



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

# Teorema de representación de Riesz para $C_{00}(\mathbb{R})^*$ y aplicaciones a EDPs

Presentado por:  
Anabel Galindo Pérez

Tutor:  
Juan José Nieto Muñoz  
*Departamento de Matemática Aplicada*

Óscar Sánchez Romero  
*Departamento de Matemática Aplicada*

Curso académico 2021-2022





# Teorema de representación de Riesz para $C_{00}(\mathbb{R})^*$ y aplicaciones a EDPs

Anabel Galindo Pérez

Anabel Galindo Pérez *Teorema de representación de Riesz para  $C_{00}(\mathbb{R})^*$  y aplicaciones a EDPs .*

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2021-2022.

**Responsables de  
tutorización**

Juan José Nieto Muñoz  
*Departamento de Matemática Aplicada*

Óscar Sánchez Romero  
*Departamento de Matemática Aplicada*

Grado en Matemáticas  
Facultad de Ciencias  
Universidad de Granada

## DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Anabel Galindo Pérez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2021-2022, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 7 de julio de 2022

Fdo: Anabel Galindo Pérez



*A mis tres hombres*



# Índice general

Summary	XI
Introducción	XIII
<b>1 Funciones, medidas y compacidad</b>	<b>1</b>
1.1 Resultados básicos de la Teoría de la Medida . . . . .	1
1.1.1 Espacios y conjuntos medibles; medidas en $[0, \infty]$ . . . . .	1
1.1.2 Medidas signadas . . . . .	3
1.2 Espacios $\mathcal{L}^1$ y $L^1$ . . . . .	10
1.2.1 Funciones e integrales . . . . .	10
1.2.2 Operadores lineales y dualidad . . . . .	14
1.3 Otros resultados de Análisis Funcional . . . . .	16
1.3.1 Teorema de Banach-Alaouglu-Bourbaki . . . . .	16
1.3.2 Inclusión isométrica de $L^1$ en $M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ . . . . .	17
1.4 Hacia el teorema de representación de Riesz . . . . .	19
1.4.1 Funciones vistas como medidas: integral de producto . . . . .	19
1.4.2 Teorema de representación de Riesz . . . . .	22
<b>2 Aplicación: ecuaciones diferenciales</b>	<b>29</b>
2.1 Leyes de conservación . . . . .	29
2.2 Ecuación a estudiar: un modelo de drift-difusión no lineal . . . . .	32
2.2.1 Continuidad de las soluciones . . . . .	33
2.2.2 Formulación débil . . . . .	34
2.2.3 Reformulación de la no linealidad . . . . .	35
2.3 Comportamiento asintótico cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ . . . . .	36
2.3.1 Conservación implica compacidad . . . . .	36
2.3.1.1 La unicidad ayuda a la convergencia . . . . .	38
2.3.2 Parte “fácil”: límite de las partes lineales . . . . .	38
2.3.3 Límite de la parte no lineal . . . . .	39
2.3.3.1 Acotación del momento . . . . .	39
2.3.3.2 Paso al límite . . . . .	41
Bibliografía	45



## Summary

Starting from a partial derivative model that constitutes a conservation law, a mathematical reading of this fact is that the equations we work with preserve the  $L^1$  norm. This tells us that the solutions of the model, even before we know of its existence and/or uniqueness, will be bounded with this norm. This type of conservation tells us that our solutions live in a bounded space of the  $L^1$  space. However, this fact at first sight, it does not give us a compactness or convergence which we can work with.

In this project we will see that actually this boundedness in  $L^1$  can be used as a tool to establish a convergence of solutions, although not to a function of  $L^1$ , but to a measure. In a second phase, it will be crucial to determine which equation verifies this limit measure. In order to have a global view of the steps we have followed to obtain this convergence, let us see a small summary of these results. We know that a bounded sequence of integrable functions does not have to converge. But if we consider this same sequence as a bounded sequence in the measure space, and we use the measure space is the dual of a normed space (Riesz representation theorem), we can find a partial one that converges (Banach-Alouglu-Bourbaki theorem). Here, we take into account that it will do so to a measure and with the weak-\* topology.

The general structure followed until we get to introduce at the results that allow us to affirm the above-mentioned summary, will be the next: in **Capítulo 1** we compile the results studied in the degree coming from different subjects, as well as we introduce new concepts that are necessary for those results. As main source consulted, we highlight both the notes of the Functional Analysis course of the degree [PG10] and the books of Donald L. Cohn [Coh97] and Gerald B. Folland [Fol99]. In a second Chapter, we will illustrate all these results with an example extracted from [Nie03], with this address some objectives of this project.

In the first chapter, the most relevant results will be both the Banach-Alouglu-Bourbaki theorem and the Riesz representation theorem, we also emphasize the isometric inclusion of the  $L^1$  space in the finite signed regular Borel measures,  $M_r$ , that will be presented in this chapter since as a new concept. The first of these theorems tells us that the closed balls in the dual of a normed space are *compact*, which will allow us to obtain some convergence on sequences working with them in the dual space. The second of these theorems, which gives the title to this project, will allow us to identify the dual of the space of functions with the space of measures.

## Summary

In order to arrive at both the inclusion of  $L^1$  in the measures space  $M_r$  and the Riesz theorem, it will be crucial to define the integral of a function with respect to a measure. In addition, through various examples in the project developed in different parts, we will define and study a measure constructed from a function in  $L^1$ , which will be nothing more than the integral of the function with respect to the Lebesgue measure as seen in Mathematical Analysis I. All these examples will aim at identifying the space of integrable functions,  $L^1$ , with a subspace within the measures space  $M_r$ .

Another important new concept that we will introduce in the first chapter will be that of a new topology, *the weak-\* topology*, which has the advantage of having *more* compact sets. It will be the topology that we will use in the Banach-Alouglu-Bourbaki theorem to assert compactness of closed subsets of the dual space. Therefore, in a general way, every bounded sequence in the dual space of a normed space will have to have a partial that converges in the weak-\* topology.

In **Capítulo 2** we will start from a conservation law, namely mass, which will give us an at first sight, estimate in  $L^1$  and we will also see how the solutions behave when varying a parameter of the equation. Since  $L^1$  is embedded in the measure space, as we have already seen, the solutions will be bounded as measures. Viewing the measures as the dual space of the  $C_0$  space, and using that they are bounded, we can affirm that they will have a convergent subsequence in the weak-\* topology to a measure.

This weak-\* topology will come naturally when using it in the weak formulation of the equations. A measure coming from a function in  $L^1$ , seen as an operator on  $C_0$ , will be nothing more than the integral of the product, as we will see in **Capítulo 1**. Therefore, the difficulty of taking limits in the weak formulation will reside in the nonlinear terms of the equation, which we will rewrite and after that we will prove the bounding of the first moment, so that we can finally pass to the limit.

## Introducción

Cuando nos enfrentamos a un modelo en derivadas parciales que constituye una ley de conservación, una lectura matemática de este hecho es que las ecuaciones con las que trabajamos preservan la norma  $L^1$ . Esto nos indica que las soluciones del modelo, antes incluso de saber de su existencia y/o unicidad, van a estar acotadas con esta norma. Este tipo de conservación nos indica que nuestras soluciones *viven* en un espacio acotado de  $L^1$ . Sin embargo, este hecho, *a priori*, no nos da una compacidad o convergencia con la que podamos trabajar.

En esta memoria veremos que realmente esta acotación en  $L^1$  sí puede usarse como herramienta para establecer una convergencia de soluciones, aunque no a una función de  $L^1$ , sino a una medida. En una segunda fase será crucial determinar qué ecuación verifica esta medida límite. Para tener una visión global de los pasos que hemos seguido para obtener esta convergencia, veamos un pequeño resumen de estos resultados. Sabemos que una sucesión acotada de funciones integrables no tiene por qué converger. Sin embargo, viéndola como una sucesión acotada en el espacio de medidas, al ser este el dual de un espacio normado (Teorema de representación de Riesz), podemos encontrar una parcial que convergerá (Teorema de Banach-Alouglu-Bourbaki), teniendo en cuenta que lo hará a una medida y con la topología débil-\*

La estructura general seguida hasta poder llegar a los resultados que nos permitan afirmar el resumen antes comentado será la siguiente: en el **Capítulo 1** recopilaremos los resultados estudiados en el grado provenientes de diversas asignaturas, así como introduciremos nuevos conceptos que nos serán necesarios más adelante. Como principal fuente consultada destacamos tanto los apuntes de la asignatura de Análisis Funcional del grado [PG10] como los libros de Donald L. Cohn [Coh97] y Gerald B. Folland [Fol99]. En un segundo Capítulo, ilustraremos todos estos resultados con un ejemplo extraído de [Nie03], quedando así abordados todos los objetivos previstos en la propuesta de este proyecto.

En el primer Capítulo, los resultados más relevantes serán tanto el teorema de Banach-Alouglu-Bourbaki como el teorema de representación de Riesz, pudiendo destacar también la inclusión isométrica del espacio  $L^1$  en las medidas finitas signadas regulares de Borel,  $M_r$ , las cuales presentaremos dentro de este al tratarse de un nuevo concepto. El primero de estos teoremas nos dice que las bolas cerradas en el dual de un espacio normado son compactas en una determinada topología que definiremos posteriormente, lo que nos permitirá obtener cierta convergencia

sobre sucesiones vistas dentro de este dual. El segundo de ellos, el cual da título a esta memoria, nos permitirá identificar el dual del espacio  $C_{00}$  con el espacio de las medidas  $M_r$ .

Para poder llegar tanto a la inclusión de  $L^1$  en las medidas como al teorema de Riesz, será crucial definir la integral de una función respecto a una medida. Además, a través de diversos ejemplos dentro de la memoria desarrollados en distintas partes (según correspondan), definiremos y estudiaremos una medida construida a partir de una función en  $L^1$ , que no será más que la integral de la función respecto a la medida de Lebesgue como se vio en Análisis Matemático I. Todos estos ejemplos tendrán como finalidad el poder identificar el espacio de las funciones integrables  $L^1$  con un subespacio dentro de las medidas.

Otro nuevo concepto importante que presentaremos en este primer capítulo será el de una nueva topología, la *topología débil-\**, que posee la ventaja de tener *más* conjuntos compactos. Esta será la topología que usaremos en el teorema de Banach-Alouglu-Bourbaki para afirmar la compacidad de los subconjuntos cerrados del dual. Por tanto, a grandes rasgos, toda sucesión acotada en el dual de un espacio normado tendrá que tener una parcial que converja en la topología débil-\*

En el **Capítulo 2** partiremos de una ley de conservación, concretamente de masa, lo que nos dará una estimación, *a priori*, en  $L^1$ . Con esto veremos cómo se comportan las soluciones al variar un parámetro de la ecuación. Como  $L^1$  está embebido en las medidas, hecho que ya habíamos comentado, las soluciones estarán acotadas como medidas. Viendo las medidas como el dual del espacio  $C_{00}$ , al estar acotadas, tendrán una subsucesión convergente en la topología débil-*\** a una medida.

Esta topología débil-*\** aparecerá de manera natural al usarla en la formulación débil de las ecuaciones, ya que una medida que provenga de una función en  $L^1$  vista como operador sobre  $C_{00}$ , no será más que la integral del producto, esto será probado en el **Capítulo 1**. Por tanto, la dificultad de tomar límites en la formulación débil residirá en los términos no lineales de la ecuación. Para ello reescribiremos y demostraremos la acotación del primer momento, lo que nos llevará finalmente a poder pasar al límite.

# 1 Funciones, medidas y compacidad

En este primer capítulo recogeremos los resultados tanto de Análisis Funcional como teoría de la medida que necesitaremos hasta poder llegar a obtener ciertas propiedades de compacidad con los que pretendemos establecer un tipo de convergencia de soluciones aproximadas en medidas de una ecuación en derivadas parciales en forma de ley de conservación. En particular, presentaremos resultados necesarios de la teoría de la medida, así como de espacios vectoriales topológicos y sus duales, que nos permitirán dar una representación de ciertas medidas como operadores de  $C_0$ . Del mismo modo, a grandes rasgos, veremos que una sucesión acotada que pertenezca al dual de algún espacio normado tendrá una parcial convergente en una nueva topología que definiremos. Con lo cual, identificando el espacio de las funciones integrables con un subespacio dentro de estas medidas, podremos obtener una convergencia a una medida de una sucesión acotada en el espacio de funciones integrables con esta nueva topología.

## 1.1. Resultados básicos de la Teoría de la Medida

En esta sección recordaremos las definiciones fundamentales sobre medidas vistas en la asignatura de Análisis Matemático II para después poder generalizar estos conceptos a las llamadas medidas signadas, más concretamente las finitas regulares de Borel, que son las que realmente vamos buscando para poder enunciar el teorema de representación de Riesz.

### 1.1.1. Espacios y conjuntos medibles; medidas en $[0, \infty]$

**Definición 1.1.** Sea  $\Omega$  un conjunto no vacío. Se dice que una familia  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\Omega$  es una  $\sigma$ -álgebra si cumple las siguientes tres condiciones:

1. contiene al total:  $\Omega \in \mathcal{A}$ ;
2. es cerrado para uniones numerables, es decir:

$$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

3. es cerrado para complementarios: si  $A \in \mathcal{A}$  entonces  $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ .

Al par  $(\Omega, \mathcal{A})$  se le denomina **espacio medible** y a cada subconjunto  $A \subset \Omega$  que esté en  $\mathcal{A}$  se denomina **conjunto medible**.

Un ejemplo de  $\sigma$ -álgebra es el conjunto  $\mathcal{P}(\Omega)$  formado por todos los subconjuntos de  $\Omega$ . ¿Cómo se pueden construir otras  $\sigma$ -álgebras? Por ejemplo, aprovechando que la intersección de conjuntos mantiene las tres propiedades anteriores, es fácil observar que la intersección de  $\sigma$ -álgebras vuelve a ser una nueva  $\sigma$ -álgebra. Con esta propiedad en mente y dada  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  una familia cualquiera de subconjuntos de  $\Omega$ , se puede construir la menor  $\sigma$ -álgebra conteniendo a  $\mathcal{S}$  como

$$\bigcap_{\mathcal{A} \in \sigma_{\mathcal{S}}} \mathcal{A} \quad \text{donde } \sigma_{\mathcal{S}} = \{ \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \}.$$

Al resultado se denomina la  $\sigma$ -álgebra **engendada** por  $\mathcal{S}$ . El ejemplo más representativo de esta construcción es la llamada  $\sigma$ -álgebra **de Borel**,  $\mathcal{B}(\Omega)$  que no es otra cosa que la  $\sigma$ -álgebra engendada por la familia de todos los conjuntos abiertos de  $\Omega$ .

Una vez introducidos los conjuntos medibles (aquellos que, como su nombre indica, pretendemos *medir*), recordamos que el siguiente paso es asignarles una medida. En principio, admitiremos que la medida pueda tomar el valor infinito, pero las que usaremos en esta memoria serán las medidas finitas. Por tanto, antes de dar una definición general de medida necesitaremos hacer algunas consideraciones sobre el conjunto

$$[0, \infty] := \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}.$$

Este conjunto se considera ordenado totalmente, extendiendo el orden usual de  $\mathbb{R}_0^+$ , y añadiendo el convenio

$$x \leq \infty \text{ para todo } x \text{ en } [0, \infty],$$

para ordenar el elemento restante:  $\infty$ . También podemos extender a este conjunto la operación suma mediante la regla

$$x + \infty = \infty + x := \infty \text{ para todo } x \text{ en } [0, \infty],$$

y también el producto, mediante el convenio siguiente:

$$x \times \infty = \infty \times x := \infty \text{ con } x \text{ en } ]0, \infty].$$

$$0 \times \infty = \infty \times 0 := 0.$$

Por último, diremos que una sucesión  $\{x_n\}$  en  $[0, \infty]$  converge a  $\infty$  si para todo  $M > 0$ , existe  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $x_n \geq M$ .

