tourner la droite, l'angle avec le plan vertical diminuera de nouveau, jusqu'à ce qu'il devienne nul comme il l'était avant que l'on eût commencé à faire mouvoir la droite.

Si l'on prolongeait les projections verticales et horizontales des deux cercles, on aurait un second point d'intersection, et par suite une seconde position de la droite demandée. Nommons $(ac, a'c')$ les projections de cette seconde droite, et supposons, pour mieux fixer les idées, que l'on ait transporté le point a hors de la ligne AZ, comme on le voit (*fig.* 120); il sera facile de s'assurer que les quatre droites $(ac, a'c')$, $(ac'', a'c')$, $(ab, a'b')$, $(ab'', a'b')$, satisfont toutes les quatre aux conditions demandées. Ces droites sont les arêtes d'une pyramide quadrangulaire qui aurait pour base le rectangle $cc''b''b$, et pour sommet le point aa'.

Si l'on demandait que la droite passât par un point donné, il est évident qu'après avoir fait la construction précédente, il n'y aurait plus qu'à mener par ce point des parallèles aux lignes que l'on aurait obtenues.

Angles des plans.

137. *Construire l'angle que deux plans font entre eux.*

On sait (*Géom.*) que pour avoir l'angle de deux plans il faut mesurer l'angle que font entre elles deux droites menées dans chacun de ces plans, perpendiculairement à un même point de leur intersection.

Soit (*fig.* 121, *Pl.* 17) les deux plans p et p'; on construira (59) la projection horizontale vh de l'intersection de ces deux plans, puis on mènera perpendiculairement à cette ligne la droite p'' qui représentera la trace horizontale du plan dans lequel se trouve l'angle que l'on cherche. Si l'on fait tourner ce plan autour de sa trace p'' pour le rabattre sur le plan horizontal, le sommet de l'angle faisant partie de l'intersection des deux plans se meut dans le plan vertical $v'vh$, et ne peut, par conséquent, se rabattre sur la ligne vh. Il ne reste donc plus qu'à connaître sa distance à la ligne p'' que l'on prend ici pour axe du rabattement : pour cela, faisons tourner le plan $vv'h$ autour de sa trace verticale vv'. L'intersection des deux plans donnés viendra prendre, dans le plan vertical, la position $v'h'$; le point u, qui représente le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle demandé sur la ligne p'', se rabattra en u', et abaissant du point u' une perpendiculaire sur $v'h'$, cette perpendiculaire $u's'$ représentera le plan de l'angle cherché et donnera en même temps la distance du sommet de cet angle à la ligne p''; de sorte qu'en portant cette longueur $s'u'$ de u en s, on aura asb pour l'angle demandé rabattu sur le plan horizontal.

Par cette construction, nous avons évité de construire la projection de l'angle cherché dont on ne demandait que la véritable grandeur.

138. On pourrait rabattre le plan vertical $vv'h$ sur le plan horizontal. Dans ce cas, l'intersection des deux plans serait représentée par $v''h$, et le sommet de l'angle cherché par s''.

On pourrait encore, si cela était plus commode, faire sur le plan vertical toutes les constructions que nous avons faites sur le plan horizontal.

139. Dans la figure 122, les traces horizontales des plans donnés se coupent derrière le plan vertical ; cela ne change rien à l'ordre des constructions, qui sont seulement disposées dans un autre sens. L'intersection des deux plans est rabattue sur le plan horizontal en $v''h$.

140. Dans la figure 123, l'un des plans donnés est parallèle à la ligne AZ.

141. Dans la figure 124, les deux plans donnés, et par conséquent leur intersection, sont parallèles à la ligne AZ : l'angle demandé est compris dans un plan p'' perpendiculaire aux deux plans de projection, et se trouve rabattu en s'' suivant sa véritable grandeur.

142. Dans la figure 125, l'intersection des plans donnés est parallèle au plan horizontal, mais cela ne change rien à la manière d'opérer.

143. On peut encore trouver l'angle de deux plans d'une autre manière.

Il est facile de s'assurer (*Géom.*) que deux plans étant donnés, si d'un point pris où l'on voudra dans l'espace, on abaisse des perpendiculaires sur ces plans, l'angle que ces perpendiculaires feront entre elles sera le même que l'angle des deux plans. D'après cela, étant donnés les deux plans p et p' (*fig.* 126), on prendra sur leur intersection ou partout ailleurs, un point quelconque ss', et après avoir mené (86) par ce point des perpendiculaires (aa', bb') aux deux plans donnés, on cherchera (128) l'angle que ces deux droites feront entre elles.

144. *Construire l'angle qu'un plan donné fait avec les plans de projection.*

L'angle que le plan p (*fig.* 127, 128, *Pl.* 18) fait avec le plan horizontal, étant situé dans le plan vertical p', on fera tourner ce plan autour de sa trace verticale jusqu'à ce que le point s, sommet de l'angle cherché, soit venu se placer en s' sur la ligne AZ; ce qui donnera l'angle h pour l'inclinaison avec le plan horizontal.

De même, l'angle que le plan donné fait avec le plan vertical étant situé dans le plan p'', son sommet u se rabattra en u', et l'angle ν représentera l'inclinaison avec le plan vertical.

145. *Construire un plan faisant des angles donnés avec les plans de projection.*

On sait (*Géom.*) que si une droite et un plan sont perpendiculaires l'un à l'autre, les angles que cette droite et ce plan feront avec un autre plan sont compléments l'un de l'autre; d'après cela, si l'on voulait construire un plan faisant avec les plans de projection des angles représentés (*fig.* 129) par h et par ν, on construirait d'abord (136) la droite (aa') faisant avec les plans de projection des angles h' et ν', compléments des angles donnés, puis on mènerait (*fig.* 130) un plan p perpendiculaire sur cette droite.

Si le plan devait être assujetti à passer par un point donné (m, m'), on emploierait la construction (97).

Nous avons vu (136) que par un point donné on pouvait faire passer quatre droites faisant, avec les plans de projection, des angles donnés; il en résulte que l'on pourra pareillement faire passer par un point, quatre plans faisant avec les plans de projection, des angles donnés (h, ν). Ces plans sont représentés (*fig.* 130) par p, p', p'', p'''; ils forment les quatre faces d'une pyramide quadrangulaire dont la section horizontale serait le losange $abcd$.

146. Nous avons vu encore (136) que la somme des angles qu'une droite fait avec les plans de projection ne peut jamais être plus grande qu'un angle droit. Ainsi, dans l'exemple présent, $v'+h'$ ne pouvant pas valoir plus d'un angle droit, la somme de leurs compléments $v+h$ ne peut pas être plus petite qu'un angle droit. Donc, pour que le problème que nous venons de résoudre soit possible, il faut que la somme des angles donnés soit plus grande, ou au moins égale à un angle droit : dans ce dernier cas, le plan cherché serait parallèle à la ligne AZ.

147. *Construire un plan passant par l'intersection de deux plans donnés, et qui partage l'angle qu'ils font entre eux en parties égales.*

Le plan demandé devant contenir la ligne $(vh, v'h')$ (*fig.* 131, 134) qui représente l'intersection des deux plans donnés, sa trace horizontale doit passer par h, et sa trace verticale par v' (84). Il ne reste donc qu'à trouver un second point de l'une de ces traces : pour cela, on rabattra sur le plan horizontal l'angle asb que les deux plans donnés font entre eux, et l'on construira la droite su qui partage cet angle en deux parties égales. Le point u où cette droite perce le plan horizontal appartiendra à la trace horizontale du plan cherché. Après avoir construit cette trace hu, on fera passer la trace verticale par le point v', et l'on aura satisfait à la question.

En effet, les trois droites sa, su, sb, étant situées dans le plan p'' perpendiculaire à l'intersection commune des trois plans p, p', p''', les angles que ces lignes font entre elles mesurent les inclinaisons de ces trois plans (137); et puisque su partage l'angle asb en deux parties égales, le plan p''', qui contient su, partagera l'angle des deux autres plans aussi en parties égales.

Il est bon de remarquer que l'on n'a pas ramené la ligne *su* à sa place, parce qu'il suffisait (51) d'avoir le point où cette ligne perce le plan horizontal.

Nous avons partagé en deux parties égales l'angle obtus formé par les deux plans donnés; on opérerait de la même manière pour obtenir le plan p^{IV}, qui partage l'angle aigu en deux parties égales.

148. Les mêmes moyens seraient employés si l'on voulait partager l'angle de deux plans suivant tout autre rapport.

149. *Étant donnés un plan et une droite située dans ce plan, on veut faire passer par cette droite un second plan faisant avec le premier un angle donné.*

Soit (*fig.* 132) le plan donné p, la droite donnée $(vh, v'h')$ et l'angle donné A.

Le plan demandé devant contenir la droite $(vh, v'h')$, sa trace verticale passera par le point v' et sa trace horizontale par h. Pour avoir un autre point de cette dernière trace, on construira le plan p'' perpendiculaire sur la ligne donnée, qui doit être l'intersection du plan donné avec celui que l'on cherche, et après avoir rabattu sur le plan horizontal la ligne sa provenant de l'intersection du plan donné par le plan p'', on construira l'angle asu égal à l'angle donné A, et le point u sera un point de la trace horizontale du point cherché. En effet, si l'on compare cette construction avec celle indiquée (137), il est facile de reconnaître que l'angle asu est égale à l'angle A, qui mesure l'inclinaison des plans p et p'.

En construisant l'angle aso, on obtiendrait en o un point de la trace horizontale d'un plan qui satisferait pareillement aux conditions demandées.

150. Dans la *figure* 133, le plan p' partage en deux

parties égales l'angle que le plan p fait avec le plan horizontal.

151. *Trouver le centre et le rayon d'ue sphère dont la surface serait tangente à quatre plans donnés.*

Il est évident que cela revient à trouver un point également éloigné de ces quatre plans. Or, si par l'intersection de deux plans on en mène un troisième qui partage l'angle des deux premiers en parties égales, il est certain (*Géom.*) que tous les points de ce plan seront à égale distance des deux premiers, d'où résulte la construction suivante.

Soit p, p', p'', p''' (*fig.* 136, *Pl.* 19) les quatre plans donnés. On construira un plan p^{IV} qui partage en deux parties égales l'angle des plans p et p' (147). Ce plan contiendra le centre de la sphère cherchée ; on construira de la même manière le plan p^{V} qui partage en deux parties égales l'angle des plans p' et p''. Enfin le plan p^{VI}, qui partage en deux parties égales l'angle des plans p'' et p''', contiendra encore le point cherché que l'on obtiendra en cherchant l'intersection des trois plans $p^{\text{IV}}, p^{\text{V}}, p^{\text{VI}}$ (67) ; quand aura obtenu en (mm') le centre de la sphère, on abaissera de ce point une perpendiculaire sur l'un des plans donnés, et après avoir obtenu le pied de cette perpendiculaire, on en mesurera la longueur (89, 120) ; ce qui donnera le rayon avec lequel, des points (m, m') comme centres, on décrira deux cercles qui seront les projections verticale et horizontale de la sphère demandée.

En combinant les quatre plans donnés deux à deux de toutes les manières possibles, on obtient six combinaisons $pp', pp'', pp''', p'p'', p'p''', p''p'''$. Si l'on partage en parties égales les angles formés par chacune de ces combinaisons, on aura six plans qui contiendront le point cherché, et l'on choisira parmi ces six plans les trois qui donneront les constructions les plus simples.

Les quatre plans donnés forment, dans l'espace, une pyramide quadrangulaire, et en partageant comme nous l'avons fait (*fig.* 136) les angles dont l'ouverture est dirigée dans l'intérieur de la pyramide, nous avons obtenu la sphère inscrite; mais si nous avions partagé les angles extérieurs en parties égales par des plans, les intersections de ces plans auraient encore donné quatre points que l'on pourrait prendre pour les centres d'autant de sphères tangentes aux plans donnés, chacune de ces sphères toucherait en dehors l'une des faces de la pyramide, et les prolongements des trois autres faces. Il y aurait donc en tout cinq solutions.

Pour reconnaître, parmi les plans qui partagent en parties égales les angles des plans donnés, quels sont ceux qui sont dirigés dans l'intérieur de la pyramide, on pourra opérer de la manière suivante:

On déterminera (67), *fig.* 137:

1° Le point A provenant de l'intersection des trois plans p, p', p'';

2° Le point B, intersection de trois plans p, p', p''';

3° Le point C, intersection des trois plans p, p'', p''';

4° Enfin, le point D, intersection des trois plans p', p'', p'''.

Or, il est évident que le plan qui partage en deux parties égales l'angle des faces ABD, ABC, sera dirigé dans l'intérieur de la pyramide, s'il coupe l'arête CD entre les deux points C et D. Dans le cas contraire, il passera en dehors, et par conséquent il contiendra le centre de l'une des quatre sphères extérieures.

Si le lecteur veut construire les projections de ces sphères, il fera bien de placer les données de la planche 19 au milieu d'une demi-feuille de papier grand aigle dont la plus grande dimension serait parallèle à la ligne AZ.

S'il prend d'autres plans, il devra étudier d'avance leur disposition, parce que, sans cela, les centres de quelques-unes des sphères cherchées pourraient se trouver fort loin en dehors des limites de l'épure.

Quand les données seront placées, on pourra opérer dans l'ordre suivant :

Sphère intérieure. On partagera en deux parties égales trois quelconques des angles formés à l'intérieur de la pyramide par les plans pp', pp'', pp''', $p'p''$, $p'p'''$, $p''p'''$.

1^re^ *sphère extérieure.* On partagera les angles formés à l'extérieur de la pyramide par les plans pp', pp'', pp'''.

2^e^ *sphère extérieure.* On partagera les angles extérieurs formés par les plans $p'p$, $p'p''$, $p'p'''$.

3^e^ *sphère extérieure.* On partagera les angles extérieurs formés par les plans $p''p$, $p''p'$, $p''p'''$.

4^e^ *sphère extérieure.* On partagera les angles extérieurs formés par les plans $p'''p$, $p'''p'$, $p'''p''$.

La question que nous venons de résoudre a beaucoup d'analogie avec le problème de géométrie plane, dans lequel on inscrit un cercle dans un triangle (*fig.* 135); là on partage les angles du triangle, et ici les angles de la pyramide, en parties égales.

Dans le premier problème, on obtient *quatre* cercles tangents aux trois droites qui forment les côtés du triangle donné, tandis que, dans le problème précédent, il y a *cinq* sphères tangentes aux plans qui forment les faces de la pyramide.

152. En proposant cette question comme exercice, j'ai cru devoir placer les plans donnés dans une position quelconque; mais on pourrait, par un choix convenable de plans coordonnés, en rendre la solution plus simple. En effet, nous l'avons déjà dit (107), pourvu que l'on ne change rien aux données de la question, on peut toujours choisir tels plans de projection que l'on voudra.

D'après cela, plaçons horizontalement (*fig.* 138, *Pl.* 20) l'un des quatre plans donnés, le plan p, par exemple, et prenons pour plan vertical de projection un plan perpendiculaire au plan p'; les lignes p'' et p''' étant les traces horizontales des deux autres plans donnés, et le point (s, s') étant le sommet de la pyramide formée par les quatre plans; p^{iv} sera le plan qui partage en deux parties égales l'angle des plans p et p', et sa trace verticale contiendra la projection verticale du centre de la sphère demandée. L'angle des plans p et p'', situé dans le plan vertical sv, se rabattra en v'', et la ligne $v''o'$, qui partage cet angle en deux parties égales, rencontrera en o' la ligne verticale qui contient le point (s, s'). L'angle des plans p et p''', projeté suivant su, se rabattra en u'' et sera partagé en deux parties égales par $u''h'$, qui rencontrera en h' la même verticale s, s'. Concevons maintenant (65) un plan auxiliaire q, parallèle au plan vertical de projection : ce plan contiendra en a' et o' deux points du plan p^{v}, qui partage en deux parties égales l'angle des deux plans p et p''; de sorte qu'il coupera ce plan suivant la droite $a'o'$. Par la même raison il coupera suivant $b'h'$ le plan p^{vi} qui partage l'angle des plans pp''' en parties égales; de sorte qu'en joignant le point n, où les deux lignes $a'o'$ et $b'h'$ se coupent, avec le point c', intersection des traces horizontales des plans p'' et p''', qui sont les mêmes que celles des plans p^{v} et p^{vi}, on aura l'intersection de ces deux derniers plans; et le point (m, m'), où cette intersection percera le plan p^{iv}, sera le centre de la sphère cherchée. Quant au rayon, il sera projeté en $m'd$ suivant sa véritable grandeur.

153. S'il y avait de la symétrie dans la position des quatre plans donnés, les opérations deviendraient encore plus simples. On peut s'en convaincre par l'inspection des *figures* 139 et 142, qui contiennent les projections verticales et horizontales des cinq sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre régulier.

Pour plus de simplicité, on a placé l'une des faces abc

du tétraèdre parallèle au plan horizontal de projection, et l'une des arêtes *ac* perpendiculaire au plan vertical.

154. *Par une droite donnée faire passer douze plans faisant entre eux des angles égaux.*

Représentons la ligne donnée par (a, a') (*fig.* 140, 141). On sait déjà (48) que les traces des douze plans demandés doivent passer par les traces de la droite donnée ; il ne reste donc plus qu'à déterminer un point de chacun de ces plans. Pour y parvenir, on construira un plan p'' perpendiculaire sur la ligne donnée (a, a') qui doit être l'intersection commune de tous ces plans ; puis, au moyen de la construction indiquée (138), on rabattra sur le plan horizontal le point o, provenant de l'intersection de la ligne donnée par le plan p''. On mènera par le point o, ainsi rabattu sur le plan horizontal, douze lignes faisant entre elles des angles égaux, et le point où chacune de ces lignes ira couper la trace horizontale du plan p'' appartiendra à la trace horizontale de l'un des plans que l'on cherche ; car il est évident (*fig.* 141) que ces douze lignes passant par le point o dans le plan p'', sont perpendiculaires à la ligne donnée ; de sorte que les angles que ces lignes font entre elles mesurent les inclinaisons des douze plans qui les contiennent. On n'a pas cherché quelles seraient les projections de ces douze droites si on les ramenait à leur véritable position dans l'espace, parce qu'il suffisait (48) d'avoir les points où chacune de ces droites va percer le plan horizontal.

On n'a dû partager en douze parties égales que la moitié de la circonférence, parce que les prolongements des rayons auraient déterminé les mêmes plans.

Angle trièdre.

155. Dans un angle trièdre on peut considérer les trois faces ou angles que les arêtes forment entre elles, et les trois angles d'inclinaison de ces faces.

L'expression *angle solide* est assez souvent employée; mais on sait (*Géom.*) qu'il ne faut attacher à cette expression aucune idée de volume, et qu'il ne s'agit que de la combinaison de plusieurs plans qui passent par un même point. Au surplus, les expressions d'angles *dièdre*, *trièdre* ou *polyèdre* expriment mieux l'idée que l'on doit se former de l'intersection de deux, trois, ou un plus grand nombre de plans.

156. *Étant donnés trois quelconques des six angles qui composent un angle trièdre, on demande de construire les trois autres.*

Cette question donne lieu à six problèmes. En effet, désignons par a, b, c les trois angles plans ou faces, et par A, B, C les angles dièdres ou d'inclinaison des faces entre elles. On peut avoir :

	Données.	Inconnues.
1°	$a, b, c,$	A, B, C,
2°	$a, b,$ C,	c, A, B,
3°	a, A, C,	$b, c,$ B,
4°	A, B, C,	$a, b, c,$
5°	A, B, c,	C, $a, b,$
6°	A, $a, c,$	B, C, b.

157. 1er PROBLÈME. *Étant donné* a, b, c, *trouver* A, B, C.

On placera les trois faces données à côté les unes des autres, comme on le voit (*fig.* 143, *Pl.* 21), et l'on prendra une distance quelconque $Sm' = Sm''$, que l'on portera à droite et à gauche du point S, sur les deux côtés extérieurs des faces a et c.

Si maintenant l'on fait tourner la face a autour de l'arête Sv, pour la ramener à la position qu'elle doit occuper dans l'espace, le point m' décrira un cercle dont le plan sera perpendiculaire à l'arête Sv, et dont la projection sur le plan de la face b sera représentée par la droite m', m; si l'on fait tourner pareillement la face c autour de l'arête Su, le point m'' décrira un cercle qui aura pour projection la droite $m''m$. Or, quand les deux faces a et c seront revenues à leur place, le point m' et le point m'', qui sont à égale distance du point S, ne feront qu'un seul et même point, et ce point devant être en même temps dans les deux plans $m'm$, $m''m$, fera partie de leur intersection, qui, étant perpendiculaire au plan de la face b, se projettera sur cette face par le point m.

L'angle trièdre étant reformé, l'angle C, qui exprime l'inclinaison des faces a et b, aura son sommet en h, et sera projeté sur le plan de la face b par la ligne hm, qui sera l'un de ses côtés. Pour avoir la grandeur de cet angle, il suffira de le faire tourner autour de hm pour le rabattre sur le plan de la face b, dans la position mhm'''. La perpendiculaire qui contient le point m prendra, dans ce rabattement, la position mm''', et on déterminera le point m''' en décrivant du point h, comme centre, un cercle dont le rayon, égal à la ligne hm', sera le second côté de l'angle C.

Une construction analogue donnera l'angle A rabattu sur le même plan, dans la position mkm^{IV}.

Pour obtenir l'angle B, on concevra par le point dont la projection est m, un plan perpendiculaire à l'arête Sm. Ce plan, qui contiendra l'angle B, coupera la face a suivant une droite perpendiculaire à Sm, et représentée par $m'v$ dans le rabattement de la face a; ce même plan coupera la face c suivant la ligne $m''u$, et la face b suivant vu; de sorte que les trois droites $m'v$, vu, $m''u$, seront les trois côtés du triangle au sommet duquel se trouve l'angle B, que l'on connaîtra en construisant le triangle *vuz*.

Si la face b était égale à la somme des deux autres, le point m serait sur l'arc de cercle $m'om''$, les angles A et C seraient nuls, et l'angle B vaudrait deux angles droits.

Si la face b était plus grande que la somme des faces a et c, le point m se trouverait hors du cercle $m'om''$, et l'on aurait $mh > m'h$; ce qui serait absurde, puisque l'angle trièdre étant reformé, mh est la projection de $m'h$ et ne peut pas être plus grande que cette ligne; enfin, s'il y avait dans les données quelque condition d'impossibilité, elle se manifesterait toujours par la construction de l'épure.

J'engage le lecteur à changer les données de manière à reconnaître ce qui arriverait dans toutes les hypothèses. Il fera bien de résoudre la même question en supposant que quelques-uns des angles donnés ou tous les trois sont obtus.

Si du point m, comme centre, avec un rayon égal à mm''', on décrit un arc de cercle, cet arc doit passer par le point m^{IV}; car il résulte de ce qui précède, que les deux droites mm''' et mm^{IV} représentent le rabattement de la même ligne.

Enfin, les deux angles Shm, Skm étant droits, leurs sommets doivent se trouver sur la circonférence qui aurait Sm pour diamètre.

Ces dernières remarques nous seront fort utiles pour la solution des problèmes suivants.

158. 2e PROBLÈME. *Étant donnés* a, b, C, *trouver* c, A, B.

La construction que nous venons de faire, renfermant les trois faces et les trois angles dièdres de l'angle trièdre, contient l'expression de toutes les relations qui existent entre ces six quantités, et peut être considérée comme une formule générale au moyen de laquelle, lorsqu'on en connaîtra trois, on pourra toujours trouver les trois autres. Ainsi, par exemple, étant donnés a, b, C, on placera d'abord les deux angles a, b, à côté l'un de l'autre (*fig.* 143), et l'on prendra le point m' à volonté. La perpendiculaire abaissée du point m' sur l'arête Sν, donnera en h le sommet de l'angle C, et comme la valeur de cet angle est donnée par la question ; que, de plus, on sait (157) que hm''' doit être égal à hm', on pourra construire le triangle rectangle mhm''' ; ce qui déterminera le point m. On abaissera de ce point la ligne mm'' perpendiculaire sur l'arête su, et décrivant l'arc $m'om''$, on aura le point m'', et la face c sera connue. Les angles A et B s'obtiendront comme dans le problème précédent, qui ne diffère de celui-ci que par l'ordre des opérations.

159. 3^e^ Problème. *Étant donnés* a, A, C, *trouver* b, c, B.

On construira d'abord l'angle a (*fig.* 145), et l'on prendra le point m' à volonté. La perpendiculaire abaissée de ce point sur l'arête Sν donnera en h le sommet de l'angle C. On construira le triangle rectangle mhm''', dont on connaît l'angle aigu C, donné par la question et l'hypoténuse hm''' égale à hm' ; le point m sera connu. Pour obtenir le point k', qui appartient à l'arête su, on se rappellera (157) que ce point doit être situé sur la circonférence d'un cercle qui aurait Sm pour diamètre. Décrivant cette circonférence, il n'y aura plus qu'à trouver la distance du point k' au point m ; ce qui sera facile, puisque cette distance est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, dans lequel on connaît un angle aigu A, donné par la question, et le côté opposé mm''' égal à mm^{IV} (*fig.* 143). Construisant donc ce triangle mkm''' (*fig.* 145), il n'y aura plus qu'à ramener le point k en k' sur la circonférence Shmk', et la face b sera connue. En opérant comme dans l'épure précédente, on obtiendra c et B.

Si, au lieu de ramener le point k en la position k' à droite du point m, on l'avait placé en k'' à gauche, on aurait également satisfait aux conditions demandées; au lieu de la face b on aurait obtenu b', la face c serait remplacée par c', et B par B'; les faces c et c' seraient égales dans les deux solutions et ne différeraient que par leur position dans l'espace.

160. 4° Problème. *Étant donnés* A, B, C, *trouver* a, b, c.

L'angle trièdre étant reformé, les trois arcs de cercle $m'p, pq, qm''$ (*fig.* 143), ayant le même centre et le même rayon, formeront un triangle sphérique que l'on pourra prendre pour base de la pyramide qui aurait son sommet en S (*Géom.*); les côtés de ce triangle servent de mesure aux faces de l'angle trièdre, et ses trois angles mesurent les inclinaisons de ces faces; de sorte que a, b, c seront les côtés de ce triangle, et A, B, C en seront les angles.

Concevons actuellement un second triangle sphérique dont les côtés, situés sur la même sphère, auraient pour pôles les sommets du premier triangle : on sait (*Géom.*) que l'angle de l'un de ces triangles, ajouté avec le côté qui lui est opposé dans l'autre, valent toujours deux angles droits. Enfin, désignons par a', b', c', A', B', C' les côtés et les angles du triangle supplémentaire.

A, B, C, étant donnés par la question, on aura, par une simple soustraction d'angle,

$$2-A=a',$$
$$2-B=b',$$
$$2-C=c'.$$

Connaissant a', b', c', la question est ramenée au premier problème, et la construction employée (*fig.* 143), fera connaître A', B', C'.

Alors, par une simple soustraction, on aura :

$$2-A'=a,$$
$$2-B'=b,$$
$$2-C'=c,$$

ce qu'il fallait obtenir.

161. 5e Problème. *Étant donnés* A, B, c, *trouver* C, a, b.

Par une soustraction, on aura :

$$2 - A = a',$$
$$2 - B = b',$$
$$2 - c = C'.$$

Connaissant a', b', C', la question est ramenée au deuxième problème, et la construction (*fig.* 143) fera connaître c', A', B'. Alors,

$$2 - c' = C,$$
$$2 - A' = a,$$
$$2 - B' = b.$$

162. 6e Problème. *Étant donnés* A, a, c, *trouver* B, C, b.

Par la soustraction, on aura :

$$2 - A = a',$$
$$2 - a = A',$$
$$2 - c = C'.$$

Connaissant a', A', C', la question est ramenée au troisième problème, et la construction (*fig.* 145) fera connaître b', c', B'. Alors,

$$2 - b' = B,$$
$$2 - c' = C,$$
$$2 - B' = b.$$

Mais on a vu (159) que le troisième problème admettait deux solutions. Si nous nommons b'', c'', B'', les valeurs qui résulteraient de la seconde solution, on aura :

$$2 - b'' = B''',$$
$$2 - c'' = C''',$$
$$2 - B'' = b'''.$$

Ce qui donnera une seconde solution B''', C''', b''' du sixième problème.

Les constructions que nous venons d'indiquer renferment, comme on vient de le voir, les solutions des six problèmes qui, résolus analytiquement, composeraient par leur ensemble toute la Trigonométrie sphérique.

163. On pourrait désirer connaître les angles que chacune des arêtes fait avec la face opposée.

Supposons, par exemple, que l'on veuille connaître (*fig.* 144) l'angle $m^{\text{IV}}sm$ que l'intersection des faces a et c fait avec la face b.

On rabattra cet angle autour de la droite sm, et l'on remarquera qu'il appartient à un triangle rectangle ayant pour l'un des côtés de l'angle droit la droite sm; pour second côté de l'angle droit, la droite $m^{\text{IV}}=m'''$; enfin, pour hypoténuse, la droite $sm^{\text{IV}}=sm'=sm''$, ce qui est plus que suffisant pour le construire.

En plaçant successivement, au milieu, chacune des faces a et b, on obtiendra de la même manière les angles que ces faces font avec les arêtes opposées.

CHAPITRE V.

POLYÈDRES.

Projection des Polyèdres.

164. On sait (*Géom.*) que les polyèdres sont des corps terminés par des faces planes. Il résulte de là que les dimensions d'un polyèdre seront parfaitement connues dès que l'on connaîtra la position relative de ses sommets; car la position des sommets déterminera celle des arêtes, et les arêtes détermineront les faces.

On voit donc, que pour projeter un polyèdre il suffira de projeter tous ses sommets. Mais comme, en représentant sur une épure toutes les dimensions d'un corps que l'on se propose d'exécuter, on doit prévoir le moment où il faudra obtenir, d'après le dessin, les véritables grandeurs des diverses parties de ce corps pour les transporter sur la matière dont il doit être composé, on doit, autant qu'on le peut, choisir le système de plans de projection le plus propre à atteindre ce but. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'un prisme, on placera (*fig.* 146, *Pl.* 22) une de ses bases *abcde* dans le plan horizontal, et l'on prendra pour second plan de projection un plan vertical parallèle aux arêtes; puis, après avoir construit la projection horizontale de la base supérieure, on élèvera, par chacun des sommets de cette projection, des perpendiculaires jusqu'à ce qu'elles rencontrent le plan horizontal p, dont la position est déterminée par la hauteur que l'on veut donner au prisme que l'on projette.

On voit qu'au moyen de la précaution que l'on a prise de placer les bases du prisme horizontalement, et les arêtes parallèles au plan vertical de projection, toutes les arêtes de ce corps seront projetées sur l'un ou l'autre plan de projection dans leur véritable grandeur.

165. Les figures obtenues par la méthode des projections diffèrent essentiellement des formes apparentes sous lesquelles les corps se présentent ordinairement à nos yeux. Nous verrons la raison de cette différence lorsque nous nous occuperons de la perspective. Cependant, pour rendre plus facile à concevoir les projections des corps solides, on est convenu que l'on regarderait certaines lignes comme vues, et d'autres comme étant cachées, et que pour les distinguer on tracerait en plein les lignes vues, et que l'on ponctuerait les lignes cachées. Pour cela on suppose, lorsqu'on regarde la projection horizontale d'un corps, que l'œil est placé au-dessus de ce corps à une distance infiniment grande, et lorsqu'on regarde la projection verti-

cale, on est censé être placé devant le plan vertical, et infiniment loin de ce plan. Cette supposition d'une distance infinie est nécessaire; car sans cela, comme nous le verrons plus tard, la forme apparente d'un corps ne serait pas la même que sa projection.

Cette convention une fois adoptée, nous dirons qu'une ligne est vue, lorsqu'un point quelconque partant de cette ligne peut s'éloigner infiniment du plan de projection, et suivant une perpendiculaire à ce plan, sans rencontrer la masse d'aucun corps solide, et dans le cas contraire la ligne est cachée.

Ainsi, par exemple, si les deux lignes (aa', bb') (*fig.* 147) étaient deux arêtes du même polyèdre, la première serait cachée dans la projection horizontale. En effet, si on trace la verticale du point m, il est évident qu'elle coupera les deux droites données aux points m', m''. Or le dernier de ces deux points appartenant à la droite bb', on en conclut que cette ligne passe au-dessus de aa', et que, par conséquent, la projection horizontale de cette dernière droite doit être tracée en points. Par un raisonnement analogue, on reconnaîtrait que la projection verticale de la ligne (bb') doit être ponctuée.

166. Si l'on voulait projeter une pyramide (*fig.* 148), on placerait la base dans le plan horizontal, puis on construirait en s la projection horizontale du sommet dont la projection verticale s' serait déterminée par la hauteur que l'on veut donner à la pyramide.

On conçoit qu'ici on ne peut placer qu'une ou quelquefois deux des arêtes obliques, parallèlement au plan vertical.

167. Nous avons supposé jusqu'ici que l'on projetait un polyèdre dans l'intention de l'exécuter ensuite; mais assez souvent le corps existe déjà lorsque l'on se propose d'en obtenir les projections.

Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de dessiner les projections d'un monument ou d'une machine, on commencerait par mesurer toutes les dimensions des lignes horizontales et verticales, que l'on reporterait ensuite sur l'épure, soit dans leur grandeur véritable, soit réduites d'après un rapport donné; puis, au moyen d'un fil à plomb ou d'une équerre placée verticalement, on déterminerait les pieds des perpendiculaires abaissées des points qu'il serait essentiel de projeter; et, mesurant les hauteurs de ces points au-dessus du plan horizontal, il serait facile de construire la projection verticale du solide.

Mais on conçoit que l'exactitude du résultat dépendra du plus ou m plan de soin avec lequel on aura pris toutes les mesures, ou de la perfection des instruments que l'on aura employés. Aussi ne devra-t-on prendre sur le corps même que le moins de mesures possible, et déduire, autant que l'on pourra, la grandeur de toutes les autres parties de ce corps, de sa définition géométrique. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'un prisme droit à base carrée, on ne mesurera que le côté de la base et la hauteur du prisme; lorsque plusieurs points seront dans un même plan horizontal, il suffira de connaître la hauteur de l'un d'eux.

Nous allons faire l'application de ces principes à la projection des cinq polyèdres réguliers.

168. *Projection du tétraèdre régulier.* On construira d'abord (*fig.* 149) un triangle équilatéral *abc*; puis, joignant les trois sommets de ce triangle avec le centre *d*, on aura la projection horizontale du tétraèdre; pour obtenir la projection verticale, on projettera les sommets *a*, *b*, *c* sur la ligne AZ; et si l'on a eu soin de placer l'une des arêtes *ad*, *a'd'* parallèle au plan vertical, elle doit se projeter sur ce plan dans sa véritable longueur; de sorte qu'il suffira de décrire du point *a'*, comme centre, avec un rayon

égal à l'un des côtés de la base, un arc od' dont l'intersection avec la verticale dd', donnera en d' la projection verticale du sommet.

169. *Projection du cube ou hexaèdre régulier.* On construira deux carrés égaux et disposés comme on le voit (*fig.* 150); l'un sera la projection horizontale, et l'autre sera la projection verticale.

170. *Projection de l'octaèdre régulier.* Deux carrés disposés comme dans la *fig.* 151, représenteront les projections de l'octaèdre régulier. Des douze arêtes de ce solide, il y en a quatre de parallèles au plan horizontal, et quatre parallèles au plan vertical.

171. *Projection du dodécaèdre régulier.* La projection horizontale de ce solide (*fig.* 152) se composera d'abord de deux pentagones réguliers égaux à l'une des faces, et inscrits dans le même cercle, de manière que les sommets de l'un soient au milieu des arcs sous-tendus par les côtés de l'autre, et d'un décagone régulier inscrit dans un cercle d'un plus grand rayon, et tel que l'on ait $cd = ab$.

Pour construire la projection verticale, on remarquera que l'arête eh, $e'h'$ étant parallèle au plan vertical, doit se projeter sur ce plan suivant sa véritable grandeur, et que par la même raison vu doit être égal à la hauteur d'une face.

172. *Projection de l'icosaèdre régulier.* Après avoir construit la projection horizontale, comme on le voit (*fig.* 153), on fera $a'b'$ égale à une arête, et $c'd'$ égale à la hauteur de l'une des faces.

Projection oblique des polyèdres.

173. Il arrive quelquefois dans l'architecture, et souvent dans les dessins de machines, que l'on a besoin de projeter un corps solide dans une position inclinée par rapport aux plans de projection. On pourrait placer d'abord le corps dans cette position, et chercher ensuite à construire la projection par les moyens que nous avons indiqués plus haut; mais il est presque toujours plus facile d'opérer comme il suit.

On placera d'abord le corps dans la position la plus simple et la plus favorable à la construction de ses projections; puis, par deux mouvements parallèles aux plans de projection, on l'amènera dans telle position inclinée que l'on voudra.

Soit, par exemple (*fig.* 155, *Pl.* 23), une droite ($ab, a'b'$) perpendiculaire au plan horizontal de projection :

Si l'on suppose que cette droite tourne autour de l'horizontale projetante du point (aa') en restant parallèle au plan vertical, on pourra l'incliner de manière qu'elle fasse tel angle que l'on voudra avec le plan horizontal; dans ce premier mouvement, le point (bb') décrira un arc de cercle ($bc, b'c'$); faisant ensuite parcourir au point (cc') l'arc horizontal ($cd, c'd'$), l'angle avec le plan horizontal n'aura pas changé, et il est évident que par ce double mouvement on pourra faire prendre à la droite telle position inclinée que l'on voudra.

174. C'est par ces moyens que l'on a construit (*fig.* 154) les projections d'un *parallélipipède rectangle incliné par rapport aux plans de projection.*

Après avoir construit les projections verticale et horizontale, que je désignerai seulement par les lettres ($ab, a'b'$), placées aux extrémités de l'une des diagonales du solide, on a supposé que ce corps tournait autour de l'horizontale projetante du point a et parallèlement au plan vertical, jusqu'à ce qu'il soit venu prendre la position inclinée $a'c'$. Par ce premier mouvement, le point m' est venu se placer en n', et le corps étant resté parallèle au plan vertical, sa projection sur ce plan n'a fait que changer de position; de sorte que, pour avoir sa nouvelle projection verticale, il a suffi de construire sur $a'n'$ un rectangle $a'n'c'q' = a'm'b'p'$. Les arcs de cercle décrits par chacun des sommets étant parallèles au plan vertical, se projettent horizontalement par des droites parallèles à la ligne AZ; les intersections de ces droites avec les perpendiculaires abaissées de la projection verticale $a'n'c'q'$ sont les sommets de la nouvelle projection horizontale du solide.

Supposons actuellement que nous faisons tourner le corps autour de la verticale du point (aa'), le point nn' décrira l'arc horizontal $(no, n'o')$. Ce second mouvement se faisant parallèlement au plan horizontal, la position du corps, relativement à ce plan, est toujours la même, de sorte que la projection horizontale ne fait que changer de place, et pour l'obtenir il suffit de construire de nouveau cette projection, de manière seulement que la ligne an soit dans la position ao. Quant à la projection verticale correspondante, on l'obtient en élevant de tous les points de la nouvelle projection horizontale, des perpendiculaires jusqu'à la rencontre des arcs horizontaux parcourus par les sommets du solide dans le second mouvement, et représentés par les lignes horizontales passant par les sommets de la projection $a'n'c'q'$.

175. On peut encore arriver au même but par un autre moyen. Nous avons, dans l'exemple précédent, changé la position du corps par rapport aux plans de projection : on

préfère souvent, au contraire, changer la position du plan de projection par rapport à celle du corps. Soit a, a' (*fig.* 158), les deux projections d'un point donné. On veut avoir la projection de ce point sur le plan vertical p, on abaissera du point donné une perpendiculaire sur le plan p, et le pied de cette perpendiculaire sera la projection demandée. Ce point se projettera horizontalement en b. Il est inutile de construire la projection verticale b', qui ne servirait à rien; mais pour mieux apprécier sa position sur le plan vertical p, on supposera que ce plan tourne autour de sa trace verticale comme charnière, pour se rabattre sur l'épure. Dans ce mouvement, le point b, b' décrira un arc horizontal, et viendra prendre la position b''; on pourrait aussi rabattre le plan p sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale; alors le point bb' viendrait se placer en b''', que l'on obtiendrait en faisant bb''' égal à la hauteur du point donné au-dessus du plan horizontal.

176. Dans les *figures* 156, 157, 159, on s'est proposé de construire les deux projections d'une croix inclinée par rapport aux plans de projection.

Après avoir obtenu la projection inclinée $abcd$, on a construit les traces du plan vertical sur lequel on s'est proposé d'obtenir la nouvelle projection; puis, après avoir abaissé de tous les angles du solide des perpendiculaires à ce plan, on l'a fait tourner autour de l'une de ses traces, pour le rabattre sur l'un ou sur l'autre des deux premiers plans de projection. La *fig.* 157 représente la nouvelle projection rabattue sur le plan vertical, et dans la *fig.* 159, elle est rabattue sur le plan horizontal.

177. Il arrive assez souvent, surtout, comme je l'ai dit plus haut, dans les projections des machines, que l'on soit

conduit à projeter quelques-unes de leurs pièces dans une position inclinée, afin de faire mieux concevoir comment ces pièces agissent les unes sur les autres, par suite du mouvement qui leur est communiqué; mais il arrive encore plus souvent que les mêmes procédés soient employés pour résoudre le problème inverse; c'est-à-dire qu'étant données deux projections d'un corps incliné dans l'espace, on remplace les plans coordonnés primitifs par d'autres sur lesquels les projections de ce même corps sont plus simples, et par conséquent plus commodes pour la solution des questions subséquentes. Ce cas devant se présenter souvent par la suite, et les moyens qu'il faut employer ne différant pas de ceux que nous venons d'indiquer, nous ne nous y arrêterons pas pour le moment.

Surface des polyèdres.

178. *Développer la surface d'un polyèdre.* On dit qu'*une surface est développable*, lorsque toutes les parties de cette surface peuvent s'étendre sur un plan sans déchirement. D'après cela, les surfaces de tous les polyèdres peuvent se développer.

Soient (*fig.* 160, *Pl.* 24), les deux projections d'une pyramide quadrangulaire; on construira (35) la véritable longueur de chacune des arêtes, ce qui donnera le moyen de construire (*fig.* 161) les faces triangulaires *bad*, *bde*, *bec*, *bca*; quant à la surface quadrangulaire *aced*, on la partagera en triangles par la diagonale *ae*, puis on construira les deux triangles *ace*, *aed*, qui composent cette face. On agirait de la même manière quel que fût le nombre des côtés.

179. Lorsqu'on disposera les données de cette épure, il ne faudra pas placer au hazard les quatre sommets du

quadrilatère *aced*, *a'c'e'd'*, parce qu'en agissant de la sorte il est probable que ces sommets ne seraient pas dans un même plan. Pour satisfaire à cette condition, il faudra construire les deux diagonales et s'assurer qu'elles se coupent (44).

La même remarque doit s'appliquer aux projections d'un polygone quelconque.

180. Lorsqu'il y a dans le polyèdre que l'on se propose de développer, quelques relations de régularité ou de symétrie, on doit en profiter pour donner au développement plus d'exactitude et de simplicité. Les développements des polyèdres réguliers offrent un exemple de ce que je viens de dire. La *fig.* 163, qui représente le développement d'un *tétraèdre régulier*, n'est autre chose qu'un triangle équilatéral dont chaque côté est partagé en deux parties égales. Le développement de l'*octaèdre régulier* est inscrit (*fig.* 164) dans un parallélogramme composé de deux triangles équilatéraux, et dont les côtés sont partagés en trois parties égales; et celui de l'*icosaèdre* (*fig.* 165) est inscrit dans un parallélogramme dont les côtés sont partagés en cinq parties égales. Le développement du *cube* ou *hexaèdre régulier* est inscrit dans un rectangle dont la base est à la hauteur comme 4 est à 3. Enfin, pour obtenir le développement du *dodécaèdre régulier*, on construira deux grands pentagones réguliers égaux et disposés comme on le voit dans la *fig.* 167; puis, en menant toutes les diagonales de ces pentagones, on obtiendra, par leur intersection, deux autres petits pentagones placés au centre des premiers, et dont les diagonales prolongées détermineront toutes les faces du dodécaèdre.

Chaque côté de l'un des deux grands pentagones doit être égal à deux fois l'arête du dodécaèdre que l'on veut développer, plus le plus grand segment de cette arête partagée en moyenne et extrême raison.

181. *Étant données les deux projections d'un polyèdre, construire les traces des plans qui contiennent les faces de ce polyèdre.*

On choisit dans chaque face trois sommets ou deux arêtes, et la question revient à chercher les traces d'un plan passant par trois points ou par deux lignes droites qui se coupent (55, 56). C'est ainsi que l'on a obtenu (*fig.* 162) les traces des douze plans qui contiennent les faces d'un dodécaèdre régulier.

Section des polyèdres.

182. *Construire la section d'une pyramide par un plan.*

On pourrait, comme nous l'avons dit (181), construire sur les plans de projection les traces des plans qui contiendraient les faces du polyèdre; alors la question consisterait à chercher l'intersection de ces plans par le plan donné; mais il est presque toujours plus simple de chercher les points où le plan donné coupe les arêtes du polyèdre. Par exemple, soit (*fig.* 168, *Pl.* 25) une pyramide pentagonale dont on demande la section par le plan p; on fera pour chacune des cinq arêtes la construction indiquée (70), et l'on obtiendra les projections verticales et horizontales des cinq points suivant lesquels ces arêtes sont coupées par le plan donné. Joignant ces points par des droites, on aura les projections verticale et horizontale de la section demandée.

Si l'on voulait obtenir cette section dans sa véritable grandeur, on pourrait supposer que le plan qui la contient tourne autour de sa trace, pour venir se rabattre sur le plan horizontal. Dans ce mouvement, chaque point de la section décrirait un arc de cercle perpendiculaire à la trace horizontale du plan donné, et représenté en projection horizontale par une perpendiculaire à cette trace; de sorte que pour savoir où chacun d'eux viendrait se placer dans le rabattement, il suffirait de chercher sa distance à la ligne qui a été prise pour axe du rabattement. Ainsi, par exemple, pour le point dd', on chercherait la véritable longueur de la ligne $od, o'd'$, et cette longueur od'' donnerait la position du point dd' dans le rabattement de la section.

Si l'on voulait construire cette section dans le développement de la pyramide, on construirait d'abord ce développement comme nous l'avons dit (178); puis, cherchant la véritable distance de chaque sommet de la section au sommet correspondant de la base ou au sommet de la pyramide, il serait facile de placer chacun de ces points sur la droite qui, dans le développement, représente l'arête qui le contient. Dans la *fig.* 168, l'arête $(sm, s'm')$ étant parallèle au plan vertical, se projette sur ce plan dans sa véritable longueur; mais pour construire le développement, il a fallu chercher la véritable longueur de chacune des autres arêtes.

Enfin, si le corps dont on a les projections était déjà exécuté, on pourrait se proposer de tracer sur ce corps le polygone résultant de sa section par le plan p. Pour cela, on prendrait la distance de chacun des sommets de cette section au sommet de la pyramide ou aux angles de sa base, et il serait facile, en reportant ces longueurs sur les arêtes du polyèdre, d'y déterminer exactement la position des angles de la section.

183. *Section par un plan perpendiculaire au plan de projection.*

La nature des données permet quelquefois de simplifier les opérations. Si, par exemple, il s'agissait d'obtenir la section d'un prisme par un plan perpendiculaire aux arêtes, on placerait ce prisme parallèlement au plan vertical de projection, auquel le plan coupant se trouverait alors perpendiculaire; la section se projetterait verticalement par une ligne droite $a'd'$, et pour en avoir la projection horizontale, il suffirait d'abaisser par les points $a'b'h'c'e'd'$ des perpendiculaires à la ligne AZ, jusqu'à la rencontre des projections horizontales des arêtes. La *fig.* $(a''b''c''d''e''h'')$ représente la section rabattue dans sa véritable grandeur sur le plan vertical qui contient l'arête $hu, h'u'$; on suppose qu'avant de la rabattre, on l'a fait avancer parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle soit venue se projeter en (mn).

La véritable grandeur de la section étant obtenue, on a porté tous ses côtés à la suite les uns des autres, et dans le prolongement de la trace verticale du plan p', ce qui a donné la ligne $(a'''b'''c'''...)$ pour la section rectifiée; puis, ayant mené par tous ces points, et perpendiculairement à $a'''a'''$, des lignes parallèles et égales aux arêtes du prisme, on a obtenu le développement de ce solide. Nous emploierons souvent, par la suite, ce moyen de développer la surface convexe d'un prisme; il est plus commode et plus exact que la décomposition des faces en triangles.

184. La section perpendiculaire aux arêtes d'un prisme se nomme la *section droite*.

185. *Trouver les points où une ligne droite perce la surface d'un polyèdre.*

On fera passer par la droite un plan quelconque; on cherchera la section du polyèdre par ce plan, et les points où la droite donnée rencontrera cette section, seront les points demandés.

En faisant usage d'un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, il est évident que la construction de la section du polyèdre par ce plan sera plus facile à obtenir.

Dans la *fig.* 170, *Pl.* 26 (a, a') est la droite donnée. Si l'on mène par cette droite un plan vertical p, et que l'on construise la projection verticale de la section qui en résulte, les points (m, m'), (n, n') où cette section est rencontrée par la ligne a, seront les deux points demandés. En construisant le plan p' perpendiculaire au plan vertical, et la projection horizontale de la section qui en provient, on aurait obtenu le même résultat.

186. *Étant donnée la projection verticale* a *d'un point que l'on sait appartenir à la surface d'un polyèdre, trouver la projection horizontale de ce même point.*

Cela revient à trouver l'intersection du polyèdre par la droite cd (*fig.* 171) menée par le point a perpendiculairement au plan vertical. Pour cela, menons par cette droite le plan horizontal p, et construisons la section du polyèdre par ce plan, nous obtiendrons pour cette section un polygone horizontal coupé par la droite cd en deux points a', a'', qui sont les projections horizontales de deux points appartenant à la surface du polyèdre, et ayant la même projection verticale a.

Si l'on donnait la projection horizontale b, et qu'il fallût trouver la projection verticale, on construirait un plan p' perpendiculaire au plan horizontal de projection, et la section du polyèdre par ce plan serait rencontrée par la verticale eh en deux points b', b'', qui seraient les projections des deux points de la surface du polyèdre, qui se projettent horizontalement en b.

Intersection des polyèdres.

187. Toutes les fois que l'on coupe un polyèdre par un plan, la section est une figure plane; mais lorsque deux polyèdres se pénètrent, il en résulte une figure recti-

ligne dont les côtés peuvent être dirigés dans toutes sortes de plans.

Pour obtenir les différents côtés qui composent cette figure, on cherchera les intersections de chacune des faces du premier polyèdre avec les différentes faces du second, et l'ensemble de ces intersections formera la figure demandée. Pour obtenir l'intersection de ces faces deux à deux, on pourra chercher les traces des plans qui les contiennent, ou bien encore chercher les intersections des arêtes de l'une d'elles avec le plan qui contient l'autre; mais il sera presque toujours plus simple d'opérer comme il suit :

188. Supposons (*fig.* 172) que le triangle $(abc, a'b'c')$ appartienne à l'un des deux polyèdres proposés, et que le quadrilatère $(mnqs, m'n'q's')$ soit une des faces du second (179); en prolongeant les lignes $(ab, a'b')$ $(bc, b'c')$ jusqu'à leur rencontre avec le plan horizontal, on obtiendra la ligne vu qui représente la trace horizontale du plan qui contient le triangle. On cherchera de la même manière la trace st du plan qui contient le quadrilatère, et le point hh' où ces deux traces se rencontrent fera partie de l'intersection des deux faces proposées. Pour obtenir un second point de cette intersection, on pourrait avoir recours aux traces verticales des mêmes plans; mais comme il arrive souvent que ces traces sont situées hors de l'épure, il faudra opérer comme nous l'avons dit (65). On construira un plan horizontal p, qui coupera les plans du triangle et du quadrilatère suivant les deux droites xy, rz, dont le point de rencontre kk' sera un second point de l'intersection cherchée, de sorte que les projections de cette ligne seront $(kh, k'h')$. Quand on aura obtenu cette intersection, on en retranchera tout ce qui serait en dehors des faces données, et tout ce qui appartiendrait à l'une d'elles sans faire partie de l'autre;

de sorte que l'on ne conservera que la partie (co, $e'o'$) commune aux deux faces données ; on passera ensuite à l'intersection des deux autres faces.

189. Il faudra opérer avec beaucoup d'ordre et de précision. Soit (*fig.* 173) un angle trièdre, composé du pentagone a du triangle b, et du quadrilatère c ; on veut avoir toutes les lignes provenant de sa pénétration dans un angle quadrangulaire composé des deux triangles b' et c', et des deux quadrilatères a' et d'. On cherchera d'abord, par l'un des moyens indiqués plus haut, l'intersection des faces a, a', et l'on ne conservera de cette intersection que la partie mn, commune à ces deux faces ; et comme le point n fait encore partie de la face a', on cherchera l'intersection de cette face avec b ; ce qui donnera $a'b$, dont on ne conservera que la partie no. Arrivé là, il faut sortir de la face a' ; mais comme le point o est dans l'intérieur de la face b, on cherchera l'intersection de cette face avec la face b' adjacente à a' ; ce qui donnera bb', dont on ne conservera que la partie oq, commune aux deux faces b et b'. On continuera à tourner de cette manière, jusqu'à ce que l'on soit revenu au point m, d'où l'on était parti ; ce qui fermera le polygone provenant de la pénétration des deux angles polyèdres.

190. On remarquera qu'à chaque construction, l'extrémité du dernier côté obtenu devant faire partie de celui qui doit suivre, il suffira d'obtenir un point pour déterminer ce côté. Il n'y a donc que pour le premier côté qu'il faudra obtenir deux points ; le dernier sera déterminé par l'extrémité de celui qui précède, et par le point d'où l'on est parti ; de sorte que si l'on cherche un point du dernier côté, ce ne peut être que pour vérifier les constructions.

191. L'épure **27** a été construite d'après ces principes :

on s'est proposé d'obtenir toutes les lignes provenant de l'*intersection d'un tétraèdre avec un prisme quadrangulaire.*

Je désignerai chacune des faces obliques par les deux lettres placées aux extrémités du côté suivant lequel cette face rencontre le plan horizontal. Ainsi :

Les trois faces obliques du tétraèdre seront *ab*, *bc*, *ca*.

Les quatre faces du prisme seront *de*, *em*, *mn*, *nd*.

En opérant comme il a été dit (188), l'intersection des faces

ab avec *de*, donne *ou*,
ab . . . *em*, ... *ut*,
bc . . . *em*, ... *tx*,
ca . . . *em*, ... *xs*,
ca . . . *de*, ... *so*;

d'où résulte le polygone (*outxs*).

Ce polygone, que nous venons d'obtenir, est celui par lequel le sommet du tétraèdre pénétrerait dans le prisme quadrangulaire. En opérant de la même manière, on trouvera un second polygone (*iklgr*.), par lequel le sommet du tétraèdre sort du prisme.

Voici l'ordre des opérations pour obtenir le second polygone; l'intersection de

ab avec *nd*, donne *ik*,
bc . . . *nd*, ... *kl*,
bc . . . *mn*, ... *lg*,
ca . . . *mn*, ... *gr*,
ca . . . *nd*, ... *ri*.

192. Dans l'exemple que je viens de proposer, les deux polygones d'entrée et de sortie sont entièrement séparés l'un de l'autre, et dans ce cas on leur donne le nom de *pénétration;* mais il pourrait se faire, si le tétraèdre était un peu reculé dans un sens ou dans l'autre, qu'il ne fût pas entièrement engagé dans le prisme; alors les deux

figures se mêleraient et n'en feraient qu'une seule, à laquelle, dans ce cas, on donnerait le nom d'*arrachement*.

193. Quand on a obtenu toutes les lignes provenant de la pénétration de deux corps, il reste à reporter ces lignes sur la surface même de ces corps; ce qui peut se faire de deux manières.

194. Si les surfaces des deux corps que l'on se propose de construire devaient être composées de feuilles minces en tôle, fer-blanc ou autre matière que l'on puisse facilement développer, on en construirait d'abord toutes les faces, comme nous l'avons dit (178), et l'on tracerait dans chacune de ces faces, et suivant leur véritable grandeur, toutes les lignes provenant de la pénétration des deux polyèdres; de sorte que lorsque ces corps seraient reformés, toutes les lignes nécessaires à leur assemblage se trouveraient tracées sur leur surface.

195. Si les corps étaient massifs comme ceux que l'on construit en pierre ou en bois, et qu'ils fussent déjà exécutés, on construirait encore le développement comme nous venons de le dire; puis, prenant séparément chaque face de ce développement, on découperait le contour de la pénétration, et en l'appliquant sur la face correspondante du solide, il serait facile de tracer cette figure dans sa véritable grandeur. Lorsqu'une face du développement est ainsi appliquée sur le corps, on lui donne le nom de *panneau* ou *patron*.

On pourrait encore, après avoir déduit de l'épure la distance de chaque sommet de l'intersection aux sommets du polyèdre, construire directement cette figure sur la surface du solide, sans en faire le développement.

196. On a rassemblé dans la planche 28 toutes les parties de ce problème. La *fig.* 175 représente les données de la question, et la *fig.* 176 en contient le résultat. On a (*fig.* 177) le développement du prisme, et la *fig.* 178 est le développement du tétraèdre.

Pour obtenir dans le développement du prisme un point q qui n'appartient pas à l'une des arêtes, on mène par ce point (*fig.* 176), une droite $qm, q'm'$, parallèle aux arêtes du prisme, et l'on construit cette droite dans le développement, suivant sa véritable grandeur.

Pour le point ll', on a construit une ligne ($ln, l'n'$) passant par le sommet du tétraèdre.

FIN DU PREMIER LIVRE.

LIVRE II.

CHAPITRE PREMIER.

LIGNES COURBES.

197. L'idée la plus simple que l'on puisse se former d'une ligne courbe, c'est de la considérer comme engendrée par le mouvement d'un point qui se détournerait infiniment peu à chaque pas.

198. Pour définir une courbe, il faut énoncer les conditions de sa génération. Ainsi, par exemple, une circonférence de cercle est une courbe engendrée par un point assujetti à se mouvoir dans un plan, de manière à rester toujours à égale distance d'un autre point de ce plan que l'on nomme *centre*.

199. Si toutes les positions du point générateur d'une courbe sont dans un même plan, on dit que *cette courbe est plane;* dans le cas contraire, on la nomme *courbe à double courbure*. Nous verrons bientôt d'où vient cette dénomination.

200. Le nombre des positions successivement occupées par le point générateur étant infini, il est impossible de les construire toutes. Dans ce cas, on construit un certain nombre de ces points, très-rapprochés les uns des autres, et les joignant entre eux, on obtient une ligne qui diffère peu de la courbe que l'on se proposait de construire.

Il est évident que cela revient à considérer la courbe comme un polygone d'une infinité de côtés; chacun de ces côtés, à cause de sa petitesse, peut être regardé comme *élément droit* de la courbe. Si on le prolonge, on a une ligne droite qui, en deçà et au delà, s'écarte du cours de la courbe, et ne se confond avec elle que suivant ce même élément. Cette ligne droite se nomme *tangente*, et l'élément infiniment petit qui lui est commun avec la courbe se nomme *point de tangence* ou de *contact*.

201. Il ne faut pas attacher à ce mot de tangente le même sens qu'en Géométrie : on voit par ce qui précède, qu'une ligne telle que *ab* (*fig.* 179, *Pl.* 29), qui toucherait une courbe au point *a*, pourrait la couper ailleurs. La ligne *ac*, menée par le point *a* perpendiculairement à la tangente, se nomme une *normale*.

202. Le point de tangence possède une propriété géométrique qui n'appartient pas au point de section. En effet, si on conçoit qu'une sécante quelconque *ao* tourne autour du point *a*, dans le sens indiqué par la flèche, il est évident que le point *o* se rapprochera du point *a*, et lorsque ces deux points seront réunis, la droite que l'on aura fait tourner sera tangente.

Il résulte de là que le point de tangence est un point *double*, puisqu'il provient du rapprochement des deux points de section. C'est pourquoi il détermine complétement la direction de la tangente, par suite de ce principe de Géométrie, que par deux points on ne peut faire passer qu'une ligne droite, même lorsque ces deux points sont infiniment rapprochés.

Il n'en est pas de même du point de section *b*, qui, étant un point *simple*, ne suffit pas pour déterminer la direction de la sécante.

Cercle osculateur, rayon de courbure.

203. Soit (*fig.* 180) une courbe *man*, la tangente *ac*, et la normale *ab*. Supposons qu'avec les rayons de différentes grandeurs on décrive plusieurs cercles passant par le point *a* et ayant leurs centres sur la normale. Tous ces cercles se toucheront entre eux et toucheront au point *a* la courbe *man* et sa tangente *ac*, de sorte que les uns seront en dedans de la courbe, les autres passeront entre la courbe et la tangente; mais il est évident que, parmi tous les cerles possibles, il y en aura un qui s'approchera plus de la courbe qu'aucun des autres; on le nomme *cercle osculateur*. Sa courbure représente celle de la courbe au point *a*, et son rayon se nomme le *rayon de courbure*.

204. Si tous les points de la courbe n'étaient pas dans un même plan, on pourrait toujours concevoir trois points de cette courbe infiniment près les uns des autres. Ces trois points détermineraient le centre et le rayon du *cercle osculateur*, et le plan de ce cercle se nommerait *plan osculateur*. Il contiendrait l'arc extrêmement petit passant par les trois points qui déterminent sa position, et s'écarterait de la courbe en deçà et au delà de cet arc.

205. Quelquefois la courbure d'une courbe est constante comme dans la circonférence du cercle; souvent elle est variable : tantôt le centre de courbure passe d'un côté à l'autre de la courbe; alors de convexe qu'elle était, elle devient concave, comme on le voit en *a* (*fig.* 181); dans ce cas le point *a* se nomme un point d'*inflexion* : ailleurs le point générateur, après avoir parcouru un arc *ab*, s'arrête brusquement pour se diriger suivant un autre arc tel que *bc*. Alors le point *b* se nomme *un point de rebroussement*. On pourrait bien regarder les deux arcs *ab*, *bc*, comme

appartenant à deux courbes différentes qui aboutissent à un même point; mais s'ils résultent tous deux des conditions qui déterminent le mouvement du point générateur, il vaut mieux les considérer comme les deux branches d'une même courbe.

Au reste, c'est dans les traités d'analyse qu'il faut étudier les propriétés des courbes. On y verra comment toutes les sinuosités et accidents de leurs cours sont représentés par les notations algébriques. Nous nous bornerons ici à l'exposé des constructions graphiques dont nous devons faire l'application plus tard.

Construction du rayon de courbure, de la normale, et de la tangente.

206. Le calcul algébrique, en permettant d'admettre dans toute sa rigueur l'hypothèse d'un nombre infini de côtés, fait connaître avec la plus grande exactitude la position des centres et des rayons de courbure, des normales et tangentes; mais on peut, dans beaucoup de circonstances, se contenter des moyens que nous allons indiquer.

207. Soit (*fig.* 182) la courbe *abcde*; si l'on prend trois points *b*, *c*, *d*, très-rapprochés les uns des autres, le centre et le rayon du cercle passant par ces trois points pourront être pris pour le centre et le rayon du cercle osculateur en *c*, et cette hypothèse sera d'autant plus exacte, que les arcs *bc*, *cd*, seront plus petits. Il ne faudrait cependant pas, si l'on voulait obtenir ce centre par le moyen connu en Géométrie, prendre les points *b*, *c*, *d*, trop près l'un de l'autre, car on perdrait, par la difficulté de la construction, l'exactitude que l'on aurait gagnée en se rapprochant de la vérité du principe.

208. Il résulte de ce que nous venons de dire que si, en

un point c d'une courbe quelconque, on veut construire une tangente à cette courbe, on prendra deux points b, d, très-près et à égale distance du point c; puis ayant joint b avec d par une ligne droite, il sera facile de construire la normale co, perpendiculaire sur bd, et la tangente cm perpendiculaire à l'extrémité de co.

Développantes et développées.

209. Si par chacun des points a, b, c, d, e (*fig.* 183), pris sur une courbe quelconque, on conçoit une normale à cette courbe, chaque normale sera coupée par celle qui suit en un point; la ligne qui passera par les points d'intersection de toutes ces normales contiendra tous les centres de courbure de la courbe donnée. En effet, on pourra considérer ab comme un petit arc de cercle dont m serait le centre, bc comme un second arc de cercle qui aurait son centre en n; de sorte que l'ensemble de ces petits arcs de cercle formera une courbe continue et sans cassure; car il est évident que si à l'extrémité de l'une des normales on mène une tangente à la courbe, cette tangente sera touchée en même temps par l'arc qui précède et par l'arc qui suit; d'où il résulte que ces deux arcs se toucheront et se raccorderont parfaitement.

On dit que deux arcs se raccordent, lorsqu'ils paraissent être le prolongement l'un de l'autre et ne former qu'une même courbe.

Cette manière d'envisager une courbe n'est rigoureusement exacte qu'autant que l'on suppose les arcs ab, bc, cd, infiniment petits; car sans cela, ce serait plutôt une suite de petits arcs de cercle qui ne satisferait qu'approximativement à la définition géométrique de la courbe.

210. Si l'on imagine un fil attaché en z, et courbé sui-

vant le contour de la ligne *zonm*; en faisant mouvoir le point *a* suivant la courbe *abcde*, il est facile de voir que le fil se développera, que le point *m* décrira la courbe *msu*, et que le rayon de courbure s'accroîtra, à chaque instant, de la différence des deux normales passant par les extrémités de l'arc parcouru par le point *a*; de sorte que la partie *uz* du dernier rayon pourra être regardée comme le *développement* de la courbe *zonm*. C'est cette propriété qui a fait donner à la courbe *abcde* le nom de *développante*, par rapport à la courbe *zonm* qui contient les centres de courbure, et que l'on nomme sa *développée*.

211. En regardant une courbe comme une suite de petits arcs de cercle, hypothèse suffisamment exacte pour un grand nombre d'applications, nous allons voir quel parti on peut tirer des principes précédents pour la construction des courbes.

212. *Étant donnée une ligne courbe, construire sa développante.*

On placera sur la courbe donnée un certain nombre de points très-rapprochés les uns des autres; puis, après avoir mené une tangente par chacun d'eux, on prendra ce point pour centre, et la tangente pour rayon de courbure de l'arc correspondant de la développante.

Ainsi, par exemple, étant donnée la courbe *mnoz* (*fig.* 183), on construira les tangentes *ma*, *nb*; puis du point *m* comme centre, avec le rayon *ma*, on décrira l'arc *ab*; le point *n* sera le centre de l'arc *bc*, et ainsi de suite. Les courbes *abc*, $a'b'c'$ (*fig.* 184) sont les développantes du cercle. On aurait pu en construire une pour chaque point du cercle, et l'on peut voir qu'en général une courbe a une infinité de développantes. La ligne $a'b''c''$ est la développante de $a'b'c'$.

213. La courbe *ab*, obtenue par le moyen que nous venons d'indiquer, n'est pas rigoureusement égale à la développante du cercle, puisque la définition de cette dernière ligne suppose la construction d'un nombre *infini* de tangentes.

Pour obtenir plus de précision dans le tracé de la courbe, on mesurera le rayon en le portant avec le compas sur une échelle divisée avec le plus grand soin. Puis on calculera la circonférence au moyen de la formule $2\pi R$; ce qui donnera la longueur de la 16ᵉ tangente. On partagera cette longueur en 16 parties égales, et l'on portera 15 de ces parties sur la 15ᵉ tangente, 14 sur la 14ᵉ tangente, 13 sur la 13ᵉ, et ainsi de suite. Après quoi on tracera la courbe à la main, ou en cherchant les centres comme nous le dirons bientôt.

214. *Étant donnée une ligne courbe, construire sa développée.*

Il faudra mener (*fig.* 183) à la ligne proposée un certain nombre de normales très près les unes des autres, puis on fera passer une courbe par les points d'intersection de ces normales consécutives.

La développée du cercle se réduit à un point.

Il ne semble pas que ces principes puissent être d'une grande utilité dans les applications, puisque la développante ne peut se construire qu'à l'aide de la développée, et que, réciproquement, on ne peut obtenir la développée que lorsqu'on a déjà la développante. Mais nous allons voir que l'on peut souvent éluder cette difficulté.

215. Lorsqu'une courbe provient, comme *abcde* (*fig.* 183), de la construction d'arcs de cercles successifs, on lui donne, dans les applications, le nom de *courbe à plusieurs centres*. On voit que ces sortes de courbes ne sont pas soumises dans toute l'étendue de leur cours à la même

loi de continuité, c'est-à-dire que les conditions qui déterminent le mouvement du point générateur ne sont pas identiquement les mêmes depuis le commencement de la courbe jusqu'à son extrémité. Mais la facilité avec laquelle on peut construire, à l'aide d'un compas, ces imitations de courbe, les fait souvent préférer, dans les applications, aux courbes continues que l'on ne peut tracer qu'à la main.

Des courbes à plusieurs centres.

216. La construction des courbes à plusieurs centres dépend de ce principe de géométrie, que *si deux cercles ont une tangente commune en un point de leurs circonférences, ils se toucheront en ce point.*

217. Soit, par exemple (*fig.* 185), un arc de cercle *ab* ayant pour centre le point *c*; il est évident que tout autre arc de cercle passant par le point *b* et qui aura son centre sur le rayon *cb* ou sur son prolongement, sera touché en *b* par le premier arc et se raccordera parfaitement avec lui.

On peut proposer deux questions principales sur les courbes à plusieurs centres.

