Trazado de las curvas de oración en los cuadrantes horizontales en la *Risāla fī ʿilm al-*ẓitāl, de Ibn al-Raqqām *

JOAN CARANDELL **

I. *INTRODUCCION*

En los primeros tiempos del Islam no se había establecido una unidad de opiniones sobre los deberes de los creyentes. Más tarde, a partir de indicaciones del Corán, se desarrolló una liturgia basada en cinco obligaciones principales denominadas *arkān al-islām,* «pilares del Islam», que son: la profesión de fe, la oración, la limosna, el ayuno y la peregrinación a La Meca.

Esta falta de unificación inicial dio lugar a una cierta disparidad de criterios que fueron adoptados por las diferentes escuelas jurídicas.

El problema es aún mayor en lo que se refiere a aquellos preceptos que para ser realizados requerían la observación de fenómenos astronómicos. Ello dió lugar a la aparición de una astronomía religiosa, denominada *mīqāt,* que se desarrolló en el seno de las grandes mezquitas a cargo de astrónomos especializados *(muwaqqitūn)* (1).

En un principio, las reglas que regían tales preceptos fueron definidas de manera inprecisa y restringidas a las latitudes de la península arábiga. Posteriormente, con la expansión del Islam y el gran desarrollo de la astronomía, se fijaron estas reglas de manera más precisa y general y se hicieron aplicables a todas las latitudes de los territorios conquistados.

La oración canónica que debía realizar el creyente, denominada *salāt* (2), constituye un ejemplo de lo expuesto y, más concretamente, las dos oraciones diurnas del *ẓuhr* (inicio de la tarde) y del *ʿaṣr* (tarde). Los tiempos en los que debían ser realizadas dichas oraciones se determinaban, desde un principio, en función de la longitud de la sombra que

* El presente trabajo ha sido realizado gracias a una subvención de la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica.

** Departamento de Arabe. Universidad de Barcelona. España.

(1) Véase WENSINCK, A. J. *Mîkât.* En: *Enciclopédie de l'Islam.* (1.ª edición).

(2) WENSINCK, A. J. *Ṣâlât.* En: *Enciclopédie de l'Islam.* (1.ª edición).

DYNAMIS
Acta Hispanica ad Medicinae Scientiarumque Historiam Illustrandam. Vol. 4, 1984, pp. 23-32.
ISSN: 0211-9536.

proyectaba un objeto. Ya la tradición referente al arcángel Gabriel (3) indica que se inicia el período del *ẓuhr* cuando la sombra proyectada por un objeto igualaba a la longitud de éste. Esto tendrá lugar cuando la altura del Sol sea de 45º, lo cual no siempre puede cumplirse para determinadas latitudes y épocas del año (4).

Con la expansión del Islam hacia otras latitudes se definieron nuevas reglas que fueran independientes de la latitud. La mayoría de ellas (5) hacían referencia al incremento de la sombra referida a la sombra proyectada al mediodía. Es decir:

$$s = S_0 + s$$

siendo S_0 la longitud de la sombra proyectada por un objeto de altura g al culminar el Sol.

Con el fin de que dicho incremento fuera independiente de la longitud g del objeto, se tomó en función de dicha longitud:

$$s = S_0 + r \cdot g$$

Así, el incremento de la sombra era un múltiplo o un submúltiplo de la longitud g del objeto que la proyectaba.

El texto que estudiamos aquí pertenece a un tratado de construcción de cuadrantes solares del astrónomo tunecino de origen andalusí Ibn al-Raqqām (*m.* 1315), que trabajó en Granada al servicio de la dinastía de los nazaríes a finales del siglo XIII (6).

En este tratado *(Risāla fī ʿilm al-ẓilāl)* hay un capítulo (Capítulo 21) en donde se expone la manera de trazar las curvas de oración correspondientes al *ẓuhr* y al *ʿaṣr* en el cuadrante horizontal, cuyo gnomon es perpendicular al plano y que determina horas temporales (7).

