La mecánica de fluidos y la teoría de la figura de la Tierra entre Newton y Clairaut (1687-1743)

ANTONIO LAFUENTE*

El objeto del presente trabajo es el análisis de la literatura publicada sobre el tema de la figura de la Tierra entre 1687 y 1743. Nuestro estudio se ve acotado por dos fechas cuya importancia ha sido resaltada por numerosos autores. La primera de ellas, 1687, coincide con la publicación de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Newton, obra en la que, como veremos, se aborda el problema desde primeros principios. En efecto, los trabajos empíricos hasta entonces realizados para la valoración de las dimensiones del planeta, adquirieron una dimensión totalmente nueva a partir de esa fecha. El estudio de Newton demostraba la insuficiencia de recursos de la ciencia experimental y el abismo existente entre la precisión que podían asegurar los métodos de la astronomía práctica y las nuevas exigencias planteadas por su mecánica celeste. La segunda fecha propuesta coincide con la publicación por A. C. Clairaut de la *Théorie de la figure de la terre* (París, 1743), obra en la que se sintetiza y desarrolla todo cuanto estas cinco décadas habían aportado sobre el tema. La hidrostática e hidrodinámica serán definitivamente reformuladas en forma de primeros principios por Euler en 1753; antes de ello, Clairaut establecerá las condiciones generales de equilibrio hidrostático y los métodos de integración de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que su estudio requería. Se cierra así una etapa en cuyo comienzo Newton no sabía pensar el término fluido sin imaginar explícitamente masas de agua canalizadas. De ahí el principio de las columnas del que pronto nos ocuparemos. Para Clairaut, en cambio, un fluido sería un ente matemático que verifica sistemáticamente ecuaciones de contorno. Esta notable diferencia nos permite comprobar, dentro de las limitaciones de un tema concreto, el aspecto más creativo e innovador de la física teórica durante las primeras décadas del siglo XVIII: sentar las bases y, a veces,

* Departamento de Historia de la Medicina. Facultad de Medicina. Universidad Complutense. Madrid.

DYNAMIS
Acta Hispanica ad Medicinae Scientiarumque Historiam Illustrandam. Vol. 3, 1983, pp. 55-89.
ISSN: 0211-9536

desarrollar el programa que aún hoy aparece en los manuales bajo el epígrafe genérico de mecánica racional. Desde nuestra perspectiva actual, podemos decir que dicho programa sólo podía ser viable formulando los problemas en términos analíticos y abandonando paulatinamente los usos geométricos de la centuria anterior.

En este artículo ensayamos una exposición de los fundamentos teóricos sobre los que evolucionó el tratamiento del problema. Para no desvirtuar totalmente los contenidos y modos de razonar propios de la época, incluiremos al final todo el proceso deductivo seguido por Clairaut. Así, pues, estas páginas admiten dos lecturas que se complementan y refuerzan su perspectiva histórica. Elegimos la obra de Clairaut porque en ella, además de condensarse las aportaciones de sus antecesores, se proponen esquemas teóricos de mayor poder predictivo.

Aunque nosotros vamos a ocuparnos exclusivamente del desarrollo teórico del programa esbozado por Newton, eludiendo las referencias a la importante polémica en torno a la figura de la Tierra, convendrá siquiera mínimamente señalar sus rasgos fundamentales. Las Proposiciones XVIII, XIX y XX del Libro III de los *Principia* afirmaban que la figura de la Tierra era achatada por los polos. Los trabajos de J. Cassini y D. de Mairan conducirán, sin embargo, a una conclusión radicalmente opuesta. El alargamiento polar de nuestro planeta ponía en cuestión los fundamentos desde los que había operado Newton. En otras palabras, lo que se discutía era la ley general de gravitación y el concepto de acción a distancia. Los cartesianos defendían los resultados experimentales aportados por Cassini frente a las conclusiones deducidas desde principios teóricos. Y respecto de éstos, acusaban a Newton, y con él a toda la ciencia inglesa, de no explicar la causa de la gravedad, de atribuirle a la masa inerte un principio dinámico que restituía en la física las razones especulativas y las causas ocultas de la ciencia peripatética. Así, pues, tres primeras cuestiones a destacar: en primer lugar la contradicción entre la física de Newton y la de Descartes; en segundo término, el enfrentamiento entre ciencias nacionales, es decir, la asunción por parte de colectivos científicos de prejuicios nacionalistas; y, finalmente, la contraposición entre teoría y experimento. Pero ello no es todo. Los «geómetras» advertirían que la demostración de Newton era incompleta por la dificultad de las ecuaciones a resolver y la insuficiencia teórica desde la que se analizaba el equilibrio de fluidos. Junto a programas de investigación de carácter experimental, materializados en expediciones científicas para la determinación de grados de meridiano en Francia, Laponia, Quito o Cabo de Buena Esperanza, van a efectuarse aportaciones teóricas de enorme repercusión sobre la física de fluidos. Si aquellas expediciones quisieron ser experimentos decisivos en la pugna entre newtonianos y cartesianos, estos estudios teóricos aspiraron a demostrar el mayor poder predictivo de la física de Newton frente a la de Descartes.

NEWTON: LA TIERRA OBLONGA

Comenzaremos nuestro estudio analizando con detalle las posiciones de Newton y Huygens, ya que es a partir de ellos cuando se afronta por primera vez el tema de la figura de la tierra desde supuestos que pronto exigirán la construcción de una teoría de fluidos. Durante el período al que limitamos nuestro trabajo, los tres problemas fundamentales a los que hubo de enfrentarse la mecánica de fluidos eran los siguientes: en primer lugar, desarrollar una formulación analítica que requería métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden; en segundo término, reconocer con precisión las condiciones de equilibrio hidrostático en el marco de una ciencia muchas veces agobiada por disputas terminológicas derivadas de la ambigüedad con que eran definidos los conceptos básicos de la física; en último lugar, la consideración de estos problemas en masas de fluido no homogéneas mediante diferentes hipótesis sobre la estructura interna del planeta.

Una primera aproximación al tema nos muestra que los *Principia* de Newton necesitaron una generación para que fuesen debidamente entendidos y asimilados por la comunidad científica europea. Se trataba de una obra en la que el rigor matemático era habitualmente sustituido por intuiciones llenas de sentido físico cuya originalidad es fascinante. Ello, sin embargo, dificultaba la comprensión de un texto en el que las soluciones aproximadas y la ausencia de los desarrollos matemáticos intermedios son una de sus características más acusadas. Por lo demás, cada cuestión afrontada constituía un problema cuyo tratamiento y solución era singular debido a los continuos artificios y rodeos que exige un razonamiento geométrico como el empleado por Newton. Al margen, pues, de las resistencias que encontraría el principio de gravitación universal y otros fundamentos básicos del pensamiento newtoniano, ello sería uno de los factores determinantes de la incomprensión con que fue acogida su obra. Así lo reconocía Voltaire en su *Eloge de Newton:*

> «La Philosophie de Newton a semblé jusqu'à présent à beaucoup de personnes aussi inintelligible a celle des Anciens; mais l'obscurité des Grecs venait de ce qu'en effet ils n'avaient point de lumières; et les ténebres de Newton viennent de ce que sa lumière était trop loin de nos yeux. Il a trouvé des vérités, mais il les a cherchées et placées dans un abîme. Il faut y decendre et les apporter au gran jour» (1).

---

(1) Texto citado también por DUGAS, R. (1950), *Histoire de la mécanique,* Neuchâtel, p. 208.

Desde esta perspectiva puede interpretarse la labor de clarificación y difusión desarrollada por MacLaurin, Stirling, Simpson, Taylor, Clairaut, Maupertuis e, incluso, el primer Euler. No puede extrañarnos, por ejemplo, que todavía en 1733 Maupertuis leyera en una sesión de la Academia de Ciencias de París una memoria que llevaba el significativo título de «Explication et Analise de Trois sections des principes de la Philosophie naturelle depuis la page 173 jusqu'à la page 211, 2.e Edition» (2). Tal dificultad, como insinuaba Voltaire, se veía agravada en Francia por las especiales características de la física y filosofía allí desarrolladas. En efecto, los torbellinos de Descartes posibilitaban una «representación» del mundo que, debido a su tratamiento exclusivamente cinemático, ofrecían un modelo *explicativo* perfectamente inteligible en términos causales. Siendo el *contacto* la única forma de interacción reconocida por la física cartesiana, todo podía ser explicado por el concurso de choques y palancas que simulaban los usos y mecanismos de la producción artesanal. Dentro de ese esquema, la introducción de conceptos tales como la acción a distancia cuestionaba los fundamentos del intelecto ordinario. La contradicción entre dos concepciones tan opuestas del mundo físico provocaría polémicas que se extenderían en Europa hasta las décadas centrales del setecientos. Una de ellas, quizá la que alcanzó mayor visibilidad social, es el objetivo del presente trabajo.

Como ya hemos dicho, Newton se ocupó del tema de la figura de la tierra en los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687). Las proposiciones XVIII, XIX y XX del Libro III están destinadas a buscar desde primeros principios la magnitud del aplanamiento polar y la variación de la gravedad desde el ecuador al polo por efecto de la fuerza centrífuga. Como ocurrió con otros temas tratados por Newton, las dos ediciones siguientes, efectuadas mientras aún vivía, introducen mejoras o aclaraciones. Nosotros, para no alargarnos excesivamente, seguiremos la publicada por F. Cajori en 1934 según la traducción efectuada por A. Motte en 1729 (3).

La toma de posición de Newton sobre el problema y la contrastación de sus previsiones teóricas con las medidas efectuadas con el péndulo por astrónomos franceses, introducirá novedades entre las cuales quizá la más importante sea la de evidenciar la enorme distancia existente

(2) La memoria (*Reg. 1733,* pp. 42 ss.) explicita y desarrolla los pasos matemáticos contenidos en las secciones 12, 13 y 14 del libro I de los *Principia.*

(3) CAJORI, F. (1962), *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his system of the world,* Los Angeles. La edición de F. Cajori revisa la traducción de A. Motte de 1729 y añade un apéndice histórico y aclaratorio de algunos pasajes de la obra.

entre la astronomía y la mecánica celeste. En efecto, la astronomía práctica no podía proporcionar pruebas experimentales concluyentes. La dispersión de los datos era tan amplia que Newton habría de decidirse, como veremos, por desestimarlos en su mayoría y considerar sólo aquellos que se encontraban dentro de los márgenes de error razonablemente previstos por la teoría. Jamás se había requerido de los astrónomos mayor rigor en sus observaciones. Una vez más, la astronomía práctica iba a quedar ampliamente superada por los recursos de la predicción teórica. En estas páginas abordaremos el estudio de dichas previsiones.

La Proposición XVIII se reduce a extender las observaciones de Flamsteed y Cassini sobre la figura de Júpiter a nuestro planeta (4). Si experimentalmente había podido concluirse su achatamiento polar, una teoría de fluidos debía poder explicar este fenómeno. Si, por lo demás, las leyes de la física debían ser universalmente válidas, no había ninguna razón que impidiera tratar nuestro planeta como uno más del sistema solar.

