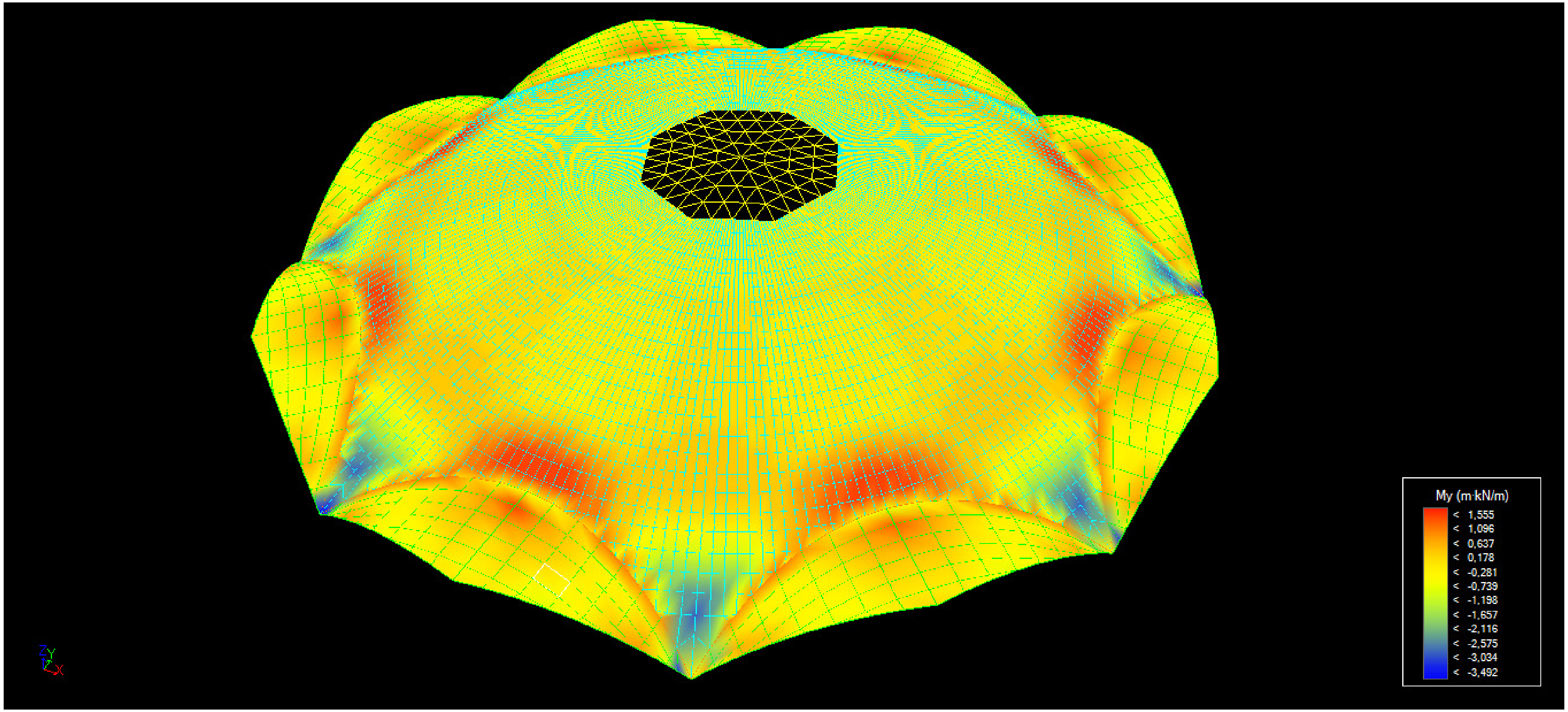
Introducción al método matricial de las rigideces

MÉTODOS MATRICIALES

Organizan la información del modelo estructural en MATRICES

↓

ORDENADORES: Cálculo por el Método de los Elementos Finitos



MÉTODOS MATRICIALES

Características:

- Generalidad
- (Des)conocimiento
- Demanda computacional
- Automatización

$$
\mathbf{K} = 10^6 \left[\begin{array}{ccc|ccc|cccc|cc|cc}
2{,}16 & 0 & 3{,}06 & 1{,}53 & -1{,}53 & 3{,}06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 211{,}6 & 0 & 149{,}6 & 149{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3{,}06 & 0 & 5{,}762 & 2{,}161 & -2{,}161 & 2{,}881 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1{,}53 & 149{,}6 & 2{,}161 & 705{,}4 & 104{,}7 & 2{,}161 & -299{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -299{,}2 & 0 \\
-1{,}53 & 149{,}6 & -2{,}161 & 104{,}7 & 114{,}5 & 0{,}895 & 0 & 0 & -6{,}11 & 6{,}11 & 0 & 0 & 0 & -1{,}53 \\
3{,}06 & 0 & 2{,}881 & 2{,}161 & 0{,}895 & 20{,}02 & 0 & 0 & -6{,}11 & 4{,}074 & 0 & 0 & 0 & 3{,}06 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -299{,}2 & 0 & 0 & 299{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 299{,}2 & 0 & 0 & -299{,}2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -6{,}11 & -6{,}11 & 0 & 0 & 306{,}888 & -3{,}06 & 0 & -1{,}53 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}11 & 4{,}074 & 0 & 0 & -3{,}06 & 14{,}259 & -0 & -3{,}06 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -299{,}2 & 0 & -0 & 299{,}2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}53 & -3{,}06 & 0 & 1{,}53 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -299{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 299{,}2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}53 & 3{,}06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}53
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\hat{u}^n_{1x} \\ \hat{u}^n_{1y} \\ \theta^n_1 \\ \hline
u_{2x} \\ u_{2y} \\ \theta_2 \\ \hline
u^{23}_{3x} \\ u^{34}_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \\ \hline
u_{4x} \\ u_{4y} \\ \hline
u_{5x} \\ u_{5y}
\end{array}
$$

MÉTODOS MATRICIALES

Existen dos métodos "hermanos":

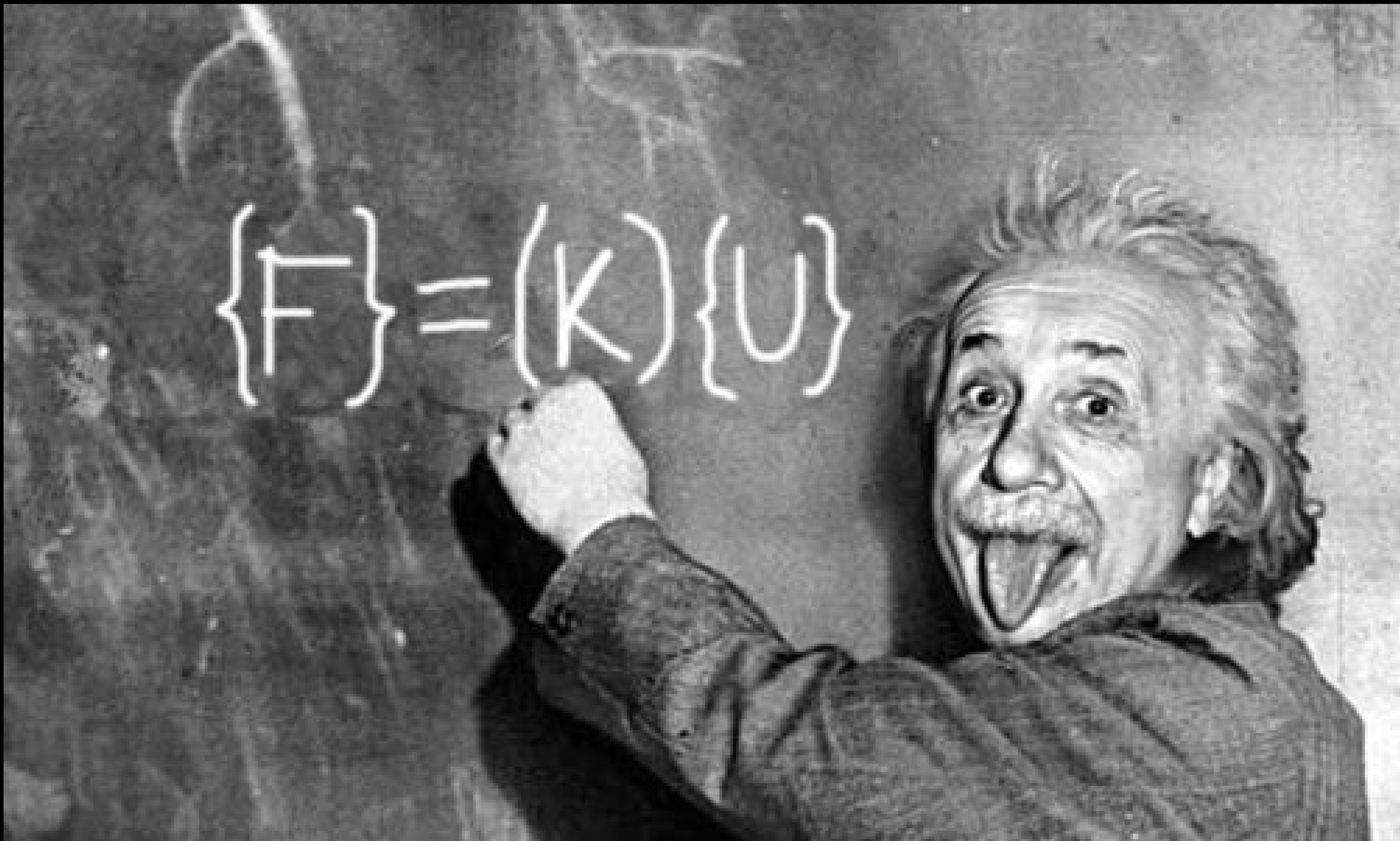
1 - Método de las flexibilidades
- Incógnita: **ESFUERZOS**
- Depende de hiperestatismo ✗
- No sistematizable ✗✗