Una vez hechas estas consideraciones podemos pasar a recordar el concepto de

medida que ya se estudió en varias asignaturas del grado.

**Definición 1.2.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y una aplicación  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ . Se dice que  $\mu$  es una **medida (positiva) sobre  $\mathcal{A}$**  si verifica las siguientes propiedades:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Si  $\{A_n\}$  es una sucesión de elementos de  $\mathcal{A}$  disjuntos dos a dos ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $j \neq i$ ), entonces  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  (propiedad de  $\sigma$ -aditividad).

A la terna  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  se le denomina **espacio de medida**.

### 1.1.2. Medidas signadas

Al concepto de medida que previamente hemos recordado, podemos eliminarle el requisito de la no negatividad, de este modo obtendríamos las llamadas medidas signadas, que incluyen el concepto de medida clásico. Al igual que antes, aunque necesitaremos solamente las medidas signadas finitas, daremos una definición general. Consideraremos que una medida signada pueda tomar valores infinitos, donde usaremos la aritmética del infinito que hemos visto anteriormente.

**Definición 1.3.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible y sea  $\mu$  una función en  $\mathcal{A}$  con valores en  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ . Si  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva y  $\mu(\emptyset) = 0$  entonces  $\mu$  es una **medida signada**.

Las que nos interesarán serán las medidas signadas finitas, es decir, ni  $+\infty$  ni  $-\infty$  se encuentran entre sus valores, solo toman valores en  $\mathbb{R}$ .

Para dar generalidad, los siguientes resultados los veremos para medidas signadas cualesquiera, aunque luego usaremos aplicándolos a las medidas que realmente nos conciernen.

**Proposición 1.1.** *En una medida signada no puede encontrarse entre sus valores  $+\infty$  y  $-\infty$  simultáneamente. Como consecuencia, una medida signada es finita o alcanza el valor  $+\infty$  o  $-\infty$ , pero no los dos.*

*Demostración.* Sea  $\mu$  una medida signada en el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Supongamos que existe un conjunto  $A$  en  $\mathcal{A}$  tal que  $\mu(A) = +\infty$  y un conjunto  $B$  en  $\mathcal{A}$  tal que  $\mu(B) = -\infty$ . Como la suma  $\mu(A) + \mu(A^c)$  debe estar definida (es decir, no puede ser de la forma  $+\infty + (-\infty)$  ni  $-\infty + \infty$ ) y debe ser igual a  $\mu(\Omega)$  por la propiedad de  $\sigma$ -aditividad, tenemos que

$$\mu(A) + \mu(A^c) = +\infty = \mu(\Omega).$$

Por un razonamiento análogo obtenemos que

$$\mu(B) + \mu(B^c) = -\infty = \mu(\Omega).$$

Entonces, por contradicción, llegamos a que efectivamente no hay dos conjuntos cuyas imágenes por  $\mu$  sean  $+\infty$  y  $-\infty$  respectivamente.  $\square$

A modo de ejemplo, veamos como crear una medida signada a partir de una función como sigue:

**Ejemplo 1.1.** Sean  $\mathcal{M}$  la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue<sup>1</sup> y  $\lambda$  la medida de Lebesgue de  $\mathbb{R}$ . Representaremos por  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  al espacio formado por las funciones medibles que son integrables en  $\mathbb{R}$ , esto es,

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible tal que } \int_{\mathbb{R}} |f| dx < \infty \right\}.$$

Pues bien, a partir de una función  $f$  en  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ , podemos crear la medida  $\mu_f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  como sigue

$$A \in \mathcal{M} \mapsto \mu_f(A) := \int_A f(x) dx,$$

que será una medida signada y finita, veámoslo.

1.  $\mu_f(\emptyset) = \int_{\emptyset} f(x) dx = 0.$

2. Sea  $\{A_n\} \in \mathcal{B}(\Omega)$  disjuntos dos a dos. Usando propiedades de la integral de Lebesgue estudiadas en Análisis Numérico II, obtenemos que

$$\mu_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n).$$

Por tanto, obtenemos que efectivamente es una medida signada. Para ver que es finita consideremos  $E \in \mathcal{M}$ . Como  $E \subset \mathbb{R}$  y usando propiedades de la integral de Lebesgue obtenemos

$$|\mu_f(E)| = \left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx.$$

Como  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ , obtenemos que la integral es finita y, por tanto,  $|\mu_f(E)| < \infty$  para todo  $E \in \mathcal{M}$ .

Nuestro próximo objetivo será identificar como espacio vectorial el conjunto de todas estas medidas signadas finitas sobre un mismo espacio medible y dotarlo de una norma; este espacio será uno de los pilares de nuestro objetivo: el Teorema de representación de Riesz. Para ello, necesitaremos algunos resultados previos. El

---

<sup>1</sup>Hemos usado el concepto de medible e integrable respecto a la medida usual de Lebesgue, como se vio en la asignatura de Análisis Numérico II. Más adelante generalizaremos estos conceptos para poder aplicarlos a otros tipos de medidas.

primero de ellos, que presentaremos en seguida, permite *dividir* el conjunto  $\Omega$  en dos zonas relacionadas con el signo que una medida  $\mu$  toma en los subconjuntos de cada una de ellas. Comenzamos con un concepto asociado a este hecho.

**Definición 1.4.** Sea  $\mu$  una medida signada en un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Un subconjunto  $A$  de  $\Omega$  es un **conjunto positivo** para  $\mu$  si  $A \in \mathcal{A}$  y cada subconjunto medible  $E \subseteq A$  satisface  $\mu(E) \geq 0$ . Igualmente,  $A$  es un **conjunto negativo** para  $\mu$  si  $A \in \mathcal{A}$  y cada subconjunto medible  $E$  de  $A$  satisface  $\mu(E) \leq 0$ .

Una vez definidos los conjuntos positivos y negativos para una medida signada, podemos descomponer el espacio medible en un subconjunto positivo y otro negativo disjuntos, los cuales usaremos para definir la norma en el espacio de medidas regulares finitas. Formalicemos este resultado en modo de teorema cuya demostración no tiene mayor dificultad, pero necesita algunos resultados previos que se alejan del propósito de esta memoria, puede consultarse en [Coh97, capítulo 4].

**Teorema 1.1.** (*Descomposición de Hahn*).

Sea  $\mu$  una medida signada en un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Existen subconjuntos disjuntos  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  en  $\Omega$ , con  $\Omega^+$  un conjunto positivo para  $\mu$  y  $\Omega^-$  un conjunto negativo para  $\mu$ , tal que  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ .

Al par  $(\Omega^+, \Omega^-)$  se le denomina *descomposición de Hahn* para una medida signada  $\mu$ .

*Observación 1.1.* Una medida signada puede tener varias descomposiciones de Hahn. Constatemos este hecho usando la medida asociada a una función que hemos introducido en el **Ejemplo 1.1**. Recordemos que, a partir de una función  $g$  en  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ , definíamos  $\mu_g(A) := \int_A g(x) dx$ , para conjunto cada  $A$  Lebesgue-medible. Entonces, en este caso es fácil observar que

$$\begin{aligned} \Omega_1^+ &= \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\} & y & & \Omega_1^- &= \{x \in \mathbb{R} : g(x) < 0\}, \\ \Omega_2^+ &= \{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\} & y & & \Omega_2^- &= \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\}, \end{aligned}$$

son sendas descomposiciones de Hahn que, en cuanto la función  $g$  se anule en algún punto, son distintas.

El siguiente resultado nos permitirá descomponer, gracias al teorema anterior, cada medida signada en dos medidas positivas, las cuales usaremos para crear la norma que estábamos buscando. Concretemos este resultado así como su demostración que es constructiva.

**Corolario 1.1.** (*Descomposición de Jordan*). Cada medida signada es la diferencia de dos medidas positivas, con al menos una de ellas finita.

*Demostración.* Sea  $\mu$  una medida signada en el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{A})$  y elegimos una descomposición de Hahn  $(\Omega^+, \Omega^-)$  para  $\mu$ .

Definimos entonces las medidas  $\mu^+$  y  $\mu^-$  como sigue: dado  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$\begin{aligned}\mu^+(A) &:= \mu(A \cap \Omega^+), \\ \mu^-(A) &:= -\mu(A \cap \Omega^-).\end{aligned}$$

Usando que  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  constituyen una descomposición de Hahn, es claro que  $\mu^+$  y  $\mu^-$  son medidas positivas y además:

$$A = (A \cap \Omega^+) \cup (A \cap \Omega^-) \Rightarrow \mu(A) = \mu(A \cap \Omega^+) + \mu(A \cap \Omega^-) = \mu^+(A) - \mu^-(A).$$

Además, como hemos visto en la Proposición 1.1,  $+\infty$  y  $-\infty$  no pueden estar ambos entre los valores de  $\mu$ , por lo que al menos uno de los valores  $\mu(\Omega^+)$  o  $\mu(\Omega^-)$  debe ser finito. Por tanto, al menos una de las medidas  $\mu^+$  o  $\mu^-$  debe ser finita.  $\square$

Veamos que esta **descomposición de Jordan** de una medida no depende en realidad de la descomposición de Hahn que hayamos usado para su construcción. Sea  $(\Omega^+, \Omega^-)$  una descomposición de Hahn para la medida signada  $\mu$ , sean  $\mu^+$  y  $\mu^-$  las medidas construidas para  $(\Omega^+, \Omega^-)$  en la demostración del Corolario 1.1 y supongamos que  $A$  pertenece a  $\mathcal{A}$ . Entonces tenemos que cada subconjunto medible  $B$  de  $A$  satisface

$$\mu(B) = \mu^+(B) - \mu^-(B) \leq \mu^+(B) \leq \mu^+(A).$$

Por lo tanto,

$$\mu^+(A) \geq \sup \{ \mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ y } B \subseteq A \},$$

pero tomando  $B = A \cap \Omega^+ \subseteq A$  y usando que  $\mu^+(A) := \mu(A \cap \Omega^+) = \mu(B)$ , se alcanza el supremo (de hecho, es un máximo) y

$$\mu^+(A) = \sup \{ \mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ y } B \subseteq A \}.$$

De forma análoga, la medida  $\mu^-$  satisface

$$\mu^-(A) = \sup \{ -\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ y } B \subseteq A \}.$$

Por lo tanto,  $\mu^+$  y  $\mu^-$  no dependen de la descomposición de Hahn particular utilizada en su construcción.

Las medidas  $\mu^+$  y  $\mu^-$  son llamadas la parte positiva y parte negativa respectivamente de  $\mu$  y la representación  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  se llama la descomposición de Jordan de  $\mu$ .

A modo de ejemplo, usemos de nuevo una medida signada  $\mu_g$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$  creada a partir de una función  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ .

**Ejemplo 1.2.** Como acabamos de ver,  $\mu_g^+$  y  $\mu_g^-$  no dependen de la descomposición de Hahn utilizada, por lo que podemos usar la que hemos introducido hace un momento:  $\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\}$  y  $\Omega^- = \{x \in \mathbb{R} : g(x) < 0\}$  en la página 5. Por tanto, para cada  $A \in \mathcal{M}$ :

$$\mu_g^+(A) = \mu(A \cap \Omega^+) = \int_{A \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\}} g(x) dx = \int_A g^+(x) dx = \mu_{g^+}(A),$$

donde  $g^+ := \max\{g, 0\}$  es la *parte positiva de g*. De forma análoga, obtenemos que  $\mu_g^-(A) = \mu_{g^-}(A)$  con  $g^- = \max\{-g, 0\}$ , lo que resulta bastante *natural*, esto es, la parte positiva (resp. negativa) de la medida asociada a una función resulta ser la medida asociada a la parte positiva (resp. negativa) de dicha función.

A partir del resultado que acabamos de ver, podemos crear una nueva medida positiva que será crucial para crear una norma en el espacio de medidas que nos interesan, la cual llamaremos *variación total*.

**Definición 1.5.** Llamaremos **variación de una medida** signada  $\mu$  en el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{A})$  a la medida positiva  $|\mu|$  definida por

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

Usando esta nueva medida *positiva*, podemos finalmente definir la **variación total de la medida signada  $\mu$**  como

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) = \mu(\Omega^+) - \mu(\Omega^-).$$

**Ejemplo 1.3.** Para el caso de una medida signada que proviene de una función, tenemos que su variación total es  $|\mu_g| = \mu_{g^+} + \mu_{g^-}$ , como hemos visto en el ejemplo anterior. Con lo cual, para  $A$  en  $\mathcal{M}$ , obtenemos que

$$|\mu_g|(A) = \int_A g^+(x) dx + \int_A g^-(x) dx = \int_A g^+(x) + g^-(x) dx,$$

dado que  $|g| = g^+ + g^-$ , llegamos a que  $|\mu_g|(A) = \int_A |g|(x) dx$ , es decir  $|\mu_g| = \mu_{|g|}$ .

Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible. Representaremos por  $M(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$  al espacio de todas las medidas signadas finitas en  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Es fácil ver que  $M(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Veamos que, además, la variación total es una norma en este espacio. Sea  $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ .

- Es claro que  $\|\mu\| \geq 0$  puesto que  $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ , donde  $|\mu|$  es una medida positiva, con lo cual, solo tomará valores no negativos finitos, por ser  $\mu$  finita.
- Si  $\mu$  es la medida cero, es claro que  $\|\mu\| = 0$ . Recíprocamente, si tenemos  $\|\mu\| = 0$ , implica que  $|\mu|(\Omega) = 0$ , podría ser que  $\Omega$  fuese un conjunto nulo

para la medida  $|\mu|$ , pero en ese caso  $|\mu|$  aplicado a cualquier subconjunto de  $\Omega$  sería 0, por lo que  $|\mu|$  sería la medida cero al igual que  $\mu$ .

- Sea  $k$  en  $\mathbb{R}$ ,  $\|k\mu\| = |k\mu|(\Omega) = (k\mu)^+(\Omega) + (k\mu)^-(\Omega)$ .  
En el caso de  $k$  positivo, es claro que

$$(k\mu)^+(\Omega) = k\mu^+(\Omega) \text{ y } (k\mu)^-(\Omega) = k\mu^-(\Omega).$$

Para el caso  $k$  negativo podemos usar la caracterización de la página 5 para la descomposición de Jordan:

$$(k\mu)^+(\Omega) = \sup \{-|k|\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ y } B \subset \Omega\} = |k|\mu^-(\Omega).$$

$$(k\mu)^-(\Omega) = \sup \{|k|\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ y } B \subset \Omega\} = |k|\mu^+(\Omega).$$

Con lo cual, obtenemos que

$$\|k\mu\| = |k|(\mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega)) = |k|\|\mu\|.$$

- Por último, dadas sendas medidas  $\mu, \lambda \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$  y usando la misma caracterización de  $|\mu + \lambda|(\Omega)$  en forma de supremos, teniendo en cuenta únicamente que el supremo de una suma es menor que la suma de los supremos, llegamos fácilmente a que

$$\|\mu + \lambda\| \leq \|\mu\| + \|\lambda\|.$$

Una vez definidas las medidas signadas finitas, concretemos a las que son, además, **medidas regulares de Borel**, que son las que realmente buscamos.

**Definición 1.6.** Sea  $\Omega$  un espacio topológico de Hausdorff. Una **medida de Borel** en  $\Omega$  es una medida (positiva)  $\mu$  cuyo dominio es  $\mathcal{B}(\Omega)$ , es decir, una medida definida en la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\Omega$ .

Además, diremos que esta medida es **regular** sii:

1. (*finita en compactos*) para cada compacto  $K$  de  $\Omega$  se satisface  $\mu(K) < \infty$ ;
2. (*regularidad exterior*) para cada subconjunto  $E$  en  $\mathcal{B}(\Omega)$  se satisface:

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto, } E \subseteq U \subseteq \Omega\};$$

3. (*regularidad interior*) para cada subconjunto abierto  $U$  de  $\Omega$  se satisface

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto, } K \subseteq U \subseteq \Omega\}.$$

En el caso de que  $\mu$  sea una medida signada definida en  $\mathcal{B}(\Omega)$ , se dirá que es una **medida signada de Borel regular** si su variación  $|\mu|$  es regular y denotaremos por

$M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$  al espacio de todas las medidas signadas finitas de Borel regulares en el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ .

