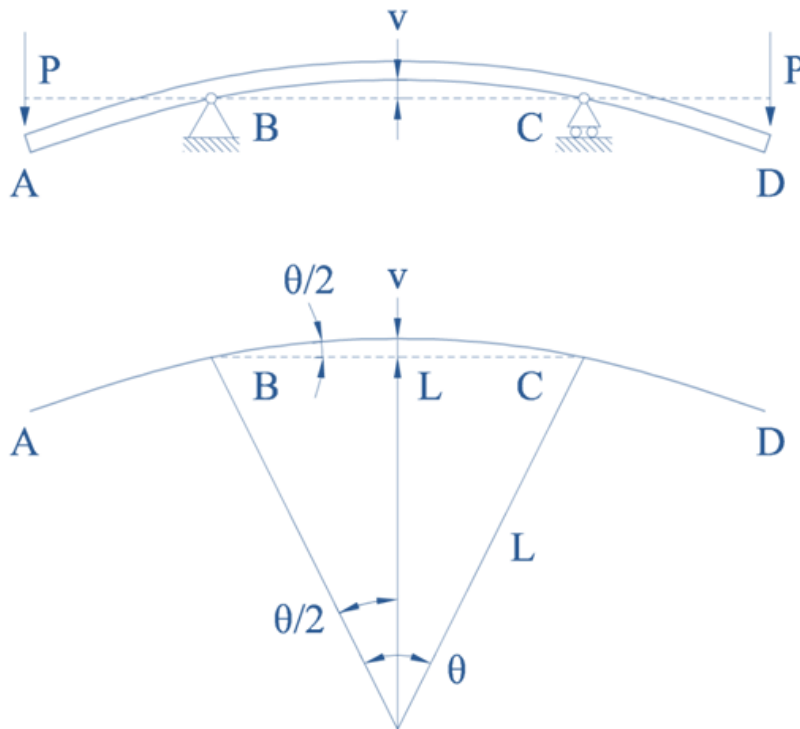


Ejercicios de FUNDAMENTOS DE ESTRUCTURAS

ETS Arquitectura. Universidad de Granada

Javier Suárez & Gracia Rodríguez



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Ejercicios de FUNDAMENTOS DE ESTRUCTURAS

Primera edición

Javier Suárez & Gracia Rodríguez

Universidad de Granada

Enero 2018

Ejercicios de FUNDAMENTOS DE ESTRUCTURAS

Autores: Javier Suárez Medina & Gracia Rodríguez Jerónimo

Editorial: Godel Impresiones Digitales, S.L.

ISBN: 978-84-17293-21-5

Depósito legal: GR-78/2018

Reservados todos los derechos a los autores. Queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del Copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra.

Primera edición, enero de 2018

Printed in Spain

PRÓLOGO

El objetivo de la presente publicación es poner a disposición del alumno de la asignatura FUNDAMENTOS DE ESTRUCTURAS, en la Escuela de Arquitectura de la Universidad de Granada, una recopilación de ejemplos, ejercicios y prácticas, propuestos y resueltos en clase durante los últimos cursos académicos.

Se ha pretendido exponer la resolución de cada ejercicio de forma clara, ordenada y esquemática, y con la notación utilizada en la asignatura, con el objetivo de ofrecer una nueva herramienta docente que complemente el desarrollo del curso.

Es intención de los autores ampliar anualmente la presente publicación mediante la incorporación de los ejercicios propuestos durante cada curso académico.

Granada enero de 2018
Javier Suárez Medina

ÍNDICE

1	CONCEPTOS BÁSICOS.....	1
1.1	GRADO DE HIPERESTATISMO.....	2
2	ESFUERZO AXIL.....	9
2.1	TRACCIÓN SIMPLE HIPERESTÁTICA.....	10
2.2	COMPRESIÓN SIMPLE HIPERESTÁTICA.....	13
2.3	INCREMENTOS DE TEMPERATURA.....	15
2.4	CÁLCULO DE ESFUERZOS EN ESTRUCTURAS ARTICULADAS PLANAS.....	20
3	LEYES DE ESFUERZOS EN VIGAS Y PÓRTICOS ISOSTÁTICOS.....	47
3.1	LEYES DE ESFUERZOS EN VIGAS.....	48
3.2	PÓRTICOS ISOSTÁTICOS DE UN SOLO VANO.....	75
3.3	VIGAS GERBER.....	85
3.4	ARCOS.....	94
4	FLEXIÓN.....	99
4.1	DEFORMACIONES LONGITUDINALES EN VIGAS.....	100
4.2	TENSIONES NORMALES.....	104
4.3	MÓDULOS RESISTENTES DE LA SECCIÓN.....	110
4.4	TENSIONES TANGENCIALES.....	123
5	TEOREMAS DE MOHR.....	125
5.1	PRIMER TEOREMA DE MOHR.....	126
5.2	SEGUNDO TEOREMA DE MOHR.....	128
5.3	TEOREMA DE LA VIGA CONJUGADA.....	129
5.4	TEOREMAS DE MOHR GENERALIZADOS.....	137
5.5	FÓRMULAS DE BRESSE.....	155
6	TEOREMAS ENERGÉTICOS.....	161
6.1	EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.....	162
7	INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS HIPERESTÁTICO.....	165
7.1	MÉTODO DE LA COMPATIBILIDAD.....	166
7.2	TEOREMA DE LOS TRES MOMENTOS.....	172
8	SIMETRÍA Y ANTIMETRÍA.....	185
8.1	SIMETRÍA Y ANTIMETRÍA.....	186

9 CÁLCULO MATRICIAL.....	203
9.1 ESTRUCTURAS RETICULADAS PLANAS.....	204
9.2 ESTRUCTURAS ARTICULADAS PLANAS.....	254
9.3 EMPARRILLADOS.....	280
ANEXO. UNIDADES PRINCIPALES (S.I.) Y MATERIALES	289
BIBLIOGRAFÍA.....	292

TEMA 1: CONCEPTOS BÁSICOS

1.1 GRADO DE HIPERESTATISMO

Ejercicio 1.1.1

Calcular el grado de hiperestatismo externo de los siguientes elementos estructurales.

- a) *Viga en voladizo de directriz recta.*
- b) *Viga en voladizo con puntos angulosos.*
- c) *Viga simplemente apoyada.*
- d) *Pórtico simplemente apoyado.*
- e) *Arco simplemente apoyado con una rótula en la clave.*
- f) *Arco biempotrado.*
- g) *Viga empotrada y con un apoyo en el otro extremo.*
- h) *Viga empotrada y con un apoyo en el otro extremo con cargas verticales.*
- i) *Viga biempotrada.*
- j) *Viga biempotrada con cargas verticales.*
- k) *Viga continua de dos vanos.*

Solución:

- a) Viga en voladizo de directriz recta.

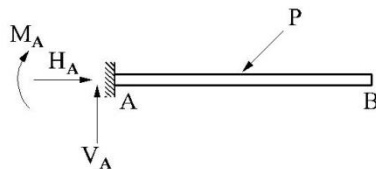


Fig. E.1.1.1.a

$$I = 3; E = 3$$

$$GH = I - E = 3 - 3 = 0$$

Se trata de una estructura isostática.

- b) Viga en voladizo con puntos angulosos.

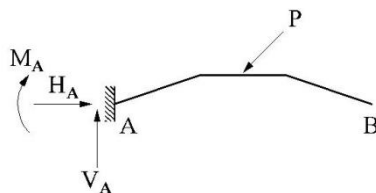


Fig. E.1.1.1.b

$$I = 3; E = 3$$

$$GH = I - E = 3 - 3 = 0$$

Es una estructura isostática.

c) Viga simplemente apoyada.

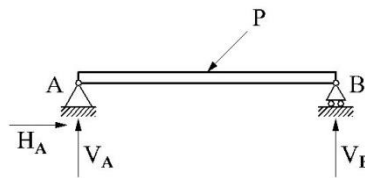


Fig. E.1.1.1.c

$$I = 3; E = 3$$

$$GH = I - E = 3 - 3 = 0$$

Es una estructura isostática.

d) Pórtico simplemente apoyado.

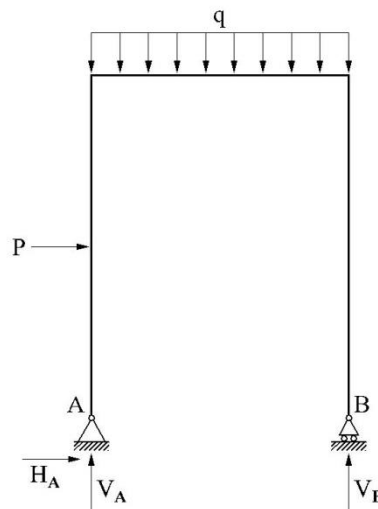


Fig. E.1.1.1.d

$$I = 3; E = 3$$

$$GH = I - E = 3 - 3 = 0$$

Se trata de un pórtico isostático.

e) Arco simplemente apoyado con una rótula en la clave.

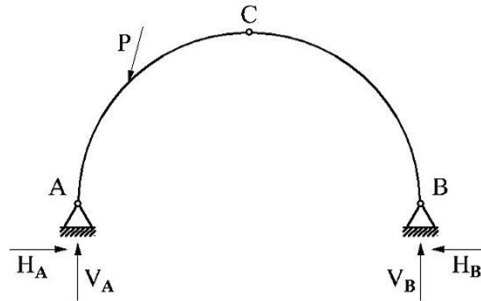


Fig. E.1.1.1.e

Para calcular el grado de hiperestaticismo externo tendremos en cuenta las tres ecuaciones de la estática y la ecuación resultante de imponer la condición en la rótula C: momento flector nulo.

$$I = 4; E = 4$$

$$GH = I - E = 4 - 4 = 0$$

Se trata de una estructura isostática.

f) Arco biempotrado.

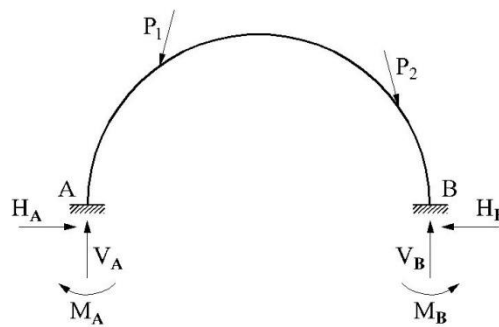


Fig. E.1.1.1.f

$$I = 6; E = 3$$

$$GH = I - E = 6 - 3 = 3$$

Esta estructura es hiperestática de grado 3.

g) Viga empotrada y con un apoyo en el otro extremo.

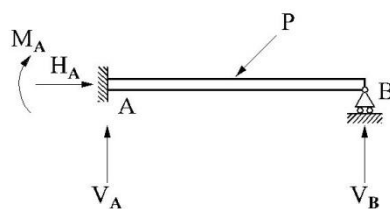


Fig. E.1.1.1.g

$$I = 4; E = 3$$

$$GH = I - E = 4 - 3 = 1$$

Esta estructura es hiperestática de grado 1.

h) Viga empotrada y con un apoyo en el otro extremo con cargas verticales.

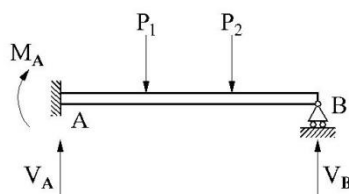


Fig. E.1.1.1.h

Las acciones que actúan sobre la viga son verticales, por lo que la reacción horizontal en el empotramiento es cero. Por este motivo se prescinde de la tercera ecuación de la estática.

$$I = 3; E = 2$$

$$GH = I - E = 3 - 2 = 1$$

La viga anterior resulta ser hiperestática de grado 1.

i) Viga biempotrada.

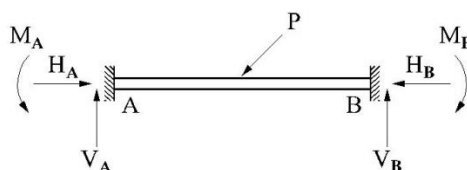


Fig. E.1.1.1.i

$$I = 6; E = 3$$

$$GH = I - E = 6 - 3 = 3$$

Esta estructura es hiperestática de grado 3.

j) Viga biempotrada con cargas verticales.

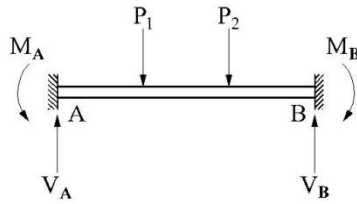


Fig. E.1.1.1.j

Las acciones son verticales y no habrá reacciones horizontales. Por ello se prescinde de la tercera ecuación de la estática.

$$I = 4; E = 2$$

$$GH = I - E = 4 - 2 = 2$$

Esta estructura es hiperestática de grado 2.

k) Viga continua de dos vanos.

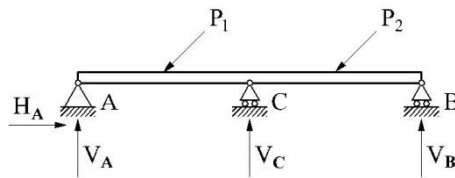


Fig. E.1.1.1.k

$$I = 4; E = 3$$

$$GH = I - E = 4 - 3 = 1$$

Se trata de una estructura hiperestática de grado 1.

Ejercicio 1.1.2

Determinar el grado de hiperestatismo del sistema estructural adjunto.

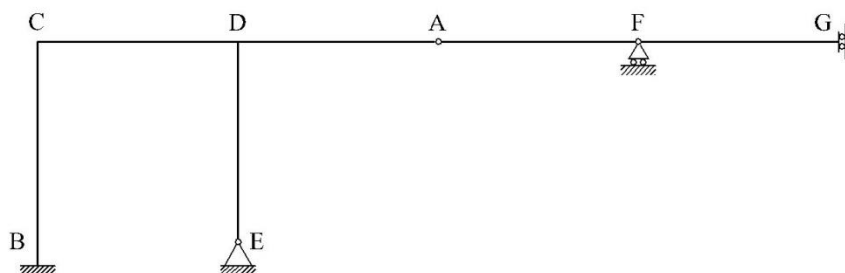


Fig. E.1.1.2.a

Solución:

Para calcular el grado de hiperestatismo tendremos en cuenta las tres ecuaciones de la estática y la ecuación resultante de imponer la condición en la rótula A: momento flector nulo.

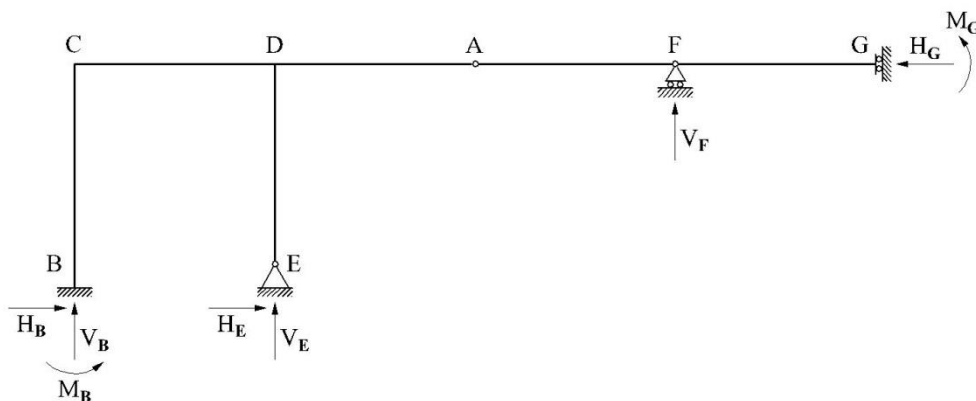


Fig. E.1.1.2.b

$$I = 8; E = 4$$

$$GH = I - E = 8 - 4 = 4$$

El grado de hiperestatismo es cuatro (4).