218. 1re QUESTION. *Faire passer une ligne courbe par plusieurs points donnés.*

Soient trois points *a*, *b*, *c* (*fig.* 187), on mènera les cordes *ab*, *bc*, et les lignes *dm*, *hn*, perpendiculaires sur les milieux de ces cordes; puis du point *m*, pris où l'on voudra, sur *dm*, on décrira un premier arc *ab*. Quant au second arc *bc*, il doit avoir son centre sur la ligne *hn* perpendiculaire au milieu de *bc*; mais pour qu'il se raccorde avec le premier arc, il faut qu'ils aient la même tangente au point *b*. Il faut donc que le centre du second arc soit sur le rayon *bm*. Il sera donc au point *n*, où les deux lignes *bm*, *hn*, se rencontrent.

On voit que la question proposée est indéterminée, et que par trois points donnés on peut faire passer une infinité de courbes à deux centres, dont la forme dépend du centre que l'on choisit pour décrire le premier arc. Si l'on prenait le point o pour centre, les deux arcs n'en feraient qu'un; si l'on décrivait le premier arc du point p sur la ligne bp perpendiculaire à bc, le rayon de courbure du second arc serait infini, et cet arc se confondrait avec la corde bc, qui deviendrait tangente au premier arc.

219. On peut appliquer ces principes à la construction d'une courbe passant par tant de points que l'on voudra, et l'on reconnaîtra encore que la forme de la courbe dépend du centre du premier arc. Ainsi (*fig.* 186), en prenant ce centre en i, on a la courbe $abcde$, tandis que si l'on prend le point o pour premier centre, on obtient la courbe $ab'c'd'e$.

220. Pour obvier à l'inconvénient qui résulterait de cette indétermination, on tracera d'abord (*fig.* 188) au crayon et avec beaucoup de soin la courbe que l'on se proposera de construire; puis après l'avoir partagée en parties égales par les points a, b, c, d, e, on fera passer par b une perpendiculaire sur ac, par c une perpendiculaire sur bd, et ainsi de suite. Toutes ces lignes pourront être considérées comme des normales à la courbe, et leurs intersections successives donneront les centres de courbure.

221. 2ᵉ Question. *Construire une courbe à plusieurs centres et tangente à des droites données.*

Soient (*fig.* 189) les deux droites ab, ac; on veut décrire une courbe qui les touche en b et en c. Pour cela, on construira d'abord bo, ci, perpendiculaires aux deux tangentes données, puis on décrira un premier arc bd, en prenant pour centre un point o situé où l'on voudra sur la droite bo, de manière, toutefois, que l'arc bd ne touche pas la tangente ac. Portant le rayon bo de c en h, on joindra le point o avec le point h par la droite oh, sur le milieu de laquelle on élèvera la perpendiculaire si, dont la rencontre avec la ligne ci donnera en i le centre du second arc. En effet, on aura $ih = io$, et par conséquent $ih + hc = io + od$, puisque $od = bo = hc$. Donc le second arc tangent en c passera par le point d; de plus, il se raccordera avec le premier arc, puisque si au point d on menait une perpendiculaire à od, elle le serait aussi au rayon id du second arc, d'où il suit que les deux arcs auraient une tangente commune en d, et se toucheraient en ce point.

Si le centre du premier arc était situé sur la ligne qui partagerait l'angle bac en deux parties égales, cet arc toucherait aussi la ligne ac au point u, éloigné du point a d'une quantité $au = ab$, et la partie droite cu remplacerait le second arc dont le rayon serait alors infini.

222. Si les deux tangentes étaient parallèles, on opérerait de la même manière. Enfin, si la courbe devait être assujettie à passer par un point donné, le problème serait déterminé.

Soient, par exemple (*fig.* 190), les deux droites ab, cd. On veut décrire une courbe qui touche ces deux lignes en b et en c, et qui passe par le point h. On construira bo, ci, perpendiculaires sur les deux tangentes; on mènera de plus la corde bh, sur laquelle on élèvera la perpendiculaire io. Le centre du premier arc sera déterminé par l'intersection de bo avec la perpendiculaire sur le milieu de bh; on fera ensuite $cu = bo$, et le centre du second arc sera donné par l'intersection de ci avec la perpendiculaire sur le milieu de ou. Le point de raccordement sera sur le prolongement de io.

223. Si l'on veut construire une courbe tangente aux divers côtés d'un polygone quelconque (*fig.* 191), on com-

mencera par l'indiquer au crayon avec le plus de régularité possible ; puis, après avoir bien arrêté les points où l'on veut que la courbe touche le polygone, on joindra ces points deux à deux par des courbes à deux centres, du genre de celle que nous avons construite (221).

Lieux géométriques.

224. Nous avons précédemment regardé une courbe comme représentant le chemin parcouru par un point qui se meut suivant une certaine loi ; mais souvent on considère une ligne courbe comme étant le lieu où se trouvent réunis un nombre infini de points qui satisfont tous à certaines conditions données. Dans ce cas, la courbe prend le nom de *lieu géométrique ;* ainsi, la circonférence d'un cercle est le lieu de tous les points qui, dans un même plan sont à égale distance d'un point donné que l'on nomme *centre*.

La droite qui partage un angle en deux parties égales est le lieu de tous les points également éloignés des côtés de cet angle.

Nous allons donner une idée de la construction de quelques lieux géométriques et de leur usage.

225. *Étant donnés un cercle et une droite, construire le lieu de tous les points à égale distance de la droite et de la circonférence du cercle.*

Soit (*fig.* 192, *Pl.* 30) la droite *ap* et le cercle qui a son centre en *c*. On abaissera de ce point une perpendiculaire sur la droite *ap*, et l'on prendra le milieu de la partie de cette perpendiculaire comprise entre la droite et la circonférence du cercle, ce qui donnera en *o* un point de la courbe cherchée. Pour en construire d'autres, faisons $od=oh$; menons au point *h* une ligne *hu* parallèle à *ap*, et décrivons du point *c*, comme centre, l'arc *du*. L'intersection de cet arc et de la droite hu donnera en u un second point de la courbe. En effet, on a $zu = ph = di = us$.

Donc,

$$zu = us.$$

On construira de cette manière autant de points que l'on voudra.

Tout cercle qui, ayant son centre sur cette courbe, toucherait la droite donnée, serait aussi tangent au cercle donné.

226. Si l'on voulait construire *le lieu de tous les points à égale distance des deux cercles* c, e, on joindrait les centres par la droite ce, et le point x, milieu de nm, appartiendrait au lieu cherché. Prenant ensuite $xv = kx$, et décrivant vy, yk, des points c, e, comme centres, on aura en y un second point de la courbe cherchée. En répétant cette construction, on aura autant de points que l'on voudra, ce qui déterminera la courbe txy.

Tout cercle ayant son centre sur cette courbe, et qui toucherait le cercle c, serait aussi tangent au cercle e.

C'est par une construction analogue que l'on a obtenu la courbe pq, qui contient les centres de tous les cercles qui sont touchés intérieurement par le cercle c, et extérieurement par le cercle e.

227. *Étant donnés trois cercles, que je désignerai par* a, b, c (*fig.* 193), *construire un cercle qui les touche tous les trois.*

On construira d'abord le lieu mn, qui contient les centres des cercles tangents aux cercles a et b. On construira de même le lieu contenant les centres des cercles tangents aux cercles a et c, et l'intersection des courbes mn, pq donnera en x le centre d'un cercle qui touchera les trois cercles donnés.

En construisant le lieu des centres des cercles qui touchent *b* et *c*, on obtiendrait une troisième courbe *rs* qui passerait encore par le point *x*, ce qui vérifierait les constructions.

On obtiendrait de la même manière les centres des cercles qui toucheraient extérieurement quelques-uns des cercles donnés, ou tous les trois. Dans le cas général, il y a huit cercles tangents à trois cercles donnés.

Je n'ai donné cette construction que comme un exemple d'application des lieux géométriques que nous emploierons par la suite dans plusieurs occasions; mais on trouvera dans les Traités de Géométrie ordinaire, d'autres moyens de résoudre les problèmes relatifs au contact des cercles.

228. *Étant donnés (fig.* 194) *un cercle dont le centre est en* a, *et un point* b *hors de ce cercle, construire le lieu contenant les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées du point* b *sur les tangentes au cercle.*

On construira les tangentes *cd*, *eh*, *vo*, etc., et du point *b* on abaissera les perpendiculaires *bd*, *bh*, *bo*, ce qui donnera la courbe *mdhbosubkm*.

Courbes d'essai.

Voici encore quelques applications des lieux géométriques.

229. *Soient donnés la courbe* bxc *et le point* a (*fig.* 195); *on demande de faire passer par ce point une tangente à la courbe.*

On construira un certain nombre de normales (208), puis abaissant du point donné une perpendiculaire sur chacune de ces normales, on aura le lieu *dxh*, qui contiendra les pieds de ces perpendiculaires, et le point *x* provenant de l'intersection de cette ligne avec la courbe proposée, sera le point de tangence; car il est évident que si, par ce point, on construit une normale *xo*, la droite *ax* sera perpendiculaire à cette normale, et par conséquent tangente à la courbe.

Pour ne pas faire de travail inutile, on commence par reconnaître quelle doit être à peu près la position du point de tangence, et l'on construit deux ou trois normales en deçà, et autant au delà de ce point.

230. Cette manière d'employer les lieux géométriques leur fait quelquefois donner le nom de *courbes d'essai.*

231. Tous les géomètres ont attaché une grande importance à la détermination rigoureuse des tangentes et des points de tangence; mais dans les applications, quelle que soit l'exactitude du principe dont on fait usage, on conçoit qu'il y aura toujours quelque erreur, que l'on pourra, dans le calcul, rendre aussi petite que l'on voudra, mais qui, dans les constructions graphiques, sera toujours dépendante de la perfection des instruments, ou de l'habileté de celui qui les emploie. Ainsi, par exemple, lorsqu'on veut faire passer une droite par un point, il est certain que l'erreur que l'on commet dépend du plus ou moins de finesse dans la pointe du crayon avec lequel on aura tracé cette droite.

Nous conclurons de là que, pour construire, par un point *a* (*fig.* 196), une tangente à la courbe *bxd*, on peut se contenter d'approcher une règle de manière que la ligne tracée par le point donné paraisse passer sur la courbe, sans augmenter la largeur du trait. Il est évident que la tangente sera, par ce moyen, aussi bien déterminée que si l'on avait obtenu d'abord le point de tangence, puisque, dans l'un comme dans l'autre cas, la plus grande erreur ne pourra excéder la largeur de la ligne tracée; mais on conçoit que ce dernier moyen de construire une tangente laisse de l'incertitude sur la véritable place du point de tangence, et si l'on voulait déterminer ce point, on construirait plusieurs cordes parallèles à la tangente, et la courbe yx, contenant les milieux de toutes ces cordes, viendrait aboutir au point de tangence, et le déterminerait avec une exactitude suffisante pour la plupart des applications.

232. Ce moyen de construire une tangente ne peut être employé avec succès que lorsque la direction de la tangente est déterminée par un point extérieur ou par quelque autre condition. Si le point donné, par exemple, était sur la courbe, il est évident que la plus petite erreur, à droite ou à gauche de ce point, pourrait influer beaucoup sur la direction de la tangente, et par conséquent sur la position de tous les points qui dépendraient de la direction de cette ligne.

Dans ce cas, il serait indispensable de commencer par déterminer la normale, soit par la construction indiquée (208), soit par tout autre moyen résultant de la définition de la courbe.

233. *Construire une tangente à une courbe* cyd, *parallèlement à une ligne donnée* ab.

On construira (*fig.* 197) quelques normales, et d'un point a pris où l'on voudra sur la droite donnée, on abaissera une perpendiculaire sur chacune de ces normales. La courbe axz, qui passera par les pieds de toutes ces perpendiculaires, coupera la droite ab en un point x. Or si, par ce point, on construit la normale xo, elle sera évidemment perpendiculaire à la ligne ab, et son intersection avec la courbe donnée déterminera le point de tangence y et la tangente pq, qui sera parallèle à ab, comme on le demandait.

Pour mener par le point x la normale xo, on prolongera les normales que l'on avait construites pour obtenir le lieu axz. Les intersections successives de ces normales donneront un arc eo appartenant à la développée de cyd, et menant par le point x une tangente à la courbe eo, on obtiendra la normale ox.

234. On pourrait (*fig.* 198), pour construire la tangente demandée, se contenter d'approcher la règle parallèlement à la ligne donnée ab, et l'on tracerait la ligne pq de manière qu'elle passât sur la courbe sans augmenter la largeur du trait; puis on construirait quelques cordes parallèles à la ligne donnée, et la courbe zx, passant par les milieux de ces cordes, viendrait aboutir au point de tangence et le déterminerait avec une exactitude suffisante (207).

235. *Construire une tangente à deux courbes données.*

On approchera (*fig.* 199) une règle de ces deux courbes, ce qui déterminera la tangente pq avec une exactitude suffisante. Quant aux points de tangence, on mènera deux ou trois cordes parallèles à pq, et prenant les milieux des cordes tracées dans la courbe czd, on construira le lieu uz, qui déterminera le point z; on obtiendra de la même manière le point x.

236. *Partager un cercle en tant de parties égales que l'on voudra.*

Soit, par exemple (*fig.* 200), un cercle que l'on veut partager en sept parties égales.

On construira un rayon va et une ligne bc, perpendiculaire en un point quelconque pris sur le prolongement de ce rayon; puis ouvrant le compas d'une quantité que l'on jugera peu différente de la septième partie du cercle, on portera cette ouverture à partir du point a, en ayant soin de marquer sur la circonférence le sixième et le huitième point de division ; faisant ensuite $bd=dc$, on joindra le point b avec le point 8, et le point c avec le point 6, par deux droites qui se couperont en o. Or, si le point o était sur la ligne dv, il est évident que les points 6 et 8 seraient symétriquement placés par rapport à cette droite, et que le septième point de division coïnciderait avec le point a; tandis que si le point o est au-dessus ou au-dessous de la ligne dv, on peut en conclure que l'on a pris une ouverture de compas trop grande ou trop petite.

Après trois ou quatre essais de ce genre, en diminuant ou augmentant un peu l'ouverture du compas, on obtiendra une courbe qui coupera la ligne dv en un point x, et joignant ce point avec b, on déterminera l'extrémité de la septième partie de la circonférence.

Les points b, c, pouvant être pris à volonté, il faut les choisir de manière que la position du point o soit bien déterminée. Si l'on prenait ces points trop près du point d, les lignes bo, co, se couperaient trop loin et suivant un angle trop aigu; la courbe d'essai pourrait même se trouver à droite du point d, ce qui serait moins commode que dans l'exemple proposé.

237. La construction précédente a été employée (*fig.* 202) pour déterminer le tiers de l'arc ab.

Ce problème est connu sous le nom de *trisection de l'angle ou de l'arc.*

De la manière de représenter les courbes planes.

238. Soient deux droites AX, AY, que l'on supposera, pour plus de simplicité, rectangulaires entre elles; la première se nomme l'*axe des abscisses*, la seconde est l'*axe des ordonnées;* lorsqu'on parle de ces deux droites, on les nomme *axes coordonnés;* le point A se nomme l'*origine.*

Si l'on conçoit un point m dans le plan YAX, et que, par ce point, on construise *mp* parallèle à la ligne AY, et *mq* parallèle à la ligne AX; *mp* se nommera l'*ordonnée*, et *mq* sera l'*abscisse* du point *m*; de sorte que la position du point *m*, par rapport aux axes AY, AX, sera déterminée lorsque l'on donnera son abscisse et son ordonnée.

Presque toujours on prend pour l'abscisse la partie de la droite AX comprise entre le point A et le pied de l'ordonnée.

239. Une courbe étant connue, lorsque l'on connaît la position de tous ses points, on peut faire pour chacun d'eux les constructions que nous venons d'indiquer. Ainsi, pour construire la courbe *abcdef* (*fig.* 203), il suffira de *construire l'abscisse et l'ordonnée correspondant à chacun de ses points.*

240. Si l'on voulait *copier une courbe ou la réduire*, il faudrait copier ou réduire, d'après un rapport donné, les abscisses et ordonnées de chacun de ses points. Ainsi la courbe $a'b'c'd'e'f'$ représente la courbe *abcde* réduite à une dimension moitié.

241. Pour rectifier la courbe *abcdef*, c'est-à-dire pour avoir sa longueur absolue, on portera les arcs *ab*, *bc*, *cd* à la suite les uns des autres, ce qui donnera $a''b''c''d''e''f''$; il est bien entendu que les points *a*, *b*, *c*..., etc., doivent être assez rapprochés les uns des autres pour que l'on puisse, sans erreur sensible, prendre la distance de deux points consécutifs pour la grandeur de l'arc qui les joint.

242. Quelquefois, *pour définir une courbe*, on énonce *les relations qui doivent exister entre les abscisses et les ordonnées de ses points.*

Ainsi, par exemple, si l'on demandait une courbe telle que pour chaque unité d'augmentation de l'abscisse, l'ordonnée dût augmenter de la moitié de l'ordonnée précédente, on construirait les points $mnApq$ à égale distance les uns des autres; et en supposant que le point a soit donné sur la ligne AY, on construirait ma, qui, par son prolongement, donnera le point b; nb donnerait le point c; Ac donnerait le point d, et ainsi de suite, en sorte que $abcd\ldots o$ serait la courbe demandée. En effet, on aura :

$$cq : dr :: Aq : Ar :: 2 : 3;$$

Donc,

$$2dr = 3cq \text{ et par conséquent } dr = \frac{3cq}{2} = cq + \frac{cq}{2}.$$

On voit que dans cette courbe les abscisses étant en progression par différence, les ordonnées correspondantes forment une progression par quotient. Cette propriété a fait donner à ces sortes de courbes le nom de *logarithmiques*.

Courbes du second degré.

243. On nomme *courbe du second degré*, celle dont toutes les propriétés peuvent être exprimées par une équation du second degré.

Les constructions que nous allons indiquer sont les conséquences de ces propriétés, qu'il faut étudier dans les traités de Géométrie analytique.

244. Les courbes du second degré sont au nombre de trois, savoir : l'ellipse, la parabole, l'hyperbole.

Ellipse.

245. L'ellipse est une courbe telle que *la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes pris dans son plan, et que l'on nomme foyers, est une quantité constante.*

On exprime ordinairement cette quantité par $2a$.

246. *Construction de l'ellipse.* De la propriété que nous venons d'énoncer, et que l'on peut regarder comme la définition de l'ellipse, il résulte deux moyens de construire cette courbe.

Soient (*fig.* 205, *Pl.* 31), F et F' les deux foyers, on prendra le point F, pour centre, et avec un rayon quelconque Fo, on décrira un premier arc de cercle; puis du point F' comme centre avec un rayon $F'o=2a-Fo$, on décrira un second arc. Le point où ces deux arcs se couperont doit appartenir à l'ellipse, car il est évident que la somme de ses distances aux deux foyers sera égale à $2a$. En décrivant les arcs au-dessus et au-dessous de la ligne qui joint les deux foyers on peut obtenir en même temps quatre points de la courbe.

247. Le point A, milieu de FF' se nomme *le centre de l'ellipse;* toute ligne droite passant par ce point est un diamètre, et se trouve partagée par le centre en deux parties égales.

Le plus grand de tous les diamètres est celui qui contient les foyers; on lui donne le nom de *grand axe*. Le plus petit, que l'on nomme *petit axe*, est toujours perpendiculaire au grand.

Il est facile de voir que le grand axe est égal à $2a$, car pour le point X, extrémité de ce grand axe, on doit avoir, comme pour tout autre point de la courbe, $XF+XF'=2a$; mais comme $XF=X'F'$, il en résulte $X'F'+F'X=2a$, ou enfin $XX'=2a$.

Les distances Fu, $F'u$, d'un point de la courbe aux foyers, se nomment *rayons vecteurs*, et la distance Au se nomme simplement *rayon*. On voit que dans l'ellipse tous les rayons ne sont pas égaux. Le plus grand est AX, moitié du grand axe, et le plus petit rayon AY est la moitié du petit axe.

248. Le cercle est une ellipse dont les deux axes sont égaux et dans laquelle le centre et les foyers se confondent en un seul point.

249. Le second moyen de construire l'ellipse consiste à placer deux épingles aux foyers F et F'; puis, après avoir noué par les deux bouts un fil dont la longueur totale soit égale à $2a$ plus FF', on tendra ce fil de manière qu'il prenne la forme du triangle FF'u, dans lequel les sommets F et F' seront occupés par les deux épingles, et le point u par un crayon que l'on fera glisser en tendant toujours le fil. Il est évident que le contour du triangle étant représenté par la longueur du fil, que nous avons faite égale à $2a$ plus FF'; et la base FF' de ce triangle ne changeant pas, il restera toujours $2a$ pour la somme des deux côtés variables, quelle que soit, du reste, la place où l'on conduira le crayon qui occupe le sommet u de ce triangle.

250. Une ellipse étant construite, on peut se proposer de retrouver son centre, ses axes et ses foyers. Pour cela, on mènera deux cordes parallèles vs, pq, et la droite passant par les milieux de ces cordes sera un diamètre. Le milieu A de ce diamètre sera le centre de la courbe. Du point A, comme centre, on décrira un cercle de manière à couper la courbe en quatre points qui seront toujours symétriquement placés; puis, abaissant du centre des perpendiculaires sur les cordes qui joignent ces points deux à deux, on aura les axes de l'ellipse. Enfin, du point Y, comme centre, avec un rayon égal à la moitié du grand axe, on décrira un arc de cercle FkF', qui par son intersection avec le grand axe déterminera les deux foyers.

251. En combinant les propriétés du cercle avec celles

de l'ellipse, on en déduit (*Géom. anal.*) que si un cercle et une ellipse (*fig.* 206) ont un axe commun X'X, et que l'on prenne sur cet axe une abscisse Ap (238), on aura toujours : l'ordonnée correspondante pour le cercle est à l'ordonnée de l'ellipse comme le grand axe est au petit axe.

De là résultent plusieurs moyens de construire l'ellipse lorsque l'on connaît les deux axes.

252. Du centre de l'ellipse avec des rayons égaux à la moitié des axes, on décrira deux cercles concentriques; on construira par le centre un rayon quelconque Am, qui coupera le plus petit cercle au point n; puis construisant mo parallèle au petit axe, et no parallèle au grand, l'intersection de ces deux lignes donnera en o un point de la courbe. En effet, on aura.

$$mp : op :: \mathrm{A}m : \mathrm{A}n :: a : b;$$

ce qui est conforme au principe que nous venons de citer.

253. Mais de tous les moyens de construire les ellipses, le plus commode est celui que nous allons indiquer.

Après avoir tracé les deux axes AX$=a$, AY$=b$ (*fig.* 207), on prend un morceau de carte que l'on taille bien droit en forme de petite règle; puis, après avoir marqué sur cette carte et à partir de l'extrémité o, deux grandeurs $om=a$, $on=b$, on la fait mouvoir de manière que le point m ne quitte pas l'axe AY, et que le point n ne quitte pas l'axe AX. Dans ce mouvement, le point o décrira l'ellipse, de sorte qu'il suffira de marquer avec un crayon un certain nombre des points successivement occupés par le point o.

Cette manière de décrire l'ellipse résulte encore du principe énoncé (251); car si du point m, comme centre avec un rayon mo, on décrivait un cercle en prenant pour abscisse $mp=$AS, on pourrait considérer op comme l'ordonnée du cercle, et oS comme celle de l'ellipse, d'où l'on aurait encore :

$$op : oS :: om : on :: a : b.$$

254. Enfin, au lieu de prendre mn égal à la différence des demi-axes, on pourrait le faire égal à leur somme, et le point o placé entre les points m et n, décrirait encore l'ellipse.

255. Étant donnés un des axes et un seul point, on peut construire l'ellipse.

Soit donné, par exemple, AX égal à la moitié du grand axe, et le point o appartenant à la courbe, on construira AY perpendiculaire sur AX. On prendra une ouverture de compas égale à AX, et du point o, comme centre, on décrira l'arc cs, dont l'intersection avec AY donnera le point m; en joignant om, le point n sera déterminé, et la construction se fera comme précédemment.

Diamètres conjugués.

256. Lorsque deux diamètres XX′, YY′ (*fig.* 208) sont tels que les tangentes aux extrémités de l'un d'eux sont parallèles à l'autre, on les nomme *diamètres conjugués;* et si on les prend pour axes des abscisses et ordonnées, on dit que l'ellipse est rapportée à ses diamètres conjugués.

257. *Construire une ellipse, connaissant ses diamètres conjugués.*

Sur l'un d'eux, comme diamètre, on décrira la circonférence XmX′, et l'on construira le triangle AmY dont les éléments sont donnés; puis, sur une ordonnée quelconque du cercle, on fera un triangle npq semblable et parallèle à mAY : le point q appartiendra à l'ellipse. En recommençant, on obtiendra autant de points de la courbe que l'on voudra. Cette construction provient de ce que la propriété énoncée (251) convient aussi à l'ellipse construite sur ses diamètres conjugués (*Géom. analytique*).

Si l'on voulait retrouver le grand axe, il suffirait de joindre le centre avec le milieu de l'arc cX.

Tangentes à l'ellipse.

258. Pour construire une tangente à l'ellipse, on pourrait opérer comme nous l'avons indiqué (208); mais la définition de la courbe et les propriétés qui en sont la conséquence fournissent des moyens plus rigoureux de résoudre ce problème.

259. *Construire une tangente à l'ellipse par un point donné sur la courbe.*

Le point m étant donné sur la courbe (*fig.* 209), on décrira du point A, comme centre, avec un rayon AX égal à la moitié du grand axe, l'arc de cercle $X'n$, qui coupera en n l'ordonnée passant par le point m; on construira (*Géom.*) la droite pn tangente à cet arc en n; et le point p, où cette tangente ira rencontrer le prolongement du diamètre XX' appartiendra à la droite pm, qui est la tangente demandée. Cette construction vient de ce si que plusieurs ellipses ont un axe commun, et que par tous les points situés sur la même ordonnée on construise des tangentes, toutes ces lignes doivent concourir en un même point sur le prolongement de l'axe commun. Or, le cercle pouvant être considéré comme une ellipse, la tangente au cercle détermine le point où doit aboutir celle de l'ellipse. (*Géom. analytique.*)

260. Une autre propriété de l'ellipse nous fournit un second moyen de construire la tangente.

Si par un point c de la courbe on mène des droites cX, cX', aux extrémités d'un diamètre, ces droites se nomment *cordes supplémentaires*, parce qu'à elles deux elles sous-tendent la demi-circonférence de l'ellipse. Or, on démontre (*Géom. anal.*) que si par le point A on construit un rayon Am' parallèle à la corde cX$'$, la tangente au point m' sera parallèle à la corde cX ; de là résulte cette construction.

Le point m' étant donné, on le joindra avec le centre par le rayon Am' ; on construira la corde cX$'$ parallèle au rayon Am'. Enfin, la corde supplémentaire cX donnera la direction de la tangente cherchée ; et comme l'on a déjà un point m' de cette tangente, il sera facile de la construire.

261. Enfin, un troisième moyen de solution résulte de cette propriété, que si en un point m'' de la courbe on mène une tangente et les deux rayons vecteurs (247), la tangente fera des angles égaux avec les rayons vecteurs, d'où résulte cette construction.

Après avoir déterminé les foyers F, F$'$, on construira les deux rayons vecteurs Fm'', F$'m''$; on partagera l'angle F$'m''$F en deux parties égales, ce qui donnera la normale. Enfin, la ligne qm'', perpendiculaire à la normale, sera la tangente.

262. *Construire une tangente à l'ellipse parallèlement à une droite donnée.*

Soit os la droite donnée. On mènera d'abord la corde cX parallèle à la droite os, puis le rayon Am' passant par le milieu de la corde cX déterminera le point de tangence, et par conséquent la tangente, qu'il sera facile de construire, puisque sa direction est donnée.

En prolongeant le rayon Am' on obtiendra sur la courbe un second point de tangence.

263. *Construire une tangente à l'ellipse par un point donné en dehors de cette courbe.*

Soit o le point donné (*fig.* 210). De ce point, comme centre, et prenant pour rayon sa distance à l'un des foyers, on décrira un premier arc $bF'c$; de l'autre foyer F, comme centre avec un rayon égal au grand axe de l'ellipse, on décrira un second arc qui coupera le premier en deux points s, u. On joindra ces points avec le centre du second arc par deux droites dont les intersections avec la courbe seront les points de tangence.

En effet, le rayon du second arc étant égal au grand axe, on aura

$$sm' + m'F = 2a;$$

mais par la propriété de l'ellipse (245), on a

$$F'm' + m'F = 2a;$$

donc,

$$sm' = m'F'.$$

Ainsi, le triangle $sm'F'$ est isocèle; mais le point o, centre du premier arc, est à égale distance des points s, F'. Donc la droite om' est perpendiculaire à sF', et partage l'angle $sm'F'$ en deux parties égales. Donc enfin l'angle $om'F' = pm'F$, et la droite op faisant des angles égaux avec les rayons vecteurs, est une tangente (261). Il en est de même de la droite oq.

Parabole.

264. *La parabole est une courbe telle que pour chacun de ces points la distance à une droite nommée directrice est égale à la distance à un point que l'on appelle foyer.*

Construction de la parabole. Soit (*fig.* 211) co la directrice, et le foyer F. Pour construire la parabole, on abaissera la perpendiculaire FD, et le point A, au milieu de cette perpendiculaire, sera un point de la courbe. Pour en obtenir d'autres, on construira en un point p quelconque une perpendiculaire pm, et du point F, comme centre avec un rayon égal à pD, on décrira un arc de cercle qui coupera la perpendiculaire mp en deux points m, m', appartenant à la parabole. On recommencera jusqu'à ce que l'on ait un assez grand nombre de points pour construire la courbe.

265. On pourrait aussi construire la parabole par un mouvement continu.

Pour cela, on placerait une règle coïncidant avec la directrice, et prenant une équerre cab, on attacherait au point b et au foyer F de la parabole, un fil dont la longueur totale serait égale au côté ab. Or, il est évident que si l'on pousse l'équerre avec un crayon dont la pointe serait placée au sommet de l'angle u, afin de maintenir contre l'équerre l'une des parties bu du fil, l'autre partie uF de ce fil, qui représente la distance au foyer, sera toujours égale à la distance ua du point u à la directrice; ce qui est conforme à la définition de la parabole.

La droite AX, qui passe par le foyer et qui est perpendiculaire à la directrice, se nomme le *grand axe*.

Une parabole peut être considérée comme une ellipse dont la distance des foyers serait infinie. Il est évident, d'après cela, que le centre est aussi à l'infini, ainsi que le second foyer. (*Géom. anal.*)

266. Une parabole étant donnée, on peut se proposer de retrouver son *grand axe*.

On construira deux cordes parallèles, et la droite qs passant par les milieux de ces cordes sera un diamètre; construisant mm' perpendiculaire sur qs, on en prendra le milieu p, ce qui donnera un point du grand axe que l'on mènera parallèlement à qs.

Cela vient de ce que dans la parabole tous les diamètres sont parallèles. (*Géom. anal.*)

Tangentes à la parabole.

267. Si le point de tangence est donné sur la courbe, on construira (*fig.* 212) l'ordonnée *mp* passant par ce point; puis portant A*p* de A en *q*, ce dernier point appartiendra à la tangente.

Cette construction résulte de ce que, *dans toute parabole, la distance* qp, *que l'on nomme la sous-tangente, est toujours double de l'abscisse du point de tangence.*

268. Si par le point *s*, milieu de *qm*, on mène une perpendiculaire à la tangente, le point F, où cette perpendiculaire rencontrera l'axe AX, sera le foyer de la parabole. Enfin, portant AF de A en D, et construisant la perpendiculaire *c*D, on aura retrouvé la directrice.

269. On peut encore, pour construire la tangente, opérer comme il suit:

On joindra le foyer F avec le point de tangence, par la droite F*m*, et après avoir mené *m*F', parallèle au grand axe AX, on partagera l'angle F*m*F' en deux parties égales par la droite *ms* qui sera la normale; il ne restera plus qu'à mener au point *m* une perpendiculaire sur *sm*.

Dans cette construction, *m*F' remplace le rayon vecteur allant aboutir au second foyer, situé à l'infini, comme nous l'avons dit plus haut.

270. Si l'on voulait mener *une tangente parallèle à une ligne donnée* bc, on construirait la corde A*d* parallèle à cette ligne, et la droite *um*', menée par le milieu de A*d* parallèlement à l'axe AX, déterminerait en *m*' le point de tangence; ce qui suffit, puisque la direction de la tangente est donnée.

271. *Construire une tangente à la parabole, par un point hors de la courbe.*

Soit o (*fig*. 213) le point donné. On décrira de ce point, comme centre, et passant par le foyer, un arc de cercle uFs qui coupera la directrice aux deux points u, s; on mènera par ces deux points et parallèlement à l'axe AX les droites sm', um'', dont les intersections avec la courbe seront les points de tangence.

Cette construction est analogue à celle que nous avons donné (263); la directrice remplace le cercle décrit du second foyer comme centre.

Hyperbole.

272. L'hyperbole ne diffère de l'ellipse qu'en ce qu'au lieu de la somme, c'est la différence des rayons vecteurs qui est égale à une quantité constante que l'on nomme $2a$.

273. *Construction de l'hyperbole.*

Les foyers F, F' d'une hyperbole étant donnés, ainsi que la quantité $2a$ qui est la différence des rayons vecteurs; du point F', comme centre avec un rayon quelconque $F'o$, on décrira un arc de cercle; ensuite du point F, comme centre, avec un rayon FO égal à $F'O+2a$, on décrira un second arc, et le point où ces deux arcs se couperont appartiendra à la courbe demandée.

274. On peut aussi décrire l'hyperbole par un mouvement continu. Pour cela, on attachera une règle par son extrémité, de manière qu'elle puisse tourner autour du foyer F', puis au foyer F, et à l'autre extrémité de la règle, on attachera un fil dont la longueur totale $mc+cF$ doit être égale à la longueur de la règle moins $2a$; il est évident que si l'on pousse la règle avec un crayon placé au point c; quelle que soit la place où l'on conduira ce crayon, la partie cF du fil sera toujours égale à cF' moins $2a$; ce qui est conforme à la définition de l'hyperbole.

275. Ici, comme dans l'ellipse, toute ligne telle que vn, qui passe par le milieu de deux cordes parallèles, se nomme un *diamètre*, et le point A, milieu de la portion de ce diamètre comprise entre les points où il coupe la courbe, se nomme le *centre*. Le diamètre XX', qui passe par les foyers, se nomme l'*axe transverse*, et YY', qui lui est perpendiculaire, se nomme l'axe *non-transverse*. La portion BB' de l'axe transverse est égale à $2a$.

Asymptotes.

276. Il existe dans le plan de toute hyperbole deux droites qui jouissent de propriétés remarquables. Ces droites, AD, AE, passent par le centre de la courbe et s'en rapprochent sans jamais la toucher, ou, en d'autres termes, elles ne touchent la courbe qu'à l'infini. On leur donne le nom d'*asymptotes*.

277. Les asymptotes fournissent un moyen aussi simple qu'élégant de construire une hyperbole lorsqu'on en connaît un point. En effet,

Soit donné le point s et les deux asymptotes DD', EE'. On construira dans une direction quelconque en passant par le point s, la sécante pu, et prenant ps, on le portera de u en v; ce qui donnera le point v. De même, construisant une autre sécante si, on portera st de c en i. En continuant ainsi dans toutes les directions, on aura autant de points que l'on voudra sur les deux branches de la courbe.

278. La courbe étant construite, le centre et les axes pourront être retrouvés comme dans l'ellipe. Pour obtenir les foyers, on décrira un arc du point A, comme centre, de manière à passer par le point h, où l'asymptote est rencontrée par l'ordonnée Bh; les intersections de ce cercle avec l'arc transverse seront les foyers.

On ferait l'opération inverse si l'on voulait construire les asymptotes, connaissant les foyers. (*Géom. anal.*)

Tangentes à l'hyperbole.

279. Les tangentes à l'hyperbole s'obtiennent par les mêmes moyens que les tangentes à l'ellipse.

Ainsi, par exemple, m étant le point donné (*fig.* 215), on construira le rayon Am, puis la corde B'c parallèle à ce rayon, enfin la corde supplémentaire cB, qui sera parallèle à la tangente et qui en déterminera la direction.

280. On peut encore, pour obtenir la tangente en un point donné de l'hyperbole, construire pm parallèle à l'asymptote; puis faisant Ao = 2Ap, le point o appartiendra à la tangente. Cette construction provient de ce que, dans toute hyperbole, si l'on construit une tangente, le point de tangence doit toujours occuper le milieu de la portion de la tangente comprise entre les asymptotes (*Géom. anal.*)

281. Enfin, on peut encore construire la tangente en un point donné m', en construisant les deux rayons vecteurs F'm', Fm', et partageant l'angle que ces rayons font entre eux, en deux parties égales.

282. Pour construire une tangente parallèle à une ligne donnée ts, on mènera d'abord la corde Bc parallèle à cette ligne, puis le rayon Am passant par le milieu de la corde Bc déterminera en m le point de tangence, et comme l'on connaît la direction de la tangente, il sera facile de la construire.

283. *Construire une tangente à l'hyperbole par un point pris en dehors de cette courbe.*

Soit o le point donné. De ce point, comme centre, on décrira un premier cercle passant par l'un des foyers F. De l'autre foyer F', comme centre avec un rayon égal à $B'B=2a$, on décrira un second cercle, et l'on joindra par deux droites les points d'intersection de ces deux cercles avec le foyer F' qui a servi de centre au second cercle; les points m', m'', où ces droites rencontreront la courbe, seront les points de tangence.

284. La similitude entre les constructions précédentes et celles que nous avions indiquées plus haut pour l'ellipse est une conséquence de l'analogie qui existe entre les propriétés des deux courbes (*Géom. anal.*)

285. Il existe encore un grand nombre de courbes, que l'on peut construire graphiquement au moyen de leur définition géométrique.

Je me contenterai, pour le moment, de quelques exemples remarquables par leur propriétés.

Cycloïde.

286. Si l'on fait rouler la circonférence A (*fig.* 217, *Pl.* 32), sur la droite $1-1^{v}$ chacun des points de cette circonférence décrira une *cycloïde*.

Pour tracer la courbe parcourue par le point 1, on partagera la circonférence du cercle mobile en parties égales, que l'on portera sur la droite directrice $1-1^{v}$, qui, par conséquent, sera égale au développement de la circonférence du cercle A.

Cela étant fait, si nous supposons que le point 5 de la circonférence mobile soit arrivé au point 5', le point 1, générateur de la courbe, se sera élevé jusqu'à la hauteur à laquelle se trouvait le point 5, avant le commencement du mouvement. De sorte que le point 1' sera déterminé par l'intersection de l'horizontale $5-1'$ avec la circonférence qui touche la directrice au point 5'.

Par la même raison, le point $1''$ sera déterminé par l'intersection de l'horizontale du point 6 avec la circonférence qui touche la directrice au point $6'$, etc.

287. Les points 1 et 1^{v} sont deux points de rebroussement à droite et à gauche desquels le point 1 engendrera d'autres branches de cycloïdes égales à la première.

288. La courbe $mm'''m^{\text{v}}$ est une cycloïde *rallongée*. Elle représente le chemin parcouru par le point m situé sur le prolongement du rayon o—1 qui passe par le point générateur de la cycloïde principale.

289. La courbe $nn'''n^{\text{v}}$ est une cycloïde *raccourcie* engendrée par le mouvement du point n.

290. Les trois courbes 1—$1'''$—1^{v}, $mm'''m^{\text{v}}$, $nn'''n^{\text{v}}$ peuvent se construire en même temps. Ainsi, lorsque le centre du cercle mobile sera parvenu au point o'', on tracera le rayon o''—$1''$ sur lequel on portera $1''$—m'' égal à 1—m, et $1''$—n'' égal à 1—n. Le point m'' appartient à la cycloïde rallongée et le point n'' à la cycloïde raccourcie.

Tangentes à la cycloïde.

291. Lorsque le cercle mobile devient tangent au point $12'$, le point générateur 1^{iv} se meut pendant un instant infiniment petit, comme s'il tournait autour du point $12'$, d'où il résulte que la droite ac perpendiculaire au rayon $12'$—1^{iv} sera également tangente à la cycloïde.

292. Les mêmes raisons permettront de construire les deux droites $a'c'$, $a''c''$ tangentes aux cycloïdes rallongées et raccourcies, parce que le point $12'$ peut être considéré comme le centre de trois arcs de cercles infiniment petits tangents aux trois courbes 1—$1'''$—1^{v}, $mm'''m^{\text{v}}$, $nn'''n^{\text{v}}$.

293. Il ne faut pas conclure de ce qui précède que la droite 12′—1^{IV} soit le rayon de courbure de la cycloïde au point 1^{IV}. Le cercle *v*1^{IV}*u* est tangent à la courbe, mais il ne faut pas le confondre avec le cercle osculateur, qui doit avoir un rayon double de 12′—1^{IV}. En effet, décrivons la circonférence A″ égale au cercle A générateur de la cycloïde, prolongeons 1^{IV}—12′ jusqu'au point 17, et traçons la corde 18—17, l'angle 12′—17—18 sera droit.

Or, si nous supposons que l'on fasse rouler le cercle A″ sur la droite 18—19 parallèle à 1′—16′, le point 17 engendrera une cycloïde égale à celle qui était engendrée par le point 1 du cercle A. Il y aura seulement cette différence que le point de rebroussement de la cycloïde 19—1^{V} sera sur la perpendiculaire élevée au milieu de 1′—1^{V}.

L'angle 12′—17—18 étant droit, puisqu'il est inscrit dans une demi-circonférence, la droite 1^{IV}—17, normale à la cycloïde 1—1^{IV}—1^{V}, sera tangente à la cycloïde 19—17—1^{V}, et par conséquent la seconde de ces deux courbes sera la développée de la première (210); la droite 1^{IV}—17, double de 1^{IV}—12′ sera le rayon de courbure au poin 1^{IV}, et le point 17 sera le centre du cercle osculateur.

294. On peut encore conclure de ce qui précède (210) que la droite 19—1‴ est égale au développement de l'arc 19—1^{V}, de sorte qu'en doublant cette droite 19—1‴, on aurait la longueur totale de l'arc 1—1‴—1^{V}, qui, par conséquent, est exactement égal à 4 fois le diamètre du cercle mobile A.

295. Pour mener une tangente à la cycloïde par un point extérieur ou parallèlement à une droite donnée, on emploiera les moyens indiqués aux n^{os} 229, 233; ce qui sera d'autant plus exact, que la construction ci-dessus détermine les normales auxiliaires avec la plus grande précision.

296. On peut aussi opérer de la manière suivante.

On remarquera d'abord que l'angle 12'—1$^{\text{IV}}$—20 étant droit, ses deux côtés doivent passer par les extrémités du diamètre 12'—20. D'après cela,

Sur le diamètre 6'—24 perpendiculaire à 1'—1$^{\text{V}}$, on construira le triangle rectangle 6'—24—22, dont un côté 24—22 passerait par le point donné *p*.

On recommencerait cette construction pour trois positions du cercle mobile A, et la courbe *zx*, qui contient les sommets de tous ces triangles rectangles, rencontrera la cycloïde en un point 1$^{\text{VI}}$, qui sera le point de tangence demandé.

297. Pour construire *une tangente parallèle à une droite donnée* hk, on construira la corde 21—23 parallèle à la droite *hk*, et l'on fera glisser le cercle A' parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que le point 23 soit arrivé sur la cycloïde. La droite horizontale 23—1$^{\text{IV}}$ remplace la courbe *zx* employée dans le problème précédent.

Épicycloïde.

298. Si, au lieu de faire rouler le cercle mobile A sur une ligne droite, on le faisait rouler sur la circonférence d'un autre cercle B (*fig.* 218), la courbe engendrée 1—1'—1''' se nommerait une épicycloïde.

Cette courbe se tracerait par des moyens analogues à ceux que nous avons employés pour la cycloïde. Il suffirait de remarquer que les lignes qui, dans l'exemple précédent, étaient droites et parallèles à la ligne 1—1$^{\text{V}}$, sont ici remplacées par des cercles concentriques.

Ainsi, quand on aura fait l'arc 1—2' du cercle directeur B égal à l'arc 1—2 du cercle mobile A, le point 1' de l'épicycloïde demandée sera déterminé par l'intersection de l'arc de cercle 2—1′ et de la circonférence 2′—1′ qui touche au point 2′ le cercle directeur.

299. La courbe $m - m' - m'' - m'''$ est une épicycloïde rallongée engendrée par le point m situé sur le prolongement du rayon o—1, et la courbe $n - n' - n'' - n'''$ est une épicycloïde raccourcie engendrée par le point n.

300. Les tangentes à l'épicycloïde se construiront comme celles de la cycloïde. Ainsi, par exemple, lorsque le centre du cercle mobile sera parvenu au point o'', les points générateurs des trois courbes auront pris les positions n'', $1''$, m''; en joignant ces points avec $2''$, on aura les trois normales $2''-m''$, $2''-1''$, $2''-n''$, et par suite les trois tangentes $a''c''$, ac, $a'c'$.

301. La courbe $1-1'-1''$ (*fig.* 219) est une épicycloïde intérieure. Elle est engendrée par le mouvement du point 1, lorsque le petit cercle A roule dans l'intérieur du cercle B. Le rapport des deux cercles étant ici comme 1 : 3, il en résulte que, si on continue le mouvement, les points de rebroussement seront toujours situés à la même place, ce qui n'aurait pas lieu dans l'exemple précédent.

302. Les deux courbes $mm'm''$, $nn'n''$, sont engendrées par les points m et n.

303. La courbe $1''-p$ serait engendrée par le point $1''$, si on faisait rouler le plus grand cercle B sur le petit cercle A′.

304. Enfin, on peut encore regarder comme un cas particulier des épicycloïdes la courbe vu engendrée par l'extrémité de la droite zv qui roulerait sur la circonférence B. Nous avons vu (212) que cette courbe était la *développante* du cercle.

305. Lorsque le rayon du cercle mobile est exactement

la moitié du rayon du cercle directeur, l'épicycloïde intérieure devient un diamètre de ce dernier cercle.

En effet, nommons R le rayon du cercle directeur B (*fig.* 221), et r le rayon du cercle mobile A, et supposons que ce dernier cercle soit parvenu en A′, on aura

$$\text{arc } aC : 2\pi R :: \text{angle } \alpha : 4 \text{ angles droits.}$$
$$\text{arc } ac : 2\pi r :: \text{angle } \alpha' : 4 \text{ angles droits.}$$

Mais

$$\alpha' = 2\alpha;$$

de plus,

$$R = 2r.$$

Par conséquent,

$$2\pi R = 4\pi r.$$

On aura donc

$$aC : 4\pi r :: \alpha : 4$$
$$ac : 2\pi r :: 2\alpha : 4.$$

De là on tire

$$4aC = 4\pi r\alpha,$$
$$4ac = 4\pi r\alpha.$$

Donc,

$$\text{arc } aC = \text{arc } ac.$$

Ainsi, quand le cercle mobile touchera le cercle directeur au point a, le point C sera parvenu en c, et par conséquent il n'aura pas quitté le diamètre CD.

306. La droite 1 — 1″ (*fig.* 220) est engendrée par le mouvement du point 1, lorsque l'on fait rouler le petit cercle A dans le cercle double B.

La courbe $mm'm''$ est engendrée par le point m, et la courbe $nn'n''$ par le point n.

Spirales.

307. Si un point tourne autour d'un autre en s'éloignant ou se rapprochant de ce dernier point, la courbe engendrée est une *spirale*. La quantité dont le point géné-

rateur s'éloigne ou s'approche du centre pendant une révolution, la régularité ou l'accélération de ce mouvement suivant certaines lois déterminées peuvent donner lieu à une infinité de spirales différentes. Nous ne parlerons ici que de la courbe engendrée par un point qui se rapprocherait à chaque instant d'une quantité proportionnelle aux espaces angulaires parcourus; ou autrement nous supposerons que le point générateur se meut uniformément sur une droite *ac*, pendant que cette ligne parcourt des espaces angulaires égaux, en tournant autour de l'une de ses extrémités; ainsi, par exemple, on veut construire (*fig.* 223) la courbe parcourue par le point *a*, qui tournerait autour du point *c*, dont il se rapprocherait, à chaque révolution, d'une quantité *hk* (*fig.* 222). Cette courbe est connue sous le nom de *spirale d'Archimède*.

308. *Construction de la spirale*. On fera (*fig.* 223) *ao* égal à *hk*, puis, après avoir partagé *ao* en parties égales, en 8 par exemple, on tracera les 8 rayons *c*—1, *c*—2, *c*—3, etc., faisant entre eux des angles égaux.

Ensuite, du point *c*, comme centre, on décrira un arc de cercle par chacun des points de division de la droite *ao*.

Les intersections de ces arcs de cercles avec les rayons *c*—1, *c*—2, *c*—3 détermineront tous les points de la première révolution de la courbe demandée.

On opérera de la même manière pour la seconde et pour la troisième révolution.

309. La *tangente* mu, pouvant toujours être considérée comme le prolongement d'un élément infiniment petit de la courbe, sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle *mnu*, dont la base *mn* doit être à la hauteur *nu* comme le développement du cercle, qui contient le point de tangence *m*, est à la quantité *hk*; ou comme telle partie que l'on vou-

dra du cercle mm' est à une partie correspondante de la droite hk.

Ainsi, par exemple, si on fait mn égale à $\frac{3}{8}$ de la circonférence mm', il faudra faire nu égal à $\frac{3}{8}$ de hk.

310. Si on fait le triangle rectangle mcx semblable au triangle mnu, la droite xm sera normale au point m.

311. Enfin, en construisant plusieurs normales et opérant, comme nous l'avons dit, aux n^{os} 229, 233, on pourra toujours construire des tangentes par un point extérieur ou parallèlement à telle ligne donnée que l'on voudra.

CHAPITRE II.

SURFACES CYLINDRIQUES.

312. Nous avons, dans les livres précédents, résolu les questions principales qui dépendent du plan. Nous allons étudier actuellement les propriétés des surfaces courbes.

Si on jette un coup d'œil sur les différents produits de l'industrie, les formes des corps terminés par des surfaces courbes paraissent variées d'un si grand nombre de manières, qu'il semble au premier abord difficile de reconnaître les propriétés particulières à chaque espèce.

Mais, en procédant avec méthode, on peut facilement déduire toutes ces propriétés d'un petit nombre de principes généraux.

313. La première et la plus essentielle des surfaces courbes que nous allons étudier est celle à laquelle on donne le nom de *cylindre*.

Il ne faut pas attacher à ce mot le même sens que dans la géométrie élémentaire; en effet, dans cette partie des mathématiques, un cylindre (*fig.* 226, *Pl.* 33) est un corps ou solide engendré par un rectangle *acvu*, que l'on ferait tourner autour d'un de ses côtés *ac*, tandis que, dans la géométrie descriptive, on donne le nom de cylindre (*fig.* 224) à la surface engendrée par une droite *ac* qui se meut parallèlement à elle-même; quelles que soient, du reste, les conditions qui déterminent le mouvement de cette droite, que l'on nomme la *génératrice* du cylindre.

314. On peut toujours supposer que la génératrice est assujettie à s'appuyer constamment sur une courbe quelconque *du*, que l'on nomme la *directrice*.

315. Ainsi la nature du cylindre dépendra principalement de la forme de sa directrice, et l'on conçoit que si cette courbe était remplacée par une ligne droite, le cylindre deviendrait un plan; ce qui autorise à considérer le plan comme un cas particulier parmi les surfaces cylindriques.

Cette analogie entre le plan et le cylindre est une des relations qui nous seront le plus utiles. C'est pourquoi je vais tâcher de mettre en évidence les propriétés communes à ces deux surfaces.

Si nous supposons que l'on conserve comme constante la génératrice *ac* d'un cylindre (*fig.* 225), mais que l'on augmente graduellement le rayon de courbure de la directrice *du*, cette courbe deviendra successivement $d'u'$, $d''u''$; et lorsque le rayon de courbure sera infini, la directrice primitive se transformera en une droite $d'''u'''$, et la surface cylindrique en un plan pu'''.

Si on change le sens de courbure de la directrice, on obtiendra le cylindre $d^{\text{v}}u^{\text{iv}}$.

Tous ces différents cylindres se touchent et sont touchés par le plan pu''' suivant la génératrice commune *ac*.

C'est pourquoi nous donnerons dès à présent au plan pu''' le nom de *plan tangent*.

316. Il semblerait résulter de ce que nous venons de dire qu'un plan tangent à un cylindre ne doit avoir qu'une droite commune avec cette surface.

Cette définition du plan tangent ne serait pas exacte pour plusieurs raisons.

D'abord, la directrice d'un cylindre pouvant avoir un grand nombre de sinuosités, un plan qui toucherait ce cylindre suivant une génératrice ac (*fig.* 227) pourrait encore le couper suivant d'autres droites $a'c'$.

Ensuite, la condition de n'avoir qu'une droite commune avec un cylindre pourrait tout aussi bien convenir à un plan coupant pq (*fig.* 229).

Il faut donc tâcher de trouver, pour le plan tangent au cylindre, une définition plus complète.

Supposons (*fig.* 228) que le cylindre A soit coupé par un plan pq parallèle à sa direction, la section se composera des deux génératrices ac, $a'c'$.

Or, si nous faisons tourner le plan pq autour de $a'c'$, la droite ac se rapprochera de $a'c'$ sans cesser de lui être parallèle; et lorsque les deux génératrices ac, $a'c'$ seront réunies en une seule, le plan pq sera devenu $p'q'$, et, dans cette nouvelle position, il sera tangent au cylindre.

Nous serons donc conduits à dire qu'un plan tangent à un cylindre est celui qui contient *deux génératrices réunies en une seule*, ou, ce qui est la même chose, deux génératrices dont la distance est nulle.

317. Au lieu de faire tourner le plan pq autour de la génératrice $a'c'$, on aurait pu le faire mouvoir parallèlement à lui-même ou de toute autre manière, mais on serait toujours arrivé à cette conséquence que le plan deviendra tangent aussitôt que les deux lignes de section ac, $a'c'$ seront réunies en une seule.

318. Il semblerait, au premier abord, qu'au moment où ces deux génératrices sont réunies, on doit les considérer comme n'en faisant qu'une. Il est vrai que les deux droites qui se sont ainsi rapprochées n'occupent pas plus de place qu'une seule; mais cependant il est très-essentiel de distinguer une génératrice *simple* ou une *génératrice de section*, telle que *ac* (*fig.* 229), d'une *génératrice de tangence* que l'on pourra nommer génératrice *double*, puisque l'on peut toujours supposer qu'elle résulte du rapprochement de deux génératrices de section, et l'on devra se rappeler qu'il existe entre ces deux lignes cette différence très-grande, que la génératrice de section ne suffit pas pour déterminer la direction du plan coupant, qui, tournant autour de cette droite, peut prendre une infinité de positions différentes (*fig.* 229), tandis que la position du plan tangent $p'q'$ (*fig.* 228) sera déterminée par la génératrice de tangence $a'c'$, puisqu'il ne pourrait pas tourner autour de cette ligne sans devenir un plan coupant, ce qui dédoublerait aussitôt la génératrice de tangence et la décomposerait en deux génératrices de section $a'c', a''c''$, qui s'écarteraient l'une de l'autre à mesure que le plan se rapprocherait de la position *pq*.

319. On peut encore être conduit aux conséquences précédentes en supposant que le cylindre soit coupé par un plan quelconque *pq* (*fig.* 230), que l'on ferait ensuite tourner autour d'une droite *mn* tangente à la courbe de section *ac*, cette courbe deviendrait alors successivement $ac', c''ac''$, en s'allongeant toujours à mesure que le plan se rapprocherait de la direction du cylindre, et lorsqu'il aurait atteint cette direction, les deux branches de la courbe seraient réunies en une seule et formeraient alors la génératrice de tangence ac'''.

Enfin, on peut encore supposer que le cylindre est un prisme dont le nombre des faces serait infini.

Dans cette dernière hypothèse (*fig.* 231) le plan tangent sera le prolongement de l'une des faces du prisme, et la largeur de cette face devant être considérée comme nulle, les deux arêtes cc, $c'c'$ infiniment rapprochées formeront la génératrice de tangence.

320. Concevons (*fig.* 232) une courbe quelconque $aa'm$ située sur le cylindre A, et joignons par une sécante les deux points a et a', suivant lesquels cette courbe serait coupée par un plan quelconque pq parallèle au cylindre. Si nous faisons tourner le plan pq pour le ramener dans la position $p'q'$, le point a se rapprochera du point a', et lorsque le plan $p'q'$ sera tangent, les deux points a et a' seront réunis; la droite aa' aura pris la position mn et sera située dans le plan tangent $p'q'$.

Ainsi, le plan tangent $p'q'$ contiendra la droite mn tangente au point a' à une courbe *quelconque* située sur la surface du cylindre; de sorte que la construction du plan tangent se réduit à faire passer un plan par les deux droites $c'c'$, mn.

La courbe aa', m pouvant être prise arbitrairement, il en résulte que *le plan tangent au cylindre contient toutes les droites qui toucheraient la surface en un point quelconque de la ligne* $c'c'$.

Cylindre projetant. Courbes à double courbure.

321. La première application que nous ferons des surfaces cylindriques aura pour but de déterminer les projections des lignes courbes.

Soit ABCD (*fig.* 233, *Pl.* 34) une courbe quelconque située dans l'espace. Si de chaque point de cette courbe on abaisse une perpendiculaire sur le plan de projection P, la courbe *abcd*, qui contient les pieds de toutes ces perpendiculaires, sera la projection de la courbe.

La surface qui contient toutes les perpendiculaires A*a*, B*b*, C*c*, etc., se nomme *cylindre projetant*. La courbe *abcd*, trace du cylindre projetant, est la projection de la courbe ABCD.

Une seule projection ne suffit pas pour déterminer une courbe dans l'espace, car il est évident que la projection *abcd* serait la projection commune à toutes les lignes courbes tracées sur la même surface projetante.

322. Il résulte de ce que nous venons de dire, que pour déterminer la grandeur et la position d'une ligne courbe dans l'espace, il faut la projeter sur deux plans, car alors chacun de ses points étant déterminé de position, la courbe elle-même sera déterminée.

323. La *projection verticale* d'une courbe est la ligne qui passe par les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de cette courbe sur le plan vertical, et la projection horizontale est la ligne qui contient les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées sur le plan horizontal.

324. Soit (*fig.* 234) $a'b'c'd'e'f'g'h'i'k'$ la projection verticale d'une courbe quelconque, et *abcdefghik* sa projection horizontale, il est évident que la courbe sera déterminée dans l'espace, car devant être en même temps dans les deux cylindres projetants dont les lignes données sont les traces, elle sera l'intersection de ces deux surfaces et participera de la courbure de chacune d'elles.

C'est pour cette dernière raison que l'on donne à ces courbes en général le nom de *courbes à double courbure*.

325. Si l'on partage la projection verticale $a'b'c'd'$.... en un assez grand nombre de parties pour que l'on puisse sans erreur sensible considérer chacune d'elles comme une ligne droite; si on porte tous ces petits arcs à la suite les uns des autres, comme on le voit (*fig.* 235), la ligne $a'b'c'...k'a'$, que l'on obtiendra, sera le développement de la projection verticale de la courbe.

Supposons actuellement que par chacun des points a', b', c', on élève sur la droite que l'on vient d'obtenir une perpendiculaire égale à la distance du point correspondant de la courbe donnée au plan vertical de projection (10), et que par les extrémités A, B, C,..... K, A, de ces perpendiculaires on fasse passer une courbe, on aura le développement de la surface projetante perpendiculaire au plan vertical.

La courbe ABCD....KA représente ce que devient la courbe donnée dans le développement du cylindre projetant perpendiculaire au plan vertical.

On aurait pu de la même manière développer le cylindre perpendiculaire au plan horizontal.

326. Prenant les arcs AK, KI, IH, etc., et portant leur longueur en ligne droite et à la suite les uns des autres (*fig.* 236), on obtiendra la courbe donnée dans sa véritable longueur. C'est ce qu'on appelle *rectifier une ligne courbe*.

327. Si l'on voulait obtenir les projections des points qui, à partir du point A, partageraient la courbe donnée en trois parties égales, on partagerait la ligne droite AA; ce qui donnerait deux points M, N, que l'on reporterait d'abord dans le développement (*fig.* 235), d'où l'on déduirait facilement les points m', n', qui, reportés eux-mêmes sur la projection verticale de la courbe, donneraient les projections horizontales m, n.

On emploierait le même moyen pour partager une courbe quelconque en tout autre nombre de parties égales ou ayant entre elles des rapports donnés.

328. On nomme *trace d'une courbe*, les points où cette courbe perce les plans de projection.

Soit (a, a') (*fig.* 237) une courbe donnée. Le point (h, h') ayant sa projection verticale sur la ligne AZ, appartient au plan horizontal, et représente la trace horizontale de la courbe. Le point (ν, ν'), dont la projection horizontale est sur la ligne AZ, sera la trace verticale.

Il est facile de reconnaître que (c, c') est le point où la courbe perce le plan horizontal p, et (d, d') celui où elle perce le plan vertical p'.

329. *Trouver l'intersection d'une courbe* (a, a') *avec un plan quelconque.*

Concevons par cette courbe le cylindre projetant perpendiculaire au plan horizontal, et cherchons la ligne (b, b') qui provient de l'intersection de cette surface par le plan donné p''. Le point (m, m'), où les lignes a' et b' se rencontrent, est le point demandé.

Pour obtenir la ligne b', il suffit de construire les points où le plan p'' est percé par chacune des verticales q, q', q'', génératrices du cylindre vertical qui a pour directrice la courbe a.

On aurait pu tout aussi bien faire usage du cylindre projetant perpendiculaire au plan vertical.

La seule différence qu'il y ait entre ce problème et celui de l'intersection d'une droite avec un plan, que nous avons résolu (70), c'est qu'alors la surface projetante de la ligne donnée était un plan perpendiculaire au plan de projection.

330. *Construire une tangente à une courbe quelconque.*

Nous avons dit (200) qu'une tangente à une courbe quelconque devait être considérée comme le prolongement d'un arc infiniment petit de cette courbe; on conçoit, en effet, qu'une ligne droite qui n'aurait qu'un point de commun avec une courbe, ne serait pas pour cela une tangente à cette courbe. Ainsi, une ligne droite oblique ou perpendiculaire au plan d'un cercle et qui passerait par un point de sa circonférence, n'aurait qu'un point de commun avec ce cercle, et cependant ce ne serait pas une tangente, parce qu'elle ne serait pas dans le plan de la courbe.

Une ligne qui n'aurait qu'un point de commun avec une courbe à double courbure quelconque ne serait pas non plus une tangente à cette courbe; il faut encore, pour que l'on puisse la considérer comme telle, qu'elle soit située dans le plan osculateur (204) qui contient l'arc infiniment petit dont elle est en quelque sorte le prolongement.

Nous avons dit (320) que le plan tangent à un cylindre contient les tangentes à toutes les courbes qui passent par le point de tangence sur la surface du cylindre.

De là résulte le moyen de construire une tangente à une courbe à double courbure.

Soient (a, a') (*fig.* 238) les deux projections de cette courbe, le point de tangence (m, m') étant donné.

Concevons par le point m' une tangente à la projection verticale de la courbe, on pourra considérer cette tangente comme la trace d'un plan p perpendiculaire au plan vertical et tangent au cylindre projetant horizontal. Or, d'après ce que nous venons de dire, ce plan doit contenir la tangente à la courbe; de plus, cette tangente doit être située dans le plan p', tangent à la surface projetante perpendiculaire au plan horizontal. Donc la tangente cherchée devant faire partie des deux plans p et p', sera leur intersection, d'où l'on voit que

331. *Pour construire une tangente en un point donné d'une courbe quelconque, il suffit de construire par les projections du point donné, deux tangentes aux projections de la courbe. Ces lignes seront les projections de la tangente à la courbe.*

332. *Construction de la normale.* Je dirai de la normale ce que je viens de dire de la tangente. Toute ligne droite passant par le point de tangence et perpendiculaire à la tangente, n'est pas nécessairement une normale. Il faut encore pour cela qu'elle soit dans le plan de la courbe, si cette courbe est plane, ou dans le plan osculateur, s'il s'agit d'une courbe à double courbure. Donc, si l'on veut obtenir la normale au point (m, m') de la courbe à double courbure (a, a') (*fig.* 238), on choisira deux autres points (n, n') (u, u') sur la courbe et à peu de distance du point donné (m, m'); puis après avoir construit les trois tangentes $(vu, v'u')$, $(sm, s'm')$, $(on, o'n')$, on déterminera les points v, s, o, où ces tangentes percent le plan horizontal, et l'on fera passer une courbe par ces points. Or, il est évident que si les trois points (uu'), (mm'), (nn'), étaient infiniment près l'un de l'autre, les trois tangentes pourraient être considérées comme dans un même plan qui serait le plan osculateur, et la ligne vso serait droite et se confondrait avec sa tangente sz. Donc, en construisant cette tangente, on pourra la regarder comme la trace du plan osculateur en (mm').

Faisant tourner ce plan autour de sa trace sz pour le rabattre sur le plan horizontal de la projection, le point de tangence (mm') viendra se placer en m''. La tangente sera représentée dans le rabattement par sm''. On lui mènera la perpendiculaire $m''z$ qui sera la normale rabattue sur le plan horizontal. En faisant revenir le plan osculateur à sa place, le point (zz') ne bougera pas, et les deux projections de la normale seront (zm, $z'm'$).

333. *Courbes planes inclinées par rapport aux plans de projection.* Dans tout ce que nous venons de dire sur la projection des courbes, nous avons supposé, pour plus de généralité, qu'il s'agissait d'une courbe à double courbure; mais si la courbe était plane, et qu'on le sût d'avance, on pourrait souvent rendre les constructions plus simples en prenant (*fig.* 239) l'un des plans de projection perpendiculaire au plan de la courbe. Au moyen de cette précaution, l'une des projections de la courbe se confond avec la trace du plan qui la contient, et qui, dans ce cas, devient l'une des surfaces projetantes. Ainsi, le plan de la courbe (abc, $a'b'c'$) étant perpendiculaire au plan horizontal, sa projection sur ce plan sera la droite ac.

Si l'on voulait avoir la courbe dans sa véritable grandeur, on ferait tourner le plan qui la contient autour de sa trace verticale, et l'on obtiendrait $a''b''c''$. Les droites (db', db'') sont la projection verticale et le rabattement d'une tangente dont la projection horizontale se confondrait avec celle de la courbe.

334. *Les deux projections d'une courbe étant données, reconnaître si cette courbe est plane.*

Il est évident que toute courbe qui se projette en ligne droite est nécessairement une courbe plane.

Prenant sur la courbe (*fig.* 240) deux points (aa', oo') situés, pour plus de simplicité, sur une même droite horizontale, et construisant le plan vertical p perpendiculaire sur cette horizontale, on cherchera la projection de la courbe sur ce plan; si cette projection est une ligne droite, on pourra en conclure que la courbe est plane;

car il est évident que toute courbe qui se projette par une ligne droite est nécessairement située dans le plan projetant dont cette ligne est la trace.

Il est bien entendu que cette manière de reconnaître si une courbe est plane n'est pas rigoureusement exacte, et qu'elle ne doit être employée que dans le cas où l'on serait privé de moyens plus rigoureux résultant de la définition géométrique de la courbe donnée.

Je terminerai ce sujet par l'étude des propriétés de l'une des courbes les plus utiles que l'on puisse tracer sur un cylindre.

Hélices.

335. Lorsqu'une courbe coupe toutes les génératrices d'un cylindre suivant le même angle, on lui donne le nom d'*hélice*.

On peut dire encore que l'hélice est engendrée par un point qui s'éloigne à chaque instant d'un plan perpendiculaire au cylindre, d'une quantité proportionnelle à l'arc parcouru par sa projection sur ce plan.

Ainsi, par exemple, si nous supposons que le cylindre A (*fig.* 241, *Pl.* 35) soit perpendiculaire au plan horizontal, l'hélice $a, a'a'''$ serait engendrée par le point aa' qui s'élèverait à chaque instant d'une quantité proportionnelle à l'arc de cercle parcouru par la projection horizontale a.

336. La distance $a'a''$ entre deux intersections successives de la courbe avec la même génératrice se nomme le *pas de l'hélice*, et la portion de courbe correspondante à une révolution entière se nomme une *spire*.

337. La section *droite* du cylindre est une hélice dont le pas est égal à zéro.

338. Les hélices se distinguent par la nature de la section droite du cylindre sur lequel elles sont tracées. Lorsque

cette section est un cercle, on dit que l'hélice est à *base circulaire*.

339. *Construction de l'hélice*. Supposons que la circonférence a—4—14 soit la base ou projection horizontale d'une hélice dont le pas serait $a'a''$; on partagera cette droite et la circonférence a—4—14 en un même nombre de parties égales, en 16 par exemple; on tracera ensuite une horizontale par chacun des points de division de la verticale $a'a''$.

Si on suppose actuellement que le point générateur, partant de aa', tourne dans le sens de l'arc 1—2—3, etc., il est évident que lorsqu'il sera parvenu sur la verticale du point 1, il sera élevé, au-dessus du plan horizontal, d'une quantité égale à la seizième partie du pas, et sa projection verticale devra, par conséquent, se trouver sur la première horizontale au-dessus de la ligne AZ.

Lorsque le point générateur sera parvenu sur la verticale du point 2, sa projection verticale sera élevée de 2 seizièmes du pas, et sera sur la deuxième horizontale, etc.

De sorte que tous les points de la projection verticale de la courbe seront déterminés par les intersections des verticales élevées par les 16 points de division de la circonférence a—4—14 avec les horizontales passant par les 16 points de divisions de la verticale $a'a''$.

340. Il résulte de la définition que nous avons donnée au n° 335 que, dans le développement du cylindre qui contient l'hélice, *cette courbe se transforme toujours en une ligne droite*.

La *figure* 242 est le développement de la moitié du cylindre A.