**Ejemplo 1.4.** Veamos que en el caso de una medida signada  $\mu_g$ , creada a partir de una función  $g$ , es también regular en el caso de que  $g$  sea integrable.

Como ya habíamos visto en el Ejemplo 1.3,  $|\mu_g| = \mu_{g^+} + \mu_{g^-}$  y para  $A \in \mathcal{M}$ ,  $|\mu_g|(A) = \int_A |g|(x) dx$ . Con lo cual,

- Sea  $K$  un compacto de  $\mathbb{R}$ , por ser  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$  es claro que  $|\mu_g|(K) < \infty$ .
- Sea  $E \subset \mathcal{M}$ , comprobemos que  $|\mu_g|(E) = \inf \{ |\mu_g|(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \}$ . Consideramos la siguiente sucesión decreciente de abiertos que recubren el conjunto  $E$ :

$$U_n = \bigcup_{x \in E} B(x, \frac{1}{n}) \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

y definimos las siguientes funciones:

$$h(x) = \begin{cases} |g(x)| & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E, \end{cases} \quad h_n(x) = \begin{cases} |g(x)| & \text{si } x \in U_n, \\ 0 & \text{si } x \notin U_n. \end{cases}$$

Veamos que  $h_n$  cumple las hipótesis para poder aplicar el teorema de la convergencia dominada. Se trata de una sucesión de funciones integrables (por ser  $g$  integrable en  $\mathbb{R}$ ) con  $|h_n| \leq |g|$ . Además, por construcción,  $h_n$  converge puntualmente a la función  $h(x)$ . Con lo cual obtenemos lo siguiente:

$$|\mu_g|(U_n) = \int_{U_n} |g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} h_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h(x) dx = \int_E |g(x)| dx = |\mu_g|(E).$$

- Sea ahora  $U \subset \mathbb{R}$  abierto y veamos la regularidad interior, esto es:  $|\mu_g|(U) = \sup \{ |\mu_g|(K) : K \text{ compacto}, K \subset U \}$ . Para ello, consideramos los conjuntos

$$K_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, U^c) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \overline{B(0, n)} \subset U,$$

que claramente son compactos (acotados y cerrados) y  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq U$ . Para ver la otra inclusión tomamos  $x_0 \in U$ . Por lo tanto,  $\text{dist}(x_0, U^c) > 0$  y, de hecho, existe un natural  $n_0$  tal que  $\text{dist}(x_0, U^c) \geq \frac{1}{n_0}$  y  $|x_0| \leq n_0$ , por lo que  $x_0 \in K_{n_0}$ . Hacemos entonces una construcción similar a la del apartado anterior:

$$h(x) = \begin{cases} |g(x)| & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \notin U. \end{cases} \quad h_n(x) = \begin{cases} |g(x)| & \text{si } x \in K_n, \\ 0 & \text{si } x \notin K_n, \end{cases}$$

que, de nuevo, cumple las hipótesis del teorema de la convergencia dominada, ya que como  $K_n \subset K_{n+1}$  nos proporciona la convergencia puntual de  $h_n$  a  $h$ .

Entonces, finalmente:

$$|\mu_g|(K_n) = \int_{K_n} |g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} h_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h(x) dx = \int_U |g(x)| dx = |\mu_g|(U).$$

## 1.2. Espacios $\mathcal{L}^1$ y $L^1$

En esta apartado recuperaremos tanto los espacios  $\mathcal{L}^1$  y  $L^1$ , que ya vimos en la asignatura de Análisis Funcional, como los conceptos previos para llegar a su definición, los cuales también nos servirán para enunciar el teorema de representación de Riesz.

### 1.2.1. Funciones e integrales

Para poder hablar de los espacios tanto  $\mathcal{L}^1$  como  $L^1$  necesitaremos conocer el concepto de función medible integrable, así como sus principales características.

**Definición 1.7.** Sean  $(\Omega, \mathcal{A})$  y  $(\Omega', \mathcal{A}')$  espacios medibles. Una función  $f: \Omega \rightarrow \Omega'$  se dice que es **medible** si  $f^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{A}$ , para cada  $\mathcal{B} \in \mathcal{A}'$ .

Como ejemplo de función medible, tal como vimos en Análisis Matemático II, valdría cualquier función continua (en sentido clásico).

Nuestro siguiente objetivo será definir la integral de una función respecto de una medida signada, ya que esto nos permitirá crear un isomorfismo isométrico en el teorema de representación de Riesz y conseguir el objetivo que vamos buscando. Para ello, debemos conocer primero el concepto de integral para medidas, que también nos será útil en la siguiente sección para ver la inclusión isométrica de determinados  $L^1$  en  $M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ .

**Definición 1.8.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Definimos una **función simple posible** como una función  $s: \Omega \rightarrow [0, \infty)$  medible que solo toma un número finito de valores. En particular, se puede representar por

$$s := \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k},$$

donde los valores son  $\{0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n\}$  y los conjuntos  $A_k \in \mathcal{A}$  son disjuntos dos a dos y verifican  $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ . Aquí,  $\chi_A$  es la función característica de un conjunto  $A \in \mathcal{A}$ .

Además, se puede definir la **integral de  $s$**  respecto de  $\mu$  como:

$$\int_{\Omega} s d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k),$$

y si no hay confusión con el dominio  $\Omega$ , escribiremos simplemente  $\int s d\mu$ .

Veamos que la expresión que define a  $s$  es única y, por lo tanto, su integral está bien definida. Supongamos que  $s$  también viene dada por una segunda expresión:

$$s = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}.$$

Tomemos uno de los  $A_k$  y un punto suyo  $x \in A_k$ . Como  $\bigcup_{j=0}^m B_j = \Omega$ , entonces existirá un  $B_j$  tal que  $x \in B_j$ . Dado que los conjuntos  $A_k$  y  $B_j$  se pueden caracterizar por

$$A_k := \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_k\}, \quad B_j := \{x \in \Omega : s(x) = \beta_j\},$$

entonces, dado que  $x \in A_k \cap B_j$ , tenemos  $\alpha_k = s(x) = \beta_j$  y, por lo tanto,  $\alpha_k = \beta_j$  y  $A_k = B_j$ . Aplicando este proceso a todos los  $A_k$  obtenemos que las dos expresiones son las mismas, como queríamos.

**Definición 1.9.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida y sea  $f: \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  una función medible. Definimos la integral de  $f$  respecto  $\mu$  como

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \text{ simple positiva y } s \leq f \right\}.$$

En el caso de que el conjunto no esté acotado superiormente, diremos que  $\int f d\mu = +\infty$ . La integral respecto a una medida también la podemos denotar como sigue cuando no haya lugar a confusión:

$$\int f d\mu := \int f(x) \mu(x) dx$$

Sea una función  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , de la cual sabemos que admite la descomposición

$$f = f^+ - f^-, \text{ con } f^+ = \max\{f, 0\} \text{ y } f^- = \max\{-f, 0\}.$$

Si al menos uno de los términos  $\int f^+ d\mu$  o  $\int f^- d\mu$  es finito, definimos su integral respecto  $\mu$  como la diferencia:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

en caso contrario, diremos que la integral de  $f$  no existe. Diremos que  $f$  es **integrable** si ambos términos son finitos.

Por otro lado, sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  medible y  $E \in \mathcal{A}$ . Diremos que  $f$  es integrable sobre  $E$  si la función  $f\chi_E$  es integrable, y en ese caso,  $\int_E f d\mu$ , la integral de  $f$  sobre  $E$ , está definida por  $\int f\chi_E d\mu$ .

En el caso de que  $\mu$  sea una medida signada en el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{A})$ , diremos que una función medible  $f$  es integrable respecto  $\mu$  si lo es respecto de las medidas  $\mu^+$  y  $\mu^-$ , en cuyo caso definiremos su integral como

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^-.$$

Podemos extender las propiedades que vimos para la integral de Lebesgue a este concepto de integral respecto una medida más general, cuyas demostraciones pueden consultarse en [Rud87], que nos permitirán dar una representación de los espacios  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ , así como afirmar que son espacios vectoriales.

**Proposición 1.2.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida, sea  $f$  y  $g$  funciones con valores reales integrables en  $\Omega$  y  $\alpha$  un número real. Entonces

1.  $\alpha f$  y  $f + g$  son integrables,
2.  $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ ,
3.  $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ , y
4. si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x$  en  $\Omega$ , entonces  $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ .

**Definición 1.10.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Notaremos el espacio de todas las funciones con valores en  $\mathbb{R}$  integrables en  $\Omega$  como  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ . A veces simplemente lo notaremos como  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  o  $\mathcal{L}^1$  si no hay lugar a confusión.

Con el fin de dar una definición de los espacios  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  más intuitiva, veamos que  $f$  integrable es lo mismo que  $|f|$  integrable.

**Proposición 1.3.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida y sea una  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Entonces  $f$  es integrable si y solo si  $|f|$  es integrable. Además, si  $f$  es integrable

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

*Demostración.* Sabemos que  $f$  es integrable si  $f^+$  y  $f^-$  son integrables. Por otro lado, como  $|f| = f^+ + f^-$ , con lo cual por la propiedad 3. de la Proposición 1.2 tenemos que  $|f|$  es integrable si  $f^+$  y  $f^-$  lo son. La desigualdad  $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$  se sigue de la desigualdad triangular:

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f| d\mu,$$

como queríamos demostrar.  $\square$

*Observación 1.2.* En el caso general de  $\mu$  una medida signada, es sencillo comprobar la desigualdad

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d|\mu|.$$

Utilizando la desigualdad triangular así como la proposición anterior quedaría demostrada:

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f d\mu^+ - \int f d\mu^- \right| \leq \int |f| d\mu^+ + \int |f| d\mu^- = \int |f| d|\mu|.$$

Una vez hechas las consideraciones anteriores, podemos definir el espacio  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ , con  $\mu$  una medida positiva, como

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible tal que } \int |f| d\mu < \infty \right\}.$$

De acuerdo con la Proposición 1.2,  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  es un espacio vectorial. Concretamente, gracias a la propiedad 1., si  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ , entonces  $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ . Gracias al mismo apartado, si  $f$  y  $g$  pertenecen a  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ , usando que  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$  para cada  $x$  en  $\Omega$ , obtenemos, por 3. y 4., que  $\int |f + g| d\mu < \infty$ , con lo cual  $f + g$  pertenece a  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ .

Con el objetivo de dotar a este espacio de una norma adecuada, se define la aplicación:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{L}^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ f &\mapsto \|f\| := \int |f| d\mu, \end{aligned}$$

que define una seminorma. No es norma porque si  $f$  es una función medible en  $\Omega$  tal que  $f = 0$  casi por doquier respecto de  $\mu$ , esto es,

$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}) = 0,$$

entonces  $\|f\|$  también es 0 aunque  $f \neq 0$ . Normalmente escribimos  $f = 0$   $\mu$ -c.p.d.

Con el fin de construir una norma, consideremos el conjunto:

$$\mathcal{N}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ es medible y } f = 0 \mu\text{-c.p.d.}\},$$

que constituye un subespacio vectorial de  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ .

Representaremos por  $L^1(\Omega, \mu)$  como el espacio vectorial cociente de  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  por

$\mathcal{N}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , que junto con la aplicación  $\|\cdot\|_1 : L^1(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definida por

$$\|[f]\|_1 = \|f\| = \int |f| d\mu$$

es un espacio normado.

Por tanto,  $L^1(\Omega, \mu)$  está formado por clases de equivalencia bajo la relación de equivalencia  $\sim$ , donde  $f \sim g$  si y solo si  $f - g$  pertenece a  $\mathcal{N}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Notemos que  $f \sim g$  si y solo si  $f$  y  $g$  son iguales casi por doquier respecto de  $\mu$ , es decir, iguales excepto en un conjunto de medida  $\mu$  cero.

Con lo cual, los elementos de  $L^1(\Omega, \mu)$  no son funciones, sino clases de funciones bajo la relación de equivalencia de "ser igual casi por doquier", no obstante, trataremos los elementos de este espacio como funciones de  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ , tratando como un solo objeto a todas funciones que son iguales  $\mu$ -c.p.d.

Además, representaremos por  $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$  al espacio de las funciones (clases de equivalencia) acotadas  $\mu$ -c.p.d en  $\Omega$  donde definiremos su norma como

$$\|[f]\|_{L^\infty} = \text{ess-sup}(f) := \inf \{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ para casi todo } x \in \Omega\}$$

## 1.2.2. Operadores lineales y dualidad

Como el objeto de esta memoria requiere trabajar con operadores lineales sobre espacios funcionales, recordemos algunos resultados generales vistos en la asignatura Análisis Funcional con respecto a estos operadores, cuyas demostraciones pueden consultarse en los apuntes de la asignatura [PG10]. Comenzamos con sendos resultados de sobre continuidad que nos permiten definir la norma de un operador lineal.

**Proposición 1.4.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios normados sobre  $\mathbb{R}$  y  $\phi : X \rightarrow Y$  una aplicación lineal. Entonces  $\phi$  es continua si y solo si existe un número  $M \geq 0$  tal que  $\|\phi x\|_Y \leq M\|x\|_X$  para todo  $x \in X$

Dados dos espacios normados  $X$  e  $Y$  sobre el mismo cuerpo, representaremos por  $L(X, Y)$  el espacio vectorial de todos los operadores lineales y continuos de  $X$  en  $Y$ , en el cual definiremos una norma.

**Proposición 1.5.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios normados y sea  $\phi$  en  $L(X, Y)$ . La aplicación  $\phi \rightarrow \|\phi\|$  definida por:

$$\|\phi\| = \sup \{\|\phi(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$$

es una norma en  $L(X, Y)$ , que recibe el nombre de norma de operadores.

Además, se puede caracterizar de dos formas adicionales:

$$\begin{aligned} \|\phi\| &= \sup \left\{ \frac{\|\phi(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X, x \neq 0 \right\} \\ &= \min \left\{ M \geq 0 : \|\phi(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \text{ para todo } x \text{ en } X \right\}. \end{aligned}$$

En particular, para todo  $x$  en  $X$  se verifica la desigualdad  $\|\phi(x)\|_Y \leq \|\phi\| \|x\|_X$ , y, por lo anterior,  $\|\phi\|$  es la mínima constante que verifica una desigualdad de ese tipo.

En el caso de que  $X$  sea un espacio normado sobre  $\mathbb{R}$ , el espacio  $L(X, \mathbb{R})$ , de todos los funcionales lineales y continuos de  $X$  en  $\mathbb{R}$ , se llama **dual topológico** de  $X$  y lo denotaremos por  $X^*$ . En este caso, para la actuación de un operador  $T$  sobre un vector  $x$  usaremos la notación usual  $\langle T, x \rangle$  en lugar de  $Tx$ .

En el teorema de representación de Riesz, precisamente vamos a relacionar el espacio  $M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$  con uno de estos duales, concretamente con el dual de las funciones continuas y de soporte compacto.