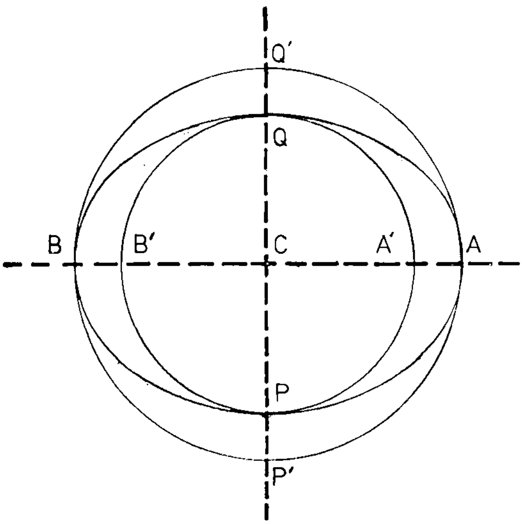
La Proposición XIX —«To find the proportion of the axis of a planet to the diameters perpendicular thereto»— aborda, sin explicitar la línea completa de razonamiento, la búsqueda de la relación existente entre los ejes del geoide. Para ello ingenia un recurso teórico que ha conocido enorme fortuna a lo largo de la historia de la física y especialmente en el tratamiento de los fluidos. Supone una masa de fluido atravesada por dos canales que desde el centro se dirigen al polo y ecuador respectivamente. Si dicha masa está en reposo, la longitud de ambos debe ser la misma, pero si, por el contrario, se introduce un movimiento de rotación, la acción de la fuerza centrífuga provocará una disminución del peso en la columna ecuatorial que alterará el estado de equilibrio primitivo en que se encontraba la masa de fluido. Newton afirmó que si debemos suponerla en equilibrio, como demuestra nuestra experiencia cotidiana, habrá que admitir un alargamiento del eje ecuatorial que restablezca la igualdad de peso de ambas columnas. El problema se planteaba en el cálculo de la magnitud del aplanamiento polar, porque para ello era preciso encontrar la expresión de la fuerza atractiva en el polo y ecuador de la superficie terrestre. La envergadura matemática de este problema sobrepasaba los límites de la ciencia de finales del siglo XVII, y para resolverlo Newton tuvo que inventar un recurso que le permitiese encontrar una solución aproximada.

---

(4) La Proposición XVIII lleva el siguiente título: «That the axes of the planets are less than the diameters drawn perpendicular to the axes.»

En realidad, lo único que interesaba conocer era la relación entre ambas atracciones y podía calcular la razón existente entre las atracciones de una esfera y un elipsoide en el extremo polar de ambas masas de fluido. Antes de pasar al tratamiento sistemático del tema, describiremos la línea completa de razonamiento seguido en las Proposiciones XIX y XX. Claramente formuló Newton la necesidad de considerar un fluido homogéneo, cuya figura fuese próxima a la esférica para poder despreciar términos de segundo orden. Más adelante veremos, sin embargo, que, pese a ello, cuando necesitó emplear los de tercer orden para asegurar la simetría del modelo utilizado no dudó en hacerlo. Sin que en ningún lugar se demuestre, Newton supone que la elipse es una forma de equilibrio estable. Sin duda debió parecerle «natural» esta extrapolación analógica desde la mecánica celeste hasta la de fluidos, que en las décadas posteriores sería objeto de una atención más detenida.

Supongamos, con Newton, que la superficie de la Tierra AQBP, es tal que la razón entre sus radios es $CQ/CA = 100/101$. Entonces demuestra que la atracción F_Q en el punto Q sobre la superficie de la tierra, es a la que se experimenta en el mismo punto de la esfera A′QB′P como 126 es a 125. Es decir, $F_Q/F'_Q = 126/125$.



Como Newton sólo sabía calcular la atracción en el vértice del eje de giro donde la acción centrífuga es nula, ingeniará un artificio que le permita encontrar la anterior relación en el extremo del eje ecuatorial. Supongamos el elipsoide que se forma del giro de AQBP alrededor de AB; la atracción f_A sobre el punto A es a la producida F'_A en el mismo punto pero sobre la esfera AQ′BP′ como 125 es a 126. Más adelante veremos con mayor detalle la astucia empleada por Newton para obtener un resultado inverso del anterior. Puesto que el nuevo esferoide no coincide con la figura de la Tierra, ya que se ha supuesto una rotación ecuatorial inexistente en la realidad, Newton resuelve la nueva dificultad del siguiente modo: si disminuyésemos el radio de la esfera CQ' en la proporción 101/100 tendríamos la figura de la Tierra; pero, por otra parte, el giro del elipsoide PQAB debe provocar una reducción del radio CA de la misma magnitud. De modo que, concluye Newton, la atracción buscada F_A sobre el vértice ecuatorial debe ser aproximadamente la media proporcional entre las producidas sobre el elipsoide y la esfera. Es decir,

$$F_A = (f_A \cdot F'_A)^{1/2} = F'_A(125/126)^{1/2} \simeq F'_A(125{,}5/126)$$

Por tanto, la relación existente entre las atracciones en los puntos Q y A del elipsoide terrestre será:

$$\frac{F_Q}{F_A} = \frac{F_Q}{F'_Q} \cdot \frac{F'_Q}{F'_A} \cdot \frac{F'_A}{F_A} = \frac{126}{125} \cdot \frac{101}{100} \cdot \frac{126}{125{,}5} \simeq \frac{501}{500}$$

El peso de las columnas ecuatorial y polar debe ser proporcional a la cantidad de masa que cada una encierra, es decir, a la longitud de los semiejes que las sostienen. Por tanto,

$$\frac{P_A}{P_Q} = \frac{CA}{CQ} \cdot \frac{F_A}{F_Q} = \frac{101}{100} \cdot \frac{500}{501} = \frac{505}{501}$$

Así, pues, el principio de contrabalanceo de los canales de fluido, condición de equilibrio impuesta por Newton, equivale a exigir que el concurso de la fuerza centrífuga haga $P_A = P_Q$.

> «And therefore if the centrifugal force of every part in the leg AC, arising from the diurnal motion, was to the weight of the same part as 4 to 505, so that from the weight of every part, conceived to be divided into 505 parts, the centrifugal force might take off four of those parts, the weights would remain equal in each leg, and therefore the fluid would rest in an equilibrium» (5).

Pero como experimentalmente se sabía que la fuerza centrífuga era 1/289 veces menor que la gravedad en el ecuador, entonces la relación entre los ejes debía ser 230/229. Todo el problema planteado por Newton había sido reducido, suponiendo que la figura de la Tierra era aproximadamente esférica, al de encontrar la razón existente entre la atracción sobre el polo de una esfera y un elipsoide. La reproducción de todo este razonamiento, que puede considerarse representativo, ilustra ejemplarmente lo que antes hemos comentado sobre la creatividad y originalidad del autor de los *Principia*. El análisis más detallado que a

(5) *Principia,* Lib. III, Prop. XIX.

continuación desarrollaremos demostrará al mismo tiempo la sagacidad de Newton para encontrar la solución que propuso (6).

LA MAGNITUD DEL ACHATAMIENTO POLAR

Sean $\bar{F} = (Ax, Ay, Bz)$ y $\bar{P} = (-w^2x, -w^2y, 0)$ las fuerzas atractiva y centrífuga respectivamente. Supongamos, como hizo Newton, que la figura de equilibrio es un elipsoide cuya ecuación es:

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2 + y^2}{a^2(1 + \gamma^2)} = 1$$

donde γ es la excentricidad.

Siendo Q la fuerza gravitatoria en un punto situado sobre la superficie del elipsoide y Q_o y Q_p los valores en el ecuador y polo respectivamente, tendremos que:

$$Q^2 = (A - w^2)^2 (1 + \gamma^2) (a^2 - z^2) + B^2z^2$$

$$Q_o = (A - w^2) \cdot a(1 + \gamma^2)^{1/2} \tag{1}$$

$$Q_p = Ba \tag{2}$$

Si la superficie exterior es una superficie equipotencial entonces debe verificarse que:

$$\int_0^a Bz \cdot dz = \int_0^{a(1+\gamma^2)^{1/2}} (Ax - w^2x) \cdot dx$$

es decir,

$$(A - w^2) \cdot a^2 \cdot (1 + \gamma^2) = Ba^2$$

y aplicando el principio newtoniano de las columnas debe verificarse que:

$$\frac{Q_p}{Q_o} = \frac{B}{(A - w^2)(1 + \gamma^2)^{1/2}} = (1 + \gamma^2)^{1/2} \tag{3}$$

Para encontrar la magnitud del achatamiento polar, cuyo valor aproximado es $\gamma^2/2$, basta con sustituir en (*3*) las expresiones de A y B. Ello no iba a ser posible, sin embargo, hasta comienzos de la década de

(6) *Cf.* PLANA, J. (1853), Sur la théorie mathématique de la Figure de la Terre, publié par Newton en 1687. Et sur l'etat d'équilibre de l'ellipsoïde fluide à trois axes inégaux. *Astronomische Nachrichten, 36,* núm. 850, 150-170.

los cuarenta cuando C. MacLaurin encontró dichas expresiones y resolvió la ecuación trascendente que resultaba (7). Siendo:

$$A = \frac{4\pi\rho\ G}{2\gamma^3}\ [(1 + \gamma^2)\ \text{arctag.}\ \gamma - \gamma]$$

$$B = \frac{4\pi\rho\ G}{2\gamma^3}\ (2\gamma - 2 \cdot \text{arctag.}\ \gamma)\ (1 + \gamma^2)$$

puede encontrarse la excentricidad mediante la igualdad:

$$(1 + \gamma^2) \cdot \text{arctag.}\ \gamma - \gamma - \frac{w^2}{2\pi\rho\ G} \cdot \gamma^3 = 2\gamma - 2 \cdot \text{arctag.}\ \gamma$$

que desarrollando en serie la función arctag. γ, resulta:

$$\frac{15}{8} \cdot \frac{w^2}{4\pi\rho\ G} = \gamma^2 - 15 \cdot \left(\frac{2\gamma^4}{5 \cdot 7} - \frac{3\gamma^6}{7 \cdot 9} - \frac{4\gamma^8}{9 \cdot 11} - \ldots\right)$$

si hacemos $3w^2/4\pi\rho\ G = \beta$ y utilizamos, como hizo MacLaurin, la inversión de las series, obtendríamos:

$$\frac{\gamma^2}{2} = \frac{5}{4}\beta + \frac{12}{7}\left(\frac{5}{4}\beta\right)^2 + \frac{148}{49}\left(\frac{5}{4}\beta\right)^3 + \ldots$$

que como veremos relaciona el achatamiento polar $\gamma^2/2$ con la relación existente entre la gravedad y la fuerza centrífuga en el ecuador. Utilizando en valor de $\beta = 1/289$ adoptado por Newton y los tres primeros términos de la serie, resultaría que $\gamma^2/2 = 1/229{,}433$. Usando sólo el primero, es decir $(5/4) \cdot \beta$, el aplanamiento hubiese sido 1/231,6, mientras que, como vimos, Newton concluía el valor 1/229. ¿Quiere ello decir que conocía la serie encontrada por MacLaurin? Vamos a comprobar inmediatamente que no fue así y que la exactitud con la que determinó el aplanamiento polar es el resultado de alguna manipulación mal justificada y de una feliz coincidencia, pues la fortuna hizo que $(101/80)\beta$, expresión que obtuvo para $\gamma^2/2$, valiese igual que

$$\frac{5}{4}\beta + \frac{12}{7}\left(\frac{5}{4}\beta\right)^2 + \frac{148}{49}\left(\frac{5}{4}\beta\right)^3$$

(7) Existe gran cantidad de bibliografía en la que se desarrolla con un tratamiento moderno el tema de la figura de la Tierra. Nosotros citaremos sólo algunas obras donde puede encontrarse toda la información necesaria. APELL, P. (1937), *Traité de Mécanique Rationnelle*, vol. IV, 2.ª ed., París. Volumen que contiene dos libros que llevan por título *Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation* y *Les figures d'equilibre d'une masse hètérogéne en rotation. Figures de la Terre et des planetes.* JEANS, J. H. (1919), *Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics*, Cambridge. WAVRE, R. (1932), Figures Planétaires et gèodèsie, *in: Cahiers scientifiques*, Fascículo XII, París. WAVRE, R. (1948), *La Figure du monde. Essai sur le probleme de l'espace des grecs a nos jours*, Neuchâtel.