TEMA 2: ESFUERZO AXIL

2.1 TRACCIÓN SIMPLE HIPERESTÁTICA

Ejercicio 2.1.1

La estructura de la figura está formada por tres barras articuladas en sus extremos. Las barras AD y CD tienen un sección de 4 cm^2 , un módulo de elasticidad de valor $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y una tensión admisible de 1800 kg/cm^2 . La barra central tiene una sección de 9 cm^2 , un módulo de elasticidad de $2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y una tensión admisible de 2400 kg/cm^2 .

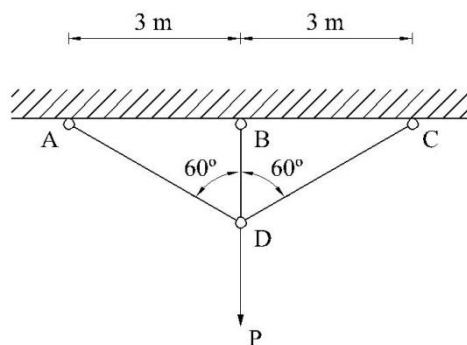


Fig. E.2.1.1.a

Se pide:

- Máximo valor de P que puede soportar la estructura.
- Desplazamiento vertical del punto D , para el valor máximo de P .

Solución:

Barras AD y CD: $\Omega_1 = 4 \text{ cm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$; $\sigma_{\text{adm } 1} = 1800 \text{ kg/cm}^2$

Barra BD: $\Omega = 9 \text{ cm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$; $\sigma_{\text{adm}} = 2400 \text{ kg/cm}^2$

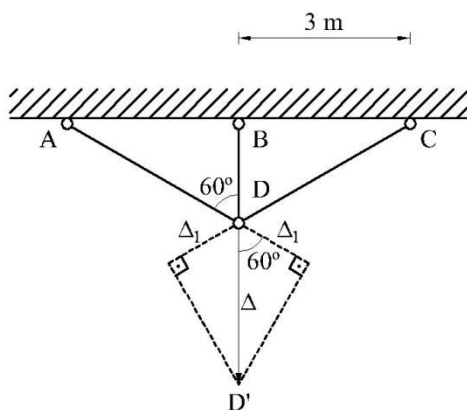


Fig. E.2.1.1.b

$$L = L_{BD} = L_{AD} \cdot \cos 60^\circ = 1,732 \text{ m}$$

$$L_1 = L_{AD} = \frac{3}{\sin 60^\circ} = 3,464 \text{ m}$$

El alargamiento de la barra BD es desconocido y de valor Δ .

El alargamiento de las barras laterales AD y CD será: Δ_1

$$\Delta_1 = \Delta \cdot \cos 60^\circ = \Delta \cdot 0,5$$

La deformación unitaria de la barra central será:

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{L_{BD}} = \frac{\Delta}{1,732}; \quad \Delta = 1,732 \cdot \varepsilon$$

La deformación unitaria de las barras laterales AD y CD es:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta_1}{L_{AD}} = \frac{\Delta_1}{3,464} = 0,289 \cdot \Delta_1; \quad \Delta_1 = 3,464 \cdot \varepsilon_1$$

La relación entre las deformaciones unitarias ε y ε_1 será:

$$3,464 \cdot \varepsilon_1 = 1,732 \cdot \varepsilon \cdot \cos 60^\circ; \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4} = 0,25 \cdot \varepsilon$$

La relación entre las tensiones de las barras resulta ser:

$$\frac{\sigma_1}{E} = 0,25 \cdot \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma_1 = 0,25 \cdot \sigma$$

Como la barra central puede trabajar como máximo a 2400 kg/cm^2 , las barras laterales deberán trabajar a 600 kg/cm^2 .

Por tanto, la acción que se ejerce en el punto D, produce en las barras laterales una tracción de valor:

$$T_1 = 600 \cdot 4 = 2400 \text{ kg} = 2,4 \text{ t}$$

Y en la barra central, una tracción de:

$$T = 2400 \cdot 9 = 21600 \text{ kg} = 21,6 \text{ t}$$

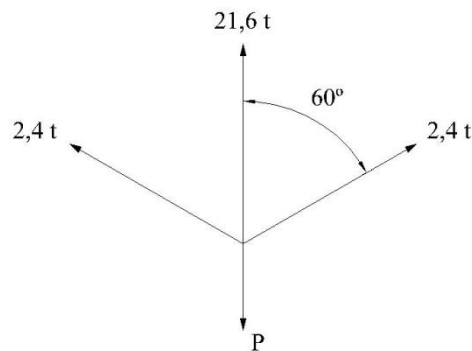


Fig. E.2.1.1.c

Al establecer el equilibrio del nudo D, obtenemos P:

$$P = 21,6 + 2 \cdot 2,4 \cdot \cos 60^\circ = 24 \text{ t}$$

El desplazamiento vertical de D será:

$$v_D = \Delta = L_{BD} \cdot \varepsilon = L_{BD} \cdot \frac{\sigma}{E} = 173,205 \cdot \frac{2400}{2,1 \cdot 10^6} = 0,1978 \text{ cm} = 1,978 \text{ mm}$$

2.2 COMPRESIÓN SIMPLE HIPERESTÁTICA

Ejercicio 2.2.1

La columna de la figura está formada por un cilindro hueco de acero de 15 cm de radio interior y 45 cm de radio exterior. El hueco se rellena de hormigón, de manera que ambos materiales trabajan solidariamente.

El acero tiene un módulo de elasticidad de valor $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ y una tensión admisible de valor $\sigma_{a \text{ adm}} = 2100 \text{ kg/cm}^2$. El hormigón tiene un módulo de elasticidad $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ y una tensión admisible $\sigma_{h \text{ adm}} = 200 \text{ kg/cm}^2$.

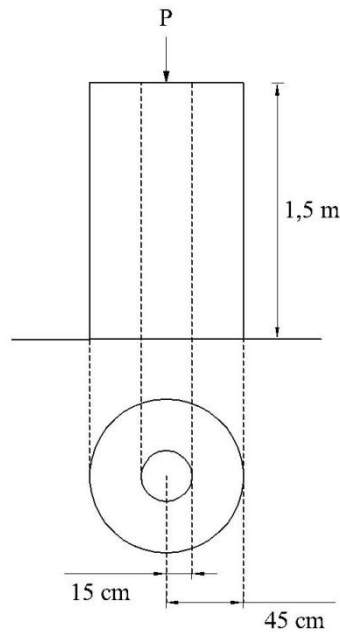


Fig. E.2.2.1.a

Se pide:

- Esfuerzo axial que actúa sobre cada material.
- Máximo valor de P que puede soportar la columna.
- Acortamiento total del cilindro.

Solución:

El hormigón y el acero trabajan solidariamente por lo que ambos materiales experimentan el mismo acortamiento, verificándose:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_h$$

Aplicación de la Ley de Hooke:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_h$$

$$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_h}{E_h}$$

$$\sigma_a = 10 \cdot \sigma_h$$

Por la relación anterior, si la máxima tensión admisible del hormigón es de 200 kg/cm^2 , la máxima tensión a la que debe trabajar el acero es de 2000 kg/cm^2 , aunque esto implique que se desperdicia parte de la capacidad resistente del acero, ya que su máxima tensión admisible es de 2100 kg/cm^2 .

Esfuerzo axial que actúa sobre cada material:

$$P_h = 200 \cdot \pi \cdot 15^2 = 141371,669 \text{ kg} = 141,372 \text{ t}$$

$$P_a = 2000 \cdot \pi \cdot (45^2 - 15^2) = 11309733,553 \text{ kg} = 11309,734 \text{ t}$$

Máximo esfuerzo axial:

El máximo esfuerzo axial que puede soportar toda la pieza es:

$$P = P_a + P_h = 141,372 + 11309,734 = 11451,106 \text{ t}$$

Acortamiento total del cilindro hueco:

El acortamiento de la pieza es el mismo en el hormigón y en el acero. Si consideramos el hormigón:

$$\Delta l = \varepsilon_h \cdot L_h = \frac{\sigma_h}{E_h} \cdot L_h = \frac{200}{2,1 \cdot 10^5} \cdot 1,5 = 1,428 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,428 \text{ mm}$$

2.3 INCREMENTOS DE TEMPERATURA

Ejercicio 2.3.1

En la estructura que se representa en la figura, las barras laterales tienen un coeficiente de dilatación térmica de valor:

$$\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{C}^{\circ-1}$$

Mientras que la barra central tiene un coeficiente de dilatación:

$$\alpha_2 = 1,12 \cdot 10^{-5} \text{C}^{\circ-1}$$

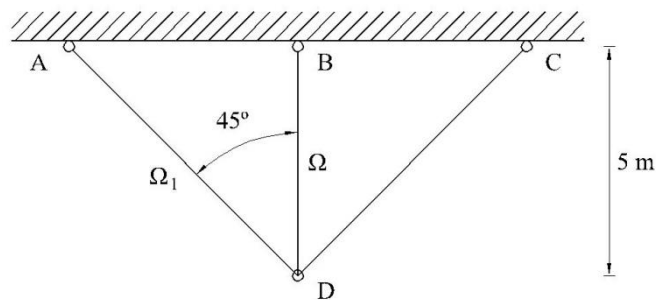


Fig. E.2.3.1.a

El conjunto se somete a un incremento de temperatura de valor:

$$\Delta T = 80 \text{C}^{\circ}$$

Se pide:

- a) Esfuerzos en cada barra.
- b) Desplazamiento vertical del punto D.

Las secciones de todas las barras son de 3 cm^2 y el módulo de elasticidad es para todas las barras: $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Solución:

Si se aísla el punto D, cada una de las barras que concurren en él ejerce una acción según la dirección de la barra, de modo que el punto D está en equilibrio.

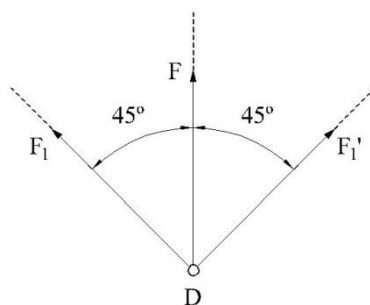


Fig. E.2.3.1.b

Por simetría sabemos que las acciones de las barras laterales sobre D serán iguales y de valor F_1 . Al plantear el equilibrio en este punto, se obtiene:

$$2F_1 \cdot \cos 45^\circ + F = 0$$

Simplificando: $F + \sqrt{2} \cdot F_1 = 0$ (1)

Para obtener los valores de F y F_1 tenemos que obtener otra ecuación. Para ello imponemos la condición de que el desplazamiento vertical del punto D, perteneciente a la barra BD, debe ser igual y del mismo sentido que el desplazamiento vertical de D, si lo consideramos perteneciente a las barras AD y CD.

Desplazamiento vertical de D, como perteneciente a la barra BD:

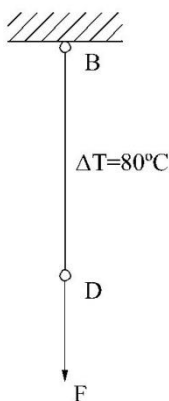


Fig. E.2.3.1.c

a) Debido a la fuerza F (en kg y cm):

$$\Delta' = \varepsilon \cdot L_{BD} = \frac{\sigma}{E} \cdot L_{BD} = \frac{F}{E \cdot \Omega} \cdot L_{BD} = \frac{F}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 3} \cdot 500 = 7,937 \cdot 10^{-5} \cdot F$$

b) Debido al incremento de T^a :

$$\Delta'' = \alpha \cdot L_{BD} \cdot \Delta T = 1,12 \cdot 10^{-5} \cdot 500 \cdot 80 = 0,448 \text{ cm}$$

El desplazamiento vertical total de D en BD será:

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' = 7,937 \cdot 10^{-5} \cdot F + 0,448$$

Desplazamiento vertical de D perteneciente a la barra AD:

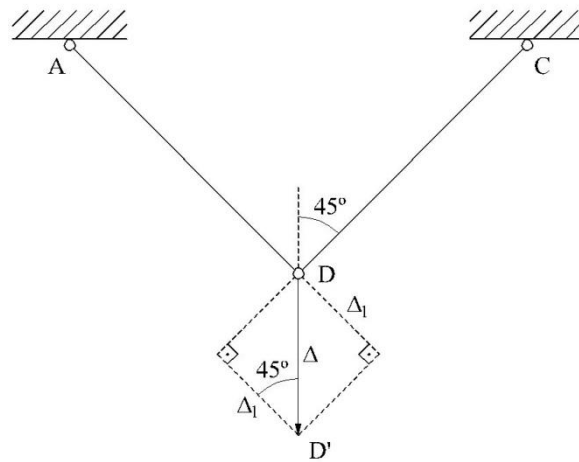


Fig. E.2.3.1.d

Debido a la fuerza F_1 y al incremento de T^a :

$$\Delta_1 = \Delta'_1 + \Delta''_1 = \frac{F_1}{E \cdot \Omega} \cdot L_{AD} + \alpha_1 \cdot L_{AD} \cdot \Delta T = \frac{F_1}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 3} \cdot 707,107 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 707,107 \cdot 80$$

$$\Delta_1 = 1,122 \cdot 10^{-4} \cdot F_1 + 0,679$$

El desplazamiento vertical de D será:

$$\Delta \cdot \cos 45^\circ = \Delta_1$$

Igualamos ambos desplazamientos, resultando la siguiente ecuación:

$$\cos 45^\circ \cdot (7,937 \cdot 10^{-5} \cdot F + 0,448) = 1,122 \cdot 10^{-4} \cdot F_1 + 0,679$$

$$5,612 \cdot 10^{-5} \cdot F + 0,317 = 1,122 \cdot 10^{-4} \cdot F_1 + 0,679$$

$$5,612 \cdot 10^{-5} \cdot F - 1,122 \cdot 10^{-4} \cdot F_1 = 0,362 \quad (2)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones (1) y (2), obteniendo:

$$F = 2672,43 \text{ kg} = 2,672 \text{ t}$$

$$F_1 = -1889,69 \text{ kg} = -1,889 \text{ t}$$

F_1 tiene sentido negativo, lo que quiere decir que va en sentido contrario al supuesto inicialmente. En definitiva, las barras laterales AD y CD trabajan a compresión y la barra central BD trabaja a tracción.