341. On peut se servir avec avantage de ce développement pour construire la projection de la courbe. En effet,

si le pas de l'hélice était peu considérable, il serait difficile de partager avec beaucoup d'exactitude la verticale $a'a''$. Dans ce cas, on commencerait par construire l'oblique $a^{\text{IV}}c'$ que l'on partagerait en 8 parties égales, et les points de division de la courbe seraient alors déterminés par les intersections des verticales élevées par les points de division de la circonférence a—4—14 avec les horizontales passant par les points de l'oblique $a^{\text{IV}}c'$.

342. Lorsqu'on prend ainsi une oblique pour échelle de hauteur, il n'est pas nécessaire que la droite $a^{\text{IV}}a^{\text{V}}$ soit égale au développement de la circonférence a—4—14. Il suffit que la verticale $a^{\text{V}}c'$ soit égale à la hauteur de la partie de l'hélice que l'on veut projeter. De sorte que si nous avions fait $a^{\text{IV}}a^{\text{VI}}$ égal à $a'a''$, les 16 parties égales de l'oblique $a^{\text{V}}a^{\text{VI}}$ auraient déterminé les hauteurs des 16 points correspondants de la première spire.

343. Lorsqu'une hélice se compose d'un très-grand nombre de spires, on peut construire avec beaucoup de soin (*fig.* 246) la projection de l'une de ces courbes sur une carte que l'on découpera, et qui, étant reportée à toutes les hauteurs, servira pour guider le crayon.

On pourra se contenter de la moitié d'une spire, parce que le même profil étant retourné servira pour construire les parties vues et celles qui sont cachées.

Enfin, lorsque l'on veut tracer un arc d'hélice sur un cylindre, il suffit de déterminer (*fig.* 247) deux points m et n de la courbe demandée; après quoi il sera facile de la tracer avec une règle flexible à laquelle on fera prendre la courbure de la surface.

Quoique deux points suffisent, dans ce cas, pour déterminer la courbe, on fera bien cependant de tracer sur le cylindre un ou deux points intermédiaires pour servir comme vérification.

344. Il arrivera souvent par la suite que l'on ait à tracer sur un même cylindre (*fig.* 241) plusieurs hélices de même pas, mais situées à des hauteurs différentes. Dans ce cas, il ne sera pas nécessaire d'établir sur la projection du cylindre de nouvelles horizontales, ce qui ferait confusion. Il sera préférable de porter avec le compas, sur la verticale projetante de chaque point, la différence de hauteur entre la première hélice et celle que l'on veut obtenir.

345. Si on veut construire plusieurs hélices de même pas et à la même hauteur sur des cylindres concentriques (*fig.* 243), on relèvera les points sur les horizontales correspondantes.

Tangentes à l'hélice.

346. On sait que, dans le voisinage du point de tangence, une courbe se confond toujours avec sa tangente. De plus, l'hélice devant se développer en ligne droite, elle devra, dans le développement du cylindre, continuer à se confondre avec sa tangente.

D'où il résulte que la tangente coïncidant avec la courbe développée doit être l'hypoténuse d'un triangle rectangle. dont la hauteur est à la base comme le pas de l'hélice est au développement de la circonférence du cercle qui en forme la projection, ou, ce qui est la même chose, comme un certain nombre de parties égales du pas est à un pareil nombre de parties égales de la circonférence de la base.

347. Supposons donc que l'on veuille construire une tangente au point $14'$ de l'hélice $a'a'''$ (*fig.* 241), on construira d'abord la tangente $14-m$.

Cette droite sera la trace horizontale du plan tangent au cylindre qui contient l'hélice, de sorte que si on fait $14-m$ égal à $\frac{3}{16}$ de la circonférence, et que $14'-u$ soit égal à $\frac{3}{16}$ du pas de l'hélice, la verticale mm' déterminera le point m', et l'hypoténuse $14'—m'$ sera la projection verticale de la tangente au point $14'$.

Dans la *figure* 245, $a'm$ est la tangente au point aa'; $a'u$ est égal à $\frac{3}{8}$ du pas, et l'horizontale um vaut $\frac{3}{8}$ de la circonférence de la base.

348. Il résulte de ce qui précède qu'il n'est pas nécessaire que la courbe soit tracée, pour que l'on puisse construire sa tangente.

349. Si l'on prévoit le cas où il serait nécessaire de construire un grand nombre de tangentes à une même hélice, on pourra construire (*fig.* 244) la courbe $a—9—12'$, qui est la développante de la circonférence du cercle $a—10—c''$ (213). Cette courbe contiendra les traces horizontales de toutes les tangentes à l'hélice.

De sorte que, pour construire l'une quelconque de ces tangentes, celle, par exemple, qui toucherait l'hélice au point $10'''$.

On tracera :

1° La droite $10—10'$, perpendiculaire au rayon $c—10$, et qui sera par conséquent la projection horizontale de la tangente demandée ;

2° La verticale $10'—10''$, qui déterminera le point $10''$ sur la ligne AZ ;

3° La droite $10''—10'''$, qui touchera l'hélice au point $10'''$.

350. La même courbe pourra servir à construire les tangentes à toute autre hélice de même pas, et qui serait située sur un cylindre d'un rayon plus petit ou plus grand.

Ainsi, par exemple, pour construire la tangente au point $13'''$,

On tracera :

1° La tangente $13—13'$ parallèle à $10—10'$;

2° La droite $c—10'$, qui déterminera le point $13'$;

3° La verticale $13'—13''$;

4° Enfin, la tangente demandée $13''—13'''$.

En effet, les deux tangentes $10—10'$, $13—13'$ sont entre elles comme les rayons $c—10$, $c—13$. Or, la droite $10—10'$ étant le développement de l'arc $c''10$, il s'ensuit que $13—13'$ sera le développement de l'arc $c'13$; ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit au n° 346.

On remarquera encore que l'on doit avoir

$$0'''-13''':0'''-10'''::c-13:c-10::c-13':c-10'::c'-13''.c'-10''.$$

Or, si on ne prend que les rapports extrêmes, on aura :

$$0'''—13''':0'''—10'''::c'—13'':c'—10''.$$

Donc les horizontales $c'—10''$, $0'''—10'''$ étant coupées en parties proportionnelles par les deux tangentes $10''—10'''$, $13''—13'''$. Ces lignes doivent se rencontrer sur le prolongement de l'axe commun aux deux cylindres.

Projection du cylindre oblique.

351. Dans les articles précédents nous avons considéré les cylindres comme surfaces projetantes, nous allons actuellement étudier ces sortes de surfaces sous un point de vue plus général.

Une surface cylindrique est déterminée lorsque l'on connaît les projections de la directrice et celles d'une génératrice ou d'une droite quelconque qui lui serait parallèle.

Supposons, par exemple, que les deux courbes 1—3—5—7 (*fig.* 248, *Pl.* 36) soient les deux projections de la directrice d'une surface cylindrique. On prendra sur cette ligne un certain nombre de points, et les droites menées par ces points, parallèlement à la direction donnée ac, $a'c'$, seront les génératrices de la surface proposée.

Dans les questions composées, il est souvent nécessaire de construire un grand nombre de génératrices, et dans ce cas, pour plus d'ordre dans le travail, on les distingue par des numéros.

Il ne faut pas, cependant, construire de suite et sans nécessité un trop grand nombre de génératrices. Il n'est pas nécessaire, par exemple, que ces lignes soient aussi rapprochées les unes des autres dans les parties où la surface a peu de courbure; mais on fera bien de tracer au moins au crayon celles qui correspondent aux points les plus essentiels de la surface.

Ainsi, dans l'exemple qui nous occupe, on devra s'attacher surtout à déterminer avec exactitude :

1° Les génératrices qui passent par les points 1 et 7, et qui forment les limites de la surface cylindrique.

2° La génératrice du point 5, suivant laquelle la surface du cylindre est touchée par un plan vertical. Cette génératrice forme la limite de la projection horizontale du cylindre.

3° La génératrice du point 2, suivant laquelle la surface serait touchée par un plan perpendiculaire au plan vertical de projection. Cette génératrice forme la limite de la projection verticale du cylindre.

4° On devra chercher aussi à donner toute l'exactitude possible aux projections du point 3, suivant lequel la directrice du cylindre est touchée par un plan perpendiculaire à la ligne AZ.

352. On pourra simplifier le travail en choisissant de préférence les génératrices qui auraient une projection commune.

Ainsi, par exemple, la projection verticale de la génératrice qui contient le point 1 servira en même temps pour celle qui contient le point 4, etc.

Parties vues et cachées.

353. La nature particulière des surfaces cylindriques que l'on emploie dans l'industrie permettra presque toujours de reconnaître au premier coup d'œil quelles sont les parties de ces surfaces qui doivent être vues et celles qui sont cachées ; mais, lorsqu'il y aura incertitude, on pourra opérer de la manière suivante :

Supposons que la surface donnée soit coupée par un plan *pq* parallèle au cylindre, et perpendiculaire au plan vertical de projection. On obtiendra pour sections les deux génératrices des points 1 et 4, et la 2^e de ces droites étant plus près du plan vertical que la première, elle sera derrière la partie de la surface qui contient la génératrice du point 1.

Il suffira souvent d'une ou deux opérations de cette espèce pour reconnaître toutes les parties vues et cachées.

Nous avons supposé ici que l'on a supprimé toute la partie de la surface qui est au-dessus de la directrice, et que l'on n'a conservé que ce qui est compris entre cette courbe et le plan horizontal de projection.

Il résultera de là que toutes les génératrices qui s'appuient sur l'arc 7—5 seront vues sur la projection horizontale depuis cet arc jusqu'à l'arc 5 et 1, à partir duquel elles passent au-dessous de la surface.

Les génératrices qui s'appuient sur l'arc 5—1 seront vues entièrement sur la projection horizontale.

Des considérations du même genre feront reconnaître les parties vues et cachées de la projection verticale.

Ainsi sur cette projection, les génératrices qui s'appuient sur l'arc 1—2 seront vues entièrement, tandis que celles qui s'appuient sur la courbe 2—4 seront cachées. Enfin, les génératrices qui s'appuient sur l'arc 4—7 seront vues.

On reconnaît pourquoi il est essentiel, comme nous l'avons dit plus haut, de déterminer avec le plus de précision possible les génératrices des points 2, 5, 7 et 1, puisque ces lignes forment les limites des parties vues et cachées sur la projection du cylindre.

La construction exacte de ces points dépend des principes qui ont été exposés aux n^{os} (233, 234).

354. Quoique nous ayons supposé la surface terminée dans sa partie supérieure par la courbe 1—5—7, qui lui sert de directrice, il vaudra mieux, en général, admettre que les génératrices d'un cylindre sont infinies, de sorte que toute surface cylindrique sera elle-même infinie, et les parties de ces surfaces terminées par des lignes ou composant la limite des corps ne seront considérées que comme des portions de cylindres.

Si la directrice est une courbe infinie, le cylindre sera infini suivant ses deux dimensions; mais si la directrice était une courbe fermée ou terminée par deux points, le cylindre ne serait infini que dans la direction de ses génératrices.

Traces du cylindre.

355. Toute surface cylindrique étant infinie doit, en général, se prolonger au delà des plans de projection.

Or, si, après avoir construit un assez grand nombre de génératrices, on détermine les traces de chacune de ces lignes (45), les courbes passant par tous ces points seront les traces du cylindre. Ainsi :

La courbe $1'$—$5'$—$7'$ est la trace horizontale et la courbe $1''$—$5''$—$7''$ est la trace verticale du cylindre donné.

356. Nous avons supposé (351), pour plus de généralité, que la directrice du cylindre était une courbe quelconque; mais, dans les applications, on prend presque

toujours pour directrice une courbe parallèle à l'un des plans de projection.

Ces sortes de courbes sont égales et parallèles aux traces, et se construisent de la même manière. Ainsi, par exemple, pour obtenir la courbe $1'''—5'''—7'''$, il suffira de projeter tous les points suivant lesquels le plan horizontal *mn* coupe les génératrices du cylindre.

357. En prenant pour directrice la trace du cylindre ou une courbe parallèle à cette trace, on n'ôte rien de la généralité des principes que nous allons exposer.

Il est facile de concevoir, en effet, que la surface du cylindre sera toujours la même, tant que la courbe employée comme directrice sera située tout entière dans cette surface, et qu'elle sera coupée par toutes les génératrices. Or, les traces jouissent essentiellement de cette propriété.

Ainsi, quelle que soit la nature d'un cylindre donné, on pourra toujours construire l'une de ses traces ou une section parallèle à cette trace, et remplacer la directrice primitive par la section obtenue.

358. Le plan qui toucherait le cylindre suivant la génératrice du point 6, aurait pour trace horizontale la droite $p'—6'$ tangente à la trace horizontale du cylindre, et la trace verticale $p'—6''$ de ce même plan devra aussi être tangente à la courbe $1''—6''—7''$, qui est la trace verticale du cylindre.

Les droites $v'—2''$, $v'—2'$ sont les traces d'un second plan qui toucherait le cylindre suivant la génératrice du point 2, et qui serait perpendiculaire au plan vertical de projection.

Ces deux plans tangents se coupent suivant une ligne vs, $v's'$, qui doit être parallèle au cylindre donné.

Enfin, les deux droites $v'''—6'''$, $v'''—2'''$, tangentes à la courbe $1'''-5'''-7'''$, proviennent de l'intersection des deux plans tangents par le plan horizontal *mn*.

359. La *fig.* 250 contient les deux projections d'un cylindre dont la directrice est une courbe fermée située dans le plan horizontal.

360. Il sera surtout essentiel de déterminer avec beaucoup de soin les points 1, 2, 3, 4.

Les points 2 et 4 appartiennent aux deux génératrices qui forment les limites de la projection horizontale du cylindre, et les points 1 et 3 sont les pieds des génératrices qui forment les limites de la projection verticale.

Si la directrice est une ellipse, ce qui arrive souvent dans les applications, les points 1, 2, 3, 4 seront déterminés par le principe du n° 262.

On doit encore remarquer que, sur la projection horizontale, la partie de surface cylindrique qui a pour directrice l'arc 2—3—4 sera vue, tandis que celle qui a pour directrice l'arc 4—1—2 doit être cachée.

Sur la projection verticale, la partie vue est celle qui a pour directrice la courbe 1—2—3, et par conséquent la partie qui a pour directrice l'arc 3—4—1 est cachée.

361. Plusieurs simplifications remarquables peuvent résulter de la position du cylindre par rapport aux plans de projection.

Ainsi (*fig.* 251) lorsque l'un de ces plans sera parallèle au cylindre, il en résultera cet avantage, que les génératrices seront projetées sur ce plan suivant leurs véritables grandeurs.

362. Si l'un des plans de projection était perpendiculaire au cylindre (*fig.* 252), chaque génératrice se projetterait sur ce plan par un seul point, et la projection du cylindre

se réduirait à sa trace, qui serait en même temps la directrice.

Pour exprimer qu'un point est situé sur la surface du cylindre, on construira la génératrice passant par ce point. Il peut y avoir plusieurs solutions. Ainsi, par exemple, le point m (*fig.* 250, 251) sera la projection horizontale commune à deux points qui auront m' et m'' pour leurs projections verticales.

Dans la *fig.* 249, les points mm', mm'', mm''', mm^{iv} appartiennent tous les quatre à la surface d'un cylindre qui aurait pour directrice la courbe ac.

Section droite, développement du cylindre.

363. Si l'on coupe un cylindre par un plan parallèle à ses génératrices, on obtient pour section une ligne droite. C'est la manière la plus simple de couper un cylindre. Toute autre section par un plan sera une courbe plane dont la forme dépendra de la nature de la courbe qui aura servi de directrice au cylindre, et de l'inclinaison suivant laquelle il aura été coupé; mais, parmi les sections par un plan, il faut distinguer surtout celle que l'on obtient en coupant le cylindre perpendiculairement aux génératrices. Cette courbe, que nous nommerons la *section droite du cylindre*, nous servira dans un grand nombre d'applications.

364. Supposons, par exemple, que l'on veuille développer la surface d'un cylindre (*fig* 253, *Pl.* 37).

On projettera le cylindre proposé sur un plan parallèle à ses génératrices, afin d'avoir toutes ces lignes projetées dans leur véritable longueur; menant ensuite par un point quelconque a un plan perpendiculaire à ces génératrices, la ligne ac sera la projection verticale de la section droite

(184). Il serait facile de construire la projection horizontale de cette courbe en abaissant des perpendiculaires de tous les points où le plan *ac* est rencontré par les génératrices du cylindre; mais cette seconde projection serait inutile pour le but que nous proposons ici. Ce qui est essentiel, c'est d'obtenir la section *ac* dans sa véritable grandeur; pour y parvenir, on la fera tourner jusqu'à ce qu'elle soit rabattue sur le plan de projection; ce qui donnera la courbe M pour la véritable grandeur de la *section droite* du cylindre.

Pour construire cette courbe, il faut déterminer un certain nombre de points assez rapprochés les uns des autres pour que l'on puisse, sans erreur sensible, considérer comme une ligne droite chacun des arcs compris entre deux points consécutifs, et plaçant tous ces petits arcs, à la suite les uns des autres, sur la ligne droite $c'a'c'$, on élèvera, par chacun des points de division de cette ligne, une perpendiculaire égale à la génératrice correspondante de la surface cylindrique que l'on se proposera de développer; puis, faisant passer des courbes par les extrémités de ces perpendiculaires, on aura construit le développement de la surface du cylindre.

365. Pour plus d'ordre, on fera bien de numéroter les génératrices sur les deux projections, ainsi que dans le développement de la surface et sur la courbe M qui représente la section droite rabattue.

366. Pour obtenir sur le développement la position d'un point déterminé mm', on construira la génératrice correspondante sur les deux projections, d'où il sera facile de déterminer sa position sur le développement du cylindre.

367. Si l'on voulait savoir ce que devient dans le développement une courbe quelconque tracée sur la surface du

cylindre, on construirait cette courbe sur les deux projections, d'où, par des parallèles à la droite $c'a'c'$, il serait facile de ramener chacun de ses points sur la génératrice correspondante du développement.

368. Le lecteur a sans doute compris que si l'on a primitivement projeté le cylindre donné sur un plan parallèle à sa direction, c'est afin d'éviter la construction nécessaire pour obtenir la véritable longueur de chaque génératrice (35).

Il peut cependant exister quelques cas, très-rares, il est vrai, où l'on serait forcé de placer un cylindre dans une position inclinée (*fig.* 255, 256). Si l'on voulait alors construire le développement, il faudrait opérer de la manière suivante :

On projetterait (*fig.* 257) le cylindre donné sur un plan auxiliaire A'Z' parallèle à sa direction (175), et cette nouvelle projection remplaçant la projection verticale primitive, on agirait exactement pour le reste comme nous l'avons dit dans l'exemple précédent.

369. Si un point était donné par sa projection verticale m et qu'on voulût déterminer la position de ce point dans le développement du cylindre, on commencerait par construire la projection horizontale m' de ce point, d'où on déduirait la projection m'' sur le plan auxiliaire; puis après s'être assuré que les deux projections m' et m'' sont à la même hauteur, on ramènerait ce point sur la génératrice correspondante du développement par une parallèle à la droite $c'a'c'$.

370. Les constructions que nous venons d'indiquer consistent à regarder le cylindre comme un prisme dont la surface se composerait d'un très-grand nombre de faces (183), hypothèse qui n'est pas tout à fait exacte, mais

qui suffit pour la plus grande partie des applications à l'industrie.

D'ailleurs, lorsque la courbure d'un arc sera très-sensible, on pourra prendre sur cet arc des points plus rapprochés, et, par cette précaution, on parviendra toujours à développer la section droite, de manière à rendre les erreurs tout à fait insensibles.

371. Si la section droite était un cercle, on pourrait mesurer le rayon avec beaucoup de soin, et prendre une longueur égale à $2\pi R$ pour le développement de la circonférence; après quoi on établirait sur cette ligne développée les points où elle doit être coupée par les génératrices du cylindre.

372. Si la nature des applications dont on s'occupe exigeait que l'on développât un grand nombre de cylindres circulaires, on pourrait conserver dans son portefeuille ou sur une planche à dessin un triangle cab, dans lequel les deux côtés ac, ab seraient entre eux comme $1 : 3,14$ ou plus exactement encore comme $1 : 3,1416$.

Pour développer un cylindre qui aurait pour base la circonférence N (*fig.* 258), on fera, sur la *fig.* 254, ac égal à $a''c''$; puis on tracera $c'b'$ parallèle à cb, ce qui donnera ab' pour la longueur de la circonférence N.

Si ensuite on fait as égal à la hauteur du cylindre donné, le rectangle $sab'h$ sera le développement sur lequel on pourra ensuite tracer les génératrices à des distances égales ou inégales, suivant la nature de la question.

Plan parallèle au cylindre.

373. La combinaison la plus simple du cylindre et du plan a lieu lorsque ces deux surfaces sont parallèles. Pour

satisfaire à cette condition, il suffit de faire passer le plan par une droite quelconque parallèle au cylindre.

Supposons, par exemple, que, par un point donné mm' (*fig.* 259, *Pl.* 38), on veuille construire un plan parallèle à un cylindre dont on connaît la direction, on construira la droite $mn, m'n'$ passant par le point donné; puis, tous les plans passant par cette droite seront parallèles au cylindre.

On peut donc distinguer quatre cas :

1° Lorsque la trace np du plan ne rencontrera pas la trace du cylindre, le plan lui-même ne rencontrera pas le cylindre ;

2° Si la trace np' du plan est tangente en a à la trace du cylindre, le plan touchera le cylindre dans toute l'étendue de la génératrice ac ;

3° Si la trace np'' du plan coupait le cylindre en plusieurs points a', a'', a''', le plan couperait le cylindre suivant les génératrices $a'c'$, $a''c''$, $a'''c'''$;

4° Enfin, si la trace np''' du plan touchait la trace du cylindre en a^{IV} et la coupait au point a^{V}, le plan toucherait le cylindre suivant la génératrice $a^{\text{IV}}c^{\text{IV}}$ et le couperait suivant $a^{\text{V}}c^{\text{V}}$.

Il résulte évidemment de là que si la trace d'une surface cylindrique avait beaucoup de sinuosités, un même plan pourrait toucher et couper ce cylindre suivant un grand nombre de génératrices différentes.

Construction du plan tangent au cylindre.

374. *Construire un plan tangent à un cylindre par un point* mm' *appartenant à la surface de ce cylindre* (fig. 260).

Le plan tangent devant contenir toutes les droites qui toucheraient la surface du cylindre au point donné, deux quelconques de ces lignes suffiront toujours pour déterminer sa position ; de sorte qu'il ne reste plus qu'à choisir, parmi toutes les tangentes au point mm', celle dont la construction est la plus simple.

Or la génératrice qui contient le point donné devant être située dans le plan tangent, il ne restera plus qu'à obtenir une seconde ligne qui toucherait le cylindre au même point. On pourrait donc construire par ce point une section quelconque du cylindre (320), et le plan demandé serait déterminé par la tangente à cette courbe et par la génératrice $mb, m'b'$; mais puisque nous savons que le plan tangent au cylindre doit le toucher dans toute l'étendue de la génératrice de tangence, on pourra remplacer la tangente au point mm' par toute autre droite qui toucherait le cylindre en un point quelconque de la génératrice $mb, m'b'$. Ainsi, dans l'exemple qui nous occupe, le plan tangent pourra être déterminé par la génératrice $mb, m'b'$ et par la droite qui touche au point b la trace horizontale du cylindre, et qui, par conséquent, sera la trace horizontale du plan tangent cherché. Quant à la trace verticale, on l'obtiendra facilement en assujettissant ce plan à contenir le point mm' ou tout autre point de la génératrice mb (51, 53).

375. *Normale.* On donne le nom de normale à toute droite perpendiculaire à une surface courbe. D'après cela, si l'on veut construire une normale en un point donné d'un cylindre, on construira d'abord le plan tangent par ce point, et la droite $mn, m'n'$, perpendiculaire au plan tangent (86), sera normale à la surface.

Tout plan qui contiendrait la normale mn, serait un *plan normal* au point m.

376. *Construire un plan tangent à un cylindre par un point pris en dehors de sa surface.*

Soient (*fig.* 261) le cylindre A, A′ et le point *m*, *m*′. On construira parallèlement aux génératrices du cylindre la droite (*mb*, *m*′*b*′), et par le point (*b*) où cette ligne rencontrera le plan horizontal, on fera passer deux tangentes à la trace horizontale du cylindre; ces deux lignes seront les traces horizontales de deux plans qui satisferont à la question. En effet, ces plans devant contenir la ligne (*mb*, *m*′*b*′) parallèle au cylindre, contiendront aussi les génératrices passant par les points de tangence *c* et *d*, et toucheront le cylindre suivant la longueur de ces génératrices.

377. *Construire un plan tangent à un cylindre parallèlement à une ligne donnée.*

Soient (*fig.* 262, 263) A, A′ le cylindre, *a*, *a*′ la droite donnée. En un point quelconque (*m*, *m*′) de cette droite, on construira une seconde ligne *bb*′ parallèle aux génératrices du cylindre. Ces deux lignes détermineront un plan *p*. En supposant que ce plan se meut parallèlement à lui-même, il viendra prendre la position des plans *p*′ ou *p*″. Dans l'une ou dans l'autre position, il sera tangent au cylindre, car le plan *p* contenant la ligne (*b*, *b*′) parallèle au cylindre, les plans *p*′ et *p*″ parallèles au plan *p* contiendront tout entières les génératrices passant par les points de tangence *c*, *d*, et toucheront le cylindre suivant ces génératrices.

378. *Trouver l'intersection d'une ligne droite avec la surface d'un cylindre.*

Soit (*a*, *a*′) (*fig.* 264) la droite donnée. On fera passer par cette droite un plan *p* parallèle au cylindre (83); ce plan coupera la surface suivant deux génératrices (*b*, *b*) dont les intersections avec la ligne donnée *a*, *a*′, seront les points cherchés (*m*, *m*′) : l'un est celui par lequel la droite entre dans le cylindre, et l'autre celui par lequel elle en sort.

La portion *mm*, *m*′*m*′ de la ligne donnée est dans l'intérieur du cylindre.

Si la trace horizontale *ps* du plan auxiliaire ne rencontrait pas la trace du cylindre, on en conclurait que la ligne donnée ne rencontre pas le cylindre; et si la trace *ps* touchait la trace du cylindre, cela indiquerait que la ligne donnée est tangente au cylindre

Le point de tangence serait déterminé par l'intersection de la ligne donnée aa' avec la génératrice, suivant laquelle le plan toucherait le cylindre.

Section du cylindre par un plan oblique.

379. Nous avons eu l'occasion de construire (364) la section du cylindre par un plan perpendiculaire aux génératrices et au plan de projection. Nous avions précédemment (355, 356) construit la section par les plans de projection ou par des plans qui leur étaient parallèles.

Voyons actuellement ce qu'il faudrait faire pour construire la section d'un cylindre quelconque par un plan oblique.

380. Nous pouvons admettre dès à présent, comme principe général, que, pour obtenir la courbe suivant laquelle une surface quelconque est coupée par un plan, il suffit de construire des points suivant lesquels ce plan coupe un système de lignes tracées sur la surface, et qu'il ne restera plus, dans chaque cas particulier, qu'à choisir le système de lignes le plus simple. Ainsi, lorsqu'il s'est agi de construire l'intersection d'un polyèdre par un plan, nous avons dû chercher les points suivant lesquels ce plan coupait les arêtes du polyèdre. Nous construirons ici les points suivant lesquels le plan donné coupe les génératrices du cylindre; de sorte que la question sera réduite à recommencer plusieurs fois les opérations nécessaires pour déterminer l'intersection d'une ligne droite par un plan (70).

Ainsi (*fig*. 266, *Pl.* 39), pour construire le point où le plan oblique $p'pv$ est percé par la génératrice 1—1 du cylindre donné, on emploiera comme surface auxiliaire le plan $h'lq$ qui contient la génératrice dont il s'agit. Ce plan coupera le plan donné, suivant une droite hq, dont l'intersection avec la génératrice 1—1 déterminera le point cherché 1'.

En recommençant cette opération, il sera facile d'obtenir autant de points que l'on voudra.

381. Pour éviter la confusion, il ne faut pas, dès le commencement, chercher des points trop près les uns des autres; il vaut mieux déterminer des points intermédiaires quand on aura reconnu quelles sont les parties où la courbure de la ligne cherchée devient plus sensible.

382. On devra remarquer aussi que, dans la construction des courbes, les points sont toujours mieux déterminés par des tangentes que par des sécantes. En effet, si un point est obtenu par l'intersection de deux lignes ab, ed (*fig*. 270), tout le soin que l'on aura pu apporter à la construction de ces lignes ajoutera certainement à l'exactitude avec laquelle la position de ce point sera déterminée; mais cela ne donnera aucune idée de la direction de la courbe en deçà et au delà du point dont il s'agit; tandis que si l'on connaît une tangente, et que le point où cette ligne touche la courbe cherchée soit déterminé avec exactitude, on en pourra conclure la direction de cette courbe dans le voisinage du point de tangence. Enfin, il est évident que, par la construction d'un certain nombre de tangentes (*fig*. 271), on pourra déterminer d'avance, avec une exactitude presque absolue, les changements et variations de courbure de la ligne cherchée.

383. On devra donc, dans l'exemple qui nous occupe (*fig*. 266), commencer par déterminer les points qui appar-

tiennent aux génératrices 2—2, 4—4, 1—1, 3—3, les deux premiers étant ceux suivant lesquels la projection horizontale de la courbe touche les limites de la projection horizontale du cylindre, et les derniers appartenant aux limites de la projection verticale.

384. L'exactitude que l'on obtiendra dans la position de ces différents points dépendra en grande partie du soin avec lequel on aura déterminé les pieds des génératrices qui les contiennent.

C'est pourquoi il sera très-essentiel de vérifier d'abord les points de tangence 1, 2, 3, 4.

385. *Tangente à la courbe de section.* On se rappellera que la tangente en un point quelconque de la courbe $1'—2'—3'—4'$ doit être située dans le plan tangent au cylindre (320); elle sera donc l'intersection du plan tangent et du plan coupant, d'où résulte la construction suivante.

On tracera : 1° la droite a—5, qui est la trace horizontale du plan tangent au point $5'$ (374);

2° La droite a—$5'$, intersection du plan tangent a—5 avec le plan coupant $p'pv$, ce qui donne la projection de la tangence au point $5'$.

Il est évident qu'un certain nombre de tangentes construites de cette manière avant la courbe permettront de la tracer avec une très-grande précision.

386. Pour obtenir dans sa véritable grandeur la courbe suivant laquelle le cylindre pénètre dans le plan donné, on rabattra ce plan en le faisant tourner autour de sa trace horizontale ou de toute autre droite parallèle au plan de projection.

Dans ce mouvement, chaque point devra parcourir un arc de cercle perpendiculaire à la charnière du rabattement; il ne restera donc plus qu'à déterminer la distance de chacun des points de la courbe à cette droite (113). Les lignes d'opération n'ont été conservées que pour le point $4'$ qui devient $4''$ dans le rabattement.

387. *Section du cylindre*, 2^e^ *solution*. Il est utile, comme étude et comme exercice, de construire directement, comme nous venons de le faire, la courbe de section d'un cylindre quelconque par un plan oblique ; mais, dans les applications, on préfère toujours avoir recours à des projections auxiliaires qui, en simplifiant le travail graphique, augmentent l'exactitude des résultats.

Ainsi, par exemple, les données étant les mêmes, on prendra un plan auxiliaire de projection A'Z' vertical et perpendiculaire à la trace horizontale du plan donné et par conséquent perpendiculaire à ce plan.

Le pied d'une génératrice quelconque 6—6 se projettera par le point $6'$ sur la ligne A'Z'.

On choisira sur cette génératrice un point quelconque mm', dont la projection m'' s'obtiendra en faisant $m''o'$ égal à $m'o$. Enfin, la droite $6'm''$ sera la projection de la génératrice 6—6 sur le plan auxiliaire de projection A'Z'.

Cette première droite étant obtenue, le parallélisme des génératrices permettra de tracer autant de ces lignes que l'on voudra sur la projection auxiliaire.

Il sera utile surtout de construire les limites déterminées par les deux plans tangents perpendiculaires au plan de projection A'Z'.

La troisième trace $\nu n''$ du plan $p'p\nu$ s'obtiendra en prenant sur la première trace verticale un point quelconque n', que l'on projettera en u, et de là en n'', en faisant $u'n''$ (*fig.* 269) égal à un' (*fig.* 266).

Il résulte de cette nouvelle disposition d'épure, que le plan donné étant perpendiculaire au nouveau plan vertical A'Z', la projection de la courbe de section sur ce plan se réduit à une ligne droite zx, et qu'il ne restera plus pour déterminer la projection horizontale de cette courbe, qu'à tracer des perpendiculaires à la droite A'Z', par les points où la trace vn'' coupe les projections de génératrices du cylindre sur le plan de la *fig.* 269.

Le point x, le plus haut, et le point z, le plus bas de la courbe, seront déterminés sur les projections primitives par les droites xx', $x'x''$, zz', $z'z''$.

On pourra vérifier la position de ces points :

1° En exprimant que chacun d'eux est situé dans le plan $p'pv$ (41);

2° En s'assurant qu'ils sont à la même hauteur sur les deux projections verticales (*fig.* 266 et 269).

388. Un autre avantage résulte encore de la disposition d'épure que nous venons d'adopter : c'est que, pour construire la courbe de section C dans sa véritable grandeur, il n'y aura plus à chercher la distance des différents points de cette courbe à la trace du point donné; puisque les droites qui déterminent ces distances seront parallèles au plan de la nouvelle projection A'Z', et par conséquent projetées sur ce plan dans leur véritable grandeur. On pourra aussi projeter sur ce plan les arcs de cercle parcourus par chacun des points de la section, lorsque l'on fait tourner cette courbe autour de la trace pv, pour la rabattre sur le plan horizontal de projection.

389. Nous avons obtenu la courbe de section C dans sa véritable grandeur, ce qui nous permettra de la tracer sur le plan donné; et nous pourrions, par conséquent, la découper, s'il s'agissait de faire pénétrer le cylindre à travers une feuille mince de métal; mais cela ne suffit pas. Il serait utile encore, pour donner plus de précision à l'assemblage des deux surfaces, de tracer la courbe de pénétration sur la surface du cylindre. Le moyen le plus simple

pour obtenir ce résultat sera de développer le cylindre, en opérant comme nous l'avons fait au n° 363.

Ainsi, la droite $A''Z''$ est la trace d'un plan auxiliaire de projection vertical et parallèle au cylindre; *sd* est le plan de la section droite qui est rabattue en D dans sa véritable grandeur. Enfin, la *fig.* 268 est le développement de la portion de cylindre comprise entre la section droite et le plan horizontal de projection.

390. Si l'on voulait obtenir la tangente $a'''5^{\text{IV}}$ dans le développement du cylindre (*fig.* 268), on remarquerait que cette ligne appartient à un triangle $a'''5'''5^{\text{IV}}$, dont les trois côtés sont connus.

En effet, a—5, trace horizontale du plan tangent, est déterminée dans sa véritable grandeur; la génératrice de tangence 5—$5'$ étant parallèle au plan de la *fig.* 272, est égale à sa projection 5^{VI}—5^{VII} sur ce plan. Enfin, la tangente est rabattue en a—$5''$, suivant sa longueur réelle; de sorte que si l'on fait, sur la *fig.* 268, a'''—$5'''$ égal à la trace horizontale a—5 du plan tangent, $5'''$—5^{IV} égal à la génératrice de tangence 5^{VI}—5^{VII} (*fig.* 272), enfin a'''—5^{IV} égal à a—$5''$, le triangle $a'''5'''5^{\text{IV}}$ sera égal à celui dont on a les deux projections (*fig.* 266).

Il est évident que, si l'on a bien opéré, la droite a'''—$5'''$ doit être tangente à la courbe $4'''5'''4'''$, qui représente le développement de la trace horizontale du cylindre, et la droite a'''—5^{IV} doit être tangente à la courbe $4^{\text{V}}5^{\text{IV}}4^{\text{V}}$, développement de la section du cylindre par le plan oblique $p'pv$.

391. La *fig.* 273 représente les constructions nécessaires pour obtenir la courbe d'intersection d'un cylindre par un plan parallèle à la ligne AZ. Les opérations seront simplifiées par l'emploi d'un plan auxiliaire de projection *pq*, sur lequel la courbe cherchée se projettera par une ligne droite *zx*.

392. Sur la *fig.* 267, le plan coupant étant perpendiculaire au plan vertical de projection, la droite zx est la projection verticale de la courbe de section dont on obtiendra la projection horizontale en abaissant des perpendiculaires à la ligne AZ par tous les points où la droite zx coupe les projections verticales des génératrices du cylindre.

393. Enfin, si le cylindre proposé était perpendiculaire à l'un des plans de projection (*fig.* 265), il serait alors l'une des deux surfaces projetantes de la courbe cherchée; sa trace serait l'une des deux projections de cette courbe, et la seconde projection se construirait en opérant comme nous l'avons dit au n° 41.

394. Il peut être utile quelquefois d'obtenir la section droite d'un cylindre sans construire le développement de cette surface, on peut alors se dispenser d'employer une projection auxiliaire parallèle aux génératrices (368).

En effet, faisons tourner le plan de section droite msq (*fig.* 274) autour de sa trace horizontale sq. La trace verticale ms viendra se placer en sm''.

On pourra déterminer le point m'' en cherchant sa distance au point o. Mais il sera plus simple de remarquer que le triangle projeté sur le plan horizontal par som' est rectangle au point o, et puisque l'on connaît dans leur véritable grandeur :

1° Le côté os de l'angle droit;

2° L'hypoténuse sm faisant partie de la trace verticale du plan donné.

On fera tourner cette hypoténuse autour du point s jusqu'à ce que le point m soit venu se placer en m'' sur la trace $m'm''$ du plan vertical dans lequel se meut le point m lorsque l'on fait tourner le plan de la section droite autour de sa trace horizontale sq.

Le plan msq étant rabattu en qsm'', supposons que nous voulons construire le point où ce plan est percé par la génératrice 1—1 : nous remarquerons d'abord que cette droite est l'intersection des deux plans projetants $p'1q'$, $p''1'q''$; or, le premier de ces plans étant perpendiculaire à la trace horizontale sq, coupe le plan de section droite suivant une ligne $v1''$ qui, dans le rabattement se confond avec vq'. Ensuite, le plan $p''1'p''$ perpendiculaire à la trace ms du plan donné, coupe ce plan suivant une droite qui, dans le rabattement, devient $u'1''$.

De sorte que le point $1''$ suivant lequel se coupent les deux droites $v1''$, $u'1''$ doit être l'intersection du plan qsm par la génératrice 1—1. La même opération étant recommencée pour toutes les génératrices du cylindre, on aura la section droite rabattue dans sa véritable grandeur.

395. *Section du cylindre*, 3^e^ *solution*. Nous avons vu :

1° Que la recherche de la ligne d'intersection d'un cylindre par un plan serait simplifiée par l'emploi d'un plan auxiliaire de projection perpendiculaire au plan coupant, et sur lequel, par conséquent, la courbe cherchée se projetterait par une ligne droite.

2° Que cette disposition d'épure facilite le rabattement de la courbe de section, puisqu'elle donne directement les distances de chacun de ses points à la charnière, et que, de plus, elle permet de projeter les cercles parcourus par ces points, ce qui contribue beaucoup à rendre l'épure plus exacte et plus facile à comprendre.

3° Enfin, nous avions eu précédemment l'occasion de reconnaître que, pour faire le développement d'un cylindre, il était utile de le projeter sur un plan parallèle à sa direction (368).

Une grande partie des opérations de l'épure précédente seraient évités si l'on prenait, dès l'origine (*fig.* 275, *Pl.* 40), un des deux plans de projection perpendiculaire au cylindre A, et le second plan de projection perpendiculaire au plan coupant $pc'p$.

Par suite de cette disposition, le plan donné et le cylindre deviendront les deux surfaces projetantes de la courbe demandée, qui aura pour l'une de ses projections la droite aa, et pour deuxième projection la courbe A'.

En faisant tourner le plan p autour de sa trace horizontale, on obtiendra la courbe A'' pour la véritable grandeur de la section.

Enfin, la courbe A' étant la section droite du cylindre, et les génératrices étant projetées sur le plan vertical dans leur véritable grandeur, il sera facile de construire le développement A''', dans lequel la courbe $a'm^{\mathrm{v}}a'$ représente le développement de la section oblique aa.

396. La tangente $c''m^{\mathrm{v}}$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont : 1° $m^{\mathrm{iv}}m^{\mathrm{v}}$ égal à $m'm''$, génératrice de tangence; 2° $c''m^{\mathrm{iv}}$ égal à cm, trace du plan tangent et projection horizontale de la tangente.

La *fig.* A''' étant enveloppée sur le cylindre A (*fig.* 280), il sera facile de tracer la courbe de section.

397. On aurait tort de considérer la solution précédente comme moins générale que les questions du n° 379. En effet, les plans de projection ne sont autre chose que des conceptions géométriques adoptées par convention, pour faciliter la solution des problèmes. Le choix de ces moyens doit donc rester entièrement à la disposition de celui qui opère, et pourvu qu'il ne change rien aux données ni à leur position relative, la généralité de la question n'en sera pas moins complète.

J'insiste particulièrement sur cette remarque, parce que c'est surtout dans le choix des moyens d'opération que consiste toute l'habileté du praticien.

Il faut donc s'appliquer à reconnaître, dans chaque question générale, quelle doit être la disposition d'épure la plus commode, et, dans chaque cas particulier, quelles sont les relations qui, résultant de la nature des données, peuvent contribuer à simplifier le travail ou augmenter l'exactitude du résultat. Ainsi, par exemple, si le cylindre proposé dans l'exemple précédent avait pour directrice une ellipse, on pourrait construire un parallélogramme circonscrit à cette courbe; les côtés de ce parallélogramme seraient les traces de quatre plans tangents parallèles deux à deux, et les intersections de ces plans par le plan $pc'p$ donneraient le parallélogramme circonscrit à la courbe de section rabattue. Les droites qui joignent les milieux des côtés opposés du parallélogramme sont, dans ce cas, les diamètres conjugués de la courbe de section.

Il peut cependant arriver quelquefois que l'on soit obligé d'opérer sur un cylindre incliné dans l'espace; alors on emploiera des plans auxiliaires de projection, comme nous l'avons fait aux numéros 387, 389.

398. *Transformations diverses de la courbe de section.* Si on suppose qu'un cylindre A A' (*fig.* 279 et 276) soit coupé par un plan pq, et que l'on fasse tourner ce plan autour d'une ligne vu (*fig.* 276), la courbe de section augmentera de longueur à mesure que le plan se rapprochera de la direction du cylindre, et finira par se transformer en deux droites parallèles $m'n'$. Parmi les différentes formes affectées par cette courbe, il faut distinguer surtout :

La section droite,

La section oblique,

La section parallèle.

On remarquera que, par suite de ces variations de courbure, la ligne de section se rapproche toujours de la tangente $m'n'$, avec laquelle elle finit par coïncider lorsque le plan devient parallèle au cylindre.

Il résulte de là que toute génératrice d'un cylindre peut être, à volonté, considérée comme une section dont le rayon de courbure serait infini, ou comme une tangente à cette même section.

Ainsi, les deux droites $m'n'$ seront deux tangentes à la section du cylindre par le plan mn (*fig.* 279). Nous rappellerons que si l'on faisait tourner ce même plan autour de l'une des deux droites $m'n'$, il viendrait un moment où ces deux *tangentes ou génératrices de section* se réuniraient en une seule pour former une *génératrice de tangence* (316).

399. Si nous supposons que la section droite du cylindre proposé soit une ellipse ayant pour ses axes les deux droites aa (*fig.* 276) et cc (*fig.* 279), et que l'on fasse tourner le plan coupant autour de la ligne vu, on obtiendra comme variétés principales de la courbe de section :

1° La section droite aa, cc;

2° La section ac' (*fig.* 279) qui est un cercle, lorsque le rayon horizontal ac' est égal au rayon vertical ac (*fig.* 276);

3° La section elliptique ac'' qui se projettera par un cercle, lorsque cc'' projection verticale de ac'' sera égal au rayon vertical ac;

4° La section oblique ac''', dont la longueur dépendra de l'obliquité plus ou moins grande du plan coupant;

5° Les deux droites parallèles $m'n'$, $m'n'$, provenant de la section par le plan parallèle au cylindre;

6° Enfin, la ligne de tangence, qui résulterait de la réunion des génératrices de section, si on faisait tourner le plan coupant autour de l'une d'elles.

La comparaison de ces diverses espèces de lignes donne lieu à des simplifications remarquables, suivant les différents problèmes à la solution desquels elles doivent concourir.

400. Supposons, par exemple, que, pour résoudre une question proposée, il soit nécessaire de construire (*fig.* 278) un grand nombre de sections d'un même cylindre par des plans horizontaux, on se rappellera que toutes ces courbes doivent être égales et parallèles à la trace du cylindre. Or, dans le cas où cette trace serait une ellipse, on construira successivement;

1° La droite $cc'c''$, qui doit contenir les centres de toutes les sections demandées;

2° Tous les axes de ces courbes qui doivent être parallèles à ceux de la trace;

3° Les droites aa'', passant par les extrémités des grands axes, détermineront ces points;

4° Les droites bb'' détermineront les extrémités des petits axes;

5° Enfin, les deux droites mm'', nn'' détermineront les points où les courbes cherchées sont touchées par les deux génératrices qui forment les limites de la projection horizontale du cylindre.

401. On pourrait encore dessiner l'une des courbes avec beaucoup de soin sur une carte que l'on découperait, et qui, reportée à toutes les places, servirait à guider la pointe du crayon.

Il est évident que cette manière d'opérer serait surtout commode dans le cas où l'on aurait à tracer un grand nombre de fois une courbe très-compliquée, surtout lorsque l'on ne peut déduire de la définition de cette courbe aucun moyen d'abréger le travail ou de vérifier le résultat.

402. Aux abréviations provenant de la nature des

courbes qui concourent à la solution des problèmes, il faut ajouter celles plus importantes encore qui résultent du choix des plans de projection.

Supposons, par exemple, que la question proposée donne lieu à la construction d'un grand nombre d'ellipses égales ou semblables entre elles, il est évident que le travail serait considérablement diminué, si l'on pouvait trouver un plan de projection sur lequel chacune de ces ellipses se projetterait par un cercle.

Or, la détermination de ce plan sera toujours facile. En effet,

Supposons que l'on ait obtenu (*fig.* 277) l'une de ces ellipses $avcu$, ou simplement les deux axes ac, vu, on construira d'abord une projection auxiliaire $a'c'$ sur un plan parallèle au grand axe et perpendiculaire au petit axe vu; puis, après avoir décrit une demi-circonférence sur le diamètre $a'c'$, on fera le triangle rectangle $a'c''c'$ de manière que le côté $a'c''$ soit égal au petit axe vu de l'ellipse proposée. Cela étant fait, il est évident que sur tout plan, tel que pmp', qnq', perpendiculaire à la corde $c'c''$, et par conséquent parallèle à $a'c''$, l'ellipse se projettera par un cercle, puisque la droite $a'c''$, égale au petit axe de l'ellipse, sera la projection du grand axe $a'c'$.

Si on rabat le nouveau plan de projection pmp', en le faisant tourner autour de sa trace $p'm$, la projection de l'ellipse deviendra $a'''v'''c'''u'''$, et si on rabat autour de qn, on aura $a^{\text{IV}}v^{\text{IV}}c^{\text{IV}}n^{\text{IV}}$.

Les quarrés circonscrits à ces deux cercles sont les projections du rectangle circonscrit à l'ellipse donnée.

On obtiendrait le même résultat en projetant l'ellipse sur un plan quelconque perpendiculaire à la corde $a'c^{\text{V}}$.

403. La direction du nouveau plan de projection pnp'

étant déterminée, supposons que l'on veuille projeter une seconde ellipse égale et parallèle à la première, et qui aurait pour centre le point x.

On construira successivement les points x', x'', x''' ou x^{IV}, suivant que l'on aura choisi le plan pmp' ou qnq'.

On construira ensuite la circonférence formant la projection de l'ellipse donnée.

404. Pour construire une ellipse semblable et parallèle aux précédentes, on projetterait le centre et l'extrémité de l'un des axes pour chacune de ces courbes, ce qui suffirait pour déterminer le centre et le rayon de la circonférence demandée.

Cylindre circulaire.

405. Dans les articles qui précèdent, nous avons principalement cherché à mettre en évidence les propriétés communes à toutes les surfaces cylindriques. Cela pourrait suffire, s'il ne s'agissait que d'exposer la théorie générale de ce genre de surfaces; mais je m'éloignerais du but que je me suis proposé dans cet ouvrage, si je négligeais d'appeler l'attention du lecteur sur les cas particuliers que l'on rencontre le plus souvent dans les applications.

Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de construire les projections d'un cylindre circulaire terminé, comme le sont presque tous les cylindres employés dans l'industrie, par deux bases perpendiculaires à sa direction, les propriétés du cercle donneraient lieu à des simplifications qu'il serait utile de ne pas négliger.

406. Nous reconnaîtrons d'abord que lorsqu'un cercle amc (*fig.* 284, *Pl.* 41) est incliné d'une manière quelconque, par rapport à un plan p, la projection sur ce plan est toujours une ellipse.

En effet, on sait (*Géom. anal.*) que lorsqu'un cercle et une ellipse ont un diamètre commun ac, *les ordonnées de l'ellipse sont aux ordonnées correspondantes du cercle comme le deuxième axe de l'ellipse est au rayon du cercle*. Et réciproquement, *lorsque la relation que nous venons de citer a lieu, la courbe est une ellipse*. Or, c'est précisément ce qui arrive lorsqu'un cercle est projeté obliquement; car les triangles rectangles mvn, $m'v'n'$ étant semblables, on doit avoir la proportion $mv : vn :: m'v' : v'n'$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi la courbe anc est une ellipse.

407. On doit encore remarquer que si l'on projetait tous les diamètres du cercle, les droites que l'on obtiendrait pour ces projections seraient d'autant plus courtes que les diamètres projetés s'approcheraient davantage de la perpendiculaire au plan; de sorte que si le point v est le centre de cercle amc, la droite vn, projection de vm, serait le rayon le plus court de l'ellipse anc, tandis qu'au contraire, le diamètre ac, parallèle au plan de projection ou situé dans ce plan, se projetterait dans sa véritable grandeur, et serait par conséquent le grand axe de l'ellipse dont vn serait le petit axe.

408. Supposons actuellement que l'on veuille projeter (*fig.* 285) un cylindre circulaire incliné par rapport aux deux plans de projection; que les droites ac, $a'c'$ soient les deux projections de l'axe de ce cylindre, et que le rayon de sa base soit connu.

Le moyen le plus simple sera de construire (*fig.* 286) une projection auxiliaire sur un plan vertical A'Z' parallèle à l'axe et par conséquent à la direction du cylindre demandé.

On f ra $s'a''$ égal à sa' et $z'c''$ égal à zc', de sorte que la droite $a''c''$ sera la projection de l'axe ac, $a'c'$ sur le nouveau plan de projection A' Z'; le rayon $m''c''$ étant donné par la question, les deux droites $m''x''$, $m'''x'''$, perpendiculaires sur $a''c''$ seront les projections des deux bases, et le rectangle $m''x''x'''m'''$ sera la projection du cylindre sur le plan vertical A'Z'.

409. Quant à la projection horizontale, elle sera limitée par les deux droites hk, $h'k'$ parallèles à la ligne A'Z', et dont l'écartement hh' sera déterminé par le diamètre du cylindre.

Enfin, les deux bases $m''x''$, $m'''x'''$ auront pour projections les deux ellipses hh', kk', dont les grands axes sont égaux au diamètre du cylindre, et qui ont pour petits axes les deux droites mx, $m^{\text{IV}}x^{\text{IV}}$, projections horizontales des diamètres $m''x''$, $m'''x'''$.

410. La courbe mn, trace horizontale du cylindre, est une ellipse; car si on prend les droites hh', bb' pour axe des abscisses des deux courbes mx, mn, il sera facile de démontrer que les ordonnées correspondantes à une abscisse commune seront toujours entre elles comme les droites cx, vn, qui alors forment les seconds axes de ces courbes.

Il est utile de reconnaître ainsi la nature des courbes que l'on doit tracer, parce qu'alors on peut déduire de leur définition géométrique des moyens plus simples de les construire.

411. On pourrait prendre pour directrice la base ou la trace du cylindre dont il s'agit, mais il vaudra mieux employer pour cet usage le cercle mv, que l'on peut considérer comme représentant la base $m''x''$ que l'on aurait fait tourner autour de l'horizontale mm'' jusqu'à ce qu'elle soit rabattue dans sa véritable grandeur sur le plan horizontal de projection.

412. Il arrivera souvent ainsi, par la suite, lorsqu'un

cercle fera partie des lignes nécessaires à la solution d'un problème, que l'on préférera le rabattre, afin d'éviter la construction de l'ellipse qui résulterait de sa projection.

413. Enfin, si par le point v on même la droite vv'' perpendiculaire à $A' Z'$, on déterminera sur le cylindre une section oblique $m''v''$ qui aurait pour projection horizontale la circonférence mv. Il est évident que cette courbe sera la directrice la plus simple, puisqu'elle dispensera de faire le rabattement de la base ou la construction de la trace.

Ainsi on pourra, selon les circonstances, prendre pour directrice du cylindre la base mx, la trace mn, la circonférence mv, qui est la base rabattue sur le plan horizontal de projection, ou enfin la section oblique $m''v''$, qui a pour projection horizontale la circonférence mv.

C'est principalement lorsque le cylindre sera parallèle à l'un des plans de projection que l'usage de cette dernière directrice sera très-commode.

414. Pour construire la projection verticale du cylindre (*fig.* 282), on tracera la droite $a'a'''$ perpendiculaire sur $a'c'$, on fera $a'\ a'''$ égal à sa ; ce qui donnera la ligne da''', qui représente l'axe du cylindre rabattu sur le plan vertical de projection, on fera rt égal au diamètre du cylindre et perpendiculaire sur da'''.

Cette construction auxiliaire pourra être effacée dès qu'elle aura servi à déterminer les axes de l'ellipse $r'\ t'$, qui est la projection verticale de l'une des bases du cylindre.

Les mêmes axes serviront pour construire la projection verticale $r''t''$ de la base inférieure.

Il est essentiel de remarquer que les ellipses $r't'$, $r''t''$ (*fig.* 282) ne sont pas semblables aux deux ellipses mx, $m^{\text{IV}}x^{\text{IV}}$ de la fig. 285.

415. On opérera pour le petit cylindre comme pour le grand. Les bases de ces deux cylindres étant parallèles, leurs projections sur un même plan doivent être semblables. Ainsi lorsque l'épaisseur du petit cylindre sera déterminée, il suffira de construire la corde ie parallèle à hx^{IV}, ce qui donnera le petit axe de l'ellipse ig.

Cette remarque pourra servir dans les dessins de machines où l'on a souvent à construire les projections obliques d'un grand nombre de cylindres circulaires et parallèles entre eux. Cela dispensera de faire une projection auxiliaire pour chaque cylindre.

416. Pour exprimer qu'un point pp' appartient à la surface du cylindre, on construira les projections de la génératrice qui passe par ce point.

417. La droite $q\alpha$ est la trace horizontale d'un plan qui toucherait le cylindre dans toute la longueur de la génératrice $\alpha''\alpha'''$.

$q\alpha''$ est une tangente à la base.

Enfin, la droite $q\alpha'$ peut être indifféremment considérée comme une tangente à la base $m''x''$ rabattue en $m\nu$ ou comme une tangente à la section oblique $m''\nu''$.

418. La *fig.* 283 contient les deux projections d'un cylindre circulaire parallèle au plan horizontal; on prendra pour directrice la section par le plan vertical pq, dont on déterminera la direction en abaissant les deux perpendiculaires aa', cc''.

On pourrait prendre également pour directrice la section par le plan vertical $p'q'$; mais la rencontre de ce plan par les génératrices du cylindre se ferait suivant des angles trop aigus.

419 Enfin, il est évident que lorsqu'on sera le maître de choisir les plans de projection, le plus simple sera de

placer le cylindre perpendiculairement à l'un d'eux (*fig.* 281).

Intersection des cylindres.

420. *Trouver la courbe provenant de l'intersection de deux cylindres.*

Il est évident que l'on résoudrait la question proposée, en déterminant les points où la surface de l'un des cylindres donnés serait rencontrée par chacune des génératrices de l'autre cylindre ; de sorte que tout se réduirait à recommencer plusieurs fois de suite les opérations de l'épure du n° 378. Mais il sera, en général, plus simple d'opérer de la manière suivante :

421. 1re *solution*. Soient (*fig.* 289, *Pl.* 42) A′ et B′ les deux cylindres dont on demande l'intersection. Par un point quelconque (m, m'), on construira deux droites parallèles aux génératrices des cylindres donnés ; ces deux droites détermineront (373) un plan p qui coupera le cylindre AA′ suivant deux de ses génératrices désignées sur l'épure par (a,a). Le même plan coupera le cylindre BB′ suivant deux génératrices (b, b). Or, ces quatre lignes étant dans un même plan, donneront par leurs intersections quatre points (u, u, u, u) appartenant à la courbe cherchée.

On obtiendra les projections verticales de ces points, en projetant les génératrices qui les contiennent.

Un second plan parallèle au plan p, et par conséquent parallèle aux deux cylindres, déterminera quatre nouveaux points.

Un troisième plan en donera quatre autres, et ainsi de suite.

On continuera ces opérations jusqu'à ce que l'on ait obtenu un nombre de points suffisant pour que l'on puisse tracer la courbe avec beaucoup d'exactitude.

422. Il ne faut pas établir de suite sur l'épure un trop grand nombre de plans coupants. On fera bien, au contraire, de commencer par la recherche de quelques points essentiels, de ceux surtout qui, par leur position, pourraient donner une première idée de la forme de la courbe. On chercherait ensuite des points intermédiaires dans les parties où la courbure deviendrait plus sensible. On devra surtout ne pas négliger les points où la courbe cherchée doit toucher les génératrices principales.

Pour avoir les points qui appartiennent aux limites des projections verticales et horizontales des deux cylindres, on emploiera les plans coupants dont les traces passent par les pieds des génératrices qui forment ces limites.

Les plans tangents p', p'', parallèles aux deux cylindres, détermineront aussi des points très-importants.

Ainsi, par exemple, le plan p', qui touche en b' la trace horizontale du cylindre B, déterminera les points u', u' suivant lesquels la courbe cherchée est touchée par les génératrices a', a' du cylindre A.

De même, le plan p'', qui touche en a'' la trace horizontale du cylindre A, déterminera les points u'', u'' suivant lesquels la courbe demandée est touchée par les génératrices b'', b'' du cylindre B.

423. Il n'est pas nécessaire de construire de plan coupant hors de l'espace compris entre les plans p' et p'' dont les traces touchent celles des cylindres donnés, car il est évident que tout plan hors de cet espace couperait l'un des cylindres sans toucher ni couper l'autre, et par conséquent ne contiendrait pas de points communs. Lorsque la courbe sera entièrement obtenue, on regardera comme vu, tout point provenant de l'intersection de deux génératrices vues (353). Tous les autres points sont cachés, et

l'on tracera en ligne pleine toute la partie de la courbe qui contient les points vus, et le reste en ligne ponctuée.

424. *Tangente à la courbe d'intersection.* Lorsqu'il y aura incertitude sur la direction de quelque partie de la courbe, on la fera cesser en construisant une tangente. Pour y parvenir, on remarquera que cette ligne devant être tangente aux deux cylindres, il faut, par conséquent, qu'elle soit située en même temps dans les plans tangents à ces deux surfaces, d'où il résulte qu'elle doit être l'intersection de ces plans; ainsi, par exemple, la droite $a'''v$ est la trace horizontale du plan qui touche le cylindre A dans toute l'étendue de la génératrice $a'''u$.

Ensuite, vb''' est la trace du plan vertical qui touche le cylindre B suivant la génératrice $b'''u$.

Le point v, intersection de ces deux traces, fera donc partie de la tangente dont la projection verticale sera $v'u$.

L'un des plans tangents étant vertical, la projection horizontale de la tangente doit se confondre avec la trace $b'''v$ de ce plan.

Il est évident que si les deux plans tangents étaient obliques, cela ne changerait rien à la manière d'opérer.

425. *Développements.* Si on veut obtenir la courbe d'intersection dans les surfaces des deux cylindres, il faudra projeter chacun d'eux sur un plan parallèle à ses génératrices (*fig.* 295 et 296), puis on construira la section droite et les développements A^{IV} et B^{IV}, en opérant comme nous l'avons fait au n° 368.

Il sera très-essentiel de s'assurer que tous les points correspondants des deux cylindres et de la courbe d'intersection sont à la même hauteur sur les trois projections verticales $A'B'$, A'',B''.

Pour construire la tangente vu, $v'u'$, sur le développement du cylindre A, on construira le triangle qui a pour côté :

1° $a'''v$ trace horizontale de l'un des deux plans tangents.

2° $a'''u$ génératrice de tangence projetée (*fig.* 296) dans sa véritable longueur.

3° La tangente vu, dont la longueur $v''u$ est donnée sur la projection B''.

On raisonnera de la même manière pour construire la tangente sur le développement du cylindre B.

Si la tangente n'était pas parallèle à l'un des plans de projection, on chercherait sa longueur par la construction du n° 35.

426. Quelquefois l'un des cylindres pénètre dans l'autre, et s'y trouve entièrement engagé ; alors l'intersection se compose de deux courbes séparées, l'une d'entrée et l'autre de sortie, comme on le voit (*fig.* 290) ; dans ce cas, on dit qu'il y a *pénétration* (192). Mais si l'un des deux cylindres n'était pas tout à fait engagé dans l'autre, l'intersection se nommerait *arrachement*, *fig.* 288.

Dans la question que nous venons de résoudre, il y avait arrachement.

427. Il est facile de prévoir, avant la construction de l'épure, quand il doit y avoir arrachement ou pénétration.

Ainsi, dans le cas représenté (*fig.* 291), il y aura pénétration. En effet, le cylindre B étant compris entièrement entre les deux plans p' et p'', il est évident que toutes les génératrices de ce cylindre rencontreront la surface du cylindre A.

Tandis que sur la fig. 287, on voit par la disposition des deux plans p' et p'' que les génératrices du cylindre A, qui ont leurs pieds sur l'arc aa', ne rencontreront pas le cylindre B, tandis que les génératrices du cylindre B, qui ont leurs pieds sur l'arc bb', ne rencontreront pas le cylindre A.

Enfin, on peut dire, en général, que si deux plans coupants extrêmes p' et p'' (*fig.* 291), sont tangents à la trace du même cylindre, il y aura pénétration; et dans le cas contraire, il doit y avoir arrachement.

428. Pour tracer les courbes de pénétration sur les cylindres donnés (*fig.* 292 et 293), on enveloppera sur ces corps les figures A^{IV} et B^{IV}.

429. *Intersection des cylindres.* 2^e^ *solution.* Il est presque toujours possible d'éviter la plus grande partie des opérations précédentes en faisant usage de plans de projection plus favorablement disposés par rapport aux deux cylindres dont on veut construire la pénétration.

Dans ce but, on placera (*fig.* 299, *Pl.* 43) l'un des cylindres perpendiculairement à l'un des plans de projection que nous supposerons ici être le plan horizontal, et l'on prendra le second plan de projection parallèle en même temps aux deux cylindres.

Par suite de cette disposition d'épure, le système de plans coupants auxiliaires sera parallèle au plan vertical.

Chacun de ces plans coupera le cylindre A suivant deux droites verticales, et le cylindre B suivant deux génératrices.

Les intersections de ces lignes détermineront, comme précédemment, tous les points cherchés.

La *fig.* B' est le développement du cylindre B, et A' est le développement de la partie du cylindre A qui a pour directrice la courbe *aco*.

430. Quand les deux cylindres proposés seront circulaires, la trace du cylindre A sera une circonférence de cercle, et cette courbe servira en même temps de section

droite au cylindre A; quant au cylindre B, il aura pour trace l'ellipse *vu*, mais on pourra, comme nous l'avons dit au n° 413, éviter la construction de cette courbe en employant, comme directrice, la circonférence vu' qui sera, si l'on veut, la base vu''' rabattue sur le plan horizontal de projection, ou plus simplement encore, la section par le plan oblique vu''

431. Quoique dans l'exemple qui précède, nous ayons choisi des cylindres circulaires afin de familiariser le lecteur avec les combinaisons que l'on rencontre le plus souvent dans la pratique, il est facile de reconnaître que la même disposition d'épure pourra être adoptée dans tous les cas, et qu'il suffira pour rendre à la question toute sa généralité de supposer que la directrice est une courbe quelconque au lieu d'être une circonférence de cercle.

432. Dans la *fig.* 300, les deux cylindres proposés étant perpendiculaires aux plans de projection, sont les deux surfaces projetantes de la courbe de pénétration. Il n'y aura donc aucune opération à faire pour obtenir cette ligne dont les projections se confondront avec les traces des cylindres.

433. Les lignes provenant de l'intersection de deux cylindres participent de la courbure de ces surfaces, c'est pourquoi elles sont en général des courbes à double courbure (324).

434. Dans quelques cas particuliers cependant, ces courbes peuvent être planes.

Si par exemple il s'agissait de l'intersection de deux cylindres A et B (*fig.* 298), qui auraient pour directrices les ellipses aca, $a'c'a'$; si de plus, les axes oc, $o'c'$ étaient égaux, la courbe de pénétration se composerait des deux moitiés d'ellipse $a''c''$. Mais lorsque les axes $oc, o'''c'''$ ne sont pas égaux, la courbe de pénétration $a^{\text{IV}}c^{\text{IV}}a^{\text{V}}$ est à double courbure.

435. Si les deux cylindres proposés étaient parallèles, ils se couperaient suivant des génératrices dont les positions seraient déterminées par les points de rencontre des traces. C'est évidemment la combinaison la plus simple qui puisse résulter de l'intersection de deux cylindres.

436. Cette remarque peut être appliquée avec avantage dans le cas où il s'agirait de *trouver l'intersection d'une ligne courbe quelconque avec la surface d'un cylindre.*

Soit, par exemple (*fig.* 304), la courbe donnée bb, on prendra sur cette ligne plusieurs points 1, 2, 3, par lesquels on fera passer des parallèles au cylindre; on aura, par cette construction, une nouvelle surface cylindrique, parallèle à la première, et qui la coupera suivant les deux génératrices communes $cm, c'm'$, passant par les points c, c suivant lesquels les traces des deux cylindres se rencontrent; les intersections de la courbe donnée avec les droites $cm, c'm'$ sont les points demandés.

En général, le nombre des points d'intersection est le même que celui des points communs aux traces des deux cylindres.

Si la trace $b'b'$ du cylindre auxiliaire touchait la trace du cylindre donnée, on en conclurait que cette dernière surface est touchée par la courbe donnée.

437. On aurait pu employer pour surface auxiliaire, l'un des deux cylindres projetant de la courbe donnée; dans ce cas, les droites $cm, c'm'$ seraient remplacées par la courbe à double courbure provenant de l'intersection des deux cylindres.

438. *Raccordement de deux cylindres.*

On dit, en général, que deux surfaces se raccordent lorsque l'une d'elles devient le prolongement de l'autre, et qu'elles paraissent ne former ensemble qu'une seule et même surface.

Or cette condition sera évidemment remplie, si les deux surfaces ont les mêmes plans tangents dans toute l'étendue de la ligne de raccordement.

Ainsi, par exemple, si deux surfaces cylindriques (*fig.* 303) avaient pour directrices les arcs *aco*, *ovu* qui se touchent au point *o*, il est évident que ces deux cylindres se raccorderaient, puisqu'ils seraient touchés tous les deux par un même plan qui contiendrait la génératrice *os*, et qui aurait pour trace horizontale la droite *pp* tangente aux traces des deux cylindres. La droite *os* serait la génératrice de raccordement.

439. On rencontre dans l'architecture de fréquents exemples de ces raccordements de cylindres.

La surface de la moulure projetée (*fig.* 301 et 302) se compose de deux portions de cylindres circulaires ayant pour directrices les arcs de cercle *ao*, *oc*; ces deux cylindres se touchent et sont touchés suivant toute l'étendue de la génératrice commune oo' par un même plan *pq* perpendiculaire au plan vertical de projection.

Une deuxième moulure, égale à la première, la rencontre à angle droit. Suivant une courbe plane et verticale qui a pour projection horizontale la droite $c'a'$ (*fig.* 302).

CHAPITRE III.

SURFACES CONIQUES.

440. On nomme, en général, surface conique (*Pl.* 44), celle qui est engendrée par une ligne droite, assujettie

dans son mouvement à passer toujours par un point que l'on nomme le *sommet* du cône.

La droite mobile se nomme la *génératrice* du cône ; on suppose ordinairement qu'elle doit s'appuyer sur une courbe que l'on nomme *directrice*.

441. Le cône diffère donc du cylindre, en cela que le parallélisme des génératrices est remplacé par cette condition que toutes ces droites doivent passer par un même point.

442. Si le sommet du cône s'éloignait jusqu'à l'infini, les génératrices deviendraient parallèles, et la surface du cône se changerait en un cylindre.

Si on augmentait le rayon de courbure de la directrice, la surface du cône s'aplanirait, et lorsque la directrice deviendrait une ligne droite, le cône serait un plan.

443. Ces propriétés permettent de regarder le cylindre comme un cône dont le sommet serait à l'infini, et le plan comme un cône dont la directrice serait droite.

444. Si la directrice était une courbe infinie, le cône serait lui-même infini dans ses deux dimensions. Mais si la directrice est une courbe fermée, le cône ne sera infini que dans le sens de ses génératrices.

445. Quoique ces lignes doivent toutes passer par le sommet, il ne faut cependant pas les considérer comme terminées à ce point. Ainsi, pendant que la génératrice engendrera la surface d'un cône, le prolongement de cette droite engendrera une seconde surface de cône opposé au premier par le sommet. Cependant, l'usage n'est pas de regarder ces deux surfaces comme appartenant à deux cônes différents ; et parce qu'elles sont engendrées par la

même droite, on les considère comme composant la surface d'un seul cône, dont elles forment ce que l'on appelle les deux *nappes*.