El siguiente objetivo será introducir una nueva topología, la *topología débil-\**, con conceptos extraídos tanto de [PG10] como de [Bre84], la cual contendrá *más* conjuntos compactos, los cuales poseen propiedades importantes para la convergencia de sucesiones. Antes de ello, introducimos un concepto adicional; definimos el espacio  $X^{**}$ , llamado **bidual de  $X$** , como el espacio  $L(X^*, \mathbb{R})$ , con  $X$  un espacio normado sobre  $\mathbb{R}$ . A partir del propio espacio  $X$ , se pueden encontrar algunos elementos de  $X^{**}$ , veámoslo. Para cada  $x \in X$  fijo podemos considerar el *funcional de evaluación en  $x$* , el cual representaremos por  $E_x$  y es el funcional que a cada  $\phi \in X^*$  le hace corresponder su evaluación en  $x$ :

$$\begin{aligned} E_x : X^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto \langle \phi, x \rangle \end{aligned}$$

Por la desigualdad  $|E_x \phi| = |\langle \phi, x \rangle| \leq \|\phi\| \|x\|_X$  deducimos que  $E_x \in X^{**}$  y que  $\|E_x\| \leq \|x\|_X$ . Además, usando un resultado visto en la asignatura de Análisis Funcional que caracteriza la norma mediante operadores del dual como sigue:

$$\|x\|_X = \sup \{ |\langle \phi, x \rangle| : \|\phi\| \leq 1 \},$$

obtenemos la igualdad:

$$\|E_x\| := \sup \{ |\langle \phi, x \rangle| : \|\phi\| \leq 1 \} = \|x\|_X.$$

Por tanto, la aplicación  $E : X \rightarrow X^{**}$  que a cada  $x \in X$  hace corresponder el funcional  $E_x$  de evaluación en  $x$ , es una isometría lineal que llamaremos **inyección canónica del espacio normado  $X$  en su bidual  $X^{**}$** . Aunque no es objeto de estudio en esta

memoria, cabe resaltar en este punto que cuando  $J$  resulta ser una biyección y  $X$  se *identifica* a través de ella con su bidual, se dice que el espacio  $X$  es **reflexivo**; este tipo de espacios tienen numerosas propiedades, pero, insistimos, no va a ser el caso del que nos ocupará en esta memoria.

Después de dar estas consideraciones, podemos pasar a definir la topología débil-\* a través de sus sucesiones convergentes. A las propiedades relativas a esta topología las notaremos con el símbolo “-”.

**Definición 1.11.** Sea  $\{\phi_n\}$  una sucesión en  $X^*$ , el dual de un espacio normado  $X$ , y  $\phi \in X^*$ . Diremos que  $\{\phi_n\}$  converge débil-\* a  $\phi$  si  $\{\langle \phi_n, x \rangle\} \rightarrow \langle \phi, x \rangle$  para todo  $x \in X$ . La convergencia débil-\* la denotaremos como

$$\phi_n \rightharpoonup \phi.$$

Esta nueva topología posee la ventaja, frente a la topología de la norma, de que abundan los subconjuntos compactos. Este hecho nos permitirá obtener ciertas propiedades de compacidad donde podremos establecer una convergencia como veremos en la siguiente sección.

### 1.3. Otros resultados de Análisis Funcional

En esta sección presentaremos los resultados esenciales del Análisis Funcional que usaremos en la resolución de ecuaciones diferenciales, los cuales, a grandes rasgos, nos permitirán obtener una parcial convergente de cualquier sucesión acotada que pertenezca al dual de algún espacio normado. En particular, veremos la inclusión isométrica de  $L^1$  en el espacio  $M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ , lo que nos permitirá relacionar cualquier sucesión de  $L^1$  con el dual de  $C_0$  y obtener un tipo de convergencia si se tratan de sucesiones acotadas.

#### 1.3.1. Teorema de Banach-Alaouglu-Bourbaki

En este apartado presentaremos el resultado esencial sobre espacios duales que nos va a permitir obtener cierta compacidad sobre sucesiones de funciones, vistas como operadores. En esta memoria no escribiremos su demostración, pues se escapa de nuestros objetivos; puede encontrarse en [PG10, Capítulo 10].

**Teorema 1.2** (Teorema de Banach-Alaouglu-Bourbaki). *Sea  $X$  un espacio normado y  $X^*$  su dual. La bola unidad cerrada de  $X^*$ ,  $B_{X^*} = \{\phi \in X^* \mid \|\phi\| \leq 1\}$ , es compacta en la topología débil-\*.*

Por consiguiente, todo subconjunto del dual de un espacio normado que sea débil-\* cerrado y acotado en norma es débil-\* compacto.

Sabemos por los contenidos del grado, que en un espacio métrico  $X$ , compacto y secuencialmente compacto (es decir, cada sucesión en  $X$  admite una parcial convergente) son conceptos equivalentes. Sin embargo, esto no tiene por qué cumplirse en cualquier espacio topológico.

**Definición 1.12.** Se dice que un espacio topológico es metrizable si existe una distancia que induce la topología o, equivalentemente, es homeomorfo a un espacio métrico.

El siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [PG10, Capítulo 10], nos permitirá trabajar con los conjuntos débil-\* compactos del dual como si fuesen espacios métricos.

**Proposición 1.6.** Sea  $X$  un espacio normado. Si  $X$  es separable, entonces  $B_{X^*}$  en la topología débil-\* es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de  $X^*$ .

Como consecuencia de la proposición anterior y del teorema de Banach-Alaouglu tenemos:

**Teorema 1.3** (Teorema de Bolzano-Weirstrass para la topología débil-\*). Toda sucesión acotada en el dual de un espacio normado separable tiene alguna sucesión parcial débil-\* convergente.

En particular, podemos aplicar este resultado al espacio  $\mathbb{R}^n$ . Al tratarse  $C_{00}(\mathbb{R}^n)$  de un espacio separable, cuya justificación puede encontrarse en [Pu11], toda sucesión acotada en el dual de este espacio admitirá una subsucesión débil-\* convergente.

### 1.3.2. Inclusión isométrica de $L^1$ en $M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$

Siguiendo el ejemplo de medida construida  $\mu_f$  a partir de una función  $f$  (que hemos ido desarrollando a lo largo de esta memoria a través de los Ejemplos 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4) vamos a **identificar** el espacio de las funciones integrables con un subespacio dentro de las medidas. Este aparentemente simple resultado de análisis será una clave es las aplicaciones, pues mientras que una sucesión acotada de funciones integrables no tiene por qué converger, si esta misma sucesión se *ve* como una sucesión acotada de medidas, podemos aplicarle el Teorema 1.3 y extraer una parcial convergente, eso sí, a una medida y con la topología débil-\*. *Casualmente*, esta convergencia *menos fuerte* también será algo *natural* a la hora de usarla cuando en la formulación débil de ecuaciones. Presentamos el resultado:

**Teorema 1.4.** Sea  $g$  en  $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ , con  $\lambda$  la medida de Lebesgue. Entonces, la construcción del Ejemplo 1.1 define una aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) &\hookrightarrow M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ g &\mapsto \mu_g, \quad \text{con } \mu_g(E) := \int_E g(x) dx, \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

que resulta ser una isometría inyectiva, esto es:  $\|\mu_g\| = \|g\| = \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx$ .

*Demostración.* En primer lugar, debemos ver que está bien definida. Como ya habíamos comentado en la página 14, los elementos de  $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$  se tratan de clases de funciones, con lo cual, las funciones de la misma clase tendrán que tener la misma imagen. Este hecho se deduce de que la integral de dos funciones iguales casi por doquier respecto a la medida de Lebesgue es la misma.

Además, debemos de probar que  $\mu_g$  es una medida signada finita regular para que la aplicación esté bien definida. En el Ejemplo 1.1 ya habíamos visto que se trataba de una medida signada finita y el Ejemplo 1.4 nos daba la regularidad. Por tanto, podemos pasar directamente a ver que es una isometría.

En realidad, esto es exactamente lo que hicimos en el ejemplo 1.3, donde vimos que:

$$\|\mu_g\| = |\mu_g|(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} |g|(x) dx = \|g\|_{L^1(\mathbb{R}, \lambda)}.$$

Una vez probemos la inyectividad habremos acabado. Como nuestra aplicación es lineal, basta ver que su núcleo está constituido únicamente por la función nula en  $L^1$ , lo que se sigue fácilmente del hecho de ser una isometría:

$$\mu_g = 0 \Leftrightarrow \|\mu_g\| = \|g\|_{L^1(\mathbb{R}, \lambda)} = 0 \Leftrightarrow g = 0 \text{ c.p.d.}$$

□

Podríamos extender este resultado al caso en el de que estemos en un espacio,  $\Omega$ , de Hausdorff localmente compacto con  $\mu$  una medida de Borel regular en  $\Omega$ . Para cada  $f$  en  $L^1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ , la medida creada a partir de la integral de  $f$  respecto a  $\mu$  nos permitirá crear una isometría de  $L^1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$  dentro de  $M_r(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{R})$ . Tanto el resultado como su demostración puede consultarse en [Coh97, Capítulo 7], la cual no incluiremos en esta memoria, ya que el que realmente nos interesa y utilizaremos en las aplicaciones del capítulo 2 es el probado anteriormente.

*Observación 1.3.* Hemos encontrado una isometría inyectiva; sin embargo, no es una biyección, es decir, hay medidas que no provienen de ninguna función integrable. Como ejemplo, podemos ver que la medida **delta de Dirac**,  $\delta_0$ , definida como:

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A, \\ 0 & \text{si } 0 \notin A, \end{cases}$$

para cada boreliano  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Es fácil ver que  $\delta_0 \in M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ , pero tal vez no sea tan obvio que no es imagen por la isometría anterior de ninguna función. Para verlo, razonaremos por reducción al absurdo: supongamos que existe una función  $g$  en  $L^1$  tal que  $\mu_g = \delta_0$ . Tomamos  $A = \{0\}$ ,  $B = [0, 1]$  y  $C = (0, 1]$ . Es claro que  $B = A \dot{\cup} C$ , por tanto, por la propiedad de  $\sigma$ -aditividad:

$$\delta_0(B) = \delta_0(A) + \delta_0(C) \implies \delta_0(A) = \delta_0(B) - \delta_0(C).$$

Sin embargo, como hemos supuesto que la delta de Dirac proviene de una función, tendríamos que:

$$1 = \delta_0(A) = \mu_g(B) - \mu_g(C) = \int_B g(x) dx - \int_C g(x) dx = 0,$$

puesto que  $B$  y  $C$  difieren solo en un punto, es decir, en un conjunto de medida (de Lebesgue) cero.

## 1.4. Hacia el teorema de representación de Riesz

Una vez hechos los preámbulos necesarios, podemos presentar el teorema que da título a esta memoria, el cual nos permitirá identificar de forma concreta el dual topológico del espacio  $C_{00}(\Omega)$ , formado por las funciones continuas con soporte compacto, el cual es un espacio normado considerando la norma del máximo. En el caso de que  $\Omega$  sea un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, cada funcional  $\Phi$  que pertenezca al dual de  $C_{00}(\Omega)$  vendrá asociado a una única medida signada  $\mu$ , de forma que la actuación de este funcional sobre una función será la integral de la función con respecto a la medida  $\mu$ .

### 1.4.1. Funciones vistas como medidas: integral de producto

Antes de pasar al Teorema de Riesz, vamos a poner en valor el ejemplo que hemos ido estudiando a lo largo de esta memoria y que nos va a ser de gran utilidad; es el caso de medidas que provienen de una función integrable. La clave es que esa medida, si se ve como un operador sobre  $C_{00}(\Omega)$ , la podremos reescribir como la integral del producto. Este resultado podremos relacionarlo más adelante tanto con la convergencia débil-\* de las soluciones de ecuaciones que estudiaremos en el capítulo 2, como con la formulación débil de las mismas. Pasemos a enunciarlo y demostrarlo.

**Proposición 1.7.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}$  y  $g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$ . Ya sabemos que podemos construir una medida  $\mu_g$  regular y, siguiendo la definición 1.9, podemos también construir un operador*

1 Funciones, medidas y compacidad

sobre  $C_0(\Omega)$  como sigue:

$$g_{op} : C_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \langle g_{op}, f \rangle := \int_{\Omega} f d\mu_g.$$

Entonces, este operador también se puede escribir como la integral del producto, esto es:

$$\langle g_{op}, f \rangle = \int_{\Omega} g(x)f(x) dx$$

y, por lo tanto, notaremos simplemente  $\langle g, f \rangle$ .

*Demostración.* Primero veamos el caso en el que  $f = s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$  sea un funcional simple positivo en  $C_0(\Omega)$ . Por las definiciones dadas en el apartado 1.2.1 y usando el Ejemplo 1.2, ya que  $\mu_g$  es una medida signada,

$$\int_{\Omega} s d\mu_g = \int_{\Omega} s d\mu_{g^+} - \int_{\Omega} s d\mu_{g^-} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_{g^+}(A_k) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_{g^-}(A_k).$$

Por como hemos definido una medida creada a partir de una función en la sección 1.3.2, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\int_{\Omega} s d\mu_g = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{A_k} [g^+(x) - g^-(x)] dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{\Omega} [g^+(x) - g^-(x)] \chi_{A_k} dx.$$

Usando que  $s(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}(x)$  y  $g = g^+ - g^-$ , obtenemos la igualdad que buscábamos:

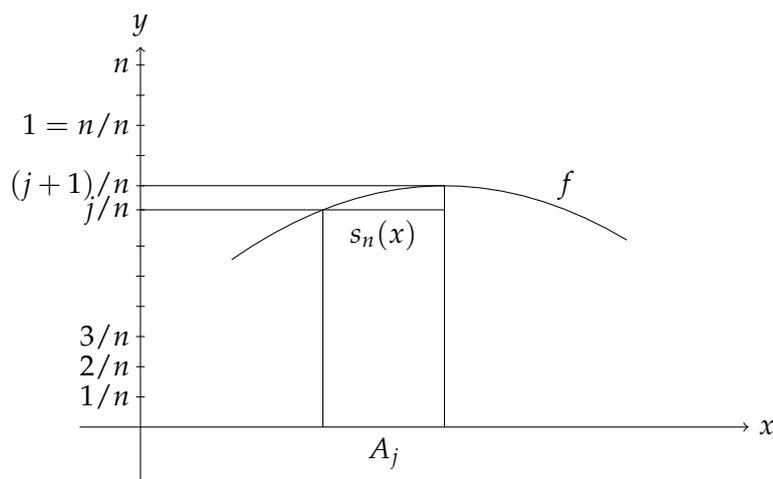
$$\int_{\Omega} s d\mu_g = \int_{\Omega} s(x)g(x) dx.$$

Para el caso en el que  $f \in C_0(\Omega)$  y  $g$  sean funciones positivas llegamos a:

$$\int_{\Omega} f d\mu_g = \sup \left\{ \int_{\Omega} s d\mu_g : 0 \leq s \leq f \right\} = \sup \left\{ \int_{\Omega} s(x)g(x) dx : 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Con el fin de aplicar el teorema de la convergencia dominada, definimos

$$s_n(x) = \sum_{j=0}^{n^2} \frac{j}{n} \chi_{A_j}(x), \text{ con } A_j = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{j+1}{n} > f(x) \geq \frac{j}{n} \right\}.$$



Es claro que  $\{s_n\}$  es una sucesión de funciones integrables la cual converge puntualmente a la función  $f$  con  $0 \leq s_n \leq f$ . Por tanto,  $s_n(x)g(x)$  converge puntualmente a  $f(x)g(x)$  y está dominada:  $|s_n g| \leq |fg|$ , que está en  $L^1$  y podemos aplicar el TCD para deducir:

$$\lim \left\{ \int_{\Omega} s_n(x)g(x) dx \right\} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

Con lo cual, llegamos a la desigualdad

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} s(x)g(x) dx : 0 \leq s \leq f \right\} \geq \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

Como habíamos supuesto  $g$  positiva, la otra desigualdad queda clara.

Por el contrario, si  $g = g^+ - g^-$  puede tomar valores negativos obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu_g &= \int_{\Omega} f d\mu_{g^+} - \int_{\Omega} f d\mu_{g^-} = \\ &= \int_{\Omega} f(x)g^+(x) dx - \int_{\Omega} f(x)g^-(x) dx = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \end{aligned}$$

Para el caso general de que  $f \in C_{00}(\Omega)$  pueda tomar valores negativos, usando las definiciones de la sección 1.2.1 y el caso anterior, es fácil ver la igualdad:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu_g &= \int_{\Omega} f^+ d\mu_g - \int_{\Omega} f^- d\mu_g \\ &= \int_{\Omega} f^+(x)g(x) dx - \int_{\Omega} f^-(x)g(x) dx = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

□

Pasemos ahora a ver el enunciado completo del resultado que da título a la memoria.