Por último, el desplazamiento vertical de D será:

$$\Delta = 0,448 + 7,937 \cdot 10^{-5} \cdot F = 0,448 + 7,937 \cdot 10^{-5} \cdot 2672,43 = 0,6601 \text{ cm} = 6,601 \text{ mm}$$

Ejercicio 2.3.2

La siguiente barra está empotrada en ambos extremos y sometida a un incremento de temperatura. Determinar las tensiones de origen térmico que aparecen en la barra.

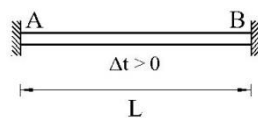


Fig. E.2.3.2.a

Solución:Determinación de las reacciones en los empotramientos:

Al dilatar y estar impedida la dilatación libre por los dos empotramientos aparecen las reacciones en A y B: R_A , R_B .

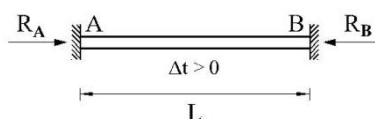


Fig. E.2.3.2.b

El sistema es hiperestático.

Al plantear las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_H = 0; \quad R_A - R_B = 0; \quad R_A = R_B$$

Para resolver el ejercicio, consideramos el siguiente sistema equivalente:

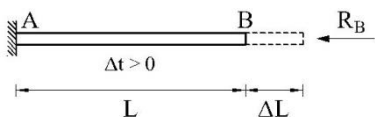


Fig. E.2.3.2.c

Y, planteamos la condición de compatibilidad de deformaciones:

$$\Delta L_{\text{REAL}} = 0 = \Delta L(T^a) + \Delta L(R_B)$$

Donde,

$$\Delta L(T^a) = \alpha \cdot L \cdot \Delta t$$

$$\Delta L(R_B) = -\frac{R_B \cdot L}{E \cdot \Omega}$$

$$\Delta L_{\text{REAL}} = \alpha \cdot \mathcal{L} \cdot \Delta t - \frac{R_B \cdot \mathcal{L}}{E \cdot \Omega} = 0$$

Despejamos R_B :

$$R_B = \alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot \Omega = R_A$$

Ley de esfuerzos axiles:

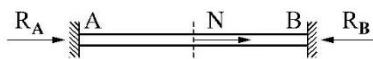


Fig. E.2.3.2.d

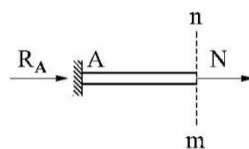


Fig. E.2.3.2.e

$$N + R_A = 0; \quad N = -R_A = -\alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot \Omega$$

Tensiones producidas en la barra por el incremento de temperatura:

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} = \frac{-\alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot \Omega}{\Omega} = -\alpha \cdot \Delta t \cdot E$$

El signo es negativo por estar la barra comprimida.

2.4. CÁLCULO DE ESFUERZOS EN ESTRUCTURAS ARTICULADAS PLANAS

Ejercicio 2.4.1

Calcular los esfuerzos y reacciones de la siguiente estructura aplicando el método de los nudos.

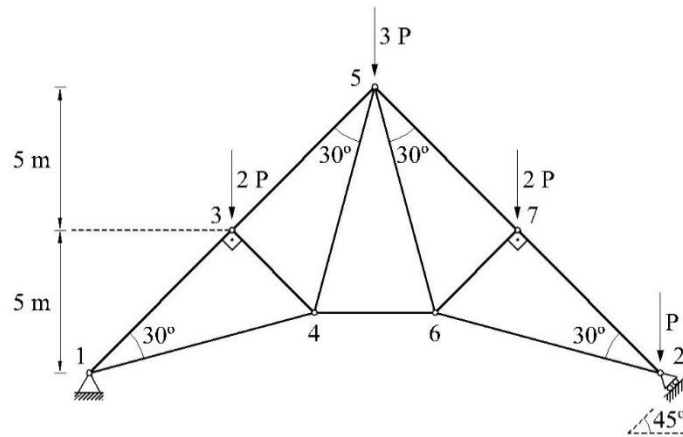


Fig. E.2.4.1.a

Solución:

Reacciones en los apoyos:

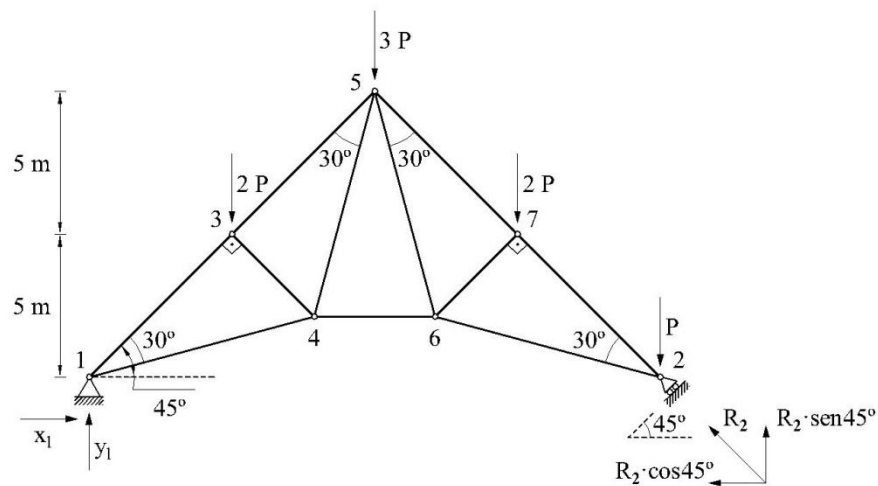


Fig. E.2.4.1.b

$$\sum F_x = 0; \quad x_1 - R_2 \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad x_1 = R_2 \cdot \cos 45^\circ \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad y_1 + R_2 \cdot \text{sen} 45^\circ = 8 \cdot P; \quad y_1 = 8 \cdot P - R_2 \cdot \text{sen} 45^\circ \quad (2)$$

$$\sum M_1 = 0; \quad R_2 \cdot \text{sen}45^\circ \cdot 20 - 2 \cdot P \cdot 5 - 3 \cdot P \cdot 10 - 2 \cdot P \cdot 15 - P \cdot 20 = 0$$

$$R_2 \cdot \text{sen}45^\circ \cdot 20 = 90 \cdot P; \quad R_2 = \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot P$$

Sustituyendo R_2 en (1) y (2):

$$x_1 = R_2 \cdot \cos 45^\circ = \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,5 \cdot P$$

$$y_1 = 8 \cdot P - R_2 \cdot \text{sen}45^\circ = 8 \cdot P - \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3,5 \cdot P$$

Método de los nudos:

NUDO 1:

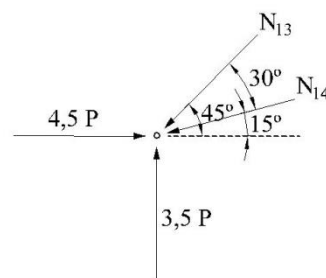


Fig. E.2.4.1.c

$$\sum F_H = 0; \quad -N_{13} \cdot \cos 45^\circ - N_{14} \cdot \cos 15^\circ + 4,5 \cdot P = 0$$

$$\sum F_V = 0; \quad -N_{13} \cdot \text{sen}45^\circ - N_{14} \cdot \text{sen}15^\circ + 3,5 \cdot P = 0$$

$$N_{13} \cdot \cos 45^\circ + N_{14} \cdot \cos 15^\circ = 4,5 \cdot P$$

$$N_{13} \cdot \text{sen}45^\circ + N_{14} \cdot \text{sen}15^\circ = 3,5 \cdot P$$

$$\begin{cases} N_{13} = 4,432 \cdot P \\ N_{14} = 1,414 \cdot P \end{cases}$$

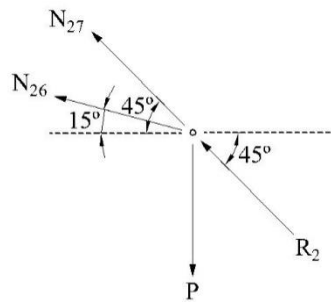
NUDO 2:

Fig. E.2.4.1.d

$$\sum F_H = 0; \quad -N_{26} \cdot \cos 15^\circ - N_{27} \cdot \cos 45^\circ - \frac{9 \cdot P}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_V = 0; \quad -P + \frac{9 \cdot P}{\sqrt{2}} \cdot \sin 45^\circ + N_{26} \cdot \sin 15^\circ + N_{27} \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$\begin{array}{l} N_{26} \cdot \cos 15^\circ + N_{27} \cdot \cos 45^\circ = -4,5 \cdot P \\ N_{26} \cdot \sin 15^\circ + N_{27} \cdot \sin 45^\circ = -3,5 \cdot P \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} N_{26} = -1,414 \cdot P \\ N_{27} = -4,432 \cdot P \end{array} \right.$$

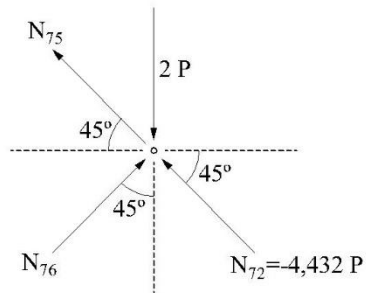
NUDO 7:

Fig. E.2.4.1.e

$$\sum F_H = 0; \quad -N_{75} \cdot \cos 45^\circ + N_{76} \cdot \sin 45^\circ - 4,432 \cdot P \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_V = 0; \quad N_{75} \cdot \sin 45^\circ + N_{76} \cdot \cos 45^\circ - 2 \cdot P + 4,432 \cdot P \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$-N_{75} \cdot \cos 45^\circ + N_{76} \cdot \sin 45^\circ = 3,139 \cdot P$$

$$\begin{array}{l} N_{75} \cdot \sin 45^\circ + N_{76} \cdot \cos 45^\circ = -1,134 \cdot P \\ N_{75} = -3,018 \cdot P \\ N_{76} = 1,414 \cdot P \end{array}$$

NUDO 6:

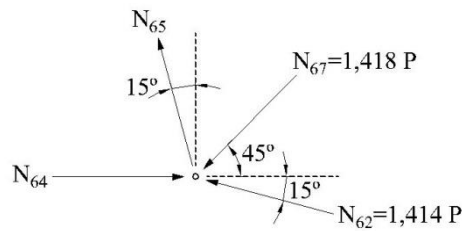


Fig. E.2.4.1.f

$$\sum F_H = 0; N_{64} - N_{65} \cdot \text{sen}15^\circ - 1,418 \cdot P \cdot \text{cos}45^\circ - 1,414 \cdot P \cdot \text{cos}15^\circ = 0$$

$$\sum F_V = 0; N_{65} \cdot \text{cos}15^\circ - 1,418 \cdot P \cdot \text{sen}45^\circ + 1,414 \cdot P \cdot \text{sen}15^\circ = 0$$

$$\begin{aligned} N_{64} - N_{65} \cdot \text{sen}15^\circ &= 2,369 \cdot P & \left| \begin{aligned} N_{64} &= 2,539 \cdot P \\ N_{65} &= 0,659 \cdot P \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Aplicación particular del método de Ritter:

Para simplificar su cálculo, el esfuerzo N_{64} puede obtenerse también por el método de Ritter:

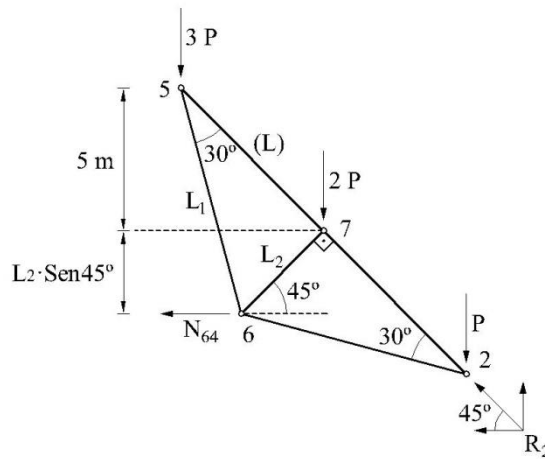


Fig. E.2.4.1.g

En el esquema anterior se toman momentos respecto al nudo 5:

$$\left(L_2 = L_1 \cdot \text{sen}30^\circ = \frac{10}{\sqrt{6}}; L_1 = \frac{L}{\text{cos}30^\circ} = \frac{20}{\sqrt{6}}; L = \frac{5}{\text{sen}45^\circ} = \frac{10}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\sum M_5 = 0; -2 \cdot P \cdot 5 - P \cdot 10 - N_{64} \cdot 7,887 = 0$$

$$N_{64} = -\frac{20 \cdot P}{7,887} = -2,536 \cdot P$$

N_{64} tiene sentido contrario al supuesto inicialmente, lo que indica que la barra 6-4 está comprimida.

NUDO 5:

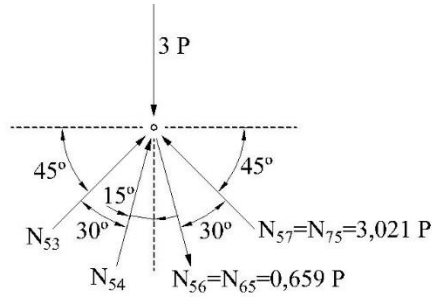


Fig. E.2.4.1.h

$$\sum F_H = 0; N_{53} \cdot \cos 45^\circ + N_{54} \cdot \sin 15^\circ + 0,659 \cdot P \cdot \sin 15^\circ - 3,021 \cdot P \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_V = 0; N_{53} \cdot \sin 45^\circ + N_{54} \cdot \cos 15^\circ - 0,659 \cdot P \cdot \cos 15^\circ + 3,021 \cdot P \cdot \sin 45^\circ - 3 \cdot P = 0$$

$$\begin{cases} N_{53} \cdot \cos 45^\circ + N_{54} \cdot \sin 15^\circ = 1,966 \cdot P \\ N_{53} \cdot \sin 45^\circ + N_{54} \cdot \cos 15^\circ = 1,501 \cdot P \end{cases} \quad \begin{cases} N_{53} = 3,021 \cdot P \\ N_{54} = -0,658 \cdot P \end{cases}$$

NUDO 3:

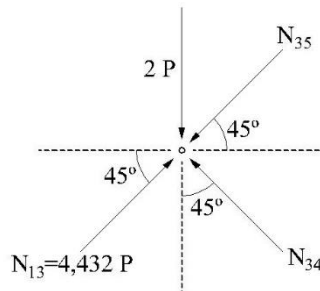


Fig. E.2.4.1.i

$$\sum F_H = 0; -N_{35} \cdot \cos 45^\circ - N_{34} \cdot \cos 45^\circ + 4,432 \cdot P \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_V = 0; -N_{35} \cdot \sin 45^\circ + N_{34} \cdot \sin 45^\circ + 4,432 \cdot P \cdot \sin 45^\circ - 2 \cdot P = 0$$

$$\begin{cases} N_{35} \cdot \cos 45^\circ + N_{34} \cdot \cos 45^\circ = 3,134 \cdot P \\ -N_{35} \cdot \sin 45^\circ + N_{34} \cdot \sin 45^\circ = -1,134 \cdot P \end{cases} \quad \begin{cases} N_{35} = 3,018 \cdot P \\ N_{34} = 1,414 \cdot P \end{cases}$$

Ejercicio 2.4.2

Calcular los esfuerzos y reacciones de la siguiente estructura aplicando el método de Cremona.