446. Les considérations qui précèdent s'appliquent à tous les cônes, mais il existe dans certains cas particuliers que l'on rencontre souvent dans la pratique des relations sur lesquelles j'appellerai toute l'attention du lecteur. Ainsi, par exemple, lorsqu'un cône aura pour directrice une courbe du second degré, le cône sera lui-même du *second degré*.

447. Si la directrice est une ellipse, le cône sera *elliptique*.

448. Si la directrice est un cercle, et que le sommet soit sur la droite passant par le centre et perpendiculaire au plan du cercle, le cône sera *circulaire*. La droite qui joint le centre du cercle avec le sommet se nomme, dans ce cas, *axe du cône*.

449. On peut dire encore que le cône circulaire est engendré par une droite qui tourne autour d'une seconde droite immobile avec laquelle elle fait toujours le même angle. Si cet angle augmente, le cône devient plus obtus, et si la génératrice faisait un angle droit avec l'axe, le cône se changerait en un plan.

Projection du cône.

450. Soit (*fig.* 308) un cône ayant pour sommet le point ss' et pour directrice la courbe 5 — 6, on prendra sur cette ligne autant de points que l'on voudra, puis on fera passer une génératrice par chacun de ces points et par le sommet du cône.

451. Pour construire les *traces* du cône, on prolongera les génératrices jusqu'aux plans de projection. Ainsi, la courbe $1'$—5 sera la trace horizontale, et la courbe $1''$—$6''$ sera la trace verticale du cône; le point 5 suivant lequel la courbe directrice perce le plan horizontal doit se trouver sur la trace horizontale du cône.

452. Pour exprimer qu'un point mm' appartient à la surface du cône, il suffira de placer ce point sur l'une des génératrices.

453. En opérant de même pour tous les points d'une courbe, on exprimera que cette ligne appartient à la surface du cône.

454. On peut prendre pour directrice d'un cône une ligne quelconque qui serait coupée par toutes les génératrices. Mais pour simplifier le travail graphique, on prend souvent pour directrice une courbe plane parallèle à l'un des plans de projection ou située dans ce plan.

Si nous concevons plusieurs cônes ayant le même sommet, et pour directrice les lignes $v3'u$, $1'3'5$, $z3'x$ qui se touchent au point $3'$, tous ces cônes se toucheront suivant la génératrice commune s—$3'$.

455. La droite $p'q'$ qui touche au point $3'$ les trois courbes vu, $1'5$, zx sera la trace horizontale d'un plan tangent aux trois cônes, suivant la génératrice s—$3'$.

456. On peut supposer ici, comme pour le cylindre (316), que l'on a fait tourner le plan coupant spq autour de la droite s—$3'$ jusqu'à ce que deux *génératrices de section* soient réunies en une seule qui devient alors la *génératrice de tangence*.

457. Si la directrice du cône est une courbe fermée,

les projections de ce cône seront contenues entre certaines limites que nous allons déterminer.

Supposons, par exemple (*fig.* 309), un cône qui aurait pour directrice la courbe 1—2—6—3—4—5 située dans le plan horizontal, les deux tangentes s—1, s—3 seront les traces de deux plans tangents verticaux entre lesquels toutes les génératrices seront nécessairement comprises, car il est évident que la directrice ne pourrait pas être rencontrée par une droite dont la projection serait au dehors de l'angle 1—s—3; on prendra donc les deux tangentes s—1, s—3 pour limites de la projection horizontale du cône. Par la même raison, les deux droites s'—$2'$, s'—$4'$ tangentes à la trace verticale du cône seront prises pour limites de la projection verticale.

458. Il est essentiel de construire avec une grande précision les quatre points de tangence 1, 2, 3, 4.

Ces points déterminent les parties vues et cachées sur les deux projections du cône.

Ainsi, toute génératrice qui aurait son pied sur l'arc 1—2 sera évidemment vue sur la projection horizontale, tandis que sur la projection verticale, elle sera cachée.

Toute génératrice qui aurait son pied sur l'arc 3—4 serait au contraire cachée sur la projection horizontale, tandis que sur la projection verticale, elle serait vue.

Les génératrices qui auraient leurs pieds sur l'arc 2—6 seront vues sur les deux projections. Enfin, celles qui auront leurs pieds sur l'arc 1—4 seront cachées sur les deux projections.

459. Les droites 6—x, 5—x sont les traces horizontales de deux plans tangents qui se coupent suivant la ligne s—x qui contient le sommet du cône.

Les droites z—$5''$, z—$6''$ sont les traces verticales des mêmes plans tangents; on remarquera que ces dernières lignes sont tangentes à la trace verticale du cône.

Le plan (z—5″, x—5) touche le cône suivant la génératrice s—5, s'—5′, et le plan (z—6″, x—6) le touche suivant la génératrice s—6, s'—6′.

Développement de la surface du cône.

460. Dans les applications on développe ordinairement la surface du cône en opérant comme pour une pyramide oblique qui aurait un grand nombre de faces (178). Ainsi, en prenant sur la trace du cône des points assez rapprochés, on pourra, sans erreur sensible, remplacer par un triangle plan la petite portion de surface conique comprise entre deux points consécutifs de la trace et les génératrices correspondantes. Tous ces triangles, construits dans leur véritable grandeur et placés à côté les uns des autres, ont formé le développement du cône projeté (*fig.* 306).

Pour obtenir les génératrices dans leur véritable grandeur, on les a fait tourner autour de la verticale projetante du sommet jusqu'à ce qu'elles soient parallèles au plan vertical de projection.

461. Si aucune condition ne détermine la position des génératrices, on pourra simplifier le travail en choisissant de préférence celles qui ont une projection verticale commune, ou qui, deux à deux ont leurs pieds à égale distance de la verticale du sommet.

Il est facile de satisfaire en même temps à ces deux conditions; ainsi, par exemple :

Les génératrices 1 et 15 ayant une projection verticale commune, on prendra le point 16 déterminé par la tangente perpendiculaire à la ligne AZ, et l'arc de cercle 16—2 déterminera le point 2 par lequel on élèvera une perpendiculaire qui donnera le point 14.

L'arc de cercle 15 — 3 déterminera le point 3 d'où on déduira le point 13 sur la perpendiculaire 3—13, etc.

462. Pour construire dans le développement un point mm' appartenant à la surface du cône, on le rabattra en m'' sur la génératrice correspondante, et de là en m''' dans le développement de la surface.

463. En recommençant cette opération pour tous les points d'une courbe quelconque qui serait située sur la surface du cône, on obtiendrait tous les points de cette courbe dans le développement.

464. Pour construire le développement d'un cône circulaire (*fig.* 305), on décrira le secteur $s—a''—a'''$ (*fig.* 307), en prenant $s—a''$ égal au côté $s'—a'$ du cône, et faisant l'arc $a''—a'''$ égal à la circonférence de la base $s—a$.

465. On peut obtenir beaucoup d'exactitude en opérant de la manière suivante. Soit x l'angle $a''sa'''$ du secteur, et désignons par y l'arc $a''a'''$ qui sert de mesure à l'angle x.

Par R le côté $s'a'$ du cône, et par r le rayon sa de la base; on doit avoir, en prenant l'angle droit pour unité:

$$x : 4 :: y : 2\pi R.$$

Mais

$$y = 2\pi r.$$

Substituant, on a

$$x : 4 :: 2\pi r : 2\pi R.$$

Ou enfin,

$$x : 4 :: r : R.$$

Donc

$$x = \frac{4r}{R},$$

ce qui donne l'angle du secteur. Supposons, par exemple,

$$R = 12$$
$$r = 5.$$

Nous aurons :

$$x = \frac{4r}{R} = \frac{4 \times 5}{12} = \frac{20}{12} = 1 + \frac{8}{12} = 1 + \frac{2}{3} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

Ainsi, en décrivant un secteur de 150 degrés avec un rayon de 12 mètres, on aurait le développement d'un cône dont le rayon de la base serait 5, et le côté 12.

Quand le secteur sera construit, on pourra placer sur l'arc $a''a'''$ les pieds des génératrices qui seraient utiles pour résoudre la question proposée.

Plan passant par le sommet du cône.

466. Cette relation est la plus simple qui puisse résulter de la combinaison d'un plan avec un cône.

Un plan contiendra le sommet du cône toutes les fois qu'il contiendra une droite quelconque passant par ce point.

467. Pour construire (*fig.* 310, *Pl.* 45), par un point donné mm', des plans passant par le sommet du cône s, ab, on tracera la droite $sn, s'n'$, et tous les plans qui contiendront cette droite satisferont à la condition demandée.

On devra distinguer 1° les plans tels que snp qui passent par le sommet du cône sans rencontrer la surface.

2° Le plan snp' qui touche la surface du cône suivant la génératrice sa.

3° Enfin, le plan snp'' qui touche le cône suivant la génératrice sa', et le coupe suivant sa''.

468. En général, le nombre des lignes de section ou de tangence dépendra du nombre de points suivant lesquels la trace du cône sera touchée ou coupée par la trace du plan.

Construction du plan tangent au cône.

469. *Construire un plan tangent à un cône par un point pris sur la surface de ce cône.*

Soient (*fig.* 311) le cône AA' et le point *mm'* situé sur la surface, on construira d'abord la génératrice *sm*, *s'm'*; puis par le point *b*, où cette génératrice rencontre le plan horizontal, on mènera une tangente à la trace horizontale du cône. Cette ligne sera la trace horizontale du plan tangent, dont la trace verticale se déterminera facilement, puisque ce plan doit contenir la ligne *mb*, *m'b'* (51).

470. *Normale.* Les droites *mn*, *m'n'* perpendiculaires sur les traces du plan *p*, seront les deux projections de la normale. Tout plan qui contiendrait la droite *mn*, *m'n'* serait un *plan normal* au point *m*, *m'*.

471. *Construire un plan tangent à un cône par un point pris en dehors de la surface.*

Soit (*fig.* 312) le cône AA' et le point *mm'*, on fera passer par ce point et le sommet du cône la droite *sm*, *s'm'*, et par le point *b*, où cette droite perce le plan horizontal, on construira deux tangentes à la trace horizontale du cône; ces deux lignes seront les traces horizontales de deux plans tangents. Les traces verticales devront passer par la trace verticale de la droite *sm*, *s'm'*.

Si on n'avait pas ce point sur l'épure, on y suppléerait facilement en assujettissant les plans cherchés à contenir le sommet du cône ou tout autre point de la ligne *sm*, *s'm'*.

On devrait aussi se rappeler que chaque plan tangent doit contenir l'une des deux droites (sc, $s'c'$) (sd, $s'd'$) qui sont les génératrices de tangence.

472. *Construire un plan tangent à un cône, parallèlement à une droite donnée.*

Soient (*fig.* 313) le cône A, A′ et la droite donnée aa', on construira par le sommet du cône la droite sb, $s'b'$ parallèle à la ligne donnée aa'. Il ne restera plus qu'à faire passer par la droite sb,$s'b'$ deux plans tangents au cône; ce qui se fera comme dans l'exemple précédent. On conçoit, en effet, que les deux lignes aa', bb', étant parallèles, tout plan contenant la seconde de ces deux droites sera parallèle à la première. Les droites (sd, $s'd'$) (sc, $s'c'$) sont les génératrices de tangence.

Intersection de la surface du cône par une ligne droite.

473. Soit aa' (*fig.* 314) la droite donnée, on prendra sur cette ligne un point quelconque mm', on joindra ce point avec le sommet du cône par la droite sm, $s'm'$, et l'on fera passer un plan par les deux droites (am, $a'm'$) (sm, $s'm'$).

Ce plan passant par le sommet du cône coupera la surface suivant les deux génératrices (sb,$s'b'$), et les intersections de ces deux lignes par la droite donnée (am, $a'm'$) seront les points demandés.

La portion (vu, $v'u'$) de la ligne donnée est dans l'intérieur du cône.

474. Si la trace horizontale pq du plan auxiliaire ne rencontrait pas la trace du cône, on en conclurait que la ligne donnée ne rencontre pas le cône; et si la trace pq

touchait la trace du cône, cela indiquerait que la ligne donnée touche le cône.

Le point de tangence serait déterminé par l'intersection de la ligne donnée avec la génératrice suivant laquelle le plan auxiliaire toucherait le cône.

Sections du cône par un plan oblique.

475. La courbe de section d'un cône par un plan contient tous les points suivant lesquels ce plan coupe les génératrices du cône. Il suffira donc, pour obtenir chacun de ces points, de faire la construction que nous avons donnée au n° 70, et qui a pour but de construire l'intersection d'une ligne droite avec un plan.

Ainsi, par exemple (*fig.* 318, *Pl.* 46), le plan s'—v'—v, qui contient la génératrice s—1, coupe le plan donné suivant la droite vh, et l'intersection de cette ligne par la droite s—1 donne le point $1'$, qui fait partie de la courbe demandée.

476. Le plan s'—v'—v étant tangent au cône, la droite vh doit être tangente à la courbe de section.

En général, pour construire une tangente en un point quelconque de la courbe de section, on construira un plan tangent à ce point, et la tangente demandée sera l'intersection du plan tangent et du plan coupant.

Si le point donné était situé hors du cône, on construirait le plan tangent comme nous l'avons dit au n° 471.

477. On pourrait, en opérant comme nous venons de le faire, déterminer l'intersection de chacune des génératrices du cône avec le plan donné; mais, ici, comme pour la question du n° 387, on simplifiera les opérations et l'on augmentera l'exactitude du résultat, en faisant usage

(*fig.* 321) d'un plan auxiliaire de projection A'Z' vertical et perpendiculaire au plan donné.

Par suite de cette disposition d'épure, la courbe de section se projettera par une ligne droite zx, de sorte que, pour obtenir la projection horizontale de cette ligne, il suffira d'abaisser des perpendiculaires à A'Z' par tous les points où la droite zx est rencontrée par les projections des génératrices du cône.

La projection de la courbe de section sur le plan vertical primitif se déduira de la projection horizontale, en élevant des perpendiculaires par les points de cette projection.

On pourra vérifier le résultat, 1° en exprimant que chacun des points de la courbe de section est situé dans le plan coupant B ; 2° en s'assurant que ces points sont bien à la même hauteur sur les deux projections verticales AZ, A'Z'.

La courbe M est la ligne de section que l'on a rabattue en la faisant tourner autour de la trace horizontale du plan coupant, et la *fig.* N est le développement du cône, que l'on construira en opérant comme nous l'avons dit au n° 460.

La courbe $x'z'x'$ représente la ligne de section dans le développement, de sorte que la *fig.* $x'a'c'a'x'z'$ est la portion de la surface conique comprise entre le plan coupant et le plan horizontal de projection.

478. *Section du cône.* 2e *solution.* Dans la pratique, on évite presque toujours la plus grande partie des opérations précédentes, en prenant dès l'origine, comme on le voit (*fig.* 319), un plan de projection perpendiculaire au plan coupant pnq.

La projection horizontale de la courbe s'obtient en abaissant des perpendiculaires à la ligne AZ par les points où les projections verticales des génératrices sont coupées par la trace verticale np du plan donné.

Pour construire les projections horizontales correspondantes au point m, on rabattra les deux génératrices $s—1$, $s—2$, en les faisant tourner autour de la verticale du sommet. Dans ce mouvement, les deux points qui ont le point m pour projection verticale commune, viendront se placer, l'un en m', et l'autre en m''. On les projettera sur la droite $s—2'$, d'où on les fera revenir, le premier en m''' et le second en m^{IV}.

On opérera de la même manière pour les points appartenant aux génératrices dont les projections horizontales seraient coupées suivant des angles trop aigus par les perpendiculaires abaissées de la projection verticale.

Cône elliptique.

479. Principe fondamental. *Lorsqu'un plan est dirigé de manière à couper toutes les génératrices de la même nappe d'un cône elliptique, la courbe de section est une ellipse.*

En effet (*Géom. anal.*), dans toute ellipse ac (*fig.* 316), rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, on a toujours :

$$ao \times oc : ao' \times o'c :: \overline{ou}^2 : \overline{o'u'}^2 \qquad (1)$$

C'est-à-dire que *les rectangles formés par les deux segments d'un diamètre sont entre eux comme les quarrés des ordonnées correspondantes.*

La relation précédente est également vraie pour des ellipses semblables, et quels que soient les pieds des ordonnées.

Car si les deux ellipses $ac, a''c''$ (*fig.* 316 et 317) sont semblables, on aura :

$$ao' : a''o'' :: o'u' : o''u''$$
$$o'c : o''c'' :: o'u' : o''u''.$$

Multipliant

$$ao' \times o'c : a''o'' \times o''c'' :: \overline{o'u'}^2 : \overline{o''u''}^2. \quad (2)$$

Multipliant l'une par l'autre les proportions (1) (2), on aura

$$ao \times oc : a''o'' \times o''c'' :: \overline{ou}^2 : \overline{o''u''}^2.$$

480. Enfin nous admettrons également la réciproque qui est suffisamment démontrée dans les traités d'analyse.

C'est-à-dire que, *si les rectangles formés par les deux segments d'un diamètre sont entre eux comme les quarrés des ordonnées correspondantes, la courbe sera une ellipse.*

481. D'après cela, supposons (*fig.* 315) un cône elliptique droit ou incliné, comme on voudra, dont la directrice serait l'ellipse ac.

Concevons les deux ellipses $a'c'$, $a''c''$ parallèles, et par conséquent semblables à la directrice ac.

Quelle que soit l'inclinaison du plan coupant $a'''c'''$, les droites $o'u'$, $o''u''$ seront parallèles entre elles.

Concevons ou parallèle aux droites $o'u'$, $o''u''$, et menons le plan $s'ac$ de manière que le diamètre ac soit le conjugué de ou; il en résultera que les ordonnées $o'u'$, $o''u''$, seront conjuguées avec les diamètres $a'c'$, $a''c''$.

Enfin, soit $a'''c'''$ l'intersection du plan $s'ac$, par celui qui contient la courbe de section $a'''c'''$.

Les triangles semblables $a'''a'o'$, $a'''a''o''$ donneront

$$a'''o' : a'''o'' :: a'o' : a''o''. \quad (1)$$

Les triangles semblables $c'''o'c'$, $c'''o''c''$ donneront :

$$o'c''' : o''c''' :: o'c' : o''c'' \quad (2)$$

Multipliant les proportions (1) et (2), on aura

$$a'''o' \times o'c''' : a'''o'' \times o''c''' :: a'o' \times o'c' : a''o'' \times o''c''. \quad (3)$$

Mais les deux courbes $a'c'$, $a''c''$ étant deux ellipses, on a, par le principe cité au n° 479,

$$a'o' \times o'c' : a''o'' \times o''c'' :: \overline{o'u'}^2 : \overline{o''u''}^2. \qquad (4)$$

Par suite du rapport commun aux équations (3) et (4), on aura :

$$a'''o' \times o'c''' : a'''o'' \times o''c''' :: \overline{o'u'}^2 : \overline{o''u''}^2.$$

Donc, puisque les rectangles formés par deux segments quelconques du diamètre $a'''c'''$ sont entre eux comme les quarrés des ordonnées correspondantes, la courbe est une ellipse (480).

482. La démonstration précédente s'applique évidemment au cône circulaire dans lequel les sections parallèles $a'c'$, $a''c''$ seraient deux cercles ; de sorte que l'on aurait :

$$a'o' \times o'c' = \overline{o'u'}^2$$

$$a''o'' \times o''c'' = \overline{o''c''}^2.$$

Substituant dans la proportion (3), il vient

$$a'''o' \times o'c''' : a'''o'' \times o''c''' :: \overline{o'u'}^2 : \overline{o''u''}^2$$

483. La relation que nous venons de démontrer n'est qu'un cas particulier de ce principe plus général, que

Toute section d'un cône du second degré par un plan est une courbe du second degré (Géom. anal.).

484. *Transformations diverses de la courbe de section.* Nous avons dit (479) que la courbe de section d'un cône elliptique par un plan serait une *ellipse*, lorsque le plan coupant serait dirigé de manière à rencontrer toutes les génératrices d'une même nappe de cône ; mais cela n'aura pas toujours lieu. En effet, il peut arriver (*fig.* 322) que le plan coupant $p'n'q'$ soit parallèle à l'une des génératrices du cône.

Dans ce cas, la courbe de section serait une *parabole* (264).

Et quand le plan coupant $p''n''q''$ (*fig.* 223) sera dirigé de manière à rencontrer les deux nappes du cône, la section sera une *hyperbole* (272).

Ces trois courbes se construiront comme nous l'avons dit au n° 478. Pour déterminer le point m''' sur la projection horizontale de la parabole (*fig.* 322), on rabattra la génératrice s'—1 en s'—1′, le point m viendra en m', d'où on déduira m'', qui, ramené à sa place, donne m''' pour le point demandé.

On agira de même pour toutes les génératrices dont les projections seraient coupées trop obliquement par les perpendiculaires à la ligne AZ.

La courbe N (*fig.* 319) est le rabattement de l'ellipse provenant de la section du cône par le plan pnq.

La courbe N′ (*fig.* 322) est le rabattement de la parabole provenant de la section du cône par le plan $p'n'q'$.

Enfin, les deux courbes N″ et N‴ sont les deux branches de l'hyperbole provenant de la section du cône par le plan $p'n''q''$.

485. Il peut être utile, dans certains cas, de construire les asymptotes de l'hyperbole. On devra se rappeler alors que ces droites sont les limites des tangentes à la courbe, c'est-à-dire qu'une tangente qui tournerait autour de l'hyperbole, en prenant toutes les directions possibles, se confondrait avec l'une des asymptotes au moment où le point de tangence serait arrivé à l'infini (276).

La question sera donc réduite à faire passer par le centre de l'hyperbole deux tangentes à cette courbe.

Voici l'ordre des opérations :

1° On abaissera les droites $a'a$, $a'a$ perpendiculaires à la ligne AZ, ce qui déterminera sur les génératrices s—3,

s—4 les deux points a, a, extrémités du diamètre aa.

2° Le point cc', milieu du diamètre aa, sera le centre de l'hyperbole.

3° La droite $scu, s'c'u'$ sera l'intersection de deux plans tangents au cône et passant par le point cc'.

4° Les droites unp, unp, tangentes à la trace du cône, seront les traces de ces deux plans tangents.

5° Enfin, les droites cn, cn, intersections de ces deux plans tangents avec le plan coupant $p''n''q''$, seront les asymptotes demandées.

Car elles sont tangentes à l'hyperbole, puisqu'elles sont les intersections du plan coupant avec les plans tangents qui contiennent le point cc'; et puisqu'elles passent par le centre de l'hyperbole, elles coïncideront avec les asymptotes de cette courbe.

486. Il résulte de ce qui précède, que la section d'un cône elliptique par un plan sera nécessairement l'une des trois courbes que nous avons étudiées aux n^os 245, 264 et 272.

Les génératrices $s'3$, $s'4$ (*fig.* 319, 322 et 323) étant les limites de la projection du cône sur un plan perpendiculaire au plan coupant $pnq, p'n'q'$ ou $p''n''q''$, on peut dire, en général, que si l'angle $3a'n$ (*fig.* 319) est plus grand que $3s'4$, la section sera une ellipse.

Si l'angle $3a'n'$ (*fig.* 322) est égal à $3s'4$, la section sera une parabole.

Enfin, si l'angle $3a'n''$ (*fig.* 323) est plus petit que $3s'4$, la section sera une hyperbole.

487. Il faut ajouter, comme cas particulier des courbes précédentes, les sections du cône par un plan qui contiendrait le sommet.

Si nous supposons, par exemple, que le plan vu tourne autour de l'horizontale projetante du point s' (*fig.* 319), il faudra distinguer trois cas.

1° Si l'angle $3s'u$ est plus grand que $3s'4$, la section sera un *point* que l'on pourra considérer comme une ellipse dont les axes seraient égaux à *zéro*.

3° Si l'angle $3s'u$ était égal à $3s'4$, le plan toucherait le cône suivant la génératrice $s'4$, qui remplacerait alors la courbe de section, et que l'on pourrait considérer comme une parabole dont les deux branches se seraient rapprochées.

3° Enfin, si l'angle $3s'u$ était plus petit que $3s'4$, le plan couperait le cône suivant deux génératrices que l'on pourrait considérer comme une hyperbole coïncidant avec ses asymptotes, parce que la distance du centre au sommet de la courbe serait égale à zéro.

488. Cette dernière considération donne un deuxième moyen de construire les asymptotes de l'hyperbole.

En effet, admettons, ce qui est démontré dans les traités d'analyse, que *si on coupe un cône du second degré par des plans parallèles, toutes les courbes de section seront semblables.*

Il en résulte que si, par le sommet du cône (*fig.* 323), nous faisions passer un plan $p'''n'''q'''$ parallèle à $p''n''q''$, les deux génératrices s—1, s—2 pourront être considérées comme formant une hyperbole semblable à celle qui résulte de la section du cône par le plan $p''n''q''$, ces deux courbes ne différant, comme nous l'avons dit, que par la distance du centre au sommet.

Or, la section par le plan $p'''n'''q'''$ donne l'angle que les asymptotes font entre elles, et puisque l'on connaît le centre cc' de l'hyperbole qui résulte de la section par le plan $p''n''q''$, il sera facile de construire les asymptotes de cette dernière courbe.

489. Si le sommet du cône était reculé jusqu'à l'infini, la surface se changerait en un cylindre elliptique. Dans ce cas, la section oblique serait toujours une ellipse, puisque le plan coupant rencontrerait toutes les génératrices du même côté du sommet.

490. La similitude des sections parallèles du cône peut dans quelques cas donner lieu à des abréviations.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de projeter (*fig.* 320) les sections d'un cône elliptique par plusieurs plans horizontaux. On construira l'une de ces courbes avec beaucoup de soin; puis, après avoir déterminé le centre, les axes et les foyers, si on le juge à propos, on tracera :

1° La droite *so*, qui contient les centres de toutes les sections;

2° La droite *sa*, passant par les extrémités des grands axes;

3° La droite *sc*, qui détermine les extrémités des petits axes;

4° Les droites *s*—1, *s*—2, qui contiennent les points suivant lesquels les courbes cherchées touchent les génératrices limites de la projection horizontale du cône.

Cône circulaire.

491. Lorsqu'un cône circulaire, terminé par une base perpendiculaire à son axe, est projeté sur un plan parallèle à cet axe, la projection (*fig.* 327, *Pl.* 47) est un triangle isocèle *scc*.

La circonférence tangente aux droites *sc*, *sc* est la projection d'une sphère inscrite et tangente à la surface du cône, suivant une circonférence de cercle qui a pour projection la droite *uu*.

Enfin, les deux droites parallèles *vv*, *vv*, sont les limites de la projection d'un cylindre circulaire qui touche la sphère suivant la circonférence du grand cercle qui a pour projection la droite zz.

Les deux cercles uu, zz, situés tous deux sur la surface de la sphère, se coupent en un point x qui appartient à la surface du cône, puisque le cercle uu, suivant lequel la sphère est touchée par le cône, appartient tout entier à cette dernière surface.

Si nous concevons actuellement que le cylindre et le cône soient coupés par un même plan pq, les deux courbes de section seront deux ellipses qui, ayant un axe commun aa et un point commun x, coïncideront et ne feront, par conséquent, qu'une seule et même courbe.

Il en sera de même de la section du cylindre et du cône par un plan $p'q'$; d'où nous pouvons conclure que les diagonales du quadrilatère aa', aa' sont les projections de deux ellipses situées en même temps sur les surfaces du cylindre et du cône, et que nous pouvons, par conséquent, considérer comme étant les intersections de ces deux surfaces.

492. Il résulte évidemment des relations que nous venons de mettre en évidence, que, si on prenait un plan de projection perpendiculaire au cylindre $vvvv$, les deux ellipses $aa, a'a'$ se projetteraient sur ce plan par une seule circonférence qui serait en même temps la projection du grand cercle zz, suivant lequel la sphère inscrite dans le cône est touchée par le cylindre.

493. *Projection oblique du cône circulaire.* Si le cône dont il s'agit doit être placé obliquement, il faudra opérer de la manière suivante.

On choisira d'abord l'un des plans de projection parallèle à l'axe du cône, dont la projection sur ce plan sera le triangle isocèle $s'c'c'$ (*fig.* 326). Pour compléter la projection sur l'autre plan, il faudrait obtenir la trace du cône ou la projection de sa base. Mais on pourra souvent éviter la construction de ces courbes, en employant pour directrice de la surface du cône la section par un plan pq incliné de manière que la projection de cette courbe soit une circonférence de cercle.

Cette manière de procéder sera d'autant plus commode dans les applications, que souvent, au lieu d'un cône *oblique* exigé par la nature de la question, on préfère employer un cône circulaire *coupé obliquement*.

494. Pour déterminer l'inclinaison de la section $a'a'$, de manière que la projection horizontale de cette courbe soit une circonférence de cercle, on prendra sur l'axe du cône un point quelconque ayant pour projections les deux points oo'. De ces points, comme centres, on décrira deux circonférences égales, et d'un rayon tel que la circonférence décrite du point o' soit tangente aux deux droites $s'c'$, $s'c'$, qui forment les limites de la projection verticale du cône.

Les deux circonférences dont nous venons de parler, sont évidemment les deux projections d'une sphère qui serait inscrite dans le cône proposé. On élèvera les deux perpendiculaires $aa''a'$, $aa'a''$, qui couperont les lignes $s'c'$, aux quatre points a', a'', a', a''.

Enfin, les droites $a'a'$, $a''a''$, diagonales du quadrilatère $a'a''a'a''$ seront les projections verticales de deux ellipses dont les projections horizontales se confondront avec la circonférence décrite du point o comme centre.

495. On choisira de préférence l'ellipse $(a'a')$ pour directrice du cône, parce que ses intersections par les génératrices donnent lieu à des angles moins aigus.

Si on doutait que les deux ellipses $(a'a')$ $(a''a'')$ dussent se projeter par la circonférence décrite du point o, il suffira de remarquer d'abord que le diamètre aa est la projection commune des deux axes $a'a'$, $a''a''$; que, de plus, les deux ellipses ont un point commun xx' qui se projette sur la circonférence du grand cercle horizontal de la sphère, et que, d'ailleurs, ces deux ellipses ont pour surface projetante commune le cylindre circulaire et vertical qui touche la sphère suivant le grand cercle horizontal zz, lequel cylindre a, par conséquent, pour trace la circonférence décrite du point o comme centre.

496. Les deux tangentes sx, sx seront les limites de la projection horizontale du cône.

497. Les points de tangence x, x seront déterminés par le moyen géométrique connu, ou par la perpendiculaire $x'x$ abaissée du point x'.

498. Pour construire un point appartenant à la surface du cône et qui serait donné par sa projection verticale m', on tracera la génératrice $s'm'$. Le point n', suivant lequel cette génératrice rencontre la directrice $a'a'$, se projettera sur le plan horizontal par l'un des deux points n, n, ce qui donnera les projections horizontales des deux génératrices sn, sn, qui ont $s'n'$ pour projection verticale commune.

Enfin, la perpendiculaire $m'm$ déterminera les deux points m, m qui se projettent tous deux par le point m'.

499. *Base du cône.* La base $c'c'$ du cône étant un cercle incliné, sa projection horizontale sera une ellipse que nous construirons comme nous l'avons dit au n° 409.

Le centre u étant déterminé, on fera eu égal à $u'c'$, ce qui donnera le grand axe ee de l'ellipse demandée. Les extrémités c, c du petit axe seront déterminées par les perpendiculaires $c'c$, $c'c$.

500. *Traces du cône.* Si on prend pour directrice du cône

une section par un plan pq, incliné de manière que la projection soit un cercle, il sera presque toujours inutile de construire les traces du cône. Nous allons cependant, comme exercices, indiquer les moyens d'obtenir ces courbes.

501. *Ellipse.* Soient données (*fig.* 324) les deux projections d'un cône circulaire ayant pour sommet le point s, s', et pour directrice une section aa, $a'a'$, que l'on obtiendra comme nous l'avons dit au nº 494, on veut construire la trace du cône.

Nous remarquerons d'abord que cette trace doit être une ellipse, puisque le plan horizontal AZ coupe toutes les génératrices d'une même nappe (479), et que, d'ailleurs, l'angle $x'c'a'$ est plus grand que $a's'c'$ (486).

Les génératrices $s'c'$, $s'c'$ percent le plan horizontal en deux points c, c, qui sont les extrémités du grand axe de l'ellipse cherchée. Le point uu', milieu de la droite cc, sera le centre de cette courbe, et le petit axe $e''e''$, projeté sur la ligne AZ par un seul point u', doit être égal au double de la ligne $u'e$.

En effet, l'axe $e''e''$, perpendiculaire au plan vertical de projection, est une corde commune à l'ellipse cherchée $ce''ce''$ et au cercle provenant de la section du cône par le plan $q'y$ perpendiculaire à son axe. Si donc on rabat cette dernière section sur le plan vertical, l'une des extrémités de la corde $e''e''$ viendra se placer en e sur la circonférence décrite du point y comme centre avec le rayon yt, ce qui déterminera la longueur de $u'e$, moitié de $e''e''$, second axe de l'ellipse $ce''ce''$.

502. Si du point u, comme centre, on décrit l'arc de cercle cx'', et que l'on construise (*Géom.*) le point x'' suivant lequel cet arc serait touché par la tangente sx'', l'ordonnée $x''x$ déterminera les points xx, et par conséquent

les deux tangentes sx, sx, qui complètent la projection horizontale du cône.

Nous avons vu que ces points pouvaient encore être déterminés en construisant par le point s deux tangentes à la circonférence ax, ax.

Enfin on remarquera, pour troisième vérification, que les points x'', x, x, x', doivent être tous sur une même droite perpendiculaire à la ligne AZ (497).

503. *Foyers*. On peut obtenir ces points en opérant comme nous l'avons dit au n° (250), ou bien en faisant usage de la propriété suivante, dont la démonstration ne peut trouver place que dans un traité de Géométrie analytique.

Soit (fig. 325) *un cône circulaire coupé obliquement par le plan* pq. *Si l'on inscrit dans ce cône deux sphères tangentes au plan coupant, les deux points de tangence* F, F *seront les foyers de la courbe de section.*

Cette propriété appartient aussi à la parabole et à l'hyperbole. Ainsi les points F', F' seraient les foyers de l'hyperbole suivant laquelle le même plan couperait un second cône engendré par le mouvement de la droite sc tournant autour de $m'n'$.

504. Il résulte de ce qui précède, que si nous partageons l'angle $s'c'x'$ (*fig*. 324) en deux parties égales par la droite $c'r'$, le point r' sera le centre d'une sphère qui toucherait en même temps le cône et le plan horizontal AZ, de sorte que le point de tangence FF' sera l'un des foyers de l'ellipse.

Le second foyer sera déterminé par la droite qui partage en deux parties égales l'angle $u'c's'''$.

505. *Parabole*. La trace du cône projeté (*fig*. 328), sera une parabole, puisque l'angle $x'c'a'$ est égal à $a's'c'$ (486).

La courbe aa, $a'a'$, directrice du cône, étant obtenue par la construction indiquée au n° 494, on tracera les deux tangentes sx, sx, qui forment les limites de la projection horizontale du cône.

On partagera l'angle $s'c'x'$ en deux parties égales par la droite $c'r'$.

Le point r', suivant lequel cette droite rencontre l'axe, sera le centre de la sphère inscrite dans le cône et tangente au plan horizontal AZ; de sorte que le point de tangence FF' sera le foyer de la parabole.

Il sera utile de se rappeler, comme vérification, que le point F doit être situé sur la droite νF, menée perpendiculairement, par le point ν, milieu de la tangente sx.

Si on fait ck égal à cF, la droite dd, perpendiculaire à sa, sera la directrice qui, avec le foyer F, suffira pour construire la parabole (264).

506. *Hyperbole.* La trace du cône projeté (*fig.* 329) sera une hyperbole, puisque le plan coupant AZ rencontre les deux nappes du cône.

La courbe aa, $a'a'$ directrice du cône étant obtenue comme précédemment, on construira les deux tangentes sx, sx, qui forment les limites de la projection horizontale du cône.

On partagera les angles $s'c'$A, sc''Z, chacun en deux parties égales par les droites $c'o'$, $c''n'$.

Les points o', n' seront les centres de deux sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan horizontal AZ; de sorte que les points FF' seront les deux foyers de l'hyperbole.

Les points cc', cc'' seront les sommets, et le point u, milieu de cc, sera le centre.

De ce point, comme centre, avec un rayon égal à uF, on décrira une circonférence, et les quatre points $zzzz$, suivant lesquels cette ligne rencontrera les ordonnées cz, passant par les sommets de la courbe, appartiendront aux deux asymptotes. On pourrait encore obtenir ces droites par l'un des deux moyens indiqués aux n^{os} 485 et 488.

Les asymptotes et le sommet étant obtenus, il sera facile de construire les deux branches de la courbe (277).

Intersection des cônes et des cylindres.

507. *Trouver la courbe provenant de l'intersection d'un cylindre et d'un cône.*

On coupera ces deux surfaces par un système de plans parallèles au cylindre et passant par le sommet du cône. Par ce moyen, les sections dans le cône et le cylindre seront des lignes droites.

Soient, par exemple (*fig.* 335, *Pl.* 48), le cylindre (A, A') et le cône (B, B') dont il faut trouver l'intersection. Construisons, par le sommet ss' du cône, la droite $sc, s'c'$ parallèle au cylindre, et faisons passer par cette droite un plan p; ce plan sera lui-même parallèle au cylindre et le coupera suivant les deux lignes (aa') (aa'); de plus, il coupera le cône suivant les deux génératrices (bb') (bb'). Or ces quatre lignes étant dans un même plan donneront, par leurs intersections, quatre points $(u, u'...)$ appartenant à la courbe demandée. Trois de ces points sont au-dessus du plan horizontal, le quatrième est dessous.

Un second plan, contenant la droite $(sc, s'c')$, donnera quatre nouveaux points de la courbe.

Un troisième plan en donnera quatre autres et ainsi de suite.

On continuera ces constructions jusqu'à ce que l'on ait obtenu un nombre de points assez rapprochés pour que l'on puisse tracer la courbe.

508. On devra ici, comme dans la question du n° 422, chercher de préférence les points qui sont situés sur les

génératrices qui forment les limites des projections du cylindre et du cône.

Tout plan dont la trace serait hors de l'angle formé par les traces des plans p' et p'' ne couperait pas le cône, et par conséquent ne contiendrait pas de points communs aux deux surfaces.

Dans l'exemple qui nous occupe, les courbes d'intersection sont séparées et forment par conséquent pénétration.

509. *Tangente à la courbe d'intersection.* Si l'on veut obtenir une tangente au point mm', on construira : 1° la droite vz, trace horizontale d'un plan qui toucherait le cylindre dans toute l'étendue de la génératrice $mz, m'z'$.

2° La droite vx, trace horizontale d'un second plan qui toucherait le cône dans toute l'étendue de la génératrice $mx, m'x'$.

3° La droite vm, projection horizontale de l'intersection des deux plans tangents, et par conséquent de la tangente au point mm'.

4° La droite $v'm'$, projection verticale de la tangente demandée.

On fera bien de construire ainsi quelques tangentes partout où il y aura incertitude sur la direction de la courbe.

510. Si on veut construire les courbe de pénétration dans les surfaces développées du cylindre et du cône, il faudra opérer comme nous l'avons dit aux n^{os} 368 et 460.

511. On peut simplifier les opérations en plaçant (*fig.* 332) le cylindre perpendiculairement à l'un des plans de projection ; la trace du cylindre sur ce plan devient alors la projection de la courbe, et il ne reste plus qu'à élever des perpendiculaires par les points où cette projection est rencontrée par les projections des génératrices du cône.

512. *Trouver la courbe provenant de l'intersection de deux cônes.*

On construira (*fig.* 336) la droite (so, $s'o'$) qui joint les sommets des deux cônes, puis par cette droite on fera passer des plans. Chacun de ces plans contenant les deux sommets coupera les cônes suivant des lignes droites qui, par leur intersection, donneront les points de la courbe demandée. Ainsi, par exemple, le plan p coupe le cône (A, A') suivant deux génératrices (a, a') (a, a'), et le cône (B, B') suivant les deux lignes (b, b'(b, b'). Ces quatre lignes donnent, par leurs intersections, les quatre points (u, u'...). Deux de ces points appartiennent à la courbe de pénétration par laquelle le sommet du cône B sort du cône A; le troisième fait partie de l'intersection formée par le prolongement des nappes inférieures des deux cônes; et le quatrième, projeté horizontalement en u', derrière le plan vertical, appartient à la ligne $u'k'$ provenant de l'intersection des deux nappes supérieures.

513. Si l'on n'avait pas sur l'épure les sommets des cônes proposés ni le point où la droite qui contient ces sommets rencontre le plan horizontal, on pourrait couper les deux cônes par des plans parallèles aux plans de projection. Les intersections des cônes par ces plans seraient semblables aux traces, et ces courbes, faciles à construire (490), se couperaient suivant des points appartenant à l'intersection demandée.

Ce moyen s'emploie surtout avec avantage lorsque les traces des cônes proposés sont des cercles.

514. *Tangente.* La droite vz est la trace horizontale d'un plan qui touche l'un des cônes suivant la génératrice zu, $z'u'$.

La droite vx est la trace horizontale d'un plan qui touche le second cône suivant la génératrice $xu, x'u'$. La ligne vu sera, par conséquent, la projection horizontale de la tangente au point uu'.

Le plan tangent $o'v'z$ étant perpendiculaire au plan vertical de projection, la droite $v'u'$ sera la projection verticale de la tangente.

515. Les développements des cônes se construiront comme nous l'avons dit au nº (460).

516. Les courbes provenant de la pénétration de deux cylindres ou d'un cylindre avec un cône, peuvent quelquefois être planes.

Ainsi, par exemple, si le cylindre et le cône projetés (*fig.* 330) avaient pour directrice commune une ellipse vu, l'intersection de ces deux surfaces donnerait lieu à une seconde ellipse.

En général, *toutes les fois que deux cônes, deux cylindres, ou enfin un cylindre et un cône sont du second degré* (446), *et que ces deux surfaces se pénètrent, si la courbe d'entrée est une courbe du second degré, la courbe de sortie sera pareillement du* SECOND DEGRÉ (Géom. anal.).

517. *Raccordement des surfaces cylindriques et coniques.* Pour que la surface d'un cylindre et celle d'un cône soient tangentes l'une à l'autre, il faut qu'ils soient touchés par un même plan dans toute l'étendue d'une génératrice commune.

Cela exige que le sommet du cône soit situé sur cette ligne.

Ainsi, par exemple, si les deux courbes ac, co (*fig.* 331) se touchent et se raccordent au point c, la surface conique, qui aurait son sommet en s et pour directrice la courbe co, devra se raccorder avec la surface du cylindre qui aurait pour génératrice sc et pour directrice la courbe ac.

518. Les deux surfaces coniques *sac*, *s'co* (*fig.* 333) se raccordent parce que leurs directrices se raccordent, et que les deux sommets *s* et *s'* sont situés sur une même génératrice *sc* qui contient le point de raccordement des directrices.

Il est évident que les deux cônes se raccorderaient encore, s'ils avaient pour directrices deux courbes quelconques *ac*, *c'o'* touchées par un même plan, pourvu que la droite qui joindrait les points de tangence *c*, *c'* contienne les sommets des deux cônes.

519. La combinaison la plus simple de deux cônes a lieu lorsqu'ils ont un sommet commun. Dans ce cas, il faut distinguer trois cas; et pour mieux les mettre en évidence, supposons que l'on prenne pour directrices les sections de ces deux cônes par un même plan.

Si les directrices ne se rencontrent pas, il est évident que les deux cônes n'auront pas d'autres points communs que le sommet.

Si les directrices se touchent, les deux cônes seront tangents l'un à l'autre, suivant la génératrice qui passe par le point de tangence des directrices.

Enfin, si les deux directrices se coupent suivant un ou plusieurs points, les deux cônes se couperont suivant toutes les génératrices qui passent par les points d'intersection des directrices.

520. *Trouver l'intersection d'un cône par une ligne courbe.*

On construira (*fig.* 334) une seconde surface conique ayant même sommet que le cône donné A, A', et dont la directrice sera la courbe donnée (a, a'). Ces deux cônes se couperont suivant les deux génératrices communes (b, b') (b, b'), et les intersections de ces deux droites par la courbe proposée seront les points demandés (m, m') (m, m').

Quand la ligne donnée est droite, comme au n° 473, la surface conique auxiliaire devient un plan.

Si l'on n'avait pas le sommet du cône; il serait bon d'employer comme surface auxiliaire l'un des cylindres projetant de la courbe proposée.

L'intersection avec le cône ne présenterait aucune difficulté (511).

CHAPITRE IV.

LA SPHÈRE.

521. On considère ordinairement la sphère comme engendrée par le mouvement d'un demi-cercle, qui tournerait autour de son diamètre. Cette manière de concevoir la génération de la sphère lui a fait donner le nom de *surface de révolution*. Le demi-cercle, dont le mouvement engendre la surface sphérique, se nomme *génératrice;* et le diamètre autour duquel se fait le mouvement se nomme l'*axe* de la sphère.

Pour plus de simplicité, nous prendrons toujours pour axe un diamètre perpendiculaire à l'un des plans de projection; de sorte que toute section par un plan perpendiculaire à l'axe sera un cercle parallèle au plan de projection.

522. *Projection de la sphère.* Si par le centre de la sphère (*fig.* 337, *Pl.* 49) on conçoit un plan p parallèle au plan horizontal, ce plan coupera la sphère suivant un grand cercle dont la projection horizontale sera prise pour limite de la projection de la sphère; de même on prendra pour limite de la projection verticale de la sphère celle du grand cercle provenant de la section par le plan p' parallèle au plan vertical de projection.

523. *Parties vues et cachées.* Toute la partie de la surface de la sphère qui est au-dessus du plan p, sera vue en

projection horizontale, tandis que l'hémisphère au-dessous du même plan sera caché.

Sur la projection verticale on devra considérer comme vue toute la surface de l'hémisphère qui est en deçà du plan p', tandis que l'hémisphère au delà doit être caché.

524. *Génération.* Si nous supposons que le demi-cercle $a'b'd'$ tourne autour de l'axe vertical $a'd'$ pour engendrer la surface de la sphère, chaque point décrira un cercle horizontal dont le rayon sera déterminé par la distance de ce point à l'axe. Ainsi, par exemple, pendant que le point bb' parcourra l'arc bh, $b'h'$, le point (mm') viendra se placer en nn'. Le demi-cercle générateur étant toujours perpendiculaire au plan horizontal, sa projection sur ce plan sera la ligne droite ch; de sorte que pour avoir la projection verticale d'un de ses points, du point n, par exemple, on construira d'abord les deux projections mn,$m'n'$, du cercle que parcourt le point m; puis on élèvera par le point n une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de la ligne $m'n'$. En recommençant cette construction, on obtiendra la courbe $a'n'h'd'$, pour la projection verticale du cercle générateur amené dans la position ch.

La courbe $a'n'h'd'$ est une demi-ellipse.

Méridiens et parallèles de la sphère.

525. *Section méridienne.* Toute section de la sphère par un plan qui contient le centre est un grand cercle qui partage la surface en deux parties égales. C'est pourquoi on la nomme *section méridienne*. Cependant on réserve plus particulièrement cette expression pour les sections par des plans qui contiennent le diamètre que l'on a choisi pour l'axe de la sphère, et qui, par conséquent, sont perpendiculaires à l'un des plans de projection.

Ainsi la courbe $a'h'd'$ sera une section méridienne, si nous prenons pour axe de la sphère la verticale passant par le point c.

Le grand cercle $a'b'd'v'$, parallèle au plan vertical de projection, se nomme *section méridienne principale* ou simplement *méridien principal.*

Si on avait pris pour axe l'horizontale projetante du point c', le grand cercle $vzbx$ serait le méridien principal.

526. *Parallèles de la sphère.* Les sections méridiennes ne sont pas les lignes les plus simples que l'on puisse tracer sur la surface d'une sphère, et dans les diverses questions que nous pourrons avoir à résoudre par la suite, il sera souvent commode de faire usage des sections de la sphère par des plans parallèles aux plans de projection. Ainsi, par exemple, si nous coupons la sphère par un plan p'', parallèle au plan horizontal, nous obtiendrons pour section un cercle projeté sur le plan vertical par la droite $q'm'$, et sur le plan horizontal par le cercle $qvmu$.

La section par le plan p''' sera le cercle (st, $s't'$).

527. *Exprimer qu'un point appartient à la surface d'une sphère.*

Supposons que l'on connaisse la projection horizontale e, et qu'il faille trouver la projection verticale, on construira par le point e un plan p^{IV} parallèle au plan vertical et coupant la sphère suivant un cercle dont la projection verticale $e'g'e'$ contiendra celle du point cherché; de sorte que, pour déterminer cette projection, il suffira d'élever par le point e une perpendiculaire à la ligne AZ jusqu'à la rencontre du cercle $e'g'e'$, ce qui donnera deux solutions e', e'.

Pour exprimer qu'une courbe (oz,$o'z'$) est située sur la sphère, il suffira de faire, pour chacun de ses points, la construction précédente.

Développement de la sphère.

528. La surface de la sphère n'est pas développable d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas être étendue sur un plan sans déchirement; mais dans les applications à l'industrie on développe la sphère approximativement de deux manières différentes.

529. *Développement par fuseaux.* Partageons en parties égales, en 16 par exemple, chacun des deux grands cercles formant les limites de projections verticale et horizontale de la sphère A, A′ (*fig.* 339); puis, par les points de division, menons les sept plans horizontaux 0,1,2,3, et les seize plans méridiens *m*,*m*.... La surface de la sphère sera, par suite de cette construction, partagée en 96 trapèzes, plus 32 petits triangles ayant pour sommet commun les points 4 qui sont les pôles de la sphère. Tous ces triangles et trapèzes auront une même hauteur, égale à la seizième partie d'un grand cercle de la sphère, et leurs bases projetées sur le plan horizontal dans leurs véritables grandeurs, seront égales chacune à la seizième partie de l'un des cercles provenant de la section de la sphère par les plans horizontaux 0,1,2,3.

En disposant ces trapèzes comme on le voit *fig.* A″, on aura le développement, par fuseaux, de l'hémisphère supérieur. Les hauteurs des trapèzes sont égales aux arcs (0,1) (1,2), etc., et les bases sont données par les arcs horizontaux correspondants, et compris entre deux méridiens consécutifs (*m*, *m*...).

530. *Développement par zones.* La *fig.* A‴ représente le développement par zones de l'hémisphère inférieur; il ne diffère du développement par fuseaux que par la disposition des trapèzes, qui sont placés à côté les uns des autres, au lieu d'être l'un au-dessus de l'autre.

On facilitera la construction de ce développement, en remarquant que la première zone, composée de seize trapèzes a, a, a,... peut être considérée comme la surface d'un tronc de cône dont le sommet serait situé en s, où l'axe de la sphère est rencontré par le prolongement de la corde qui joint le point 0 avec le point 1; de sorte que, pour construire ce développement, on décrira d'un point s' comme centre, avec un rayon égal à so, un arc de cercle sur lequel on portera seize fois la seizième partie du grand cercle o. La seconde zone fait partie d'un cône qui a son sommet au point t. On en construira le développement de la même manière, et ainsi de suite.

Il est bien entendu que l'on doit partager les cercles en un assez grand nombre de parties égales pour que la courbure des arcs soit sensible. Si seize points de division ne suffisaient pas, on en prendrait davantage.

531. Les globes et cartes de géographie sont des développements approximatifs de la sphère. Les premiers sont imprimés par fuseaux et collés ensuite sur un globe dont ils sont le développement; les cartes sont des développements par zones.

On fait encore usage des développements de la sphère, dans la construction des ballons, et dans l'architecture, pour le tracé des voûtes sphériques et coupoles.

532. Lorsque la zone que l'on doit développer a beaucoup de hauteur, et que l'on ne veut pas la partager en zones plus petites, on s'y prend de la manière suivante. Soit (*fig.* 340) ab l'arc générateur de la zone dont on veut construire le développement. On rectifiera cet arc et l'on en portera la longueur de b en i, l'on mènera ih parallèle au rayon cb, puis enfin hk parallèle à ab. Il résulte de là que hk sera égal en longueur à l'arc amb. Or, pendant que l'arc ab, tournant autour de cs, engendrera la zone proposée, la ligne hk engendrera un tronc de cône dont la surface dif-

férera peu de celle de cette zone, et l'on pourra prendre, sans erreur sensible, l'une de ces surfaces pour l'autre.

Si on voulait construire dans le développement un point *m* quelconque appartenant à la surface de la zone, on joindrait ce point avec le centre de la sphère par un rayon *cm*, dont l'intersection avec la surface du cône déterminerait un point *n*, qui serait placé dans cette surface à très-peu près comme le point *m* dans la surface de la zone.

Sections perpendiculaires aux plans de projection.

533. Après les sections parallèles aux plans de projection et les sections méridiennes, les lignes les plus simples que l'on puisse obtenir sur la sphère sont celles qui proviennent de sections par des plans perpendiculaires aux plans de projection.

Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir la section de la sphère A, A' (*fig.* 338) par le plan B. Construisons un plan *p*, parallèle au plan horizontal de projection. Ce plan coupera la sphère suivant un cercle *a*, *a'*, et le plan donné suivant une droite *bb'*. Cette droite coupera le cercle *aa'* en deux points (*uu'*) qui feront partie de la courbe demandée. En recommençant cette construction on obtiendra autant de point que l'on voudra.

Pour éviter les intersections qui auraient lieu suivant des angles trop aigus, on fera usage simultanément de plans parallèles au plan horizontal, et de plans parallèles au plan vertical.

Le plan horizontal passant sur le centre de la sphère donnera les points *x'x*, suivant lesquels la projection horizontale de la courbe touche le grand cercle qui représente la projection de la sphère.

534. On sait (*Géom.*) que la section d'une sphère par

un plan est toujours un cercle; et qu'en outre ce cercle placé obliquement dans l'espace doit avoir pour projection une ellipse (406). Il sera facile de trouver les axes de cette ellipse. Pour cela on abaissera du centre de la sphère la ligne (Ac, $A'c'$) perpendiculaire sur le plan coupant, et le point cc', où cette perpendiculaire perce ce plan, sera le centre de la section. Or, lorsqu'un cercle est projeté obliquement, tous ces diamètres se raccourcissent, excepté celui qui est parallèle au plan de projection; de sorte que le grand axe de l'ellipse devant être horizontal et situé dans le plan B sera parallèle à la trace horizontale de ce plan; de plus, $\nu'z'$ est la projection verticale dans sa véritable grandeur, d'un diamètre de la section; donc en portant $c'z'$, avec le compas de c en h et de c en k, on aura hk pour le grand axe de l'ellipse qui forme la projection horizontale du cercle cherché. Le petit axe, perpendiculaire au grand, doit être situé dans le plan p', parallèle au plan vertical, d'où il résulte que la projection ν du point $\nu\nu'$ sera l'extrémité du petit axe de l'ellipse que l'on construira par le moyen indiqué (253).

535. On peut souvent éviter la projection oblique du cercle provenant de la section, en le faisant tourner, pour le rabattre sur l'un ou sur l'autre des deux plans de projection. Ainsi, par exemple, pour avoir la section par le plan B' perpendiculaire au plan horizontal, on fera tourner ce plan autour de la droite dd', jusqu'à ce qu'il soit venu prendre la position B''. Dans ce mouvement, le point e, qui représente le centre de la section, décrira l'arc horizontal ee'' et viendra se projeter verticalement en e'''. De ce point comme centre avec un rayon $e'''s'''$ égal à es, on décrira un cercle qui sera la section rabattue dans sa véritable grandeur.

Il sera facile, en ramenant la section à sa place, d'obtenir sa projection verticale. Ainsi, par exemple, le point m, rabattu en m'' et projeté dans ce rabattement en m''', doit avoir sa projection verticale au point m' provenant de l'intersection de l'horizontale $m'''m'$ avec la perpendiculaire mm'.

536. Les positions principales qu'un plan peut prendre par rapport à une sphère sont au nombre de quatre :

1° Si le plan dont il s'agit contient le centre, la section sera un grand cercle de la sphère ;

2° Si la distance au centre de la sphère est moindre que le rayon, la section sera un petit cercle ;

3° Si le plan coupant s'éloignait du centre de la sphère, le rayon de la section diminuerait, et lorsque la distance du centre au plan coupant sera égale au rayon de la sphère, ce plan deviendra tangent et la section réduite à un point sera le point de tangence ;

4° Enfin, lorsque la distance d'un plan au centre de la sphère sera plus grande que le rayon de cette surface, il est évident que ce plan ne rencontrera pas la sphère.

537. Si l'un des plans de projection est perpendiculaire au plan donné, on pourra reconnaître, à l'inspection de l'épure, quelle est la position relative du plan et de la sphère.

Ainsi, par exemple, si la distance Ac' (*fig.* 338) est plus petite que le rayon de la sphère, la section sera un petit cercle. Si Ac' était égal à zéro, la section serait un grand cercle.

Si Ac' était égal au rayon, le plan serait tangent.

Enfin, si Ac' était plus grand que le rayon, le plan ne rencontrerait pas la sphère.

538. Il résulte de ce qui précède que nous ne devons pas considérer le point de tangence comme un point *simple*,

mais comme provenant du rapprochement de tous les points de la courbe de section.

539. Le point de tangence détermine la position du plan tangent, parce que ce point devant toujours être considéré comme une petite circonférence dont le rayon serait égal à zéro, le plan de cette circonférence sera toujours perpendiculaire à la droite qui joint son centre avec celui de la sphère, et sera par conséquent tangent à cette surface (*Géom.*).

Plans tangents à la sphère.

540. *Construire un plan tangent à une sphère par un point pris sur la surface de cette sphère.*

Soient (*fig.* 341, *Pl.* 50) la sphère (A, A') et le point (m, m') situé sur la surface de cette sphère, on construira le rayon $(Am, A'm')$, puis on fera passer (97) par le point (m, m') un plan perpendiculaire à ce rayon. Ce plan sera tangent à la sphère (*Géom.*).

Toute ligne située dans le plan tangent et passant par le point m, m' sera une tangente à la sphère.

Le rayon am étant perpendiculaire au plan tangent, sera nécessairement *normal* à la surface de la sphère, et par conséquent tout plan passant par le centre sera un *plan normal*.

541. *Construire par une droite donnée un plan tangent à une sphère.*

1^re^ *solution*. Par le centre de la sphère A (*fig.* 345), on fera passer un plan p, perpendiculaire à la droite donnée b. Ce plan coupera la droite en un point m, et la sphère suivant un grand cercle c; construisant les deux tangentes ms, mt, les plans p' et p'' contenant ces tangentes et la droite donnée satisferont à la question. En effet, le plan p' contenant la droite b, est perpendiculaire sur le plan p; d'où il suit que le rayon Au situé dans ce plan, et perpendiculaire à la ligne mt, intersection des deux plans p et p', sera aussi perpendiculaire à ce dernier plan, qui alors sera tangent à la sphère. Le même raisonnement conviendra pour le plan p''.

Il ne reste donc plus qu'à exécuter cette construction. Pour cela :

Supposons d'abord le cas où la droite donnée serait perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

Cette droite b' se projettera (*fig*. 346) par un seul point b. Les lignes bv, bu, menées par ce point et tangentes à la projection horizontale de la sphère, seront les traces des deux plans tangents p' et p'', qui auront leurs traces verticales perpendiculaires à la ligne AZ.

542. 2^e *solution*. Si la droite donnée était oblique par rapport aux plans de projection, l'opération serait plus difficile.

Représentons la sphère donnée par (A, A') (*fig*. 343), et la droite donnée par (b, b').

On fera d'abord passer (97) par le centre de la sphère le plan p perpendiculaire à la droite (b, b'), et l'on déterminera (70) le point (m, m') suivant lequel ce plan coupe la droite donnée. Quant au grand cercle suivant lequel la sphère sera coupée par le plan p, il aurait pour projection une ellipse; mais pour éviter la construction de cette courbe, on fera tourner le plan p, soit autour de sa trace, soit, comme on l'a fait ici, autour de l'horizontale (h, h') qui passe par le centre de la sphère. Dans ce rabattement la section par le plan p se confondra avec le grand cercle c, formant la projection horizontale de la sphère, et le point

(m, m') viendra se placer en m''. Il sera facile alors de construire les deux tangentes $(m''u'', m''v'')$. Pour ramener ces deux lignes à la place qu'elles doivent occuper dans l'espace, on remarquera que les points t, s ne doivent pas changer de place, puisqu'ils, appartiennent à la droite (h, h'), que l'on a prise pour charnière du rabattement ; de sorte qu'en joignant ces deux points avec m, on aura (mt, ms) pour les projections horizontales des deux tangentes. Les points t, s se projetteront verticalement suivant (t', s') et détermineront les projections verticales $(m't', m's')$ des tangentes. On fera passer par chacune d'elles et par la droite donnée un plan que sera tangent à la sphère : les lignes $(u''u)$ $(v''v)$ perpendiculaires à la droite h' donneront les projections des points de tangence.

La solution précédente revient à concevoir la sphère enveloppée par un cylindre circulaire parallèle à la droite donnée, et à construire par cette droite deux plans tangents au cylindre.

543. 3e *solution*. Au lieu d'un cylindre, on peut employer un cône. En effet, supposons (*fig.* 342) que la sphère donnée A soit enveloppée par un cône qui aurait pour sommet un point quelconque pris sur la droite donnée b.

Il ne restera plus qu'à faire passer par cette droite un plan tangent au cône. Il est évident que ce plan touchera la sphère.

Le cône qui enveloppe la sphère étant circulaire, et le sommet pouvant être pris partout où on voudra sur la droite donnée, il sera possible d'appliquer les principes que nous avons exposés au n° 493, et les opérations seront alors réduites à une grande simplicité.

Soit (*fig.* 344) la sphère donnée AA' et la droite donnée bb'.

Le plan As, parallèle au plan vertical de projection, déterminera un point ss' que nous prendrons pour sommet du cône auxiliaire.

En opérant comme nous l'avons dit au n° 494, il sera facile de déterminer la section aa, $a'a'$, dont la projection horizontale se confond avec le grand cercle qui forme la limite de la projection de la sphère.

Le plan oblique pq, qui contient la section aa, $a'a'$, est percé par la droite donnée en un point $m'm$, par lequel on construira les deux tangentes mo, mc. Ces droites et la ligne donnée bb' déterminent les deux plans tangents qu'il sera facile de construire (55).

Les points de tangence uu', vv' résultent de l'intersection du petit cercle zx, suivant lequel la sphère est touchée par le cône auxiliaire avec les deux droites $s'c'$, $s'o'$, suivant lesquelles ce cône doit être touché par les deux plans demandés.

544. 4ᵉ *solution*. On peut concevoir la sphère donnée A (*fig*. 348, *Pl*. 51) enveloppée par deux cônes circulaires, ayant pour sommets deux points quelconques s, t de la ligne donnée.

Ces cônes toucheront la sphère suivant deux petits cercles aa, cc dont les intersections seront les points de tangence.

La *fig*. 349 contient les opérations.

La sphère étant donnée par les deux grands cercles AA', et la droite par les deux projections bb'.

On prendra, pour plus de simplicité, le sommet ss' de l'un des deux cônes auxiliaires dans le plan qui contient le centre de la sphère, et qui est parallèle au plan vertical de projection.

Ce premier cône touchera la sphère suivant un petit cercle projeté sur le plan vertical par la droite aa. La projection horizontale de ce cercle serait une ellipse dont nous éviterons la construction en faisant un rabattement.

Nous prendrons ensuite le sommet $t't$ du second cône auxiliaire dans le plan horizontal qui contient le centre de la sphère. Le petit cercle, suivant lequel ce cône touche la sphère, aura pour projection horizontale la droite cc, et pour projection verticale une ellipse que nous ne construirons pas.

Or, les points de tangence devant appartenir aux deux cercles projetés par les droites aa, cc, il ne reste plus qu'à trouver leur intersection.

Si on avait construit la projection horizontale du cercle aa, ou la projection verticale du cercle cc, les points d'intersection de ces deux cercles seraient déterminés par les intersections de leurs projections; mais, pour éviter les projections elliptiques, nous rabattrons le cercle aa en le faisant tourner autour de l'horizontale projetante du point o, pris où l'on voudra dans le plan pzp.

Dans ce mouvement, le centre ν décrira un arc parallèle au plan vertical de projection et viendra se placer en ν'.

La circonférence décrite du point ν' comme centre, avec un rayon $\nu'a'$ égal à νa, sera par conséquent le petit cercle aa rabattu sur le plan horizontal.

Or, les points de tangence cherchés devant résulter de l'intersection des deux cercles aa, cc appartiennent par conséquent à la droite suivant laquelle se coupent les plans qui contiennent ces cercles.

Cette droite, dont les projections sont $o'a$, oc, coupera l'horizontale projetante du point oo' en un point o, qui, dans le rabattement, ne doit pas changer de place.

Un second point quelconque rr' de la droite ao', co étant rabattu en r'', on construira cette ligne or'' dans le rabattement, et les points m'', n'', où elle coupe le cercle $\nu'a'$ seront les points de tangence demandés.

Il ne restera plus qu'à faire revenir ces points à leur place, ce qui donnera pour leurs projections les deux points mm', nn'.

Les points de tangence étant obtenus, on pourra construire les plans tangents en opérant comme nous l'avons dit au n° 540.

On peut aussi joindre les points mm',nn', avec les sommets des deux cônes par des droites qui, avec la ligne donnée bb', sont suffisantes pour déterminer les plans tangents demandés par la question.

545. 5^e *solution*. On peut encore remplacer l'un des deux cônes auxiliaires, dont nous venons de parler, par un cylindre parallèle à la ligne donnée. Dans ce cas, l'un des deux petits cercles aa, cc deviendrait un grand cercle dont le plan, passant par le centre de la sphère, serait perpendiculaire à la droite donnée.

Le reste se ferait comme dans l'épure précédente, c'est-à-dire que l'on rabattrait le cercle suivant lequel la sphère serait touchée par le cône auxiliaire, que l'on pourrait toujours choisir comme ci-dessus, de manière que son axe soit parallèle à l'un des plans de projection.

On rabattrait également l'intersection du plan perpendiculaire à la droite donnée, et passant par le centre de la sphère avec le plan du cercle, suivant lequel cette surface serait touchée par le cône auxiliaire.

Les points de tangence obtenus dans le rabattement seraient ensuite ramenés à leur place. Je me contenterai d'indiquer cette dernière solution comme exercice.

546. Les relations qui précèdent donnent une deuxième solution d'un problème que nous avions résolu au n° 145.

Supposons qu'il s'agisse de *construire un plan qui fasse avec les plans de projection des angles donnés.*

Soit V l'angle que le plan cherché doit faire avec le plan vertical, et H l'angle que ce même plan doit faire avec le plan horizontal.

1^{re} *opération.* On décrira une circonférence quelconque ayant pour centre un point *o*, pris à volonté sur la ligne AZ ; cette circonférence pourra représenter en même temps les deux projections d'une sphère dont les méridiens principaux seraient alors situés dans les plans de projection.

2^e *opération.* On construira la tangente *sa*, de manière que l'angle *sao* soit égal à l'angle H. Si on suppose que cette tangente tourne autour de la verticale *so*, elle engendrera un cône circulaire qui aurait son sommet en *s* et dont la base sera la circonférence *ama*.

3^e *opération.* On construira la tangente *uc* telle que l'angle *uco* soit égal à l'angle V, puis on supposera que cette tangente tourne autour de l'horizontale *uo*, ce qui donnera un second cône circulaire ayant son sommet en *u* et dont la base sera la circonférence *cnc*.

Or, il est évident que tout plan tangent au premier cône fera avec le plan horizontal un angle *sao* égal à H.

De plus, tout plan tangent au second cône fera avec le plan vertical un angle *uco* égal à V.

Donc un plan qui serait en même temps tangent aux deux cônes satisferait aux conditions demandées.

La construction que nous venons d'indiquer donne *deux* solutions, savoir : le plan p et le plan p'.

Les traces de ces deux plans doivent contenir le sommet *s* et *u* des deux cônes auxiliaires et de plus être tangentes aux traces *ama*, *cnc* de ces cônes.

547. Si les plans demandés devaient contenir un point

donné dans l'espace, on pourrait d'abord opérer comme nous venons de le faire, après quoi il ne resterait plus qu'à faire passer par le point donné des plans parallèles à ceux que l'on aurait trouvés.

Dans ce cas, aux deux solutions précédentes il faudrait en ajouter deux autres, savoir : un troisième plan qui aurait sa trace verticale parallèle à px et sa trace horizontale parallèle à la droite xp'', qui touche derrière le plan vertical la trace de l'un des deux cônes auxiliaires.

Enfin, un quatrième plan qui aurait sa trace verticale parallèle à $p'r$ et sa trace horizontale parallèle à rp'''.

Si la somme des angles H+V était égale à un angle droit, les traces des deux cônes auxiliaires passeraient par les points s et u; de sorte que les quatre plans se réduiraient à deux qui seraient parallèles à la ligne AZ ; et si la somme des angles H+V était plus petite qu'un angle droit, les points s et u seraient dans l'intérieur des cônes auxiliaires, et dans ce cas, le problème serait impossible.

Ce résultat est conforme à ce que nous avions dit au n° 146.

548. *Construire un plan tangent à une sphère, par un point situé hors de la surface de cette sphère.*

1re *solution*. Par le point donné ss' (*fig.* 347), on fera passer une droite aa' par laquelle on construira deux plans tangents à la sphère, une seconde droite bb' déterminera deux autres plans tangents, une troisième droite en donnera encore deux, et ainsi de suite. Le nombre des plans que l'on peut construire ainsi est infini. Tous ces plans seraient tangents à un cône circulaire enveloppant la sphère et la touchant suivant un petit cercle zx que l'on nomme *courbe de contact*.

Si le point donné se rapprochait de la sphère, l'angle du cône s'ouvrirait, le cercle de contact diminuerait, et son plan s'éloignerait du centre de la sphère; enfin lorsque le point donné arriverait sur la surface de la sphère, tous les plans tangents se réuniraient en un seul, qui remplacerait le cône enveloppant; le cercle de contact, réduit à zéro, se confondrait avec le point donné.