### 1.4.2. Teorema de representación de Riesz

**Teorema 1.5** (Teorema de representación de Riesz para  $C_{00}(\Omega)$ ). *Sea  $\Omega$  un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto,  $M_r(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{R})$  el espacio de las medidas signadas finitas de Borel regulares y  $C_{00}(\Omega)$  el conjunto de las funciones continuas con soporte compacto. Para cada  $\mu \in M_r(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{R})$  definimos  $\phi_\mu : C_{00}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  por:*

$$\langle \phi_\mu, f \rangle := \int_{\Omega} f d\mu, \quad (f \in C_{00}),$$

entonces la aplicación  $\phi : M_r(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{R}) \rightarrow C_{00}(\Omega)^*$  que a cada  $\mu \in M_r(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{R})$  le hace corresponder  $\phi_\mu$  es un isomorfismo isométrico.

*Demostración.* Tenemos que ver las siguientes condiciones:

1.  $\phi$  está bien definida.
2. Es una isometría, es decir,  $\|\mu\| = \|\phi_\mu\| \quad \forall \mu \in M_r(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{R})$ .
3.  $\phi$  es un isomorfismo, es decir,  $\phi$  es un operador continuo, lineal, biyectivo y su inversa es continua.

Paso 1: Comprobemos que  $\phi_\mu \in C_{00}(\Omega)^*$ . Es fácil ver que  $\phi_\mu$  es una funcional lineal en  $C_{00}(\Omega)$ . Para ver la continuidad, si usamos la igualdad  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  y la Proposición 1.3 llegamos a

$$\begin{aligned} |\langle \phi_\mu, f \rangle| &= \left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu = \int_{\Omega} |f| d\mu^+ - \int_{\Omega} |f| d\mu^- \\ &\leq \int_{\Omega} |f| d\mu^+ + \int_{\Omega} |f| d\mu^- \leq \|f\|_{\infty} (\mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega)) = \|f\|_{\infty} \|\mu\|, \end{aligned}$$

por lo que la Proposición 1.4 nos proporciona no solo la continuidad de  $\phi_\mu$  sino una estimación de su norma, de hecho:  $\|\phi_\mu\| \leq \|\mu\|$ .

Paso 2: Para ver la conservación de la norma, en vista del paso 1, solo debemos comprobar la otra desigualdad  $\|\mu\| \leq \|\phi_\mu\|$ . Para ello, usaremos el Teorema de Lusin, cuya demostración puede consultarse en [Fol99] y cuyo enunciado es el siguiente:

**Teorema 1.6** (Teorema de Lusin). *Sea  $\mu$  una medida regular en el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{A})$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  medible verificando:  $\mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}) \leq \infty$ . Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$  existirá una función  $g \in C_{00}(\Omega)$  tal que  $f = g$  excepto en un conjunto de medida menor que  $\varepsilon$ .*

Además, si  $f$  está acotada, podemos encontrar  $g$  verificando

$$\|g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}.$$

Siguiendo con la demostración de la otra desigualdad  $\|\mu\| \leq \|\phi_\mu\|$ . dada  $\mu \in M_r(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{R})$  y  $(\Omega^+, \Omega^-)$  su descomposición de Hahn, definimos una función  $f$  cuya norma será 1, de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega^+, \\ -1 & \text{si } x \in \Omega^-. \end{cases}$$

Esta función permite escribir la norma de  $\mu$  de forma *operacional* como

$$\|\mu\| = \int_{\Omega^+} 1 \, d\mu - \int_{\Omega^-} 1 \, d\mu = \int_{\Omega} f(x) \, d\mu,$$

pero como  $f$  no es necesariamente continua, necesitamos afinar. Dado  $\varepsilon > 0$ , aplicamos el Teorema 1.6 de Lusin y encontramos una  $g$  continua *muy parecida* a  $f$ , concretamente  $g \in C_{00}(\Omega)$  con  $f(x) = g(x)$  excepto en un conjunto medible  $E$ , el cual  $|\mu|(E) < \frac{\varepsilon}{2}$  y  $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty = 1$ . Entonces, usando que  $g - f = 0$  en  $\Omega \setminus E$ , reescribimos  $\|\mu\|$  como

$$\|\mu\| = \int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} g \, d\mu + \int_{\Omega} (f - g) \, d\mu = \langle \phi_\mu, g \rangle + \int_E (f - g) \, d\mu,$$

ahora sí, es  $\mu$  actuando sobre  $g$  como operador más un resto. Acotando finalmente la expresión de la derecha por su valor absoluto llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\|\mu\| \leq |\langle \phi_\mu, g \rangle| + \|f - g\|_\infty \int_E d|\mu| \leq \|\phi_\mu\| \|g\|_\infty + 2|\mu|(E) < \|\phi_\mu\| + \varepsilon.$$

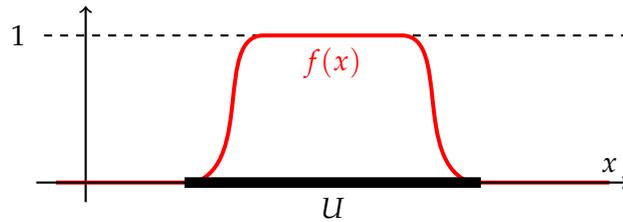
De aquí deducimos que  $\|\phi_\mu\| > \|\mu\| - \varepsilon$ , y, dada la arbitrariedad de  $\varepsilon$ , la desigualdad buscada  $\|\mu\| \leq \|\phi_\mu\|$  y, por lo tanto, la igualdad.

Paso 3. Al ser  $\phi$  un operador lineal e isométrico, podemos garantizar trivialmente la inyectividad. Además, al tratarse de una isometría, tenemos también garantizadas la existencia y continuidad de su inversa. Solo nos faltaría ver la sobreyectividad, que vamos a atacar enseguida (esta demostración puede encontrarse en [Fol99]).

Veamos primero el caso en el que  $T$  sea un operador no negativo en el espacio  $C_{00}(\Omega)^*$ , es decir, para cada función no negativa  $f \in C_{00}$ ,  $\langle T, f \rangle \geq 0$ . El objetivo será ver que existe una medida,  $\mu \in M_r(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{R})$  tal que  $\langle T, f \rangle = \int_{\Omega} f \, d\mu$ , para cada  $f \in C_{00}(\Omega)$ . El primer paso será construir una medida que definiremos en los conjuntos abiertos de  $\Omega$  como

$$\mu(U) = \sup \left\{ \langle T, f \rangle : 0 \leq f \leq \chi_U, f \in C_{00}(\Omega) \text{ y } \text{sop}(f) \subset U \right\}.$$

Intuitivamente (ver dibujo siguiente) cuando las funciones  $f$  se acercan por debajo a  $\chi_U$ , su integral se acerca a la medida (que queremos construir) de  $U$ , por eso



se toma esta definición, puesto que queremos que  $\langle T, f \rangle$  sean precisamente esas aproximaciones por debajo.

Ahora, podemos extenderla a todos los conjuntos borelianos de  $\Omega$  como sigue:

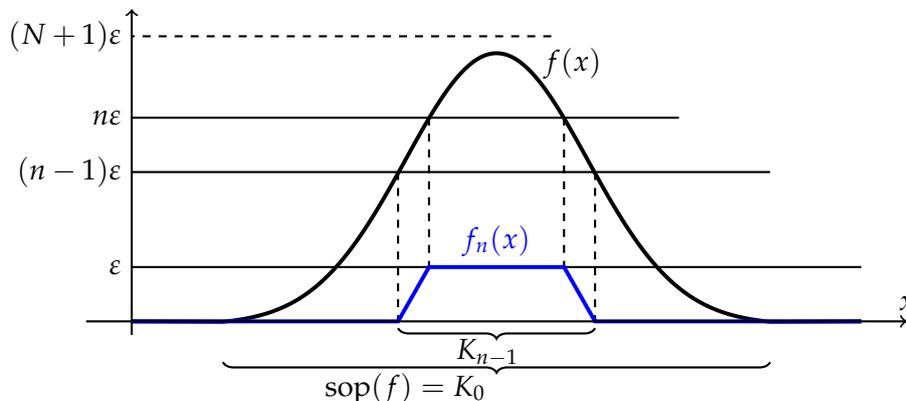
$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ es un abierto y } A \subseteq U\},$$

la cual tendrá sentido, ya que para los conjuntos abiertos  $U$  se cumple que  $\mu^*$  y  $\mu$  coinciden y la medida  $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}(\Omega)}$  será una medida de Borel regular.

A continuación, pretendemos comprobar que efectivamente  $\forall f \in C_{00}$ ,  $\langle T, f \rangle = \int f d\mu$  para la  $\mu$  que habíamos definido en el primer anterior. Por linealidad, basta ver la igualdad para  $f$  no negativa. Sea  $\varepsilon > 0$  y consideremos para cada  $n \in \mathbb{N}$  la función  $f_n$  que definiremos como:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) < (n-1)\varepsilon, \\ f(x) - (n-1)\varepsilon & \text{si } (n-1)\varepsilon \leq f(x) < n\varepsilon, \\ \varepsilon & \text{si } n\varepsilon \leq f(x). \end{cases}$$

Además, definimos  $K_0 = \text{sop}(f)$ , y para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\varepsilon\}$ . Es



fácil ver que  $f_n \in C_{00}(\Omega)$ , puesto que el soporte de  $f_n$  está contenido en el conjunto  $K_{n-1}$  y además, existirá un  $N > 0$  tal que  $f_n = 0$  si  $n > N$  por pertenecer  $f$  al espacio  $C_{00}(\Omega)$ . Por otro lado (ver dibujo),

$$f = \sum_{n=1}^N f_n \quad \text{y} \quad \varepsilon \chi_{K_n} \leq f_n \leq \varepsilon \chi_{K_{n-1}},$$

luego, integrando respecto a  $\mu$ , se mantienen las desigualdades:

$$\varepsilon\mu(K_n) \leq \int f_n d\mu \leq \varepsilon\mu(K_{n-1}).$$

Debido a que  $\mu$  es regular exterior tendremos que para todo compacto  $K \subset \Omega$ :

$$\mu(K) = \inf \{ \langle T, f \rangle : f \in C_{00}(\Omega), f \geq \chi_K \},$$

usando esta propiedad y que  $\varepsilon\chi_{K_n} \leq f_n$ , obtenemos:

$$\varepsilon\mu(K_n) \leq \langle T, f_n \rangle$$

Para cada  $g \in C_{00}(\Omega)$  con  $\chi_{K_{n-1}} \leq g$  obtenemos  $f_n \leq \varepsilon g$  ya que  $f_n \leq \varepsilon\chi_{K_{n-1}}$  y, por lo tanto,  $\langle T, f_n \rangle \leq \varepsilon\langle T, g \rangle$ . Utilizando este resultado y la regularidad exterior de nuevo, obtenemos

$$\langle T, f_n \rangle \leq \varepsilon\mu(K_{n-1}).$$

Sumando en ambas desigualdades, al ser  $f = \sum_{n=1}^N f_n$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{n=1}^N \mu(K_n) &\leq \int f d\mu \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \mu(K_n), \\ \varepsilon \sum_{n=1}^N \mu(K_n) &\leq \langle T, f \rangle \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \mu(K_n), \end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$\left| \langle T, f \rangle - \int f d\mu \right| \leq \varepsilon(\mu(K_0) - \mu(K_N)) \leq \varepsilon\mu(K_0)$$

pues  $K_N \subset K_0$  y entonces  $\mu(K_N) \leq \mu(K_0)$ . Como  $\varepsilon$  es arbitrario, concluimos finalmente:

$$\langle T, f \rangle = \int f d\mu = \langle \phi_\mu, f \rangle.$$

Hemos probado que cada operador lineal continuo no negativo,  $T$ , en  $C_{00}(\Omega)$  es de la forma  $\phi_\mu$ . Para el caso general de que el operador pueda tomar valores en  $\mathbb{R}$ , veamos que podemos descomponerlo en la diferencia de dos operadores no negativos y aplicando el caso anterior habríamos acabado la demostración. Para ello enunciemos y demostremos el siguiente resultado que nos dará esta descomposición.

**Lema 1.1.** *Sea  $\Omega$  un espacio de Hausdorff localmente compacto. Entonces, para cada operador  $T \in C_{00}(\Omega)^*$ , existen sendos operadores no negativos  $T^+$  y  $T^-$  en  $C_{00}(\Omega)^*$  tales que  $T = T^+ - T^-$ .*

*Demostración.* Para cada  $f$  no negativa en  $C_{00}$  definimos  $T^+(f)$  como

$$T^+(f) = \sup \{T(g) : g \in C_{00}(\Omega) \text{ y } 0 \leq g \leq f\}.$$

Usando que  $T$  es continua y  $0 \leq g \leq f$ , obtenemos la siguiente desigualdad

$$|T(g)| \leq \|T\| \|g\|_{\infty} \leq \|T\| \|f\|_{\infty},$$

de donde se deduce que el supremo dado en la definición de  $T^+$  es finito y la continuidad si fuese lineal (que lo será) y no negatividad de este:

$$0 \leq T^+(f) \leq \|T\| \|f\|_{\infty}.$$

Además, para cada  $\alpha \geq 0$ ,  $T^+(\alpha f) = \alpha T^+(f)$ . Para afirmar que  $T^+ \in C_{00}(\Omega)^*$ , nos faltaría comprobar la propiedad aditiva de la linealidad. Pasemos a demostrarla.

Sean  $f_1, f_2, g_1$  y  $g_2$  pertenecientes a  $C_{00}(\Omega)$  satisfaciendo  $0 \leq g_1 \leq f_1$  y  $0 \leq g_2 \leq f_2$ , luego  $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$ , por tanto,

$$T(g_1) + T(g_2) = T(g_1 + g_2) \leq T^+(f_1 + f_2),$$

y tomando supremos llegamos a una de las desigualdades:

$$T^+(f_1) + T^+(f_2) \leq T^+(f_1 + f_2).$$

Para ver la otra desigualdad, supongamos  $g$  perteneciente a  $C_{00}(\Omega)$  cumpliendo  $0 \leq g \leq f_1 + f_2$ , y definimos las funciones  $g_1$  y  $g_2$  como  $g_1 = \min(g, f_1)$  y  $g_2 = g - g_1$ . Luego, tanto  $g_1$  como  $g_2$  pertenecen a  $C_{00}(\Omega)$  y  $0 \leq g_1 \leq f_1$  y  $0 \leq g_2 \leq f_2$ , por tanto,

$$T(g) = T(g_1) + T(g_2) \leq T^+(f_1) + T^+(f_2),$$

tomando supremos, obtenemos la otra desigualdad:

$$T^+(f_1) + T^+(f_2) \geq T^+(f_1 + f_2).$$

Pasemos ahora a extender la definición de  $T^+$  a todo  $C_{00}(\Omega)$ . Para cada  $f \in C_{00}(\Omega)$ , consideramos  $f = f^+ - f^-$ , definimos

$$T^+(f) = T^+(f^+) - T^+(f^-),$$

el cual es fácil ver que será lineal y continuo al serlo para las funciones no negativas. Por último, definimos  $T^-$  en  $C_{00}(\Omega)$  como

$$T^- = T^+ - T,$$

la linealidad y continuidad de este operador son inmediatas y su no negatividad se deduce del hecho que  $T^+(f) \geq T(f)$  para cada función no negativa  $f \in C_{00}(\Omega)$ . Luego  $T = T^+ - T^-$ , con  $T^+$  y  $T^-$  pertenecientes a  $C_{00}(\Omega)^*$  no negativas, obteniendo el resultado buscado.  $\square$

Volviendo a la demostración de la sobreyectividad del teorema de Riesz, cualquier operador  $T$  perteneciente a  $C_{00}(\Omega)^*$  podremos descomponerlo, usando el **Lema 1.1**, como la diferencia de dos operadores no negativos:  $T = T^+ - T^-$  que pertenecen a  $C_{00}(\Omega)^*$  y, como ya habíamos probado, cada uno de ellos, al ser no negativos, podemos expresarlos como  $T^+ = \phi_{\mu_1}$  y  $T^- = \phi_{\mu_2}$ , con  $\mu_1, \mu_2 \in M(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{R})$ . Con lo cual, definiendo  $\mu = \mu_1 - \mu_2$ , el operador inicial  $T$  será  $T = \phi_{\mu_1} - \phi_{\mu_2} = \phi_{\mu}$  como queríamos.  $\square$



## 2 Aplicación: ecuaciones diferenciales

En esta parte vamos a utilizar los resultados introducidos en el Capítulo 1 como herramientas para obtener resultados de compacidad en ecuaciones diferenciales. Concretamente, partiremos de un modelo en derivadas parciales que constituye una ley de conservación, precisamente de masa, y que depende de un parámetro físico  $\varepsilon$  que mide la difusión a que está sometido y que tiende a desaparecer. El objetivo es estudiar rigurosamente su comportamiento.