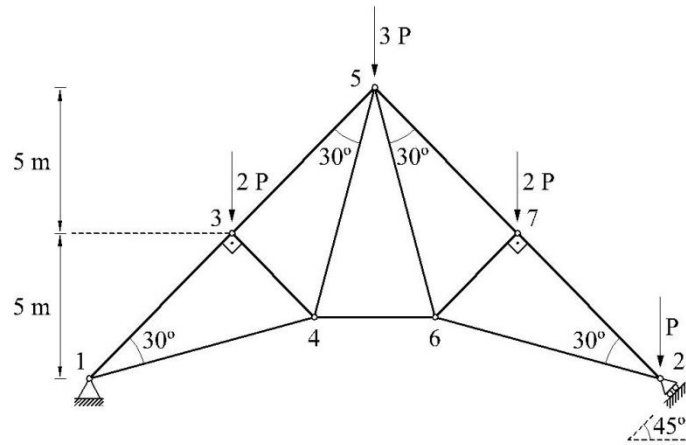


Fig. E.2.4.2.a

Solución:

Grado de hiperestatismo:

Se comprueba que la estructura es isostática:

$$b = 2 \cdot n - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$$

Reacciones en los apoyos:

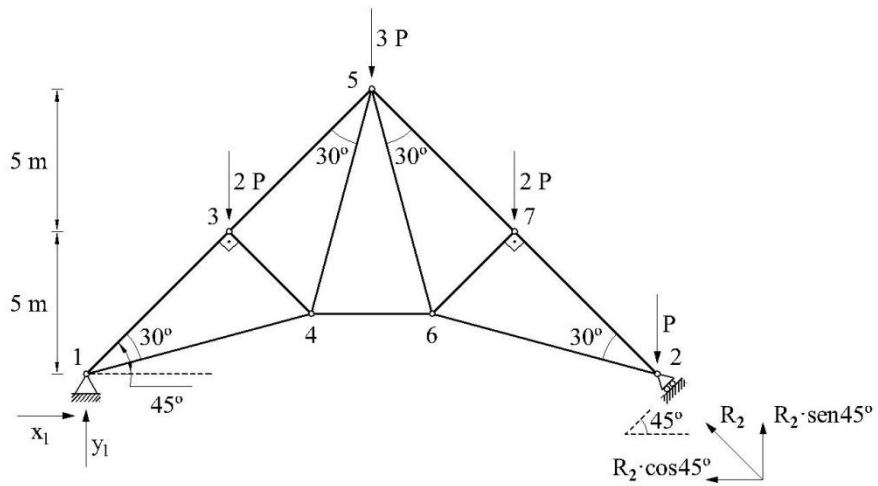


Fig. E.2.4.2.b

$$\sum F_x = 0; \quad x_1 - R_2 \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad x_1 = R_2 \cdot \cos 45^\circ \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad y_1 + R_2 \cdot \sen 45^\circ = 8 \cdot P; \quad y_1 = 8 \cdot P - R_2 \cdot \sen 45^\circ \quad (2)$$

$$\sum M_1 = 0; \quad R_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 20 - 2 \cdot P \cdot 5 - 3 \cdot P \cdot 10 - 2 \cdot P \cdot 15 - P \cdot 20 = 0$$

Sustituyendo R_2 en (1) y (2):

$$x_1 = R_2 \cdot \cos 45^\circ = \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,5 \cdot P$$

$$y_1 = 8 \cdot P - R_2 \cdot \sin 45^\circ = 8 \cdot P - \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3,5 \cdot P$$

Designación zonas de barras:

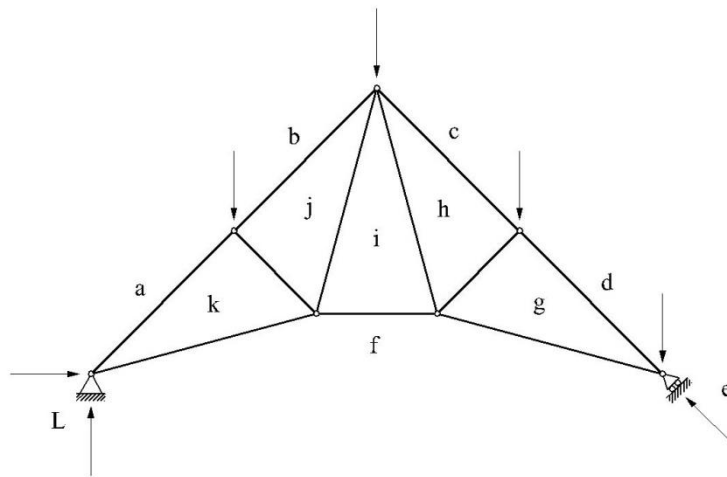


Fig. E.2.4.2.c

Diagrama de Cremona:

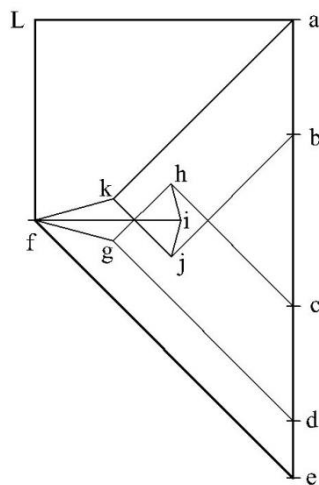


Fig. E.2.4.2.d

Solicitaciones en las barras:

Se miden directamente en el diagrama de Cremona, donde también se determina su signo (tracción –T- o compresión –C-).

En la siguiente tabla se muestran los resultados. Las diferencias con respecto a los valores obtenidos mediante el Método de los nudos son debidas a errores de redondeo.

BARRA	ESFUERZO	TIPO
1-3	4,432	C
3-5	3,018	C
5-7	3,018	C
7-2	4,432	C
2-6	1,414	C
6-7	1,414	C
5-6	0,656	T
4-6	2,536	C
5-4	0,656	T
4-3	1,414	C
4-1	1,414	C

Ejercicio 2.4.3

Mediante el método de los nudos, determinar los esfuerzos presentes en cada elemento/barra de los sistemas estructurales siguientes.

Establecer si los elementos están a tracción o compresión.

a)

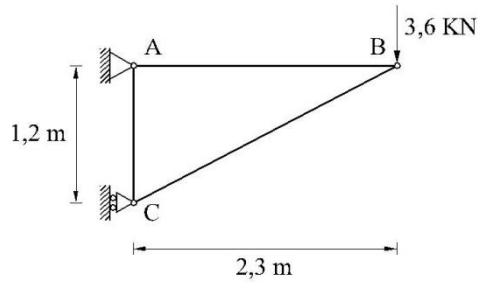


Fig. E.2.4.3.a

b)

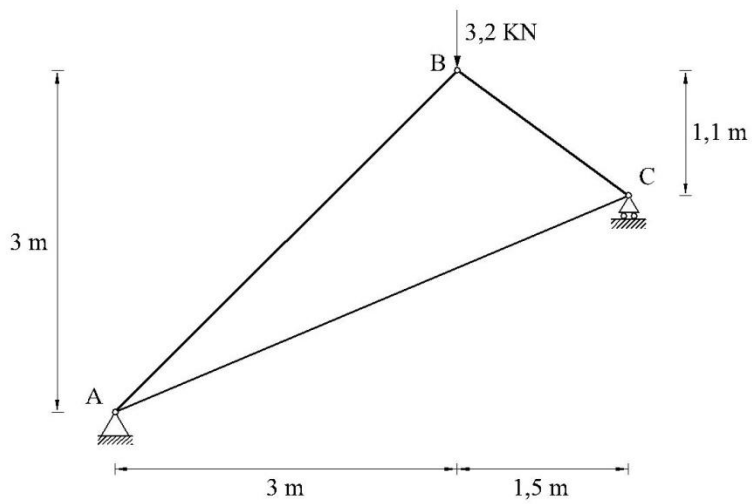


Fig. E.2.4.3.b

c)

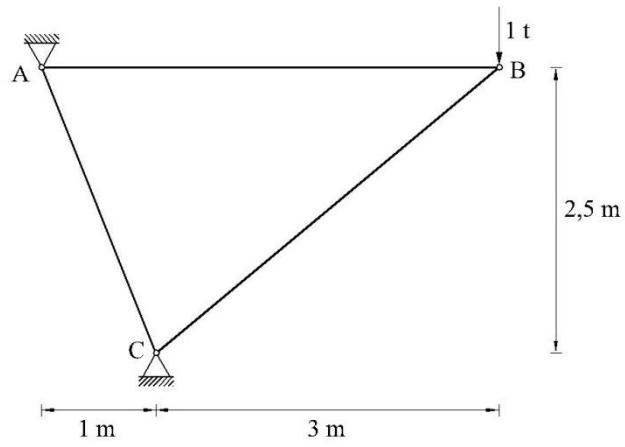


Fig. E.2.4.3.c

d)

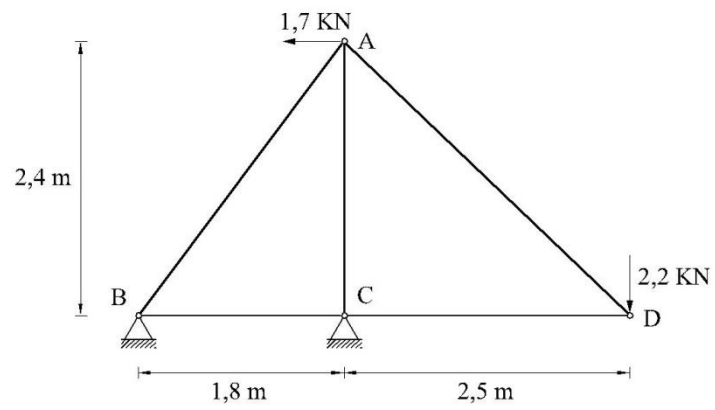


Fig. E.2.4.3.d

e)

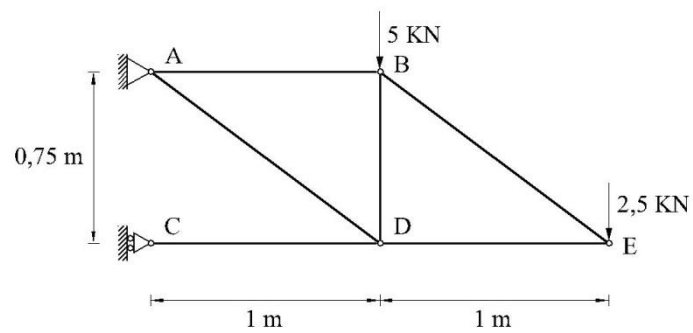


Fig. E.2.4.3.e

f)

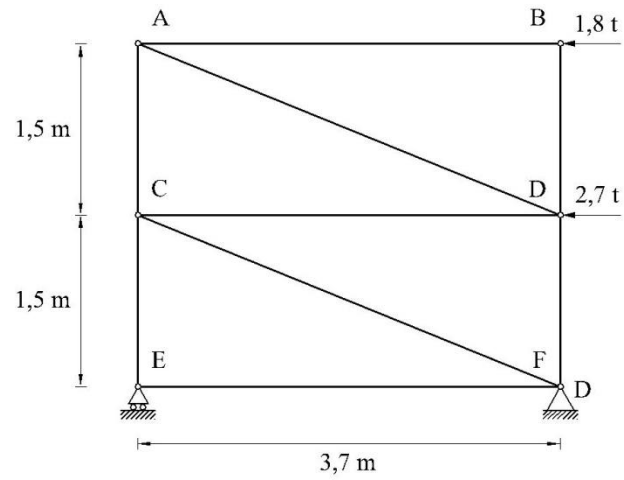


Fig. E.2.4.3.f

Solución:

a)

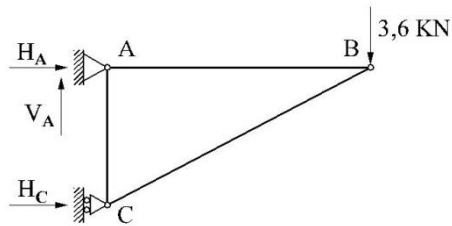


Fig. E.2.4.3.a.1

Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_V = 0; \quad V_A - 3,6 = 0; \quad V_A = 3,6 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0; \quad H_A + H_C = 0; \quad H_A = -H_C; \quad H_A = -6,9 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0; \quad H_C \cdot 1,2 - 3,6 \cdot 2,3 = 0; \quad H_C = 6,9 \text{ kN}$$

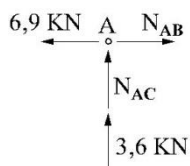
Aplicación del método de los nudos:Nudo A:

Fig. E.2.4.3a.2

$$\sum F_V = 0; \quad N_{AC} + 3,6 = 0; \quad N_{AC} = -3,6 \text{ kN (T)}$$

$$\sum F_H = 0; \quad N_{AB} - 6,9 = 0; \quad N_{AB} = 6,9 \text{ kN (T)}$$

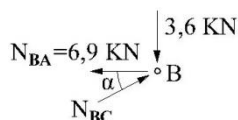
Nudo B:

Fig. E.2.4.3.a.3

$$\alpha = \arctg\left(\frac{1,2}{2,3}\right) = 27,553^\circ$$

$$\sum F_V = 0; \quad -6,9 + N_{BC} \cdot \cos \alpha = 0; \quad N_{BC} = \frac{6,9}{\cos \alpha} = 7,783 \text{ kN (C)}$$

$$\sum F_H = 0; \quad -3,6 + N_{BC} \cdot \sin \alpha = 0; \quad N_{BC} = \frac{3,6}{\sin \alpha} = 7,783 \text{ kN}$$

Verificación de los resultados en el nudo C:

Todas las fuerzas que actúan en el nudo C son conocidas. Al comprobar el equilibrio en dicho nudo, se verifica que los valores calculados de todas las fuerzas son correctos.