En el texto, se definen los tiempos del *ẓuhr* y del *ʿaṣr* como sigue:

	ẓuhr (mediodía)	ʿaṣr (tarde)
Desde	$s = S_0 + 1/4\ g$	$s = S_0 + g$
Hasta	$s = S_0 + g$	$s = S_0 + 2\ g$

(3) KENNEDY, E. S. (1983). Al Bīrūnī on the Muslim Times of Prayer. En: *Studies in the Islamic exact Sciences.* Beirut, American University of Beirut, p. 304; KENNEDY, E. S. (1976). *The Exhaustive Treatise on Shadows by Abū al-Rayḥān al-Bīrūnī: Translation & Commentary.* 2.º vol., Aleppo, p. 134.

(4) KENNEDY, E. S. (1983), *op. cit.,* p. 304.

(5) KENNEDY, E. S. (1983), *op. cit.,* p. 302.

(6) El tratado está en el Manuscrito de la Biblioteca de El Escorial 918, 11 (fols. 68 v-82 v).

(7) Una hora temporal es la doceava parte del arco diurno, independientemente de la duración de éste.

Esta definición no se corresponde con ninguna de las fuentes citadas por al-Bīrūnī (8), pero es frecuente en las fuentes tunecinas y andalusíes (9).

En el presente trabajo ofrecemos la traducción íntegra de este capítulo (Apéndice 1) y ofrecemos asimismo los posibles orígenes de esta regla.

II. *ORIGENES DEL PROCEDIMIENTO UTILIZADO POR IBN AL-RAQQĀM PARA TRAZAR SUS CURVAS DE ORACION*

El procedimiento utilizado para trazar las curvas de oración que se describe en el texto es claro y apenas necesita una explicación.

La sombra del extremo del gnomon describe a lo largo del día una sección cónica (que para los equinoccios degenera en una recta). Para latitudes medias la cónica que resulta es una hipérbola. Todas estas curvas están comprendidas entre las líneas solsticiales límites (HYY' de Capricornio y ZTT' de Cáncer, en la Figura 1).

Por lo general, en los cuadrantes solares se trazan únicamente las líneas solsticiales y la recta correspondiente a los equinoccios, para evitar el exceso de trazos que dificultarían la lectura del tiempo. Por ello, para determinar las curvas de oración, se hace a partir de tres puntos pertenecientes a estas tres líneas.

La sombra proyectada por el gnomon al culminar el Sol en un día cualquiera de declinación δ es (Figura 2):

$$s = g \cdot \cot(\Phi + \delta) = g \cdot \operatorname{tg}(\Phi - \delta)$$

Así, pues, en la Figura 3, si B es la base del gnomon perpendicular al plano del cuadrante, los segmentos BZ, BK y BH valen, respectivamente:

$$BZ = g \cdot \operatorname{tg}(\Phi - \varepsilon);\ BK = g \cdot \operatorname{tg}\Phi;\ BH = g \cdot \operatorname{tg}(\Phi + \varepsilon)$$

donde ε es la oblicuidad de la eclíptica y Φ la latitud del lugar.

Para el trazado de las curvas del *ẓuhr*, se determinan tres puntos pertenecientes a las tres líneas mencionadas, tales que cumplan que su dis-

(8) KENNEDY, E. S. (1983), *op. cit.*, p. 302.
(9) KING, D. A. (1978). Three Sundials from Islamic Andalusia. *Journal for the History of Arabic Science*, 2, 360.
(10) La curva perteneciente al final del *ʿaṣr* no aparece en la figura del manuscrito.