2 - Método de las rigideces
- Incógnita: **DESPLAZAMIENTOS**
- No depende de hiperestatismo ✓
- Sistematizable ✓✓

OBJETIVO:

OBTENER DESPLAZAMIENTOS
A PARTIR DE LAS FUERZAS
MEDIANTE UNA RIGIDEZ

$$\{F\} = (K)\{U\}$$


{F}=(K){U}

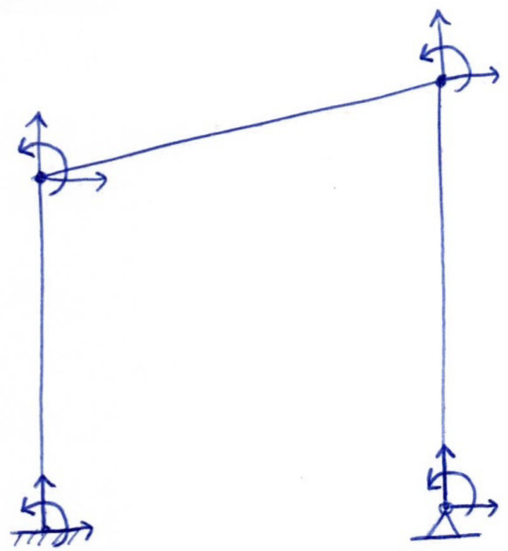
MODELIZACIÓN DEL PROBLEMA

$$\{F\} = (K)\{U\}$$

Se necesita discretización en GDL.

Grado de libertad (GDL):
Número de **parámetros independientes** que caracterizan la estructura

Cada GDL tiene asociado una **fuerza** y un **desplazamiento**
"Fuerzas" = Fuerzas o Momentos
"Desplazamientos" = Desplazamiento o giro