La demostración nos exigirá recontruir en términos analíticos todo el proceso deductivo seguido por el autor de los *Principia.*

Newton disponía de un procedimiento (Lib. I, Prop. XCI, Cor. II) para encontrar la expresión de B, atracción del esferoide en el polo, que es exacto si se desprecian los términos del desarrollo en serie mayores que γ^4. Así pudo obtener que:

$$B = \frac{4\pi\rho\ G}{3}\left(1 + \frac{2}{5}\gamma^2 + \frac{6}{35}\gamma^4\right)$$

Como $\gamma^2/2$ se suponía muy pequeño, podía despreciar los términos siguientes de la serie. La atracción en el polo Q_p era:

$$Q_p = B \cdot a = \frac{4\pi\rho\ Ga}{3}\left(1 + \frac{2}{5}\gamma^2\right)$$

luego $3Q_p/4\pi\rho$ Ga, cociente de las atracciones de un elipsoide y una esfera cuyos ejes de rotación y radio valían *a,* sería:

$$1 + \frac{4}{5}\left(\frac{\gamma^2}{2}\right) = 1 + \frac{4}{500} = \frac{126}{125}$$

donde hemos supuesto inicialmente que $\gamma^2/2 = 1/100$.

El expediente ingeniado por Newton para calcular este cociente en el extremo de la otra columna de fluido, consistía en suponer el giro del elipsoide primitivo sobre el eje ecuatorial. La nueva figura vendría dada por la ecuación:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2(1 + \gamma^2)} = 1$$

El cálculo de A era así equivalente al problema ya resuelto de encontrar B. La atracción en el ecuador de esta nueva masa de fluido sería en su expresión exacta:

$$B_1\ a(1 + \gamma^2)^{1/2} = \frac{4\pi\rho\ Ga(1 + \gamma^2)^{1/2}}{\gamma^3}\ [(1 + \gamma^2)^{1/2} \cdot \log(\gamma + (1 + \gamma^2)^{1/2} - \gamma)]$$

y por desarrollo en serie tendríamos, con los nuevos valores ahora supuestos para los ejes del esferoide, que:

$$B_1 = \frac{4\pi\rho\ G}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\gamma^2 + \frac{8}{35}\gamma^4 \ldots\right)$$

Es decir,

$$\frac{B_1\ a(1+\gamma^2)^{1/2}}{\dfrac{4\pi\rho\ G[a(1+\gamma^2)^{1/2}]^3}{3[a(1+\gamma^2)^{1/2}]^2}} = 1 - \frac{2}{5}\gamma^2 + \frac{8}{35}\gamma^4$$

expresión que nos permite calcular la relación existente entre las atracciones de un elipsoide y una esfera cuyo semieje de rotación y radio son respectivamente $a(1+\gamma^2)^{1/2}$. Adoptando sólo los dos primeros términos del desarrollo en serie, dicho cociente sería:

$$1 - \frac{2}{5}\gamma^2 = \frac{124}{125}$$

Sin embargo, Newton, que quería asegurar la simetría del modelo utilizado, emplea los tres primeros términos:

$$1 - \frac{2}{5}\gamma^2 + \frac{8}{35}\gamma^4 \simeq 1 - \frac{1}{126{,}45} \simeq \frac{125}{126}$$

obteniendo, tal y como quería, el resultado inverso del problema anterior. Por el razonamiento que ya hemos indicado anteriormente, la atracción de la Tierra en el vértice ecuatorial, cuya figura debía ser intermedia entre la del nuevo elipsoide y la esfera de radio $a(1+\gamma^2)^{1/2}$, era la media proporcional de las calculadas para estos dos casos. De modo que:

$$B_1' = \left(\frac{4\pi\rho\ G}{3}\right)^{1/2} B_1 \simeq \frac{4\pi\rho\ G}{3}\left(1 - \frac{\gamma^2}{5} + \frac{33}{350}\gamma^4 + \ldots\right)$$

La hipótesis más discutible adoptada por Newton consistía en hacer coincidir la función B_1' con la que debería haber buscado A. No es difícil probar que esto sólo es cierto desde el punto de vista algebraico, siempre que se desprecien los términos mayores que γ^4. Aceptando la identidad de las funciones B_1' y A, entonces:

$$\frac{3A}{4\pi\rho\ G} = 1 - 0{,}004 + 0{,}0000374 \simeq \frac{125{,}5}{126}$$

Vengamos finalmente a la conclusión de todo el tratamiento newtoniano del problema. Según se vio en (*3*), sabemos que:

$$\frac{Q_p}{Q_o} = (1+\gamma^2)^{1/2} = \frac{B}{(A - w^2)\,(1+\gamma^2)^{1/2}} = \frac{B'}{(A' - \beta)\,(1+\gamma^2)^{1/2}}$$

donde:

$$B' = \frac{3B}{4\pi\rho\ G}$$

$$A' = \frac{3A}{4\pi\rho\ G}$$

$$\beta = \frac{3w^2}{4\pi\rho\ G}$$

y, suponiendo $\gamma^2/2 = 1/100$ podemos sustituir los valores encontrados para B′ y A′, de modo que:

$$\frac{Q_p}{Q_o}\left(1 - \frac{\beta}{A'}\right) = \frac{126}{125} \cdot \frac{126}{125{,}5} \cdot \frac{100}{101} = \frac{501}{500}$$

y como:

$$\frac{Q_p}{Q_o} = (1 + \gamma^2)^{1/2} \simeq 1 + \frac{\gamma^2}{2} = \frac{101}{100}$$

resulta que:

$$1 - \frac{\beta}{A'} = \frac{501}{500} \cdot \frac{100}{101} = \frac{501}{505}$$

luego:

$$\frac{\beta}{A'} = 1 - \frac{501}{505} = \frac{4}{505} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{101} = \frac{400}{505} \cdot \frac{1}{100} =$$

$$= \frac{400}{505} \cdot \frac{\gamma^2}{2} = \frac{80}{101} \cdot \frac{\gamma^2}{2}$$

Que como vemos es el resultado encontrado por Newton, ya que si hacemos $\beta = 1/289$ y $A' = 125{,}5/126 \simeq 1$, resultará:

$$\frac{\gamma^2}{2} = \frac{1}{228{,}911} \simeq \frac{1}{229}$$

El valor encontrado por Newton, mediante los cálculos aproximados y empleando las artimañas que hemos señalado, coincidía con el obtenido por MacLaurin, medio siglo más tarde, después de haber calculado las expresiones de la atracción en el polo y en el ecuador. A este último le corresponde el honor de haber dado una solución exacta, pero durante muchos años el genio de Newton fue elevado más alto de lo que ya se encontraba debido a la feliz coincidencia de que:

$$\frac{101}{80}\beta \simeq \frac{5}{4}\beta + \frac{12}{7}\left(\frac{5}{4}\beta\right)^2 + \frac{148}{49}\left(\frac{5}{4}\beta\right)^3$$

Teniendo en cuenta las expresiones (*1*), (*2*) y (*3*) no es difícil probar, sin necesidad de conocer los valores A y B, que:

$$Q^2 = Q_o^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) + Q_P^2 \cdot \frac{z^2}{a^2} \qquad (4)$$

considerando que $z = r \cdot \cos\theta$ y $(x^2 + y^2)^{1/2} = r \cdot \operatorname{sen}\theta$, entonces $\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2 + y^2}{a^2(1 + \gamma^2)^{1/2}} = 1$ se transforma en $r = \frac{a(1 + \gamma^2)^{1/2}}{(1 + 2\cos^2\theta)^{1/2}}$ y la expresión (*4*) adopta la forma:

$$Q = Q_o\left(1 + \frac{2(1 + \gamma^2)\cos^2\theta}{1 + 2\cos^2\theta}\right)^{1/2}$$

que desarrollada en serie y despreciando los términos de segundo orden en el aplanamiento, se convierte en:

$$Q \simeq Q_o\left(1 + \frac{r^2}{2} \cdot \cos^2\theta\right) = Q_o\left(1 + \frac{101}{80} \cdot \beta \cdot \cos^2\theta\right)$$

y como $\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2 L$, donde L es la latitud geocéntrica, tendremos:

$$Q = Q_o\left(1 + \frac{101}{80} \cdot \beta \cdot \operatorname{sen}^2 L\right)$$

Utilizando esa fórmula, Newton, en la última parte de la Prop. XX, calcula la longitud que debe tener un péndulo que bate segundos en función de la latitud geográfica. Comparando los resultados obtenidos por Richer, Halley, des Hayes, Picard, Couplet..., con los previstos por su teoría (8), concluía que aunque se podía asegurar la existencia de un

(8) La tabla que a continuación presentamos resume el estado de la cuestión y recoge los datos que Newton había previsto:

Autor	*Lugar*	*Año*	*Latitud*	*Result.*	*Prev. Newton*	*Dif.*
Richer	París	1673	48° 50'	440,60	440,56	−0,04
Varin	París	1682	48° 50'	440,56	440,56	0,00
Picard	París	1671	48° 50'	440,50	440,56	0,06
Chazelles	Cairo	169..	30° 2'	440,25	439,95	−0,30
Des Hayes	St. Domingo	1699-1700	19° 48'	439,00	439,70	0,70
Des Hayes	St. Cristóbal	"	17° 19'	438,75	439,64	0,89
Des Hayes	Guadalupe	1682	15° 00'	438,50	439,60	1,10
Des Hayes	Martinica	1682	14° 44'	438,50	439,60	1,10
Feuillé	Martinica	1704	14° 44'	437,83	439,60	1,77
Des Hayes	Gorée	1682	14° 40'	438,56	439,60	1,04
Feuillé	Portobelo	1704	9° 33'	437,58	439,53	1,95
Richer	Cayenne	1672	4° 55'	439,35	439,48	0,13
Des Hayes	Cayenne	1699-1700	4° 55'	438,50	439,48	0,98

achatamiento polar del planeta no era posible determinarlo experimentalmente:

> «And therefore the earth is a little higher under the equator than by the preceding calculus, and a little denser at the centre than in mines near the surface, unless, perhaps, the heats of the torrid zone have a little extended the lenght of the pendulums» (9).

Así, pues, Newton consideraba que debía ser revisada la hipótesis de homogeneidad de la tierra y que suponiéndola más densa en el centro que en la superficie el aplanamiento debería disminuir, de modo que los datos experimentales se aproximarían a las previsiones teóricas. Tales supuestos no fueron desarrollados convenientemente hasta medio siglo más tarde por Clairaut, quien demostraría justamente todo lo contrario:

> «J'ai trouvé, au contraire de ce que cet illustre Auteur avance —escribe Clairaut—, que la Terre devoit être d'autant moins aplatie, que le raccourcissement du Pendule du Pole à l'Equateur, étoit plus considérable» (10).