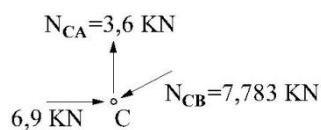


Fig. E.2.4.3.a.4

$$\sum F_H = 6,9 - 7,783 \cdot \cos \alpha = 6,9 - 6,9 = 0$$

$$\sum F_V = 3,6 - 7,783 \cdot \sin \alpha = 3,6 - 3,6 = 0$$

(Comprobado)

Resumen de resultados:

BARRA	ESFUERZO (kN)	TIPO
AC	3,6	T
AB	6,9	T
BC	7,783	C

b)

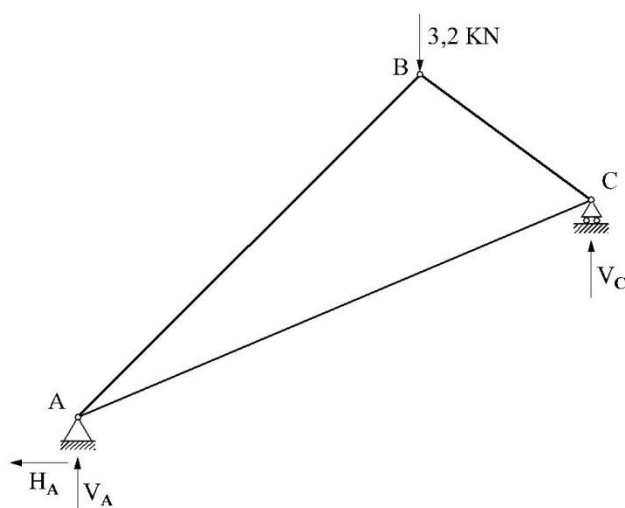


Fig. E.2.4.3.b.1

Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_V = 0; \quad V_A + V_C - 3,2 = 0; \quad V_A = 3,2 - 2,133 = 1,067 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0; \quad -H_A = 0; \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0; \quad V_C \cdot 4,5 - 3,2 \cdot 3 = 0; \quad V_C = 2,133 \text{ kN}$$

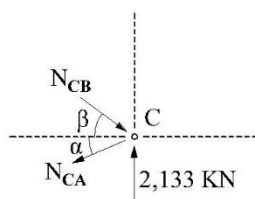
Aplicación del método de los nudos:Nudo C:

Fig. E.2.4.3.b.2

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{3-1,1}{4,5}\right) = 22,891^\circ$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1,1}{1,5}\right) = 36,254^\circ$$

$$\sum F_H = 0; \quad N_{CB} \cdot \cos \beta - N_{CA} \cdot \cos \alpha = 0; \quad N_{CB} = N_{CA} \cdot 1,142$$

$$\sum F_V = 0; \quad 2,133 - N_{CB} \cdot \operatorname{sen} \beta - N_{CA} \cdot \operatorname{sen} \alpha = 0; \quad 2,133 - 1,142 \cdot N_{CA} \cdot \operatorname{sen} \beta - N_{CA} \cdot \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$N_{CA} = \frac{2,133}{1,064} = 2,004 \text{ kN (T)}$$

$$N_{CB} = 1,142 \cdot 2,004 = 2,289 \text{ kN (C)}$$

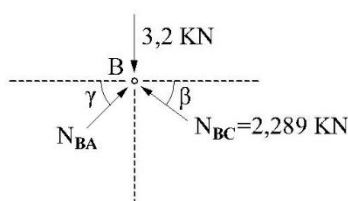
Nudo B:

Fig. E.2.4.3.b.3

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{3}\right) = 45^\circ$$

$$\sum F_H = 0; \quad -2,289 \cdot \cos \beta + N_{BA} \cdot \cos \gamma = 0; \quad N_{BA} = 2,611 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0; \quad -3,2 + N_{BA} \cdot \operatorname{sen} \gamma + 2,289 \cdot \operatorname{sen} \beta = 0; \quad N_{BA} = 2,611 \text{ kN (C)}$$

Verificación de los resultados en el nudo A:

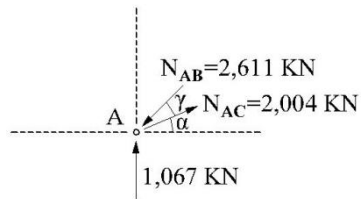


Fig. E.2.4.3.b.4

$$\sum F_H = 2,004 \cdot \cos \alpha - 2,611 \cdot \cos \gamma = 1,846 - 1,846 = 0$$

$$\sum F_V = 1,067 + 2,004 \cdot \text{sen} \alpha - 2,611 \cdot \text{sen} \gamma = 1,067 + 0,779 - 1,846 = 0$$

(Comprobado)

Resumen de resultados:

BARRA	ESFUERZO (kN)	TIPO
AB	2,611	C
BC	2,289	C
AC	2,004	T

c)

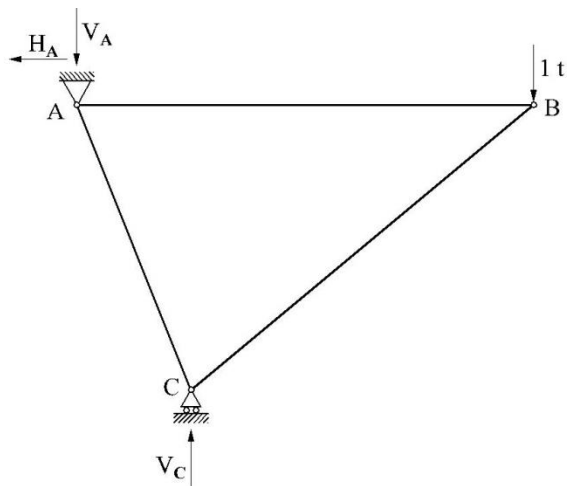


Fig. E.2.4.3.c.1

Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_V = 0; \quad -V_A + V_C - 1 = 0; \quad V_A = V_C - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ t}$$

$$\sum F_H = 0; \quad -H_A = 0; \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0; \quad V_C \cdot 1 - 1 \cdot 4 = 0; \quad V_C = 4 \text{ t}$$

Aplicación del método de los nudos:

Nudo A:

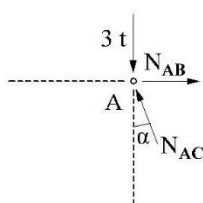


Fig. E.2.4.3.c.2

$$\alpha = \arctg\left(\frac{1}{2,5}\right) = 21,801^\circ$$

$$\sum F_H = 0; \quad N_{AB} - N_{AC} \cdot \text{sen}\alpha = 0; \quad N_{AB} = N_{AC} \cdot \text{sen}\alpha = 1,2 \text{ t (T)}$$

$$\sum F_V = 0; \quad -3 + N_{AC} \cdot \text{cos}\alpha = 0; \quad N_{AC} = \frac{3}{\text{cos}\alpha} = 3,231 \text{ t (C)}$$

Nudo B:

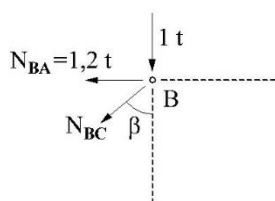


Fig. E.2.4.3.c.3

$$\beta = \arctg\left(\frac{3}{2,5}\right) = 50,194^\circ$$

$$\sum F_V = 0; \quad -1 - N_{BC} \cdot \text{cos}\beta = 0; \quad N_{BC} = -\frac{1}{\text{cos}\beta} = -1,562 \text{ t (C)}$$

$$\sum F_H = 0; \quad -1,2 - N_{BC} \cdot \text{sen}\beta = 0; \quad N_{BC} = -\frac{1,2}{\text{sen}\beta} = -1,562 \text{ t (C)}$$

Verificación de los resultados en el nudo C:

Las fuerzas que actúan en el nudo C se han determinado ya. Se comprueba el equilibrio en dicho nudo para verificar que los valores calculados de todas las fuerzas son correctos.

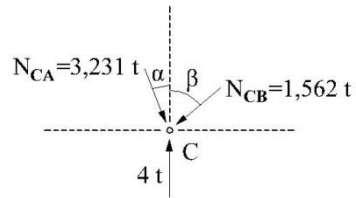


Fig. E.2.4.3.c.4

$$\sum F_H = 3,231 \cdot \text{sen}\alpha - 1,562 \cdot \text{sen}\beta = 1,2 - 1,2 = 0$$

$$\sum F_V = 4 - 3,231 \cdot \text{cos}\alpha - 1,562 \cdot \text{cos}\beta = 4 - 3 - 1 = 0$$

(Comprobado)

Resumen de resultados:

BARRA	ESFUERZO (t)	TIPO
AC	3,231	C
AB	1,2	T
CB	1,562	C

d)

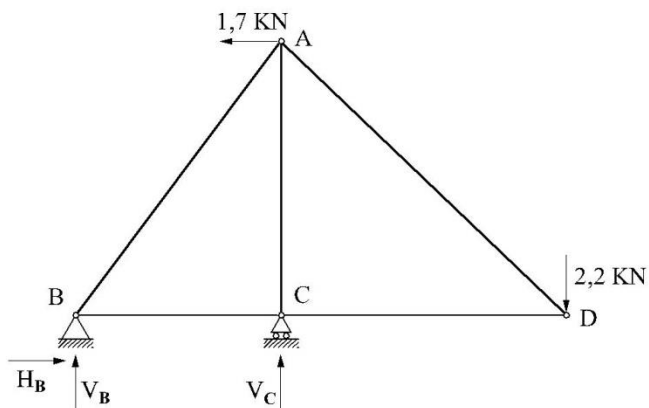


Fig. E.2.4.3.d.1

Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_H = 0; \quad H_B - 1,7 = 0; \quad H_B = 1,7 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0; \quad V_B + V_C - 2,2 = 0; \quad V_B = 2,2 - 2,999 = -0,799 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0; \quad V_C \cdot 1,8 - 2,2 \cdot (1,8 + 2,5) + 1,7 \cdot 2,4 = 0; \quad V_C = \frac{5,38}{1,8} = 2,999 \text{ kN}$$

Aplicación del método de los nudos:

Nudo D:

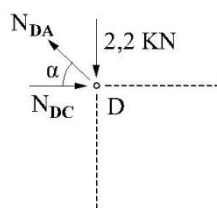


Fig. E.2.4.3.d.2

$$\alpha = \arctg\left(\frac{2,4}{2,5}\right) = 43,831^\circ$$

$$\sum F_V = 0; \quad -2,2 + N_{DA} \cdot \text{sen}\alpha = 0; \quad N_{DA} = \frac{2,2}{\text{sen}\alpha} = 3,177 \text{ kN (T)}$$

$$\sum F_H = 0; \quad N_{DC} - N_{DA} \cdot \text{cos}\alpha = 0; \quad N_{DC} = N_{DA} \cdot \text{cos}\alpha = 2,292 \text{ kN (C)}$$

Nudo C:

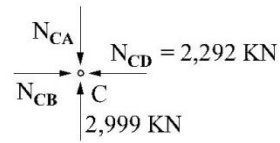


Fig. E.2.4.3.d.3

$$\sum F_V = 0; \quad -N_{CA} + 2,999 = 0; \quad N_{CA} = 2,999 \text{ kN (C)}$$

$$\sum F_H = 0; \quad N_{CB} - 2,292 = 0; \quad N_{CB} = 2,292 \text{ kN (C)}$$

Nudo A:

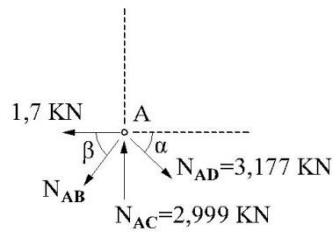


Fig. E.2.4.3.d.4

$$\alpha = \arctg\left(\frac{2,4}{2,5}\right) = 43,83^\circ$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{2,4}{1,8}\right) = 53,13^\circ$$

$$\sum F_V = 0; \quad -3,177 \cdot \text{sen}\alpha + 2,999 - N_{AB} \cdot \text{sen}\beta = 0; \quad N_{AB} = 0,999 \text{ kN (T)}$$

$$\sum F_H = 0; \quad -1,7 + 3,177 \cdot \text{cos}\alpha - N_{AB} \cdot \text{cos}\beta = 0; \quad N_{AB} = 0,999 \text{ kN (T)}$$

Verificación de los resultados en el nudo B:

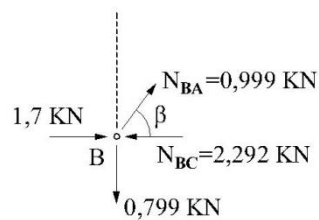


Fig. E.2.4.3.d.5

$$\sum F_H = 1,7 - 2,292 + 0,999 \cdot \cos\beta = 1,7 - 2,292 + 0,599 = 0$$

$$\sum F_V = -0,799 + N_{BA} \cdot \text{sen}\beta = -0,799 + 0,799 = 0$$

(Comprobado)

Resumen de resultados:

BARRA	ESFUERZO (kN)	TIPO
AD	3,177	T
CD	2,292	C
CA	2,999	C
CB	2,292	C
AB	0,999	T

e)

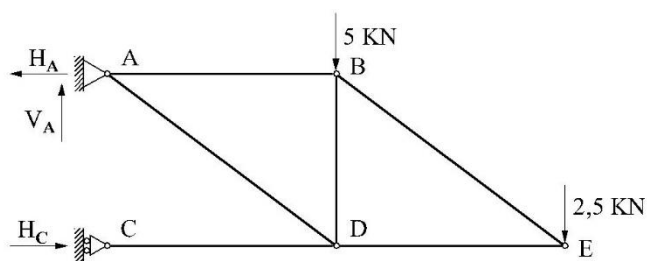


Fig. E.2.4.3.e.1

Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_V = 0; \quad V_A - 5 - 2,5 = 0; \quad V_A = 7,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0; \quad -H_A + H_C = 0; \quad H_A = H_C = 13,333 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 0; \quad H_A \cdot 0,75 - 5 \cdot 1 - 2,5 \cdot 2 = 0; \quad H_A = \frac{10}{0,75} = 13,333 \text{ kN}$$

Aplicación del método de los nudos:

Nudo C:

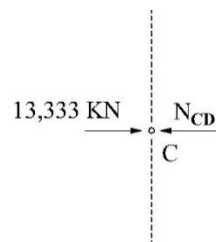


Fig. E.2.4.3.e.2

$$\sum F_H = 0; \quad -N_{CD} + 13,333 = 0; \quad N_{CD} = 13,333 \text{ kN (C)}$$

Nudo A:

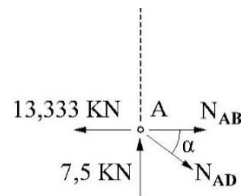


Fig. E.2.4.3.e.3

$$\alpha = \arctg\left(\frac{0,75}{1}\right) = 36,87^\circ$$

$$\sum F_H = 0; \quad -13,333 + N_{AB} + N_{AD} \cdot \cos \alpha = 0; \quad N_{AB} = 13,333 - N_{AD} \cdot \cos \alpha = 3,333 \text{ kN (T)}$$

$$\sum F_V = 0; \quad 7,5 + N_{AD} \cdot \sin \alpha = 0; \quad N_{AD} = \frac{7,5}{\sin \alpha} = 12,5 \text{ kN (T)}$$

Nudo B:

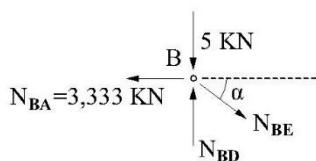


Fig. E.2.4.3.e.4

$$\sum F_H = 0; \quad -3,333 + N_{BE} \cdot \cos \alpha = 0; \quad N_{BE} = \frac{3,333}{\cos \alpha} = 4,167 \text{ kN (T)}$$

$$\sum F_V = 0; \quad -5 + N_{BD} - N_{BE} \cdot \text{sen} \alpha = 0; \quad N_{BD} = 5 + 4,167 \cdot \text{sen} \alpha = 7,5 \text{ kN (C)}$$

Nudo D:

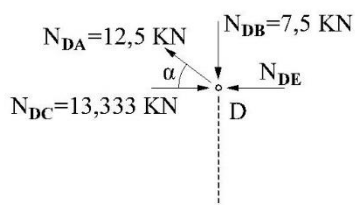


Fig. E.2.4.3.e.5

$$\sum F_H = 0; \quad 13,333 - 12,5 \cdot \cos \alpha - N_{DE} = 0; \quad N_{DE} = 3,333 \text{ kN (C)}$$

Verificación de los resultados en el nudo E:

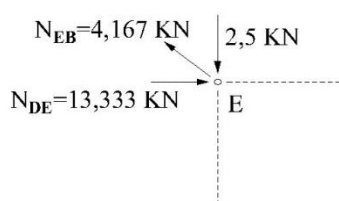


Fig. E.2.4.3.e.6

$$\sum F_H = -4,167 \cdot \cos \alpha + 3,333 = -3,333 + 3,333 = 0$$

$$\sum F_V = -2,5 + 4,167 \cdot \text{sen} \alpha = -2,5 + 2,5 = 0$$

(Comprobado)

Resumen de resultados:

BARRA	ESFUERZO (kN)	TIPO
CD	13,333	C
AD	12,5	T
AB	3,333	T
BD	7,5	C
BE	4,167	T
DE	3,333	C

f)

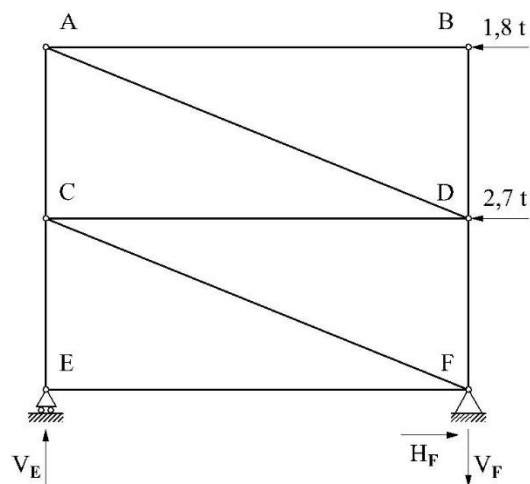


Fig. E.2.4.3.f.1

Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_V = 0; \quad -V_F + V_E = 0; \quad V_E = V_F = 2,554 \text{ t}$$

$$\sum F_H = 0; \quad H_F - 1,8 - 2,7 = 0; \quad H_F = 4,5 \text{ t}$$

$$\sum M_E = 0; \quad -3,7 \cdot V_F + 1,5 \cdot 2,7 + 3 \cdot 1,8 = 0; \quad V_F = \frac{9,45}{3,7} = 2,554 \text{ t}$$

Aplicación del método de los nudos:

Nudo E:

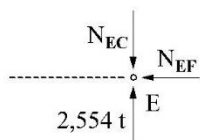


Fig. E.2.4.3.f.2

$$\sum F_H = 0; \quad N_{EF} = 0$$

$$\sum F_V = 0; \quad -N_{EC} + 2,554 = 0; \quad N_{EC} = 2,554 \text{ t (C)}$$

Nudo B:

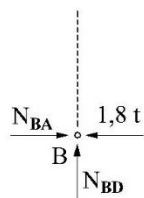


Fig. E.2.4.3.f.3

$$\sum F_H = 0; \quad N_{BA} - 1,8 = 0; \quad N_{BA} = 1,8 \text{ t (C)}$$

$$\sum F_V = 0; \quad N_{BD} = 0$$

Nudo F:

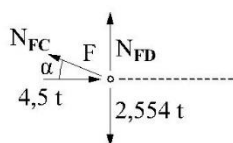


Fig. E.2.4.3.f.4

$$\sum F_H = 0; \quad 4,5 - N_{FC} \cdot \cos \alpha = 0; \quad N_{FC} = \frac{4,5}{\cos \alpha} = 4,856 \text{ t (T)}$$

$$\sum F_V = 0; \quad N_{FD} - 2,554 + N_{FC} \cdot \text{sen} \alpha = 0; \quad N_{FD} = 2,554 - N_{FC} \cdot \text{sen} \alpha = 0,730 \text{ t (T)}$$

Nudo C:

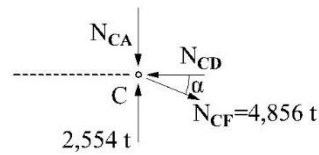


Fig. E.2.4.3.f.5

$$\alpha = \arctg\left(\frac{1,5}{3,7}\right) = 22,068^\circ$$

$$\sum F_H = 0; \quad -N_{CD} + 4,856 \cdot \cos \alpha = 0; \quad N_{CD} = 4,5 \text{ t (C)}$$

$$\sum F_V = 0; \quad -N_{CA} + 2,554 - 4,856 \cdot \text{sen} \alpha = 0; \quad N_{CA} = 0,730 \text{ t (C)}$$

Nudo D:

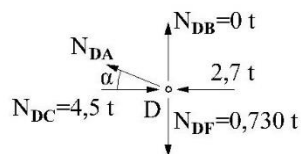


Fig. E.2.4.3.f.6

$$\sum F_H = 0; \quad -2,7 + 4,5 - N_{DA} \cdot \cos \alpha = 0; \quad N_{DA} = 1,943 \text{ t (T)}$$

$$\sum F_V = 0; \quad N_{DA} \cdot \text{sen} \alpha - 0,73 = 0; \quad N_{DA} = 1,943 \text{ t (T)}$$

Verificación de los resultados en el nudo A:

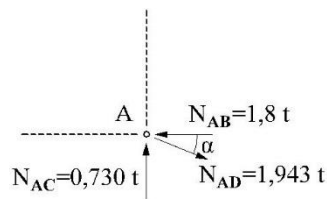


Fig. E.2.4.3.f.7

$$\sum F_H = -1,8 + 1,943 \cdot \cos \alpha = -1,8 + 1,8 = 0$$

$$\sum F_V = 0,73 - 1,943 \cdot \text{sen} \alpha = 0,73 - 0,73 = 0$$

(Comprobado)

Resumen de resultados:

BARRA	ESFUERZO (t)	TIPO
EF	0	-
EC	2,554	C
BA	1,8	C
BD	0	-
FC	4,856	T
FD	0,73	T
CD	4,5	C
CA	0,73	C
DA	1,943	T

TEMA 3: LEYES DE ESFUERZOS EN VIGAS Y PÓRTICOS ISOSTÁTICOS

3.1 LEYES DE ESFUERZOS EN VIGAS

Ejercicio 3.1.1

Calcular y representar, acotando los valores singulares, las leyes de esfuerzos de las siguientes vigas biapoyadas.

- Viga biapoyada con carga puntual.
- Viga biapoyada con carga continua.
- Viga biapoyada con carga discontinua.
- Viga biapoyada con dos cargas puntuales simétricas.

Solución:

- Viga biapoyada con carga puntual.

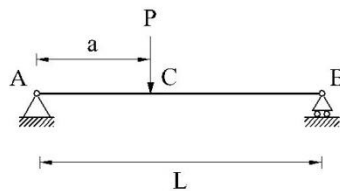


Fig. E.3.1.1.a.1

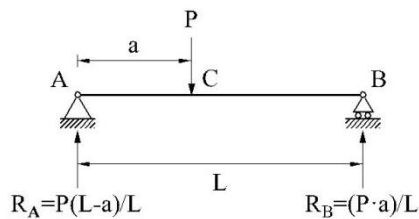
Reacciones:

Fig. E.3.1.1.a.2

$$\sum F_V = 0 ; \quad R_A + R_B = P$$

$$\sum M_A = 0 ; \quad R_B \cdot L - P \cdot a = 0$$

$$R_B = P \cdot \frac{a}{L}$$

$$R_A = P - P \cdot \frac{a}{L} = P \cdot \frac{(L-a)}{L}$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < a$$

$$M(x) = P \cdot \frac{(L-a)}{L} \cdot x; \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = 0 \\ M(a) = \frac{P \cdot a}{L} \cdot (L-a) \end{array} \right.$$

$$a < x < L$$

$$M(x) = \frac{P \cdot a}{L} \cdot (L-x); \quad \left| \begin{array}{l} M(a) = \frac{P \cdot a}{L} \cdot (L-a) \\ M(L) = 0 \end{array} \right.$$

Ley de esfuerzos cortantes:

$$0 < x < a \quad V(x) = P \cdot \frac{(L-a)}{L}$$

$$a < x < L \quad V(x) = -\frac{P \cdot a}{L}$$

Diagramas de esfuerzos:

Momentos flectores:

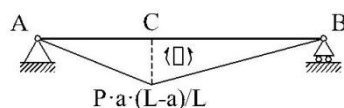


Fig. E.3.1.1.a.3

Esfuerzos cortantes:

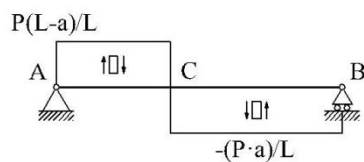


Fig. E.3.1.1.a.4

b) Viga biapoyada con carga continua.

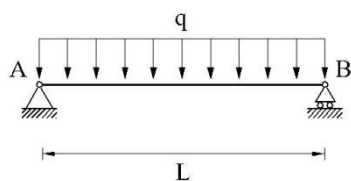


Fig. E.3.1.1.b.1

Reacciones:

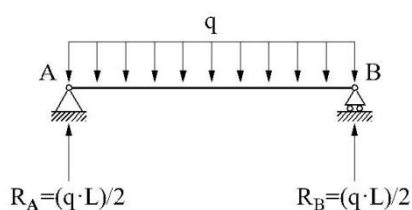


Fig. E.3.1.1.b.2

$$\sum F_V = 0; \quad R_A + R_B = q \cdot L$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot L - q \cdot L \cdot \left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$R_B = q \cdot \frac{L}{2}$$

$$R_A = q \cdot L - q \cdot \frac{L}{2} = q \cdot \frac{L}{2}$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < L$$

$$M(x) = \frac{q}{2} \cdot (L \cdot x - x^2);$$

$$\left| \begin{array}{l} M(0) = 0 \\ M(L/2) = \frac{q \cdot L^2}{8} \\ M(L) = 0 \end{array} \right.$$

Ley de esfuerzos cortantes:

$$0 < x < L$$

$$V(x) = q \cdot \left(\frac{L}{2} - x \right);$$

$$\left| \begin{array}{l} V(0) = \frac{q \cdot L}{2} \\ V(L/2) = 0 \\ V(L) = -\frac{q \cdot L}{2} \end{array} \right.$$

Diagramas de esfuerzos:

Momentos flectores:

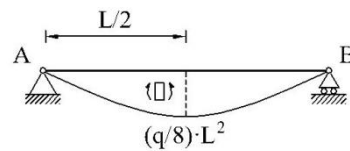


Fig. E.3.1.1.b.3

Esfuerzos cortantes:

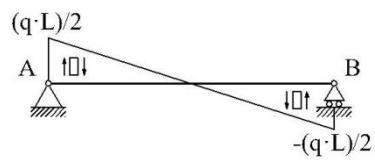


Fig. E.3.1.1.b.4

c) Viga biapoyada con carga discontinua.

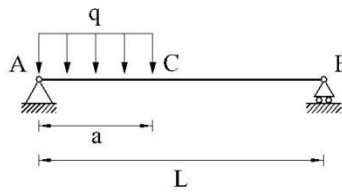


Fig. E.3.1.1.c.1

Reacciones:

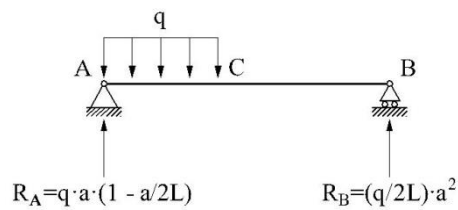


Fig. E.3.1.1.c.2

$$\sum F_V = 0; \quad R_A + R_B = q \cdot a$$

$$\sum M_V = 0; \quad R_B \cdot L - q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$R_B = \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot L}$$

$$R_A = q \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a}{2 \cdot L}\right)$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < a$$

$$M(x) = q \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a}{2 \cdot L}\right) \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}; \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = 0 \\ M(a) = \frac{q}{2} \cdot a^2 \cdot \left(1 - \frac{a}{L}\right) \end{array} \right.$$

$$a < x < L$$

$$M(x) = \frac{q}{2} \cdot a^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right); \quad \left| \begin{array}{l} M(a) = \frac{q}{2} \cdot a^2 \cdot \left(1 - \frac{a}{L}\right) \\ M(L) = 0 \end{array} \right.$$

Ley de esfuerzos cortantes:

$$0 < x < a$$

$$V(x) = q \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a}{2 \cdot L}\right) - q \cdot x; \quad \left| \begin{array}{l} V(0) = q \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a}{2 \cdot L}\right) \\ V(a) = -\frac{q \cdot a^2}{2 \cdot L} \end{array} \right.$$

$$a < x < L$$

$$V(x) = -\frac{q \cdot a^2}{2 \cdot L}; \quad \left| \begin{array}{l} V(a) = -\frac{q \cdot a^2}{2 \cdot L} = V(L) \end{array} \right.$$

$$V(x) = 0 \text{ para } x = a \cdot \left(1 - \frac{a}{2 \cdot L}\right)$$

$$M\left(x = a \cdot \left(1 - \frac{a}{2 \cdot L}\right)\right) = \frac{q}{2} \cdot a^2 \cdot \left(1 - \frac{a}{2 \cdot L}\right)^2$$

Diagramas de esfuerzos:

Momentos flectores:

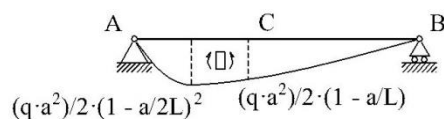


Fig. E.3.1.1.c.3

Esfuerzos cortantes:

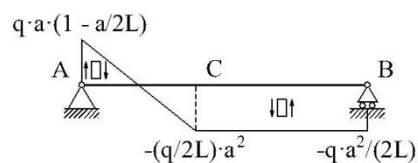


Fig. E.3.1.1.c.4

d) Viga biapoyada con dos cargas puntuales simétricas.