Comenzamos con un breve repaso de las ecuaciones diferenciales asociadas a una ley de conservación.

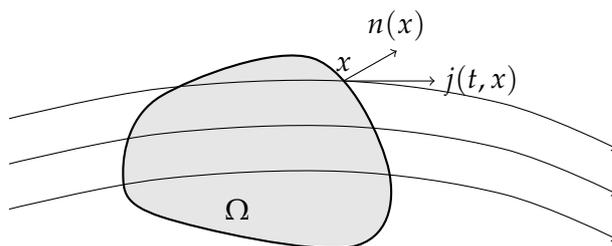
### 2.1. Leyes de conservación

Supongamos que tenemos una cierta sustancia que se mueve en un medio. Comencemos definiendo  $\rho(t, x)$  como la densidad (de masa) de dicha sustancia en tiempo  $t$  y posición  $x$ , que será no negativa. Entonces, la cantidad total sustancia en una región  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  y en el instante de tiempo  $t$  vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} \rho(t, x) dx.$$

Asumiendo que la masa ni se crea ni se destruye, es interesante darse cuenta de que la variación de esta en todo el dominio  $\Omega$  depende única y exclusivamente de su comportamiento (entrada/salida) a través de la frontera del mismo. Esto se puede escribir como sigue

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho(t, x) dx = - \int_{\partial\Omega} j(t, x) \cdot n(x) dS, \quad (2.1)$$



donde  $j$  es un campo denominado la **corriente**, e indica el flujo de dicha sustancia, esto es, cuánta hay y hacia dónde va, mientras que  $n$  se refiere al vector normal

exterior en cada punto de la frontera de  $\Omega$ . Así, la cantidad de sustancia que entra y/o sale por cada punto de la frontera de  $\Omega$ , el llamado flujo a través de la frontera, es  $-j \cdot n$ , tal y como aparece en (2.1) y como se muestra gráficamente en el dibujo. Observemos que todo encaja: en el caso de que el flujo “apunte” hacia el exterior en un punto (es decir, el producto escalar  $j \cdot n$  es positivo), la sustancia está saliendo de  $\Omega$  en ese punto y el flujo  $-j \cdot n$  es negativo, con lo cual este punto contribuye de forma negativa en el balance total, la parte derecha de (2.1). El efecto contrario lo observamos precisamente en los puntos de entrada, donde  $-j \cdot n$  es negativo (el flujo “apunta” hacia el interior). En el caso límite en que  $j$  y  $n$  son perpendiculares, ni entra ni sale sustancia por dicho punto, sino que se pasea por la frontera, y justo corresponde a un flujo  $j \cdot n = 0$  ese punto, que no contribuye en el balance total.

Usando el teorema de la divergencia, podemos expresar (2.1) como

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) \, dx = - \int_{\partial\Omega} j(t, x) \cdot n(x) \, dS = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(j(t, x)) \, dx.$$

Como esta igualdad se cumple para todo  $\Omega$ , obtenemos finalmente la ley de conservación (en forma de ecuación diferencial) tal y como se suele encontrar en la literatura:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + \operatorname{div}(j(t, x)) = 0.$$

Paramos un segundo para resaltar un elemento clave de este TFG (que luego recuperaremos con más detalle en la Sección 2.3): tal y como acabamos de establecer, la masa (total) ni se crea ni se destruye, solo se mueve, entrando y saliendo de cada recinto que consideremos. Entonces, una lectura matemática de este hecho nos dice que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^N} \rho(t, x) \, dx = 0 \Rightarrow \|\rho(t, \cdot)\|_{L^1} = \|\rho(0, \cdot)\|_{L^1} = \text{cte. } \forall t \geq 0,$$

es decir, la función densidad,  $\rho$ , vista como solución de la ecuación diferencial (2.1), vive en un conjunto acotado en  $L^1(\mathbb{R}^N)$  (respecto de  $x$ ) para todo  $t$ . Esto nos lleva a la siguiente cuestión: cuando algún parámetro de la ecuación se mueva y nuestra solución varíe con él, ¿basta esta acotación en  $L^1$  para obtener algún tipo de control (compacidad/convergencia) sobre tal variación? Pues bien, a responder a esta pregunta a través de un ejemplo dedicaremos lo que sigue de esta memoria, y será crucial el Teorema de representación de Riesz y los resultados sobre medidas que hemos presentado en el capítulo anterior.

Antes de pasar a nuestro ejemplo, nótese que en toda esta presentación, no se ha dicho en ningún momento quién es la corriente  $j$ ; en realidad, determinar  $j$  es determinar el modelo, es decir, qué fenómeno(s) físico(s) está(n) gobernando su movimiento. A modo de ejemplo, y porque encaja con el modelo que vamos a usar, presentamos muy brevemente dos:

- la difusión: describe la dispersión de una cierta sustancia de manera que las

partículas que la forman se mueven de las regiones con mayor concentración a las de menor concentración. Por tanto, es razonable suponer que el flujo será proporcional a  $-\nabla\rho$ , pues es bien sabido que el gradiente nos indica la dirección de mayor crecimiento del campo. Así,

$$j = -D\nabla\rho,$$

donde la constante  $D$  se llama constante de difusión y dependerá de la sustancia que se difunde y del medio. La ecuación diferencial en derivadas parciales que describe el fenómeno de la difusión viene dada por:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\Delta\rho,$$

y es conocida como la ecuación de difusión o del calor.

- La convección (o *drift*): en el caso de que exista un campo  $u(t, x)$  (que puede ser el propio campo de velocidades de las partículas) que gobierna hacia dónde se dirigen las partículas en cada instante de tiempo  $t$  y cada posición  $x$ , el flujo de fluido vendrá dado por  $j = \rho u$ , ya que este debe ser proporcional a la densidad. En este caso, la ley de conservación asociada queda como:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u),$$

donde el término  $\text{div}(\rho u)$  recibe el nombre de término de drift (o de transporte).

Una vez recordadas las leyes de conservación, en la siguiente sección estudiaremos un modelo que cumple una ley de este tipo y estudiaremos su comportamiento cuando la constante de difusión tiende a desaparecer. Concretamente, vamos a partir de una ley de conservación afectada por la suma de los dos efectos descritos, con el añadido de que el término de drift es no lineal, lo que aporta interés adicional (y dificultad) al modelo. Concretamente, partiremos de

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \text{div}(\rho U - D\nabla\rho) = 0, \quad U = \text{cierta función de } \rho,$$

donde identificamos  $\rho$  con la densidad, en el caso que estudiaremos en la siguiente sección precisamente con la de la masa. El término  $D$  nos indica que el modelo está sometido a una difusión y el término de drift  $\rho U$  sería la dirección del movimiento en ausencia de difusión. Al combinar los dos fenómenos no podemos afirmar que el campo  $U$  sea exactamente su velocidad.

## 2.2. Ecuación a estudiar: un modelo de drift-difusión no lineal

Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x (\rho_\varepsilon U_\varepsilon - \varepsilon \partial_x \rho_\varepsilon) &= 0, & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ U_\varepsilon &= \frac{1}{2} \frac{x}{|x|} * \rho_\varepsilon(t, x), & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \rho_\varepsilon(0, \cdot) &= \rho_{0, \varepsilon}, & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

el cual se trata de un modelo drift-difusión que ya habíamos introducido en la [Sección 2.1](#), donde podemos identificar  $\rho_\varepsilon$  con la densidad de masas y la variable  $\varepsilon$  con la constante de difusión. Este sistema cumple ciertas estimaciones sacadas de [\[Nieo3\]](#):

- $\rho_\varepsilon(t, x) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ .
- Conservación de la masa: para cada  $t \geq 0$ , la solución  $\rho_\varepsilon(t, \cdot)$  pertenece a  $L^1(\mathbb{R})$ ; de hecho,

$$\|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\rho_\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.3)$$

En particular:  $\rho_\varepsilon \in L^\infty(0, \infty; L^1(\mathbb{R}))$ .

- Decrecimiento en infinito de las soluciones:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \rho_\varepsilon(t, x) = 0 \text{ uniformemente en } \varepsilon > 0$$

- Además, el campo  $U_\varepsilon \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}))$ , y

$$\|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2} \|\rho_\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad (2.4)$$

para cada  $t \geq 0$ .

Esta última desigualdad es fácil de obtener a partir de la anterior, usando la expresión de  $U_\varepsilon$  en forma de convolución. Concretamente:

$$|U_\varepsilon(t, x)| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x-y|}{|x-y|} |\rho_\varepsilon(t, y)| dy = \frac{1}{2} \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Nuestro objetivo final es ver que las soluciones de (2.2) convergen, cuando  $\varepsilon$  tiende a 0 (usando todas las herramientas introducidas en el Capítulo anterior), y que la

densidad límite es solución del sistema:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho U) &= 0, & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ U &= \frac{1}{2} \frac{x}{|x|} *_x \rho(t, x), & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \rho(0, \cdot) &= \rho_0, & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como veremos en la **Sección 2.3**,  $\rho_\varepsilon$  convergerá débilmente-\* hacia una cierta medida  $\rho$  y  $U_\varepsilon$  a una función acotada  $U$  definida c.p.d. por lo que, a priori, el producto de ambos no tendría sentido. Por ello, para darle sentido (aunque sea débilmente) al producto  $\rho U$  damos la siguiente definición operacional que, como veremos en la **Subsección 2.2.3**, generaliza el caso regular.

**Definición 2.1.** Sea  $\rho \in M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$  y  $U = \frac{1}{2} \frac{x}{|x|} *_x \rho$ , entonces para cada función test  $\phi \in C_{00}^1(\mathbb{R})$  definimos

$$\langle \rho U, \partial_x \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (\rho U) \partial_x \phi \, dx := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{x-y}{|x-y|} \left( \frac{\partial_x \phi(x) - \partial_x \phi(y)}{4} \right) \rho(x) \rho(y) \, dx \, dy.$$

### 2.2.1. Continuidad de las soluciones

Recordemos que los elementos del espacio  $L^\infty$  son clases de equivalencia, por lo que, en principio, carece de sentido establecer una condición inicial  $\rho(0, x) = \rho_0(x)$ , ya que supone evaluar la función  $\rho_\varepsilon$  en  $t = 0$ , es decir, en un conjunto de medida nula. Para darle sentido, veamos que  $\rho_\varepsilon$  tiene una cierta propiedad de continuidad (débil) respecto de  $t$ . Para ello, sean  $\tau, s \in [0, \infty)$  y tomemos en principio  $\phi \in C_{00}^2(\mathbb{R})$ ; entonces,

$$\langle \rho_\varepsilon(\tau, \cdot) - \rho_\varepsilon(s, \cdot), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (\rho_\varepsilon(t, x) - \rho_\varepsilon(s, x)) \phi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_s^\tau \frac{\partial \rho_\varepsilon(t, x)}{\partial t} \, dt \right) \phi(x) \, dx.$$

Como  $\rho_\varepsilon$  es solución del sistema (2.2) sustituyendo el valor de  $\partial_t \rho_\varepsilon$  e integrando por partes, obtenemos la siguiente igualdad

$$\langle \rho_\varepsilon(\tau, \cdot) - \rho_\varepsilon(s, \cdot), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_s^\tau \left( \rho_\varepsilon(t, x) U_\varepsilon(t, x) \cdot \phi'(x) + \varepsilon \rho_\varepsilon(t, x) \phi''(x) \right) \, dt \, dx,$$

aplicando Fubini y acotando los miembros de la integral, se nos queda finalmente la desigualdad que queremos:

$$\begin{aligned} \langle \rho_\varepsilon(\tau, \cdot) - \rho_\varepsilon(s, \cdot), \phi \rangle &\leq \int_s^\tau \left( \|U_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\phi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\phi''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right) \, dt \leq C_\phi \int_s^\tau \, dt \leq C_\phi |\tau - s|. \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos cierta continuidad de  $\rho$  respecto de  $t$  (visto como operador sobre funciones  $\phi \in C_{00}^2(\mathbb{R})$ ); en realidad, con un poco más de trabajo es posible demostrar que  $\rho_\varepsilon(t, x) \in C(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R})\text{-débil-}^*)$ , para todo  $\varepsilon > 0$  finito, pero con esto ya nos basta para dar sentido a la condición inicial.

### 2.2.2. Formulación débil

Aunque nuestras soluciones son regulares, vamos a trabajar con la formulación débil para poder hacer después el paso al límite. Por lo tanto, vamos a ver cuál es la formulación débil de nuestro problema.

Consideremos un tiempo  $T > 0$  fijo, pero arbitrario, y la solución  $\rho_\varepsilon(t, x)$  solución del sistema (2.2). Con lo cual,  $\forall \phi \in C_{00}^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$  se cumplirá la siguiente igualdad:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x) \left( \partial_t \rho_\varepsilon(t, x) + \partial_x (\rho_\varepsilon(t, x) U_\varepsilon(t, x) - \varepsilon \partial_x \rho_\varepsilon(t, x)) \right) dx dt = 0. \quad (2.6)$$

Reformulado  $\partial_x (\rho_\varepsilon U_\varepsilon - \varepsilon \partial_x \rho_\varepsilon)$  como  $\partial_x (\rho_\varepsilon U_\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2 \rho_\varepsilon}{\partial x^2}$ , podemos reescribir (2.6) como sigue:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[ \phi(t, x) \partial_t \rho_\varepsilon(t, x) + \phi(t, x) \partial_x (\rho_\varepsilon(t, x) U_\varepsilon(t, x)) - \phi(t, x) \varepsilon \frac{\partial^2 \rho_\varepsilon}{\partial x^2}(t, x) \right] dx dt = 0.$$

Para poder llegar a la formulación débil, trabajemos antes con cada sumando. En primer lugar, reescribimos la primera integral aplicando el teorema de Fubini e integración por partes obtenemos:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x) \partial_t \rho_\varepsilon(t, x) dx dt = \int_{\mathbb{R}} \left[ \phi(t, x) \rho_\varepsilon(t, x) \right]_0^T dx - \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \rho_\varepsilon(t, x) \partial_t \phi(t, x) dt dx.$$

Por ser  $\phi \in C_{00}^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ , sabemos que  $\phi(T, x) = 0$ , con lo cual:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x) \partial_t \rho_\varepsilon(t, x) dx dt = - \int_{\mathbb{R}} \phi(0, x) \rho_{0, \varepsilon}(x) dx - \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \rho_\varepsilon(t, x) \partial_t \phi(t, x) dt dx.$$

Pasemos a estudiar las integrales restantes. Volviendo a aplicar varias veces integración por partes y teniendo en cuenta que  $\phi$  es de soporte compacto obtenemos

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x) \partial_x (\rho_\varepsilon(t, x) U_\varepsilon(t, x)) = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t, x) U_\varepsilon(t, x) \partial_x \phi(t, x) dx dt,$$

y

$$\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x) \frac{\partial^2 \rho_\varepsilon}{\partial x^2}(t, x) dx dt = \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t, x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t, x) dx dt.$$

Por tanto, la ecuación (2.6) podemos reescribirla como

$$\underbrace{\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt}_{(FD_1)} + \underbrace{\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t, x) U_\varepsilon(t, x) \partial_x \phi(t, x) dx dt}_{(FD_2)} + \varepsilon \underbrace{\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t, x) \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} dx dt}_{(FD_3)} = - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \phi(0, x) \rho_{0, \varepsilon}(x) dx}_{(FD_4)}, \quad (2.7)$$

$\forall \phi \in C_{00}^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ , que será la formulación débil de nuestro sistema (2.2).