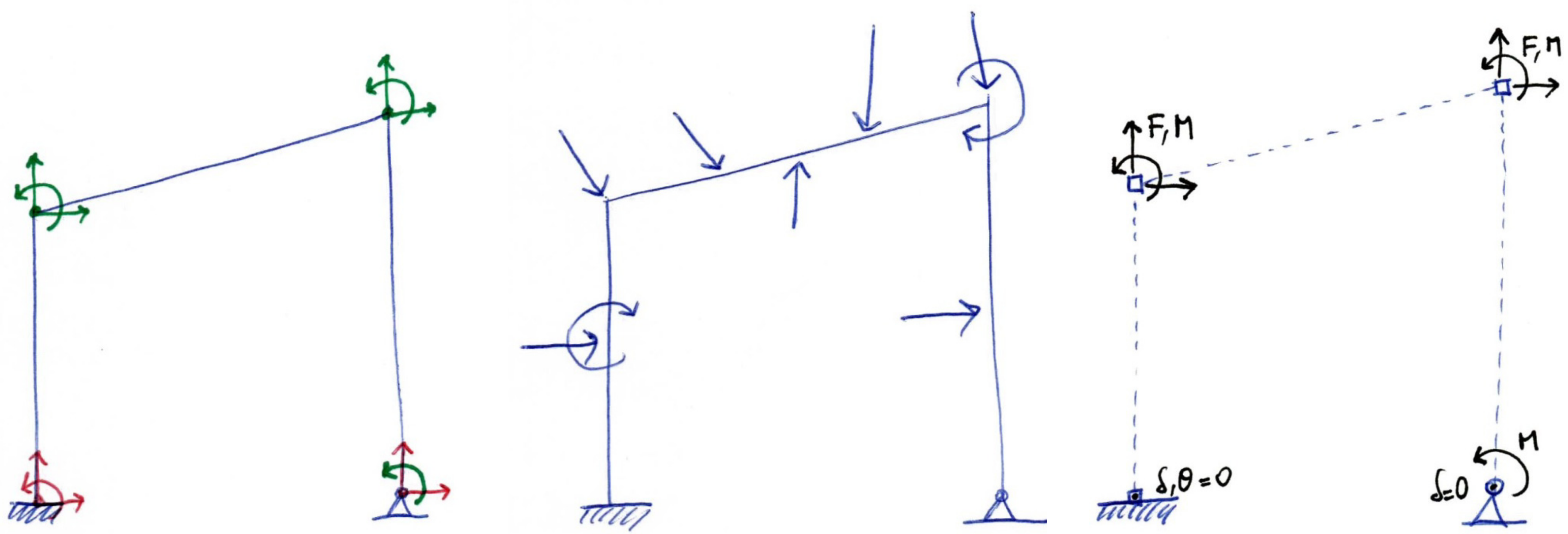


MODELIZACIÓN DEL PROBLEMA

$$\{F\} = (K)\{U\}$$

GDL INTERNOS (en nudos):
Desplazamientos **desconocidos**
Fuerzas **conocidas** (fuerzas aplicadas en nudos y transmitidas por barras)

GDL EXTERNOS (en apoyos):
Desplazamientos **conocidos** (coaccionados)
Fuerzas **desconocidas** (reacciones)



FUNDAMENTOS

$$\{F\} = (K)\{U\}$$

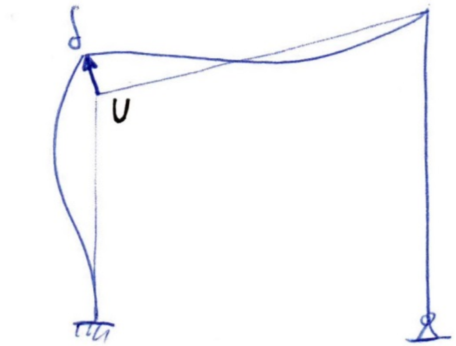
Estructuras HIPERESTÁTICAS:
Incógnitas > Ecuaciones de equilibrio

Ecuaciones adicionales:
- Compatibilidad de movimientos
- Comportamiento del material