Es decir, el aplanamiento de masas de fluido de densidad variable que gira en torno a un eje de revolución, crece del centro a la superficie independientemente de la ley de densidad adoptada. Abundando en la misma dirección, Clairaut demostraría que, suponiendo pequeña la velocidad angular, el aplanamiento estaba comprendido entre dos valores que correspondían a otras tantas situaciones límites de variación de la densidad: de una parte, la correspondiente a una distribución uniforme y, de otra, aquélla en la que se supone toda la masa concentrada en torno al centro del sistema. Dichos límites eran los siguientes (11):

$$\frac{1}{2}\beta < \frac{\gamma^2}{2} < \frac{5}{4}\beta$$

La tabla está construida con datos procedentes, en su mayoría, de fuentes originales, y cuando no ha sido así hemos contrastado diversas obras antes de adoptar la cifra que presentamos. Existieron otras determinaciones de la longitud del péndulo horario que hemos excluido por su notable imprecisión como, por ejemplo, las efectuadas bajo la dirección de Couplet y por encargo de la Academia de Ciencias de París que merecieron el siguiente juicio de Newton: «...this gentleman's observations are so gross, that we cannot confide in them» (*Principia,* Lib. III, Prop. XX). La longitud del péndulo la expresamos en líneas, unidad que equivale a 2,25 milímetros (1 toesa = 6 pies; 1 pie = 12 pulgadas; 1 pulgada = 12 líneas y 1 línea = 12 puntos). La tabla de longitudes previstas es dada por Newton (*loc. cit.*) para variaciones de un grado de latitud; nosotros hemos intentado dar el valor más aproximado posible para cada latitud concreta, de modo que la columna *Diferencia* sólo aspira a indicar órdenes de error más que cantidades exactas.

(9) *Principia,* Lib. III, Prop. XX.

(10) CLAIRAUT, A. C. (1743), *Théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrostatique,* París, p. 157.

es decir:

$$\frac{1}{577} < \frac{\gamma^2}{2} < \frac{1}{230}$$

que se corresponden, como veremos inmediatamente al tratar la aportación de Huygens, con los valores concluidos por éste y por Newton. Demostraría también Clairaut que siendo α el achatamiento, si el radio vector del elipsoide podía expresarse por la fórmula $r = a(1 + \alpha \operatorname{sen}^2 \theta)$, entonces la gravedad en cualquier punto de la superficie terrestre verificaba que:

$$Q = Q_0 \left[1 + \left(\frac{5}{2} \beta - \alpha \right) \operatorname{sen}^2 L \right]$$

fórmula imposible de obtener desde los limitados fundamentos teóricos con los que Newton abordaba el tratamiento del problema. La conclusión definitiva que se recoge en los *Principia* sobre el desacuerdo con los datos experimentales no ofrecía dudas al lector:

> «And this disagreement might arise partly from the errors of the observations, partly from the dissimilitude of the internal parts of the earth, and the height of mountains; partly from the different temperature of the air» (12).

Así, pues, Newton propone una nueva línea de investigación que supone incorporar los saberes acerca de la estructura interna del planeta al programa racional de la física. Las experiencias con el péndulo iban a quedar así relegadas a un segundo plano, ya que, como se sabe, a través de ellas es imposible poner a prueba ninguna hipótesis sobre la ley de variación de la densidad terrestre. Apunta, asimismo, la necesidad de profundizar sobre el tema de las variaciones locales de la gravedad detectadas con un instrumento sobre el que la temperatura o presión atmosféricas podían ejercer una importante influencia. Todas las cuestiones relativas a la desviación de la plomada, debido a la irregular distribución de masas sobre la superficie terrestre, podían repercutir sobre las observaciones astronómicas. Para los astrónomos, estas nuevas perspectivas constituían un reto cuya solución no podía demorarse, ya que sin un modelo de atmósfera que permitiese la construcción de tablas para la refracción, o sin asegurarse de la verticalidad de la plomada que marcaba el cero de los instrumentos, era imposible garantizar la precisión de las observaciones. Así parece entenderlo

(11) CLAIRAUT, A. C. (1743), *op. cit.*, pp. 59-82. La evolución de estos límites del achatamiento polar puede encontrarse en APELL, P. (1937), *op. cit.*, pp. 142 ss. y 204 s.

(12) *Principia,* Lib. III, Prop. XX.

Newton, que no oculta su escepticismo respecto de las medidas aportadas «...of the French astronomers». Y esto tendrá su importancia años más tarde cuando en el contexto de la polémica sobre la figura de la Tierra, se le acuse en Francia de teorizante y especulativo por este velado desprecio hacia las observaciones experimentales.

HUYGENS: LA FIGURA DE LA TIERRA Y LA FISICA CARTESIANA

Veamos ahora la teoría postulada por Huygens (13). Su interés por la cuestión de la figura de la tierra es consecuencia directa del rechazo de la concepción newtoniana de la gravedad. Si bien las investigaciones sobre el péndulo le habían situado en condiciones para afrontar este problema, será en el *Discours sur la cause de la pesanteur* (1690), texto apresuradamente publicado para replicar el contenido de los recién publicados *Principia,* donde afrontará con mayor extensión el tema.

> «Je ne suis pas d'accord —explica Huygens— d'un Principe qui est de toutes les petites parties qu'on peut imaginer dans deux ou plusieurs différents corps s'attirent ou tendent à s'approcher mutuellement. Ce que je ne saurais admettre, parce que je crois voir clairement que la cause d'une telle attraction n'est point explicable par aucun principe de Mécanique, ni des règles du mouvement. Comme je ne suis pas persuadé non plus de la necessité de l'attraction mutuelle des corps entiers ayant fait voir que, quand il n'y aurait point de Terre, les corps ne laisseraient pas, parce qu'on apelle pesanteur, de tendre vers un centre» (14).

El texto nos remite claramente al esquema general cartesiano de explicación del universo. Huygens, sin embargo, no se conformó con un simple rechazo metafísico de la atracción, como harían otros cartesianos, sus críticas también alcanzaron al propio Descartes. En el *Horologium oscillatorium* (1673) obra en la que se analizaban extensamente las leyes del péndulo y el comportamiento de la *vi centrifuga,* la gravedad no es considerada como una fuerza externa que actúa sobre los cuerpos sino como un hecho empírico constatable (15). Es el *connatus* o tendencia a descender que manifiestan todos los cuerpos. La publicación

(13) PLANA, J. (1853), Note sur la figure de la terre et la loi de la pesanteur à sa surface, d'après l'hypothèse d'Huygens, publié en 1690. *Astronomische Nachrichten, 35,* núm. 839, 371-378.

(14) HUYGENS, C. (1690), *Discours sur la cause de la pesanteur,* texto que fue publicado como apéndice de su obra *Traité de la Lumière,* Leyden. La cita pertenece a la página 159. Ver HOEFER, F. (1873), *Histoire de l'Astronomie depuis ses origines jusqu'à nos jours,* París, pp. 443 ss. Y también del mismo autor (1902), *Histoire des Mathematiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du dix-neuvième siècle,* 5.ª ed., París, pp. 462 ss.

(15) *Cf.* WESTFALL, R. S. (1977), *Force in Newton Physics,* New York, pp. 177 ss.

de los *Principia* le llevará a formalizar una teoría que pueda explicar el hecho gravitatorio sin necesidad de atribuirle un principio dinámico a la materia inerte «...parce qu'une telle hypothèse nous eloignerait fort des principes Mathematiques ou Mechaniques» (16). Huygens imaginó una masa fluida sutil que gira «encerrada» en un espacio limitado del cual los otros cuerpos celestes le impiden salir. Si dentro de ella existiesen cuerpos más densos que no participaran de aquel movimiento o que simplemente fuesen más lentos, entonces serían empujados por la materia etérea hacia el centro del sistema.

> «C'est donc en cela que consiste vraisemblablement la pesanteur des corps: laquelle on peut dire, que c'est l'effort que fait la matiere fluide, qui tourne circulairement autour du centre de la Terre en tous sens, à s'éloigner de ce centre, et à pousser en sa place les corps qui ne suivent pas ce mouvement» (17).

La atracción simultánea de todas las partículas de masa entre sí e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, resultaba, así, sustituida por una acción mecánica constante que subsistiría incluso aunque no existiese la Tierra. Al usar el mismo recurso de los canales antes comentado, consideraba que todas las partículas situadas dentro del canal ecuatorial experimentaban el mismo *connatus* de caída generado por el éter circundante, pero como la *vi centrifuga* variaba, desde un valor máximo en el vértice ecuatorial hasta uno mínimo en las proximidades del eje de giro, la relación entre los ejes debía ser la mitad de la existente entre ambas «fuerzas» en el ecuador. Así, puesto que $f_c/f_g = 1/289$, la razón entre los ejes sería como 577/578 (18).

El problema de la figura de equilibrio que adopta una masa de fluido sometido a ambas fuerzas fue abordado en la segunda parte del *Horologium...* según el principio de verticalidad de la plomada, es decir,

---

(16) HUYGENS, C. (1690), *Discours...*, p. 163. Una análisis del tratamiento que desde la tradición cartesiana se realiza del hecho gravitatorio puede encontrarse en la excelente obra de DUGAS, R. (1954), *La mécanique au XVIIème siècle,* Neuchatel, pp. 312 ss. y 446 ss. El tema de la gravitación a finales del siglo XVII y principios del XVIII es analizado desde perspectivas diferentes en BUCHDAHL, G. (1970). Gravity and intelligibily: Newton to Kant, *in:* BUTTS, R. E.; DAVIS, J. W. (Edits), *The methodolical hereditage of Newton,* Oxford, pp. 74-102. SNOW, J. (1926), *Matter and Gravity in Newton's physical philosophy,* London. Un claro e interesante resumen de las coincidencias y diferencias de las posiciones de Newton y Descartes, puede encontrarse en EULER, L. (1833), *Letters of Euler on different subjects in Natural Philosophy. Adressed to a german Princess,* edición de D. Brewster, New York, (reimpresión por Arno Press, New York, 1975). En especial las cartas XLV-LXVIII. MONTUCLA, F. (1802), *Histoire des Mathématiques,* París, vol. 4, pp. 139 ss.

(17) HUYGENS, C. (1690), *op. cit.*, p. 137.

(18) MARIE, M. (1883-1888), *Histoire des Sciences Mathematiques et Physiques,* 12 vols., París, vol. V, pp. 27 ss. También LALANDE, J. F. (1792), *Astonomie,* 3 vols., París.

exigiendo que la resultante fuese perpendicular a la superficie de la Tierra. Siendo $\bar{f} = \left(f \cdot \frac{x}{r}, f \cdot \frac{y}{r}, f \cdot \frac{z}{r}\right)$ y $\bar{x} = (-w^2x, -w^2y, 0)$ las fuerza atractiva y centrífuga respectivamente, en la superficie de equilibrio exterior del planeta debía verificarse la ecuación:

$$f \cdot dr - w^2(x \cdot dx + y \cdot dy) = 0$$

que integrada se transforma en:

$$f \cdot dr - \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2) = f(a) \cdot a - \frac{w^2}{2} \cdot a^2$$

donde $f(a)$ es el valor que adopta la función f en el ecuador cuya distancia al centro de atracción es a.