### 2.2.3. Reformulación de la no linealidad (FD<sub>2</sub>)

A la hora de tomar límites, los términos lineales no nos supondrán un problema, como veremos en la [Subsección 2.3.2](#); sin embargo, el término (FD<sub>2</sub>) al no ser lineal, tendremos que proceder de otra manera. En este subapartado reescribiremos este término no lineal para luego así facilitarnos el trabajo en la convergencia.

Usando que  $U_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{2} \frac{x}{|x|} *_x \rho_\varepsilon(t, x)$ , podemos reescribir (FD<sub>2</sub>) como

$$(FD_2) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \frac{x-y}{|x-y|} \rho_\varepsilon(t, y) \rho_\varepsilon(t, x) \partial_x \phi(t, x) dy dx dt. \quad (2.8)$$

Renombrando las variables como  $(x, y) \rightarrow (y, x)$  y aplicando Fubini, obtenemos

$$(FD_2) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{2} \frac{x-y}{|x-y|} \rho_\varepsilon(t, x) \rho_\varepsilon(t, y) \partial_x \phi(t, y) dy dx dt, \quad (2.9)$$

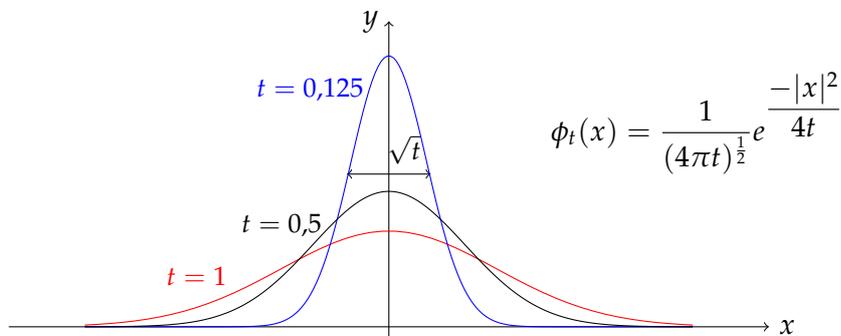
y notando finalmente que  $(FD_2) = (2.8) = (2.9) = \frac{(2.8)+(2.9)}{2}$  obtenemos:

$$(FD_2) = \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{x-y}{|x-y|} \rho_\varepsilon(t, x) \rho_\varepsilon(t, y) \left( \partial_x \phi(t, x) - \partial_x \phi(t, y) \right) dy dx dt, \quad (2.10)$$

donde aparece el producto de funciones (medidas)  $\rho_\varepsilon(t, y) \rho_\varepsilon(t, x)$ , actuando como operadores sobre la función  $\psi(t, x, y) = \frac{1}{4} \frac{x-y}{|x-y|} (\partial_x \phi(t, x) - \partial_x \phi(t, y))$  que es continua y acotada (aunque con soporte no compacto). De este modo, como hicimos en la introducción de este capítulo, la expresión (2.10) permite reescribir el término (FD<sub>2</sub>) en la formulación débil y que se ajuste a la [Definición 2.1](#) que hemos dado, de modo que siga teniendo sentido incluso cuando  $\rho$  sea solo una medida.

### 2.3. Comportamiento asintótico cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

En general, si tenemos una sucesión acotada de funciones en  $L^1$  no tenemos garantizada la existencia de una parcial que tenga que converger en  $L^1$ . Como ejemplo podemos considerar la solución fundamental del calor:



Como se estudió en la asignatura de modelos matemáticos II, la norma  $L^1$  de la solución fundamental de la ecuación del calor es 1. Además, como se puede apreciar en el dibujo, la función  $\phi_t$  converge puntualmente a la función 0 c.p.d. cuando  $t \rightarrow 0$ . Sin embargo, en norma

$$1 = \|\phi_t - 0\| \text{ no puede converger a } 0.$$

De hecho, que  $\phi_t$  sea la solución de la ecuación del calor  $\partial_t \phi - \partial_{xx}^2 \phi = 0$ , significa que su condición inicial el  $t = 0$  es (en cierto sentido) una delta de Dirac, con lo que la convergencia cuando  $t \rightarrow 0$  es precisamente la continuidad de la que hablamos en la [Subsección 2.2.1](#), y no será en  $L^1$ , aunque sí en un cierto sentido operacional (o débil), ¡como medida!

#### 2.3.1. Conservación implica compacidad

Al principio de la sección ya habíamos visto que las soluciones del sistema (2.2), a causa de la conservación de la masa, estaban acotadas en  $L^1$ , en particular,  $\rho_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}))$ ; sin embargo, como hemos comprobado en el ejemplo anterior, este hecho no nos asegura la convergencia. No obstante, usando las herramientas presentadas en el [Capítulo 1](#), podemos llegar a obtener un tipo de convergencia de estas soluciones acotadas como sigue:

Debido a la inclusión isométrica de  $L^1(\mathbb{R})$  en  $M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ , comentada en la [Subsección 1.3.2](#), podemos ver  $\{\rho_\varepsilon(t, x)\}_{\varepsilon > 0}$  como una sucesión de medidas en el espacio  $L^\infty(0, T; M_r)$ , el cual, a su vez, podemos identificarlo como el dual de alguien: Gracias al teorema de representación de Riesz de la [Sección 1.4](#), que nos daba el

isomorfismo isométrico  $C_{00}(\mathbb{R})^* \equiv M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$  y a que, como vimos en la asignatura de Análisis Funcional,  $L^\infty(\mathbb{R}) \equiv L^1(\mathbb{R})^*$ , obtenemos que

$$L^\infty(0, T; M_r) \equiv L^1(0, T; C_{00}(\mathbb{R}))^*.$$

Por tanto, podemos identificar nuestra sucesión original  $\{\rho_\varepsilon(t, x)\}_{\varepsilon>0}$  con una sucesión acotada en el dual del espacio  $L^1(0, T; C_{00}(\mathbb{R}))$ .

Con el fin de aplicar el **Teorema 1.3**, veamos que el espacio  $L^1(0, T; C_{00}(\mathbb{R}))$  es separable. Para ello, utilizaremos un resultado extraído de [Hyt16], el cual asegura que si tanto  $L^1(0, T)$  como  $C_{00}(\mathbb{R})$  son separables, entonces nuestro espacio inicial también. Este hecho se cumple, ya que, como se ha visto en la asignatura de análisis funcional,  $L^1(0, T)$  es separable y  $C_{00}(\mathbb{R})$  también, como hemos comentado en la **Subsección 1.3.1**.

Por consiguiente, aplicando el **Teorema 1.3**, consecuencia del Teorema de Banach-Alaouglu, existirá una sucesión parcial de  $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  que converge como medida con la topología débil-\*, es decir,  $\exists \rho \in L^\infty(0, T; M_r)$  y una parcial (que denotaremos igual) tal que, siguiendo con la **Definición 1.11**,

$$\{\langle \rho_\varepsilon, \phi \rangle\} \rightarrow \langle \rho, \phi \rangle \quad \forall \phi \in L^1(0, T; C_{00}(\mathbb{R})).$$

Para poder relacionar este concepto con la formulación débil de **Subsección 2.2.2** nos sea más manejable a la hora de trabajar con este tipo de convergencia, consideremos la aplicación  $\Psi$  del **Subsección 1.3.2**, la que nos da la inclusión de  $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$  en  $M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ , y  $\Phi$ , la que hemos usado para el teorema de representación de Riesz (**Sección 1.4**), que nos daba la identificación de  $M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$  en el dual de  $C_{00}$ . A modo de esquema, juntando estos resultados, tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) & \xrightarrow{\Psi} & M_r(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\Phi} & C_{00}(\mathbb{R})^* \\ g & \mapsto & \mu_g & \mapsto & \phi_{\mu_g}. \end{array}$$

Al tener  $\mu_g$  su origen de una función  $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ , en la **Proposición 1.7** ya vimos que  $\langle \phi_{\mu_g}, f \rangle$ , con  $f \in C_{00}(\mathbb{R})$ , podíamos reescribirlo como  $\int g(x)f(x) dx$ . Con ello, podemos aplicar esta composición de funciones a nuestra sucesión  $\{\rho_\varepsilon\}$ , pudiendo escribir  $\langle \rho_\varepsilon, f \rangle$  como:

$$\langle \rho_\varepsilon, f \rangle = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t, x) f(t, x) dx, \quad \text{para toda } f \in L^1(0, T; C_{00}(\mathbb{R})),$$

que es como aparece en la formulación débil (al menos en los términos lineales). De hecho, la convergencia obtenida  $\{\rho_\varepsilon(t, x)\}_{\varepsilon>0} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(t, x)$ , con  $\rho(t, x) \in L^\infty(0, T; M_r)$

## 2 Aplicación: ecuaciones diferenciales

nos dice que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t, x) f(t, x) dx dt \rightarrow \langle \rho, f \rangle := \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho(t, x) f(t, x) dx dt,$$

para cada  $f \in L^1(0, T; C_{00}(\mathbb{R}))$ , y en particular, para cada  $f \in C_{00}^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$ . Notemos que esta última expresión es técnicamente incorrecta, pues  $\rho(t, \cdot)$  es una medida para cada  $t > 0$ , y en rigor habría que escribir  $\langle \rho, f \rangle = \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}} f(t, x) d\rho(t, \cdot) \right) dt$ , pero como esta forma tiene una complejidad excesiva que no ayuda a su comprensión, optamos por la anterior, que claramente generaliza el caso regular y es la que nos aparecerá en la formulación débil de forma natural.

### 2.3.1.1. La unicidad ayuda a la convergencia

Antes de seguir, dedicamos este breve espacio al hecho (aparente) de no dar importancia a las sucesiones parciales, ya que, anteriormente y en lo que sigue, denotamos a las sucesiones parciales de  $\{\rho_\varepsilon(t, x)\}_{\varepsilon > 0}$  convergentes de igual forma que la sucesión completa, y además sin tener en cuenta cómo se acerca  $\varepsilon$  a cero, sin hacer distinciones entre ellas. Esto es porque, como vamos a ver a continuación, a posteriori es posible comprobar que la sucesión completa es la que converge. De hecho, esto es consecuencia de la unicidad de solución de la ecuación límite que se garantiza en [Nieo3], y del lema que vamos a enunciar a continuación.

**Lema 2.1.** *Sea  $\{x_n\} \in X$ , con  $X$  un espacio topológico de Hausdorff y  $x \in X$  fijo. Si  $\forall \sigma(n) \exists \tau(\sigma(n))$  tal que  $x_{\tau(\sigma(n))}$  converge a  $x$  con  $n$  tendiendo a infinito, entonces  $x_n$  también convergerá a  $x$  en  $X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $x_n$  no converge a  $x$ . Entonces, existirá  $\varepsilon_0 > 0$  y  $\sigma(n)$  tal que

$$|x_{\sigma(n)} - x| > \varepsilon_0, \quad \forall n > 0.$$

Pero entonces, por la hipótesis del lema, existirá  $\tau(\sigma(n))$  y  $n_0 > 0$  tal que

$$|x_{\tau(\sigma(n))} - x| \leq \varepsilon_0, \quad \forall n \geq n_0,$$

llegando así a una contradicción. □

### 2.3.2. Parte “fácil”: límite de las partes lineales

Por la propia definición de convergencia débil-\* de  $\rho_\varepsilon(t, x)$ , podemos pasar al límite directamente en los términos  $(FD_1)$ ,  $(FD_2)$  y  $(FD_4)$  de la ecuación (2.7) al tratarse de expresiones lineales.

- En  $(FD_1)$  obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^T \rho_\varepsilon(t, x) \partial_t \phi(t, x) dt dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \rho(t, x) \partial_t \phi(t, x) dt dx.$$

- En  $(FD_3)$ :

$$\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t, x) \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} dx dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \times \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho(t, x) \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} dx dt = 0$$

donde  $\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho(t, x) \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} dx dt$  está acotada por ser  $\phi \in C_{00}([0, T] \times \mathbb{R})$ .

- En  $(FD_4)$ , como  $\rho_{0,\varepsilon}(x)$  es una condición inicial que ponemos nosotros, imponemos que  $\rho_{0,\varepsilon}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_0(x)$ , con lo que tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(0, x) \rho_{0,\varepsilon}(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(0, x) \rho_0(x) dx.$$

### 2.3.3. Límite de la parte no lineal $(FD_2)$

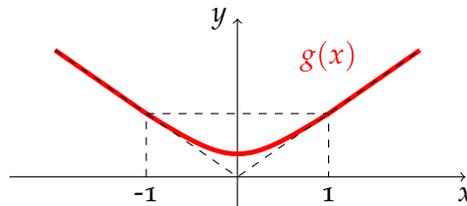
Como ya habíamos adelantado, el límite en la parte no lineal  $(FD_2)$ , incluso en su forma final (2.10), no parece tan sencillo como para los términos lineales. Sabemos que, en general, el producto de dos medidas no converge al producto de sus límites en la topología débil\*, pero en nuestro caso sí se obtiene la convergencia del producto, cuya demostración puede consultarse en [NPS01]. Por tanto, tenemos que

$$\rho_\varepsilon(t, x) \rho_\varepsilon(t, y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(t, x) \rho(t, y), \text{ en } C(0, T; M_r(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y) - \text{débil}^*).$$

Sin embargo, esto no es suficiente para pasar al límite directamente en (2.10) debido a que  $\psi$  no tiene soporte compacto, por lo que para poder tomar límites necesitaremos actuar de otra manera en la que necesitaremos que el primer momento de  $\rho_\varepsilon$  esté acotado, como comprobaremos en el siguiente apartado.