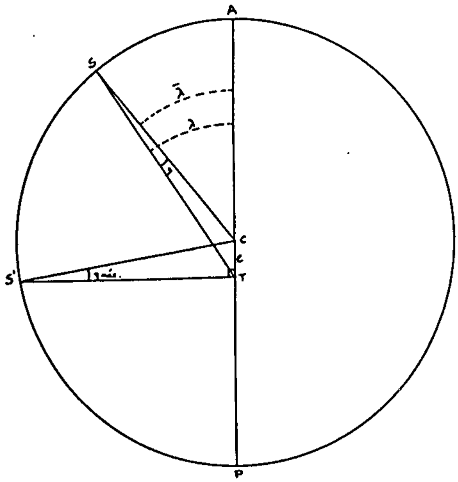

Figura 1

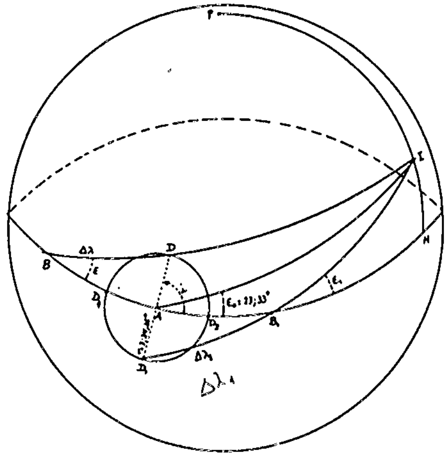

Figura 2

tancia a la base del gnomon sea la extensión de la sombra del mediodía correspondiente, incrementada en un cuarto de la longitud del gnomon. Así, el punto C, perteneciente a Cáncer, se obtiene al incrementar a la sombra del mediodía BZ un cuarto de la longitud del gnomon (segmento BZ). Cuando el extremo de la sombra del gnomon, que en el solsticio recorre la rama de hipérbola ZT, alcanza el punto C, se inicia para este día el tiempo hábil para la oración del *ẓuhr*.

Se procede de la misma manera para los equinoccios (punto F) y para el solsticio de invierno (punto Q). La curva del *ẓuhr* se traza enton-

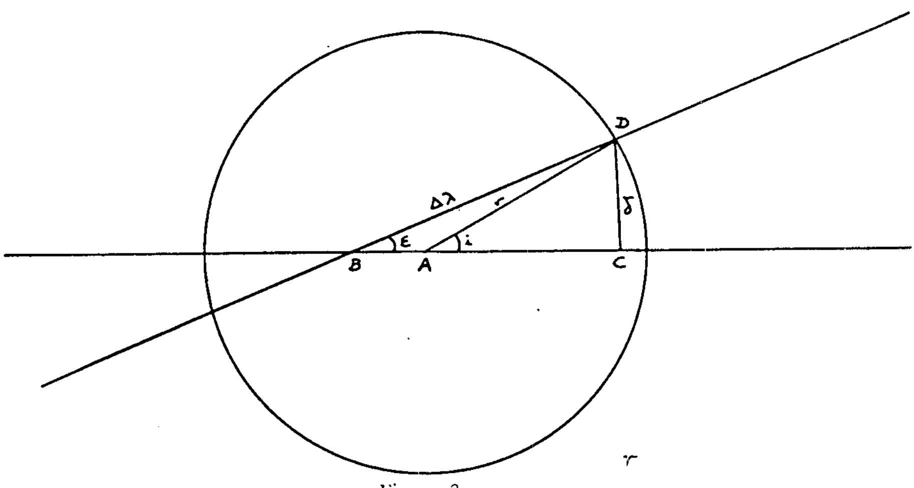

Figura 3

ces por aproximación, haciendo pasar por estos tres puntos un arco de circunferencia (el punto C es el circuncentro de los puntos C, F, Q).

Análogamente, para determinar cada uno de los puntos del *ʿaṣr* (puntos O, P, R) se incrementa a la sombra del mediodía la longitud total del gnomon. Así, el punto O de Cáncer se obtiene incrementando a la sombra del mediodía BZ la longitud del gnomon ZN. Cuando el extremo de la sombra del gnomon alcanza el punto O se inicia el tiempo del *ʿaṣr* para el solsticio de verano. De la misma manera se obtienen los puntos P y R incrementando los segmentos respectivos BK y BH en una longitud igual al gnomon. Trazando un arco de circunferencia de centro, el circuncentro de O, P, R, se obtiene la aproximación de la curva del *ʿaṣr*.

Nótese que en el texto no se definen explícitamente las curvas de oración. Se indica, sin embargo, que los arcos de circunferencia son tan sólo una aproximación y que en realidad las curvas de oración son «secciones» (11).