Si, au contraire, le point donné s'éloignait à l'infini, le cône se changerait en un cylindre circulaire, et le cercle de contact deviendrait un grand cercle de la sphère.

549. 2e *solution*. On prendra un plan de projection parallèle à la droite qui joint le point donné avec le centre de la sphère.

On concevra la sphère enveloppée par le cône circulaire qui aurait le point donné pour sommet.

On déterminera la direction du plan pq, de manière que la section $a'a'$ du cône par ce plan se projette par une circonférence aa.

Enfin, tous les plans tangents demandés seront déterminés par le point donné ss' et par chacune des tangentes à la courbe aa, $a'a'$.

On remarquera que toutes ces tangentes ont une projection verticale commune pq, et que toutes leurs projections horizontales doivent être tangentes à la circonférence aa.

Les points de tangence seront déterminés par la rencontre du petit cercle zx avec les génératrices suivant lesquelles chaque plan tangent touche le cône auxiliaire.

550. *Courbe de contact*. Dans les questions diverses que l'on peut proposer sur les plans tangents, il faut distinguer les cas où il est nécessaire de construire les traces de ces plans, de ceux où le but principal est d'obtenir les points de tangence.

Ainsi, par exemple, si on veut construire la courbe suivant laquelle la sphère serait touchée par tous les plans qui contiennent le point donné, on pourra se dispenser de construire les traces de ces plans.

En effet la courbe cherchée est la circonférence du petit cercle, suivant lequel la sphère serait touchée par la surface du cône circulaire qui aurait pour sommet le point donné.

Pour construire les deux projections de cette circonférence, on choisira (*fig.* 350) un plan de projection parallèle à la droite qui joint le point donné ss' avec le centre de la sphère.

On tracera les deux tangentes $s'z'$, $s'x'$ et la corde $z'x'$ qui joint les deux points de tangence.

Cette dernière ligne sera la projection verticale du cercle demandé.

La projection horizontale sera une ellipse dont le grand axe cc doit être égal à $z'x'$, et le petit axe zx est la projection horizontale du diamètre $z'x'$.

551. Dans les deux questions précédentes (*fig.* 347 et 350), nous avons placé le centre de la sphère et le point donné dans un plan parallèle au plan vertical de projection. Si le point donné était placé partout ailleurs, on ramènerait la question au cas précédent, en faisant usage d'un plan de projection parallèle à l'axe du cône auxiliaire.

552. La question que nous venons de résoudre serait, au contraire, réduite à sa plus simple expression, si le point donné était situé sur l'une des perpendiculaires projetantes du centre de la sphère.

Dans ce cas (*fig.* 351), la ligne de contact serait le petit cercle $z'x'$, zx, et les plans tangents passant par le point donné auraient pour traces horizontales les droites b, b', b'' tangentes à la trace du cône auxiliaire.

Les traces verticales, s'il était nécessaire de les construire, seraient facilement déterminées en opérant comme nous l'avons dit au n° 50.

553. *Construire un plan tangent à la sphère, parallèlement à une droite donnée.*

1re *solution.* Nommons bb' la ligne donnée (*fig.* 352, *Pl.* 52); une droite quelconque cc', menée parallèlement à la ligne donnée, déterminera deux plans tangents qui satisferont à la question; une seconde droite oo' en donnera deux autres, et ainsi de suite. Le nombre des plans qui satisfont à la question est infini, ils toucheront tous un cylindre circulaire enveloppant la sphère et parallèle à la droite donnée. La ligne de contact sera un grand cercle zx dont le plan sera perpendiculaire à la direction de cette ligne.

554. 2e *solution.* Concevons la sphère projetée sur un plan parallèle à la ligne donnée bb'.

Les deux tangentes sv, sv seront les limites de la projection verticale du cylindre circulaire qui enveloppe la sphère et qui est parallèle à la droite bb'.

Un plan $a'a'$, perpendiculaire au plan vertical de projection et passant par deux angles opposés du quadrilatère $a'a''a'a''$, coupera le cylindre suivant une ellipse qui aura pour projection horizontale la circonférence aa (413).

Enfin, chaque plan tangent sera déterminé par l'une des génératrices du cylindre auxiliaire et par la tangente à la section aa, $a'a'$, au point où cette courbe est rencontrée par la génératrice du cylindre.

Toutes ces tangentes auront la droite $a'a'$ pour projection verticale commune, et toutes leurs projections horizontales seront tangentes à la circonférence aa.

Les intersections des génératrices du cylindre avec le cercle zx, suivant lequel ce cylindre touche la sphère, donneront les points de tangence.

555. *Courbe de contact.* Si la question avait uniquement pour but de déterminer la courbe de contact, on se contenterait de construire (*fig.* 354) la projection horizontale du cercle $z'x'$, suivant lequel la sphère donnée est touchée par le cylindre auxiliaire.

Cette projection sera une ellipse dont le grand axe cc doit être égal à $z'x'$, et qui aurait pour petit axe la droite zx, projection de $z'x'$.

556. Si la droite donnée, au lieu d'être parallèle à l'un des plans de projection, était inclinée d'une manière quelconque, on emploierait une projection auxiliaire parallèle à cette ligne, et la question serait ramenée au cas précédent.

557. *Étant donnés un point, une droite et une sphère, construire par le point un plan qui touche la sphère et qui soit parallèle à la droite donnée* (fig. 353).

On prendra le point donné s pour sommet d'un cône qui envelopperait la sphère, puis on tracera, par le sommet du cône, une seconde droite b parallèle à la ligne donnée a; la question sera réduite à construire par la droite b, un plan tangent à la sphère.

Il y aura deux solutions.

En faisant usage d'un plan de projection parallèle à l'axe du cône auxiliaire, on pourra employer la construction du n° 543.

558. *Construire un plan tangent à deux sphères.*

Concevons les deux sphères A, B (*fig.* 355) enveloppées par un cône circulaire ayant son sommet en s. Tout plan touchant ce cône sera tangent aux deux sphères données. Le nombre de ces plans est infini. Pour les construire, on pourra opérer comme nous l'avons dit (549); ou bien on fera passer par le sommet du cône une suite de droites par chacune desquelles on construira deux plans tangents à l'une des deux sphères; chacun de ces plans touchera le cône dans toute l'étendue d'une génératrice, et contiendra par conséquent un point de la seconde sphère.

En enveloppant les deux sphères par le cône dont le sommet est en u, et construisant des plans tangents à ce cône, on obtiendra encore une série infinie de plans tangents aux deux sphères.

Si les deux sphères se touchaient, cette seconde série de plans se réduirait à un seul; enfin, si elles se coupaient, il ne resterait plus que les plans tangents au cône dont le sommet est en s, lesquels plans se réduiraient eux-mêmes en un seul, si les sphères données se touchaient intérieurement.

559. Si l'on voulait *construire un plan tangent aux deux sphères par un point* m, *situé hors de leurs surfaces*, on joindrait ce point avec le point s, par la droite sm qui déterminerait deux plans tangents, la droite um en déterminerait deux autres; ainsi le problème admettrait quatre solutions. Si le point donné était placé en n ou en ν sur la surface de l'un des deux cônes et hors du second, le nombre des solutions se réduirait à trois.

Il n'y aurait que deux plans tangents si le point donné était en z ou en t, sur les cercles d'intersection des deux cônes.

Si le point donné était en x ou en y, c'est-à-dire sur l'un des deux cônes et dans l'intérieur de l'autre, il n'y aurait qu'un plan tangent.

Enfin le problème serait impossible, si le point donné était en même temps dans l'intérieur des deux cônes.

560. *Construire un plan tangent à trois sphères.*

Étant données les trois sphères A, B, C (*fig.* 356), on construira des cônes qui envelopperaient ces sphères deux à deux, tant extérieurement qu'intérieurement; on obtiendra pour les sommets de ces cônes six points, *stuxyz*, qui étant pris trois à trois, donneront quatre lignes droites, *stu*, *sxz*, *tyz*, *uyx*. Tout plan passant par l'une de ces droites et touchant l'une des trois sphères sera nécessairement tangent aux deux autres. Ainsi, par exemple, un plan qui contiendrait la droite *stu* et qui toucherait la sphère A, contiendrait dans toute son étendue l'une des génératrices du cône *u*A; il aurait donc un point de commun avec la sphère B, et comme il contient le point *s*, il toucherait le cône *s*B et par conséquent la sphère C.

Par chacune des quatre droites passant par les sommets des cônes, on pourra mener deux plans tangents, ce qui fera huit solutions pour le cas général.

Voici la disposition de ces plans.

	En deçà de	Au delà de
1er	A, B, C. . . .	. . . .
2	. . . .	A, B, C.
3	A.	B, C.
4	B, C.	A.
5	B.	A, C.
6	A, C.	B.
7	C.	A, B.
8	A, B.	C.

Si quelques-unes de ces sphères se touchaient ou se coupaient, le nombre des solutions diminuerait. Si les sphères étaient égales, les deux premiers plans seraient parallèles; enfin si les rayons des sphères se réduisaient à zéro, les huit plans tangents se confondraient en un seul, les cônes enveloppants deviendraient trois lignes droites, et la question se réduirait à faire passer un plan par trois points (*fig.* 358).

561. *Construire un plan tangent à une sphère et à un cylindre.*

Concevons (*fig.* 357) la sphère enveloppée par un cylindre parallèle au cylindre donné; il ne restera plus qu'à construire un plan tangent aux deux cylindres. Pour y parvenir on coupera ces deux cylindres par un plan quelconque, ce qui donnera deux courbes que l'on sait construire; les tangentes communes à ces deux courbes appartiendront aux plans demandés; enfin on mènera par ces droites des plans parallèles aux deux cylindres. Si le cylindre donné B a pour directrice une courbe convexe et fermée, comme on le voit dans la figure, le problème admettra quatre solutions. En général, le nombre des solutions sera égal au nombre des tangentes que l'on pourra mener aux courbes provenant de l'intersection des deux cylindres par un plan quelconque.

562. Si le cylindre proposé B était circulaire, on pourrait encore opérer comme il suit : on inscrirait dans ce cylindre B une sphère C, puis l'on construirait le cône *s*C, qui envelopperait cette sphère et la sphère donnée; enfin, menant par le point *s* une droite *a* parallèle au cylindre donné, on ferait passer par cette droite deux plans tangents à l'une des deux sphères; ces plans satisferaient à la question. La droite *b*, menée parallèlement au cylindre par le sommet du cône qui enveloppe les sphères A et C intérieurement, déterminera deux autres plans tangents.

Si le rayon de la sphère donnée devenait égal à zéro, la question se réduirait au problème du n° (376).

Si les génératrices du cylindre se rapprochaient et se réduisaient à une seule, on reviendrait à la question (541).

563. *Construire un plan tangent à une sphère et à un cône.*

Concevons (*fig.* 359) la sphère donnée A enveloppée par un second cône ayant le même sommet que le cône proposé; il ne s'agira plus que de construire un plan tangent à ces deux cônes. Pour cela on les coupera par un plan quelconque, ce qui donnera deux courbes auxquelles on mènera des tangentes. On fera passer un plan par chacune de ces tangentes et le sommet commun des deux cônes. Dans le cas indiqué sur la *fig.* 359, il y aura quatre solutions.

564. Si le cône proposé B est circulaire, on pourra inscrire dans ce cône une sphère C; puis construisant le cône qui envelopperait les deux sphères, on n'aura plus qu'à mener les plans tangents aux deux cônes. Joignant les sommets par la droite *sv*, on construira deux plans tangents à l'une des sphères; ces deux plans toucheront l'autre sphère, et le cône dans toute sa longueur.

La droite qui joint le point *s* avec le point *u* déterminera deux autres plans tangents.

Pour exécuter ces épures, on construira les projections des données, puis les tangentes aux projections des sphères seront les limites des cylindres ou cônes enveloppants. On opérera pour le reste comme dans les problèmes précédents.

565. *Construire l'intersection d'une ligne droite avec la surface d'une sphère.*

Soit (a,a') (*fig.* 360, *Pl.* 53) la droite donnée; construisons par cette droite un plan *p*, perpendiculaire au plan horizontal; ce plan coupera la sphère (AA') suivant un cercle vertical dont la projection horizontale *b* doit se confondre avec celle de la droite donnée, et qui aura pour projection verticale l'ellipse b' que l'on construira par l'un des moyens indiqués (533, 534). Ce cercle sera coupé par la droite (a, a'), suivant deux points (m, m') (m, m') qui appartiennent à la surface de la sphère.

On peut éviter la construction de l'ellipse b' en faisant tourner le plan p autour de la verticale d, d', situé dans ce plan, jusqu'à ce qu'il soit arrivé dans la position p'' parallèle au plan vertical. Dans ce rabattement, la droite donnée devient a'', et la section dans la sphère est le cercle b'', les points demandés sont $(m''m'')$; les projetant en $(m'''m''')$, et ramenant le plan p'' à sa position primitive, on aura les projections (m, m). Quant aux projections verticales (m', m'), elles seront déterminées par les intersections des horizontales passant par les points m'', m'', avec les perpendiculaires à la ligne AZ, passant par les points (m, m).

566. Si le cercle b'' était touché par la droite a'', on en conclurait que la ligne aa' touche la surface de la sphère, et si a'' ne rencontrait pas b'' il n'y aurait pas de points communs entre la sphère et la droite donnée.

567. Si l'une des projections de la ligne donnée (*fig.* 363) passait par le centre de la projection correspondante de la sphère, on emploierait comme surface auxiliaire le plan projetant de la ligne; la section dans la sphère serait un grand cercle, dont on éviterait la construction en le rabattant autour de la ligne projetante du centre; par suite de ce mouvement la droite donnée viendrait se placer en a'', et les deux points m'', m'', ramenés à leur place, deviendraient (m, m) (m', m').

568. Enfin, si la ligne donnée était parallèle à l'un des plans de projection, le plan auxiliaire serait lui-même pa-

rallèle à ce plan, de sorte que la section dans la sphère se projetant par un cercle, il n'y aurait à construire ni ellipse ni rabattement.

569. *Construire la section de la sphère par un plan oblique aux plans de projection.*

Concevons (*fig*. 362) un plan horizontal p. Ce plan coupera la sphère A suivant un cercle (a, a'), et le plan donné B suivant une ligne (b, b') parallèle à la trace horizontale. Or le cercle (a, a') et la droite (b, b'), étant dans un même plan, se couperont en deux points (m, m') (m, m'), qui feront partie de la courbe cherchée. En recommençant cette construction, on obtiendra autant de points que l'on voudra. Mais pour vérifier les constructions et pour éviter les intersections trop aiguës, il sera bon de faire simultanément usage de plans parallèles au plan horizontal, et de plans parallèles au plan vertical. Ainsi un plan p', parallèle au plan vertical, vérifierait la position de l'un des points m, m' et déterminerait celle du point nn'.

Cette méthode a l'inconvénient de laisser de l'incertitude sur la position du point le plus élevé, et sur celle du point le plus bas de la courbe.

On pourra trouver ces points, et en même temps on donnera plus d'exactitude aux constructions, en projetant la sphère sur un plan auxiliaire p'', vertical et perpendiculaire au plan coupant B. La projection A″ de la sphère sur ce plan s'obtiendra en prenant sur la projection verticale primitive la hauteur du centre au-dessus du plan horizontal, et l'on aura la nouvelle trace du plan B, en projetant un point quelconque de ce plan sur le plan auxiliaire p''. Dans cette nouvelle projection verticale, la section, qui est une courbe plane, sera représentée par la ligne droite vz. Le point v sera le point le plus bas de la courbe, et le point z sera le point le plus élevé. Pour construire par ce moyen la projection horizontale d'un point de la courbe, on concevra comme précédemment un plan horizontal p, qui coupera la sphère suivant le cercle a, et le plan B suivant la droite b, et l'intersection de b avec a donnera les deux points m, m.

570. Comme l'on sait (*Géom.*) que l'intersection d'une sphère par un plan est toujours un cercle, il sera encore plus exact de rabattre ce cercle sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de la trace horizontale du plan B. Les deux points qui, sur le plan auxiliaire p'', sont projetés en m'', viendront, dans le rabattement sur le plan horizontal, se placer en m^{IV}, m^{IV}, et leurs projections horizontales (m, m) seront déterminées par les intersections de la ligne $m''b$ avec les deux droites mm^{IV}, mm^{IV}, menées par les points m^{IV}, perpendiculairement à la trace horizontale du plan B.

Au lieu de la projection auxiliaire sur le plan p''; on aurait pu faire usage de la section, par un plan vertical p''' passant par le centre et perpendiculaire au plan B, et l'on aurait pu faire tourner ce plan autour de sa trace verticale, pour le rabattre dans la position A'''.

Au surplus je n'ai indiqué tous ces rabattements que pour faire voir comment on peut vérifier les constructions, ou leur donner plus d'exactitude; mais il sera toujours préférable de prendre dès l'origine un plan de projection perpendiculaire au plan coupant.

571. Au lieu de chercher les points suivant lesquels le plan donné coupe les parallèles de la sphère, on peut déterminer l'intersection de ce plan avec les méridiens.

Ainsi, par exemple (*fig.* 361), le plan méridien 0—4 coupera le plan donné suivant une droite, et la sphère suivant un grand cercle. Ces lignes, étant toutes deux situées dans le plan 0—4, se couperont suivant deux points qui appartiennent à la courbe demandée.

Pour éviter la projection elliptique du grand cercle, provenant de la section de la sphère par le plan auxiliaire 0—4, on fera tourner ce plan autour de la verticale projetante du point *o*; dans ce mouvement, la section méridienne *o*—*u* viendra se placer dans le plan vertical 0—6′, et se confondra par suite de ce rabattement avec le méridien principal de la sphère; on construira le point *s*, suivant lequel le plan donné B est percé par la vertical passant par le centre de la sphère. De plus, le point 4 se rabattra en 4″, et la droite *s*—4″ sera l'intersection du plan donné B par le plan méridien 0—4.

Les deux points *u*″,*u*″ projetés sur 0—6′ et ramenés de là dans le plan méridien 0—4, feront partie de la courbe demandée.

Chaque rabattement fera connaître quatre points : en effet, par suite de la position symétrique des deux plans *o*—4, *o*—5, les opérations effectuées pour déterminer les points situés dans le plan 0—4 conviendront également pour les points situés dans le plan *o*—5.

Le plan méridien 0—1, perpendiculaire au plan B, donnera le point le plus bas et le point le plus élevé de la courbe.

La droite *s*—6″, tangente au méridien principal de la sphère, déterminera les deux plans 0—6, 0—7, tangents à la projection horizontale de la courbe cherchée.

572. La section de la sphère par un plan étant toujours un cercle, et la projection d'un cercle étant toujours une ellipse (*Géom. anal.*), on peut encore opérer comme il suit : Soit (*fig.* 361) la sphère A,A′ et le plan B, on construira par le centre de la sphère un plan méridien 0—1, perpendiculaire au plan B; en faisant tourner ce plan au-

tour de la verticale, qui passe par le centre de la sphère, le point s, suivant lequel le plan donné est percé par la verticale du centre, ne changera pas de place, le point 1 viendra se placer en $1'$ et se projettera en $1''$. Le cercle cherché perpendiculaire au plan 0—1, sera représenté dans ce rabattement par la droite $v''z''$ égale à la véritable grandeur du diamètre de la section; le point c'', milieu de $v''z''$, étant ramené en c et relevé en c', donnera les deux projections du centre. Le grand axe de la projection horizontale sera horizontal, et par conséquent parallèle à la trace horizontale du plan B, et le grand axe de la projection verticale sera parallèle à la trace verticale de ce même plan. De plus, les longueurs de ces grands axes sont égales à la ligne $v''z''$; et comme on sait que les petits axes des ellipses sont perpendiculaires aux grands, il ne manque plus que de connaître ces petits axes ou un point quelconque de la courbe (255) : le point v'' projeté horizontalement en v' et ramené en v sera l'extrémité du petit axe pour la projection horizontale de la courbe.

En faisant par le centre de la sphère une section perpendiculaire à la trace verticale du plan B, et rabattant cette section comme nous venons de le faire pour le plan 0—1, on aura le petit axe pour la projection verticale.

On peut encore remarquer que l'axe mn étant horizontal, doit avoir sa projection verticale parallèle à la ligne AZ, de sorte qu'en élevant la perpendiculaire mm', on aura sur la projection verticale, un point m' qui, avec l'axe $e'r'$, suffit pour construire l'ellipse, et dispense de chercher le petit axe de la projection verticale du cercle.

573. On peut faire usage d'un plan oblique pour résoudre le problème énoncé (565).

Soit (*fig.* 364) la sphère A, A', dont on demande l'intersection par la droite donnée (a,a'). Concevons un plan par cette droite et le centre de la sphère ; l'intersection de la sphère par ce plan sera un grand cercle qui aurait pour projection horizontale une ellipse; mais on évitera la construction de cette courbe en faisant tourner le plan coupant autour de l'horizontale c,c', passant par le centre de la sphère. Par suite de ce rabattement, la section dans la sphère viendra se confondre avec le grand cercle qui forme la limite de sa projection horizontale; la ligne donnée se rabattra en a'', et les points cherchés seront (m'', m''). Ces points reviendront à leur place, en décrivant deux arcs verticaux projetés en (mm'', mm''), perpendiculairement à la ligne (cc') prise pour charnière du rabattement : les perpendiculaires (m', m) (m', m) détermineront les projections verticales des points demandés.

Intersection des sphères, cylindres et cônes.

574. *Trouver la courbe provenant de l'intersection d'une sphère et d'un cylindre.*

Pour obtenir sur la sphère les lignes les plus simples, il faudrait couper les deux surfaces données par des plans parallèles à l'un des plans de projection, mais alors les sections dans le cylindre seraient des courbes égales à sa trace, et que l'on ne pourrait construire que par points, excepté dans le cas où cette trace serait un cercle. On fera donc mieux d'employer des plans parallèles aux génératrices du cylindre et perpendiculaires à l'un des plans de projection. Il est vrai que les sections dans la sphère auront pour projection des ellipses, mais d'abord on pourrait trouver facilement les axes de ces ellipses, qu'il ne serait pas même nécessaire de construire entièrement. Ensuite on pourra éviter la construction de ces courbes en projetant les sections faites dans le cylindre et dans la sphère, sur un plan auxiliaire vertical, et parallèle aux génératrices du cylindre. Ainsi, par exemple, pour obtenir l'intersection de la sphère (A, A') (*fig.* 365, *Pl.* 54) et du cylindre (B, B'), on construira un plan vertical p parallèle aux génératrices du cylindre; ce plan coupera le cylindre suivant deux droites (b,b') (b,b'), qui, projetées sur le plan p'' et rabattues sur le plan horizontal, deviendront (b'', b''). La section dans la sphère sera représentée dans ce rabattement par le cercle a'', et les intersections de ce cercle par les droites (b'',b'') donneront quatre points (m''). En relevant le plan p'', il sera facile d'obtenir les projections horizontales (m, m) de ces quatre points, et par suite leurs projections verticales. En recommençant cette construction on obtiendra autant de points que l'on voudra.

Dans l'exemple que nous avons choisi, il y a deux courbes, ce qui forme une pénétration dans la sphère; une portion de l'une des deux courbes est située derrière le plan vertical de projection.

La question que nous venons de résoudre revient évidemment à chercher l'intersection de chacune des génératrices du cylindre avec la sphère; il ne s'agit donc que de faire plusieurs fois la construction indiquée n° 565.

575. On évite ordinairement la projection auxiliaire sur le plan p'', en plaçant dès l'origine le cylindre parallèlement à l'un des plans de projection, comme on le voit (*fig.* 366).

576. *Construire la courbe provenant de l'intersection d'une sphère et d'un cône.*

Soient (*fig.* 367) la sphère A, A' et le cône donné B, B', on construira par le sommet du cône un plan vertical p, ce plan coupera le cône suivant deux lignes droites (b, b') (b, b'), que l'on rabattra en $(b''b'')$, sur le plan horizontal, en les faisant tourner autour de la trace du plan p, la section de la sphère par ce même plan sera le cercle a'', et les quatre points (m'', m'', ...) feront partie de la courbe cherchée; en ramenant le plan p à sa place, les points (m''....) viendront se projeter en (m....), d'où il sera facile de déduire leurs projections verticales (m'....).

577. Si la trace du cône était un cercle, on pourrait employer comme surfaces auxiliaires, des plans parallèles au plan de projection. Dans ce cas (*fig*. 368), les sections dans le cône et dans la sphère seraient des cercles parallèles au plan de projection.

578. On devrait encore faire usage de plans parallèles aux plans de projection, si le sommet du cône n'était pas sur l'épure; alors on obtiendrait pour section dans le cône, des courbes parallèles et semblables à sa trace, et la construction de ces courbes ne présenterait aucune difficulté (490).

579. *Construire la courbe provenant de l'intersection de deux sphères.*

Un plan p, parallèle au plan horizontal (*fig*. 369), coupera les sphères proposées suivant deux cercles, dont les projections verticales a' et b' se confondront avec la trace du plan p, et dont les projections horizontales, a, b, donneront pour leur intersection deux points (m, m) appartenant à la projection horizontale de la courbe cherchée. Les projections verticales de ces mêmes points seront déterminées par les perpendiculaires mm', mm'.

Le plan p' parallèle au plan vertical, vérifie la position de l'un des points précédents et détermine celle du point (n, n'). On obtiendra par ce moyen autant de points que l'on voudra.

Le plan horizontal p'' passant par le centre de la sphère B,B', donne les points u, v, suivant lesquels le grand cercle formant la projection horizontale de cette sphère est touché par la projection horizontale de la courbe cherchée, et le plan vertical p''', passant par le centre de la même sphère, donne les points s, z, suivant lesquels la projection verticale est touchée par celle de la courbe.

580. On sait (*Géom.*) que la courbe provenant de l'intersection de deux sphères est un cercle, et que par conséquent ses projections doivent être des ellipses.

Si l'on voulait en déterminer les axes, on opérerait de la manière suivante : Concevons (*fig.* 370) un plan vertical p, contenant les centres de deux sphères (A,A') (B,B'). Ce plan les coupera suivant deux grands cercles verticaux qui, rabattus dans le plan Bp', en tournant autour de la verticale du centre, seront représentés par les cercles a et b. Le cercle cherché, perpendiculaire à la ligne des centres, sera, par suite de ce rabattement, projeté par la droite vz, qui sera la véritable grandeur du diamètre, et par conséquent celle des grands axes st, xu : le point v projeté en v' et ramené en v'' donnera l'extrémité du petit axe pour la projection horizontale. En coupant les deux sphères par le plan p'', perpendiculaire au plan vertical, et rabattant la section dans le plan horizontal p''', on obtiendra le point n'' pour l'extrémité du petit axe de la projection verticale. Enfin les plans $p^{\text{IV}} p'''$, $p^{\text{V}} p'$, menés par les centres de sphères et parallèlement aux plans de projection, détermineront les points suivant lesquels les grands cercles formant les projections de ces sphères sont touchés par les projections de la courbe.

581. On évitera une grande partie de ces constructions en prenant dès l'origine un plan de projection parallèle à

la ligne des centres, comme on l'a fait pour obtenir l'intersection des deux sphères (B, B′) (C, C′) (*fig.* 369) : dans ce cas, la projection verticale de la section est la droite $a'b'$, et la projection horizontale a pour grand axe $cd=a'b'$, et pour petit axe ab, projection horizontale de $a'b'$.

582. *Questions diverses*. Je terminerai ce chapitre par quelques combinaisons remarquables de la sphère avec le cylindre et le cône.

583. Supposons qu'il s'agisse (*fig.* 375, *Pl.* 55) de trouver la courbe d'intersection d'une sphère par un cône, qui aurait pour sommet le centre de la sphère.

On coupera, comme nous l'avons fait au nº 576, les deux surfaces proposées par des plans verticaux passant par le sommet du cône. Tous ces plans contenant le centre de la sphère, couperont cette surface suivant des grands cercles, dont on évitera la projection elliptique, en les rabattant autour de la verticale projetante du centre de la sphère.

Ainsi, par exemple, pour avoir le point où la génératrice $s-1$ perce la sphère, on concevra le plan vertical projetant de cette ligne; la section dans la sphère sera un grand cercle, qui, étant rabattu autour de la verticale du point ss', viendra se confondre avec la projection du méridien principal. La génératrice $s-1$ se rabattra en $s-1''$, et l'intersection de cette droite avec le grand cercle vu donnera le point m'', qui, ramené à sa place, deviendra m, m'.

La même opération étant recommencée pour toutes les génératrices du cône, on obtiendra les deux courbes $ac, a'c'$ pour les projections de la ligne de pénétration du cône dans la sphère.

Si l'on veut construire cette courbe dans le développement de la surface du cône, on remarquera d'abord que puisqu'elle appartient à la surface de la sphère, tous ses points sont à égale distance du point ss' sommet du cône.

De plus, chaque élément infiniment petit de la courbe que nous venons d'obtenir peut être considéré comme situé dans un plan tangent à la surface de la sphère, et par conséquent la courbe d'intersection rencontre partout à angle droit les génératrices du cône, puisque ces lignes sont des rayons de la sphère.

Si l'on éloignait le sommet jusqu'à l'infini, le cône se changerait en un cylindre, la sphère en un plan, et par conséquent la courbe deviendrait plane et représenterait la section droite du cylindre. Ainsi, la courbe $ac,a'c'$ est pour le cône ce que la section droite est pour le cylindre.

Tous les points de la courbe que nous venons d'obtenir étant à égale distance du sommet du cône, si l'on conçoit cette courbe partagée en un grand nombre d'arcs très-petits, et que par les points de division on fasse passer des génératrices du cône, on pourra sans erreur sensible regarder la portion de surface conique comprise entre deux génératrices consécutives et le petit arc correspondant, comme un triangle isocèle, de sorte qu'en plaçant tous ces petits triangles à côté les uns des autres, leur ensemble formera un secteur de cercle. De là résulte la construction suivante :

Du point s' avec un rayon égal à $s'a'$, on décrira l'arc de cercle $m^{\text{IV}}om^{\text{IV}}$ sur lequel on portera la longueur véritable de la courbe à double courbure obtenue précédemment, et le secteur $s'm^{\text{IV}}om^{\text{IV}}$ sera le développement de la portion de cône comprise entre le sommet et la courbe $ac, a'c'$.

Pour avoir la longueur de l'arc $m^{\text{IV}}om^{\text{IV}}$, on développera le cylindre projetant de la courbe ac, $a'c'$ (325), ce qui donnera la courbe $m'''om'''$; on portera les arcs qui composent cette courbe à la suite les uns des autres sur le cercle $m^{\text{IV}}om^{\text{IV}}$, ce qui déterminera le secteur formant le développement du cône.

En portant ensuite sur chaque rayon prolongé la véritable grandeur de la partie de la génératrice correspondante, on construira facilement la courbe $1'''z1'''$ qui représente le développement de la trace horizontale du cône.

584. Si le cône proposé était circulaire (*fig.* 376), la ligne de pénétration serait un cercle perpendiculaire à l'axe du cône.

585. La ligne de pénétration sera encore un cercle (*fig.* 377), toutes les fois que le cône sera circulaire et que son axe passera par le centre de la sphère.

586. Si le sommet est en dehors de la sphère il y aura deux cercles de pénétration, et l'on conçoit que si le sommet s'éloignait jusqu'à l'infini, le cône se changerait en un cylindre et les deux cercles deviendraient égaux.

D'où il résulte que lorsque l'axe d'un cylindre circulaire passe par le centre de la sphère, les lignes de pénétration sont deux cercles égaux et parallèles.

587. Il n'est pas toujours nécessaire que le cône et le cylindre soient circulaires, et que leurs axes passent par le centre de la sphère pour que les lignes de pénétration soient des cercles.

Supposons, par exemple, que la sphère A (*fig.* 379) soit pénétrée par un cône oblique, je dis que si la courbe $a'c'$ est un cercle, la courbe ac sera aussi un cercle, et réciproquement.

En effet, par le point o, milieu de ac, concevons un plan parallèle à celui de la courbe $a'c'$, nous obtiendrons dans le cône une section $a''c''$ qui sera semblable à $a'c'$, et par conséquent circulaire.

Dans tout quadrilatère inscrit, la somme des angles opposés est toujours égale à deux angles droits.

On aura donc l'angle

$$a''ao + a'c'c = 2 \text{ angles droits};$$

mais par suite du parallélisme des lignes $a''c''$, $a'c'$, on a :

$$a'c'c + cc''o = 2 \text{ angles droits}.$$

Par conséquent :

$$a''ao + a'c'c = a'c'c + cc''o;$$

Donc

$$a''ao = cc''o.$$

De plus, les angles aoa'', coc'' étant égaux comme opposés par le sommet, les deux triangles $a''ao$, $c''co$ sont semblables et donnent la proportion

$$a''o : oc :: ao : oc'',$$

d'où

$$a''o \times oc'' = ao \times oc. \tag{1}$$

Mais la section $a''c''$ semblable à $a'c'$ étant un cercle, si nous nommons y l'ordonnée qui a son pied en o, nous aurons

$$y^2 = a''o \times oc''. \tag{2}$$

D'où l'on tire, en comparant les équations (1) et (2),

$$y^2 = ao \times oc;$$

et puisque le point o est le milieu de ac,

$$y^2 = \overline{ao}^2.$$

Donc

$$y = ao.$$

Ainsi, ac est une ellipse dont les deux axes sont égaux ; par conséquent cette courbe est un cercle.

588. Par des raisonnements analogues il serait facile de prouver que dans le cas où l'une des courbes de pénétration serait un cercle $a'c$, la seconde courbe de pénétration serait un autre cercle ac'.

589. Si le sommet du cône était dans l'intérieur de la sphère, les deux courbes de pénétration n'appartiendraient pas à la même nappe du cône.

590. Si, au contraire, le sommet du cône s'éloignait jusqu'à l'infini (*fig.* 378), les deux courbes de pénétration deviendraient égales et placées symétriquement par rapport à un plan pq perpendiculaire à la droite qui contient leurs centres.

591. Les relations que nous venons de mettre en évidence donnent quelquefois lieu à des abréviations. Ainsi, par exemple (*fig.* 373), A et A' étant les deux projections d'un hémisphère creux, si l'on proposait de construire la pénétration de cet hémisphère par un cylindre oblique, ayant pour directrice le grand cercle ac et pour génératrice la droite $vu, v'u'$, on construirait la projection auxiliaire A'', sur laquelle la courbe de pénétration $m'n'm'$ se projetterait par une ligne droite $m''n''$. Il serait ensuite facile de construire cette courbe sur les deux projections, en ramenant chacun de ses points ou en cherchant les axes.

592. *Construire l'intersection d'une ligne courbe avec la surface d'une sphère.*

On emploiera (*fig.* 374) comme surface auxiliaire un cylindre C, perpendiculaire au plan horizontal et contenant la courbe donnée aa'. Cette surface, qui n'est autre que le cylindre projetant de la ligne donnée, coupera la sphère suivant une courbe à double courbure, dont la projection horizontale se confondra avec celle de la courbe a, et dont la projection verticale b' sera coupée par la projection verticale de la ligne donnée en deux points (m', m'), qui seront les projections verticales des points demandés (m, m') (m, m').

Pour construire la projection verticale de la ligne (b, b'), on élèvera des perpendiculaires par les points suivant lesquels la trace du cylindre C coupe les projections horizontales des parallèles de la sphère.

593. Si quelques-uns de ces cercles étaient rencontrés trop obliquement par la projection de la courbe donnée, on pourrait employer des sections méridiennes de la sphère.

Ainsi, par exemple, la verticale projetante du point m coupe la section méridienne op en deux points, qui, rabattus dans le plan du méridien principal, deviennent $m''m''$.

Ramenant ensuite ces points à leur place, on obtient $m'm'''$.

594. Il peut être avantageux dans certains cas d'employer comme surface auxiliaire un cône qui aurait pour sommet le centre de la sphère, et pour directrice la courbe donnée. Dans ce cas on obtiendrait l'intersection du cône avec la sphère, en opérant comme nous l'avons fait au numéro 583.

595. *Raccordement de la sphère avec le cylindre et le cône.*

Pour qu'une sphère se raccorde avec un cône ou un cylindre il faut :

1° Que le cône ou le cylindre soit circulaire ;

2° Que leur axe passe par le centre de la sphère ;

3° Que la génératrice du cône ou du cylindre soit tangente à la sphère.

La ligne de raccordement d'un cylindre avec la sphère (*fig.* 372) sera toujours un grand cercle zx; et la ligne de raccordement de la sphère et du cône sera un petit cercle vu (*fig.* 371).

Épicycloïde sphérique.

596. Soient (*fig.* 380, *Pl.* 56) deux cônes circulaires $(A, A')(B, B')$ ayant pour sommet commun le point ss', et pour bases les deux circonférences $(a—15)$ $(a'—15)$ et $(15—c')$ $(15—c)$ tangentes au point 15.

Si l'on fait rouler le cône BB' sur le cône immobile AA', chacun des points de la circonférence $(c—15)$ $(c'—15)$ décrira une courbe à laquelle on donne le nom d'*épicycloïde sphérique*.

On demande de construire les projections de l'une de ces courbes.

Nous prendrons pour l'un des deux plans de projection celui qui contient la base du cône immobile, et nous allons construire la courbe engendrée par le point $1, 1'$ du cercle incliné.

Nous ferons tourner le cercle générateur autour de l'horizontale projetante du point cc', et lorsque nous aurons amené ce cercle dans le plan horizontal $c'—15'$, nous le partagerons en un nombre quelconque de parties égales, en 16 par exemple.

Nous ferons revenir le cercle générateur à sa place, et nous déterminerons bien exactement chaque point de division sur les deux projections $15—c$, $15—c'$.

Enfin, nous porterons tous les arcs égaux du cercle générateur à la suite les uns des autres sur la circonférence du cercle immobile. Cela étant fait:

Proposons-nous de construire la courbe engendrée par le point 1. Nous choisirons ce point de préférence, afin que la projection de la courbe cherchée ne se confonde pas avec les opérations précédentes.

Si nous supposons actuellement que l'on fasse rouler le cône incliné dans le sens indiqué par la flèche, les différents points de division du cercle 15—c, 15—c' viendront successivement toucher les points correspondants de la base du cône immobile, et le centre oo' du premier cercle parcourra dans l'espace un arc projeté sur le plan horizontal par la circonférence oo'' et sur le plan vertical par la droite $o'o''$.

Lorsque le point 2 viendra toucher la circonférence du cercle immobile, le point 1 sera placé, par rapport au point 2, comme le point 14 était placé par rapport au point 15, au moment où les axes des deux cônes étaient dans un même plan parallèle au plan vertical de projection. De sorte que pour obtenir le point 1′ on décrira du point s, comme centre, la circonférence 14—v', puis avec le compas on fera l'arc de cercle v'—1′ égal à v—14.

Pour déterminer le point 1″ on décrira la circonférence 13—u', et l'on fera l'arc u'—1″ égal à u—13.

En continuant à opérer de la même manière, on obtiendra tous les points de la courbe demandée, quelle que soit la position du cercle mobile.

Le point générateur ne quitte pas la surface d'une sphère qui a pour rayon la droite s'—15, génératrice commune des deux cônes; c'est pourquoi la courbe obtenue se nomme *épicycloïde sphérique* pour la distinguer de l'*épicycloïde plane* que nous avons étudiée au nº 298.

597. Si le sommet commun aux deux cônes s'éloignait du plan horizontal a'—15, la courbure de la sphère diminuerait, et lorsque le centre serait parvenu jusqu'à l'infini, la surface de la sphère serait plane, les deux cônes seraient

remplacés par deux cylindres circulaires, et la courbe engendrée serait une épicycloïde plane.

598. Pendant que chacun des points de la circonférence $(15-c)$ $(15-c')$ décrit une épicycloïde sphérique, tous les autres points situés dans le même plan décrivent des *épicycloïdes rallongées* ou *raccourcies*, suivant qu'ils sont en dehors ou en dedans de la circonférence mobile.

Proposons-nous, par exemple, de déterminer la position que doit occuper le point 17, lorsque le point 1, générateur de l'épicycloïde, sera parvenu en $1'''$.

Nous remarquerons d'abord qu'à l'instant dont il s'agit les deux cercles se touchent par le point 6; mais pour que ce point vienne remplacer le point $15''$ dans le rabattement, il faut que le point 1 prenne la place du point 10, et dans ce cas, le point 17, ramené en $17'$, aura pour projections les deux points $17''$, $17''$.

De sorte que pour obtenir le point demandé on décrira la circonférence $17''-x$ et l'on fera l'arc de cercle $x'-17'''$, égal à $x-17''$.

En opérant de la même manière on obtiendra tous les points de l'épicycloïde sphérique rallongée.

Par des constructions analogues on obtiendra le point $18'''$ qui appartient à l'épicycloïde raccourcie engendrée par le point 18.

Si on a bien opéré, les quatre points o'', $18'''$, $1'''$, $17'''$, doivent être sur un même rayon $o''-1'''$ du cercle mobile.

599. *Tangentes à l'épicycloïde sphérique.*

1^re^ *solution.* Lorsque le cercle mobile devient tangent au point 6, le point générateur se meut pendant un instant très-court comme s'il tournait autour du point de tangence des deux cercles. De sorte que l'on peut considérer l'arc infiniment petit, qui est dans le voisinage du point $1'''$, comme s'il était situé sur la surface d'une sphère qui aurait son centre au point 6, et dont le rayon serait la droite 6—$1'''$. De plus, ce même arc appartient à la sphère qui a pour rayon le côté s—$1'''$ du cône mobile; il fera donc partie de l'intersection de ces deux sphères, et la question sera réduite à construire une tangente à cette intersection.

Voici l'ordre des opérations; on construira (540) : 1° la droite pq, trace horizontale du plan qui toucherait au point $1'''$ la sphère qui a pour rayon s—$1'''$.

2° La droite pg, trace horizontale du plan tangent à la sphère qui a pour rayon 6—$1'''$.

3° La droite p—$1'''$, intersection des deux plans tangents et qui sera par conséquent tangente à l'épicycloïde.

600. 2ᵉ *solution*. La tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface d'une sphère, devant être perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par le point de tangence, la ligne demandée, intersection des plans tangents aux deux sphères qui ont pour rayons les droites s—$1'''$, 6—$1''$, sera perpendiculaire à chacune de ces deux lignes, et par conséquent au plan qui les contient. Ainsi, au lieu de chercher, comme nous venons de le faire, les traces des deux plans tangents au point $1'''$, il sera plus simple d'opérer de la manière suivante :

1° On construira la droite $s'z'$ suivant laquelle le plan des deux rayons s'—$1'''$, 6—$1'''$ est coupé par le plan 15—s—a, parallèle au plan vertical de projection.

La ligne $s'z'$ sera parallèle à la trace verticale du plan s—$1'''$—z', et la droite $p'm'$ perpendiculaire sur $s'z'$ sera par conséquent la projection verticale de la tangente.

2° On construira la droite 6—y, trace horizontale du plan s—$1'''$—6, et la ligne pm, perpendiculaire sur 6—y, sera la projection horizontale de la tangente.

Les tangentes aux épicycloïdes rallongées ou raccourcies s'obtiendront par des considérations de même nature.

Ainsi, pour la tangente au point $17'''$ de l'épicycloïde rallongée, on construirait la perpendiculaire au plan qui contiendrait les deux rayons s—$17'''$, 6—$17'''$, et pour la tangente au point $18'''$ de l'épicycloïde raccourcie, on construirait la perpendiculaire au plan des rayons s—$18'''$, 6—$18'''$.

601. La *fig.* 384 contient les deux projections de l'épicycloïde sphérique que l'on obtient lorsque le cercle mobile est perpendiculaire au plan du cercle directeur, et dans les *fig.* 282, 283, on a supposé que l'un des deux cônes était remplacé par un plan.

FIN DU SECOND LIVRE

LIVRE III.

CHAPITRE PREMIER.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES SURFACES COURBES.

602. En jetant un coup d'œil sur les questions diverses dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent, il sera facile de rattacher nos idées à un petit nombre de principes généraux.

Dans le premier livre nous avons étudié les surfaces planes, et dans le second nous avons vu les surfaces cylindriques, coniques et sphériques.

603. Chaque surface a été considérée comme engendrée par le mouvement d'une ligne assujettie à se mouvoir suivant des conditions données, *l'énoncé de ces conditions formant la définition de la surface.*

Ainsi le plan est engendré par le mouvement d'une droite qui se meut parallèlement à elle-même, en s'appuyant toujours sur une autre droite immobile dans l'espace. La droite mobile se nomme la génératrice, et la droite sur laquelle elle s'appuie a reçu le nom de directrice. Si nous remplaçons cette dernière ligne par une courbe, nous obtenons une suface cylindrique; et si, au lieu du parallélisme des génératrices, nous les faisons concourir en un même point, nous avons une surface conique.

604. Au reste, nous n'avons admis ces divers modes de génération que pour plus de simplicité, mais l'on n'est pas

nécessairement contraint de s'y assujettir. En général, toute ligne, droite ou courbe, que l'on ferait mouvoir d'après des conditions telles que dans toutes ses positions elle serait toujours située dans une certaine surface, pourrait être regardée comme la génératrice de cette surface. Ainsi, par exemple, on pourrait encore engendrer le plan par une ligne droite qui tournerait autour d'une autre droite immobile, avec laquelle elle ferait constamment un angle droit. La droite fixe se nommerait l'axe du plan. Dans cette génération, qui a de l'analogie avec celle du cône, la droite génératrice changeant à chaque instant de direction dans l'espace, cette dernière condition eût été moins facile à représenter sur les épures que le parallélisme des génératrices; c'est pourquoi ce dernier mode de génération a été préféré. On peut engendrer le cylindre en supposant qu'une courbe quelconque se meut parallèlement à elle-même, en s'appuyant toujours sur une ligne droite qui devient la directrice.

Pour le cône, on peut supposer qu'une courbe glisse parallèlement à elle-même en suivant toujours une droite directrice, de manière que, sans changer de forme, elle varie de grandeur proportionnellement à sa distance au sommet. Enfin, au lieu de considérer la sphère comme provenant du mouvement d'un grand cercle qui tourne autour de son diamètre, on peut supposer qu'un cercle variable de grandeur se meut parallèlement à lui-même, de manière que son centre parcoure une ligne droite, et qu'en nommant R le rayon de la sphère que l'on veut engendrer, r le rayon du cercle générateur, et d la distance de son plan au centre de la sphère, on ait

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

605. Il résulte de ce que nous venons de dire, qu'une surface peut être engendrée de plusieurs manières, et que

l'on est libre de choisir celle de ces générations qui convient le mieux soit pour la représentation de la surface sur les épures, soit pour la solution des divers problèmes qui en dépendent.

606. J'ai cru devoir commencer par appeler l'attention du lecteur sur les surfaces cylindriques, coniques et sphériques, parce qu'elles sont la base essentielle de presque toutes les combinaisons de l'industrie.

Nous allons actuellement considérer les surfaces courbes sous un point de vue plus général.

607. Quoique la courbure des surfaces puisse être variée d'une infinité de manières, on peut cependant renfermer tous les cas particuliers dans une même définition, en supposant que *toute surface est engendrée par le mouvement d'une ligne quelconque, droite ou courbe, plane ou à double courbure, constante ou variable de forme, et qui se meut suivant des conditions données.*

Si, par exemple, nous faisons tourner l'ellipse $a'o'u'$ (*fig.* 385, *Pl.* 57) autour de la droite verticale $c'o'$, elle engendrera une surface que nous nommerons *ellipsoïde de révolution.*

608. Si nous supposons que l'axe horizontal au varie de longueur pour chaque position nouvelle de l'ellipse mobile, nous obtiendrons une infinité de surfaces différentes.

609. Introduisons la condition que les deux points a,u ne quittent pas la circonférence de l'ellipse horizontale $avux$, alors la surface engendrée prendra le nom d'*ellipsoïde à trois axes* pour la distiguer de l'ellipsoïde de révolution.

610. Nous obtiendrons encore la même surface en sup-

posant qu'une ellipse horizontale telle que *avux* (*fig.* 387) s'élève parallèlement à elle-même en variant de grandeur à chaque position, pourvu que le rapport des axes ne change pas, et que le plus grand de ces deux axes soit toujours égal à l'une des cordes horizontales de l'ellipse *a'o'u'*.

Ces différents modes de générations reviennent à considérer la surface comme le lien géométrique qui contient un système de lignes données.

611. La topographie nous fournira un exemple remarquable de ce genre de définition.

Supposons que l'on veuille déterminer (*fig.* 386) tous les innombrables contours et sinuosités d'un pays de montagnes, on supposera le terrain coupé par une suite de plans horizontaux, et l'on construira les projections horizontales des sections obtenues.

Il est évident que l'on pourra éviter la projection verticale en exprimant par des nombres la hauteur de chaque plan coupant.

Ainsi la courbe désignée par le chiffre 15 sera la section du terrain par un plan horizontal élevé à 15 mètres au-dessus du niveau de la mer; la courbe désignée par le nombre 20 sera la section à 20 mètres de hauteur, etc.

Il serait facile d'augmenter l'exactitude en projetant des sections plus rapprochées.

612. Le lecteur comprendra de suite tout le parti que l'on peut tirer d'une représentation aussi complète de la surface terrestre.

Supposons qu'il s'agisse de tracer une route suivant la direction *ba*, on coupera la surface par le plan vertical, qui a pour trace cette ligne, et la section transportée (*fig.* 388) donnera les différences de niveau de tous les points de la ligne que doit parcourir la route projetée.

Si la projection horizontale de cette route était une courbe *cd*, on développerait (*fig.* 389) le cylindre projetant de cette ligne.

Ces exemples suffisent pour faire comprendre la possibilité de représenter toutes les surfaces courbes, quelque nombreux que soient les accidents et sinuosités de leurs contours. Nous allons diriger plus particulièrement notre attention sur les surfaces employées dans les arts, et dont la génération résulte par conséquent du mouvement de certaines lignes définies.

613. L'idée la plus simple a dû être de classer les surfaces d'après la nature des opérations nécessaires pour les produire.

Ainsi, par exemple, on a nommé *surfaces de révolution* celles qui s'exécutent sur le tour, et *surfaces réglées* celles dont le travail est dirigé par la règle.

Si à ces deux genres de surfaces nous ajoutons les *surfaces enveloppes*, nous aurons réduit à trois toutes les espèces différentes de surfaces courbes employées dans les travaux de l'industrie.

Nous étudierons bientôt en particulier chacun des genres de surfaces que nous venons d'énoncer, mais auparavant nous allons présenter quelques idées générales sur l'ordre que nous devons suivre dans cette étude.

614. Le mode de génération d'une surface étant adopté, il faut savoir, pour chaque cas particulier, répondre aux questions suivantes :

1° *Représenter sur l'épure une surface dont la définition est donnée;*

2° *Exprimer qu'un point ou une ligne fait partie d'une surface donnée;*

3° *Développer* (autant que possible) *la surface donnée en tout ou en partie;*

4° *Mener à la surface donnée des plans tangents, des normales et des surfaces normales;*

5° *Trouver l'intersection de la surface donnée, par un plan;*

6° *Trouver la courbe d'intersection de la surface donnée avec toute autre surface;*

7° *Trouver l'intersection de la surface donnée, par une ligne quelconque, droite ou courbe.*

615. Pour représenter sur l'épure une surface dont la définition est donnée, il suffit de savoir construire la génératrice de cette surface dans une position quelconque.

Quelquefois la surface est infinie dans ses deux dimensions, comme le plan en général et les cylindres et cônes qui ont pour directrices des courbes infinies; d'autres fois elle n'est infinie que dans un sens, comme le cylindre et le cône, lorsque leur directrice est une courbe fermée; enfin elle peut être finie en tous sens, comme la surface de la sphère.

616. En construisant un certain nombre de génératrices, et sur chacune d'elles les points où elle perce les plans de projection, on obtient les traces de la surface.

617. Lorsque la surface est limitée, on doit construire la ligne qui limite sa projection; on obtient cette courbe en cherchant la suite des points suivant lesquels la surface donnée est touchée par une autre surface perpendiculaire au plan de projection. Ainsi, dans les cylindres et cônes, les limites sont situées dans des plans tangents aux courbes directrices, et perpendiculaires aux plans de projection. La limite de la projection de la sphère est la trace d'un cylindre per-

pendiculaire au plan de projection et enveloppant la sphère.

618. Pour mieux faire sentir la forme d'une surface, on a tracé en plein les lignes vues, et en ponctué les lignes cachées.

On a cru cependant devoir s'écarter de cette convention à l'égard du plan, qui, n'ayant pas d'épaisseur, n'est plus qu'une conception géométrique, incapable par conséquent de cacher les objets qui sont placés derrière. D'ailleurs étant infini en tous sens, un seul plan oblique aux deux plans de projection eût caché entièrement toutes les autres parties de l'épure, ce qui aurait empêché de faire sentir la position des corps solides, en ne permettant plus d'appliquer à leurs arêtes, ou autres parties de leurs surfaces, la distinction des lignes vues et des lignes cachées; et si dans les sections de ces mêmes surfaces on a tracé en points les parties siuées au delà des plans coupants, c'est plutôt parce que l'on a considéré ces parties comme supprimées, que comme cachées par ces plans.

619. Dans beaucoup de problèmes on a placé les données dans une position inclinée par rapport aux plans de projection, mais on ne l'a fait que pour exercer davantage aux constructions graphiques. Dans les applications, on devra toujours, avant tout, choisir le système de plans coordonnés ou de plans auxiliaires sur lesquels les projections seraient les plus simples, et pourvu que l'on ne change rien aux données ni à leur position relative, la généralité de la question ne sera pas moins complète. Il ne faut pas oublier surtout, que *le choix des plans de projection est une des parties les plus essentielles de la solution des problèmes.*

620. Pour exprimer qu'un point fait partie d'une sur-

face, on place ce point sur l'une des génératrices, ou sur toute autre ligne située dans cette surface, et dont on sait construire les projections : en agissant de la même manière à l'égard de tous les points d'une courbe, on exprime que cette courbe est située dans la surface.

621. Pour exécuter un corps solide quelconque, il faut tracer sur la pierre, le bois ou le métal dont ce corps doit être composé, toutes les lignes qui doivent diriger le travail de l'ouvrier.

Ces lignes se déduiront de leurs projections, par des rabattements si elles sont planes, et par des développements si elles font partie de surfaces courbes.

Nous avons pu développer les surfaces des polyèdres, cylindres et cônes ; mais pour la sphère, son développement n'a été obtenu qu'approximativement. Nous verrons plus tard quel est le caractère auquel on reconnaît en général qu'une surface peut se développer.

622. Dans les questions où il s'agissait de construire des plans tangents au cylindre et au cône, nous avons considéré la génératrice de tangence comme provenant du rapprochement des deux génératrices de section.

Cette relation n'est qu'un cas particulier d'une autre proposition plus générale que nous allons démontrer.

623. Supposons (*fig.* 390) qu'une surface courbe quelconque A soit coupée par un plan pq, si nous faisons tourner ce plan autour de la droite mn, qui touche en a la courbe de section ac, cette dernière ligne deviendra successivement ac', ac'', et lorsque tous ses points seront réunis en un seul, le plan coupant pq deviendra $p'q'$ et touchera la surface suivant le point a.

624. On peut donc conclure de ce qui précède qu'un

point de tangence est un point *multiple*, puisqu'il résult du rapprochement d'une infinité de points de sections.

625. Ces points, quoique infiniment rapprochés, déterminent la position du plan tangent $p'q'$, mais ne suffisent pas pour le construire.

Si l'on veut obtenir les traces, il sera nécessaire d'introduire quelque autre condition facile à exprimer graphiquement.

626. Concevons par le point a (*fig.* 392) une courb $ao''o'o$ quelconque située sur la surface, et supposons qu cette courbe soit coupée par le plan pq suivant le point o la droite as, qui joindra ce point avec le point a, sera un sécante par rapport à la courbe $ao''o'o$.

Or, si nous faisons tourner le plan pq autour de mn qu touche la surface au point a, le point o deviendra successivement o', o'', a.

Enfin, lorsque les points de section o'' et a seront réunis le plan pq sera tangent au point a, et la sécante as deviendra as''' tangente à la courbe $ao''o'o$, sans avoir cessé un seu instant d'appartenir au plan pq dans les diverses position par lesquelles ce plan a successivement passé pour devenir $p'q'$.

La courbe $ao''o'o$ pouvant être prise dans la directio que l'on voudra, il s'ensuit que *le plan tangent en un poin quelconque d'une surface donnée doit contenir les tangentes à toutes les courbes que l'on peut faire passer par c point sur la surface.*

627. Nous pouvons encore arriver à la même conséquence en raisonnant de la manière suivante :

Quand on considère une ligne courbe comme composé d'une infinité de côtés, cela ne veut pas dire que l'on soi autorisé à regarder chacun d'eux comme un point unique; on doit plutôt admettre que ce sont de petits côtés de polygones dont les extrémités se sont tellement rapprochées, que leurs longueurs se trouvent réduites à zéro; de sorte que la direction de chacun de ces côtés reste déterminée, et c'est le prolongement de cette direction qui produit la tangente.

628. Les mêmes raisonnements s'appliqueront aux surfaces courbes. En considérant ces espèces de surfaces comme composées d'une infinité de petites facettes, il ne faut pas regarder chacune d'elles comme un point unique, mais comme la réunion de plusieurs points rapprochés, de manière à n'en faire qu'un seul, en conservant toutefois cette condition que tous ces points n'ont pas cessé d'être dans un même plan. De sorte que si l'on conçoit une droite passant par deux quelconques de ces points infiniment rapprochés, la direction de cette ligne n'en sera pas moins déterminée, et assujettie à se confondre avec le prolongement de la facette infiniment petite qui contient ces deux points.

Or cette facette ainsi prolongée n'est autre chose que le plan tangent; d'où il suit que *si en un point d'une surface courbe on conçoit un plan tangent, ce plan contiendra les tangentes à toutes les courbes qui dans la surface passeraient par le point de tangence.*

629. Les considérations qui précèdent étant admises, la construction des plans tangents en un point d'une surface courbe se réduit aux deux opérations suivantes (*fig.* 395):

1° *Construire par le point donné deux tangentes à la surface;*

2° *Faire passer un plan par ces deux droites.*

Il n'y a plus pour chaque cas particulier qu'à choisir, parmi toutes les courbes qui passeraient par le point donné, celles auxquelles il est le plus facile de mener deux tangentes.

630. *Lorsqu'une ligne droite est située tout entière dans une surface courbe, elle peut être prise pour une tangente à cette surface.*

Car on peut la considérer indifféremment comme une courbe dont le rayon serait infini, ou comme la tangente à cette courbe.

C'est ainsi que pour construire les plans tangents aux cylindres et cônes, nous avons regardé comme tangentes les droites génératrices de ces surfaces, de sorte qu'une seconde tangente a suffi pour déterminer le plan tangent.

Pour la sphère, le plan perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui aboutit au point de tangence, contient évidemment les tangentes à tous les cercles qui passent par ce point.

631. Pour obtenir une *normale* il suffit de construire par le point de tangence une perpendiculaire au plan tangent.

632. Tout plan qui contient la normale se nomme *plan normal;* la section de la surface par ce plan se nomme *section normale.*

633. Si l'on fait tourner le plan normal autour de la normale, on obtiendra une suite de sections dont la courbure est différente pour chacune des positions du plan coupant.

On démontre dans les traités de géométrie analytique que la section qui a le plus grand rayon de courbure, est toujours perpendiculaire à celle qui a la plus petite courbure.

Quelquefois la courbure des sections normales qui passent par un point donné est constante.

C'est ce qui a lieu pour la sphère et pour quelques sections dont nous parlerons dans le chapitre suivant.

634. Pour obtenir la section d'une surface courbe par un plan, il suffit de construire la suite des points suivant lesquels ce plan coupe un système de lignes tracées sur la surface.

Il n'y a plus dans chaque cas particulier qu'à choisir le système de lignes le plus simple.

La ligne provenant de la section par un plan est toujours une courbe plane, dont la forme dépend de celle de la surface coupée.

Si l'on prend un plan de projection perpendiculaire au plan coupant, la courbe cherchée se projettera en ligne droite, ce qui abrégera beaucoup les opérations.

La véritable grandeur de la courbe s'obtient par un rabattement.

635. L'une des questions les plus importantes de la géométrie descriptive est celle qui a pour but de construire la courbe d'intersection de deux surfaces.

Il est évident que cela revient à construire un point commun aux deux surfaces données; car, en recommençant les mêmes opérations, on pourra trouver autant de points que l'on voudra, communs aux deux surfaces; puis, l'on fera passer par tous ces points une courbe, qui sera l'intersection demandée.

Nommons en général A et B les deux surfaces données (*fig.* 393), on construira une surface auxiliaire quelconque, que nous nommerons C. Cette surface coupera la surface A suivant une ligne *a*, et la surface B suivant une ligne *b*. Or, ces deux lignes *a* et *b* étant situées dans une même surface C, se couperont en un point m, qui appartiendra aux deux surfaces proposées, puisqu'il sera en même temps sur deux lignes faisant partie de ces surfaces.

Une deuxième surface auxiliaire coupera les surfaces proposées suivant deux lignes a', b', qui, par leur intersection, donneront un point m'.

Une troisième surface donnera un point m''.

Une quatrième surface donnera un point m''', etc.

La courbe qui passera par les points m, m', m'', sera la pénétration demandée.

La solution générale étant trouvée, il ne reste plus dans chaque cas particulier qu'à choisir le système de surfaces auxiliaires, de manière que les lignes a, a', a'',..... b, b', b'',..... qui résultent de leur intersection avec les surfaces données, soient le plus simples possible et le plus faciles à construire.

On prendra presque toujours des plans pour surfaces auxiliaires; quelquefois cependant il pourra être utile d'employer des cylindres, des cônes ou des sphères, tout dépendra de la nature des surfaces données ou de leur position dans l'espace.

Ainsi, pour avoir l'intersection de deux cylindres, nous les avons coupés par un système de plans parallèles à leur direction.

Pour l'intersection d'un cylindre par un cône, nous avons employé des plans parallèles au cylindre et contenant le sommet du cône; et pour obtenir la pénétration de deux cônes, nous les avons coupés par des plans passant par les deux sommets.

Cependant il peut y avoir telle disposition d'épure où il vaudrait mieux employer des plans parallèles ou perpendiculaires aux plans de projection; c'est ce que l'habitude des applications mettra promptement en état de décider.

636. Parmi les pénétrations de deux surfaces, nous devons surtout remarquer le cas où l'une d'elles serait perpendiculaire au plan de projection ; elle devient alors la surface projetante de la courbe demandée, et sa trace en est la projection. Pour obtenir la seconde projection, il suffit d'élever des perpendiculaires à la ligne AZ, par tous les points où cette trace est rencontrée par les projections d'un système de lignes tracées dans l'autre surface.

Cette combinaison peut toujours être obtenue par un choix convenable de plans de projection toutes les fois que l'une des deux surfaces données est un plan, un prisme ou un cylindre.

637. Nous avons vu dans le chapitre Ier du livre II comment on peut construire des tangentes aux courbes planes ; mais lorsqu'il s'agit d'une courbe à double courbure, le plus simple est de la considérer comme provenant de l'intersection de deux surfaces. Alors la question se réduit à construire par le point donné des plans tangents à ces deux surfaces, et l'intersection de ces plans est la tangente demandée.

Quoique la courbe proposée puisse provenir de l'intersection de deux surfaces courbes quelconques, on peut toujours, si cela est plus commode, se contenter de construire des plans tangents aux deux cylindres projetants, de sorte que les traces de ces plans tangents seront les deux projections de la tangente.

638. Tout plan passant par le point de tangence et perpendiculaire à la tangente, sera perpendiculaire à la courbe,

et prendra pour cette raison le nom de *plan normal à la courbe.*

639. La tangente étant perpendiculaire au plan normal sera perpendiculaire à toutes les droites qui passeraient par son pied dans ce plan.

Il semblerait donc permis de considérer chacune de ces lignes comme une normale à la courbe. Cela ne serait pas exact : il faut se rappeler ce que nous avons dit au n° 332, que *la normale en un point d'une courbe à double courbure doit être située dans le plan osculateur de cette courbe.* D'où il résulte que la normale sera l'intersection du plan normal par le plan osculateur.

640. Pour trouver l'intersection d'une surface B (*fig.* 394) par une ligne quelconque *a*, on fera passer par cette ligne une surface auxiliaire que nous nommerons C. Cette surface contiendra le point cherché *m*, et comme ce point doit faire partie de la surface donnée B, il sera sur la ligne *b*, provenant de l'intersection des surfaces B et C.

Or, le point *m* devant être à la fois sur les lignes *a* et *b*, sera où elles se coupent.

La question étant ainsi résolue d'une manière générale, il n'y aura plus qu'à choisir, pour chaque cas particulier, la surface auxiliaire C, de manière que la ligne *b* provenant de son intersection avec la surface B, soit la plus simple possible et la plus facile à construire.

Si la ligne donnée est courbe on pourra faire usage de l'un des cylindres projetants de cette courbe.

Si la ligne donnée est droite (*fig.* 391) on emploiera comme surface auxiliaire un plan perpendiculaire ou oblique au plan de projection suivant qu'on le jugera nécessaire.

Il est évident aussi que la ligne donnée pourra percer la surface en plusieurs points; dans ce cas il sera utile de reconnaître ceux de ces points qui sont vus ou cachés sur les diverses projections de la surface.

CHAPITRE II.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

641. On désigne en général par ce nom les surfaces qui proviennent du mouvement d'une ligne quelconque, assujettie à tourner autour d'une droite fixe, par rapport à laquelle elle conserve toujours la même position.

Supposons, par exemple (*fig.* 396, *Pl.* 58), la droite aa', immobile, et perpendiculaire au plan horizontal; concevons, de plus, la courbe à double courbure *coz*; si nous faisons tourner cette dernière ligne autour de aa' de manière qu'elle ne change pas de position par rapport à cette droite, la surface engendrée sera de révolution.

Dans ce mouvement, chaque point de la génératrice décrira un cercle horizontal dont le centre sera sur la droite immobile aa', que l'on nomme l'*axe* de la surface.

La position de la génératrice, relativement au plan horizontal, ne changeant pas, sa projection sur ce plan conservera toujours la même forme et ne fera que se déplacer en tournant autour du point a, qui représente la projection horizontale de l'axe. Si nous supposons, par exemple, que l'on fasse faire à la courbe *coz* $\frac{1}{12}$ de révolution, le point c viendra se placer en c', le point o en o' et z en z'.

Pour construire chacun de ces points on fera tourner sa projection horizontale d'une quantité égale à l'arc correspondant compris entre les deux plans verticaux ap, aq. Ainsi, par exemple, en faisant zz' égal à uu' on aura la nouvelle position du point z. On peut aussi faire $u'z'$ égal à uz; on fera de même xx' égal à cc', ou $c'x'$ égal à cx, etc.

En agissant de la même manière pour chacun des points de la courbe, on aura sa nouvelle projection horizontale; quant à la projection verticale correspondante, elle s'obtiendra en élevant des perpendiculaires par chacun des points c', o', z',..... jusqu'à la rencontre des horizontales qui représentent les projections verticales des cercles parcourus par ces points.

Quand on aura construit un certain nombre de génératrices assez rapprochées les unes des autres, on tracera en lignes pleines les parties de ces génératrices qui sont vues, et en points les parties cachées.

Il serait facile de distinguer ces parties les unes des autres, en raisonnant comme nous l'avons fait au n° 165; mais nous allons voir des moyens plus simples d'arriver au même résultat.

642. *Sections perpendiculaires à l'axe.* Un des caractères de toute surface de révolution, c'est que la section par un plan quelconque vs perpendiculaire à l'axe, est toujours une circonférence de cercle.

Le rayon de cette circonférence est égal à la distance de l'axe au point où la génératrice est coupée par le plan horizontal dont il s'agit.

Il suit de là que si l'on coupe une surface de révolution par un certain nombre de plans perpendiculaires à son axe, on obtiendra un système de cercles parallèles entre eux, et que l'on appelle, par cette raison, *les parallèles de la surface.*

643. La portion de surface comprise entre deux parallèles quelconques se nomme une *zone*.

644. Les projections des parallèles sur un plan perpendiculaire à l'axe sont des cercles concentriques, et le point *a*, centre commun de tous ces cercles, appartient à l'axe de la surface.

Dans les diverses questions où l'on fait usage de ces courbes, on peut presque toujours choisir de préférence celles qui ont une projection commune.

Ainsi, par exemple, les deux parallèles des points 1 et 5 se projetteront par un seul cercle, il en est de même des parallèles qui contiennent les points 6 et 8.

645. Parmi tous les parallèles d'une surface de révolution, on doit surtout distinguer ceux qui passent par les points les plus remarquables de la génératrice; ainsi, par exemple :

Le point *m*, étant le plus éloigné de l'axe, décrira le cercle qui a le plus grand rayon, et que l'on nomme pour cela *le plus grand parallèle ;*

Lorsque ce parallèle partage la surface en deux portions égales on lui donne le nom d'*équateur*.

Le point *n*, étant le plus rapproché de l'axe, décrit le plus petit parallèle que l'on nomme *cercle de gorge* ou *collier*.

Si l'axe rencontre la surface (*fig.* 399), le point *o* qui résulte de cette intersection prend le nom de *pôle*. On peut considérer ce point comme le plus petit parallèle, et dans ce cas le cercle de gorge n'existe pas.

646. Le plus grand et le plus petit parallèle forment les limites de la projection sur le plan perpendiculaire à

l'axe, et déterminent par conséquent les parties *vues* et *cachées* de cette projection.

Ainsi, par exemple, sur la *fig.* 396, toute la zone comprise entre le cercle de gorge 3 et le parallèle 1, sera vue sur la projection horizontale; celle qui est comprise entre les deux parallèles 3 et 5 sera cachée par la zone précédente.

La surface sera vue entre les parallèles 5 et 7 et sera cachée depuis ce dernier cercle jusqu'au parallèle 8.