#### 2.3.3.1. Acotación del momento

Veamos que efectivamente el primer momento está acotado para la solución  $\rho_\varepsilon$  de nuestro sistema (2.2). Para ello, definimos una función  $g \in C^2(\mathbb{R})$  tal que  $g(x) \geq |x|$  en  $\mathbb{R}$  y  $g(x) = |x|$  para  $|x| \geq 1$ ; podemos imaginar algo así:



## 2 Aplicación: ecuaciones diferenciales

y, para lo que nos ocupa, notemos que sus derivadas primera y segunda están acotadas. De hecho, cumplen:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{si } |x| \geq 1 \\ \text{acotada} & \text{si } |x| \leq 1, \end{cases} \quad g''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ \text{acotada} & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, usando que  $|x| \leq g(x)$  y la regla de Barrow, escribimos

$$|x|\rho_\varepsilon(t, x) \leq g(x)\rho_\varepsilon(t, x) = \int_0^t g(x) \frac{\partial \rho}{\partial t} \rho_\varepsilon(s, x) ds + g(x)\rho_{\varepsilon,0}(x).$$

Usando ahora la ecuación (2.2) e integrando en  $\mathbb{R}$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |x|\rho_\varepsilon(t, x) dx \leq & \left| - \int_0^t \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_\varepsilon U_\varepsilon) g(x) dx}_{(P1)} ds + \varepsilon \int_0^t \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho_\varepsilon g(x) dx}_{(P2)} ds \right| \\ & + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(x)\rho_{\varepsilon,0}(x) dx}_{(P3)}. \end{aligned}$$

Analizamos cada una de estas tres partes. Usando la regla de integración por partes y el decrecimiento en infinito, podemos desarrollar (P1) y (P2) como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_\varepsilon(s, x) U_\varepsilon(s, x)) g(x) dx &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(s, x) U_\varepsilon(s, x) g'(x) dx, \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho_\varepsilon(s, x) g(x) dx &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(s, x) g''(x) dx. \end{aligned}$$

Para (P3) simplemente usamos la forma de  $g$  para  $|x| \leq 1$  y  $|x| \geq 1$ , obteniendo:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\rho_{\varepsilon,0}(x) dx = \int_{|x| \leq 1} \rho_{\varepsilon,0}(x) dx + \int_{|x| \geq 1} |x|\rho_{\varepsilon,0}(x) dx \leq \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R})} + |x|\|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Combinado los tres y gracias a la conservación de la masa (2.3) y a la estimación del campo (2.4), obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |x|\rho_\varepsilon(t, x) dx &\leq \int_0^t \|\rho_\varepsilon(s, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|U_\varepsilon(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|g'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} ds \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t \|\rho_\varepsilon(s, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} ds + \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R})} + |x|\|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq (Ct + 1) \left( \frac{1}{2} \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 + \|\rho_{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R})} \right) + \| |x|\rho_{0,\varepsilon} \|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

donde  $C$  se puede tomar como  $C = \|g'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|g''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ . Notamos que esta cota final depende solo de la condición inicial  $\rho_{0,\varepsilon}$ . Como el objetivo es hacer  $\varepsilon$  tender a

0, hemos tomado  $\varepsilon \leq 1$  y además, como  $\rho_{0,\varepsilon}$  es la condición inicial, la tomamos de manera que  $\int_{\mathbb{R}} |x| \rho_{0,\varepsilon}(x) dx$  esté acotada por una cierta constante  $C_1 > 0$ . Con lo cual, obtenemos el resultado buscado,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \rho_{\varepsilon}(t, x) dx \leq C(T, \rho_{0,\varepsilon}), \quad \forall t \in [0, T].$$

### 2.3.3.2. Paso al límite

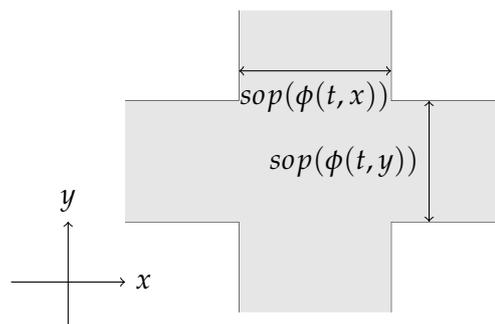
Una vez acotado el momento y teniendo en mente la convergencia del producto, podemos, por fin, pasar al límite:

**Proposición 2.1.** *El término no lineal  $FD_2$  de la ecuación (2.7), reescrito en la forma (2.10), esto es*

$$(FD_2) = \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \rho_{\varepsilon}(t, x) \rho_{\varepsilon}(t, y) \underbrace{\frac{x-y}{|x-y|} \left( \frac{\partial_x \phi(t, x) - \partial_x \phi(t, y)}{4} \right)}_{\psi(t, x, y)} dy dx dt,$$

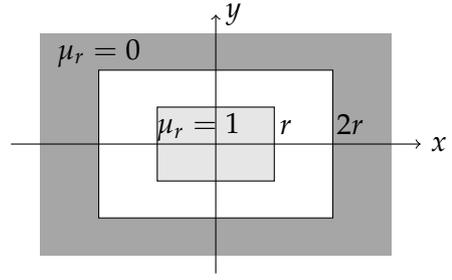
converge a  $B := \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi(t, x, y) \rho(t, x) \rho(t, y) dx dy dt$  cuando  $\varepsilon$  tiende a 0. Notemos que, acorde con la **Definición 2.1**,  $B$  no es más que la forma correcta de describir el producto  $\rho(t, \cdot) U(t, \cdot)$  actuando sobre el test  $\partial_x \phi(t, \cdot)$ .

*Demostración.* En primer lugar, notemos que la función  $\psi$ , al ser continua y acotada, si tuviese soporte compacto podríamos tomar límite directamente en (2.10), ya que, como hemos comentado al principio de la subsección, el producto  $\rho_{\varepsilon}(t, y) \rho_{\varepsilon}(t, x)$  converge débil\*. Pero al no tenerlo no podemos pasar al límite de momento. De hecho, su soporte, en las variables  $x$  e  $y$ , podemos esbozarlo gráficamente como sigue:



Para solventar este problema de soportes, definimos una función auxiliar de truncamiento  $\mu_r(x, y) \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$  cumpliendo

$$\begin{cases} \mu_r(x, y) = 1, & \text{si } |x| + |y| \leq r. \\ \mu_r(x, y) = 0, & \text{si } |x| + |y| > 2r. \\ 0 \leq \mu_r(x, y) \leq 1, & \text{si } r < |x| + |y| \leq 2r. \end{cases}$$



Usando que  $1 = \mu_r + (1 - \mu_r)$ , podemos descomponer  $(FD_2)$ , usando (2.10), como sigue:

$$\begin{aligned} (2.10) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu_r(x, y) \psi(t, x, y) \rho_\varepsilon(t, x) \rho_\varepsilon(t, y) dx dy dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (1 - \mu_r(x, y)) \psi(t, x, y) \rho_\varepsilon(t, x) \rho_\varepsilon(t, y) dx dy dt := A_{r,\varepsilon} + B_{r,\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Además, definiendo  $A_r$  como

$$A_r := \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu_r(x, y) \psi(t, x, y) \rho(t, x) \rho(t, y) dx dy dt,$$

podemos acotar la diferencia  $|(FD_2) - B| = |A_{r,\varepsilon} + B_{r,\varepsilon} - B|$  por la expresión:

$$|(FD_2) - B| \leq |B_{r,\varepsilon}| + |A_{r,\varepsilon} - A_r| + |A_r - B|. \quad (2.12)$$

Queremos ver que, fijado cualquier  $\eta > 0$  encontramos un radio  $r_2 > 0$  y un  $\varepsilon_0 > 0$  fijos para los cuales cada término de la expresión (2.12) sea menor que  $\eta/3$  para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , que es exactamente la definición de convergencia de  $(FD_2)$  al término  $B$ .

Veamos en primer lugar que el primer término  $B_{r,\varepsilon}$  de (2.12) tiende a 0 cuando  $r$  va a infinito uniformemente en  $\varepsilon$ . Por definición de  $\mu_r$ , sabemos que  $1 - \mu_r = 0$  para  $|x| + |y| \leq r$ , por lo tanto, podemos estimar  $B_{r,\varepsilon}$  como sigue

$$\begin{aligned} |B_{r,\varepsilon}| &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(1 - \mu_r(x, y)) \psi(t, x, y) \rho_\varepsilon(t, x) \rho_\varepsilon(t, y)| dx dy dt \\ &= \int_0^T \int_{\{|x|+|y|>r\}} |(1 - \mu_r(x, y)) \psi(t, x, y) \rho_\varepsilon(t, x) \rho_\varepsilon(t, y)| dx dy dt. \end{aligned}$$

Ahora, usando que  $1 - \mu_r \leq 1$ , y que estamos en el conjunto  $|x| + |y| > r$ , podemos estimar parte del integrando como sigue:

$$(1 - \mu_r) \leq 1 = \frac{|x| + |y|}{|x| + |y|} < \frac{|x| + |y|}{r},$$

lo que, sustituyendo en la desigualdad anterior (nótese que  $\rho_\varepsilon \geq 0$ ), produce

$$\begin{aligned}
 |B_{r,\varepsilon}| &\leq \int_0^T \int_{\{|x|+|y|>r\}} \frac{|x|+|y|}{r} |\psi(t,x,y)| \rho_\varepsilon(t,x) \rho_\varepsilon(t,y) dx dy dt \\
 &\leq \frac{\|\psi\|_{L^\infty}}{r} \int_0^T \int_{\{|x|+|y|>r\}} (|x|+|y|) \rho_\varepsilon(t,x) \rho_\varepsilon(t,y) dx dy dt \\
 &\leq \frac{\|\psi\|_{L^\infty}}{r} \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^2} |x| \rho_\varepsilon(t,x) \rho_\varepsilon(t,y) dx dy + \int_{\mathbb{R}^2} |y| \rho_\varepsilon(t,x) \rho_\varepsilon(t,y) dx dy \right) dt \\
 &= 2 \frac{\|\psi\|_{L^\infty}}{r} \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t,y) dy \right) \left( \int_{\mathbb{R}} |x| \rho_\varepsilon(t,x) dx \right) dt.
 \end{aligned}$$

Como la masa está acotada independientemente de  $\varepsilon$  por las hipótesis del principio del capítulo y el primer momento también (**Subsección 2.3.3.1**), llegamos a que

$$|B_{r,\varepsilon}| \leq 2 \frac{\|\psi\|_{L^\infty}}{r} \int_0^T \text{masa}(t) \text{momento}(t) dt \leq \frac{2CT}{r}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

como queríamos demostrar. De hecho, podemos concluir que para cualquier  $\eta > 0$ , existe<sup>1</sup> un  $r_0 \gg 0$ , suficientemente grande, tal que

$$|B_{r,\varepsilon}| \leq \frac{\eta}{3}, \quad \forall r \geq r_0.$$

El siguiente paso será estudiar el tercer término  $|A_r - B|$  de (2.12):

$$\begin{aligned}
 |A_r - B| &\leq \int_0^T \int_{\{|x|+|y|>r\}} |1 - \mu_r(x,y)| |\psi(t,x,y)| |\rho(t,x) \rho(t,y)| dx dy dt \\
 &\leq \int_0^T \|\psi\|_{L^\infty} \rho \rho t(\{|x|+|y|>r\}) dt \\
 &= \|\psi\|_{L^\infty} \int_0^T |\rho \rho t(\mathbb{R}^2) - \rho \rho t(\{|x|+|y| \leq r\})| dt,
 \end{aligned}$$

donde, para simplificar, hemos denotado por  $\rho \rho t$  a la medida producto  $\rho(t, \cdot) \times \rho(t, \cdot)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Gracias a que esta es una medida regular y que las bolas  $\{|x|+|y| \leq r\}$  son compactas, podemos usar la regularidad interior para ver que este término converge a  $\rho \rho t(\mathbb{R}^2)$  cuando  $r$  tiende a infinito; es decir, para nuestro  $\eta > 0$ ,

$$\exists r_1 > 0 : \left| \rho \rho t(\mathbb{R}^2) - \rho \rho t(\{|x|+|y| \leq r\}) \right| \leq \frac{\eta}{3T \|\psi\|_{L^\infty}} \quad \forall r \geq r_1,$$

y, en particular, llegamos a que dado nuestro  $\eta > 0$ ,

$$\exists r_1 > 0 \text{ tal que } |A_r - B| \leq \frac{\eta}{3}, \quad \forall r \geq r_1.$$

---

<sup>1</sup>En nuestro caso particular, podemos tomar  $r_0$  como  $\frac{6CT}{\eta}$ .

## 2 Aplicación: ecuaciones diferenciales

Pasamos finalmente a estudiar el segundo término de (2.12) para  $r_2 = \max\{r_0, r_1\}$  fijo; si nos fijamos en  $A_{r_2, \varepsilon}$ , primer trozo de la igualdad (2.11), y notamos que ahora la función  $(\psi(t, x, y)\mu_{r_2}(x, y))$  que multiplica a  $\rho_\varepsilon(t, x)\rho_\varepsilon(t, y)$  sí tiene soporte compacto, podemos tomar límites y sabemos que para el  $\eta$  anterior, existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que,

$$|A_{r_2, \varepsilon} - A_{r_2}| := \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu_{r_2}(x, y) \psi(t, x, y) \rho_\varepsilon(t, x) \rho_\varepsilon(t, y) dx dy dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu_{r_2}(x, y) \psi(t, x, y) \rho(t, x) \rho(t, y) dx dy dt \right| \leq \frac{\eta}{3},$$

para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

Ahora podemos ver que efectivamente el término no lineal,  $(FD_2)$ , converge a  $B$ . Para el  $r_2$  fijo de la desigualdad anterior, cada sumando de la ecuación (2.12) será menor que  $\eta/3$  y así obtenemos la convergencia buscada:

dato  $\eta > 0$ ,  $\exists \varepsilon_0 > 0$  tal que:

$$|(FD_2) - B| \leq |B_{r_2, \varepsilon}| + |A_{r_2, \varepsilon} - A_{r_2}| + |A_{r_2} - B| \leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

y concluimos la demostración de la **Proposición 2.1**.  $\square$

Una vez obtenida la convergencia de la parte no lineal, podemos cerrar la cadena de demostraciones para pasar al límite en la formulación débil de nuestro sistema de partida (2.7) usando la convergencia de las partes lineales estudiadas en **Subsección 2.3.2** y la **Proposición 2.1** que acabamos de demostrar para la parte no lineal, obteniendo así el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi(t, x, y) \rho(t, x) \rho(t, y) dx dy dt \\ = - \int_{\mathbb{R}} \phi(0, x) \rho_0(x) dx \end{aligned}$$

con  $\psi(t, x, y) = \frac{1}{4} \frac{x-y}{|x-y|} (\partial_x \phi(t, x) - \partial_x \phi(t, y))$ . Definiendo el producto  $\rho U$  en sentido débil como la **Definición 2.1** deducimos, por tanto, que el límite encontrado es una solución del sistema (2.5) en sentido débil.

## Bibliografía

- [Bre84] Haïm Brezis. *Análisis funcional : teoría y aplicaciones / Haïm Brézis ; versión española de Juan Ramón Esteban*. Alianza Universidad. Textos ; 88. Alianza Editorial, Madrid, 1984. [Citado en pág. 15]
- [Coh97] Donald L. Cohn. *Measure theory / Donald L. Cohn*. Birkhauser, Boston, 1997. [Citado en págs. XI, XIII, 5, and 18]
- [Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis : modern techniques and their applications*. Pure and applied mathematics. John Wiley, New York [etc, 2nd ed. edition, 1999. [Citado en págs. XI, XIII, 22, and 23]
- [Hyt16] Tuomas Hytönen. *Analysis in Banach Spaces [electronic resource] : Volume I: Martingales and Littlewood-Paley Theory / by Tuomas Hytönen, Jan van Neerven, Mark Veraar, Lutz Weis*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics*, 63. Springer International Publishing, Cham, 1st ed. 2016. edition, 2016. [Citado en pág. 37]
- [Nieo3] Juanjo Nieto. Hydrodynamical limit for a drift-diffusion system modeling large-populations dynamics. *J. Math. Anal. Appl*, 291:716–726, 2003. [Citado en págs. XI, XIII, 32, and 38]
- [NPSo1] Juanjo Nieto, Frédéric Poupaud, and Juan Soler. High-field limit for the vlasov-poisson-fokker-planck system. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 158:29–59, 01 2001. [Citado en pág. 39]
- [PG10] Francisco Javier Pérez González. Análisis funcional en espacios de banach. [https://www.ugr.es/~fjperez/textos/Analisis\\_Funcional\\_en\\_Espacios\\_de\\_Banach.pdf](https://www.ugr.es/~fjperez/textos/Analisis_Funcional_en_Espacios_de_Banach.pdf), 2010. Recurso online. Accedido el 22 de septiembre de 2021. [Citado en págs. XI, XIII, 14, 15, 16, and 17]
- [Pu11] John Pardon (<https://mathoverflow.net/users/35353/john-pardon>). Separability of continuous functions with compact support. <https://mathoverflow.net/q/67769>, junio 2011. Recurso online. Accedido el 11 de marzo de 2021. [Citado en pág. 17]
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis / Walter Rudin*. McGraw-Hill, Boston, Massachusetts, 3rd ed. edition, 1987. [Citado en pág. 12]