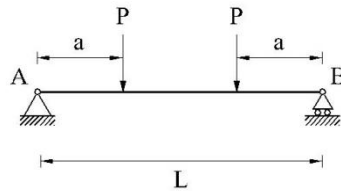


Fig. E.3.1.1.d.1

Reacciones:

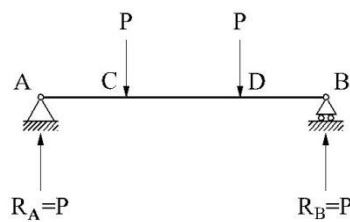


Fig. E.3.1.1.d.2

$$\sum F_V = 0; \quad R_A + R_B = 2 \cdot P$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot L - P \cdot (L - a) - P \cdot a = 0$$

$$R_A = R_B = P$$

Leyes de esfuerzos:

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < a$$

$$M(x) = P \cdot x; \quad \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(a) = P \cdot a \end{cases}$$

$$a < x < L - a$$

$$M(x) - P \cdot x + P \cdot (x - a) = 0; \quad M(x) = P \cdot a$$

$$L - a < x < L$$

$$M(x) - P \cdot x + P \cdot (x - a) + P \cdot (x - (L - a)) = 0;$$

$$M(x) = P \cdot (L - x); \quad \begin{cases} M(L - a) = P \cdot a \\ M(L) = 0 \end{cases}$$

Ley de esfuerzos cortantes:

$$0 < x < a; \quad V(x) = P$$

$$a < x < L - a; \quad V(x) = 0$$

$$L - a < x < L; \quad V(x) = -P$$

Diagramas de esfuerzos:

Esfuerzos cortantes:

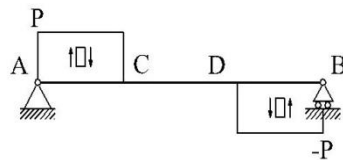


Fig. E.3.1.1.d.3

Momentos flectores:

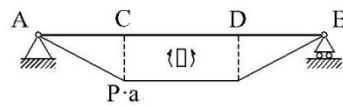


Fig. E.3.1.1.d.4

Ejercicio 3.1.2

Calcular y representar, acotando los valores singulares, las leyes de esfuerzos de las siguientes vigas empotradas en voladizo.

- Viga empotrada en voladizo con carga puntual.
- Viga empotrada en voladizo con un momento en el extremo.
- Viga empotrada en voladizo con carga continua.
- Viga empotrada en voladizo con carga discontinua.

Solución:

- Viga empotrada en voladizo con carga puntual.



Fig. E.3.1.2.a.1

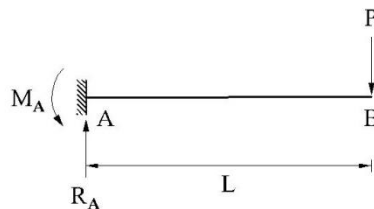
Reacciones:

Fig. E.3.1.2.a.2

$$\sum F_V = 0; \quad R_A = P$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_A - P \cdot L = 0$$

$$M_A = P \cdot L$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < L \quad M(x) = P \cdot x - P \cdot L; \quad \left. \begin{array}{l} M(0) = -P \cdot L \\ M(L) = 0 \end{array} \right\}$$

Ley de esfuerzos cortantes:

$$0 < x < L \quad V(x) = P$$

Diagramas de esfuerzos:

Momentos flectores:

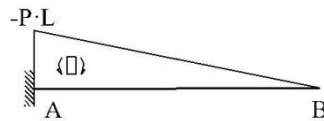


Fig. E.3.1.2.a.3

Esfuerzos cortantes:

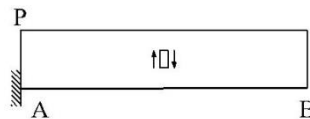


Fig. E.3.1.a.4

b) Viga empotrada en voladizo con un momento en el extremo.

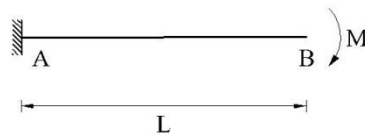


Fig. E.3.1.2.b.1

Reacciones:

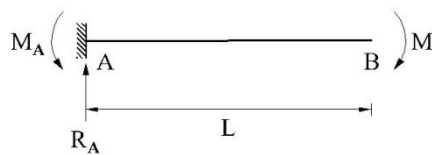


Fig. E.3.1.2.b.2

$$\Sigma F_v = 0; \quad R_A = 0$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad M_A - M = 0$$

$$M_A = M$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < L \quad M(x) = -M$$

Ley de esfuerzos cortantes:

$$0 < x < L \quad V(x) = 0$$

Diagramas de esfuerzos:

Momentos flectores:

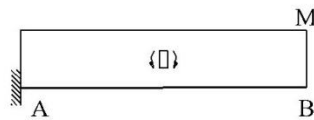


Fig. E.3.1.2.b.3

Esfuerzos cortantes:



Fig. E.3.1.2.b.4

c) Viga empotrada en voladizo con carga continua.

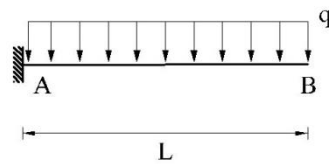


Fig. E.3.1.2.c.1

Reacciones:

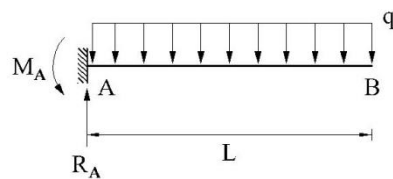


Fig. E.3.1.2.c.2

$$\sum F_V = 0; \quad R_A = q \cdot L$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_A = q \cdot \frac{L^2}{2}$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < L \quad M(x) = -q \cdot \frac{(L-x)^2}{2}; \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = -q \cdot \frac{L^2}{2} \\ M(L) = 0 \end{array} \right.$$

Ley de esfuerzos cortantes:

$$0 < x < L \quad V(x) = q \cdot (L-x); \quad \left| \begin{array}{l} V(0) = q \cdot L \\ V(L) = 0 \end{array} \right.$$

Diagramas de esfuerzos:

Momentos flectores:

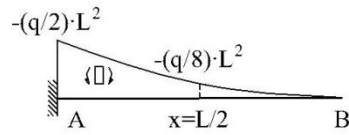


Fig. E.3.1.2.c.3

Esfuerzos cortantes:

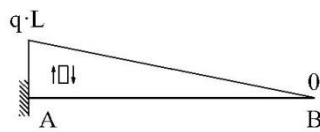


Fig. E.3.1.2.c.4

d) Viga empotrada en voladizo con carga discontinua.

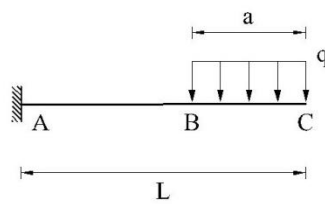


Fig. E.3.1.2.d.1

Reacciones:

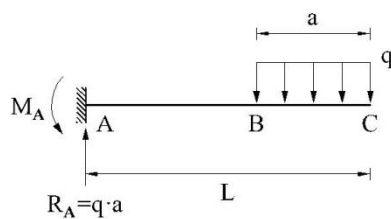


Fig. E.3.1.2.d.2

$$\sum F_V = 0; \quad R_A = q \cdot a$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_A - q \cdot a \cdot \left(L - \frac{a}{2}\right) = 0; \quad M_A = q \cdot a \cdot \left(L - \frac{a}{2}\right)$$

Leyes de esfuerzos:

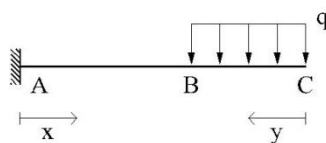


Fig. E.3.1.2.d.3

$$0 < x < L - a$$

$$M(x) = -q \cdot a \cdot x + q \cdot a \cdot \left(L - \frac{a}{2} \right);$$

$$M(x) = q \cdot a \cdot x - q \cdot a \cdot \left(L - \frac{a}{2} \right); \quad \left. \begin{array}{l} M(0) = -q \cdot a \cdot \left(L - \frac{a}{2} \right) \\ M(L - a) = q \cdot a \cdot (L - a) - q \cdot a \cdot \left(L - \frac{a}{2} \right) = \\ = -q \cdot a^2 + q \cdot \frac{a^2}{2} = -q \cdot \frac{a^2}{2} \end{array} \right\}$$

$$V(x) = q \cdot a$$

$$L - a < x < L$$

$$y = L - x; \quad -M(y) - q \cdot y \cdot \frac{y}{2} = 0; \quad M(y) = -q \cdot \frac{y^2}{2}$$

$$M(x) = -q \cdot \frac{(L - x)^2}{2}; \quad \left. \begin{array}{l} M(L - a) = -\frac{q}{2} \cdot (L - (L - a))^2 = -\frac{q \cdot a^2}{2}; \\ M(L) = 0 \end{array} \right\}$$

$$V(x) = -\frac{q}{2} (2 \cdot x - 2 \cdot L)$$

$$V(x) = -q \cdot (x - L); \quad \left. \begin{array}{l} V(L - a) = -q \cdot (L - a - L) = q \cdot a; \\ V(L) = 0 \end{array} \right\}$$

Diagramas de esfuerzos:

Momentos flectores:

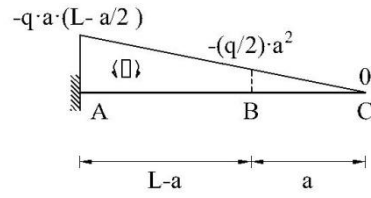


Fig. E.3.1.2.d.4

Esfuerzos cortantes:

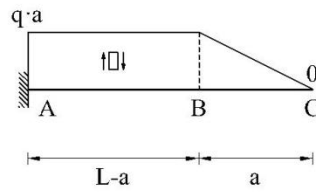


Fig. E.3.1.2.d.5

Ejercicio 3.1.3

Determine el esfuerzo cortante V y el momento flector M en el centro C del vano de la viga simplemente apoyada AB siguiente:

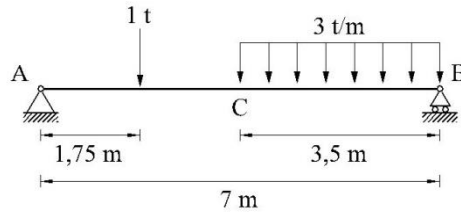


Fig. E.3.1.3.a

Solución:

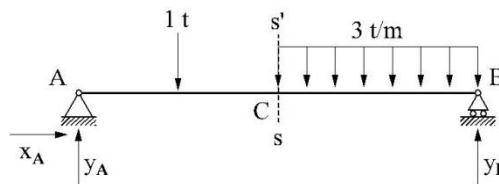


Fig. E.3.1.3.b

Reacciones:

$$\sum F_x = 0 ; \quad x_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 ; \quad y_A + y_B - 1 - 3 \cdot 3,5 = 0 ; \quad y_A + y_B = 11,5$$

$$\sum M_A = 0 ; \quad 7 \cdot y_B - 1 \cdot 1,75 - 3 \cdot 3,5 \cdot 5,25 = 0 ; \quad 7 \cdot y_B - 56,875 = 0$$

$$y_B = \frac{56,875}{7} = 8,125 \text{ t}$$

$$y_A = 11,5 - 8,125 = 3,375 \text{ t}$$

Momento flector y esfuerzo cortante en C:

Para obtener el cortante V y el momento flector M en la sección C , establecemos el equilibrio de fuerzas y de momentos en dicha sección SS' del tramo de la barra AC .

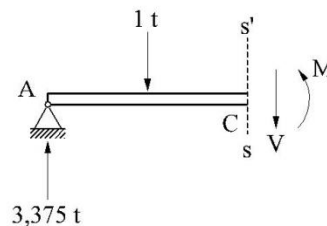


Fig. E.3.1.3.c

$$\Sigma F_V = 0 ; \quad -V + 3,375 - 1 = 0; \quad V = 2,375 \text{ t}$$

$$\Sigma M_C = 0 ; \quad M - 3,375 \cdot 3,5 + 1 \cdot 1,75 = 0; \quad M = 10,063 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Ejercicio 3.1.4

Calcular el esfuerzo cortante V y el momento flector M en una sección transversal localizada a 0,5 m del soporte de la viga en voladizo AB que muestra la figura:

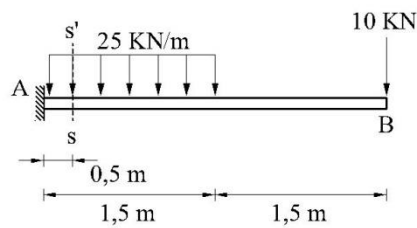


Fig. E.3.1.4.a

Solución:

Reacciones:

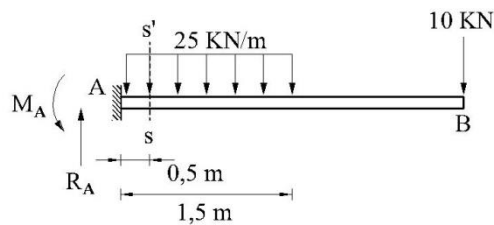


Fig. E.3.1.4.b

$$\Sigma F_V = 0; \quad R_A - 25 \cdot 1,5 - 10 = 0; \quad R_A = 47,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad M_A - 10 \cdot 3 - 25 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 0; \quad M_A = 58,125 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Momento flector y esfuerzo cortante en la sección ss':

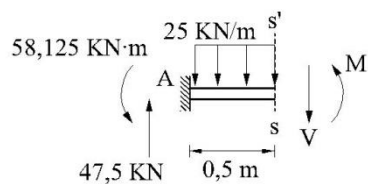


Fig. E.3.1.4.c

$$\sum F_V = 0; \quad -V_C + 47,5 - 25 \cdot 0,5 = 0; \quad V_C = 35 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 0; \quad M_C + 58,125 - 47,5 \cdot 0,5 + 25 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0; \quad M_C = -37,5 \text{ kN}\cdot\text{m}^{(*)}$$

(*)El signo negativo nos indica que el sentido del momento flector es contrario al supuesto inicialmente.

En la sección del empotramiento los valores del momento flector y del esfuerzo cortante son máximos:

$$M_A = -58,125 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_A = 47,5 \text{ kN}$$

Ejercicio 3.1.5

Determinar los valores máximos del esfuerzo cortante y del momento flector en la siguiente viga simplemente apoyada AB.