* * *

KING, en su artículo «A Fourteenth Century Tunisian Sundial», indica que las definiciones de los tiempos de oración derivan de la influencia de la astronomía india (12). Las fórmulas aproximativas que relacionan el incremento de la sombra del mediodía con la hora temporal (13) pudieron haber sido el origen de las definiciones de los tiempos de oración. Una de las citadas es la siguiente:

$$t = \frac{6\,g}{g + \Delta s}$$

siendo g la longitud del gnomon y t el número de horas temporales contadas a partir de uno de los extremos del día. Para los tiempos de oración que nos ocupan se cuentan a partir del ocaso, ya que corresponden a horas de la tarde.

Según esta fórmula la definición del inicio del *ʿaṣr* obedece a la intención de dividir en dos el arco semidiurno de la tarde, ya que para

(11) Posiblemente debiera ser «secciones cónicas». Véase apéndice.

(12) KING, D. A. (1977). A Fourteenth Century Tunisian Sundial For Regulating The Times of Muslim Prayer. En: *Prismata. Festschrift für Willy Hartner.* Wiesbaden, pp. 194-195.

(13) Existen varias fórmulas de aproximación. *Cf.* PINGREE, D. (1965). The Fragments of the Works of al-Fazārī. *Journal of Near Eastern Studies, 24,* 122, y KENNEDY, E. S. (1983). Al-Bīrūnī on the time of day from shadow lengths. En: *Studies in the Islamic Exact Sciences.* Beirut, American University of Beirut, pp. 330-335.

$\Delta s = g$ resulta al sustituir en la fórmula: $t = 3$, es decir la hora temporal tercera de la tarde (hora novena del día).

Ahora bien, la dificultad de interpretación del inicio del *ẓuhr* ($\Delta s =$ $= 1/4\ g$) resulta de que sustituyendo en la fórmula citada:

$$t = \frac{6\ g}{g + 1/4\ g} = 4{,}8$$

que corresponde (tomando las horas temporales a partir del ocaso) a la hora temporal 7,2.

KING sugiere que el factor $r = 1/4$ es debido a que la longitud del gnomon era de 12 unidades, por lo que el incremento de la sombra $r \cdot g$ resultaba un número entero (14).

La importancia de la división de la longitud del gnomon es evidente (15). Esta división permitiría medir con facilidad el incremento de la sombra (tres unidades). Ahora bien, también hay que tener en cuenta la influencia que las escuelas jurídicas pudieran haber ejercido en la definición de los tiempos de oración.

Antes del desarrollo de la astronomía religiosa, el cómputo del tiempo se efectuaba de manera más simple. Las definiciones de los tiempos de oración que nos ocupan pueden corresponder a alguna de estas escuelas.

En la relación que da al-Bīrūnī hay una en particular que puede haber dado origen a estas reglas. Para al-Šāfiʿī los tiempos hábiles del *ẓuhr* y del *ʿaṣr* son los siguientes (16):

	ẓuhr	ʿaṣr
Desde	$s = S_0 +$ algo menos que un codo	$s = S_0 + g$
Hasta	$s = S_0 + g$	...

Estas definiciones parecen corresponderse con las de Ibn al-Raqqām. Unicamente hay que interpretar la definición del inicio del *ẓuhr*. Esta regla en principio no tiene sentido en cuanto a que no se refiere a un incremento relativo a la longitud del cuerpo que la proyecta, sino que da al incremento un valor absoluto (un codo). Lógicamente el tiempo del inicio de la oración del *ẓuhr* no queda definido si no se tiene en cuenta

(14) KING, D. A. (1977), *op. cit.*, p. 194.
(15) Muchas de las fórmulas citadas en la nota 13 dan explícitamente el valor del gnomon ($g = 12$).
(16) KENNEDY, E. S. (1976), *op. cit.*, 2.º vol., p. 135. Al-Bīrūnī, en el texto, aclara la regla dada por al-Šāfiʿī en el vol. 1, p. 218.

que inicialmente se utilizaba como referencia la estatura del propio individuo (17). Si suponemos que la estatura media de un hombre es de 160 cm, su cuarta parte (40 cm) es algo menos que un codo (18). Así, resultaría que el inicio del *ẓuhr* queda definido para cualquier longitud del gnomon como el instante en que la longitud de la sombra excede a la del mediodía en una cuarta parte de su longitud total.