647. *Sections passant par l'axe.* Toute section d'une surface de révolution par un plan *ap* qui contient son axe, se nomme une *section méridienne*.

La projection de toute section méridienne sur le plan perpendiculaire à l'axe sera une droite passant par le point *a*.

On peut, après avoir construit un assez grand nombre de génératrices, déterminer les points où chacune de ces lignes serait coupée par le plan méridien dont il s'agit.

Ainsi, la courbe *kny* est la projection verticale de la section par le plan méridien *ap*, et la courbe 1—5—8 est la section par le plan *ag*.

Cette dernière ligne doit être tangente aux projections verticales de toutes les génératrices.

Le point de tangence sur chacune de ces courbes peut être déterminé en élevant une perpendiculaire par le point suivant lequel sa projection horizontale coupe la trace du plan méridien *ag*.

648. Il est facile d'obtenir la section méridienne sans construire toutes les projections de la génératrice. En effet, cette ligne étant donnée par ses deux projections *cz*, *c'z'* (*fig.* 398), on décrira le parallèle passant par chacun de

ses points, et l'on déterminera ensuite la section de toutes ces circonférences par le plan qui contient le méridien demandé.

Ainsi, par exemple, la courbe $k'y'$ (*fig.* 398) est la projection verticale du méridien situé dans le plan ap, et la courbe 1 — 3 — 5 – 8 est la projection verticale du méridien ap'.

649. *Tous les méridiens sont égaux.* Car si l'on fait tourner la courbe au autour de l'axe, tous ses points viendront coïncider avec les points correspondants du méridien au'.

Ce dernier méridien jouit particulièrement de cet avantage qu'il est projeté sur le plan vertical dans sa véritable grandeur; c'est pourquoi on lui donne le nom de *section méridienne principale*, ou simplement *méridien principal*.

650. Tout méridien se compose de deux courbes égales placées symétriquement de chaque côté de l'axe.

Cependant il est permis de considérer chacune de ces deux courbes comme un méridien différent.

651. Si on fait tourner le méridien principal autour de l'axe, la courbure de la projection verticale deviendra moins sensible à mesure que l'on approchera de la position ap'', et lorsque le plan ap sera parvenu en ap'' la section méridienne se projettera par une droite $a'a''$ perpendiculaire à la ligne AZ.

652. La portion de surface comprise entre deux méridiens quelconques se nomme un *fuseau*.

653. Le méridien principal formera la limite de la pro-

jection verticale, et déterminera par conséquent les *parties vues et cachées* sur cette projection.

Ainsi, par exemple, tout point situé en deçà du plan vertical qui a pour trace la droite $p'q'$ sera vu sur la projection verticale, tandis qu'au contraire tout point situé au delà du même plan aura sa projection verticale cachée.

654. C'est pour plus de généralité dans la définition que nous avons supposé la surface engendrée par la courbe à double courbure $cz, c'z'$, mais la section méridienne étant une courbe plane, il sera en général plus simple de prendre cette courbe pour génératrice; et si l'on a soin de placer l'axe perpendiculaire à l'un des plans de projection, la représentation de la surface sur l'épure deviendra très-facile.

Supposons (*fig.* 398) que l'on ait placé l'axe aa' perpendiculaire au plan horizontal; on construira symétriquement à droite et à gauche, et dans sa véritable grandeur, la courbe 1—3—5—8 donnée comme génératrice; on aura ainsi la projection verticale de la surface Pour la projection horizontale, on décrira du point a, comme centre, deux cercles concentriques ayant pour rayons les distances de la méridienne aux points qui sont le plus près et le plus loin de l'axe; le premier est le cercle de gorge, et le second forme la limite extérieure de la projection; quand la méridienne coupe l'axe, nous avons dit que le cercle de gorge n'existe pas.

655. Les cas particuliers de surface de révolution se distinguent ordinairement par la nature de leur section méridienne.

656. Ainsi, l'*ellipsoïde de révolution* (*fig.* 399) est la

surface engendrée par le mouvement d'une demi-ellipse que l'on ferait tourner autour de l'un de ses axes. La sphère est un ellipsoïde de révolution qui a pour section méridienne un cercle.

657. La *surface annulaire* ou le *tore* (*fig.* 397) est engendrée par le mouvement d'un cercle tournant autour d'une droite située dans son plan. La section méridienne se compose de deux cercles égaux au cercle générateur, et placés symétriquement par rapport à l'axe. Le plan horizontal mené par le centre du cercle générateur, contient le plus grand parallèle de la surface, et le plus petit, qui est le cercle de gorge. Dans le cas où le cercle générateur toucherait l'axe, le cercle de gorge serait un point, et la section méridienne se composerait de deux cercles tangents. Si le centre du cercle générateur se rapprochait de l'axe, la forme de la surface se rapprocherait de celle de la sphère, et ne différerait pas de cette dernière surface si le centre du cercle générateur se trouvait situé sur l'axe de révolution ; ce qui permet de regarder encore la sphère comme un cas particulier des surfaces annulaires.

658. Si la génératrice est une parabole (*fig.* 400) la surface sera un *paraboloïde* et prendra des formes différentes, suivant que la révolution aura lieu autour de l'axe de la parabole ou autour d'une droite *ac* perpendiculaire à cet axe.

659. Enfin, on nomme *hyperboloïde de révolution* la surface qui est engendrée par une hyperbole tournant autour de l'un de ses axes.

Dans l'exemple (*fig.* 403) la révolution se fait autour de l'axe non transverse, et la surface est continue, c'est-à-dire qu'elle pourrait être parcourue par un point dans toute son étendue. Pour exprimer cette propriété, on donne à cette surface le nom d'*hyperboloïde de révolution à une nappe*. Il n'en serait pas de même si le mouvement s'était fait autour de l'axe transverse (*fig.* 402), il y aurait alors dans cette surface deux parties séparées l'une de l'autre, ce qui lui ferait donner le nom d'*hyperboloïde de révolution à deux nappes*.

660. L'hyperboloïde de révolution jouit d'une propriété remarquable. Cette surface (*fig.* 401) peut être engendrée par le mouvement d'une droite inclinée, telle que $ac, a'c'$, qui tournerait autour de l'axe vertical o, o'. Dans ce mouvement, le point aa' parcourra le cercle horizontal a', v', et le point cc' ne quittera pas le plan horizontal de projection. Le point nn', qui est le plus près de l'axe, décrira le cercle de gorge.

Si la génératrice se rapprochait de l'axe, ce cercle diminuerait, et au moment où il deviendrait nul, la surface de l'hyperboloïde serait remplacée par les deux nappes d'un cône circulaire qui aurait pour sommet le point où l'axe serait coupé par la génératrice.

Si l'on faisait tourner la génératrice autour de l'horizontale projetante du point n, n', pour la ramener dans une position verticale, la surface de l'hyperboloïde s'allongerait dans le sens de l'axe, et se transformerait en un cylindre circulaire au moment où la génératrice serait parallèle à l'axe.

Ainsi, le cône et le cylindre circulaires sont des cas particuliers parmi les hyperboloïdes de révolution.

661. *Double génération*. L'hyperboloïde de révolution peut être engendrée par une ligne droite de deux manières différentes, c'est-à-dire que l'on obtiendra la même surface (*fig.* 403) en prenant pour génératrice la droite $(ac, a'c')$

ou la droite ($ou, o'u'$) inclinées en sens contraire dans le même plan projetant vertical.

En effet, considérons pour un instant comme différentes, les surfaces engendrées par ces deux droites; la génératrice ($ac, a'c'$) appartenant à la première surface, la droite $o''u'', o'''u'''$ sera une génératrice de la seconde. Or, les cordes $ac, o''u''$ étant égales, il s'ensuit évidemment que les droites ao'', cu'' seront parallèles, de plus les droites ($ao'', a'o'$) et ($cu'', c'u'''$), qui ont leurs projections horizontales ao'', cu'' parallèles, sont situées dans les plans horizontaux $c'u''', a'o'''$, par conséquent elles sont parallèles dans l'espace et les quatre points a, o'', c, u'' sont dans un même plan. Donc les deux lignes ($ac, a'c'$) ($o''u'', o'''u'''$) se rencontrent au point mm'.

Ce que nous venons de dire des deux droites ($ac, a'c'$) ($o''u'', o'''u'''$) pouvant s'appliquer à toutes les autres, quelle que soit leur position, il en résulte que toutes les génératrices de la première surface rencontrent nécessairement toutes celles de la deuxième, et par conséquent ces deux surfaces coïncident dans tous leurs points.

Les deux systèmes de génératrices partagent toute la surface de l'hyperboloïde en un nombre infini de petits quadrilatères qui diminuent de grandeur dans le voisinage du cercle de gorge.

Quoique l'on n'ait construit sur la *fig.* 401 qu'une seule des deux générations de l'hyperboloïde, on peut se faire une idée de la disposition de tous les quadrilatères dont nous venons de parler, parce que les lignes ponctuées qui représentent les parties cachées de la première génération, deviendraient les parties vues de la seconde et seraient, dans ce cas, tracées en lignes pleines.

662 *Section méridienne.* On pourrait projeter (*fig.* 401) un certain nombre de génératrices et construire le point où

chacune de ses lignes serait coupée par le plan pq, ou bien on opérera de la manière suivante.

La droite génératrice $ac, a'c'$ de l'yperboloïde étant donnée (*fig.* 403), on tracera les parallèles passant par chacun de ses points, et la section de toutes ces circonférences par le plan vertical pq sera le méridien principal.

663. Nous rappellerons que les projections verticales des génératrices de la surface doivent être tangentes à la section méridienne principale (647).

Cette remarque nous donnera un moyen de reconnaître la nature de cette courbe.

En effet, la génératrice $(ac, a'c')$ étant donnée, faisons faire à cette droite une demi-révolution pour l'amener dans la position $(a''c'', o'u')$. Les deux projections verticales se couperont en un point x' situé sur la projection de l'axe de la surface.

Si nous prenons actuellement pour génératrice la droite $ou, o'u'$ et que nous amenions cette ligne dans une position quelconque $(o''u'', o'''u''')$, elle coupera les deux droites $(ac, a'c')$ $(a''c'', o'u')$ aux points mm', nn'; et le point ν suivant lequel la génératrice $o''u'', o'''u'''$ perce le plan du méridien principal étant le milieu de mn, sa projection verticale ν' sera pareillement le milieu de $m'n'$.

Or il résulte évidemment de cette propriété que la section méridienne sera une hyperbole ayant pour asymptotes les deux droites $a'c', o'u'$; car on sait (*Géom. anal.*) que le point où l'hyperbole est touchée par une droite quelconque se trouve toujours au milieu de la partie de cette droite interceptée par les asymptotes (280).

Les deux génératrices $(ac, a'c')$ $a''c'', o'u')$ ne percent le plan méridien qu'à l'infini, ce qui s'accorde avec la propriété connue des asymptotes.

664. Ce qui précède nous fournit le moyen le plus

simple de construire la section méridienne d'un hyperboloïde de révolution dont on connaît la génératrice $ac, a'c'$.

En effet, cette ligne étant successivement amenée dans les deux positions $(ac, a'c')$ $(a''c'', o'u')$, on construira les projections verticales correspondantes, ce qui donnera les asymptotes de l'hyperbole demandée.

On connaît de plus les sommets appartenant au cercle de gorge dont le rayon est égal à la droite xr, abaissée du point x perpendiculairement sur ac : cela suffit pour que l'on puisse construire la courbe.

665. Si par le point xx' on conçoit une droite parallèle à la génératrice et que l'on fasse tourner cette ligne autour de l'axe, elle engendrera un cône droit à base circulaire que l'on nommera *cône asymptote*, parce qu'il ne touche la surface qu'à une distance infinie du centre.

L'hyperboloïde de révolution à une nappe, enveloppe le cône asymptote, tandis que l'hyperboloïde à deux nappes (*fig.* 402) est au contraire enveloppée par ce cône.

666. La surface annulaire ou le tore est la plus importante des surfaces de révolution parce qu'elle renferme les éléments de tous les cas particuliers de ce genre de surface.

En effet, quels que soient les contours ou sinuosités de la section méridienne donnée pour génératrice, on pourra toujours considérer cette ligne comme composée d'un certain nombre d'arcs de cercles qui se raccordent.

Ainsi, par exemple, la courbe $acvu$ (*fig.* 404) étant composée des trois arcs ac, cv, vu, la zone $acac$ sera une portion de la surface annulaire engendrée par le cercle qui a son centre au point 1.

La zone $cvcv$ appartient à une seconde surface annulaire engendrée par un cercle décrit du point 2 comme centre.

Enfin, la zone *vuvu* fait partie d'une troisième surface annulaire engendrée par le cercle qui a pour centre le point 3.

La première zone se raccorde avec la deuxième, parce qu'elles sont touchées toutes deux par un même cylindre, suivant le cercle horizontal *cc*.

La seconde zone se raccorde avec la troisième, parce qu'elles sont touchées suivant le cercle *vv* par un cône circulaire qui a son sommet au point *s*.

667. Cette propriété d'être touchées suivant un parallèle, par un cône ou par un cylindre circulaire, appartient à toutes les surfaces de révolution.

En général, si en un point *v* on conçoit une infinité de courbes qui soient touchées par une même droite *sv*, et que l'on fasse tourner toutes ces courbes autour de l'axe commun *mn*, toutes les surfaces de révolution engendrées par ces courbes se toucheront et seront touchées par un même cône circulaire ayant pour génératrice la droite *sv*.

De plus, tous les plans tangents à ce cône seront également tangents aux surfaces de révolution qui ont le cercle *vv* pour parallèle commun. On pourra donc considérer à volonté toute surface de révolution comme étant continue, ou composée de plusieurs autres surfaces de révolution qui se raccorderaient suivant les parallèles passant par les points de raccordement des différentes courbes dont se compose la section méridienne.

668. La surface que nous venons de prendre pour exemple se nomme une *scotie*.

669. *Axe commun*. Si on fait tourner l'ellipse et l'hy-

perbole (*fig.* 399) autour de la droite ac, on obtiendra deux surfaces de révolution qui se couperont suivant les deux cercles vu, zx.

Les deux paraboloïdes (*fig.* 400) se couperont suivant le parallèle vu, l'hyperboloïde à deux nappes et la sphère projetées (*fig.* 402) se couperont suivant les deux parallèles vu, zx.

En général, toutes les fois que deux surfaces de révolution auront un axe commun, elles se couperont suivant autant de parallèles qu'il y aura de points communs à leurs sections méridiennes.

670. *Exprimer qu'un point appartient à une surface de révolution.* Supposons que l'on connaisse la projection verticale z' (*fig.* 397 et 403), on construira le parallèle correspondant; puis on abaissera la perpendiculaire $z'z$, dont l'intersection avec le parallèle donnera deux points z, z, qui tous deux satisfont aux conditions demandées. Si l'on avait donné la projection horizontale z, on aurait pu commencer par construire le parallèle; puis élevant la perpendiculaire zz, ses intersections avec le parallèle auraient déterminé les projections verticales des points demandés.

671. *Développement.* Les surfaces de révolution ne peuvent se développer qu'approximativement et par des moyens analogues à ceux que nous avons employés (528) pour la sphère.

En construisant un certain nombre de plans méridiens et de plans perpendiculaires à l'axe, toute la surface se trouvera partagée en trapèzes. Si l'on place à côté les uns des autres, et dans leur véritable grandeur, tous les trapèzes compris entre deux parallèles consécutifs, on aura le *développement par zones*, tandis qu'en construisant l'un au-dessous de l'autre tous les trapèzes compris entre deux plans méridiens, on aura le *développement par fuseaux*.

Ce dernier mode de développement est souvent préféré dans les arts, parce qu'en ayant le soin de construire les plans méridiens à égale distance les uns des autres, tous les fuseaux seront égaux entre eux, et le développement de l'un d'eux servira pour tous les autres; tandis que toutes les zones différant entre elles, il faudrait construire séparément le développement de chacune.

Nous verrons plus tard pourquoi les cônes et les cylindres de révolution jouissent de la propriété d'être développables.

672. *Sections perpendiculaires au plan de projection.* On établira sur la surface donnée un certain nombre de parallèles, puis l'on construira les points suivant lesquels ces cercles seront coupés par le plan donné. C'est ainsi que l'on a obtenu (*fig.* 406, *Pl.* 59) la courbe *nxnx*, qui est la projection horizontale de la section d'une surface annulaire par le plan *p*, perpendiculaire au plan vertical.

673. On pourra employer comme auxiliaires des plans verticaux passant par l'axe de la surface donnée : ces plans couperont la surface suivant des sections méridiennes dont on évitera la projection en les rabattant autour de l'axe; les points (mm') (nn') ont été déterminés de cette manière. Un plan vertical o—2 a coupé la surface donnée suivant une section méridienne qui, en tournant autour de l'axe, est venue se confondre avec la projection verticale de cette surface. La droite provenant de l'intersection du plan p et du plan auxiliaire 0—2, est venue se rabattre en o'—$2'$ et l'intersection de cette ligne avec la section méridienne

principale a donné deux points m'', n'', qui, projetés horizontalement sur oh, et ramenés dans le plan o—2, ont déterminé les points mm', nn'.

674. On fera bien de profiter de la symétrie. Ainsi, on pourra déterminer par une seule opération les points qui sont situés dans les deux plans méridiens 0—2, 0—2.

La tangente $0'-3'$ déterminera le point u'' qui, ramené dans les plans 0—3, donnera les deux points u, u.

675. Dans quelques cas particuliers, la recherche de la courbe de section peut être simplifiée. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de construire la courbe résultant de la section d'un ellipsoïde de révolution par un plan vertical np (*fig.* 405). On admettra (*Géom. analyt.*) que la courbe demandée doit être une ellipse, après quoi on construira l'horizontale oc, $o'c'$, perpendiculaire sur np, ce qui donnera le point cc' pour le centre de cette ellipse.

On ramènera ensuite le point c en c'' dans le plan op', on élèvera la perpendiculaire $c''a$.

Les intersections de cette droite avec le méridien principal de la surface détermineront les deux parallèles qui contiennent le point le plus bas, et le point le plus élevé de la courbe demandée. La différence des hauteurs de ces deux points sera l'axe vertical de l'ellipse cherchée.

L'axe horizontal $z'x'$ s'obtiendra en élevant deux perpendiculaires par les points z et x.

La verticale vv' déterminera les points suivant lesquels la projection verticale de la courbe touche celle du méridien principal de la surface.

Les points mm' peuvent être considérés comme provenant de la rencontre du plan vertical np par les deux parallèles qui ont le cercle mm'' pour projection horizontale.

676. On peut encore supposer que la section de l'ellipsoïde par le plan op'' a été rabattue sur le méridien principal, et que la verticale st représente dans ce rabattement l'intersection des deux plans np,op'', de sorte que les points d'intersection $m'''m'''$ étant ramenés à leur place deviendront m', m'.

En faisant tourner la courbe autour de la verticale du point n, on obtiendra en M sa véritable grandeur.

677. Lorsqu'on sait que la section demandée est une ellipse, on peut éviter la projection et le rabattement en faisant usage d'un plan auxiliaire sur lequel cette courbe se projetterait par *un cercle*.

Supposons que la droite np (*fig.* 407) soit la trace d'un plan perpendiculaire au plan vertical de projection.

Le point c, milieu de zx, sera le centre de l'ellipse cherchée. Le petit axe de cette courbe sera la corde commune à l'ellipse zx et au parallèle av, dont la moitié est rabattue en auv, de sorte que cu est le demi petit axe de l'ellipse qui a pour demi grand axe cz.

Or, si on décrit la demi-circonférence $cu'z$ et que l'on porte cu de c en u', le triangle $cu'z$ sera rectangle, et la section cherchée se projettera par un cercle sur tout plan tel que np' dont la direction serait perpendiculaire à la corde zu' (402).

Si après avoir projeté la courbe zx sur le plan np' on le fait tourner autour de l'horizontale projetante du point n, on obtiendra la circonférence M.

678. *Transformations diverses de la courbe de section.* Si nous faisons mouvoir le plan p (*fig.* 406) parallèlement à lui-même en allant de droite à gauche, tous les points de la courbe se rapprocheront et finiront par se réunir en

un seul, lorsque le plan mobile sera parvenu dans la position p'.

Alors le plan sera tangent à la surface et le point de tangence sera t, t'. Si au contraire nous faisons mouvoir le plan p de gauche à droite, les deux points x, x se rapprocheront et se réuniront en un seul point zz', lorsque le plan mobile sera dans la position p''.

Ce dernier plan touchera la surface au point zz' et la coupera suivant la courbe $zvrzrv$.

Si on continuait à faire avancer le plan mobile de gauche à droite, la section se partagerait en deux courbes fermées indépendantes l'une de l'autre, et placées symétriquement par rapport au plan méridien $h-1$.

Ces dernières courbes n'ont pas été tracées sur l'épure, mais il sera facile de les construire.

Si on continue à faire mouvoir le plan coupant dans la même direction jusqu'à ce qu'il ait dépassé le point o'', on obtiendra toutes les courbes précédentes dans un ordre inverse, et leurs projections horizontales seront placées symétriquement par rapport au plan méridien perpendiculaire au plan vertical de projection.

679. On retrouvera des relations du même genre (*fig.* 411) dans les différentes courbes provenant de la section de la scotie par des plans parallèles à son axe.

Supposons, pour plus de simplicité, qu'on ait projeté toutes ses courbes sur un plan parallèle aux différentes positions du plan coupant.

Les sections que l'on obtiendra seront de trois espèces :

1° Si la distance du plan coupant à l'axe est plus grande que le rayon du cercle de gorge, la section se composera de deux courbes indépendantes et placées l'une au-dessus, l'autre au-dessous du plan horizontal ac. Les points o, o

appartiennent au méridien qui est perpendiculaire au plan coupant.

2° Si la distance de l'axe au plan coupant est égale au rayon du cercle de gorge, les points o, o se réunissent en un seul o', suivant lequel le cercle de gorge et le méridien perpendiculaire au plan coupant sont touchés par ce plan.

La section se compose des deux courbes soz' qui se coupent au point o', situé sur le cercle de gorge. Le plan coupant est tangent au point o'.

3° Enfin, lorsque la distance de l'axe au plan coupant sera moindre que le rayon du cercle de gorge, la section se composera de deux courbes séparées, placées symétriquement l'une à droite et l'autre à gauche du plan méridien dm, et les points o'', o'' appartiendront au cercle de gorge de la surface.

680. Avant de quitter ce sujet, j'appellerai l'attention du lecteur sur les différentes formes que peut prendre la section d'une surface du second degré par un plan.

681. 1^er^ *exemple.* Supposons que la surface coupée soit un *ellipsoïde de révolution* (*fig.* 407).

La courbe de section pourra subir trois transformations différentes :

1° Le plan coupant 1, perpendiculaire à l'axe, donnera pour section un cercle ;

2° Le plan 2 coupera la surface suivant une ellipse ;

3° Le plan 3 sera tangent et la courbe de section sera remplacée par le point de tangence.

682. 2^e^ *exemple.* Si la surface coupée est un *paraboloïde de révolution* (*fig.* 409), la section subira 4 transformations :

1° Le plan 1, perpendiculaire à l'axe, coupera la surface suivant un cercle ;

2° Le plan 2 donnera pour section une ellipse ;

3° Le plan 3, parallèle à l'axe, donnera une parabole ;

4° Enfin le plan 4 sera tangent.

683. 3e *exemple*. Si la surface coupée est un *hyperboloïde de révolution à une nappe* (*fig.* 408), la section peut subir 5 transformations :

1° Le plan 1, perpendiculaire à l'axe, donnera pour section un cercle ;

2° Le plan 2 donnera une ellipse ;

3° Le plan 3, parallèle à la génératrice *vu* du cône asymptote, donnera une parabole ;

4° La section par le plan 4 sera une hyperbole ;

5° Enfin le plan 5 sera tangent au point *m*.

684. Si nous faisons mouvoir le plan 4 parallèlement à lui-même, nous obtiendrons les variétés suivantes :

1° Le plan 4 donnera une hyperbole dont l'axe transverse sera parallèle au plan sur lequel nous supposons que la surface a été projetée ;

2° Le plan 4' sera tangent et donnera pour section les deux génératrices de la surface (661).

Ces deux droites pourront être considérées comme deux tangentes (630) et se couperont au point *n*, qui par conséquent sera le point de tangence.

3° La section par le plan 4'' sera une hyperbole dont l'axe transverse sera perpendiculaire au plan de projection, et se projettera sur ce plan par le point *o*.

685. Les hyperboles provenant de la section par les plans

4 et $4''$ ont les asymptotes parallèles aux deux génératrices provenant de la section par le plan $4'$.

686. Ces dernières lignes peuvent être considérées comme formant une hyperbole pour laquelle la distance du centre au sommet de la courbe serait réduite à zéro.

687. Si on donne plusieurs hyperboles ayant pour asymptotes communes les droites vu, zx, et que l'on fasse tourner toutes ces courbes autour de l'axe commun, tous les hyperboloïdes engendrés auront le même axe et seront touchés à l'infini par le cône asymptote, qui a pour génératrices les deux droites zx, vu.

Or les sections de toutes ces surfaces par un même plan seront des courbes du second degré semblables et concentriques.

Il faudra remarquer cependant que le plan $4'$ coupera le cône suivant une hyperbole, ayant pour asymptotes les deux génératrices de l'hyperboloïde.

Tandis que le plan $4'''$ coupe cette dernière surface suivant une hyperbole qui a pour asymptotes deux génératrices du cône.

Et quoique les axes transverses de ces deux hyperboles soient dirigés dans l'espace suivant des directions rectangulaires, elles ne possèdent pas moins le caractère des figures semblables, en cela que les axes transverses et non transverses de ces courbes sont réciproquement proportionnels et que leurs asymptotes sont parallèles.

688. Si nous comparons les sections de l'hyperboloïde avec celles du cône asymptote, nous remarquerons que le plan 4 coupe ces deux surfaces suivant deux hyperboles qui ont le même axe transverse.

Le plan $4'$ coupe le cône suivant une hyperbole qui a pour asymptotes les deux génératrices provenant de la section de l'hyperboloïde.

Le plan $4''$ coupe le cône et l'hyperboloïde suivant deux hyperboles qui ont les mêmes asymptotes, mais dont les axes transverses sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Enfin, le plan $4'''$ coupe l'hyperboloïde suivant une hyperbole qui a pour asymptotes les deux droites provenant de la section du cône par un plan qui contient son sommet.

Toutes ces courbes ont leurs centres sur la droite cn.

Les démonstrations de ces propriétés ne peuvent être convenablement placées que dans les traités de Géométrie analytique.

Plans tangents aux surfaces de révolution.

689. *Construire un plan tangent à une surface de révolution par un point* mm', *situé sur la surface* (fig. 410).

Nous avons reconnu que le plan tangent en un point donné d'une surface quelconque serait déterminé par deux tangentes passant par ce point; de sorte qu'il ne reste plus qu'à chercher quelles sont les tangentes les plus faciles à construire.

Or, de toutes les courbes que l'on peut faire passer par un point d'une surface de révolution, la plus simple est la section par un plan perpendiculaire à son axe. Il sera donc convenable de choisir pour première tangente la droite horizontale aa', qui touche le parallèle passant par le point donné. Pour obtenir la seconde tangente, on rabattra la section méridienne sm, en la faisant tourner autour de l'axe. Le point donné m, m', viendra se placer en m'', et la tangente dans ce rabattement sera $s'm''$; en ramenant cette tangente à la place qu'elle doit occuper, le point s' ne bougera pas, pusqu'il fait partie de la charnière, et l'on aura pour seconde tangente la droite

$sb,s'b'$, qui, avec la ligne a,a', déterminera le plan tangent p.

690. Ainsi le parallèle qui passe par un point donné sur une surface de révolution faisant toujours connaître une tangente à ce point, *il ne restera plus dans chaque cas qu'à obtenir une tangente à la section méridienne qui contient le point donné :* construction qui dépendra de la définition géométrique de cette courbe.

691. La solution précédente revient évidemment à construire par le point donné mm' un plan tangent au cône circulaire engendré par la droite $s'b''$, et qui par conséquent touche la surface suivant le parallèle passant par le point donné.

En général, *toutes les fois que deux surfaces se toucheront en un ou plusieurs points, tout plan qui en un de ces points toucherait l'une de ces surfaces serait aussi tangent* à l'autre.

En effet, le point de tangence pourra être considéré comme une facette infiniment petite, commune aux deux surfaces, et cette facette prolongée en tous sens deviendra un plan tangent à toutes deux.

692. Cette conséquence nous sera utile dans le cas où nous n'aurions pas sur l'épure le sommet du cône tangent. En effet, après avoir construit la tangente sb'' nous tracerons la droite $m''o$ perpendiculaire à sb''.

Le point o sera le centre d'une sphère qui touchera la surface donnée dans toute l'étendue du parallèle $m''m'$; de sorte que la question proposée sera réduite à construire un plan tangent par le point mm', situé sur la surface de la sphère qui a pour centre le point o (540).

Il n'est pas nécessaire de construire la sphère, dont nous ne parlons ici que pour mieux faire comprendre le principe; il est évident qu'il suffit de construire par le point mm' un plan perpendiculaire à la droite sm, om'.

693. *Construire un plan tangent par un point situé sur la surface d'un hyperboloïde de révolution à une nappe* (*fig.* 412).

L'axe et la génératrice $zx, z'x'$ de la surface étant donnés, on construira le cercle de gorge, le parallèle qui contient le point donné, puis les deux projections m et m' de ce point.

On fera tourner ensuite la génératrice $(zx, z'x')$ jusqu'à ce qu'elle soit parvenue dans la position $(z''x'', z'''x''')$, et l'on prendra cette droite pour la première tangente (630).

On construira la droite vu, tangente à la projection horizontale du cercle de gorge, et l'on en déduira la projection verticale $v'u'$; de sorte que la ligne $(vu, v'u')$, deuxième génératrice de la surface, sera la seconde tangente.

Le plan p sera déterminé par les deux droites $(z''x'', z'''x''')$ $(vu, v'u')$.

On remarquera que pour résoudre la question, on n'a pas fait usage de la section méridienne que l'on pourrait alors se dispenser de construire.

694. Tous les plans tangents à l'hyperboloïde de révolution coupent cette surface suivant deux génératrices, et l'intersection de ces deux droites détermine le point de tangence.

695. Si le point par lequel on propose de construire un plan tangent à une surface de révolution est situé sur le méridien principal, l'une des tangentes sera l'horizontale

projetante du point donné ; de sorte que le plan tangent p' (*fig.* 406) sera perpendiculaire au plan vertical de projection.

696. Si le point donné appartient à l'un des parallèles formant les limites de la projection horizontale de la surface, le plan tangent sera perpendiculaire au plan horizontal de projection.

Ainsi, les plans verticaux qui auraient pour traces les deux droites p''' et p^{IV} sont tangents, le premier au point aa' et le deuxième au point cc'.

Le plan p^{IV} est en même temps un plan coupant.

697. *Normale.* La droite $t'k$ (*fig.* 406) est une normale ; il en est de même de la droite $mh, m'h'$ perpendiculaire au plan tangent p (*fig.* 410).

Si on veut donner à la normale $mh, m'h'$ une longueur déterminée, on rabattra cette droite dans le plan du méridien principal, on fera $m''h''$ égale à la longueur donnée, puis on ramènera la normale à sa place en la faisant tourner autour de l'axe.

698. On remarquera que pour construire la normale il n'est pas nécessaire d'avoir les traces du plan tangent.

En effet, pour obtenir une normale au point z, on rabattra ce point en z', puis on construira la normale que l'on fera revenir à sa place en remarquant que dans ce mouvement le point c doit rester immobile.

699. *Construction du plan tangent à une surface de révolution par un point situé en dehors de cette surface.*

La question est indéterminée, car si par le point donné on construit un plan tangent, il sera possible de faire tourner ce plan autour de la surface sans qu'il cesse d'être tangent et de contenir le point donné.

Or, si pour chacune des positions de ce plan mobile, on pouvait déterminer le point de tangence, la construction de chaque plan tangent se réduirait aux opérations que nous avons indiquées au n° 689.

D'ailleurs, la construction du plan tangent n'a souvent d'autre but que de faire comprendre les opérations nécessaires pour déterminer les points de tangence, et lorsque ces points sont obtenus il devient presque toujours inutile de construire les traces des plans.

700. *Ligne de contact.* Si par le point donné ss' (*fig.* 414, *Pl.* 60) on conçoit une droite $s'a$ qui touche la surface en l'un quelconque de ses points, et que l'on fasse mouvoir cette droite de manière que sans cesser de contenir le point donné, elle s'appuie sur la surface, on engendrera un cône tangent qui aura pour sommet le point donné.

Tous les plans tangents à ce cône satisferont à la question proposée, et toucheront la surface en l'un des points suivant lesquels cette surface est touchée, par le cône enveloppant qui a son sommet en ss'.

La courbe qui contient tous ces points se nomme *ligne de contact*, et notre but est de la construire.

701. 1[re] *solution. Méthode des plans coupants.* On fera passer par le point ss' un plan sp perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple.

On construira la courbe provenant de la section de la surface par le plan sp.

On déterminera tous les points suivant lesquels cette courbe peut être touchée par des droites qui contiendraient le point donné.

Chacun de ces points m, m' fera partie de la courbe cherchée.

En effet, le plan tangent à l'un des points m', devant contenir toutes les droites qui touchent la surface à ce point, il devra contenir la droite $sm, s'm'$, par conséquent il passera par le point ss'.

On recommencera cette construction en choisissant la direction des plans coupants de la manière la plus avantageuse.

702. On peut choisir à volonté l'une des projections du point que l'on veut obtenir.

Ainsi, par exemple, si l'on donnait le point m comme projection horizontale de l'un des points de la courbe cherchée, on obtiendrait la projection verticale en opérant comme nous venons de le dire.

Si au contraire on avait donné la projection verticale m', il aurait fallu couper la surface par un plan tel que $s'zq$ perpendiculaire au plan vertical de projection.

703. La méthode que nous venons d'expliquer est générale et convient à toutes les surfaces; mais pour éviter la construction des courbes qui proviennent de la section par les différents plans coupants auxiliaires, on doit chercher si les propriétés particulières des surfaces de révolution ne permettraient pas d'employer des moyens plus simples.

704. 2ᵉ *solution. Méthode des cylindres projetants.* Étant donnés (*fig.* 413) le point ss' et la surface annulaire engendrée par le cercle M, il y aura deux courbes de contact. L'une contient les points suivant lesquels la surface serait touchée extérieurement par un cône ayant pour sommet le point donné ss'.

La seconde courbe appartient à un cône ayant le même sommet et qui touche la portion de surface engendrée par la demi-circonférence qui est la plus rapprochée de l'axe.

Ces deux courbes pourront être déterminées en même temps et de la manière suivante.

705. La perpendiculaire ss'', abaissée sur la trace du méridien C, percera ce plan en un point dont la projection horizontale s'', ramenée en s''' sur la trace du méridien principal, déterminera s^{v} pour la projection du point donné ss' sur le plan du méridien C rabattu sur le plan B.

Cela étant fait, on tracera par le point s^{v} quatre tangentes aux deux cercles qui composent le méridien principal de la surface. Ces quatre droites seront les intersections du plan vertical C par quatre plans tangents à la surface et contenant le point donné ss'.

Les points 1,1,1,1 projetés en $1',1',1',1'$ sur la trace du méridien principal B, seront ramenés de là en $1'',1'',1'',1''$ sur la trace du méridien C; leurs projections verticales $1''',1''',1''',1'''$ seront situées sur les parallèles qui contiennent les quatre points 1,1,1,1.

En opérant de la même manière on obtiendra quatre points dans chaque plan méridien.

On fera bien de multiplier les opérations dans les parties des lignes de contact où les variations de courbure sont le plus sensibles.

706. Quelques points pourront être obtenus plus facilement par suite de la position particulière des méridiens qui les contiennent. Ainsi, par exemple :

Les quatre tangentes menées par le point s' déterminent, sur la section méridienne principale, les points $2,2'$... suivant lesquels la surface serait touchée par quatre plans contenant le point donné ss' et perpendiculaires au plan vertical de projection. Ces quatre points ont leurs projections horizontales sur la trace du méridien B.

Si nous faisons tourner le méridien A jusqu'à ce qu'il soit venu coïncider avec le méridien principal, le point s viendra se placer en s^{v}, d'où on déduira s^{vi} qui sera le point donné ss' rabattu dans le méridien B.

Les quatre tangentes menées par ss^{vi} détermineront alors les points 3,3'.... suivant lesquels la surface serait touchée par quatre plans passant par le point ss' et perpendiculaires au plan du méridien s—A.

Ce sont les points les plus élevés et les plus bas des deux courbes de contact.

707. La solution que nous venons d'exposer revient à prendre successivement chaque méridien pour plan de projection ; de sorte que les tangentes menées par les points $s^{vi}, s^{iv}, s^{vii}, s'$ sont les traces des plans tangents aux cylindres projetants perpendiculaires aux plans A, C, E, B, etc.

708. Les tangentes menées par le point s sont les traces des plans tangents aux deux cylindres verticaux qui contiennent le cercle de gorge et le plus grand parallèle de la surface.

Elles déterminent les points 4,4' suivant lesquels la surface serait touchée par quatre plans verticaux contenant le point donné ss'. Ces quatre points appartenant au plus grand parallèle et au cercle de gorge, les projections verticales seront situées sur la droite horizontale ac.

709. On peut abréger beaucoup le travail en ayant égard à la symétrie.

Ainsi, les deux méridiens B et B' étant placés symétriquement par rapport au méridien s—A, les points obtenus dans le méridien B pourront être reportés à la même distance de l'axe sur la trace horizontale du méridien B′, d'où on déduira leurs projections verticales sur le parallèle correspondant.

Les points situés dans le méridien C′ se déduiront de la même manière que ceux qui appartiennent au méridien C.

Enfin les points du méridien E seront déterminés par le point s^{vii}, projection du point ss' sur le méridien E rabattu dans le plan B.

710. Si on construit la droite su, tangente à la projection horizontale de la courbe intérieure, et la droite $s'u'$, tangente à la projection verticale de la même courbe, les deux points de tangence u et u' devront se trouver sur une même droite perpendiculaire à la ligne AZ. Cela provient de ce que pour le point uu', la tangente à la courbe de contact doit contenir le point donné.

Il existe trois autres points qui jouissent de la même propriété, et qui, deux à deux, sont placés symétriquement par rapport au méridien As.

Pour éviter la confusion des lignes, on n'a tracé sur l'épure que la tangente au point u,u', mais on fera bien de construire les trois autres tangentes, et de s'assurer que les points de tangence correspondants sur les deux projections sont situés deux à deux sur le même perpendiculaire à la ligne AZ.

Il n'existe pas de points analogues sur la courbe extérieure.

711. Tous les plans qui touchent la surface en un des points de la courbe intérieure sont en même temps des plans coupants, tandis que tous les plans qui sont tan-

gents en un point de la courbe extérieure ne coupent pas la surface.

712. La méthode précédente est utile surtout lorsqu'on veut obtenir les points de tangence qui appartiennent à un méridien donné; mais si on voulait construire ceux de ces points qui sont situés sur un *parallèle* de la surface, il faudrait opérer de la manière suivante.

713. 3e *solution. Méthode des cônes tangents* (*fig.* 415). Au lieu de construire comme précédemment des plans tangents aux cylindres horizontaux qui touchent la surface suivant des méridiens donnés, on emploiera les plans tangents à des cônes circulaires qui auraient le même axe que la surface et qui la toucheraient suivant les différents parallèles sur lesquels on veut obtenir les points de tangence.

Ainsi, par exemple, pour déterminer ceux de ces points qui seraient situés sur le parallèle ac, on tracera la droite $o'a$ qui touche au point a le méridien principal de la surface.

Le cône circulaire engendré par le mouvement de la droite $o'a$ autour de l'axe touchera la surface dans toute l'étendue du parallèle ac; de sorte que la question sera réduite à construire par le point donné ss' deux plans tangents au cône engendré par la droite $o'a$ (471).

On joindra le point donné ss' avec le point oo' qui est le sommet du cône auxiliaire, et la droite $so,s'o'$ sera l'intersection des deux plans qui sont tangents à ce cône et qui contiennent le point donné.

La droite $so,s'o'$ percera le plan horizontal qui contient le parallèle donné en un point uu' par lequel on construira les deux tangentes $u—1, u—1$.

Les points de tangence 1, 1, déterminés avec toute l'exactitude possible, appartiendront à la courbe demandée.

En effet, les plans tangents à ces points contiendront les deux tangentes $u-1, u-1$; et comme de plus ils seront tangents au cône auxiliaire, ils devront en contenir le sommet o'; donc ils se couperont suivant la droite $uos, u'o's'$, et passeront par conséquent par le point donné ss'.

Ces constructions, répétées pour d'autres parallèles de la surface, feront connaître autant de points que l'on voudra.

714. Pour le cercle de gorge, le cône auxiliaire devient un cylindre vertical, et les points de tangence $2, 2'$ doivent être déterminés par les tangentes $s-2, s-2$.

715. Si le parallèle sur lequel on veut obtenir un point de tangence est au-dessous du cercle de gorge, le sommet du cône auxiliaire sera au-dessus du plan de ce parallèle.

Le contraire aurait lieu si le parallèle donné était au-dessus du cercle de gorge, et dans ce cas le cône auxiliaire serait renversé, ce qui ne changerait rien à la manière d'opérer.

716. Si on faisait descendre le parallèle donné, le sommet du cône auxiliaire descendrait également, et l'angle au sommet de ce cône deviendrait plus ouvert.

D'un autre côté la droite $sou, s'o'u'$ se rapprocherait de la surface du cône, et lorsqu'elle serait arrivée dans cette surface, les deux plans tangents au cône auxiliaire coïncideraient, et les deux points de tangence, réunis en un seul, seraient situés dans le plan méridien qui contient le point donné.

Ce point serait le plus bas de la courbe cherchée. Pour l'obtenir, on fera tourner le méridien *os* jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le méridien principal ; et lorsque le point donné ss' sera parvenu en s'', on construira la tangente s''—3, génératrice du dernier cône auxiliaire.

Le point de tangence 3, projeté en $3'$ et ramené de là dans le méridien *os*, déterminera $3''$ et $3'''$ pour les projections du point le plus bas de la courbe.

La tangente s—4 donne le point $4'$ qui, ramené en $4'''$, sera le point le plus élevé.

717. Pour les parallèles au-dessus de $4'$—$4'''$ et pour ceux au-dessous de $3'$—$3'''$, la droite qui joindrait le point donné avec les sommets des cônes auxiliaires entrerait dans l'intérieur de ces cônes, et par conséquent elle ne pourrait déterminer aucun plan tangent.

718. Il y a deux cas dans lesquels la méthode précédente ne pourrait pas être employée :

1° Si le sommet du cône auxiliaire était dans le plan horizontal qui contient le point ss', ou très-près de ce plan, la droite $s'o'$ serait horizontale ou très-près de cette position, et rencontrerait par conséquent très-loin le plan du parallèle sur lequel on veut obtenir des points de tangence ; on serait forcé, dans ce cas, de recourir à des constructions auxiliaires ;

2° Si le parallèle sur lequel on veut obtenir des points de tangence était très-près du cercle de gorge, le sommet du cône auxiliaire serait en dehors des limites de l'épure.

Dans chacun de ces deux cas on pourra opérer de la manière suivante.

719. 4e *solution. Méthode des sphères tangentes.* Supposons que l'on veuille obtenir les points de tangence qui sont situés sur le parallèle *mn*, on construira la droite *nt*

qui touche la section méridienne au point n, puis on tracera $n\nu$ perpendiculaire sur nt.

Le point ν, provenant de la rencontre de $n\nu$ avec l'axe de la surface de révolution, sera le centre d'une sphère qui touchera cette surface suivant la circonférence du parallèle mn.

De sorte que tout plan qui toucherait la sphère en un point de ce parallèle, serait tangent à la surface donnée (667).

Il ne reste donc plus qu'à choisir parmi tous ces plans ceux qui contiennent le point donné.

Or, si on conçoit un cône circulaire qui envelopperait la sphère et qui aurait pour sommet le point ss', les plans demandés devront toucher ce cône, et par conséquent les points de tangence seront à la rencontre du parallèle mn avec le petit cercle suivant lequel la sphère qui a $n\nu$ pour rayon sera touchée par le cône auxiliaire qui a son sommet en ss'.

Pour éviter la projection elliptique de ce petit cercle, on rabattra le plan méridien qui contient le point donné, jusqu'à ce que ce point soit parvenu en s'' dans le plan du méridien principal.

On construira les deux tangentes $s''z, s''x$ qui formeront les limites de la projection du cône auxiliaire sur le plan du méridien pq.

On déterminera bien exactement les deux points de tangence z et x, et la corde zx, qui joint ces deux points, sera la projection sur le plan méridien os, du petit cercle suivant lequel la sphère est touchée par le cône qui a son sommet en ss'.

De sorte que le point 3, intersection des deux droites mn, zx, sera la projection commune aux deux points de tangence demandés. Il ne reste plus qu'à retrouver la place que chacun de ces deux points doit occuper sur la surface.

Pour y parvenir, projetons le point 5 sur la trace du méridien *oq*, et faisons revenir ce méridien dans la position *os*, le point $5'$ viendra se placer en $5''$ et la droite $5'''$—$5'''$, perpendiculaire sur *os*, sera la corde horizontale qui joint les deux points de tangence demandés. Les projections horizontales de ces points seront déterminées par les intersections de $5'''$—$5'''$ avec la circonférence qui représente la projection horizontale du parallèle *mn*.

Les verticales $5'''$—5^{IV}, $5'''$—5^{IV} détermineront sur *mn* les projections verticales des deux points de tangence.

720. Dans l'application des principes que nous venons d'exposer, il ne faudra pas accorder de préférence absolue à l'une des méthodes sur l'autre, et l'on pourra employer successivement chacune d'elles selon que l'on voudra obtenir un point sur un méridien (704), sur un parallèle (713, 719), ou dans un plan qui serait perpendiculaire au plan de projection et qui contiendrait le point donné (701).

721. Toutes les solutions précédentes auraient été plus simples si l'on avait pris un plan de projection parallèle au méridien qui contient le point donné, parce que les parties vues et cachées de la courbe de contact se seraient confondues sur la projection verticale.

722. Si la surface proposée était du second degré, la courbe de contact serait aussi du second degré (*Géom. analyt.*), et dans ce cas elle se projetterait par une ligne droite sur tout plan qui serait parallèle au méridien dont le plan contient le point donné.

Ainsi, par exemple, proposons de *construire un plan tangent à un ellipsoïde de révolution par un point situé en* *dehors de cette surface*, et supposons que le point donné soit situé en $s''s'''$ (*fig.* 416), la courbe de contact sera une ellipse projetée sur le plan vertical par la corde zx, le point c, milieu de zx, sera la projection verticale du petit axe dont les extrémités v,u, seront déterminées par les intersections de la perpendiculaire abaissée du point c avec la projection horizontale du parallèle cc'''.

723. Si le point donné était situé en ss', on ferait tourner le plan méridien qui contient ce point jusqu'à ce qu'il soit parvenu dans la position $s''s'''$, puis après avoir déduit de cette projection :

1° Le centre c,c',c'' de l'ellipse zx;

2° Le diamètre $v'u'$, égal à vu;

3° Le diamètre $z'x'$, égal à la projection horizontale de la corde zx,

on construira la projection horizontale de la courbe demandée.

Sa projection verticale sera déterminée par la rencontre des verticales élevées par les différents points de l'ellipse $v'z'u'x'$, avec les horizontales passant par les projections des mêmes points sur la corde zx.

724. *Construire un plan tangent à une surface de révolution parallèlement à une droite donnée.*

Cette question peut être considérée comme un cas particulier du problème précédent. Il suffit pour cela de supposer que le point donné ss' (*fig.* 413, 414, 415 et 416) soit reculé jusqu'à l'infini dans la direction de la droite donnée; dans ce cas les cônes qui ont ce point pour sommet et qui enveloppent la surface seront transformés en autant de cylindres parallèles à la ligne donnée; de sorte qu'il ne restera plus qu'à déterminer les courbes suivant lesquelles la surface serait touchée par ces cylindres.

Nous allons indiquer plusieurs solutions qui sont les conséquences naturelles de l'hypothèse qui vient d'être admise.

725. 1re *solution. Méthode des plans coupants* (*fig.* 418, *Pl.* 61). On coupera la surface par un plan p, parallèle à la droite donnée $so, s'o'$; pour plus de simplicité on prendra ce plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, et l'on construira la courbe de section *aa* par l'un des moyens indiqués aux nos 672, 675.

On tracera, parallèlement à la droite donnée, toutes les tangentes qu'il sera possible de construire à la courbe obtenue, et l'on déterminera bien exactement les points de tangence $1', 1'$..... Ces points satisferont aux conditions demandées.

On conçoit, en effet, que le plan tangent à l'un des points $1, 1'$..... contiendrait la tangente correspondante, et serait par conséquent parallèle à la droite donnée.

En coupant de nouveau la surface par d'autres plans, on obtiendra autant de points que l'on voudra.

726. Dans l'exemple proposé, la surface étant annulaire, on obtiendra deux courbes qui ont beaucoup d'analogie avec celles que nous avons trouvées au n° 704.

La première, *mm*, contient tous les points de tangence situés sur la portion de surface engendrée par le demi-cercle *vuz*.

La deuxième, *nn*, appartient à la partie engendrée par le demi-cercle *vxz*.

727. Le plan coupant p détermine *quatre* points de tangence, savoir : deux sur la courbe *mm* et deux sur la courbe *nn*.

Le plan p', tangent au cercle de gorge, contiendra *cinq* points de tangence, savoir :

Un sur le cercle de gorge,

Deux sur la courbe *mm*,

Deux sur la courbe *nn*.

Depuis le plan p' jusqu'au plan p'', tangent à la courbe *nn*, chaque section contient six points qui se réduisent à quatre dans le plan p''.

Enfin, du plan p'' au plan p''', chaque section n'en contiendra plus que deux.

Le plan vertical p''' ne déterminera qu'un point de tangence qui sera situé sur le plus grand parallèle de la surface.

728. Les quatre points 2,2,2,2, devront être vérifiés de toutes les manières possibles. Les droites, menées par ces points parallèlement à la ligne donnée, seront tangentes à la courbe de contact, ce qui n'a lieu pour aucun autre point de la même courbe.

729. Nous n'avons indiqué sur la figure, que des plans coupants verticaux, mais il est évident que l'on peut également faire usage des sections perpendiculaires au plan vertical de projection.

On pourra recourir à ce moyen lorsqu'il restera quelque incertitude sur la position des points cherchés, ce qui aura lieu toutes les fois que dans le voisinage de ces points la courbure de la section auxiliaire sera peu sensible.

On sera dispensé de construire les sections de la surface par les plans coupants auxiliaires, en opérant de la manière suivante :

730. 2[e] *solution. Méthode des cylindres projetants.* On

prendra successivement chaque plan méridien pour plan auxiliaire de projection comme nous l'avons fait au n° 704; de sorte que la question sera réduite à construire parallèlement à la droite donnée, des plans tangents aux cylindres horizontaux qui déterminent les diverses projections de la surface sur les plans des méridiens.

Voici l'ordre des opérations :

731. La droite donnée (*fig.* 417) n'étant déterminée que par sa direction, il sera toujours permis de la placer dans le plan de l'un des méridiens de la surface, de sorte qu'elle couperait l'axe en un point oo', pris à volonté sur cet axe.

On choisira un second point quelconque ss' par lequel on abaissera la droite $s—s''$ perpendiculaire sur la trace du méridien C.

Le point s'' ramené en s''' déterminera s^{IV}, de sorte que $s^{\text{IV}}o'$ sera la projection de la droite $so,s'o'$ sur le plan du méridien C rabattu en B.

Cela étant fait, on construira toutes les tangentes qu'il sera possible de mener à la section méridienne de la surface. Ces lignes seront les intersections du plan C par autant de plans tangents au cylindre horizontal qui déterminerait le contour de la projection sur le plan du méridien C.

Les six points de tangence 1,1,1....,obtenus par l'opération précédente, seront projetés en $1',1'$.,...,. sur la trace du méridien B; on les ramènera de là en $1'',1''$.... sur la trace du méridien C, d'où on déduira leurs projections verticales $1''',1''',1'''$.....

En opérant de la même manière on obtiendra six points sur chacun des méridiens de la surface.

Ces points appartiennent à trois courbes *mm*, *nn*, *uu* que l'on reconnaîtra facilement à l'inspection de la projection verticale de la surface.

L'exactitude du résultat dépendra du soin avec lequel les points de tangence auront été déterminés.

Les tangentes parallèles à la projection verticale $s'o'$ de la droite donnée, détermineront les six points suivant lesquels la surface serait touchée par six plans perpendiculaires au plan vertical de projection et parallèles à la droite $so,s'o'$.

Ces points auront leurs projections horizontales sur la trace du méridien B.

Si on fait tourner le méridien s—A jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan du méridien principal, le point s viendra se placer en s^{v}, d'où on déduira s^{vi}, de sorte que $s^{\text{vi}}o'$ sera la droite donnée, rabattue dans le plan du méridien B.

Cela étant fait, les six tangentes parallèles à $s^{\text{vi}}o'$, détermineront les points suivant lesquels la surface serait touchée par six plans parallèles à la droite $so,s'o'$ et perpendiculaires au plan du méridien s—A.

Ces six points, projetés sur la trace du méridien B et ramenés de là dans le plan du méridien s—A, seront les points les plus élevés et les plus bas des trois courbes de contact.

Enfin, si on projette sur le plan horizontal, le plus grand parallèle zx et les deux cercles de gorge ac,vr qui, dans l'exemple proposé, ont une projection horizontale commune;

Les intersections de ces trois cercles par le plan du méridien D, détermineront six points suivant lesquels la surface serait touchée par six plans verticaux parallèles à la droite donnée. Ces plans seraient tangents aux trois cylindres verticaux qui touchent la surface suivant les parallèles ac, zx, vr, qui par conséquent devront contenir les points de tangence déterminés par cette dernière opération.

732. On devra, comme au n° 709, profiter de la disposition symétrique des plans méridiens.

Ainsi, les points obtenus dans le méridien B, seront reportés à la même distance de l'axe sur la trace du méridien B', d'où on déduira leurs projections verticales sur les parallèles correspondants.

Les points obtenus dans le méridien C détermineront ceux qui sont placés à la même hauteur dans le plan du méridien C'.

733. La solution que nous venons d'expliquer permet d'obtenir les points qui appartiennent à un méridien déterminé, mais si on voulait trouver un point de tangence sur un parallèle il faudrait opérer de la manière suivante.

734. 3ᵉ *solution. Méthode des cônes tangents.* Nous reprendrons encore une fois pour exemple la surface annulaire que nous ne saurions trop étudier, puisqu'elle contient les éléments de toutes les autres surfaces de révolution (666).

La droite donnée étant déterminée par ses deux projections s—o, s'—o' (*fig.* 419), je suppose que l'on veut obtenir ceux des points de la ligne de contact qui sont situés sur le parallèle $vu, v'u'$.

On tracera la droite $v'z$ qui touche au point v' la section méridienne de la surface.

On fera tourner cette tangente autour de l'axe, et par ce mouvement on engendrera un cône circulaire qui touche la surface donnée dans toute l'étendue du parallèle $vu, v'u'$, de sorte que tout plan tangent au cône sera tangent à la surface en un point de ce parallèle.

La question sera donc réduite à construire, parallèlement à la droite donnée, deux plans tangents au cône circulaire engendré par la droite $v'z$ (472). Voici l'ordre des opérations :

1° on tracera la droite zh', parallèle à $s'o'$, cette ligne sera la projection verticale de l'intersection des deux plans tangents demandés ;

2° On déterminera le point $h'h$ suivant lequel la droite zh', zh perce le plan du parallèle $vu,v'u'$ que nous prenons pour la base du cône auxiliaire;

3° On mènera par le point h deux tangentes à la projection horizontale de ce parallèle.

Les deux points de tangence 1,1, déterminés avec toute l'exactitude possible, appartiendront à la courbe cherchée.

Il ne restera plus qu'à obtenir les projections verticales de ces points en élevant les deux perpendiculaires $1-1'$ jusqu'à leur rencontre avec le parallèle $v'u'$.

735. Le plan horizontal $v'u'$ contient encore deux autres points situés sur le parallèle $ac, a'c'$. Pour les obtenir on construira la tangente $c'x$ que l'on prendra pour génératrice d'un second cône auxiliaire qui toucherait la surface suivant le parallèle $ac,a'c'$.

On tracera la droite xr', parallèle à la ligne $o's'$. Cette ligne xr', intersection des deux plans tangents au cône auxiliaire qui a son sommet en x, percera le plan horizontal qui contient la base de ce cône en un point $r'r$, par lequel on construira les deux tangentes $r-2$, $r-2$.

Cette opération déterminera les points 2,2, dont on obtiendra les projections verticales en élevant les perpendiculaires $2-2', 2-2'$ jusqu'à la rencontre du parallèle $a'c'$.

Il ne restera plus qu'à répéter ces opérations pour obtenir autant de points que l'on voudra.

736. Les points les plus élevés des deux courbes s'obtiendront en construisant des tangentes à la section méridienne, parallèlement à la droite $s''o'$ qui représente la ligne donnée $so, s'o'$, rabattue dans le plan du méridien principal.

Ces tangentes sont les génératrices des derniers cônes auxiliaires.

737. 4e *solution. Méthode des sphères tangentes.* Si nous prolongeons le rayons ec' du cercle générateur de la surface jusqu'à sa rencontre avec l'axe, nous obtiendrons un point o', et la circonférence décrite de ce point comme centre avec le rayon $o'c'$ sera la projection d'une sphère tangente à la surface suivant la circonférence du parallèle $ac, a'c'$; de sorte que tout plan qui toucherait la sphère en un point de ce parallèle serait tangent à la surface donnée. Il ne reste donc plus qu'à choisir, parmi tous les plans qui satisfont à cette condition, ceux qui seraient parallèles à la droite $so, s'o'$.

Or, si par le centre de la sphère nous construisons la droite $os, o's'$ parallèle à la ligne donnée, et que nous rabattions cette droite dans le plan du méridien principal, le diamètre nn perpendiculaire sur $o's''$ représentera dans ce rabattement la projection du grand cercle suivant lequel la sphère auxiliaire est touchée par tous les plans parallèles à la droite $os, o's'$, rabattue en $o's''$.

Mais le cercle nn et le parallèle $a'c'$, appartenant tous deux à la sphère, se coupent en deux points qui, sur le rabattement, se projettent en un seul point $2''$, et qui sont les deux points demandés.

Il ne reste plus qu'à faire revenir ces points à la place qu'ils doivent occuper sur la surface donnée.

Pour atteindre ce but, nous remarquerons d'abord qu'ils doivent être situés tous les deux sur le parallèle $ac, a'c'$.

De plus, le point $2''$ étant projeté en $2'''$ et ramené en 2^{iv}, sera le milieu de la corde 2—2 qui joint les deux points projetés en $2''$ sur le rabattement.

Enfin on tracera la corde 2—2 perpendiculaire sur os.

Les deux intersections de cette corde avec le parallèle ac, détermineront les projections horizontales 2,2 des points cherchés; leurs projections verticales s'obtiendront en élevant les deux perpendiculaires $2—2', 2—2'$.

738. Le rayon $u'e$, prolongé jusqu'à sa rencontre avec l'axe, détermine un point l que l'on prendra pour centre d'une seconde sphère auxiliaire, tangente à la surface donnée suivant la circonférence du parallèle $vu, v'u'$.

La droite mm, perpendiculaire sur $o's''$, est la projection sur le plan os, rabattu en ou, d'une partie du grand cercle, suivant lequel la sphère qui a pour rayon lu', serait touchée par tous les plans parallèles à la droite donnée rabattue en $o's''$.

La circonférence mm coupera le parallèle $v'u'$ en deux points qui se projettent tous deux en $1''$ et qui satisfont aux conditions demandées.

La perpendiculaire $1''—1'''$ détermine $1'''$ qui, ramené en 1^{iv}, sera le milieu de la corde qui joint les deux points cherchés 1,1 ; on tracera cette corde perpendiculaire sur os, ce qui donnera sur le parallèle vu les projections horizontales 1,1 de ces points.

Enfin, les deux perpendiculaires $1—1', 1—1'$ donnent les projections verticales $1', 1'$.

739. L'emploi d'une sphère tangente comme surface auxiliaire, serait utile surtout dans le cas où l'on voudrait obtenir un point de tangence sur un parallèle qui serait très-près du cercle de gorge ou du plus grand parallèle, parce que dans ce cas le sommet du cône tangent employé dans la troisième méthode, se trouverait très-loin en dehors de l'épure, et l'on ne pourrait plus construire la droite intersection des deux plans tangents demandés.

740. Il est évident que les opérations précédentes pourraient être simplifiées si on prenait un plan de projection parallèle à la ligne donnée.

C'est uniquement pour exercer, que l'on a choisi une disposition différente.

741. *Construire un plan tangent à l'hyperboloïde de révolution parallèlement à la droite* so, s'o' (*fig.* 420).

Si on veut obtenir les points de tangence sur un méridien ou sur un parallèle donné, on construira ces courbes et l'on fera pour le reste comme nous l'avons dit aux n^os^ 730, 734 et 737.

Mais si on veut obtenir le point de tangence sur une génératrice $ac, a'c'$, il faudra opérer de la manière suivante :

Par un point quelconque uu', pris sur la génératrice donnée, on construira la droite $uv, u'v'$ parallèle à la ligne donnée $so, s'o'$.

Le plan p, qui contient les deux droites $(au, a'u')$ $(uv, u'v')$, sera le plan tangent demandé.

En effet, la droite cx, parallèle à la trace horizontale du plan p, coupera le parallèle acx en un point x par lequel on pourra toujours construire une droite $xz, x'z'$ qui appartient à la seconde génération de la surface (661).

De plus, ces deux droites se coupant au point mm', elles sont situées toutes deux dans le plan p et peuvent être considérées comme les deux tangentes qui déterminent ce plan (629).

Les points m,m' sont les deux projections du point de tangence demandé.

742. L'hyperboloïde de révolution étant une surface du second degré, il résulte du principe que nous avons énoncé au n° 722, que la courbe suivant laquelle cette surface serait touchée par un cylindre ou par un cône, sera elle-même du second degré; de sorte qu'elle se projettera toujours par une ligne droite sur un plan perpendiculaire à celui qui la contient.

Cette remarque peut donner lieu à des abréviations.

743. *Par une droite donnée, construire un plan tangent à une surface de révolution.*

744. 1re *solution.* Étant données la surface A et la droite a (*fig.* 425, *Pl.* 62), on prendra sur la droite un point quelconque s et l'on construira (700) la courbe vu suivant laquelle la surface serait touchée par le cône qui aurait son sommet en s; il ne restera plus qu'à construire par la droite donnée des plans tangents au cône (471).

Pour y parvenir on coupera ce cône par un plan quelconque, et l'on construira la courbe de section zx (475); on déterminera pareillement le point m suivant lequel ce plan coupe la droite a, et l'on tracera les deux droites mz, mx, tangentes à la courbe de section. Chacune de ces tangentes et la droite donnée détermineront un plan qui satisfera aux conditions du problème.

Dans l'exemple représenté sur la *fig.* 425, il n'y aurait que deux solutions; mais il est évident que pour certaines surfaces de révolution dont la section méridienne aurait beaucoup de sinuosités, il pourrait y avoir un plus grand nombre de plans tangents.

745. 2^e^ *solution.* Au lieu d'un cône on pourrait employer un cylindre auxiliaire qui serait parallèle à la droite donnée; cela reviendrait à supposer que le sommet du cône est reculé sur cette droite jusqu'à l'infini.

746. 3^e^ *solution.* On prendra sur la droite donnée *a* (*fig.* 424) un point quelconque *s*, et considérant ce point comme le sommet d'un cône qui envelopperait la surface, on construira la courbe de contact *vu*.

On prendra ensuite sur la même droite un autre point quelconque *t* pour sommet d'un second cône qui envelopperait la surface, et l'on construira la courbe de contact *zx*.

Tous les points communs à ces deux lignes de contact détermineront les plans tangents demandés.

En effet, le plan qui toucherait la surface donnée au point *m*, par exemple, devrait contenir toutes les tangentes à ce point. Il contiendrait donc la droite *ms*, qui est une génératrice du premier cône auxiliaire, et qui par conséquent est une tangente de la surface; par conséquent il passerait par le point *s*. De plus il contiendrait la droite *mt*, génératrice du second cône auxiliaire, et passerait par le point *t*, sommet de ce cône donc il contiendrait la droite *st*.

747. 4^e^ *solution.* On pourrait remplacer l'un des cônes auxiliaires par un cylindre parallèle à la droite donnée, ce qui reviendrait à supposer que l'un des deux points est situé à l'infini.

Les moyens de construire les lignes de contact ayant été exposés dans les articles 700, 701, etc., je me bornerai à faire l'application des principes précédents à quelques cas particuliers.

748. Supposons qu'il s'agisse (*fig.* 421) de *construire par la droite* bb′ *deux plans tangents à un ellipsoïde de révolution* A,A′, et proposons-nous d'appliquer la solution du n° 744.

Nous admettrons d'abord que le sommet ss' du cône auxiliaire pouvant être pris à volonté, il sera permis de choisir ce point dans le plan du méridien principal ; de sorte que la courbe de contact se projettera sur le plan vertical par une droite zx (722). Il faut maintenant couper le cône et la droite bb' par un plan quelconque, et construire, par le point où la droite bb' perce le plan, des tangentes à la courbe suivant laquelle ce même plan coupe le cône.

Nous allons chercher quelle doit être la direction du plan coupant pour que les opérations soient les plus simples possible.

Pour résoudre cette partie de la question, concevons le cylindre vertical C, qui touche la surface donnée suivant son plus grand parallèle tr. Les génératrices qui forment les limites des projections du cylindre et du cône auxiliaire, se couperont aux quatre points a', a'', a', a'', qui seront les sommets d'un quadrilatère circonscrit à la projection verticale de l'ellipsoïde.

Nous admettrons que *dans un quadrilatère circonscrit à une ellipse ou à un cercle, les cordes qui joignent les points de tangence opposés passent par le point d'intersection des deux diagonales.* (Géom. analyt.).

D'après cela, supposons que les droites $zx, tr, a'a', a''a''$ soient les traces de quatre plans perpendiculaires au plan vertical de projection.

La section de l'ellipsoïde et du cône par le plan $p''q''$ sera l'ellipse zx. Le point ee', suivant lequel cette ellipse coupe le parallèle tr, appartient au cylindre projetant C.

Il résulte de là que les deux ellipses suivant lesquelles le cylindre et le cône sont coupés par le plan pq doivent coïncider, puisqu'elles ont un axe commun $a'a'$, et un point commun en ee'.

De plus, cette ellipse, commune aux deux surfaces, étant située sur le cylindre, aura pour projection horizontale la circonférence aa.

La relation précédente serait encore vraie si le sommet du cône auxiliaire était située dans l'intérieur du cylindre C; mais alors les deux courbes tr, zx ne se couperaient pas, et l'on ne pourrait plus raisonner de la même manière. Dans ce cas, il serait utile de recourir à l'analyse pour démontrer que la courbe suivant laquelle le plan pq coupe le cône auxiliaire, est en même temps située sur le cylindre C, et se projette par conséquent par un cercle aa.

Ce théorème étant admis, il est évident que la courbe aa, $a'a'$ sera la directrice la plus simple que nous puissions prendre pour le cône auxiliaire.

L'intersection du plan pq par la droite donnée bb' sera un point mm' par la projection horizontale duquel on construira les deux tangentes mo, mc. Les projections verticales de ces lignes se confondront avec la trace du plan pq. Enfin, chacune de ces tangentes avec la droite donnée, déterminera un des plans tangents demandés par la question.

Les deux points o,c, projetés en o' et c', détermineront les deux droites $(so,s'o')$ $(sc,s'c')$ suivant lesquelles les deux plans tangents touchent le cône auxiliaire; et les points

nn', uu', suivant lesquels ces droites coupent l'ellipse zx, sont les points de tangence sur l'ellipsoïde.

749. 2° *solution*. On pourra prendre pour directrice du cône auxiliaire la ligne de contact zx; dans ce cas les plans tangents seraient déterminés par la ligne donnée bb' et par chacune des deux tangentes menées par le point où cette droite perce le plan $p''q''$.

On pourra éviter la projection elliptique de l'ellipse zx en employant un plan auxiliaire sur lequel cette projection serait un cercle (402).

750. 3° *solution*. Si on suppose la surface enveloppée par deux cônes auxiliaires (746), on pourra disposer les opérations de la manière suivante (*fig*. 423) :

Il sera toujours permis de prendre pour sommet de l'un des deux cônes le point tt' suivant lequel la droite donnée bb' perce le plan horizontal qui contient le plus grand parallèle de la surface. Dans ce cas la courbe de contact sera une ellipse qui se projettera sur le plan horizontal par la corde cc.

On prendra ensuite pour sommet du second cône auxiliaire le point $s's'$, suivant lequel la droite bb' perce le plan du méridien principal, de sorte que la seconde courbe de contact aura pour projection verticale la corde aa.

Les points de tangence devant appartenir aux deux ellipses aa, cc (746), doivent se trouver par conséquent sur l'intersection des deux plans uvp, $u'v'p'$ qui contiennent ces courbes.

Ces deux plans, étant perpendiculaires aux plans de projections, sont les plans projetants, de leur intersection qui alors sera projetée par les deux droites uv, $u'v'$.

Il ne reste donc plus qu'à chercher les points suivant lesquels cette droite coupe l'une des deux courbes de contact cc, aa.

Nous choisirons la dernière de ces deux lignes, et pour éviter la construction de l'ellipse qui résulterait de sa projection ou de son rabattement, nous chercherons la position du plan sur lequel sa projection serait un cercle (402).