Supongamos, en la hipótesis de Huygens, que dicha fuerza es constante e igual a k. Entonces:

$$k(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} - \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2) = k \cdot a - \frac{w^2}{2} \cdot a^2$$

en donde haciendo $x = y = 0$ y $z = b$, se obtiene que:

$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{w^2a}{2k}$$

y como $w^2a/2k = 1/289$, entonces la razón entre los ejes valdría 577/578. Dicho resultado puede comprobarse que se obtiene también suponiendo una fuerza de atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Este cálculo, efectuado por Huygens, parecía confirmarle en contradicción con Newton su tesis de que era la verticalidad de la plomada la condición necesaria para que la Tierra estuviese en equilibrio. La variación de la gravedad con la latitud del lugar puede ser encontrada sin dificultad. La fuerza gravitatoria Q verifica la ecuación:

$$Q = \left[f^2 - \frac{2w^2}{r} \cdot f(x^2 + y^2) + w^4(x^2 + y^2)\right]^{1/2} =$$

$$= f\left(1 - \frac{2w^2r \cdot \text{sen}^2\,\theta}{f} + \frac{w^4r^2\,\text{sen}^2\,\theta}{f^2}\right)^{1/2}$$

y haciendo $\beta = w^2r/f$ y despreciando los términos de segundo orden, tendríamos que:

$$Q \simeq f(1 - 2\beta\,\text{sen}^2\,\theta)^{1/2} \simeq f(1 - \beta\,\text{sen}^2\,\theta) = f(1 - \beta\cos^2 L)$$

expresión que, independientemente de las constantes, es análoga a la encontrada por Newton.

El problema planteado sobre la figura de la Tierra por ambos científicos era exclusivamente teórico y las diferencias entre ellos estaban motivadas por la distinta concepción acerca de la gravedad. Las medidas experimentales estaban aún lejos de poder aportar datos cuya precisión pudiese discernir entre ambos. El tema concreto en el que se enfrentaban no tenía, por el momento, ninguna trascendencia en el terreno práctico ya que, como reconocía Newton, el achatamiento era muy pequeño:

> «...it appears that the inequality of degrees is so small that the figure of the earth, in geographical matters, may be considered as spherical; especially if the earth be a little denser towards the plane of the equator than towards the poles» (19).

Las consecuencias del programa propuesto por Newton y Huygens, aparte las ya comentadas, eran verdaderamente notables. En primer lugar, se afirmaba sin paliativos la no esfericidad de la Tierra, conclusión que asestaba un nuevo golpe a las concepciones peripatéticas sobre la necesidad del círculo en todas las formas de equilibrio estable. Ello, sin embargo, en 1700, ya no habría de plantear problemas con una tradición científica que había sido aislada del marco institucional donde se desarrollaba la nueva ciencia. La afirmación del achatamiento polar, no obstante la dispersión de los datos experimentales, ponía en entredicho los métodos de la astronomía práctica, ciencia que, pese a haber sido protagonista en el proceso de la Revolución Científica, quedaba ampliamente desbordada por el mayor poder predictivo de la mecánica. Eran precisas nuevas observaciones, realizadas con mayor precaución y mejores métodos, que pudiesen contrastar la magnitud del aplanamiento polar predicho por Newton o Huygens. En esa dirección se avanzó durante las tres primeras décadas del setecientos, pero sus resultados contradecían frontalmente las conclusiones derivadas desde principios teóricos.

EL PROGRAMA NEWTONIANO: MAUPERTUIS, STIRLING, CLAIRAUT Y MAcLAURIN

De momento, aquí nos ocuparemos de la evolución del programa esbozado en los *Principia.* Las últimas conclusiones de Newton dejaban en el aire algunas preguntas que no había sabido responder: ¿Es

(19) *Principia,* Lib. III, Prop. XX.

homogénea la Tierra? ¿Es la elipse una figura de equilibrio para una masa de fluido que gira en torno a un eje de simetría? ¿Por qué se consideraba *a priori* que el ecuador era un eje de simetría respecto de los círculos paralelos? Si la Tierra estaba salpicada de accidentes geográficos, ¿en qué medida era lícito hablar de una figura elipsoidal? El tema de la figura de la Tierra, sin embargo, hubiese sido una cuestión marginal dentro de la historia de la física si las observaciones realizadas en Francia por los Cassini no hubiesen proporcionado conclusiones tan diametralmente opuestas a las publicadas por Newton. Para los neocartesianos no existía ninguna razón que les obligara a preferir una teoría insuficientemente desarrollada a unas observaciones efectuadas, a su juicio, con todas las garantías que se podían exigir. Todo ello estimuló a los newtonianos y algunos geómetras franceses a buscar respuestas adecuadas para aquellas preguntas.

La primera que reclama nuestro interés procede de Maupertuis. En el número 422 de las *Philosophical Transactions* publicó una memoria en la que se proponía demostrar que la elipse era, como había supuesto Newton, una figura de equilibrio (20). Utilizando el principio de compensación de las columnas ofrecía una solución en dos dimensiones que no resolvía completamente la cuestión. Dos años más tarde, P. Bouguer demostraba, analizando algunos casos particulares, que las condiciones de equilibrio exigidas por Newton y Huygens, tomadas separadamente, eran necesarias, pero no suficientes. Si la masa de fluido tenía que permanecer en equilibrio hidrostático, era preciso que se cumpliesen simultáneamente el principio de las columnas y el de verticalidad de la plomada:

> «...une planète considérée comme fluide ne peut conserver constamment la même figure, que lorsque toutes les colonnes dont on peut supposer qu'elle est formée et qui aboutissent à son centre, sont d'une égale pesanteur; sans cela, toutes ces colonnes ne se contrabalanceraient point, et les plus pesantes ne manqueraient pas de soulever par en bas celles qui le seraient moins. Mais il faut encore qu'une autre condition soit remplie, il faut que les directions de la pesanteur soient exactement perpendiculaires dans tous les points de la surface, afin que les molécules du fluide

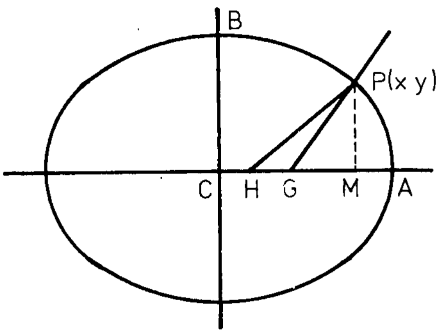
(20) MAUPERTUIS, P. L. M. (1732), De Figuris quas Fluida rotata inducere possunt, Problemata duo; cum conjectura de Stellis quae aliquendo prodeunt vel dificiunt; et de Annulo Saturni. Authore Petro Ludovico De Maupertuis, Regiae Societatis Londinensis, et Academiae Scientiarum Parisiensis Socio. *Philosophical Transactions, 37,* núm. 422, 240-256 (Volumen que corresponde a los años 1731-32 y que fue publicado en 1733). Las conclusiones de este trabajo serían posteriormente reimpresas en su famoso *Discours sur les differents figures des Astres* (París, 1732) y en «Sur les loix de l'Attraction» *in Mem. 1732,* pp. 343-362. Ver lo que sobre la memoria dice Fontenelle en *Hist. 1732,* pp. 112-117. Ver NIELSEN, N. (1935), *Géomètres français du dix-huitième siècle,* Copenhague.

n'aient aucune pente à couler vers un côté ou vers un autre. L'observation de ces deux lois est également nécessaire; l'une assure, en quelque façon, le repos dans l'interieur pendant que l'autre l'etablit au dehors; et ce n'est que le concours des deux qui rend l'état de la planète tuojours permanent» (21).

Esta importante e influyente memoria de Bouguer, tal vez debido al carácter polémico de algunas partes de su contenido (22), no fue inicialmente recibida todo lo bien que merecía. Maupertuis, que en sus trabajos anteriores había comprobado que ambas condiciones se verificaban simultáneamente en diferentes hipótesis sobre la gravedad, afirmaba en una memoria publicada el mismo año:

«...pour déterminer la figure d'une planète, si l'on sait que ses parties sont actuellement en repos, l'examen de l'accord des deux principes est inutile, l'un d'eux suffit, puisque le repos des parties est un fait qu'assure de l'autre, quelle que soit la manière dont la pesanteur agit» (23).

Al año siguiente, Stirling demostraba que la resultante de las fuerzas que actúan sobre un elipsoide de rotación con velocidad angular constante y sometido a la ley de atracción newtoniana, era perpendicular a la superficie (24). Veamos, brevemente, el punto central de su razonamiento. Sean F_x y F_y las fuerzas atractivas que actuán según los ejes CA y CB respectivamente. Como vimos, despreciando los términos de segundo orden en el aplanamiento, dichas fuerzas eran:



$$F_x = \frac{4\pi\rho\ G}{3} \cdot x\left(1 - \frac{\gamma^2}{5}\right)$$

$$F_y = \frac{4\pi\rho\ G}{3} \cdot y\left(1 + \frac{2\gamma^2}{5}\right)$$

(21) BOUGUER, P. (1734), Comparaison des deux loix que la Terre et les autres Planetes, doivent observer dans la figure que pesanteur leur fait prendre, *Mem. 1734,* pp. 21-40 y *Hist. 1734,* pp. 83-87. La cita corresponde a la página 27.

(22) Este carácter polémico queda claramente reflejado en el siguiente parágrafo de Bouguer: «Entre plusieurs Mathématiciens d'un grand nom qui ont tourné leur vûë vers cette matière, M. Huygens et M. Hermann sont les seuls qui ont appliqué en même temps les deux loix; ils ont trouvé qu'elles s'accordoient à donner à la Terre une même figure dans la suppositions particulières d'une pesanteur originairement constante, et d'une pesanteur proportionnelle aux distances au centre». Afirmación que evidentemente es falsa por lo que respecta a Huygens y extremadamente matizable con relación a Hermann. La memoria, por demás, no cita a Newton ni a Maupertuis.

(23) MAUPERTUIS, P. L. M., Sur les figures des corps célestes, *Mem. 1734,* p. 78.

(24) STIRLING, J. (1735), Of the Figure of the Earth and the Variation of Gravity on the Surface, *Philosophical Transactions, 39,* núm. 438, 98-105. (En realidad fue publicada en

y su cociente:

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{y(1 + 2\gamma^2/5)}{x(1 - \gamma^2/5)} \simeq \frac{y}{x(1 - 3\gamma^2/5)}$$

Supongamos que PG es la prolongación hasta el eje de las x de la vertical al punto P de la superficie y que CH = (3/5)CG. Entonces, como por las propiedades de la elipse CG = γ^2x, tenemos que:

$$HM = x\left(1 - \frac{3\gamma^2}{5}\right)$$

y, por tanto,

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{PM}{HM}$$

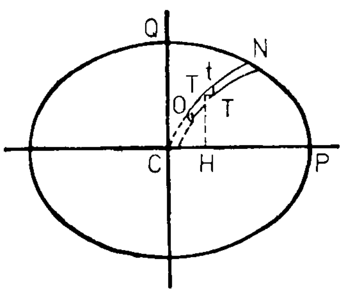
de donde Stirling concluía que la resultante de las fuerzas era en magnitud y dirección como PH. Al incorporar la rotación demostraba por argumentos físicos y geométricos que la nueva resultante sería como PG. A pesar de que quedaba implícito, Stirling no se percató de que había demostrado que la elipse era una figura de equilibrio. En cambio, proporcionó un método geométrico para encontrar la expresión que tenía la fuerza atractiva en cualquier punto de la superficie del elipsoide. Fue Clairaut quien, en 1738, formuló en términos analíticos la condición necesaria y suficiente para que una masa de fluido esté en equilibrio hidrostático (25). El estudio de tal condición le llevó a plantearse el problema de la resolución de una ecuación en derivadas parciales de primer orden, en dos memorias dadas a conocer en 1739 y 1740. Siendo P y Q, razonaba Clairaut, las componentes de la gravedad en las direcciones CP y CQ respectivamente, es precio que P · dx + + Q · dy sea una diferencial exacta de una función potencial U = U(x, y). Sea ON un canal arbitrario que atraviesa una parte de la masa de fluido

---

1738.) *Cf.* TODHUNTER, I. (1873), *A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth,* 2 vols., London, pp. 77 ss.