Si ahora tenemos en cuenta que la longitud del gnomon era por lo general de 12 unidades, resultaba que la definición de al-Šāfiʿī era fácilmente aplicable. Por otra parte, la influencia de esta definición parece clara por lo expuesto.

De no ser así, se podría haber tomado otro factor de incremento. De la misma manera que se elige el inicio del *ʿaṣr* en la hora temporal media de la tarde, sería lógico que se eligiera el inicio del *ẓuhr* como la hora temporal entre el mediodía y el inicio del *ʿaṣr*, es decir la hora temporal 1,5 contada a partir del mediodía o la hora 4,5 tomada a partir del ocaso.

De esto resultaría un incremento:

$$\Delta s = r \cdot g = \frac{6\ g}{4{,}5} - g = g \cdot \left(\frac{6}{4{,}5} - 1\right)$$

Por lo que el factor *r:*

$$r = \frac{6}{4{,}5} - 1 = \frac{1}{3}$$

y por tanto r · g resultaría, de igual manera, un número entero.

III. *CONCLUSION*

Las definiciones de los tiempos de oración dadas por las diferentes fuentes responden a unas reglas fijadas en los primeros tiempos del Islam, que como toda religión incipiente tiende a diferenciarse de las que

(17) Es frecuente utilizar como gnomon el propio individuo. *Cf.,* por ejemplo, KENNEDY, E. S. (1976), *op. cit.,* 2.º vol., p. 29; SAMSO, J. (1983). Materiales astronómicos en el Calendario de Córdoba. En: *Nuevos estudios sobre astronomía española en el siglo de Alfonso X.* Barcelona, Instituto de Filología. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, páginas 126-127.

(18) *Cf.* VERNET, J. (1979). La navegación en la Alta Edad Media. En: *Estudios sobre Historia de la Ciencia Medieval.* Barcelona-Bellaterra, p. 411. Sobre metrología, véanse los valores del codo que da VALLVE, J. (1976). Notas de metrología hispanoárabe. El codo en la España musulmana. *Al-Andalus, 2,* XLI, 339-354. Los valores del codo están comprendidos entre 400 y 600 mm.

la rodean. Se prohibía, por ejemplo, la oración en el orto, la culminación y ocaso del Sol.

Posteriormente, la influencia de astronomías más desarrolladas hicieron que estas reglas se generalizaran y devinieran más científicas, empleando métodos y fórmulas del cómputo del tiempo.

Así, las definiciones de la escuela jurídica de al-Šāfiʿī siguen la regla del Corán, que da como inicio del *ẓuhr* el momento en que el Sol declina(21). Cuando la sombra de un objeto al mediodía se ha incrementado en un cuarto de la longitud del cuerpo que la proyecta, el Sol declina, y es lo suficientemente perceptible como para ser tomado como referencia. Por otra parte, dicha definición era compatible con las fórmulas del cómputo del tiempo de tradición india.

APÉNDICES

APENDICE 1

*Traducción del capítulo 21 de la "Risāla fī ʿilm al-ẓilāl", de Ibn al-Raqqām**

Una vez trazadas las rectas horarias en el cuadrante solar paralelo al plano del horizonte y trazadas las tres líneas solsticiales y equinocciales, sea la recta Norte-Sur la recta ABG, y la recta Este-Oeste la recta DBE, y la línea |horaria| del mediodía la recta ZH, y la línea |soslticial| de Cáncer ZT, la de Capricornio HY y la de los equinoccios KL.

Sea el segmento ZM como un cuarto de la longitud del gnomon, y el segmento ZN como todo el gnomon. Hacemos centro en el punto B y con radio BM trazamos un arco de circunferencia que corta a ZT, línea de Cáncer, en el punto C. De la misma manera, tomando B como centro y con radio BN trazamos un arco de circunferencia que corta a ZT en O.

El punto C será el punto de la plegaria del *ẓuhr* y el punto O el final del *ẓuhr* y principio del *ʿaṣr* para el trópico de Cáncer.

Con este procedimiento marcamos sobre el equinoccio y sobre la línea de Capricornio dos puntos: el del *ẓuhr* y el del *ʿaṣr* y son los puntos F, P, Q, R.