Ainsi, après avoir déterminé le centre o', nous rabattrons le parallèle qui contient ce point, et l'ordonnée $o'z$ sera le demi-petit axe de l'ellipse aa. Nous construirons le triangle rectangle $o'a'o$ en faisant le côté $o'a'$ de l'angle droit égal à $o'z$.

De sorte que $o'a'$ étant la projection de $o'a$, la droite $u''v''$ sera la trace du plan sur lequel l'ellipse aa se projettera par un cercle.

En faisant tourner ce plan autour de l'horizontale projetante du point v'', la circonférence $a''a''$ sera la projection de l'ellipse aa sur le plan $v''u''$.

Les deux points vv', uu', pris à volonté sur la droite uv, $u'v'$, se projetteront par v'' et u'', et le dernier se rabattra en u''', de sorte que $v'''u'''$ sera la projection de la droite uv, $u'v'$ sur le plan auxiliaire $u''v''$.

Les intersections m''', n''' de $v'''u'''$, avec la circonférence $a''a''$, seront par conséquent les deux points de tangence demandés que l'on fera revenir d'abord en m'' et n'' dans le plan $u''v''$, puis de là sur la courbe de contact aa par les deux perpendiculaires $m''m'$, $n''n'$.

Les projections horizontales m et n de ces points devront se trouver, sur la seconde courbe de contact cc, sur les droites $n'''n$, $m'''m$ parallèles à la ligne AZ et qui représentent les projections des arcs de cercles et des lignes projetantes parcourus par ces points; enfin sur les droites $m'm$, $n'n$ perpendiculaires à la ligne AZ.

751. *Construire un plan tangent à une surface de révolution et parallèle à un plan donné.*

Soient (*fig.* 422) le plan p donné et AA′ la surface donnée; construisons la droite $ac, a'c'$ perpendiculaire au plan donné, il ne restera plus qu'à choisir, parmi tous les plans perpendiculaires sur $ac, a'c'$, celui qui serait tangent à la surface donnée.

Pour satisfaire à cette dernière condition, concevons la droite $ac, a'c'$, rabattue en $a'c''$ dans le plan du méridien principal, la tangente su, perpendiculaire sur $a'c''$, représentera dans ce rabattement l'intersection du plan cherché par le plan méridien ac; nous ferons revenir la droite su dans ce méridien, ce qui nous donnera le point u'' par lequel nous construirons la trace horizontale du plan demandé p'.

Ce plan devant contenir le point s, sa trace verticale sera facile à déterminer. De plus, cette trace verticale devra être parallèle à celle du plan p, et par conséquent perpendiculaire sur $a'c'$.

Le point de tangence m'', étant ramené dans le plan du méridien ac, deviendra mm'. La droite $mc, m'z$, perpendiculaire sur le plan p', sera la normale et sera parallèle à la droite donnée $ac, a'c'$.

752 Dans l'exemple que nous avons choisi il y aurait un second plan tangent au point nn'.

753 Pour certaines surfaces de révolution il pourrait y en avoir davantage. Il est évident qu'il y aura autant de solutions que l'on pourra construire de tangentes à la section méridienne perpendiculairement à la droite $a'c''$.

754. *Projection oblique des surfaces de révolution.* Lorsqu'on veut exécuter un solide de révolution, il faut

le projeter de la manière la plus simple, et dans ce cas on doit prendre un plan de projection perpendiculaire à son axe; mais lorsqu'il est nécessaire de projeter le corps dans une position inclinée, les opérations deviennent plus difficiles.

755. Les dessinateurs se contentent ordinairement dans ce cas de concevoir la surface coupée par un certain nombre de plans perpendiculaires à son axe. Chaque section circulaire a pour projection une ellipse, et la courbe tangente à toutes ces ellipses forme le contour de la projection.

Cette manière d'opérer convient évidemment pour les arêtes circulaires de la surface; mais pour les autres parties, elle ne donne le contour de la projection que d'une manière approximative, et laisse de l'incertitude sur la position de certains points singuliers dont nous parlerons bientôt.

756. Pour ne pas augmenter, sans nécessité, le nombre des planches, nous choisirons un exemple qui contienne à peu près toutes les variations de courbure, et nous proposerons dans ce but de construire les deux projections du balustre dont la section méridienne est projetée (*fig.* 427, *Pl.* 63).

Les données sont:

1° La section méridienne dont nous venons de parler;

2° Les deux projections $ac,a'c'$ de l'axe de la surface.

Voici quel doit être l'ordre des opérations.

757. *Projection auxiliaire* (*fig.* 427). On commencera par construire la section méridienne sur un plan vertical AZ', parallèle à la droite $ac,a'c'$.

Pour obtenir l'inclinaison de cette projection, il suffira de projeter deux points quelconques de la ligne $ac, a'c'$.

On projettera ensuite la surface sur un plan perpendiculaire à son axe, et l'on rabattra cette nouvelle projection (*fig.* 430).

Quand l'épure sera disposée comme nous venons de le dire, on commencera les opérations nécessaires pour déterminer les deux projections obliques.

758. *Projection horizontale* (*fig.* 428). Les limites de cette projection étant les traces des surfaces cylindriques perpendiculaires au plan horizontal et tangentes à la surface donnée, la question se réduit à l'application des principes exposés aux n^{os} 724, 725, etc.

1re *opération*. Par un point quelconque o'', pris à volonté sur l'axe $a''c''$ (*fig.* 427), on construira la droite $o''u'$, perpendiculaire au plan horizontal AZ'.

La projection de cette droite sur la *fig.* 430, sera $o'''u$.

2^e *opération*. On déterminera sur les deux projections 427 et 430 toutes les courbes suivant lesquelles les différentes parties de la surface donnée seront touchées par autant de surfaces cylindriques parallèles à la droite $o''u', o'''u$, et par conséquent perpendiculaires au plan horizontal de projection.

Ces courbes sont au nombre de trois, savoir : la première mn, sur la portion de surface qui forme le col du balustre; la seconde courbe zx est située sur la partie convexe de la surface, et la troisième vr appartient à la scotie.

Ces trois courbes ont beaucoup d'analogie avec celles que nous avons obtenues sur la surface annulaire, et devront par conséquent être construites par les principes exposés aux n^{os} 724, 725, etc.

Les trois courbes dont nous venons de parler étant coupées symétriquement par le plan méridien pu, les parties vues et cachées de ces courbes se confondront sur la projection 427.

759. Dans l'exemple qui nous occupe, nous avons supposé que la zone convexe du balustre était une portion d'ellipsoïde de révolution, d'où il résulte que la ligne de contact est une courbe plane, et par conséquent se projettera sur la *fig.* 427 par une ligne droite zx.

760. Quand les trois courbes précédentes seront obtenues sur les deux projections 427 et 430, on fera tourner cette dernière figure pour la ramener dans la position de la *fig.* 431, et tous les points du contour de la projection horizontale de la surface seront alors déterminés par les intersections de deux systèmes de lignes, les unes parallèles, les autres perpendiculaires à la ligne AZ′ et menées par les points correspondants des deux *fig.* 427 et 431.

761. *Points de rebroussement.* Les projections horizontales des courbes, situées sur le col du balustre et sur la scotie, contiennent chacune quatre points de rebroussement; pour mieux faire comprendre la forme de ces courbes, on les a transportées (*fig.* 432).

762. On pourra trouver singulier qu'il y ait sur la projection horizontale des points de rebroussement qui n'existent pas sur la projection verticale correspondante, mais cela est très-facile à concevoir; en effet, si la courbe elle-même contenait un ou plusieurs points de rebroussement, on devrait s'attendre à retrouver des points analogues sur toutes les projections de la même courbe; mais ici, aucune des deux courbes dont il s'agit ne contient de points de

cette espèce, et ceux qui existent sur leurs projections horizontales, proviennent de ce que, pour ces points, la perpendiculaire projetante, parallèle à $o''u', o'''u$, se confond avec la tangente à la courbe.

Supposons, par exemple, que l'on ait obtenu (*fig.* 429) les deux projections d'une courbe à double courbure *aoa*, la droite *bh* étant la tangente au point *o*. Si l'on tire les deux extrémités *a*, *a* en les écartant l'une de l'autre comme pour rectifier la courbe, on lui fera prendre la forme indiquée par les deux projections $a'a'$, et la tangente deviendra $b'h'$.

Or, par suite du mouvement de rotation de la tangente il peut y avoir un instant où cette ligne étant perpendiculaire au plan vertical, sa projection sur ce plan se réduit à un point.

Les deux projections de la courbe deviennent alors $a''a''$, et le point de rebroussement o'' est la projection verticale de la tangente.

763. Ainsi, les points de rebroussement de la projection horizontale (*fig.* 428) sont les projections des points suivant lesquels les deux courbes *mn*, *vr*, sont touchées par des parallèles à la droite $o''u', o'''u$ (*fig.* 427, 430).

Il est essentiel de déterminer ces points avec toute l'exactitude possible sur les quatre projections 427, 430, 431 et 428, et de s'assurer qu'ils sont bien liés entre eux par les lignes de projection correspondantes; s'il y avait quelque irrégularité à cet égard, cela indiquerait une erreur dans la construction des courbes; il faudrait alors en chercher la cause et la faire disparaître. Ces vérifications ont été conservées sur l'épure, pour les points 1 et 2 seulement.

764. Les projections horizontales des arêtes circulaires se construiront comme nous l'avons dit au n° 406.

765. *Projection verticale* (*fig.* 426). Le contour de cette projection se compose des traces des divers cylindres tangents, perpendiculaires au plan vertical de projection ou parallèles à une droite qui serait elle-même perpendiculaire à ce plan. Voici quel sera l'ordre du travail.

1[re] *opération*. La droite os, perpendiculaire au plan vertical de projection, se projettera sur ce plan par un seul point o', et sur le plan auxiliaire (*fig.* 427) par la droite $o''s''$, parallèle à AZ'.

Pour avoir la projection de la même droite sur les deux *fig.* 430 et 431, on construira les deux triangles rectangles qui ont pour côtés $s'''e = s''e'$ (*fig.* 427) et $o'''e = oh$ (*fig.* 428).

L'hypoténuse $o'''s'''$ sera la projection de la droite $os, o''s''$ sur les plans des *fig.* 430 et 431, perpendiculaires à l'axe du balustre.

2[e] *opération*. On déterminera sur les *fig.* 427 et 430 les courbes suivant lesquelles les surfaces de révolution du balustre sont touchées par des plans parallèles à la droite $o''s'', o'''s'''$ (724 et 725).

Ces lignes seront les directrices des cylindres projetants, perpendiculaires au plan vertical de projection.

3[e] *opération*. On reportera les courbes précédentes de la *fig.* 430 à la *fig.* 431, et leurs projections horizontales seront déterminées, sur la *fig.* 428, par les intersections des lignes de projection parallèles et perpendiculaires à AZ', menées par les points correspondants des *fig.* 427 et 431.

4[e] *opération*. Quand on aura construit avec beaucoup d'exactitude, sur la *fig.* 428, les projections horizontales des trois courbes de contact, il ne restera plus qu'à obtenir leurs projections verticales sur la *fig.* 426.

Pour y parvenir, on élèvera des perpendiculaires à la ligne AZ par tous les points de la projection horizontale, et la hauteur de chacun de ces points sera donnée par sa projection auxiliaire (*fig.* 427).

766. Les projections verticales des deux courbes, situées sur le col du balustre et sur la scotie, ont chacune quatre points de rebroussement qui sont les projections des points suivant lesquels chacune de ces courbes est touchée par des droites parallèles à la ligne $os, o''s''$, et par conséquent perpendiculaires au plan vertical de la *fig.* 426.

Il sera donc essentiel de vérifier la position de chacun de ces points sur les cinq projections 427, 430, 431, 428 et 426.

767. Les arêtes circulaires du balustre se projettent sur la *fig.* 426 par des ellipses semblables.

Les diamètres de ces ellipses se déduiront facilement de leurs projections horizontales.

On remarquera que pour chaque ellipse, le grand axe est perpendiculaire à la droite $a'c'$.

On peut, connaissant le grand axe et un point, construire avec beaucoup de précision l'une de ces ellipses; puis après avoir déterminé le second axe, on obtiendra les axes de toutes les autres ellipses en opérant comme au nº 415.

Les projections d'un même cercle sur les deux *fig.* 426 et 438 doivent être touchées par les mêmes droites perpendiculaires à la ligne AZ.

768. Si l'on a de la place, on peut employer une seconde projection auxiliaire, perpendiculaire au plan vertical de projection et parallèle à la droite $a'c'$.

Cela dispensera de construire sur la projection horizontale les courbes suivant lesquelles la surface est touchée par les cylindres projetants, parallèles à la droite $os, o''s''$.

769. Si au lieu de construire les plans tangents parallèlement à une droite donnée, on les avait fait passer par un point, les courbes obtenues dans ce cas auraient déterminé le contour de la figure suivant laquelle on apercevrait la surface si l'œil coïncidait avec le point donné.

Cette question, qui se rattache à la perspective, trouvera plus tard son application.

770. *Construire l'intersection d'une surface de révolution par une droite* (*fig.* 434, *Pl.* 64).

1re *solution.* On coupera la surface par un plan p, contenant la droite donnée bb' et perpendiculaire au plan vertical de projection.

La projection horizontale *odue* de la courbe de section pourra être obtenue en opérant comme nous l'avons dit au n° 634.

Les deux points n, n, suivant lesquels cette courbe est rencontrée par la projection b de la droite donnée, seront les projections horizontales des points cherchés.

Les projections verticales n', n', de ces points, seront situées sur la trace verticale du plan auxiliaire p.

On fera bien, comme vérification, de construire les parallèles correspondants à ces points.

771. 2e *solution.* Si la projection horizontale de la droite donnée rencontrait celle de la courbe de section, suivant des angles trop aigus, on rabattrait le plan auxiliaire p autour de sa trace horizontale.

Par suite de ce mouvement, la courbe deviendrait $o''d''u''e''$, et serait rencontrée par la droite b'' en deux points n'', n'', qui, ramenés dans le point p, donneront $n'n, n'n$ pour les projections des points demandés.

772. 3ᵉ *solution*. Toutes les fois que la courbe de section de la surface donnée, par le plan auxiliaire, sera une ellipse, on pourra éviter la projection et le rabattement de cette courbe, en la projetant sur un plan p', incliné de manière que la projection soit une circonférence de cercle. On obtiendra la direction du plan p' en construisant le triangle rectangle $o'xu'$, dans lequel le côté $u'x$ est égal au petit axe de de l'ellipse $o'u'$ (402).

Le plan p' étant rabattu autour de sa trace horizontale, la courbe de section se projette dans ce rabattement par la circonférence tr, et les intersections de cette ligne par la droite b''' déterminent les deux points cherchés n''', n''', qui, ramenés d'abord dans le plan p' et de là dans le plan p, deviennent $n'n, n'n$.

773. 4ᵉ *solution*. On peut employer, comme surface auxiliaire, un hyperboloïde de révolution engendré par la droite donnée, et qui aurait le même axe que la surface donnée (*fig*. 433).

En amenant successivement la droite donnée bb' dans les deux plans verticaux pp et $p'p'$, on aura les asymptotes cc', dd' du méridien principal. Il sera facile (277) de construire une partie $xs'u$ de ce méridien, puisque l'on connaît les asymptotes et le point ss' du cercle de gorge dont le rayon os est égal à la perpendiculaire os'', abaissée du point o sur la projection horizontale bb de la droite donnée.

La surface donnée sera coupée par l'hyperboloïde auxiliaire suivant les parallèles zx, vu (669), et les intersections $m'm$ de ces deux cercles, par la droite bb', seront les points demandés par la question.

774. Dans quelques cas particuliers les opérations peuvent être plus simples. Ainsi, par exemple (*fig.* 434).

Si la projection horizontale de la droite donnée, passait par le point i, on en conclurait que cette ligne rencontre l'axe, et dans ce cas, on emploierait comme surface auxiliaire le plan méridien is. Ce plan couperait la surface donnée suivant une section méridienne dont l'intersection $m'm$, avec la droite $is, i's'$, serait le point demandé.

Il est évident que l'on serait dispensé de construire la section méridienne en rabattant la droite donnée $is, i's'$, en $i's''$; cette opération donnera m''', qui, ramené dans le plan is, deviendra $m'm$.

775. Enfin, si la droite donnée était située dans un plan perpendiculaire à l'axe, on emploierait ce plan comme surface auxiliaire, et, dans ce cas, la courbe de section serait un cercle.

776. *Construire l'intersection d'une surface de révolution par une courbe quelconque.*

1^re^ *solution.* On pourra employer (*fig.* 434) comme surface auxiliaire l'un des cylindres projetants de la courbe donnée a, a'. L'intersection $v'y$, avec la surface donnée, se construira en élevant des perpendiculaires par les points où la projection a de la courbe donnée rencontre les projections des parallèles de la surface.

Les intersections de la courbe $v'y$ avec a' donneront les points cherchés $z'z$.

777. 2^e^ *solution.* On peut employer (*fig.* 433) comme surface auxiliaire une seconde surface de révolution ayant le même axe que la surface donnée.

En opérant comme nous l'avons dit au n° 648, on construira la partie de méridien $1'—2'—3'$. Les intersections de cette courbe avec le méridien principal de la surface donnée détermineront les deux parallèles communs $x'n'$ et $r'n'$, et les points cherchés $n'n$ résulteront de la rencontre de ces parallèles avec la courbe donnée b,b'.

Section d'une surface de révolution par un plan oblique.

778. On emploiera comme surfaces auxiliaires des plans perpendiculaires à l'axe de la surface de révolution. Soit (*fig.* 435) la surface annulaire A,A', et le plan B. Un plan horizontal p coupera la surface suivant deux cercles (c,c') (c,c'), et le plan donné suivant la droite aa'. Cette droite coupera les deux cercles en quatre points (m,m') (m,m')..... qui satisferont à la question proposée. Un second plan horizontal donnera quatre nouveaux points, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait obtenu un nombre de points suffisant pour construire correctement la courbe de section.

779. Il ne faut pas oublier que nous raisonnons toujours ici d'une manière générale; mais dans l'exécution de l'épure il se présente souvent des circonstances particulières qui engagent à modifier le principe et à recourir à des constructions auxiliaires. Ainsi, dans l'exemple proposé, lorsqu'on arriverait dans le voisinage des points uu' et $\nu\nu'$, les intersections se feraient suivant des angles trop aigus. Dans ce cas, on pourrait employer comme auxiliaires des plans verticaux passant par l'axe de la surface donnée : ces plans couperont la surface suivant des sections méridiennes dont on évitera la projection en les rabattant autour de l'axe. C'est ainsi que les points (uu') $(\nu\nu')$ ont été déterminés. Le premier de ces points est le plus élevé et le second est le plus bas de la courbe d'intersection. Un plan

vertical p'' a coupé la surface donnée suivant une section méridienne qui, en tournant autour de l'axe, est venue se confondre avec la projection verticale c'' du méridien principal. La droite provenant de l'intersection du plan B et du plan auxiliaire p'' est venue se rabattre en a'', et l'intersection de cette ligne a'' avec la section méridienne c'' a donné deux points s', z', qui, projetés horizontalement en s, z, et ramenés dans le plan p'', ont déterminé les points (uu') $(\nu\nu')$. Les points xx', oo', situés dans le plan méridien p''', ont été déterminés de la même manière.

Ainsi, on devra employer la première méthode quand on voudra obtenir un point sur un parallèle de la surface, et l'on emploiera la seconde quand il s'agira de trouver un point sur un méridien.

780. On peut quelquefois trouver dans la définition ou dans les propriétés de certaines surfaces des moyens d'exécution particuliers. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de construire (*fig.* 436) la section de l'hyperboloïde par le plan B, on pourrait, comme précédemment, faire usage de plans perpendiculaires à l'axe ou de plans méridiens; mais on pourrait encore employer des plans coupant l'hyperboloïde, suivant les génératrices de cette surface. Ainsi, pour obtenir le point (mm'), on a construit un plan $po'p$ coupant l'hyperboloïde, suivant la génératrice $\nu'o', \nu o$, et le plan B suivant la droite bb'; l'intersection de ces deux lignes a donné le point (m, m'); il est évident que cela revient à chercher la suite des points suivant lesquels le plan B est percé par chacune des droites génératrices de l'hyperboloïde (70).

Les points (n, n') (s, s') ont été déterminés par le plan horizontal p'.

Enfin, en faisant une section par un plan méridien perpendiculaire au plan B, et rabattant cette section comme nous l'avons fait dans l'épure précédente, on obtiendrait le point le plus élevé et le point le plus bas de la courbe.

Intersection des surfaces de révolution et des cylindres, cônes et sphères.

781. *Intersections d'une surface de révolution et d'un cylindre.*

On emploiera comme surfaces auxiliaires des cylindres parallèles au cylindre donné, ayant pour directrices les parallèles de la surface de révolution. Ainsi, par exemple (*fig.* 437, *Pl.* 65), la circonférence du cercle dont la projection verticale est $a'b'$, étant prise pour directrice d'un cylindre parallèle au cylindre donné, la trace horizontale de ce nouveau cylindre sera une circonférence ayant son centre en d, et pour rayon $du = c'b'$; les points x, ν, suivant lesquels se rencontrent les traces des deux cylindres, détermineront deux lignes droites communes aux surfaces de ces cylindres, et les intersections de ces droites avec le cercle $ab, a'b'$, feront connaître les deux points $m'm$ de la courbe demandée. On obtiendra par ce moyen autant de points que l'on voudra.

Les traces des cylindres auxiliaires auront tous leurs centres sur une même droite zc, parallèle à la projection horizontale du cylindre donné, et passant par le point où l'axe de la surface de révolution perce le plan horizontal.

Si l'on prend le milieu de chacun des arcs de cercle qui résultent des intersections de la trace du cylindre donné avec les traces des cylindres auxiliaires, on obtiendra une courbe on qui aboutira sur la trace du cylindre donné en un point o. La droite oz normale à ce point déterminera en z le centre de la trace horizontale du cylindre auxiliaire sur la surface duquel se trouve le point le plus élevé de la courbe.

Le point le plus bas se déterminera en prolongeant la courbe de l'autre côté, jusqu'au point n, par lequel on mènera une normale ns, et le point s sera le centre de la trace du cylindre auxiliaire qui détermine le point le plus bas.

782. *Intersection d'une surface de révolution avec un cône.*

On emploiera comme surfaces auxiliaires des cônes ayant le même sommet que le cône donné, et pour directrices les parallèles de la surface de révolution. Ainsi (*fig.* 438), le cercle dont la projection verticale est $a'b'$, étant pris pour la directrice d'un cône dont le sommet serait (s, s'), la trace horizontale de ce cône sera une circonférence de cercle dont le centre d sera déterminé par l'intersection de la droite $sc, s'c'$, avec le plan horizontal, et qui aura pour rayon $du = d'u'$. Cette circonférence coupera la trace du cône donné, suivant deux points v, x; en joignant ces points avec le sommet commun des deux cônes, on obtiendra deux droites dont les intersections avec le cercle $ab, a'b'$ appartiendront à la courbe demandée.

Il n'y aura plus qu'à recommencer cette construction pour avoir de nouveaux points de la courbe : les traces des cônes auxiliaires auront tous leurs centres sur la ligne sc; les points extrêmes de la courbe se détermineront comme dans l'épure précédente.

783. L'exécution de ces épures suppose que la surface de révolution est projetée sur un plan perpendiculaire à son axe; s'il en était autrement, et que cette surface

fût donnée dans une position inclinée, on commencerait par la projeter sur un plan auxiliaire perpendiculaire à l'axe, ce qui ramènerait la question au cas précédent.

784. *Intersection d'une surface de révolution et d'une sphère.*

On placera l'axe de la surface de révolution perpendiculaire au plan horizontal, et l'on prendra le plan vertical de projection parallèle au plan qui contiendra le centre de la sphère et l'axe de la surface donnée.

L'épure étant ainsi disposée, on emploiera, comme surfaces auxiliaires, des sphères ayant leurs centres sur l'axe de la surface donnée. Chaque sphère auxiliaire coupera la sphère donnée et la surface de révolution suivant des cercles perpendiculaires au plan vertical, et qui, par conséquent, se projetteront sur ce plan par des lignes droites. Les intersections de ces droites feront connaître les points de la courbe cherchée. Ainsi, par exemple (*fig.* 439), la sphère dont le centre est en c', et qui a pour rayon $c'a'$, coupera la surface de révolution suivant deux cercles projetés sur le plan vertical par les droites $a'd'$, $h'k'$, et la sphère donnée, suivant un cercle dont la projection verticale sera $m'n'$; l'intersection de ce dernier cercle avec les deux cercles $c'd'$, $h'k'$, donnera quatre points qui seront projetés verticalement, deux au point o' et les deux autres en u'. Pour avoir les projections horizontales de ces mêmes points, on projettera horizontalement les deux cercles $a'd'$, $h'k'$, et l'on abaissera les deux perpendiculaires $o'o$, $u'u$. Une seconde sphère auxiliaire fera connaître quatre nouveaux points, et ainsi de suite.

Pour plus de symétrie dans la construction de l'épure, on a pris les sphères auxiliaires concentriques, mais on pouvait s'en dispenser ; la seule condition essentielle ici, étant que les centres de ces sphères soient placés sur l'axe de la surface de révolution.

785. Les mêmes moyens pourraient être employés pour *trouver la courbe de pénétration de deux surfaces de révolution dont les axes se couperaient;* mais, dans ce cas, après avoir choisi un plan vertical de projection parallèle au plan qui contiendrait les deux axes, il faudrait nécessairement prendre le point d'intersection de ces axes pour centre des sphères auxiliaires; et si dans l'exemple précédent nous avons pu prendre pour centre, tel point de l'axe que nous avons voulu, c'est parce que la sphère pouvant être considérée comme surface de révolution dans tous les sens, le point que nous avions choisi pouvait toujours être regardé comme l'intersection des deux axes.

786. Il résulte de ce qui précède que, pour avoir l'intersection d'une surface de révolution avec un cylindre, on pourra employer des cylindres comme surfaces auxiliaires; pour l'intersection avec un cône on emploiera des cônes, et pour l'intersection avec la sphère, on fera usage de sphères.

787. Il est bien entendu, comme nous l'avons déjà dit, que si, par suite de la disposition particulière des données, quelques points n'étaient pas déterminés avec assez de précision, il faudrait avoir recours à d'autres moyens, comme, par exemple, des plans parallèles au plan horizontal ou au plan vertical. Si l'on emploie des plans perpendiculaires à l'axe de la surface de révolution, on aura l'avantage de couper cette surface suivant des cercles; de sorte qu'il n'y aura plus qu'à construire les lignes suivant lesquelles ces mêmes plans couperont la seconde surface.

788. Dans le cas de l'intersection avec une sphère, des plans perpendiculaires à l'axe de la surface de révolution couperont les deux surfaces suivant des cercles. Il en serait de même s'il s'agissait de *deux surfaces de révolution dont les axes seraient parallèles*.

789. Chacun des trois moyens de solution que nous venons d'exposer peut être employé à la recherche de la courbe provenant de la section d'une surface de révolution par un plan. Il suffit de considérer successivement cette dernière surface comme un cylindre ou un cône dont les directrices seraient droites, ou comme la surface d'une sphère dont le rayon serait infini.

790. Dans le premier cas (*fig.* 440) on supposera que le plan donné est une surface cylindrique qui a pour directrice la trace horizontale vx et pour génératrice la trace verticale vz.

Cette dernière ligne déterminera la direction des cylindres auxiliaires qui auront pour directrices les différents parallèles de la surface donnée.

Ainsi, le cylindre qui contiendrait le parallèle $ac,a'c'$ aurait pour trace horizontale la circonférence $a''c''$; les intersections de cette courbe avec la trace vx du plan donné détermineront les deux droites $m''m, m'''m'$, parallèles à la trace verticale vz, et les intersections de ces droites avec le parallèle $ac,a'c'$ feront connaître les deux points cherchés mm'.

791. Si on considère le plan donné comme un cône dont la directrice serait une ligne droite, on pourra prendre pour sommet le point ss', suivant lequel ce plan est percé par l'axe de la surface donnée.

Dans ce cas, les cônes auxiliaires ayant pour directrices les différents parallèles de la surface donnée seront droits et à bases circulaires.

On n'a construit sur l'épure que celui de ces cônes qui déterminerait le point le plus bas et le plus élevé de la courbe demandée.

Sa trace horizontale uu'' doit être tangente à la trace vx du plan donné.

Au lieu de construire la projection verticale de la génératrice su'', on a préféré rabattre cette ligne dans le plan du méridien su.

792. Enfin, si on voulait considérer le plan donné comme la surface d'une sphère dont le rayon serait infini, il faudrait employer un plan auxiliaire de projection vertical et perpendiculaire au plan donné : pour le reste on agirait comme au n° 784.

793. *Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes ne se rencontrent pas.*

On prendra l'un des plans de projection perpendiculaire à l'axe de l'une des deux surfaces données, et le second plan de projection parallèle aux deux axes.

Supposons, par exemple (*fig.* 441, *Pl.* 66), que la surface AA′ soit perpendiculaire au plan horizontal, la projection de cette surface sera limitée par celle de son plus grand parallèle, et sa projection verticale sera une section méridienne.

La surface inclinée BB′ étant également parallèle au plan vertical, sa projection, sur ce plan, se composera d'une section méridienne, et pour construire la projection horizontale, il faudra opérer comme nous l'avons dit au n° 756.

Cela étant fait, on coupera les deux surfaces par un plan auxiliaire *pp* que nous supposons ici parallèle au plan vertical de projection.

La section de la surface AA′ par le plan auxiliaire *pp* sera une courbe *asa ;* la section de la surface BB′ se composera des deux courbes *zνz*, et les intersections de ces dernières lignes par la courbe *asa* donneront les quatre points *u*,*u*′....., qui devront faire partie des courbes de pénétration demandées (635).

La section des deux surfaces par un second plan auxiliaire déterminera quatre autres points.

Un troisième plan auxiliaire en donnera encore quatre, et ainsi de suite.

794. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails sur la construction des courbes *asa*, *zνz*.

La première de ces deux lignes ne présentera aucune difficulté, puisqu'il suffira d'élever des perpendiculaires à la ligne AZ, par les points où la trace *pp* du plan auxiliaire rencontre les projections horizontales des parallèles que l'on aura dû établir d'avance sur la surface AA′.

Pour faciliter la construction des deux courbes *zνz*, il faudra également établir un certain nombre de parallèles sur la projection verticale de la surface BB′.

Mais pour éviter la construction des ellipses qui représenteraient les projections horizontales de toutes ces circonférences de cercles, on les projettera sur un plan auxiliaire *qp*′, perpendiculaire à l'axe de la surface inclinée BB′, puis on rabattra cette nouvelle projection B″ en la faisant tourner autour de l'horizontale projetante du point *q*, ou de tout autre point pris à volonté dans le plan *qp*′.

Les parallèles de la surface BB′ seront représentés sur la nouvelle projection B″ par des cercles concentriques, et les intersections de ces circonférences par la trace *pp* du plan auxiliaire feront partie de la courbe cherchée. Il ne restera donc plus qu'à faire revenir tous ces points à leur place.

Pour y parvenir, on les projettera d'abord sur le plan horizontal qp'' que l'on fera revenir dans la position qp', d'où chacun des points cherchés devra être ramené par une perpendiculaire au plan qp', sur le parallèle auquel il doit appartenir. Ainsi, le point m, projeté en m', viendra se placer en m'', d'où on déduira sa projection verticale m'''.

795. Pour plus d'ordre on fera bien de numéroter les parallèles sur les deux projections B′ et B″, et l'on diminuera le travail en choisissant de préférence ceux qui ont des rayons égaux, afin qu'ils aient une projection commune sur la *fig.* B″.

796. On devra aussi choisir la position des plans coupants auxiliaires, de manière à obtenir les poins les plus essentiels des deux courbes de pénétration. Ainsi, par exemple, si on veut obtenir les points suivant lesquels ces courbes touchent le méridien principal de la surface AA′, on coupera les deux surfaces par le plan vertical $p'p'$ qui contient l'axe de cette surface.

Le plan $p''p''$ déterminera les points situés sur la section méridienne de la surface BB′.

797. La ligne $n'o'n'$ étant la projection verticale des deux courbes *nen* (758), les cylindres projetants de ces lignes pourront être employés comme surfaces auxiliaires.

Les courbes provenant de l'intersection de ces cylindres avec les parallèles de la surface AA′ couperont la ligne

$n'o'n'$ en quatre points dont les projections horizontales appartiendront au contour de la projection horizontale B.

798. *Surface du second degré.* Dans tout ce qui précède nous avons raisonné d'une manière générale, afin que les opérations indiquées puissent convenir à toutes les surfaces de révolution, quel que soit le contour de leurs sections méridiennes.

Mais, dans quelques cas particuliers, il sera possible de simplifier les opérations.

Supposons, par exemple, que les deux surfaces données soient un paraboloïde et un hyperboloïde de révolution, les sections de ces deux surfaces par les plants coupants auxiliaires seront des courbes du second degré, qui pourront, par conséquent, être construites ou au moins vérifiées par leurs propriétés géométriques.

De plus, si on emploie, comme cela est le plus simple, des plans parallèles entre eux, toutes les lignes suivant lesquelles ces plans couperont une même surface seront semblables entre elles.

Toutes les sections dans l'hyperboloïde auront pour asymptotes communes les deux droites $xo'x$ qui sont les asymptotes de la section méridienne principale, et cette propriété sera d'autant plus commode qu'il suffira de connaître un point de chaque section pour être en état de la construire promptement (277).

799. Une autre propriété déjà citée des courbes du second degré facilitera le tracé de la projection horizontale de la surface inclinée ; c'est que la courbe suivant laquelle cette surface est touchée par le cylindre projetant qui l'enveloppe, doit être plane, et qu'elle se projettera par conséquent sur le plan vertical par une ligne droite.

Cette courbe est une hyperbole, et si on pouvait en construire les asymptotes, la projection horizontale ne présenterait plus aucune difficulté

800. Pour obtenir ce résultat, nous rappellerons que si on faisait tourner autour de l'axe *ck* de la surface inclinée l'une des asymptotes $xo'x$ de la section méridienne, on engendrerait le cône circulaire asymptote de cette même surface (665).

Les génératrices formant les limites de la projection horizontale de ce cône seraient les asymptotes de l'hyperbole qui limite la projection horizontale de la surface.

De là résulte la construction suivante :

1re *opération.* La droite *rt*, perpendiculaire sur l'asymptote $xo'x$, coupera l'axe *ck* en un point *t* qui sera le centre de la sphère inscrite dans le cône asymptote ; les deux circonférences *bb*, *dd* seront les projections de cette sphère.

Enfin, les droites *hoh*, tangentes à la circonférence *dd*, et limites de la projection horizontale du cône, seront les asymptotes de l'hyperbole formant le contour de la projection horizontale de la surface BB'.

On se rappellera (497) que les points de tangence *i*,*i* peuvent être déterminés par la perpendiculaire abaissée du point i', suivant lequel la sphère est touchée par les deux plans verticaux tangents au cône asymptote.

801. Dans quelques occasions où l'on n'aurait pas d'autre but que d'ajuster deux surfaces de révolution, on pourrait se dispenser de construire la projection horizontale de la surface inclinée ; les projections B' et B'' de cette surface suffisant, avec celles de la surface A, pour

déterminer tous les points des deux courbes de pénétration.

802. *Intersection de deux ellipsoïdes de révolution* A *et* B (*fig.* 444).

On concevra (*fig.* 443) la sphère C, enveloppée par deux ellipsoïdes A′ et B′, semblables et parallèles aux surfaces données. Ces deux surfaces auront un axe commun projeté par le point *o* et qui sera égal au diamètre de la sphère inscrite. De plus elles se pénétreront suivant deux ellipses qui auront pour projection les droites *aa*, *cc*.

Or, les deux ellipsoïdes A′ et B′ étant parallèles et semblables aux ellipsoïdes données A et B, il en résulte que si on coupe ces dernières surfaces par des plans tels que *p′q′*, parallèles à celui qui contient l'ellipse *aa*, on obtiendra pour sections des ellipses semblables et parallèles à cette dernière courbe, et l'on pourra toujours trouver un plan de projection sur lequel toutes ces ellipses se projetteraient par des cercles (402).

803. On arriverait au même but en coupant les deux surfaces données par des plans parallèles à celui qui contient l'ellipse *cc*.

On choisira celui de ces deux systèmes de plans coupants qui donne les meilleures intersections.

804. Il n'est pas nécessaire que les centres des deux ellipsoïdes auxiliaires coïncident avec celui de la sphère inscrite; il suffit que ce dernier point soit à l'intersection des deux axes. Cela est une conséquence du théorème suivant, dont la démonstration ne peut être placée convenablement que dans un traité de géométrie analytique.

Toutes les fois que deux courbes du second degré sont tangentes à une même circonférence, de manière qu'elles *forment par leur intersection un quadrilatère circonscrit, les diagonales passant par les sommets opposés de ce quadrilatère curviligne, et les cordes qui joignent deux à deux les points de tangence opposés, se coupent en un même point.*

Le théorème cité au n° 748 n'est qu'un cas particulier de celui que nous venons d'énoncer, parce que les côtés rectilignes du quadrilatère circonscrit peuvent, dans ce cas, être considérés comme des variétés de courbes du second degré.

805. Il résulte de ce qui précède que si la parabole A″ et l'hyperbole B″ (*fig.* 445) sont les sections méridiennes de deux surfaces de révolution circonscrites à une même sphère, les ellipses provenant de la section de ces deux surfaces par un plan pq se confondront, puisqu'elles auront le même axe aa, et un point commun c, situé sur les deux cercles zx, vu, suivant lesquels la sphère inscrite est touchée par les deux surfaces dont il s'agit. Il en serait de même de la section des mêmes surfaces par le plan $p'q'$.

806. On pourra donc résoudre la question du n° 798 par une série d'opérations analogues à celles que nous avons indiquées pour deux ellipsoïdes de révolution.

1° On décrira (*fig.* 445) un cercle quelconque auquel on circonscrira une parabole et une hyperbole semblables aux sections méridiennes des deux surfaces données A et B (*fig.* 441).

2° On coupera ces dernières surfaces par un système de plans parallèles à celui qui contient l'une des deux ellipses aa ou $a'a'$ (*fig.* 445).

Les sections des deux surfaces données par ces plans seront des ellipses semblables.

3° On prendra un plan de projection sur lequel toutes ces ellipses se projetteraient par des cercles dont les intersections suffiront pour déterminer tous les points des deux courbes de pénétration.

CHAPITRE III.

SURFACES RÉGLÉES.

807. On donne, en général, le nom de *surfaces réglées* à celles qui sont engendrées par une ligne droite qui se meut suivant certaines conditions.

808. Dans le cas le plus général, on peut supposer que la génératrice est assujettie à s'appuyer sur trois courbes que l'on nomme les *directrices* de la surface.

Cette condition suffit pour déterminer chaque position de la génératrice; car une droite qui passant par un point de la première courbe glisserait en s'appuyant sur la seconde, serait déterminée de position, au moment où elle rencontrerait la troisième.

809. Dans quelques surfaces la génération est déterminée par d'autres conditions. Ainsi, par exemple, dans les *surfaces cylindriques*, que l'on peut regarder comme cas particuliers des surfaces réglées, puisque la génératrice est une ligne droite, on donne ordinairement une directrice, et les deux autres sont remplacées par la condition que toutes les positions de la génératrice soient parallèles entre elles.

Dans les *cônes*, deux des directrices sont remplacées par cette condition, que toutes les génératrices contiennent le sommet. Enfin, dans les *surfaces normales*, la condition que la génératrice soit constamment perpendiculaire à une surface donnée permet de n'employer qu'une directrice; mais tous ces cas particuliers pourront facilement se ramener au cas général; car on pourra toujours, dans chaque cas, prendre pour directrices trois courbes quelconques situées dans la surface, de manière qu'elles soient coupées par toutes les génératrices.

810. L'une des trois directrices peut encore être remplacée par cette condition, que *deux positions consécutives de la génératrice se trouvent toujours dans un même plan*, et c'est en cela que consiste le caractère des *surfaces développables*.

Les surfaces réglées qui sont privées de la propriété d'être développables se nomment *surfaces gauches*.

811. Enfin, on peut remplacer l'une des directrices par cette condition que la génératrice, dans son mouvement, reste toujours parallèle à un plan donné, que l'on nomme *plan directeur*.

Ce dernier genre de surfaces réglées devant être fréquemment employé dans les applications, nous en ferons une classe particulière; ainsi nous distinguerons deux espèces principales de surfaces réglées :

1° Les surfaces réglées qui ont trois directrices;

2° Les surfaces réglées qui ont deux directrices et un plan directeur.

Construction des surfaces réglées qui ont trois directrices.

812. Soient (*fig.* 446, *Pl.* 67) (AA'), (BB'), (CC'), les trois directrices d'une surface réglée; on veut construire la génératrice qui passe par le point ss'.

Concevons un cône qui ait pour sommet le point ss', et pour directrice la courbe BB'; le point suivant lequel la surface de ce cône sera percée par la courbe CC', appartient à la génératrice cherchée. En effet, la droite $su, s'u'$, située dans la surface du cône auxiliaire, coupera en un point vv' la courbe BB' que nous avons prise pour directrice de ce cône. Elle s'appuiera donc sur les trois directrices de la surface réglée suivant les points ss', vv', uu'.

Pour obtenir le point uu', on construira (640) la courbe b', provenant de l'intersection du cône auxiliaire par le cylindre vertical qui contient la courbe CC'; l'intersection des deux courbes b' et C' fait connaître la projection verticale du point uu'.

En recommençant cette construction, on aura autant de positions de la génératrice que l'on voudra.

Si la directrice BB' était une ligne droite, le cône auxiliaire serait remplacé par un plan, et la question serait alors réduite à déterminer le point où ce plan couperait la troisième directrice CC' (329).

Il est bien entendu que l'on pourra, si on le juge plus commode, employer la courbe C comme directrice du cône auxiliaire, et chercher l'intersection de ce cône par la directrice B.

On fera bien aussi de s'assurer que les génératrices obtenues coupent les trois directrices de la surface (44).

813. Lorsque l'une des trois directrices est une ligne droite, la construction des génératrices devient extrêmement simple, si on projette la surface sur un plan perpendiculaire à cette directrice droite.

Prenons pour exemple (*fig.* 448) la surface réglée ayant pour l'une de ses directrices un arc de cercle AA' parallèle au plan vertical de projection, et dont le centre est au-dessous du plan horizontal; la seconde directrice est le demi-cercle CC′, aussi parallèle au plan vertical et ayant son centre dans le plan horizontal; enfin la troisième directrice est la droite BB′, située dans le plan horizontal, et perpendiculaire au plan vertical de projection.

Cette troisième directrice se projetant sur le plan vertical en un seul point B′, toutes les projections verticales des génératrices doivent concourir à ce point: de sorte que pour construire, par exemple, celle qui passe par le point ss', on tracera s'B′, et la projection verticale du point u sera connue par l'intersection de cette ligne avec C′. En abaissant la perpendiculaire du point u', on aura u; ainsi su sera la projection horizontale de la génératrice demandée.

Dans cette construction, le plan s'B′B, perpendiculaire au plan vertical, tient lieu du cône auxiliaire que nous avons employé précédemment pour résoudre le cas général.

La courbe $zo'x$ est la trace verticale de la surface.

Si la directrice BB′, en passant toujours par le centre de la directrice CC′, cessait d'être située dans le plan horizontal, et qu'elle s'inclinât en s'approchant du centre de la directrice AA′, la forme de la surface se rapprocherait de celle d'un cône oblique, et elle deviendrait une surface de cône au moment où la directrice BB′ contiendrait les centres des deux autres directrices.

814. Je prendrai pour second exemple (*fig.* 449) la surface ayant pour directrices les deux cercles verticaux AA′, CC′, élevés sur les côtés du parallélogramme $mnpq$, et la droite BB′ perpendiculaire au plan vertical de pro-

jection, et passant par le centre du parallélogramme; la construction se fera comme dans l'épure précédente. Les projections verticales des génératrices concourent toutes au point B′; la courbe *zo′x* est la trace verticale de la surface.

Si le parallélogramme *mnpq* était un rectangle, les deux cercles AA′, CC′, auraient la même projection verticale, et la surface serait un cylindre perpendiculaire au plan vertical de projection; si au contraire les projections verticales des deux cercles s'écartaient jusqu'à ce que la diagonale *pn* fût perpendiculaire au plan vertical, la surface se composerait de deux moitiés de cônes qui auraient leurs sommets, l'un au point *p*, l'autre au point *n*.

Construction des surfaces réglées qui ont un plan directeur.

815. Lorsqu'on prend un plan directeur pour déterminer la génératrice d'une surface réglée, cela revient à supposer que la troisième directrice est une droite ou une courbe plane dont tous les points seraient situés à une distance infinie; car, dans ce cas, la génératrice ne pouvant rencontrer cette courbe qu'à l'infini, doit rester constamment parallèle au plan qui la contient.

816. En prenant le plan directeur pour plan de projection, la construction de ces sortes de surfaces devient extrêmement simple.

Soient, par exemple (*fig.* 447), les deux directrices AA′, CC′, le plan vertical étant le plan directeur.

Toutes les génératrices devant être parallèles au plan vertical de projection, leurs projections horizontales seront parallèles à la ligne AZ; d'où il résulte qu'en élevant des perpendiculaires par les points où ces projections rencontrent celles des directrices, on aura les projections verticales correspondantes. Ainsi, après avoir construit *su* parallèle à la ligne AZ, on élèvera les perpendiculaires ss', uu', et la projection verticale $s'u'$ sera déterminée.

Le cône auxiliaire que nous avons employé dans le principe général se trouve ici remplacé par un plan parallèle au plan vertical de projection et ayant la droite *su* pour trace horizontale.

817. Si le plan directeur était incliné, le cône auxiliaire serait remplacé par un plan incliné parallèle au plan directeur. On pourra étudier ce cas comme exercice, mais dans la pratique il sera toujours plus simple de prendre un plan de projection parallèle au plan directeur.

818. Parmi les cas particuliers, nous devons surtout remarquer les surfaces auxquelles on a donné le nom de *conoïdes*.

On nomme ainsi toute surface ayant un *plan directeur*, et une *droite* pour l'une de ses directrices.

Soit (*fig.* 450). La première directrice est le demi-cercle AA'; la seconde directrice est la droite CC', perpendiculaire au plan horizontal, et le plan directeur étant horizontal, on pourra commencer par la projection verticale ou par la projection horizontale de la génératrice. Dans le premier cas on construirait la projection verticale parallèle à la ligne AZ, et si l'on voulait commencer par la projection horizontale, on la ferait passer par C. La courbe $zo'n$ est la trace verticale de la surface. Si tous les points suivant lesquels les génératrices coupent la directrice verticale CC' étaient rapprochés en un seul, la surface deviendrait un cône, et c'est par suite de cette analogie qu'on lui a donné le nom de *conoïde*.

819. *Second exemple.* Soit prise (*fig.* 451) la courbe AA' pour première directrice; pour seconde directrice, la verticale CC', le plan directeur étant horizontal, on pourra, pour construire une génératrice, commencer par la projection verticale $c'u'$, parallèle à la ligne AZ; ou par la projection horizontale cC, que l'on fera passer par le point C.

Cette surface se nomme *conoïde hélicoïde :* elle est du genre des conoïdes, puisque ayant un plan directeur, elle a de plus une droite pour directrice; et le nom d'*hélicoïde* lui vient de ce que sa seconde directrice est une *hélice*.

820. Toutes les surfaces *hélicoïdes* ne sont pas en même temps *conoïdes;* il faut pour cela, nous l'avons déjà dit, que l'une des directrices soit droite.

Quelquefois la génératrice devra, dans son mouvement, rester parallèle à un plan directeur, et s'appuyer sur deux hélices de même pas et à bases concentriques.

D'autres fois le plan directeur est remplacé par la condition que la génératrice s'appuiera sur une troisième directrice, ou qu'elle touchera un cylindre donné, ou qu'enfin elle sera normale à une surface ou tangente à une courbe donnée.

Surfaces développables.

821. Nous avons dit (810) qu'une surface réglée est *développable*, toutes les fois que deux positions consécutives de la génératrice se trouvent toujours dans un même plan.

On peut supposer, en effet (*fig*. 453, *Pl*. **68**), que la portion de surface *acx*, comprise entre deux génératrices consécutives, tourne autour de l'une d'elles jusqu'à ce qu'elle soit venue se placer dans le prolongement de l'espace *cez*.

On fera tourner ensuite l'espace *a'ez* pour le rabattre dans le prolongement de *evo*, et ainsi de suite jusqu'à ce que la surface tout entière soit étendue sur le plan $a'''su$.

822. La courbe *xzou*, qui contient tous les points d'intersection des génératrices, se nomme une *arête de rebroussement;* les génératrices étant infinies, il en résulte que l'arête de rebroussement d'une surface développable partage la totalité de cette surface en deux parties bien distinctes A et A' (*fig*. 452) que l'on nomme les deux *nappes* de la surface.

823. L'arête de rebroussement peut être considérée comme formée par le contour d'un polygone dont chaque côté infiniment petit est la portion de génératrice comprise entre les deux points suivant lesquels cette ligne est rencontrée par la génératrice qui suit et par celle qui précède.

Chaque génératrice étant le prolongement de l'un des petits côtés de ce polygone, est par conséquent une tangente à l'arête de rebroussement, et cette propriété est souvent prise pour définition des surfaces développables que l'on considère comme *engendrées par une droite qui se meut de manière à rester constamment tangente à une courbe.*

824. Si tous les points de tangence se réunissaient en un seul, la surface deviendrait un cône (*fig*. 454), et l'arête

de rebroussement, réduite en un seul point, formerait le sommet du cône.

Ainsi, *le cône est une surface développable dont l'arête de rebroussement est un point.*

Le cylindre est une surface développable dont l'arête de rebroussement est un point situé à une distance infinie.

825. L'arête de rebroussement d'une surface développable est en général une courbe à double courbure; mais si cette ligne devenait plane, la surface deviendrait un plan, puisqu'elle serait le lieu géométrique des tangentes à une courbe plane.

Nous allons étudier un exemple particulier de surface développable.

826. Supposons que la courbe $auc,a'u'c'$ (*fig.* 455) soit une portion d'hélice, si nous construisons (347) un certain nombre de tangentes à cette courbe, la surface qui contiendra toutes ces tangentes sera réglée puisqu'elle aura une droite pour génératrice; de plus, elle sera hélicoïde puisque sa directrice sera une hélice (819, 820). Enfin elle sera développable puisque toutes ses génératrices seront tangentes à une même courbe, qui sera son arête de rebroussement (823).

827. *Développement.* Les projections des génératrices ayant été obtenues en opérant comme nous l'avons dit au n° 349, proposons-nous de construire le développement de la surface.

On remarquera d'abord que les deux tangentes $(a—1)$ $(a'—1')$, $(c—9)$ $(c'—9')$, étant parallèles au plan vertical de projection, elles doivent être projetées sur ce plan dans leur véritable grandeur.

On tracera (*fig.* 456) la droite c''—$9''$ égal à la tangente c'—$9'$ et a'''—$9''$ égal à la tangente a'—$1'$; de sorte que c''—a''', différence de ces deux tangentes, sera égal au développement de l'arc d'hélice compris entre les deux points aa' et cc'.

La différence de hauteur des points cc et aa' (*fig.* 455), étant égale à huit fois la seizième partie du pas de l'hélice, on partagera la distance $c''a'''$ (*fig.* 456) en huit parties égales, et l'on portera la moitié d'une de ces parties de c'' en y et de a''' en s; de sorte que la distance ys sera égale à sept fois la huitième partie de $c''a'''$.

Cela étant fait, on construira une série de secteurs circulaires ayant pour bases les arcs $9''-8''=9-8$, $8''-7''=8-7$, etc., et pour rayons successifs les droites $c''-9''=c'-9'$, $8'''-8''=8^{\text{IV}}-9''$, $7'''-7''=7^{\text{IV}}-9''$, etc.

On se contentera, pour tracer cette figure, de faire les cordes $9''-8''=9-8$, $8''-7''=8-7$, etc., d'où il résulte que les arcs sous-tendus ne seront pas rigoureusement égaux, puisqu'ils appartiennent à des cercles dont les rayons seront différents; mais cette manière d'opérer, suffisamment exacte pour les applications, est analogue à celle que nous avons indiquée pour construire les développements du cylindre et du cône.

Il est d'ailleurs évident que l'on pourra augmenter l'exactitude en traçant (*fig.* 455) un plus grand nombre de génératrices.

828. La courbure de l'hélice $auc,a'u'c'$ étant uniforme dans toute son étendue, il en résulte que dans le développement elle se transforme en une circonférence de cercle tangente au polygone formé par le prolongement des rayons de la courbe $9''$—$6''$—$1''$; de sorte que cette dernière ligne sera la développante du cercle c''—$6'''$—a''.

On pourra, comme vérification, chercher le centre du cercle en élevant des perpendiculaires par le milieu de deux quelconques des côtés du polygone $c''—6'''—a''$.

829. Quand on fait mouvoir la tangente $a—1, a'—1'$ pour engendrer la surface hélicoïde, chaque point de la génératrice décrit une hélice qui a le même pas que l'arête de rebroussement; toutes ces hélices se projettent sur le plan horizontal par des cercles concentriques tels que $1zx, 5rv$, et l'on pourra facilement en déduire les projections verticales.

830. Les portions de génératrices comprises entre chacune de ces hélices et celle qui forme l'arête de rebroussement de la surface étant égales, il en résulte que dans le développement (*fig.* 456) toutes les hélices de la surface seront encore représentées par des circonférences qui auraient leurs centres au point o.

Ainsi, l'arc de cercle $1''z''x''$ sera le développement de l'hélice $1zx$ engendrée par le point 1, et l'arc de cercle $5''r''v''$ sera le développement de l'hélice $5rv$ engendrée par le point 5.

De sorte que la *fig.* $5''v''x''z''$ est le développement de la partie de surface comprise entre les deux hélices $zx, 5rv$ et les deux génératrices $z5, xv$.

831. Si le centre et l'arête de rebroussement étaient en dehors de l'épure, on déterminerait avec beaucoup de soin les véritables grandeurs des côtés $z''t, 5''i$, et de la diagonale $z''i$, ce qui, avec les côtés $ti, z''5''$ qui sont égaux à $x'v'$ (*fig.* 455), suffirait pour construire le quadrilatère $z''5''ti$.

Quatre quadrilatères égaux placés à côté les uns des autres formeraient alors le développement de la portion de zone $5''v''x''z''$.

832. *Plan tangent.* Si l'on conçoit deux génératrices infiniment rapprochées, l'espace angulaire compris entre ces deux lignes pourra être considéré comme plan puisqu'il contient deux droites qui se coupent.

Cet espace prolongé devient un plan tangent à la surface développable, et les deux génératrices qui déterminent la direction de ce plan, étant infiniment rapprochées, peuvent être considérées comme une *ligne double* (318) qui est alors la génératrice de tangence.

Il résulte de là que *le plan tangent à une surface développable, touche cette surface suivant toute la longueur de la génératrice de tangence.*

Cette remarque est conforme à ce que nous avons dit à l'occasion des plans tangents aux surfaces cylindriques et coniques.

833. La génératrice de tangence étant considérée comme double et provenant de la position infiniment rapprochée de deux droites qui se coupent, détermine la position du plan tangent, mais ne suffit pas pour en construire les traces.

Il faudra, dans ce cas, choisir une courbe quelconque, située sur la surface, et construire la droite qui toucherait cette courbe au point où elle coupe la génératrice de tangence. Ainsi, par exemple, pour obtenir le plan qui toucherait la surface AA′ (*fig.* 452), suivant la génératrice *ze*, on déterminera la courbe *aem*, située sur la surface et provenant si l'on veut de son intersection par un plan ou par toute autre surface.

On tracera la droite *th*, qui touche la courbe au point *e*, suivant lequel cette ligne est rencontrée par la génératrice de tangence.

Enfin, on construira les traces du plan qui contiendrait les deux droites *ze*, *th*.

Il ne restera plus dans chaque cas particulier qu'à choisir la courbe *aem*, de manière que la construction de la seconde tangente *th* soit la plus exacte et la plus simple possible.

Toutes ces questions ont été résolues dans le second livre pour les surfaces cylindriques et coniques; nous allons en faire l'application à la surface proposée.

834. La courbe 1—5—8 (*fig.* 455) étant la trace horizontale de la surface donnée, la droite *h*—8, perpendiculaire sur le rayon de courbure du point 8, sera la trace horizontale du plan tangent.

Cette trace sera représentée dans le développement par la droite h''—8$''$, perpendiculaire au rayon de courbure 8$'''$—8$''$.

La droite *hr*, perpendiculaire au rayon *qr* (*fig.* 455), sera la trace horizontale d'un plan tangent au cylindre vertical projetant de l'hélice 5*rv*.

Les droites $hr,h'r'$ seront par conséquent les deux projections de la tangente à l'hélice $5rv,5'r'v'$ (637).

Cette tangente sera représentée dans le développement (*fig.* 456) par la droite $h''r''$, tangente à la circonférence $5''r''v''$. Enfin, on pourra s'assurer comme vérification que h''—8$''$ (*fig.* 456) est égal à *h*—8 (*fig.* 455), et que $h''r''$ est la véritable grandeur de la tangente $hr,h'r'$ (35).

De l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

835. Lorsqu'une surface réglée a pour directrice *trois lignes droites*, elle prend le nom d'*hyperboloïde à une nappe*.

Si l'une des directrices était remplacée par un plan directeur, la surface serait un *paraboloïde hyperbolique.*

Les dénominations précédentes proviennent de la nature des sections que l'on obtient en coupant ces deux surfaces suivant certaines directions.

Construction de l'hyperboloïde à une nappe.

836. Les trois droites AA', BB', CC' (*fig.* 457, *Pl.* 69) étant les directrices de la surface, supposons que l'on veuille obtenir une génératrice passant par le point m,m', on construira le plan pp qui contient ce point et la directrice BB'; puis on déterminera l'intersection nn' de ce plan avec la directrice CC'. La droite $mn,m'n'$ sera la génératrice demandée.

Le plan pp remplace ici le cône auxiliaire dont nous avons parlé au n° 812. Ce plan sera déterminé par la directrice BB' et par une seconde droite $mu, m'u'$ qui joindrait un point quelconque uu' de cette directrice avec le point donné mm'.

La trace verticale du plan p doit passer par les deux points o' et s', et la trace horizontale doit être parallèle à la projection horizontale de la droite $mu, m'u'$ que l'on a choisie dans ce but, parallèle au plan horizontal de projection, mais qui cependant pourrait être prise dans toute autre direction.

On s'assurera que la génératrice $mn,m'n'$ rencontre la directrice BB' (44).

837. Il n'est presque jamais commode de construire sur l'épure les traces du plan auxiliaire pp. Dans ce cas, on pourra opérer de la manière suivante :

On prendra (*fig.* 458) sur la directrice BB' deux points quelconques uu', vv'.

On joindra ces points avec mm' par les deux droites $(mu,m'u')$ $(mv,m'v')$ qui détermineront le plan auxiliaire.

Les deux droites oo', ss' perpendiculaires à la ligne AZ, feront connaître les points o' et s'. Enfin, la droite $o's'$ qui oint ces deux points sera l'intersection du plan projetant de la directrice CC′ avec le plan des deux droites $(mu,m'u')$ $(mv,m'v')$.

Cette dernière opération déterminera le point nn', suivant lequel la génératrice $(mn,m'n')$ s'appuie sur la directrice CC′ (812).

838. Le plan auxiliaire qui contient le point mm' et la directrice BB′, serait déterminé complétement par cette directrice et par l'une des droites $(mu,m'u')$ $(mv,m'v')$. Il semblerait donc que l'une de ces lignes est inutile; mais alors, pour construire la droite $o's'$, il faudrait prolonger la directrice BB′ jusqu'à sa rencontre avec le plan projetant de la troisième directrice CC′, ce qui serait souvent impossible, et dans tous les cas moins commode que la construction précédente, puisque l'on peut toujours choisir les deux points uu' et vv' de la manière qui convient le mieux à la disposition de l'épure.

Construction du paraboloïde hyperbolique.

839. Soient données les deux directrices AA′, BB′ et le plan directeur PP : pour obtenir la génératrice qui coupe la directrice AA′ au point mm', on construira :

1° Les deux traces du plan P′P′, qui contient le point donné m,m', et qui est parallèle au plan directeur PP (76);

2° Les deux projections n et n' de l'intersection du plan P′P′ avec la deuxième directrice BB′ du paraboloïde (70);

3° Les deux projections $mn, m'n'$ de la génératrice demandée.

840. Au lieu de construire les traces du plan directeur, on préfère presque toujours déterminer la direction de ce plan par la condition qu'il soit parallèle à deux droites données.

Supposons, par exemple, que les droites AA′, BB″ (*fig.* 460) sont les deux directrices d'un paraboloïde hyperbolique, dont le plan directeur serait parallèle aux deux droites XX′ et ZZ′; on veut construire la génératrice qui contient le point m,m', pris à volonté sur la directrice AA′; on tracera par le point mm' :

1° La droite $mx, m'x'$ parallèle à XX′;

2° La droite $mz, m'z'$ parallèle à ZZ′.

Le plan des deux droites $(mx, m'x')$ $(mz, m'z')$ sera parallèle au plan directeur, et contiendra par conséquent la génératrice demandée.

Pour obtenir le point suivant lequel cette génératrice s'appuie sur la seconde directrice B,B′, on concevra le plan vertical projetant de cette dernière ligne.

L'intersection de ce plan avec celui des lignes $(mx, m'x')$ $(mz, m'z')$, sera la droite $x'z'$, et le point nn' suivant lequel cette ligne rencontre la directrice BB′, détermine la génératrice $mn, m'n'$.

841. Il ne faut pas négliger les abréviations qui peuvent résulter du choix des plans de projection. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe, on devra, toutes les fois que la disposition de l'épure le permettra, projeter la surface sur un plan perpendiculaire à l'une de ses trois directrices (813).

Supposons (*fig.* 461, *Pl.* 70) que l'une des directrices soit la droite BB′, perpendiculaire au plan horizontal, et que les deux autres directrices soient les droites AA′, CC′; les projections horizontales des génératrices concourront toutes au point B, et par conséquent leur construction ne présentera aucune difficulté. Ainsi, après avoir construit la projection horizontale sB de l'une des génératrices, on élèvera la perpendiculaire ss', uu', jusqu'à la rencontre des projections verticales des directrices AA', CC', et l'on aura la droite $s'u'$ pour projection verticale de la génératrice.

La courbe $zo'x'$ est la trace verticale de la surface; vz et Bq en sont les traces horizontales; ces courbes sont des arcs d'hyperbole.

842. S'il s'agit d'un paraboloïde, on devra, autant que possible, prendre un plan de projection parallèle au plan directeur. Ainsi :

Les droites AA', CC' (*fig.* 462), étant prises pour directrices d'un *paraboloide hyperbolique*, on agira comme nous l'avons fait (816) pour le cas où les directrices étaient courbes.

La trace verticale de la surface est la droite $z'x'$, et les deux arcs d'hyperbole vx, nk, en sont les traces horizontales.

843. Dans le paraboloïde projeté (*fig.* 463), le plan directeur étant perpendiculaire au plan vertical de projection, toutes les projections verticales des génératrices seront parallèles entre elles et à la trace verticale du plan directeur. Les courbes zx, vn sont les traces de la surface.

844. Sur la *fig.* 464, le plan directeur étant perpendiculaire aux deux plans de projection, les projections des génératrices seront perpendiculaires à la ligne AZ.

Si on veut construire les traces de la surface, il faudra projeter d'abord les directrices et ensuite les génératrices sur le plan directeur qui est rabattu à droite de l'épure.

845. Sur la *fig.* 465, le plan directeur est parallèle à la ligne AZ. Dans ce cas on emploiera un plan auxiliaire de projection p' perpendiculaire au plan directeur.

Les droites A'' et B'' seront les projections des directrices sur le plan auxiliaire p', la projection $s''u''$ d'une génératrice sera parallèle à la droite pq, qui est la trace du plan directeur.

846. La même disposition d'épure peut être appliquée au cas où le plan directeur aurait une inclinaison quelconque. Ainsi, par exemple (*fig.* 466), on pourra toujours employer un plan auxiliaire de projection p', perpendiculaire à l'une des traces du plan directeur, et par conséquent perpendiculaire à ce plan.

Les droites A'' et B'' seront les projections des directrices sur le plan auxiliaire p', et les projections des génératrices seront parallèles à la droite pq, qui est l'intersection du plan directeur p avec le plan auxiliaire de projection p'.

847. Les sections de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique par des plans, sont des courbes du second degré dont l'espèce dépend de la direction des plans coupants.

848. Ces propositions n'ayant qu'un rapport indirect avec le but de cet ouvrage, j'engagerai le lecteur à les étudier dans les traités de Géométrie analytique. Mais parmi les propriétés des deux surfaces qui nous occupent, il en est une qui se rattache si intimement avec les questions que nous aurons à résoudre par la suite, que je crois devoir en donner ici la démonstration.

Double génération de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

849. L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique diffèrent des autres surfaces réglées par cette propriété remarquable, *qu'elles peuvent être engendrées par une ligne droite de deux manières différentes.*

Double génération de l'hyperboloïde à une nappe.

850. Soient AB, CD, EF (*fig.* 467, *Pl.* 71) les trois directrices d'un hyperboloïde à une nappe;

AE, GH, BF, trois positions de la génératrice de cette surface. Je dis que si l'on prend ces trois dernières lignes pour directrices d'un second hyperboloïde, ces deux surfaces coïncideront dans toute leur étendue et n'en feront par conséquent qu'une seule.

Cela revient à prouver qu'une droite quelconque *mn* qui s'appuierait sur les trois premières directrices, couperait toujours une droite quelconque *pq* qui s'appuierait sur les trois autres. Alors il sera démontré que toutes les génératrices de la première surface coupent toutes les génératrices de la seconde, et que, par conséquent, les deux surfaces se confondent.

Ce principe est la conséquence de quelques théorèmes dont nous allons donner la démonstration.

851. *Si une transversale coupe les trois côtés d'un triangle ou leur prolongement, le produit de trois segments discontinus, c'est-à-dire qui n'ont pas d'extrémité commune, est égal au produit des trois autres segments pareillement discontinus.*

Soient (*fig.* 468) le triangle ABC et la transversale PQS, formant par ses intersections avec les côtés les six segments PA, PB, QA, QC, SB, SC.

Menons CO parallèle à AB ; on aura

$$PB : OC :: SB : SC,$$
$$OC : PA :: QC : QA.$$

Multipliant les deux proportions, et réduisant, il vient

$$PB : PA :: SB \times QC : SC \times QA;$$

d'où

$$PB \times SC \times QA = PA \times SB \times QC;$$

ce qu'il fallait démontrer.

852. *Si sur les côtés d'un quadrilatère gauche, on prend quatre points qui soient dans un même plan, le produit des quatre segments discontinus est égal au produit des quatre autres segments également discontinus.*

Soit (*fig.* 469) le quadrilatère ABCD. Si les quatre points P, Q, R, S, sont dans un même plan, les trois lignes BD, PQ, RS concourront en un point M, intersection des trois plans ABD, BCD, PQRS.

D'après cela, la transversale PQM coupant les côtés du triangle ABD, on aura (851)

$$BP \times AQ \times DM = PA \times QD \times BM.$$

La transversale RSM donnera

$$BM \times DS \times CR = SC \times RB \times DM$$

Multipliant ces deux équations et réduisant, on aura

$$BP \times AQ \times DS \times CR = PA \times QD \times SC \times RB.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

853. Réciproquement, *si quatre points sont situés sur*

les côtés d'un quadrilatère gauche, de manière que le produit de quatre segments discontinus soit égal au produit des quatre autres segments pareillement discontinus, je dis que ces quatre points seront dans un même plan.

Soit (*fig.* 470) le quadrilatère gauche ABCD et les quatre points P, Q, R, S, tels que l'on ait

$$AP \times BQ \times CS \times DR = PB \times QC \times SD \times RA.$$

La transversale PQM donne

$$PB \times QC \times AM = AP \times BQ \times CM.$$

La transversale RSK donne

$$SD \times RA \times CK = CS \times DR \times AK.$$

Multipliant les trois équations précédentes et réduisant, on a

$$AM \times CK = CM \times AK,$$

ou

$$CK(AC + CM) = CM(AC + CK),$$
$$CK \times AC + CK \times CM = CM \times AC + CK \times CM.$$

Réduisant,

$$CK = CM.$$

Donc, les deux points M et K n'en doivent faire qu'un; donc, les droites PQ, RS, se coupent en un point M sur la ligne AC; et les quatre points P, Q, R, S sont par conséquent dans un même plan.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

854. Revenons à la figure (467), article (850). Il s'agit de prouver qu'une génératrice quelconque *mn* du premier hyperboloïde coupe nécessairement une génératrice quelconque *pq* du second.

Or, la ligne GH s'appuyant sur les trois directrices primitives AB, CD, EF, coupe la seconde au point u. Les quatre points C, G, D, H sont par conséquent dans un même plan, et par le principe du n° 852, on doit avoir

$$EC \times AG \times BD \times FH = CA \times GB \times DF \times HE.$$

La ligne mn, s'appuyant sur les mêmes directrices, coupe CD en z, et les quatre points C, m, D, n sont dans un même plan, ce qui donne

$$CA \times mB \times DF \times nE = EC \times Am \times BD \times Fn.$$

Enfin la ligne pq s'appuyant sur les trois droites AE, GH, BF, coupe GH en v, et les quatre points p, G, q, H étant dans un même plan, on a

$$pA \times GB \times qF \times HE = Ep \times AG \times Bq \times FH.$$

Multipliant les trois équations qui précèdent et réduisant, on a

$$pA \times mB \times qF \times nE = Ep \times Am \times Bq \times Fn.$$

Donc, puisque les quatre points p, m, q, n sont situés sur les côtés du quadrilatère gauche, de telle manière que le produit de quatre segments discontinus est égal au produit de quatre autres, il en résulte (853) que ces quatre points sont dans un même plan, et que les droites mn, pq se coupent en un point y.