(25) CLAIRAUT, A. C. (1737), Investigationes aliquot, ex quibus probetur Terrae figuram secundum leges attractionis in rationis inversâ quadrati distantiarum maxime ad Ellipsin accedere debere, per..., *Philosophical Transactions, 40,* núm. 445, 19-25. Ver también «An Inquiry concerning the Figure of suchs Planets as resolve about an Axis, supposing the Density continually to vary, from the centre towars the surface», *Philosophical Transactions, 40,* núm. 449, 277-306 (1738). A los métodos de resolución de la ecuación diferencial que resultaba de exigir esta condición de equilibrio, Clairaut dedicó dos memorias, «Recherches générales sur le calcul intégral» *in Mem. 1739,* pp. 425-436 y «Sur l'integration ou la construction des équations differentielles du premier ordre» *in Mem. 1740,* pp. 293-323. Ver el excelente artículo que en el D.S.B. escribe R. Taton sobre Clairaut. También KLINE, M. (1977), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* New York, pp. 425-6.

hasta la superficie en el punto N, y Tt un elemento de dicho canal en el que Tr = dx y tr = dy. La fuerza Q según la dirección Tt será Q(tr/Tt) que multiplicada por el elemento de masa nos dará el esfuerzo que actúa sobre Tt en la dirección OT, y cuyo valor es Q · dy. Por idéntico razonamiento sobre P, tendremos que el esfuerzo total sería P · dx + Q · dy. Para que hubiera equilibrio, concluía Clairaut, era imprescindible que «l'effort» resultante no dependiera de la trayectoria que unía los puntos O y N, es decir que el trabajo necesario para transportar una partícula de masa desde O hasta N fuese independiente del camino elegido. Demostró, asimismo, que P · dx + Q · dy era una diferencial exacta si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.



Dentro de esta misma línea de formulación analítica de los problemas de la mecánica clásica, merece ser comentado también un memorable trabajo de Euler de 1738 (26). En él se determinaba la atracción de una lámina elíptica de espesor δc sobre un punto situado en el centro y a una distancia c, mediante la expresión:

$$\delta c \iint \frac{c \cdot dx \cdot dy}{(c^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

sobre la elipse

$$\frac{x^2}{a^2(1 + \gamma^2)} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Se encontraba así por primera vez la forma que tenía la fuerza atractiva, que Euler evaluaría mediante la integración respecto de *y*, y desarrollando posteriormente el nuevo integrando en serie de potencias de x.

(26) EULER, L. (1738), De attractione corporum sphaeroidico-ellipticorum, *Comentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 10,* 102-115. Esta memoria, aunque no fue publicada hasta 1747, en realidad era conocida por toda la comunidad científica desde 1738. El trabajo consistía en buscar la expresión de la atracción de un «oblatum» sobre una partícula en el polo y en el ecuador. Los resultados fueron los siguientes:

en el ecuador $4\pi b\left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{5} - \frac{3\varepsilon^2}{35}\right)$

en el polo $4\pi b\left(\frac{1}{3} + \frac{4\varepsilon}{15} - \frac{2\varepsilon^2}{21}\right)$

donde los semiejes valen b y b(1 + ε).

En 1740, el premio que convocaba anualmente la Academia de Ciencias de París iba a ser destinado a la memoria que mejor explicara las causas que provocaban las mareas. El galardón sería finalmente compartido por D. Bernouilli, L. Euler y C. Maclaurin. El trabajo presentado por el científico anglosajón, «De causa physica fluxus et refluxus maris», abordaba sistemáticamente el estudio de todas las cuestiones pendientes del programa esbozado por Newton (27). Después de una serie escalonada de teoremas demostraba que la atracción ejercida por un elipsoide de revolución homogénea sobre una partícula situada en su superficie, estaba dirigida hacia un punto del eje de giro que verificaba una determinada condición geométrica. En el Lema IV, explicaba que dicha atracción podía descomponerse en dos fuerzas, paralelas a los ejes de simetría del elipsoide, que podían ser calculadas independientemente por un ingenioso procedimiento: siendo P(x, y) un punto arbitrario sobre la superficie, la atracción que el elipsoide cuyos ejes valen a y $a(1 + \gamma^2)^{1/2}$ ejerce sobre él en la dirección del eje de giro es la misma que produciría otro elipsoide concéntrico cuyo eje menor fuese y sobre una partícula idéntica situada en el vértice del supuesto nuevo eje de giro. El mismo razonamiento podía ser aplicado a la otra componente sin más que suponer la posición de la partícula en el extremo del eje ecuatorial de un elipsoide cuyo eje mayor valiese y. El problema de cómo encontrar la atracción de un esferoide oblato sobre un punto cualquiera de su superficie quedaba así reducido al de conocer la que actuaba sobre dos puntos singulares, el polo y el ecuador.

Todas estas investigaciones serían posteriormente recogidas y desarrolladas con mayor amplitud en su obra *A Treatise of Fluxions* (1742), donde eran formuladas con claridad las tres condiciones que consideraba necesarias para la existencia de equilibrio: 1.ª) Que la resultante de las fuerzas presentes fuese perpendicular a la superficie (condición de Huygens). 2.ª) Que las columnas imaginarias de fluido que conectaban el centro y la periferia se contrabalancearan (condición de Newton). Y, 3.ª) que cualquier partícula sobre el esferoide fuese impulsada igual-

(27) MACLAURIN, C. (1741), De causa physica fluxus et refluxus maris *in: Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie royale des Sciences en MDCCXL*, Paris, pp. 195-234. Numerosos autores han resaltado la importancia de esta memoria, ver TODHUNTER, *op. cit.*, pp. 134 ss. KLINE, *op. cit.*, pp. 502-503. GRANT, R. (1852), *History of Physical astronomy from the earliest ages to the middle of the Nineteenth century*, London, pp. 66 ss. Muy especialmente debe consultarse TRUESDELL, C. A. (1954), Rational Fluid Mechanics, 1687-1765 *in: Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Serie II: Mechanica, Vol. 12, pp. VII-CXXV, Lausannae. Y también del mismo autor The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788 *in: Leonhardi...*, (II), *11*, Turici, 1940.

mente en todas las direcciones (28). Además de incorporar las conclusiones anteriormente sostenidas por Bouguer, añadía una tercera que había sido propuesta por D. Bernouilli en su *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii* (1738) consistente en exigir que la superficie de equilibrio fuese equipotencial o de nivel (29). En términos algebraicos tales condiciones se reducían a exigir que siendo $b^2y\cdot(a^4x^2 + b^4y^2)^{1/2}$ y $-b^2x\,(a^4x^2 + b^4y^2)^{1/2}$ los cosenos directores del ángulo que forman las componentes de la fuerza y la tangente al punto P(x, y), se verificase que:

$$x\left(\frac{B}{b} - w^2\right) \cdot \frac{b^2y}{(a^4x^2 + b^4y^2)^{1/2}} - A \cdot \frac{y}{a} \cdot \frac{a^2x}{(a^4x^2 + b^4y^2)^{1/2}} = 0$$

es decir,

$$(B - w^2b)b - Aa = 0$$

condición en la que sustituidos los valores de B y A que anteriormente hemos señalado se transforma en la ecuación trascendente que Maclaurin resolvió por desarrollo en serie (30). Si en la memoria de 1740 había exigido la homogeneidad de la masa de fluido, ahora, en 1742, después de comprobar el desajuste entre las previsiones teóricas y los resultados experimentales, ensayaba distintas hipótesis sobre la variación de la densidad terrestre.

CLAIRAUT Y LA CONDICION GENERAL DEL EQUILIBRIO HIDROSTATICO

Todos los resultados encontrados por Maclaurin se realizaron según los procedimientos geométricos empleados por Newton en los *Principia.* La claridad y sencillez de las demostraciones, junto a las propias dificultades internas que poseían los métodos analíticos, provocarían un

---

(28) MACLAURIN, C. (1742), *A Treatise of Fluxions,* 2 vols., Edimburg. El tema de la figura de la Tierra es tratado en el 2.º volumen, pp. 522-566. Ver POGGENDORFF, J. C. (1883), *Histoire de la Physique,* Paris, pp. 474 ss.

(29) BERNOUILLI, D. (1738), *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii,* Strasbourg. Ver en especial pp. 244-245. Bernouilli fue el primero en tener la idea, para simplificar la resolución de las ecuaciones diferenciales, de derivar las fuerzas de una función potencial, de modo que $\partial V(x_i)/\partial x_i = f_i(x_i)$. *Cf.* KLINE, *op. cit.,* p. 524.

(30) Maclaurin encontró que si ε es la excentricidad y j el cociente de las fuerzas centrífuga y atractiva en el ecuador, entonces

$$e^2 = \frac{\frac{5j}{2}}{1 + \frac{6j}{7}}$$

retraso considerable en el proceso de formalización algebraica de la física. El programa propuesto por Euler en su *Mechania sive motus scientia analytice exposita* (1736) para hacer de la mecánica una ciencia en la que sus leyes no sólo fuesen ciertas sino lógicamente necesarias, que tantos seguidores había encontrado, era abandonado por Clairaut en el más importante tratado de fluidos escrito durante la primera mitad del siglo XVIII (31). La línea de sus anteriores trabajos se veía truncada ante la admiración que le causó el método geométrico empleado por Maclaurin,

> «...si belle et si sçavante, que j'ai crû faire plaisir à mes lecteurs de la mettre ici» (32).

La parte más original de la *Théorie de la figure de la terre* iba a ser la destinada a los principios generales de equilibrio hidrostático. Las dos condiciones exigidas por Newton y Huygens, consideradas básicas y nunca discutidas desde la publicación de la memoria de Bouguer de 1734, habían sido el pilar sobre el que se asentó su artículo «An Inquiry concerning the Figure...» (*Phil. Trans.,* 1738). Por la correspondencia cruzada entre Clairaut y Euler en 1742, conocemos la insuficiencia teórica de tales supuestos y la gestación de un principio más general de equilibrio hidrostático:

> «Par ma theorie —escribía Clairaut en enero de 1742— j'ai reconnû que je m'etois trompé dans les transactios philosophiques lorsque j'avois detérminé la figure de la Terre en suposant qu'elle étoit composée de conclus elliptiques semblables de differents densités. Ce qui m'avoit induit en erreur, c'étoit la même memoire de Mr. Bouguer dont je viens de vous parler, parce que je m'etois contenté de faire en sorte que les colonnes fussent en equilibre et que la tendence fut perpendiculaire à la surface. Ayant bien examiné ce Probleme j'ai trouvé que les conclus de la Terre ne pouvoient pas être semblables mais qu'elles etoient cependant toujours plus grands à mesure qu'elles s'eloignent du centre, à cause que lès parties les plus denses sont celles qui sont les plus voisines du centre» (33).

---

(31) *Cf.* DUGAS (1950), *op. cit.,* p. 228. Sobre las dificultades para el desarrollo del cálculo y la influencia de Maclaurin en el retroceso hacia los métodos geométricos, ver SCOTT, J. F. (1975), *A history of mathematics,* London. Además de la belleza y sencillez con las que Maclaurin demostró las conclusiones de su teoría, es preciso considerar otros factores; entre ellos, tal vez el más importante, la incertidumbre que pesaba sobre algunos de los elementos básicos del método analítico, tales como la diferencia entre diferencial y derivada, divisibilidad de los infinitésimos, convergencia de las series, concepto de función... Estos problemas se encuentran ampliamente tratados en la obra ya citada de KLINE, M. (1977).