Unimos a continuación los tres puntos del *ẓuhr* mediante un arco de circunferencia CFQ, que es el arco del *ẓuhr*. Asimismo unimos los tres puntos del *ʿaṣr* con un arco de circunferencia OPR, que es el arco del *ʿaṣr*. En realidad estas dos curvas son secciones |cónicas| pero dan la sensación de ser arcos de circunferencia.

* Las palabras que no aparecen en el texto van entre rayas verticales. El texto hace referencia a la Figura 1. Las letras o palabras de la figura que no aparecen en el texto han sido añadidas para mayor claridad.

Y si se quiere obtener el arco del final del *ʿaṣr* se incrementa a la sombra del mediodía para cada una de las líneas el doble de la longitud del gnomon, procediendo como se ha indicado (10).

La curva del *ẓuhr* cae sobre la hora octava y la del *ʿaṣr* sobre la décima. Y esto es lo que queríamos exponer.

APENDICE 2

Curvas de oración: expresión matemática

Estudiemos ahora la naturaleza de estas curvas de oración que Ibn al-Raqqām aproxima mediante arcos de circunferencia. El problema ha sido estudiado por Schoy, por lo que nos limitaremos a exponer el planteamiento (19).

El problema consiste en encontrar el lugar geométrico de los puntos P (X, Y) (Figura 3) que cumplen:

a) Pertenecen a la curva descrita por la sombra del extremo del gnomon para cada uno de los días del año.

b) Su distancia a la base del gnomon es la longitud de la sombra proyectada al mediodía más un múltiplo o submúltiplo de la longitud del gnomon.

El Sol describe durante el día una trayectoria circular (aproximadamente). El rayo de Sol, al girar, engendra un cono de revolución cuyo ángulo dependerá de la declinación solar. El rayo de sombra producido por el extremo del gnomon engendra a su vez un cono de revolución inverso y opuesto al originado por el rayo de Sol. Este cono de sombra, si es seccionado por el plano del cuadrante, nos dará una cónica.

La ecuación de dicha cónica viene dada por la ecuación (haciendo $g = 1$):

$$Y^2 \cdot (\mathrm{sen}^2 - \cos^2 \Phi) + X^2 \,\mathrm{sen}^2 + Y \,\mathrm{sen}^2\, 2\, \Phi + \mathrm{sen}^2 - \mathrm{sen}^2 \Phi = 0 \quad \text{(a) (20)}$$

que para los equinoccios ($\delta = 0$) degenera en la recta:

$$Y = \mathrm{tg}\ \Phi$$

Por otra parte, la longitud de la sombra proyectada por el gnomon ($g = 1$) al culminar el Sol es, como hemos visto:

$$S_0 = \mathrm{tg}\ (\Phi - \delta)$$

Por tanto, la segunda condición se expresará:

$$s = \sqrt{X^2 + Y^2} = r + \mathrm{tg}\ (\Phi - \delta)$$

(19) SCHOY, C. (1923). Gnomonick der Araber. *Die Geschichte der Zeitmessung und der Uhren.* Basserman-Jordan. Band, I., Lieferung, F., Leipzig, pp. 42-52.

(20) Ténganse en cuenta los ejes de coordenadas que se toman en esta ecuación. SCHOY, C. (1923), *op. cit.*, p. 49.

es decir, la distancia del punto a la base del gnomon (que es el origen de coordenadas) es la sombra proyectada a mediodía más un múltiplo o submúltiplo del gnomon ($g = 1$).

Dando a r los valores 1/4; 1; 2, obtendremos sucesivamente los puntos correspondientes al inicio del *ẓuhr*, inicio del *ʿaṣr* y final del *ʿaṣr*.

Eliminando de las expresiones (a) y (b) se obtiene la ecuación de las curvas de oración para cada uno de los valores de r citados. La curva que resulta no es una cónica. Schoy estudia esta ecuación para el caso particular del ecuador ($\Phi = 0$) (21). Parece, sin embargo, significativo que Ibn al-Raqqām utilice el término «secciones» y no «secciones cónicas», a diferencia de otros capítulos del tratado.

(21) *Corán,* LII, 48-49.