Donc enfin, puisque une génératrice quelconque de la première surface est toujours coupée par une génératrice quelconque de la seconde, il en résulte, comme nous nous proposons de le démontrer, que *toutes les génératrices du premier hyperboloïde rencontrent toutes les génératrices du second, et que, par conséquent, les deux surfaces coïncident et n'en font qu'une seule.*

Propriétés du paraboloïde hyperbolique.

855. On démontre en géométrie, que *les parties de deux droites comprises entre des plans parallèles sont proportionnelles entre elles.*

Soient (*fig.* 471) les deux lignes AB, CD, coupées par les plans P, P′, P″, parallèles entre eux. On aura

$$Am : mB :: Cn : nD.$$

Or les positions diverses de la génératrice d'un paraboloïde hyperbolique étant déterminées par des plans parallèles au plan directeur (839), on peut dire en général que :

856. *Les directrices d'un paraboloïde hyperbolique sont coupées par les génératrices en parties proportionnelles.*

857. Réciproquement, *si deux droites sont coupées par trois autres en parties proportionnelles, ces trois dernières lignes seront parallèles à un même plan.*

Supposons (*fig.* 471) que l'on ait

$$Am : mB :: Cn : nD.$$

Si les droites AC, *mn*, BD, n'étaient pas parallèles à un même plan, concevons une ligne *mo*, située dans un plan parallèle aux droites AC, BD; on aurait

$$Am : mB :: Co : oD;$$

mais à cause du rapport commun, il viendrait

$$Cn : nD :: Co : oD;$$

d'où

$$Cn : Co :: nD : oD;$$

résultat absurde, d'où il résulte que les trois droites BD, *mn*, AC sont parallèles à un même plan.

858. On peut conclure de ce qui précède, que : *Si une droite s'appuie sur deux autres en les coupant toujours en parties proportionnelles, la surface engendrée sera un paraboloïde hyperbolique.*

859. *Si l'on prend pour directrices d'une surface réglée trois droites parallèles à un même plan, cette surface sera un paraboloïde hyperbolique.*

Soient prises pour directrices (*fig.* 472) les trois droites AC, mn, BD, parallèles au plan P, et supposons que AB, zx, CD, soient trois positions de la génératrice.

Les droites BD, mn et AC étant parallèles à un même plan, couperont les deux lignes AB, CD en parties proportionnelles (855); de sorte que l'on aura

$$\mathrm{A}m : m\mathrm{B} :: \mathrm{C}n : n\mathrm{D}\,;$$

d'où l'on tire

$$m\mathrm{B} \times \mathrm{C}n = \mathrm{A}m \times n\mathrm{D}.$$

De plus, la génératrice zx, s'appuyant sur les trois droites BD, mn, AC, coupera la seconde en o, ce qui donnera (852)

$$\mathrm{A}m \times \mathrm{B}x \times \mathrm{D}n \times \mathrm{C}z = m\mathrm{B} \times x\mathrm{D} \times n\mathrm{C} \times z\mathrm{A}.$$

Multipliant cette équation par la précédente, il vient

$$\mathrm{B}x \times \mathrm{C}z = x\mathrm{D} \times \mathrm{A}z,$$

ou

$$\mathrm{B}x : x\mathrm{D} :: \mathrm{A}z : \mathrm{C}z.$$

Donc, la génératrice zx coupera toujours les directrices BD, AC, en parties proportionnelles, et par conséquent (858) la surface engendrée sera un paraboloïde hyperbolique, ayant un plan directeur P′ parallèle aux droites AB, CD.

On pourra donc supprimer l'une des trois directrices BD, mn, AC, et la remplacer par le plan directeur P'.

Double génération du paraboloïde hyperbolique.

860. Soit un paraboloïde hyperbolique ayant pour directrices les deux droites AB, CD, et pour plan directeur le plan P.

Les génératrices BD, mn, AC, couperont les directrices AB, CD en parties proportionnelles, et l'on aura

$$Bm : mA :: Dn : nC,$$

d'où

$$Bm \times nC = mA \times Dn. \qquad (1)$$

Concevons actuellement un second paraboloïde hyperbolique qui aurait pour directrices les deux droites AC, BD, et dont le plan directeur serait P', parallèle aux droites AB, CD, qui par conséquent seront deux positions de la génératrice.

Si nous supposons que zx soit une troisième génératrice de ce deuxième paraboloïde, on aura (856),

$$Az : zC :: Bx : xD,$$

d'où

$$Az \times xD = zC \times Bx. \qquad (2)$$

Multipliant l'équation (1) par l'équation (2), il viendra

$$Bm \times Az \times nC \times xD = mA \times zC \times Dn \times Bx;$$

d'où on peut conclure (853) que la génératrice mn, du premier paraboloïde, coupera la génératrice zx du second.

Ce que nous venons de démontrer, étant indépendant des positions particulières des deux génératrices mn et zx, il en résulte que *toutes les génératrices du premier paraboloïde rencontreront toutes les génératrices du second*, *et que par conséquent les deux surfaces coïncideront dans tous leurs points et n'en feront qu'une seule*, ce qu'il fallait démontrer.

861. Il est très-essentiel de remarquer que lorsqu'on prend pour directrices les droites AB, CD, le plan directeur P est parallèle aux génératrices BD, AC ; tandis que si l'on prenait ces dernières lignes pour directrices, le plan directeur P′ serait parallèle aux droites AB, CD, qui alors seraient deux génératrices de la deuxième surface.

En général, *le plan directeur de la première génération est parallèle aux directrices de la seconde, et réciproquement, le plan directeur de la seconde génération est parallèle aux directrices de la première.*

Plans tangents aux surfaces réglées.

Si l'on a bien compris ce qui précède, il sera facile de construire, dans tous les cas, des plans tangents aux surfaces réglées.

862. *Construire un plan tangent en un point donné sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe.*

La surface de l'hyperboloïde pouvant être engendrée par une droite de deux manières différentes, si l'on fait passer par le point donné les génératrices appartenant à chacun de ces deux systèmes de génération, on aura deux droites situées dans la surface, et qui détermineront le plan tangent (630).

Soient (*fig.* 473, *Pl.* 72) AA′, BB′, CC′, les trois directrices d'un hyperboloïde à une nappe, et le point mm' donné sur l'une des génératrices mX, m'X′ : cette droite pouvant être considérée comme une première tangente, il ne reste plus qu'à en obtenir une seconde. Pour y parvenir on construira (836) deux autres génératrices YY′, ZZ′, et prenant les trois droites XX′, YY′, ZZ′, pour directrices de la seconde génération, on construira la génératrice T*m*, T′*m*′, qui, avec *m*X, *m*′X′, déterminera le plan tangent.

863. Si on peut projeter la surface sur un plan perpendiculaire à l'une de ses directrices AA′ (*fig.* 475), cela simplifiera la construction des génératrices XX′, YY′, ZZ, et les opérations indiquées au n° 836 ne deviendront nécessaires que pour obtenir la seconde tangente T*m*, T′*m*′.

864. *Construire un plan tangent en un point donné sur la surface d'un paraboloïde hyperbolique.*

Supposons que les droites AA′ et BB′ (*fig.* 474) soient les deux directrices d'un paraboloïde hyperbolique dont le plan directeur serait parallèle aux deux droites VV′ et UU′.

La génératrice XX′ étant la première tangente, il s'agit d'obtenir la seconde tangente TT′.

Pour y parvenir on construira d'abord (840) une seconde génératrice YY′, puis les droites XX′, YY′ étant prises pour directrices de la seconde génération, on construira les droites (*ma*, *m*′*a*′) (*mb*, *m*′*b*′), parallèles aux deux premières directrices AA′, BB′, et le plan déterminé par ces droites, étant parallèle à la seconde génération (861), contiendra la génératrice *m*T, *m*″T′ que nous prendrons pour deuxième tangente, et qui avec *m*X, *m*′X′ déterminera le plan tangent.

865. Sur la *fig.* 476, la première génération du paraboloïde est parallèle au plan vertical de projection, ce qui facilite la construction des génératrices XX′ et YY′.

Pour obtenir la seconde tangente $m\mathrm{T}, m\mathrm{T}''$ on opérera comme au n° 864.

866. Sur la *fig.* 477, le plan directeur est perpendiculaire au plan vertical de projection, et sur la *fig.* 478, il est parallèle à la ligne AZ.

867. *Construire un plan tangent à une surface réglée quelconque, en un point pris sur cette surface.*

Soient (*fig.* 479, *Pl.* 73) A, B, C, les trois directrices d'une surface réglée; on veut construire un plan tangent par un point m donné sur cette surface.

La génératrice $m\mathrm{X}$ qui contient le point donné pouvant être prise pour une première tangente, il ne reste plus qu'à en construire une seconde. Pour cela on pourrait couper la surface donnée dans une direction quelconque, par un plan qui contiendrait le point m, puis mener par ce point une tangente à la courbe de section (629); mais ce moyen, suffisant dans un grand nombre de cas, n'est susceptible d'une exactitude rigoureuse que lorsque la courbe provenant de la section est telle que l'on puisse y mener géométriquement une tangente. Lorsque cela n'aura pas lieu, et que la question proposée exigera une grande exactitude, on cherchera s'il existe dans la longueur de la génératrice qui contient le point donné, trois points par lesquels on puisse mener des tangentes à la surface, et après avoir construit ces tangentes D, E, F, on les prendra pour directrices d'un hyperboloïde à une nappe qui touchera la surface donnée dans toute la longueur de la génératrice $m\mathrm{X}$; de sorte que les deux surfaces se touchant, tout plan tangent à l'une d'elles sera aussi tangent à l'autre. La question ne consistera donc plus qu'à construire un plan tangent à l'hyperboloïde, ce que nous savons faire (862).

Ainsi, par exemple, étant donnés (*fig.* 480) les trois directrices A, B, C, et le point de tangence m, situé sur la génératrice mX qui sera la première tangente.

Voici quel sera l'ordre des opérations :

1° Par les points a, b, c, suivant lesquels la droite mX rencontre les courbes A, B, C, on construira les trois tangentes D, E, F qui seront les directrices de l'hyperboloïde tangent ;

2° On construira (836) les deux lignes Y et Z, génératrices de cet hyperboloïde, et l'on prendra les trois droites X, Y, Z pour directrices de la deuxième génération ;

3° On construira la génératrice mT qui s'appuie sur les trois droites X, Y, Z ; de sorte que les deux droites mX et mT détermineront le plan tangent que l'on pourra construire en opérant comme nous l'avons dit au n° 55.

868. On remarquera toutefois que l'exactitude rigoureuse du résultat est soumise à cette condition, que l'on pourra mener des tangentes à la surface en trois points différents de la génératrice qui contient le point donné; mais comme les directrices des surfaces réglées que l'on emploie dans les arts sont presque toujours des courbes définies, on pourra construire les tangentes à ces courbes aux points où elles sont coupées par la génératrice.

869. Supposons (*fig.* 481) que l'on soit parvenu à construire les trois tangentes D, E, F; chacune de ces tangentes, combinée avec la génératrice X, déterminera un plan tangent. Dans chacun de ces plans p, p', p'', on pourra mener une infinité de tangentes à la surface donnée, et prenant une tangente quelconque dans chacun de ces trois plans, on pourra en faire les directrices d'un hyperboloïde tangent, d'où il résulte *qu'il y a une infinité d'hyperbo-*

loïdes tangents à la surface donnée, et que l'on pourra toujours choisir parmi tous ces hyperboloïdes celui qui, par la disposition de ses directrices, serait le plus commode pour la construction de l'épure.

Si par les points a, b, c (*fig.* 481), on mène trois plans parallèles à un plan quelconque p''', ces trois plans seront parallèles entre eux, et couperont les trois plans tangents pp', p'' suivant trois droites tangentes à la surface, et qui de plus seront parallèles à un même plan p'''; de sorte qu'elles pourront (859) être prises pour directrices d'un paraboloïde hyperbolique dont la construction est ordinairement plus simple que celle de l'hyperboloïde. Enfin, le plan directeur p''' pouvant être pris d'une manière quelconque, on pourra construire une *infinité de paraboloïdes tangents*, et l'on choisira le plus favorablement disposé pour les constructions.

870. *Tout plan contenant une génératrice quelconque d'une surface réglée est un plan tangent, quelle que soit du reste sa direction.*

En effet (*fig.* 483), indépendamment de la génératrice ac, que l'on peut considérer comme une première tangente, le plan p contiendra encore la droite th, tangente à la courbe vu suivant laquelle il coupe les autres génératrices de la surface; il sera donc tangent puisqu'il contiendra deux tangentes (629). Ainsi nous devons admettre cette conséquence que, pour construire un plan tangent à une surface réglée, il suffit de *le faire passer par une génératrice de cette surface.*

871. Le point de tangence m sera déterminé par l'intersection de cette génératrice avec la courbe vu, suivant laquelle la surface est coupée par le plan tangent.

872. Si on fait tourner le plan *p* autour de la génératrice *ac*, le point de tangence glissera le long de cette ligne, et changera de place pour chaque position différente du plan tangent.

873. Si la surface réglée avait un plan directeur et que le plan tangent lui fût parallèle, le point de tangence serait à l'infini.

874. Il est très-essentiel de bien comprendre la différence qui existe entre les plans tangents aux surfaces réglées, selon que ces surfaces sont développables ou non développables.

Si la surface est gauche, le plan qui contient une génératrice ne le touche qu'en un point, qui est déterminé par la rencontre de cette génératrice avec la courbe suivant laquelle le plan dont il s'agit coupe toutes les autres génératrices de la surface (871).

Si au contraire la surface est développable, le plan tangent est le prolongement de l'espace infiniment petit compris entre deux génératrices consécutives (832), et ces deux lignes infiniment rapprochées n'en font qu'une seule qui devient la génératrice de tangence, suivant toute la longueur de laquelle la surface est touchée par le plan tangent.

875. Ainsi, quand une surface est développable et que l'on veut tenir compte de cette propriété, on ne peut faire passer par la génératrice qu'un seul plan tangent, qui est en même temps le plan osculateur de l'arête de rebroussement, au point où cette courbe est touchée par la génératrice de tangence, et si on faisait tourner le plan tangent autour de cette droite, elle cesserait aussitôt d'être une génératrice de tangence pour devenir une génératrice

de section; mais le plan n'en serait pas moins tangent à la surface que l'on considérerait alors comme un cas particulier des surfaces *gauches*, et le point de tangence serait à l'intersection de la génératrice autour de laquelle on aurait fait tourner le plan dont il s'agit, avec la courbe suivant laquelle ce plan couperait les autres génératrices de la surface.

876. Enfin, le plan tangent à une surface gauche ne la touche qu'en un point, tandis que le plan tangent à une surface développable la touche dans toute l'étendue de la génératrice de tangence.

Pour déterminer le premier, il ne suffira pas de connaître la génératrice par laquelle on veut le faire passer, il faudra encore donner le point de tangence ou quelque autre condition, tandis que le plan tangent à la surface développable sera déterminé lorsque l'on connaîtra la génératrice de tangence (833).

877. Il résulte des principes précédents que l'on pourra, dans certains cas, considérer comme tangent un plan qui couperait un cône ou un cylindre suivant une ou plusieurs génératrices.

En effet, le plan qui contient une génératrice d'un cône coupe toutes les autres au sommet, et ce point peut alors être considéré comme une section dont le rayon de courbure serait réduit à zéro, d'où il résulte que le plan est tangent, puisqu'il contient une tangente au sommet, et la génératrice que l'on peut toujours considérer comme une seconde tangente.

878. Cette conséquence paraît incompatible avec les principes énoncés aux n^{os} 316, 456, puisque alors nous avions admis comme condition de tangence que les deux

génératrices de section seraient réunies en une seule; mais la contradiction n'est qu'apparente et disparaît aussitôt que l'on se rappelle la différence que nous venons d'établir (876) entre les plans tangents aux surfaces *développables* et ceux qui sont tangents aux surfaces *gauches*.

Ainsi, quand on considère le cône comme surface développable, le plan doit toucher la surface dans toute l'étendue de la génératrice de tangence, tandis que si on considère le cône comme cas particulier de surface réglée, et que l'on fasse abstraction de la propriété qu'il possède d'être développable, le plan qui contient une génératrice quelconque peut être considéré comme tangent quelle que soit sa direction, et, dans ce cas, le plan n'est tangent qu'au sommet, puisque c'est à ce point que se rencontrent les deux tangentes qui déterminent sa position (877).

879. Cela devient encore évident pour le cône circulaire, en considérant cette surface comme un cas particulier d'hyperboloïde de révolution à une nappe. Dans ce cas, le plan conduit suivant une génératrice quelconque, contient encore la tangente au cercle de gorge dont le rayon est réduit à zéro (660).

Tout ce que nous venons de dire du cône s'applique au cylindre. Ainsi, quand on considère cette surface comme un cas particulier des surfaces réglées, il est permis de considérer comme plan tangent, celui qui contient une génératrice quelconque du cylindre; mais alors, le point de tangence est situé à la rencontre de la génératrice de section avec la courbe suivant laquelle le plan tangent couperait *à l'infini* les autres génératrices du cylindre.

Si, au contraire, comme c'est l'usage, on considère le cylindre comme surface développable, le plan tangent touche la surface suivant toute l'étendue de la génératrice de tangence, qui est alors considérée comme provenant du rapprochement des deux génératrices de section.

880. *Construire un plan tangent à une surface réglée, par un point pris en dehors de cette surface.*

On fera passer des plans par le point donné et chacune des génératrices de la surface, ce qui fera autant de plans tangents.

Ainsi, par exemple (*fig.* 482), la droite sn et la génératrice n—1 détermineront un premier plan tangent (870).

On construira la courbe vu suivant laquelle ce plan coupe la surface, et l'intersection de la courbe vu avec le génératrice n—1 donnera le point de tangence (871).

On obtiendra de la même manière tous les points de la courbe $mm'...m''$, suivant laquelle la surface réglée serait touchée par une surface conique qui aurait son sommet au point donné s.

881. *Construire un plan tangent à une surface réglée, par une droite donnée hors de cette surface.*

Soit la droite donnée ac (*fig.* 485) : on construira (880) la ligne zx, suivant laquelle la surface réglée serait touchée par une surface conique ayant son sommet en un point quelconque a sur la droite donnée. On construira pareillement la ligne sr, provenant du contact par une seconde surface conique ayant son sommet en c, et le point m, intersection des deux courbes zx, sr, sera le point de tangence. Il ne restera plus qu'à faire passer un plan par les deux droites am, cm ; il est évident que ce plan contiendra la droite ac.

882. Cette solution est analogue à celle que nous avons employée pour construire, par une droite donnée, des

plans tangents à une surface de révolution. Toute la différence consiste dans la manière d'obtenir les courbes suivant lesquelles la surface donnée est touchée par des cônes auxiliaires.

Au lieu de cônes on peut employer deux surfaces réglées qui auraient pour directrices la surface et la droite données. La troisième directrice étant à volonté, on profiterait de cette circonstance pour introduire les simplifications qui résulteraient de la nature de la surface donnée.

Ainsi, par exemple, s'il s'agit de construire par une droite donnée des plans tangents à une surface de révolution, on coupera la surface par des plans perpendiculaires à son axe; et par le point où chacun de ces plans rencontrera la droite donnée, on mènera deux tangentes à la section correspondante; le lieu qui contiendra toutes ces tangentes sera la première surface auxiliaire.

On coupera ensuite la surface donnée par des plans méridiens; et par le point où chacun de ces plans coupera la droite donnée, on construira les tangentes au méridien correspondant; le lieu géométrique de toutes ces tangentes sera la seconde surface auxiliaire.

Les deux surfaces réglées, déterminées de cette manière, toucheront la surface donnée suivant deux courbes que l'on construira, et les intersections de ces courbes seront les points de tangence demandés.

883. *Construire un plan tangent à une surface réglée, parallèlement à une droite donnée.*

On fera passer (*fig.* 486) par chacune des génératrices de la surface réglée un plan parallèle à la droite donnée *ac* (83).

Le point de tangence se déterminera comme nous l'avons dit précédemment (871); la courbe de contact $mm' \ldots m''$

contient la suite des points suivant lesquels la surface proposée serait touchée par une surface cylindrique parallèle à la droite donnée.

884. Si cette droite était perpendiculaire au plan de projection, la projection de la courbe de contact serait la limite de la projection de la surface donnée.

Ainsi, en construisant (*fig.* 484) une suite de plans tangents perpendiculaires au plan vertical de projection, les points de tangence seront situés sur une courbe $v'm'u'$ qui formera la limite de la projection verticale de la surface.

Surfaces normales.

885. Il est souvent utile de construire une surface qui en coupe partout une autre suivant des angles droits.

886. Si par chaque point d'une courbe située sur la surface donnée, on construit une normale, le lieu qui contiendra toutes ces droites jouira de la propriété demandée.

Toute surface engendrée de cette manière se nomme *surface normale*.

887. Étant donnée la ligne suivant laquelle on veut faire passer une suface normale, il est évident qu'il suffira de construire par chacun de ses points un plan tangent et une normale à la surface; et cette question ayant été résolue pour toutes les surfaces que nous avons étudiées jusqu'à présent, il ne reste plus qu'à rechercher quelles sont les simplifications qui peuvent résulter dans chaque cas de la nature particulière de la surface donnée, ou de la position de cette surface par rapport au plan de projection.

888. *Construire la surface normale qui aurait pour di-*

rectrice une courbe située sur la surface d'un cylindre.

La droite 2—3 (*fig.* 488, *Pl.* 74), tangente à la trace horizontale du cylindre donné, sera la trace horizontale d'un plan tangent (374); de sorte que la droite 1—4, perpendiculaire sur 2—3, sera la projection horizontale de la normale (86).

On opérera de la même manière pour chacun des points de la courbe donnée 1—1, 1′—1′.

889. On pourra se dispenser de construire les traces verticales des plans tangents en coupant chacun d'eux par un plan parallèle au plan vertical de projection, et contenant le point de tangence. On obtendra ainsi un système de lignes parallèles aux traces verticales des plans tangents, et par conséquent perpendiculaires aux projections verticales des normales dont la construction ne présentera plus alors aucune difficulté.

Ainsi, la projection verticale 1′—4′ de la normale devra être perpendiculaire sur la droite 1′—3′, etc.

Les droites 1—3, 1′—3′ peuvent être considérées comme les génératrices d'une surface réglée qui toucherait le cylindre suivant la courbe (1—1, 1′—1′), et qui aurait pour trace horizontale la courbe 3—3.

890. On peut encore obtenir les projections des normales en opérant de la manière suivante :

1° On construira (*fig.* 492) les deux projections 1″—2″, 1‴—2‴ d'une droite, parallèles à la direction du cylindre donné ;

2° On déterminera les traces de cette ligne, et l'on construira les droites 2″—3″, parallèles aux traces horizontales 2—3 des plans tangents au cylindre. Les droites 1‴—3″ seront par conséquent parallèles aux traces verticales des mêmes plans tangents.

Il ne restera plus qu'à tracer (*fig.* 488) les normales $1'$—$4'$, perpendiculaires sur les droites $1'''$—$3''$ (*fig.* 492).

891. Si on voulait donner à chacune des normales une longueur déterminée telle que 1—$4''$ (*fig.* 488), on porterait cette grandeur sur la normale rabattue 1—$5''$ que l'on ferait ensuite revenir à sa place.

Cette partie de l'opération n'a été conservée que pour une normale.

892. La normale en un point quelconque d'une surface donnée est toujours perpendiculaire au plan tangent, et par conséquent à toutes les droites qui sont situées dans ce plan et qui passent par le point de tangence.

Il en résulte que les normales d'un cylindre sont toujours perpendiculaires aux génératrices, et par conséquent parallèles au plan de la section droite, qui devient alors le plan directeur de la surface normale.

Cette remarque fournit un moyen d'abréviation que nous allons indiquer.

Toutes les fois que la disposition générale de épure ne s'y opposera pas, on devra projeter le cylindre sur un plan perpendiculaire à sa direction. Par ce moyen chaque normale sera projetée dans sa véritable grandeur, et l'on ne sera plus obligé d'en faire le rabattement.

Ce moyen de solution a été employé sur la *fig.* 487 pour la construction de la surface qui aurait pour directrice la courbe $ac, a'c'$, située sur la surface d'un cylindre elliptique.

Les projections verticales des normales sont perpendiculaires aux traces des plans tangents correspondants. Chacune de ces traces (1—2) a été obtenue par le principe que nous avons énoncé au n° 259.

La courbe $vu, v'u'$ est l'intersection de la surface normale avec un second cylindre elliptique semblable au premier.

893. Si l'une des génératrices du cylindre devait servir de directrice à la surface normale, cette dernière surface serait un plan.

894. *Construire la surface normale qui aurait pour directrice une courbe* 1—1, 1′—1′, *située sur la surface d'un cône* (*fig.* 490).

La droite (2—3), tangente à la trace horizontale du cône, sera la trace horizontale d'un plan tangent; par conséquent (1—4), perpendiculaire sur (2—3), sera la projection horizontale de la normale, et ainsi de suite pour tous les autres points.

895. On pourra obtenir les projections verticales des normales en opérant comme dans l'exemple du n° 889; mais, si on a de la place, il vaudra mieux construire par le sommet du cône un plan s—3″ parallèle au plan vertical de projection. Ce plan coupera tous les plans tangents, suivant un système de lignes s'—3‴ parallèles à leurs traces verticales, et par conséquent perpendiculaires aux projections verticales des normales qu'il sera facile de construire.

896. En rabattant la normale 1—5, 1′—5′ autour de la verticale projetante du point 1, 1′, on pourra lui donner une longueur déterminée telle que 1′—4″.

897. La surface normale devient un plan lorsqu'elle a pour directrice l'une des génératrices du cône.

898. *Construire la surface normale qui aurait pour di-*

rectrice une courbe telle que 1—1, *située sur une surface de révolution* (*fig.* 489).

Il suffit de construire une normale par chacun des points de la courbe donnée (697).

Je rappellerai (698) que pour construire la normale en un point quelconque d'une surface de révolution, il n'est pas nécessaire d'avoir les traces du plan tangent.

En effet, le point 1, par exemple, étant rabattu en 1′ dans le plan du méridien principal, on construira la tangente 1′—2, puis ensuite la normale 1′—3′ que l'on ramènera dans la position 1—3, en remarquant que le point *o* qui appartient à l'axe de rabattement ne doit pas changer de place.

Dans l'exemple proposé, la surface normale est limitée par la courbe suivant laquelle elle rencontre une seconde surface de révolution qui aurait pour section méridienne la ligne 3′—4′.

899. Si l'angle suivant lequel la normale rencontre l'axe différait peu d'un angle droit, il serait convenable de construire la projection sur le plan perpendiculaire à l'axe de la surface. Sans cette précaution, les longueurs des normales ne seraient pas déterminées avec assez d'exactitude.

900. Il est évident que la solution précédente conviendrait également à la sphère (*fig.* 491) ainsi qu'au cylindre ou au cône circulaire (*fig.* 493), qui sont des cas particuliers de surfaces de révolution.

901. La surface normale d'une surface de révolution est un cône circulaire toutes les fois que la directrice est un parallèle de la surface; et lorsque la directrice est un méridien, la surface normale devient un plan.

902. Les surfaces normales de la sphère sont toujours des cônes et deviennent des plans lorsque la directrice est un grand cercle.

903. *Construire la surface normale qui aurait pour directrice une ligne quelconque située sur une surface réglée.*

Si la directrice de la surface normale demandée est une courbe, on construira par chacun de ses points un plan tangent et une normale (867), ce qui ne présentera pas d'autres difficultés que la longueur du travail.

904. Quand la directrice est une ligne droite, ce qui arrive presque toujours dans les applications, on peut obtenir des abréviations remarquables en ayant égard aux propriétés de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

Nous allons étudier quelques questions de ce genre.

905. Prenons pour exemple (*fig.* 494, *Pl.* 75) la surface réglée que nous avions projetée au n° 813, nous proposerons de construire la surface normale qui aurait pour directrice la droite $bX, B'X'$, génératrice de la surface.

Si nous construisons les deux tangentes $ts, t's'$ et $lz, l'z'$, ces droites, avec la directrice BB', qu'il est permis de considérer comme une tangente, seront les directrices d'un hyperboloïde à une nappe, qui toucherait la surface donnée suivant toute la longueur de la génératrice $bX, B'X'$.

Il ne restera donc plus qu'à construire, par chaque point de cette dernière ligne, un plan tangent et une normale à l'hyperboloïde qui aurait pour directrices les trois droites $(ts, t's')$, $(lz, l'z')$, (B, B'); ce travail, qui serait fort long, peut être simplifié en opérant de la manière suivante :

Nous avons dit au n° 869 qu'il existait une infinité d'hyperboloïdes à une nappe et de paraboloïdes hyperboliques tangents à une surface réglée, suivant toute la longueur d'une même génératrice; et comme les plans tangents et les normales seront les mêmes pour toutes ces surfaces, nous pourrons choisir celle qui donnera lieu aux opérations les plus simples.

Or, la directrice BB' et la génératrice bX, B'X' pouvant être considérées toutes les deux comme tangentes à la surface, le plan ν'B'B qui contient ces deux lignes sera lui-même un plan tangent, et le point b sera la projection horizontale du point de tangence; toute ligne droite passant par le point bB' et située dans le plan ν'B'B sera par conséquent une tangente à la surface donnée.

Donc, si nous faisons passer par b un plan p', parallèle au plan vertical de projection, la droite ($b\nu$, B'ν') résultant de l'intersection du plan ν'B'B par le plan p' sera tangente à la surface, puisqu'elle sera située dans le plan tangent ν'B'B; de plus, elle sera parallèle au plan vertical de projection, puisqu'elle sera située dans le plan p'. Nous pourrons alors remplacer l'hyperboloïde qui avait pour directrices les trois tangentes (ts, $t's'$), (lz, $l'z'$), (B, B') par un autre hyperboloïde dont les tangentes (ts, $t's'$) (lz, $l'z'$) ($b\nu$, B'ν') seront les directrices, et cette dernière surface sera un paraboloïde hyperbolique, puisque ses trois directrices sont parallèles au plan vertical de projection (859), qui devient par conséquent le plan directeur de l'une des deux générations.

La question proposée est donc ramenée, par suite des opérations précédentes, à construire par la droite (bX, B'X') une surface normale au paraboloïde hyperbolique, qui a pour l'un de ses deux plans directeurs le plan vertical de projection et pour directrices les trois droites $(ts, t's')$, $(lz, l'z')$, $(bv, B'v')$, tangentes à la surface donnée.

Voici quel sera l'ordre des opérations.

Les trois droites $(ts, t's')$, $(lz, l'z')$, $(bv, B'v')$, étant les premières directrices, et la droite bX, $B'X'$, étant une des génératrices de la surface, il faudra construire une autre génératrice afin d'avoir les directrices de la seconde génération. Pour arriver à ce résultat, on construira par le point ss', pris sur la directrice $ts, t's'$, et par la seconde directrice $lz, l'z'$, un plan dont la trace horizontale sera so, et qui coupera le plan vertical contenant la troisième directrice $bv, B'v'$, suivant la droite $o'u'$ parallèle à $l'z'$; de sorte que le point uu' appartiendra à la génératrice $su, s'u'$, qui provient du premier mode de génération. Ainsi donc, les deux droites $(bX, B'X')$ $(su, s'u')$ seront les directrices de la seconde génération qui, devant se faire parallèlement au plan vertical (861), ne présentera plus aucune difficulté.

On a tracé sur l'épure les génératrices du paraboloïde tangent; chacune d'elles est tangente à la surface proposée en un point de la droite $(bX, B'X')$; de sorte qu'à ce point le plan tangent sera déterminé par la droite $(bX, B'X')$ et la génératrice correspondante du paraboloïde.

906. *Surfaces normales*. Pour construire une normale en un point quelconque mm', on remarquera d'abord que la droite $(ms, m's')$, sera l'une des génératrices du paraboloïde tangent; par conséquent, le plan tangent au point mm' sera déterminé par les deux tangentes $(mb, m'B')$, $(ms, m's')$. Il aura donc bs pour trace horizontale, et la droite mn, perpendiculaire sur bs, sera la projection horizontale de la normale; de plus, la tangente $(ms, m's')$, parallèle au plan vertical et située dans le plan tangent, sera parallèle à la trace verticale de ce plan; de sorte que $m'n'$ perpen-

diculaire sur $m's'$ sera la projection verticale de la normale.

En construisant une normale par chacun des points de la droite ($bX, B'X'$), on aura une surface normale suivant cette ligne.

Au lieu de construire les traces horizontales des plans tangents, il peut être commode de couper ces plans par tout autre plan horizontal tel que p'', ce qui donnera les droites $m—1, m—2, m—3$. Ces droites, parallèles aux traces horizontales des plans tangents, seront par conséquent perpendiculaires aux projections horizontales des normales, dont la construction ne présentera plus de difficulté.

Si on voulait donner aux normales une longueur déterminée $m—n''$, on rabattrait chacune d'elles comme nous l'avons fait aux n^{os} 891 et 896.

907. Sur la *fig.* 495, on a construit la surface normale à la surface réglée que nous avions projetée au n° 814.

Tout ce que nous avons dit dans l'article qui précède s'applique à l'exemple dont il s'agit, il n'y a de différence que dans la nature et dans la position des lignes données ; de sorte que les opérations seront suffisamment indiquées par la similitude des lettres.

Les projections horizontales des normales devront être perpendiculaires aux droites $m—1, m—2, m—3, m—4, m—5$, etc., suivant lesquelles les plans tangents sont coupés par le plan horizontal p''.

908. On peut souvent, en choisissant d'une manière convenable le plan directeur du paraboloïde tangent, rendre les constructions aussi simples qu'élégantes.

Soient, par exemple (*fig.* 496), l'arc AA' et la verticale BB', directrices d'une *surface conoïde*, ayant le plan horizontal pour plan directeur (818).

On veut construire une surface normale suivant la génératrice (X, X').

La droite tt', tangente au point aa', pourrait, avec la verticale BB', être prise pour directrice d'un paraboloïde tangent, dont par conséquent la seconde génération se ferait parallèlement au plan vertical (861); mais il sera mieux d'opérer comme il suit.

On construira par les deux droites XX' (tt') un plan tangent dont la trace horizontale ps sera parallèle à X, puis on mènera perpendiculairement sur X la tangente (au, $a'u'$), que l'on prendra avec la verticale BB', pour les deux directrices d'un paraboloïde hyperbolique dont la seconde génération sera perpendiculaire à la droite XX'; de sorte qu'en projetant ce paraboloïde sur son plan directeur p'', que l'on a rabattu sur l'épure, la directrice X,X' sera projetée par un seul point X'', par lequel passeront toutes les projections des tangentes et des normales. Les projections des normales seront perpendiculaires à celles des tangentes, et leurs projections horizontales seront perpendiculaires à la droite X. La courbe zx est la section de la surface normale par le plan p''', parallèle au plan horizontal.

Après avoir exécuté les constructions précédentes, il sera facile d'en rapporter les résultats sur la projection verticale primitive.

909. La surface normale que nous venons de construire est un paraboloïde hyperbolique, égal au paraboloïde tangent; car si on faisait faire à cette dernière surface un quart de révolution autour de la directrice XX'', il est évident que chacune des tangentes viendrait prendre la place

de la normale correspondante, et les deux surfaces coïncideraient alors dans tous leurs points.

Il en sera de même toutes les fois que l'on emploiera comme surface auxiliaire, un paraboloïde hyperbolique dont le plan directeur sera perpendiculaire à la directrice de la surface normale demandée.

910. Dans la figure (497), AA' est une hélice à base circulaire ; cette courbe et la verticale BB' ont servi de directrices à une surface hélicoïde dont la génération est parallèle au plan horizontal. On veut construire une surface normale suivant la génératrice XX'.

On construira la droite ao tangente au cercle A, et l'on portera de a en o une longueur égale au développement de l'arc ac, ce qui donnera la projection horizontale de la tangente à l'hélice au point aa' (347).

La tangente $(ao, a'o')$ et la verticale BB' seront les directrices d'un paraboloïde tangent suivant XX', les horizontales XX' $(ou, o'u')$, génératrices de ce paraboloïde, seront les directrices de la seconde génération, qui se fera parallèlement au plan vertical p' perpendiculaire à la droite XX'.

On opérera pour le reste comme dans l'épure précédente.

La courbe zx est la section de la surface normale par le plan horizontal p''.

911. On voit, par les deux exemples précédents, qu'il est avantageux d'employer de préférence le paraboloïde dont le plan directeur est perpendiculaire à la droite qui doit servir de directrice à la surface normale, parce que les normales, étant parallèles au plan directeur, seront égales à leurs projections sur ce plan, et qu'ensuite les angles droits que les normales doivent faire

avec les tangentes, se projetteront dans leur véritable grandeur.

On pourra parvenir au même résultat par des projections auxiliaires toutes les fois que la directrice de la surface normale sera inclinée dans l'espace d'une manière quelconque.

912. Supposons d'abord le cas où la directrice XX' (*fig.* 498 et 500, *Pl.* 76), serait parallèle au plan vertical de projection.

Les courbes AA', BB', CC', étant les trois directrices de la surface donnée.

Par les points *mm'*, *nn'*, *vv'*, suivant lesquels ces courbes sont rencontrées par la droite XX', on construira les trois tangentes DD', EE', FF', qui seront les directrices de l'hyperboloïde tangent.

Il s'agit maintenant de remplacer cet hyperboloïde par un paraboloïde hyperbolique dont le plan directeur *psp* serait perpendiculaire à la droite XX', qui doit servir de directrice à la surface normale demandée. Voici quel sera l'ordre des opérations.

Les deux droites XX, AA' déterminent un plan qui touche la surface donnée au point *mm'*, et qui contient la droite (*ac*, *a'c'*) parallèle à la directrice XX'.

Le plan *p'*, perpendiculaire sur la droite XX', coupera le plan des deux tangentes XX', DD' suivant une ligne GG' qui sera tangente à la surface et parallèle au plan *psp*.

Les deux droites XX', EE', détermineront un second plan qui touche la surface au point *nn'* et qui contient la droite *ou*, *o'u'*, parallèle à la directrice XX'. La section de ce deuxième plan tangent par un plan *p''* perpendiculaire à la droite XX' donnera une seconde droite HH' tangente au point nn' et parallèle au plan *psp*.

Enfin, la droite $zx, z'x'$ parallèle à XX' sera située dans le plan tangent déterminé par les deux droites XX', FF', et la section de ce plan tangent par le plan p''' perpendiculaire sur XX' donnera une troisième tangente KK' parallèle au plan *psp*.

Les trois tangentes, GG', HH', KK', étant parallèles au plan *psp*, la surface réglée qui aura ces trois droites pour directrices sera un paraboloïde hyperbolique qui touchera la surface donnée dans toute l'étendue de la génératrice XX'; de sorte qu'il ne reste plus qu'à construire la surface normale qui aurait cette ligne pour directrice.

Par le point cc', pris à volonté sur la directrice GG', on tracera la droite $cr, c'r'$ qui s'appuie en un point quelconque rr' sur la directrice HH'.

Le plan déterminé par les deux droites HH' et $(cr, c'r')$ coupera le plan p''' suivant la droite $ti, t'i'$ parallèle à la directrice HH'; on joindra le point ii' avec cc' par la droite YY', qui, avec XX', seront les deux directrices de la deuxième génération du paraboloïde tangent (836, 861).

Les génératrices 1—2, 1'—2' de ce paraboloïde étant parallèles au plan directeur *psp*, les projections verticales de ces lignes seront perpendiculaires à la droite X'. Les projections horizontales de ces mêmes lignes seront déterminées par la rencontre des droites 2'—2 perpendiculaires à la ligne AZ avec les projections horizontales X et Y des deux directrices du paraboloïde tangent.

On peut vérifier la position de chacune de ces lignes en la projetant sur le plan directeur qui est rabattu (*fig.* 501).

On remarquera que sur ce plan la directrice XX' se projette par un seul point X'', vers lequel, par conséquent, doivent concourir toutes les projections X″—2″ des génératrices du paraboloïde tangent.

Quand ces dernières lignes seront projetées sur la *fig.* 501, on construira par le point X″ une perpendiculaire sur chacune d'elles, ce qui donnera les projections X″—3″ des génératrices du paraboloïde normal.

Chacune de ces normales étant parallèle au plan directeur *psp*, sa projection sur la *fig.* 498 devra se confondre avec celle de la tangente correspondante.

De plus, et par la même raison, toutes ces lignes se projetteront sur la *fig.* 501, dans leur véritable grandeur : de sorte que, si l'on veut donner à chaque normale une longueur égale à X″3″, il suffira de décrire la circonférence (3″—3″), qui déterminera les extrémités de toutes les normales.

Les points 3″... étant ramenés sur la *fig.* 498, donneront la courbe 3′—3′... qui sera par conséquent l'intersection de la surface normale demandée avec un cylindre circulaire, qui serait perpendiculaire au plan *psp*, qui aurait pour axe la directrice X, X′, X″, et pour section droite la circonférence 3″—3″.

La projection horizontale 3—3 de la même courbe sera déterminée par la rencontre des perpendiculaires et des parallèles à la ligne *AZ*, menées par les points correspondants des deux *fig.* 498, 501.

913. Si la droite qui doit servir de directrice à la surface normale demandée était oblique par rapport aux deux plans de projection, on construirait (*fig.* 499) une projection auxiliaire sur un plan *p′* parallèle à cette directrice.

914. Il ne sera pas nécessaire de projeter sur le plan *p′* les directrices courbes de la surface donnée; on pourra se contenter de construire les projections des trois tangentes

directrices de l'hyperboloïde auxiliaire, après quoi tout le reste du travail se ferait comme dans l'exemple précédent.

915. Nous appliquerons les principes qui précèdent à une question que l'on rencontre quelquefois dans la construction des escaliers.

Supposons que la droite XX′ (*fig.* 502, 504, *Pl.* 77) soit assujettie à tourner en montant autour de la verticale oo', de manière que tous ses points décrivent des hélices de même pas. On pourra toujours considérer trois quelconques de ces hélices comme étant les directrices de la surface réglée engendrée par la droite XX′. Il s'agit de construire la surface normale qui aurait cette droite pour directrice.

Voici quel sera l'ordre des opérations :

1° On prendra l'un des deux plans de projection perpendiculaire à la verticale oo' et le second plan parallèle à la droite XX′, puis on projettera (339) sur ces plans les hélices AA′, BB′, CC′, décrites par les trois points (m, m'), (n, n'), (ν, ν') pris où l'on voudra sur la droite XX′. Ces hélices seront les directrices de la surface réglée primitive ;

2° En opérant comme nous l'avons dit au n° 347, on construira les trois droites DD′, EE′, FF′ tangentes aux hélices AA′, BB′, CC′. Ces trois tangentes seront les directrices de l'hyperboloïde tangent, et détermineront aux points (m, m'), (n, n'), (ν, ν') trois plans tangents qui auront pour traces horizontales les droites qa, qc, qe ;

3° Les plans tangents que nous venons d'obtenir étant coupés par trois plans p, p', p'', perpendiculaires à la droite XX′, on aura les trois tangentes GG′, HH′, KK′, qui, étant parallèles à un même plan, seront les directrices du paraboloïde tangent dont le plan directeur psp sera perpendiculaire sur la droite donnée XX′ ;

4° Le plan qui contient le point uu' et la directrice HH′, coupera le plan projetant de la directrice KK′, suivant $(nz, n'z')$, parallèle à la droite $(ux, u'x')$, que l'on a prise avec intention parallèle au plan vertical qX.

L'intersection de la droite $(n'z')$ avec la directrice K′ sera un point z', z, qui, étant joint avec u, u', donnera la droite YY′ pour la seconde directrice du paraboloïde tangent;

5° Les deux directrices XX′, YY′ et le plan directeur du paraboloïde étant déterminés, le reste des opérations se fera comme au n° 912.

On remarquera que les projections verticales XX′, YY′ des deux directrices du paraboloïde sont parallèles entre elles et perpendiculaires au plan directeur $p''sp''$, ce qui aura lieu dans toutes les questions du même genre, quels que soient les bases et le pas des hélices, pourvu que l'on ait adopté la même disposition d'épure.

En effet, le paraboloïde tangent est indépendant de la position des points par lesquels on a construit les trois tangentes DD′, EE′, FF′. Or, si nous supposons que le point mm' soit reculé jusqu'à l'infini sur la génératrice XX′, le rayon om (*fig.* 504) deviendra parallèle au plan vertical de projection, et l'angle que la tangente fait avec le plan horizontal devant diminuer à mesure que le point de tangence s'éloigne de l'axe, il en résulte qu'au moment où ce point sera reculé jusqu'à l'infini, le plan tangent correspondant sera perpendiculaire au plan vertical de projection, et la génératrice du paraboloïde devra s'appuyer sur une droite située à *l'infini* dans le plan projetant $X'q'q$, qui sera par conséquent le second plan directeur du paraboloïde auxiliaire (815).

916. Le lecteur pourra s'exercer à résoudre la même question pour le cas où l'une des trois hélices directrices

de la surface primitive serait remplacée par la verticale C,C′ (*fig.* 503 et 505).

Si alors la droite donnée XX′ était horizontale, on reviendrait à la question que nous avons résolue au n° 910.

917. Tout ce que nous venons de dire sur l'emploi d'un hyperboloïde ou d'un paraboloïde tangent ne s'applique qu'aux surfaces gauches.

En effet, si la surface proposée était développable, le paraboloïde qui la toucherait suivant une de ses génératrices deviendrait un plan tangent, et le paraboloïde normal serait un second plan perpendiculaire au premier.

C'est ce qui a lieu pour les surfaces cylindriques et coniques dont les surfaces normales sont des plans toutes les fois qu'elles doivent contenir une génératrice.

Sections des surfaces réglées.

918. *Section par un plan perpendiculaire au plan de projection.*

La surface étant donnée par ses directrices, on établira sur l'épure un certain nombre de génératrices, et l'on cherchera l'intersection de chacune d'elles par le plan donné. Ainsi (*fig.* 507, *Pl.* 78) la courbe $b'u'$ est l'intersection de la surface réglée A,A′, par le plan p, perpendiculaire au plan horizontal.

919. On obtient de la même manière la courbe dx, provenant de l'*intersection par une surface cylindrique perpendiculaire au plan vertical.*

920. *Intersection par une ligne.* Si la ligne donnée aa' est droite, on emploiera comme surface auxiliaire (640) un de ses plans projetants, et l'on obtiendra le point mm'.

Si la ligne est courbe, comme cc', on fera usage de la surface cylindrique projetante.

921. Si l'on donnait la projection m d'un point de la surface AA', et qu'il fallût obtenir sa projection verticale, on construirait dans le voisinage de ce point quelques génératrices; puis coupant la surface par un plan p perpendiculaire au plan horizontal et contenant le point donné, on construirait la courbe $b'u'$ sur laquelle devrait se trouver la projection verticale du point demandé.

Si ensuite par le point mm', ainsi déterminé, on voulait construire une génératrice de la surface, on agirait comme aux n^{os} (812, 815).

922. *Section par un plan oblique.* Il suffit de chercher l'intersection du plan donné p (*fig.* 508) par chacune des génératrices de la surface, ce qui ramène la construction à celle du n° 70. On a fait usage de plans perpendiculaires au plan vertical.

Intersection des surfaces réglées et des cylindres, cônes et surfaces de révolution.

923. *Intersection d'une surface réglée et d'un cylindre.* On coupera les deux surfaces par des plans parallèles au cylindre et contenant les génératrices de la surface réglée. Ainsi (*fig.* 509) par un point nn', pris où l'on voudra sur la droite aa', génératrice de la surface réglée AA', on construira une ligne cc' parallèle au cylindre BB'; les deux droites aa', cc', détermineront un plan p parallèle au cylindre, et qui le coupera suivant une de ses génératrices bb', et le point uu', intersection de aa' et de bb', appartiendra aux deux surfaces et fera partie de la courbe d'intersection. On obtiendra par ce moyen autant de points que l'on voudra.

Cela revient à construire (378) l'intersection du cylindre par chacune des génératrices de la surface réglée.

924. *Intersection d'une surface réglée avec un cône.*

Un plan p (*fig.* 510), passant par le sommet du cône et par la droite aa', génératrice de la surface réglée, coupera le cône suivant une droite bb', et l'intersection de aa' avec bb' fera connaître le point uu', commun aux deux surfaces. Chaque point de la courbe s'obtiendra par une construction semblable.

925. *Intersection d'une surface réglée avec une surface de révolution.*

Un plan horizontal p (*fig.* 511) coupera la surface réglée suivant une courbe aa', et la surface de révolution suivant le parallèle bb'; et les deux lignes aa' et bb' se couperont en deux points mm', nn', appartenant à la courbe d'intersection des deux surfaces.

On agira de la même manière pour trouver d'autres points de la courbe.

On pourrait dans certains cas employer avec succès, comme surfaces auxiliaires, des *cylindres circulaires droits*, ayant le même axe que la surface de révolution.

926. *Intersection de deux surfaces réglées.*

Un plan vertical p, contenant la génératrice aa' (*fig.* 512), coupera la seconde surface réglée, suivant une courbe $bc, b'c'$, facile à construire (918), et l'intersection de cette courbe avec la droite aa' déterminera un point mm', commun aux deux surfaces.

On recommencera cette construction qui se réduit à chercher l'intersection de la surface réglée BB' par chacune des génératrices de l'autre surface (920).

Raccordement des surfaces réglées.

927. La ligne d'intersection de deux surfaces réglées est en général une courbe à double courbure (*fig.* 513, *Pl.* 79). Mais dans quelques cas particuliers elle peut être plane.

928. Les deux surfaces représentées sur la *fig.* 514 se coupent suivant la droite *ac*, qui est une génératrice commune.

929. Enfin, les deux surfaces AA′ et BB′ (*fig.* 515) se touchent, et par conséquent se raccordent suivant la génératrice commune *ac*.

930. Deux surfaces réglées se raccorderont toujours toutes les fois qu'elles seront touchées dans toute l'étendue d'une génératrice commune, par un même hyperboloïde, à une nappe (*fig.* 517), car il est évident qu'un plan tangent à l'hyperboloïde en un point quelconque de la génératrice *ac*, toucherait également à ce point les deux surfaces A et B, de sorte que ces deux surfaces étant touchées par les mêmes plans, suivant toute l'étendue de la génératrice commune, elles seront tangentes l'une à l'autre, et se raccorderont suivant cette ligne.

931. En général (*fig.* 516), *si par trois points* m, n, v, *pris à volonté sur une droite quelconque* X, *on conçoit trois plans* p, p′, p″, *dirigés comme on voudra dans l'espace; si ensuite, par chacun des trois points* m, n, v, *on construit autant de courbes que l'on voudra, tangentes aux plans* p, p′, p″, *ou situées dans ces plans, toutes les surfaces réglées qui auront pour directrices trois quelconques de ces courbes, se toucheront suivant toute l'étendue de la génératrice commune* X, car elles seront touchées dans toute la longueur de cette même droite par tous les hyper-

boloïdes ou paraboloïdes qui auraient pour directrices trois droites quelconques, menées dans les plans p, p' et p'', par les points m, n, ν.

932. Les surfaces réglées qui se raccordent peuvent avoir une ou deux directrices communes et ne différer que par la troisième directrice.

933. Si les deux surfaces réglées dont il s'agit étaient développables, tous les hyperboloïdes et paraboloïdes tangents se réduiraient à un seul plan qui toucherait les deux surfaces, suivant toute la longueur de la génératrice de raccordement.

934. Il résulte de là qu'une surface réglée gauche ne peut pas se raccorder avec une surface développable suivant une génératrice.

935. Enfin deux surfaces réglées ne peuvent se raccorder suivant une génératrice, qu'autant qu'elles sont toutes deux développables ou toutes deux gauches.

936. Lorsqu'une surface courbe quelconque servira de directrice à une surface réglée, ces deux surfaces se raccorderont toujours dans toute l'étendue de la ligne qui contient les points suivant lesquels les génératrices de la surface réglée s'appuient sur la surface directrice.

937. En général, si par tous les points d'une courbe *acu* située sur une surface donnée A (*fig.* 518), on construit des tangentes à cette surface, quelle que soit la direction que l'on aura adoptée pour ces tangentes, le lieu de l'espace qui les contiendra sera une surface réglée, se raccordant avec la surface donnée, suivant la courbe qui contient tous les points par lesquels on a construit les tangentes à cette surface.

Supposons, par exemple, que les tangentes 1,1,1... aient été construites de manière à satisfaire à certaines conditions; que les tangentes 2,2,2... aient été obtenues par une autre loi; qu'il en soit de même des tangentes 3,3..., et ainsi de suite. Il résultera de cette construction autant de surfaces réglées qu'il y a de systèmes de tangentes.

Toutes ces surfaces se raccorderont suivant la courbe *acu* qui partagera chacune d'elles en deux nappes. Enfin l'une quelconque des nappes de ces surfaces se raccordera toujours avec la nappe opposée de chacune des autres surfaces.

Supposons, par exemple, que la sphère AA′ (*fig.* 519) ait servi de directrice à la surface réglée BB′, et que la courbe *acu* soit la ligne de contact de ces deux surfaces; représentons par A et A′ les deux parties de la sphère, et par B et B′ les deux nappes de la surface réglée; la combinaison de ces diverses parties produira quatre surfaces différentes, savoir:

1° La surface $A+A'$.
2° La surface $A+B'$.
3° La surface $A'+B$.
4° La surface $B+B'$.

938. *Pénétration rectangulaire.* Au lieu de chercher à raccorder deux surfaces, on pourra demander qu'elles se coupent toujours à angle droit en un point quelconque de la ligne d'intersection.

Dans ce cas, étant donnée une première surface et la ligne suivant laquelle elle doit être coupée par la seconde, on construirait la surface normale qui aurait cette ligne pour directrice; puis, il ne resterait plus qu'à construire une autre surface tangente à la surface normale.

939. En général, *lorsque l'on voudra que deux surfaces se rencontrent partout à angle droit, il faudra faire en*

sorte que l'une d'elles soit tangente à la surface normale de l'autre, suivant toute l'étendue de la ligne d'intersection.

Cette remarque nous sera très-utile dans certaines applications de la géométrie descriptive.

CHAPITRE IV.

SURFACES-ENVELOPPES.

940. Si l'on fait mouvoir une sphère A (*fig.* 520, *Pl.* **80**), de manière que son centre parcoure la ligne *abc*, la surface qui enveloppera toutes les positions successives de cette sphère, et qui les touchera toutes, se nommera une *surface-enveloppe*, ou simplement une *enveloppe*.

Deux positions consécutives de la sphère mobile se couperont suivant un cercle *dh*, dont le plan est perpendiculaire à la courbe parcourue par le centre. Ce cercle sera d'autant plus grand que les positions de la sphère seront plus rapprochées les unes des autres, et dans l'hypothèse d'un mouvement continu, la distance des centres étant infiniment petite, l'intersection de deux sphères consécutives peut être considérée comme un grand cercle. On donne à ce cercle le nom de *caractéristique* de la surface.

Ce n'est ici, au surplus, qu'une manière différente d'envisager la génération des surfaces, car nous pourrions donner au cercle *dh* le nom de *génératrice*, et supposer que son centre se meut suivant la courbe *abc*, tandis que son plan est constamment perpendiculaire à le direction de cette courbe; alors la surface engendrée serait l'*enveloppe* des positions successivement occupées par le cercle générateur.

941. Mais la nature des procédés analytiques qui con-

duisent aux résultats précédents a fait adopter la définition générale suivante.

Une surface-enveloppe est le lieu qui contient toutes les intersections qui résultent des positions successives d'une surface mobile, constante ou variable de forme.

On donne le nom d'enveloppée à la surface mobile dans chacune de ses positions.

L'intersection de deux enveloppées consécutives est la caractéristique de l'enveloppe.

942. Cette définition embarrasse ordinairement les commençants ; ils ont de la peine à reconnaître dans certains cas particuliers de surfaces-enveloppes les caractères par lesquels ils se rattachent au cas général.

Soit, par exemple (*fig.* 521), la surface AA' à laquelle nous avons donné le nom d'ellipsoïde de révolution.

Supposons que l'on fasse mouvoir le sommet d'un cône circulaire suivant la droite *aa'*, et qu'en même temps l'angle au sommet de ce cône varie de telle sorte, que sa génératrice soit toujours tangente à la section méridienne de la surface A; il est certain que deux de ces cônes consécutifs et infiniment rapprochés se couperont suivant un cercle perpendiculaire à l'axe, et la surface de l'ellipsoïde sera le lieu de tous ces cercles.

Or, d'après la définition précédente, les divers cônes mobiles et variables se nommeront enveloppées, et la surface de l'ellipsoïde sera l'enveloppe. Ainsi dans cet exemple la surface-enveloppe est limitée en tous sens, tandis que l'enveloppée ne l'est pas. L'enveloppe se trouve circonscrite par l'enveloppée.

943. Il résulte de là qu'il ne faut attacher aux dénominations précédentes qu'un sens analytique et général, indépendant des applications particulières, et que dans tous

les cas l'*enveloppe est le lieu géométrique des intersections successives de l'enveloppée;* de sorte que l'enveloppe touche ou est touchée par toutes les positions successives de l'enveloppée, mais ne les *enveloppe* pas toujours, suivant le sens que l'on attache vulgairement à ce mot.

Les mêmes réflexions se reproduiront en examinant la génératrice suivante de la même surface A, A'.

944. Supposons une surface cylindrique horizontale ayant pour directrice l'ellipse *o'u';* faisons tourner ce cylindre autour de la verticale *aa';* les positions consécutives du cylindre générateur étant infiniment rapprochées, les intersections successives ne différeront pas de l'ellipse *o'u'* qui sera la caractéristique de l'enveloppe : le cylindre mobile qui est ici l'enveloppée se trouve encore circonscrit à l'ellipsoïde, qui, d'après la définition générale, représente l'enveloppe.

945. *Surfaces développables.* Parmi les cas particuliers de surfaces-enveloppes, nous distinguerons celui où l'enveloppée est un plan (*fig.* 522); alors la caractéristique est une ligne droite, puisqu'elle provient de l'intersection de deux positions consécutives du plan mobile; et l'enveloppe, lieu de toutes ces caractéristiques, est une surface réglée.

946. Cette surface jouit toujours de la propriété d'être développable, car deux caractéristiques consécutives étant les intersections d'un même plan avec celui qui précède et avec celui qui suit, ces deux droites se couperont toujours, ce qui est le caractère des *surfaces développables* (810).

La courbe *mnou*, qui passe par tous les points d'intersection des caractéristiques successives, forme l'*arête de rebroussement.*

Les droites *a*, *b*, *c*, *d*, sont tangentes à la courbe *mnou* (823).

Nous allons étudier quelques exemples particuliers de surfaces-enveloppes.

947. Si l'on fait mouvoir une sphère d'un rayon donné, de manière que son centre parcoure une hélice à base circulaire, on obtiendra une surface-enveloppe connue, dans les arts de construction, sous le nom de *vis Saint-Gilles*.

Si l'on voulait projeter cette surface, il suffirait de construire un certain nombre de positions du grand cercle, dont le plan est perpendiculaire à l'hélice.

Souvent on préfère projeter les hélices parcourues par chacun des points de ce grand cercle.

Soit (*fig.* 523) a' le centre de la sphère mobile, on construira au point a' la tangente de l'hélice (347), et la droite $a's'$ perpendiculaire à cette tangente sera la projection du demi-grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la direction de cette courbe; l'inclinaison du cercle générateur étant connue, il sera facile de le construire, dans telle position que l'on voudra. Les trois lignes ($psq, p's'q'$) sont trois positions principales de ce cercle, et les hélices tracées sur la *fig.* 523 sont celles parcourues par les trois points pp', qq', ss'.

948. L'épure 524 représente une vis Saint-Gilles engendrée par un demi-cercle vertical.

949. Si le pas de l'hélice diminuait, la surface se rapprocherait de celle du tore ou surface annulaire (657).

Plans tangents, surfaces normales.

950. Supposons (*fig.* 526) *qu'en un point* aa' *donné sur la surface, on veuille construire un plan tangent;* on prendra pour première tangente celle qui touche en (aa') le

cercle vertical $m'a'n'$, générateur de la surface donnée. La tangente à l'hélice qui passe par le même point complétera la détermination du plan tangent. En construisant le triangle $a'b'c'$, tel que l'on ait $a'b'$ égal à trois huitièmes du pas de l'hélice, et $b'c'$ égal à trois huitièmes de la circonférence ah, l'hypoténuse $a'c'$ sera la tangente à l'hélice, rabattue sur le plan p'' parallèle au plan vertical; le point ν', où cette tangente perce le plan horizontal, étant projeté en ν et ramené en u, on aura au pour la projection horizontale de cette tangente; de sorte que la droite ou sera la trace horizontale du plan tangent. Quant à la trace verticale, elle sera parallèle à la droite $a'o'$.

951. La droite $(an, a'n')$ menée par le point aa', perpendiculaire au plan tangent, sera une *normale*.

952. Si par chaque point de l'hélice $ash, a's'h'$, on construit une normale, la surface qui contiendra toutes ces lignes sera une *surface normale*.

Il n'est pas nécessaire pour chaque normale de construire les traces du plan tangent. En effet, par suite de la forme régulière et constante de la surface, quelle que soit la hauteur du point de tangence, les tangentes, le plan tangent et la normale conserveront toujours la même position relative; de sorte que les projections horizontales de ces lignes ne changeront pas et ne feront que tourner du point A. De là résulte cette construction.

On abaissera du centre une droite Az, perpendiculaire sur la projection de la première normale, et décrivant la circonférence zxy, toute tangente à cette courbe sera la projection horizontale d'une normale. On élèvera la perpendiculaire zz' jusqu'à la projection verticale de la normale $a'n'$, et l'on construira l'hélice $(zx, z'x')$, sur laquelle on déterminera les points où elle est rencontrée par chacune des normales.

La surface que l'on obtiendra sera *réglée :* la génératrice s'appuie sur les deux hélices $(ash, a's'h')$ $(zx, z'x')$ et touche constamment le cylindre qui contient la dernière.

953. Si l'on voulait donner à toutes les normales la même longueur, on les terminerait aux points où elles rencontrent un cylindre droit ayant pour trace horizontale une circonférence telle que nd.

954. *Développement.* Dans l'industrie, beaucoup de corps sont terminés par des feuilles minces en tôle, ferblanc, carton, etc.; souvent même, quoique la matière soit solide, on en détermine le contour en appliquant sur les faces planes ou courbes des figures découpées auxquelles on fait prendre la courbure de ces faces, et que l'on nomme *panneaux* ou *patrons*. C'est donc un problème important que celui qui a pour but d'obtenir le développement des surfaces.

Nous avons déjà vu que les surfaces cylindriques et coniques se développent exactement; cela provient de leur caractère de surfaces développables (810).

Les surfaces de révolution se développeront approximativement en les partageant soit par zones, soit par fuseaux (528, 671).

Il ne nous reste donc plus qu'à trouver un moyen de développer *approximativement* certaines portions de surfaces réglées ou enveloppes.

Il est évident que cela revient, étant donnée une certaine surface ou portion de surface, à trouver *une surface développable* qui diffère le moins possible de la surface proposée.

955. Je prendrai pour exemple la surface normale que nous venons de construire dans l'exemple précédent.

Soient les mêmes données (*fig.* 527), on opérera comme précédemment pour obtenir les deux premières normales $(an, a'n')$ $(cu, c'u')$; ensuite on construira les deux cordes $(ac, a'c')$ $(co, c'o')$, etc.

Cela posé, concevons un plan par la normale $(an, a'n')$ et la corde $(ac, a'c')$, un second plan par la seconde normale et la seconde corde, un troisième plan par la troisième normale et la troisième corde, etc. On pourra considérer tous ces plans comme les positions successives d'un plan mobile qui dans son mouvement engendrerait une surface développable (946) différant peu de la surface donnée; en effet, la surface normale se compose de petits quadrilatères gauches tels que $(ancn)$ $(a'n'c'n')$, et trois angles de chacun de ces quadrilatères étant situés dans le plan mobile correspondant, il y aurait peu de différence entre les deux surfaces, surtout dans le voisinage de l'hélice $(aco, a'c'o')$, ce qui est essentiel.

Si les arcs $(ac, a'c')$ $(co, c'o')$ devenaient infiniment petits, le plan mobile serait dans chaque position tangent à la surface normale, et l'on obtiendrait une surface développable tangente à la surface normale dans toute l'étendue de l'hélice $(aco \ldots a'c'o')$ (940).

Pour obtenir cette surface on construira un plan horizontal p. Ce plan coupe le premier plan mobile suivant $(ns, n's')$, et le second suivant $(uz, u'z')$; et l'intersection xx' de ces deux droites appartient à la droite $(cx, c'x')$ qui sera la caractéristique de l'enveloppe cherchée.

En construisant un certain nombre de projections horizontales de cette ligne, et opérant du reste comme nous l'avons fait pour la normale, on obtiendra facilement les projections verticales correspondantes.

956. La surface que nous venons de construire est connue sous le nom d'*hélicoïde développable* (826) ; chacune de ses génératrices est tangente à une hélice ayant pour base le cercle *dh*.

La figure 528 représente le développement de la surface précédente ; pour l'obtenir on construira chaque quadrilatère dans sa véritable grandeur ; les courbes $a''y''$, $b''t''$, sont des arcs de cercle (830).

957. En général, *pour développer approximativement une surface quelconque, on la partagera en zones de peu de largeur ; puis, après avoir construit des plans tangents par tous les points de la courbe moyenne de chaque zone, on développera la surface-enveloppe résultant de cette suite de plans tangents.*

Sections et intersections.

958. Nous n'entrerons pas ici dans le détail des constructions nécessaires pour obtenir les sections par des plans ou des lignes ; ce ne serait qu'une répétition de ce que nous avons dit sur l'application des principes 634 et 640.

Nous nous bornerons à un seul exemple de pénétration.

959. Supposons (*fig.* 525) que le demi-cercle *psq* soit pris pour la génératrice d'une vis Saint-Gilles ; on veut avoir la courbe de pénétration de cette surface par le conoïde dont les directrices sont la verticale uu', la demi-ellipse ($kdh, k'd'h'$), et dont la génération serait parallèle au plan horizontal, le rayon vertical *od* de l'ellipse étant égal au rayon du cercle *abc*.

Parmi tous les moyens qui résultent du principe général 635, on peut employer le suivant.

Un cylindre vertical à base circulaire C coupera la surface de la vis suivant une hélice a', et la surface du conoïde suivant une courbe b', et les intersections de a' et b' donneront les points m de la courbe; on recommencera pour avoir d'autres points.

La courbe b' se construit en élevant des perpendiculaires par les points suivant lesquels la trace du cylindre C coupe les projections horizontales des génératrices du conoïde.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

CHAPITRE I[er].

	Pages.
…IONS PRÉLIMINAIRES	9

CHAPITRE II.

… la lign… droite et du plan	21
… les lignes et des plans	31
…e des lignes et des plans	37
…pendicularité des lignes et des plans	40

CHAPITRE III.

Rabattements	52

CHAPITRE IV.

Angles des lignes	63
Angles des lignes et des plans	65
Angles des plans	68

CHAPITRE V.

Polyèdres, projections	85
Projections obliques	90
Développements	93
Section des polyèdres	95
Intersection des polyèdres	98

LIVRE SECOND.

CHAPITRE I^er.

Pages.
Lignes courbes. 104
Courbure, normale, tangente. 107
Développantes, développées. 108
Courbes à plusieurs centres. 111
Lieux géométriques. 114
Construction des tangentes. 118
Ellipse. 122
Parabole. . . . . [illegible]
Hyperbole. . . . . [illegible]
Cycloïde. . . . . [illegible]
Épicycloïde. . . . . [illegible]
Spirale. . . . . [illegible]

CHAPITRE II.

Surfaces cylindriques. . . . . [illegible]
Cylindre projetant, courbes à double courbure. . . . . [illegible]
Hélices. 153
Cylindre oblique. 158
Section droite, développement. 164
Plan parallèle au cylindre. 167
Plan tangent au cylindre. 168
Intersection du cylindre par une droite. 170
Section du cylindre par un plan oblique. 171
Cylindre circulaire. 184
Intersection des cylindres. 189

CHAPITRE III.

Surfaces coniques. 196
Développement. 201
Plan passant par le sommet du cône. 203
Plan tangent au cône. 204
Intersection du cône par une droite. 205
Section du cône par un plan oblique. 206

Pages.
Cône elliptique. 208
Cône circulaire. 214
Intersection des cônes et cylindres. 221

CHAPITRE IV.

La sphère. 226
Méridiens et parallèles. 227
Sections perpendiculaires aux plans de projection. 231
Plans tangents à la sphère. 234
Intersection de la sphère par une droite. 249
a sphère par un plan oblique. 251
les sphères, cylindres et cônes. 255
phérique. 265

LIVRE TROISIÈME.

CHAPITRE Ier.

générales sur les surfaces courbes. 270

CHAPITRE II.

Surfaces de révolution. 285
Parallèles. 286
Méridiens. 288
Méridien principal. 289
Plans tangents aux surfaces de révolution. 305
Projections obliques des surfaces de révolution. 335
Intersection par une droite. 342
Intersection par une courbe. 344
Section par un plan oblique. 345
Intersection des surfaces de révolution et des cylindres, cônes et sphères. 347

CHAPITRE III.

Surfaces réglées. 359
Surfaces réglées qui ont trois directrices. 360

Pages.
Surfaces réglées qui ont un plan directeur. 363
Surfaces développables. 365
Hyperboloïde à une nappe et paraboloïde hyperbolique. . 371
Double génération de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique. 377
Plans tangents aux surfaces réglées. 384
Surfaces normales. 394
Sections et intersections des surfaces réglées. 410
Raccordement. 413

CHAPITRE IV.

Surfaces-enveloppes. . . . . 41[illegible]

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

[illegible]
[illegible]
[illegible]
Double [illegible]
[illegible]
Plaies [illegible]
Sutures [illegible]
Sutures [illegible]
[illegible]

CHAPITRE [illegible]

[illegible]

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.