FUNDAMENTOS

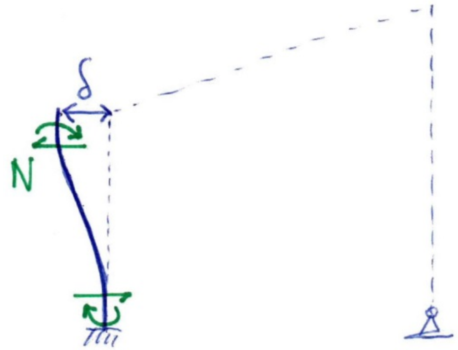
$$\{F\} = (K)\{U\}$$

Ecuaciones de
COMPATIBILIDAD



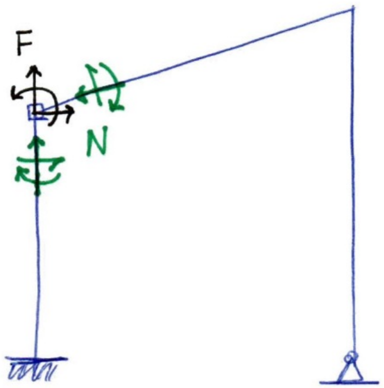
$$u_{i1} = \ldots = u_{in} = U_i \quad \Rightarrow \quad \delta = f_1(U)$$

Ecuaciones de
COMPORTAMIENTO



$$\sigma = E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad N = f_2(\delta)$$

Ecuaciones de
EQUILIBRIO



$$\sum Fuerzas = 0 \quad \Rightarrow \quad F = f_3(N)$$

FUNDAMENTOS

$$\{F\} = (K)\{U\}$$

Ecuaciones de
<u>COMPATIBILIDAD</u>

$$\delta = f_1(U) \quad \Rightarrow \quad \{\delta\} = (B)\{U\}$$

Ecuaciones de
<u>COMPORTAMIENTO</u>

$$N = f_2(\delta) \quad \Rightarrow \quad \{N\} = (k)\{\delta\}$$

Ecuaciones de
<u>EQUILIBRIO</u>

$$F = f_3(N) \quad \Rightarrow \quad \{F\} = (H)\{N\}$$

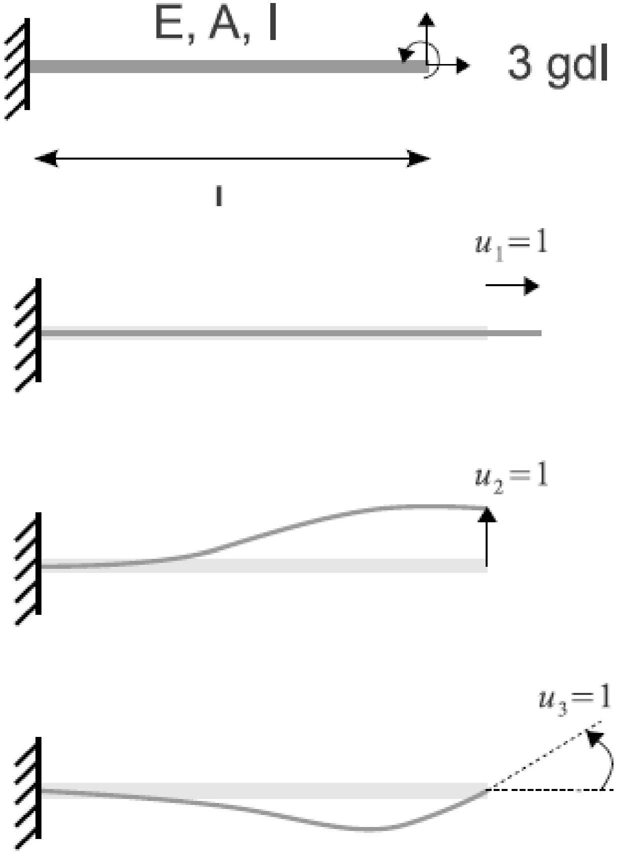
$$\{F\} = \underset{(K)}{\underline{\underline{(H)(k)(B)}}}\{U\} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\{F\} = (K)\{U\}}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ

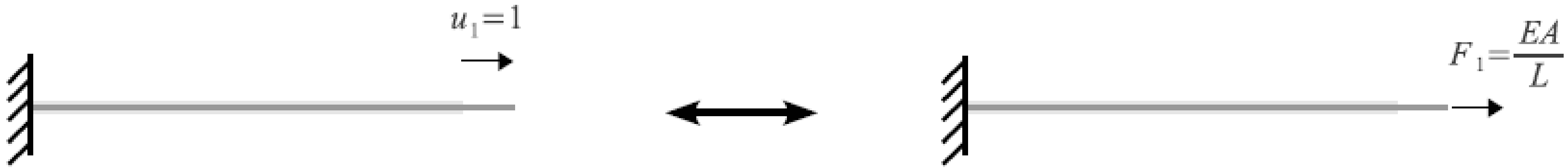
METODOLOGÍA

Obtención directa de (K):
MOVIMIENTOS UNITARIOS

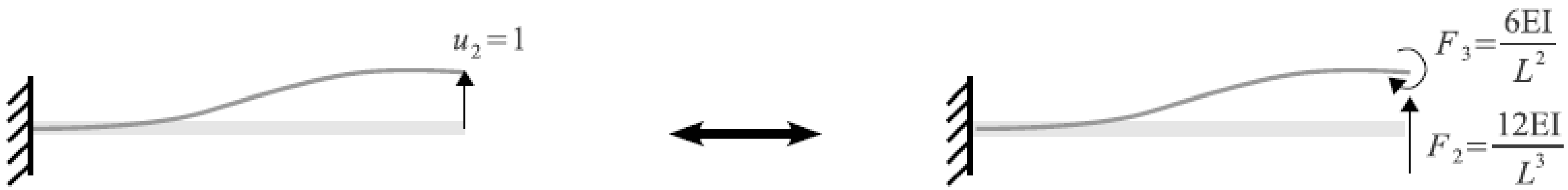


$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

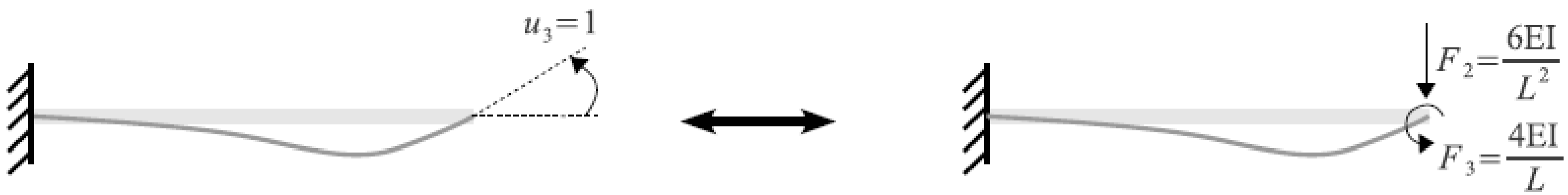
K_{ij}: Fuerza que aparece en i cuando muevo j



$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \end{pmatrix} \qquad \text{(a) } u_1 = 1$$



$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{6EI}{L^2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \\ K_{32} \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } u_2 = 1$$

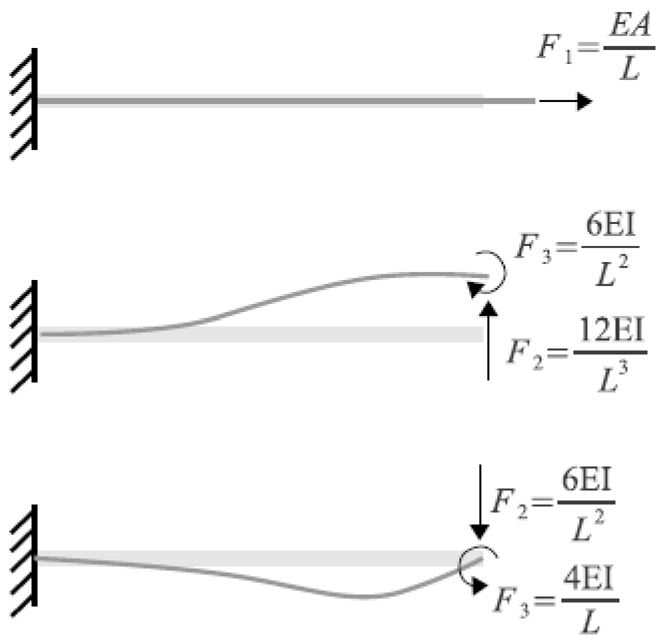


$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{13} \\ K_{23} \\ K_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{(c) } u_3 = 1$$

METODOLOGÍA

Obtención directa de (K):
MOVIMIENTOS UNITARIOS

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

METODOLOGÍA

Obtención directa de (K):
MOVIMIENTOS UNITARIOS