(32) CLAIRAUT, A. C. (1743), *op. cit.,* p. 158.

(33) A. C. Clairaut a L. Euler; París, 4 de enero de 1742, *in: Leonardi Euleri. Opera Omnia, Series Quarta A: Cómmercium Epiotolicum* (1980), vol. 5: Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange. JUŠKEVIC, A.; TATON, R. (Eds.), Basel-Boston-Stutgart, p. 102 ss.

Unos días más tarde Euler se apresuraba a manifestarle su aquiescencia con la nueva orientación dada por Clairaut a la teoría del equilibrio hidrostático de fluidos:

> «Le principe dont vous faites usage, sera sans doute, qu'une masse fluide ne peut être en equilibre qu'en cas que chaque molécule soit egalement comprimée de toute part, et en ce principe sont egalement fondés les deux, dont Mrs. Maupertuis et Bourguer se sont servi» (34).

Cuando aparezca al año siguiente la *Théorie de la figure...*, dicho principio será definitivamente reformulado en su forma más general con el siguiente enunciado:

> «Une masse de Fluide —escribe Clairaut— ne sçauroit être en équilibre, que les efforts de toutes les parties qui sont comprises dans un canal de figure quelconque qu'on imagine traveser la masse entiere, ne se détruisent mutuellement» (35).

Dicha condición, como ya se dijo al comentar su memoria de 1740, equivalía a exigir que siendo P, Q y R las componentes de la atracción según los tres ejes de coordenadas, se cumpliese que $P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz$ «...soit une differentielle complete, à fin qu'il puisse y avoir équilibre dans le Fluide». En la segunda parte, Clairaut desarrollaba exhaustivamente la teoría de la figura de la Tierra:

> «Il s'agissait en somme de mettre la Terre en équation...» (36).

Comparados los datos experimentales existentes con los resultados obtenidos en el supuesto de considerar su densidad uniforme, concluye la necesidad de analizar el problema desde hipótesis más complejas:

> «Au reste, comme la longueur du Pendule et le rapport des Axes donnés par M. Newton, ne s'accordent pas avec les Observations que nous avons faites en Laponie, j'ai abandonné la supposition de l'homogeneité de la Terre, et j'ai cherché sa figure, en supposant qu'elle fut composée d'une infinité de couches dont les densités variassent suivant une loi quelconque depuis le centre qu'à la surface» (37).

---

(34) L. Euler a A. C. Clairaut; Berlín, enero-febrero de 1742. *Ibid.*, pp. 110 ss.

(35) CLAIRAUT (1743), *op. cit.*, p. 1. En la Introducción reconoce que fue Bouguer quien por primera vez demostró la necesidad de que se verificasen simultáneamente los dos principios que denomina «Principe des Canaux» y «Principe de Surface de Niveau»: «...car j'ai trouvé qu'il y avait une infinité d'hipothêses de pesanteur où ces deux principes donneraient la même courbe, sans que pour cela les efforts de toutes les parties du Fluide se contrabalançassent mutuellment.» p. XXXI. En la página 5 formula el principio general de equilibrio en los siguientes términos: «Afin qu'une masse de fluide puisse être en equilibre, il faut que les efforts de toutes les parties du fluide renfermées dans un canal quelconque rentrant lui-même se détruisent mutuellment».

(36) Tal afirmación que, a nuestro juicio, contiene acertadamente el espíritu con el que Clairaut se enfrentaba al tema, procede de la obra de VERONET, A. (1914), *La forme de la terre et sa constitution interne*, Paris, p. 10.

(37) CLAIRAUT, A. C. (1743), *op. cit.*, pp. 154-5.

Para el tratamiento de las nuevas leyes de variación de la densidad, Clairaut simplificó los desarrollos matemáticos suponiendo que la masa de fluido giraba con una velocidad angular «assez faible» constante y como un todo «tournant en bloc». Además de la desigualdad que daba los límites entre los cuales debía estar comprendido el achatamiento polar ($1/230 > e > 1/577$), el resultado más importante encontrado por Clairaut fue la famosa fórmula:

$$\frac{P - E}{E} = \frac{5}{2} j - e$$

donde P y E son la gravedad en el polo y en el ecuador respectivamente, j el cociente entre la fuerza centrífuga y gravitatoria en el ecuador y e la excentricidad de la Tierra. Ambas conclusiones eran válidas independientemente de la hipótesis que se adoptase para la densidad (38).

El capítulo 5.º estaba destinado a comparar las medidas de grados, efectuadas por Maupertuis y él mismo en Laponia y por Cassini y La Caille en Francia, con su nueva teoría. De dichas observaciones se deducía que la relación entre los ejes era 177/178, mayor, por tanto, que el límite superior previsto (230/231). La conclusión final fue que no podía decidirse la cuestión hasta conocer los resultados aportados por los expedicionarios americanos (39).

En suma, los trabajos de Clairaut determinaban, independientemente de los datos geodésicos, el aplanamiento terrestre con una

(38) Ver TODHUNTER, I. (1873), *op. cit.*, pp. 191 ss. Una reconstrucción completa del tema de la figura que adoptan masas de fluido en rotación no homogéneas con numerosas referencias al trabajo de Clairaut puede encontrarse en CALLANDARU, M. O. (1889), Mémoire sur la Théorie de la Figure des Planetes, *Annales de l'Observatoire de Paris, 19,* pp. E1-E52; también LIAPOUNOFF, V. (1904), Sur l'équation de Clairaut et les équations les plus générales de la théorie de la figure des planètes *in: Mémoire de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, 15,* núm. 10. APELL, P. (1937), *op. cit.,* 2.ª parte, pp. 125-141. Siendo $\rho = \rho(r)$ la ley de variación de la densidad terrestre, Clairaut obtuvo la siguiente relación entre el aplanamiento terrestre ε y la densidad:

$$\varepsilon'' rD + 2\varepsilon' rD' + 2\varepsilon D' + 6\varepsilon' D = 0$$

donde D es la densidad media de la tierra. A nosotros nos ha sido de gran ayuda por sus numerosas referencias históricas la impresionante obra de LAPLACE, P. S. (1799-1825), *Traité de mécanique céleste,* 5 vols., Paris. Ver también el excelente estudio que Ch. C. Gillispie dedica a Laplace en el D.S.B.

(39) «La Théorie précédente se trouvent donc d'accord avec toutes les Mesures du Pendule et avec l'Observation des Diametres de Jupiter; s'il arrive, outre cela, que les Mesures que nous attendons du Perou comparées à celles qui ont été faites en Laponie, rendent la difference des Axes moindre que 1/230, cette Théorie aura toute la confirmation possible, et la Gravitation universelle que s'accorde si bien avec les mouvemens des Planètes, s'accordera encore avec leurs Figures.» CLAIRAUT (1743), *op. cit.*, p. 305.

aproximación de una milésima. Los límites por él establecidos quedarían inalterables durante más de un siglo y hasta las investigaciones de Bessel en 1841 estuvieron lejos del alcance de los métodos experimentales.

APENDICE

Reconstrucción del razonamiento de Clairaut sobre el problema de la figura de la Tierra (1743)

En las páginas anteriores hemos estudiado el desarrollo teórico del tema de la figura de la Tierra entre las obras de Newton y Clairaut, así como las aportaciones efectuadas por los distintos científicos del período. Tal y como habíamos anunciado, intentaremos ahora una reconstrucción fiel de todo el proceso deductivo seguido por el matemático y físico francés. Laplace, comentando la *Théorie de la figure de la Terre,* escribía lo siguiente:

> «L'importance de tous ces résultats et l'élégance avec laquelle ils sont présentés, placent cet ouvrage au rang des plus belles productions scientifiques» (40).

La elección, pues, de la obra de Clairaut está justificada tanto por el favorable juicio que mereció a los ojos de Laplace como por el carácter sintético y conclusivo que tiene respecto de las publicaciones anteriores. Adelantemos que la única función que pretenden cumplir estas páginas es la de proporcionar un contacto directo y preciso con los usos y métodos de las ciencias físico-matemáticas durante la primera mitad del siglo XVIII. Para no extendernos demasiado prestaremos atención solamente al tópico más básico del libro, es decir la deducción del achatamiento polar del elipsoide terrestre en el supuesto de que la densidad fuese uniforme.

Lo que Clairaut quiere demostrar es que, exigiendo el cumplimiento de los principios de Newton y Huygens, la superficie exterior de la masa fluida adopta en el equilibrio la forma de un elipsoide. Calculando posteriormente la expresión de las fuerzas que actúan por un método que había sido propuesto por Maclaurin, encuentra una fórmula que expresa el valor del achatamiento en función del cociente entre las fuerzas centrífuga y atractiva en el ecuador. Los pasos que seguirá en su razonamiento son los siguientes:

1. Justificación del método que emplea para el cálculo de las componentes de la fuerza atractiva.

2. Demostración de que la resultante de la fuerza de atracción y centrífuga es perpendicular a la superficie de equilibrio.

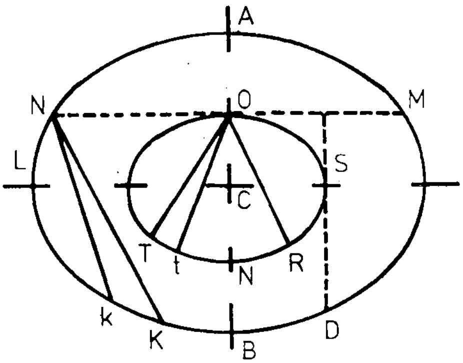
3. Cálculo de la atracción en el polo.

4. Cálculo de la atracción en el ecuador.

5. Cálculo de achatamiento polar del elipsoide.

Vengamos ahora a la descripción detallada de cada uno de estos pasos.

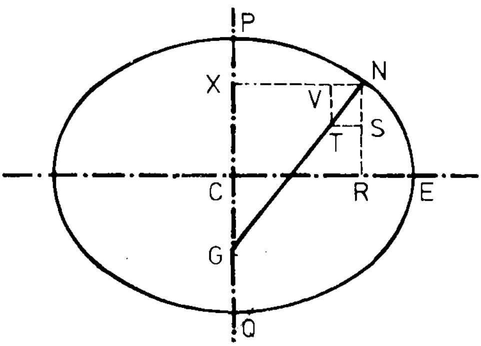
(40) LAPLACE, *Traité...,* vol. 5, p. 7.



1. La atracción que el esferoide ANBM ejerce sobre un punto cualquiera de su superficie N en la dirección del eje de giro AB, es igual a la atracción que el esferoide QSR ejercería sobre el punto Q situado en el vértice polar.

Supongamos dos elipses concéntricas ABM y QSH y que el plano que las contiene gira en torno al eje MQN un ángulo infinitamente pequeño. Dicho movimiento producirá «cuñas» sólidas infinitamente delgadas. Clairaut va a demostrar que la atracción producida por la cuña ANBM sobre un corpúsculo situado en N según la dirección AB, es igual a la que provocaría la cuña pequeña QTHS sobre la misma partícula en Q. Dividamos estas cuñas en pirámides infinitesimales tales como las definidas por las líneas QT, Qt, Nk y NK. Puede demostrarse sin ninguna dificultad que la atracción de cada una de estas pirámides es proporcional al cociente del área de su base por la altura.

Consideremos, como se muestra en la figura, dos líneas QR y QT igualmente alejadas del eje QH y tracemos desde el punto N las dos paralelas a dichas líneas NK y NL. Estos cuatro segmentos definen, a causa del pequeño giro antes mencionado, otras tantas pirámides infinitesimales. Pues bien, puesto que las atracciones son proporcionales a las alturas y como en una elipse se verifica siempre que QT + QR = = NL + NK, la suma de las atracciones de las pirámides construidas en la elipse QSH es igual a la suma de las correspondientes sobre la elipse AMB. Descompuesta la resultante según los ejes de simetría, Clairaut da por concluida su demostración, ya que en la elipse pequeña se anulan sistemáticamente las componentes en la dirección CS. Por el mismo razonamiento pueden extenderse estas consideraciones al cálculo de la atracción según el eje ecuatorial.



2. Se trata de probar que las atracciones sobre un esferoide elíptico combinadas con la acción centrífuga producen una resultante que es perpendicular a la superficie. Hacemos las siguientes definiciones:

E = atracción del esferoide en el ecuador.

P = atracción en el polo.

F = fuerza centrífuga en el ecuador.

NG: perpendicular en el punto N.

XG: subnormal sobre el eje menor, igual a $\frac{CE^2}{CP^2} \cdot CX$.

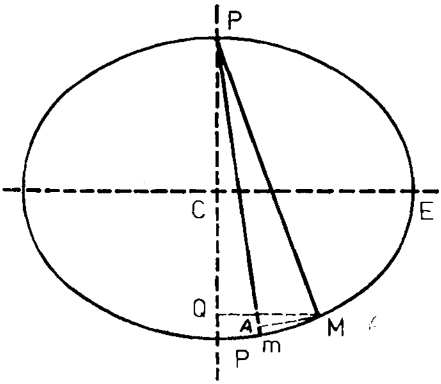
La atracción en N en la dirección NR es la misma que tendríamos en el polo X de un esferoide semejante a PNE cuyo semieje menor fuese CX. Entonces P · (CX/CP) será la fuerza que actúa en N paralela al eje PC[4]. Por el mismo razonamiento, la atracción en dicho punto según NX sería E · (NX/CE). Puesto que F · (NX/CE) es el valor de la fuerza centrífuga, (E − F)(NX/CE) será la fuerza total resultante que actúa en N según la dirección NX. Supongamos que NV y NS sean las dos componentes de la gravedad y que NG es la normal a la superficie, entonces si la resultante es NT y, por tanto, está dirigida según la vertical del lugar, debe verificarse que:

$$\frac{VT}{NV} = \frac{XG}{NX}$$

y, sustituyendo los valores de cada uno de los factores de la proporción,

$$\frac{P}{E-F} = \frac{CE}{CP}$$

que es la condición que deben cumplir las fuerzas que actúan para que la figura de equilibrio sea un elipsoide.



3. Imaginemos en la elipse de la figura un giro infinitesimal α en torno a PC_p, de manera que PAM formará una pirámide elemental. Haremos, siguiendo a Clairaut, las siguientes definiciones:

P = atracción en el polo.

Mm: arco infinitesimal del meridiano PE_p.

$MA \perp Pm$

$CP = 1$

$CE = m = 1 + \delta \Rightarrow m^2 \simeq 1 + 2\delta$.

PQ = abscisa = z

MQ = ordenada = u

$u \cdot \alpha$ = arco de la pequeña línea recta descrita por el punto M debido al giro.

cos MPQ = s

sen MPQ = $(1 - s^2)^{1/2}$

La base de la pirámide infinitesimal descrita por M valdría $u \cdot \alpha \cdot MA$ y, por tanto, la atracción de la pirámide sobre el punto P en la dirección P_p sería:

$$\frac{u \cdot \alpha \cdot s \cdot MA}{PM}$$

Utilizando las propiedades de la elipse, Clairaut elimina el factor u de la expresión anterior:

$$\cos MPQ = \frac{PQ}{PM} = \frac{z}{(z^2 + u^2)^{1/2}} = s \quad \Rightarrow \quad z = \frac{su}{(1 - s^2)^{1/2}}$$

y como en una elipse se verifica que:

$$u^2 = 2m^2s - m^2z^2$$

tendremos que:

$$u = \frac{2m^2s(1 - s^2)^{1/2}}{1 - s^2 + m^2s^2}$$

y la fuerza de atracción será:

$$\frac{2\alpha m^2}{n^3}\left(n \cdot ds - \frac{n \cdot ds}{1 + n^2s^2}\right)$$

donde $n^2 = m^2 - 1 \simeq 2\delta$.

La fuerza con la que el corpúsculo P es atraído por la suma de todas las pirámides elementales que forman la cuña infinitesimal producida por el pequeño giro α, se obtendrá integrando la expresión anterior. Es decir,

$$\frac{2\alpha m^2}{n^3}(ns - \operatorname{arctag} ns)$$

y haciendo $s = 1$ y $\alpha = 2\pi$ tendremos la fuerza que produciría todo el elipsoide de rotación sobre el corpúsculo situado en P, que será:

$$P = \frac{4\pi m^2}{n^3}(n - \operatorname{arctag} n) \qquad (1)$$

Expresión que desarrollada en serie y despreciando los factores de segundo orden en n, resultaría:

$$P = \frac{4\pi}{3}\left(1 + \frac{4}{5}\delta\right)$$

donde hemos sustituido m y n por sus valores en función del achatamiento δ. Si $\delta = 0$, tendríamos que la atracción sobre la superficie de la esfera sería $4\pi/3$.

4. Puesto que como la masa de fluido en realidad gira en torno al eje PR, no es posible la aplicación directa del método descrito anteriormente para el cálculo de la atracción en el ecuador. Clairaut se ve obligado, como sus antecesores, a idear algún resorte que permita una extrapolación de aquél sin violentar la situación real. Haremos las siguientes definiciones:

E: atracción en el ecuador.

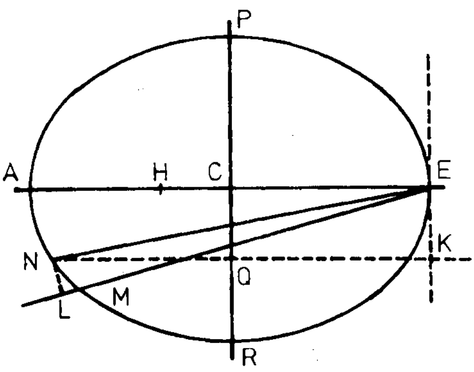
$CQ = KE = u$.

$NK = z$.

sen $NEC = s$, cos $NEC = (1 - s^2)^{1/2}$

$HE = PR$.

$NL \perp EL$.



Supongamos que el elipsoide terrestre es seccionado por planos paralelos a PR que pasan por el eje EK, de modo que la figura que presentamos recogería la elipse que engendra el plano que contiene al eje cuatorial. Si EPAR efectúa un pequeño giro α en torno a la tangente EK, se formará una cuña elíptica cuyos elementos pueden suponerse pirámides como las descritas por las líneas EN, NL y LE. La base de esta pirámide será $\alpha \cdot z \cdot NL$ y la atracción en la dirección EC vendrá dada por la expresión:

$$\frac{\alpha \cdot z \cdot NL}{EN}(1 - s^2)^{1/2} = \alpha \cdot z \cdot ds$$

Teniendo en cuenta que por las propiedades de la elipse $PQ \cdot QR/QN^2 = PC^2/CE^2$, es decir $(1 - u^2)/(z^2 - 2mz + m^2) = 1/m^2$, y que sen. $NEC = EK/NE = u/(u^2 + z^2)^{1/2} = s$, puede verificarse sin dificultad que de ambas igualdades se deduce que:

$$z = \frac{2m(1 - s^2)}{1 + m^2s^2 - s^2}$$

valor que sustituido en $\alpha \cdot z \cdot ds$ y teniendo en cuenta que $m^2 - 1 = n^2$, resulta:

$$\frac{2m\alpha(1 - s^2)ds}{1 + n^2s^2}$$

Si efectuamos su desarrollo en serie despreciando los términos de orden superior al segundo, tendríamos:

$$2m\alpha(1 - s^2)(1 - n^2s^2)ds$$

cuya integral

$$2m\alpha\left(s - \frac{s^3}{3} - \frac{n^2s^3}{3} + \frac{n^2s^5}{5}\right)$$

es la atracción que produce la cuña descrita por el sector NEM. Si hacemos $s = 1$, tendríamos la atracción de la cuña semi-elíptica descrita por ERA, es decir

$$2m\alpha\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{15}n^2\right)$$

y como $m = 1 + \delta$ y $n^2 = 2\delta$, resultará:

$$2\alpha\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\delta\right)$$

Si $\delta = 0$, la última expresión proporciona la atracción de un semicírculo infinitamente delgado que sería el que produce un plano paralelo a PR y que pasa por EK sobre una esfera cuyo diámetro EH fuese igual al eje polar del elipsoide terrestre. La atracción de este semicírculo valdrá por tanto $4\alpha/3$. Para extrapolar el resultado al conjunto de todas las cuñas semielípticas y semicirculares, hemos de tener en cuenta que la relación entre la esfera descrita sobre EH y el esferoide ERAP es la misma que existe entre sus elementos, puesto que ambos sólidos contienen el mismo número de «partes». La relación sería, por tanto,

$$\frac{2\alpha\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\delta\right)}{\frac{4}{3}\alpha} = 1 + \frac{3}{5}\delta$$

Entonces, concluye Clairaut, bastará con multiplicar dicho cociente por $4\pi/3$, atracción sobre la superficie de la esfera, para encontrar la expresión de la fuerza atractiva sobre el ecuador, así:

$$E = \frac{4\pi}{3}\left(1 + \frac{3}{5}\delta\right)$$

5. Tal y como dijimos, para que el esferoide elíptico gire sin alterar su figura permaneciendo en equilibrio, es necesario que se cumpla que:

$$\frac{P}{E - F} = \frac{CE}{CP}$$

es decir,

$$\frac{\frac{4\pi}{3}\left(1 + \frac{4}{5}\delta\right)}{\frac{4\pi}{3}\left(1 + \frac{3}{5}\delta\right) - F} = \frac{1 + \delta}{1}$$

y por tanto,

$$F = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\delta$$

si hacemos $\phi = F/(E - F)$, entonces tendríamos que en primera aproximación, despreciando los términos de segundo orden en el achatamiento,

$$\phi = \frac{4}{5}\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{230}$$

Si no hubiésemos despreciado δ^2 entonces el valor del aplanamiento hubiese sido $\phi = 1/230{,}61$.

Como vemos, el valor es muy próximo al encontrado medio sigo antes por Newton, lo que, sin embargo, no debe hacernos perder de vista el importante esfuerzo de racionalización y fundamentación de la mecánica de fluidos —tema en el que, justo es decirlo, Newton había cometido gruesos errores—, llevada a cabo durante la primera mitad del siglo XVIII. En las siguientes páginas de la *Théorie*... se estudia el comportamiento de fluidos no homogéneos. Nosotros consideramos que la descripción que hemos realizado de un tema concreto es suficiente para comprender el modo de razonar de una gran parte de la comunidad de físicos y matemáticos del período estudiado.

Abreviaturas utilizadas

DSB = *Dictionary of Scientific Biography*, 16 vols., Ed. Ch. C. Gillispie, New York, 1970-1980.

Hist. = *Histoire de l'Académie royale des Sciences. Année*...

Mem. = *Mémoire de l'Académie royale des Sciences.*

Reg. = *Académie royale des Sciences. Procés-Verbaux* (Archives de l'Académie des Sciences. Paris).