Trazar, además, los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores:

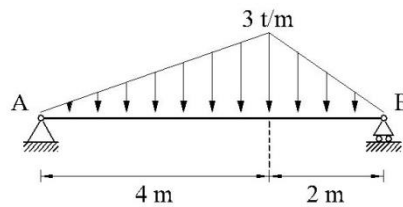


Fig. E.3.1.5.a

Solución:

Reacciones:

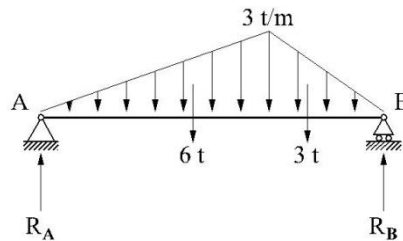


Fig. E.3.1.5.b

$$\sum F_V = 0; \quad R_A + R_B - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 0; \quad R_A + R_B = 9$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 6 - 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - 3 \cdot \left(4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = 0;$$

$$R_B = \frac{30}{6} = 5 \text{ t}$$

$$R_A = 9 - 5 = 4 \text{ t}$$

Leyes de esfuerzos:

$$0 < x < 4 \text{ m}$$

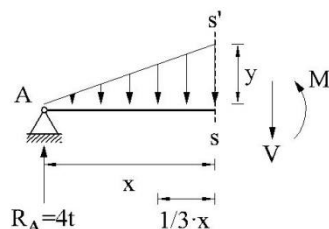


Fig. E.3.1.5.c

Por semejanza de triángulos:

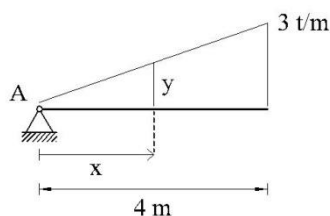


Fig. E.3.1.5.d

$$\frac{3}{4} = \frac{y}{x}; y = \frac{3}{4} \cdot x$$

$$M - 4 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot x \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot x = 0$$

$$M(x) = 4 \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^3; \begin{cases} M(0) = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2) = 7 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(4) = 8 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(3,266) = 8,709 \text{ t}\cdot\text{m} \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = 4 - \frac{3}{8} \cdot x^2; \begin{cases} V(0) = 4 \text{ t} \\ V(2) = 2,5 \text{ t} \\ V(4) = -2 \text{ t} \\ V(3,266) = 0 \text{ t} \end{cases}$$

$$M_{\text{máx}} \text{ para } V(x)=0; 4 - \frac{3}{8} \cdot x^2 = 0; x^2 = 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}; x = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 3,266 \text{ m}$$

$$V_{\text{máx}} \text{ para } \frac{dV(x)}{dx} = 0; -\frac{3}{4} \cdot x = 0; x = 0; V_{\text{máx}} = 4 \text{ t}$$

$$0 < x_1 < 2 \text{ m}$$

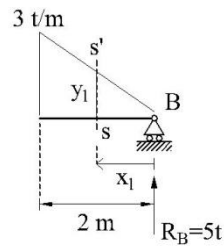


Fig. E.3.1.5.e

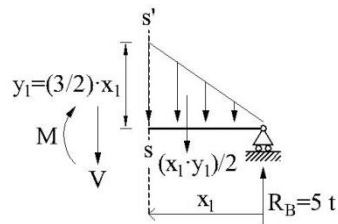


Fig. E.3.1.5.f

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{3}{2} = \frac{y_1}{x_1}; \quad y_1 = \frac{3}{2} \cdot x_1$$

$$-M(x) + 5 \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot \left(\frac{\beta}{2} \cdot x_1 \right) \cdot \frac{1}{\beta} \cdot x_1 = 0$$

$$M(x) = 5 \cdot x_1 - \frac{1}{4} \cdot x_1^3; \quad \begin{cases} M(0) = 0 \text{ t-m} \\ M(1) = 4,75 \text{ t-m} \\ M(2) = 8 \text{ t-m} \end{cases}$$

$$V(x_1) = -\frac{dM(x_1)}{dx_1} = -5 + \frac{3}{4} \cdot x_1^2; \quad \begin{cases} V(0) = -5 \text{ t} \\ V(1) = -4,25 \text{ t} \\ V(2) = -2 \text{ t} \end{cases}$$

$$M_{\text{máx}} \text{ para } V(x_1)=0; \quad -5 + \frac{3}{4} \cdot x_1^2 = 0; \quad x_1 = \sqrt{5 \cdot \frac{4}{3}} = 2\sqrt{\frac{5}{3}} = 2,582 \text{ m (fuera del tramo)}$$

$$V_{\text{máx}} \text{ para } \frac{dV(x_1)}{dx_1} = 0; \quad \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot x_1 = 0; \quad x_1 = 0$$

$$V_{\text{máx}} = -5 \text{ t}; \quad M_{\text{máx}} = 8,709 \text{ t-m}$$

Diagramas de esfuerzos:

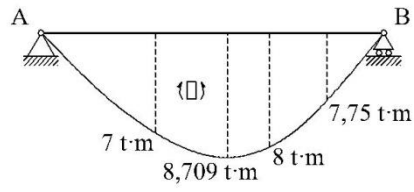
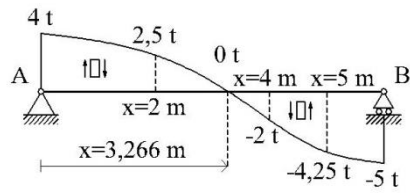


Fig. E.3.1.5.g

Ejercicio 3.1.6

La viga simplemente apoyada de la figura AB, está sometida a una carga distribuida de forma trapezoidal. Determinar el momento flector M y el esfuerzo cortante V en el centro del vano.

Dibujar las leyes de esfuerzos cortantes y momentos flectores.

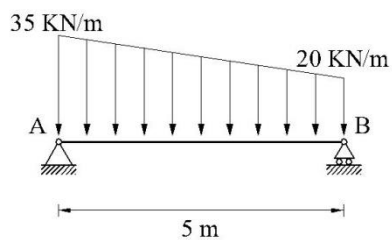


Fig. E.3.1.6.a

Solución:

Se aplica el principio de superposición, descomponiendo el estado de carga real en los siguientes estados:

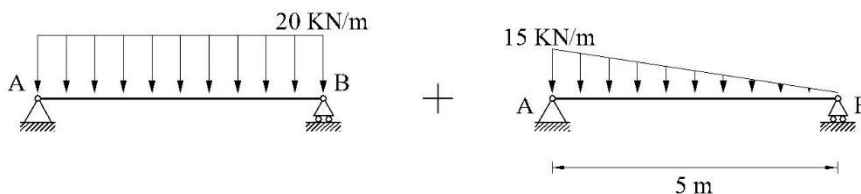


Fig. E.3.1.6.b

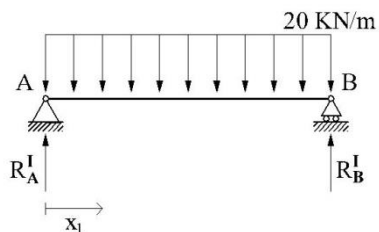
Estado I:

Fig. E.3.1.6.c

Reacciones:

$$\sum F_V = 0; \quad R_A^I + R_B^I - 20 \cdot 5 = 0; \quad R_A^I + R_B^I = 100$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B^I \cdot 5 - 20 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0;$$

$$R_B^I = 20 \cdot 2,5 = 50 \text{ kN}$$

$$R_A^I = 100 - 50 = 50 \text{ kN}$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < 5 \text{ m}$$

$$M^I - 50 \cdot x + 20 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$M^I = 50 \cdot x - 10 \cdot x^2; \quad \begin{cases} M^I(0) = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M^I(2,5) = 62,5 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M^I(5) = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

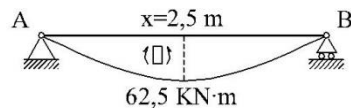


Fig. E.3.1.6.d

Ley de esfuerzos cortantes:

$$0 < x < 5 \text{ m}$$

$$V^I(x) = \frac{dM^I(x)}{dx} = 50 - 20 \cdot x; \quad \begin{cases} V^I(0) = 50 \text{ kN} \\ V^I(2,5) = 0 \text{ kN} \\ V^I(5) = -50 \text{ kN} \end{cases}$$

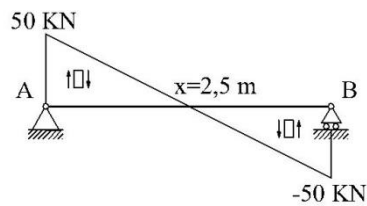


Fig. E.3.1.6.e

Estado II:

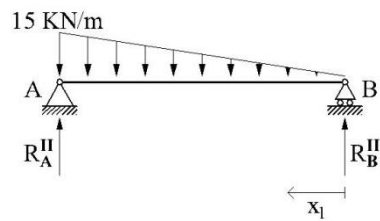


Fig. E.3.1.6.f

Reacciones:

$$\sum F_V = 0; \quad R_A^{\text{II}} + R_B^{\text{II}} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 15 = 0; \quad R_A^{\text{II}} + R_B^{\text{II}} = 37,5$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B^{\text{II}} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 15 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 5 \right) = 0;$$

$$R_B^{\text{II}} = 12,5 \text{ kN}$$

$$R_A^{\text{II}} = 37,5 - 12,5 = 25 \text{ kN}$$

Ley de momentos flectores:

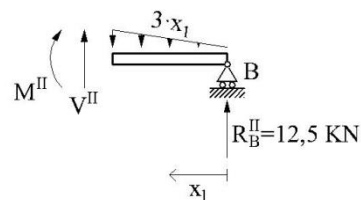


Fig. E.3.1.6.g

$$0 < x_1 < 5 \text{ m}$$

$$-M^{\text{II}} + 12,5 \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot x_1 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot x_1 = 0$$

$$M^{\text{II}} = 12,5 \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_1^3; \quad \left. \begin{array}{l} M^{\text{II}}(0) = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M^{\text{II}}(2,5) = 23,438 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M^{\text{II}}(5) = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M^{\text{II}}(1) = 12 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M^{\text{II}}(4) = 18 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M^{\text{II}}(2,887) = 24,056 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array} \right\}$$

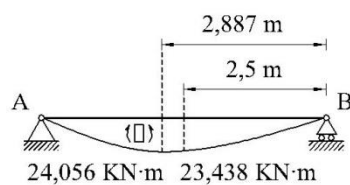


Fig. E.3.1.6.h

Ley de esfuerzos cortantes:

$$0 < x < 5 \text{ m}$$

$$V^{\text{II}} + 12,5 - \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot 3 \cdot x_1$$

$$V^{\text{II}}(x) = -12,5 + 1,5 \cdot x_1^2; \quad \begin{cases} V^{\text{II}}(0) = -12,5 \text{ kN} \\ V^{\text{II}}(2,5) = -3,125 \text{ kN} \\ V^{\text{II}}(5) = 25 \text{ kN} \\ V^{\text{II}}(2,887) = 0 \text{ kN} \end{cases}$$

$$M_{\text{máx}} \text{ para } V^{\text{I}}(x_1)=0; \quad -12,5 + 1,5 \cdot x_1^2 = 0; \quad x_1 = 2,887 \text{ m}$$

En función de x:

$$x_1 = L - x$$

$$M^{\text{II}} = 12,5 \cdot (5 - x) - \frac{1}{2} \cdot (5 - x)^3 = 0,5 \cdot x^3 - 7,5 \cdot x^2 + 25 \cdot x$$

$$V^{\text{II}}(x) = \frac{dM^{\text{II}}(x)}{dx} = 1,5 \cdot x^2 - 15 \cdot x + 25$$

Suma de estados:

Leyes de esfuerzos:

$$M(x) = M^{\text{I}}(x) + M^{\text{II}}(x) = 50 \cdot x - 10 \cdot x^2 + (0,5 \cdot x^3 - 7,5 \cdot x^2 + 25 \cdot x)$$

$$M(x) = 0,5 \cdot x^3 - 17,5 \cdot x^2 + 75 \cdot x ; \quad \begin{cases} M(0) = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(2,5) = 85,938 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(5) = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(2,387) = 86,114 \text{ kN}\cdot\text{m} = M_{\text{máx}} \end{cases}$$

$$V(x) = V^I(x) + V^{II}(x) = 50 - 20 \cdot x + (1,5 \cdot x^2 - 15 \cdot x + 25)$$

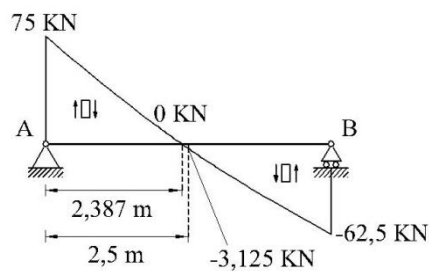
$$V(x) = 1,5 \cdot x^2 - 35 \cdot x + 75 ; \quad \begin{cases} V(0) = 75 \text{ kN} \\ V(2,5) = -3,125 \text{ kN} \\ V(5) = -62,5 \text{ kN} \\ V(2,387) = 0 \text{ kN} \end{cases}$$

$$M_{\text{máx}} \text{ para } V(x)=0; \quad 1,5 \cdot x^2 - 35 \cdot x + 75 = 0; \quad x_a = 20,946 \text{ m (fuera del tramo)}$$

$$x_b = 2,387 \text{ m}$$

Diagramas de esfuerzos:

$V(x)$:



$M(x)$:

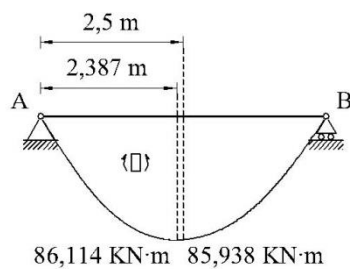


Fig. E.3.1.6.i

3.2. PÓRTICOS ISOSTÁTICOS DE UN SOLO VANO

Ejercicio 3.2.1

Calcular y representar, acotando los valores singulares, las leyes de esfuerzos del siguiente pórtico (Convocatoria Febrero de 2014).

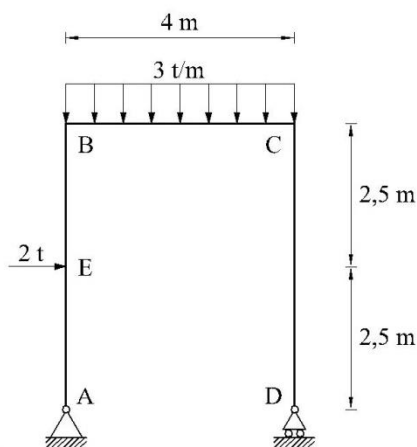


Fig. E.3.2.1.a

Solución:

Reacciones en los apoyos:

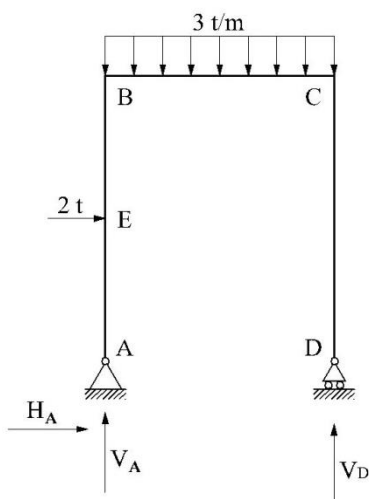


Fig. E.3.2.1.b

$$\sum F_V = 0; \quad V_A + V_D - 3 \cdot 4 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_H = 0; \quad H_A + 2 = 0; \quad H_A = -2 \text{ t}$$

$$\sum M_A = 0; \quad V_D \cdot 4 - 2 \cdot 2.5 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$V_D = \frac{5 + 24}{4} = 7,25 \text{ t}$$

$$(1) \quad V_A = -7,25 + 12 = 4,75 \text{ t}$$

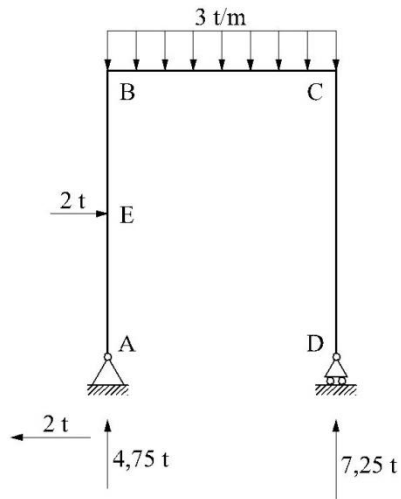


Fig. E.3.2.1.c

TRAMO AE:

$$0 < x < 2,5 \text{ m} \quad M(x)_A^E - 2 \cdot x = 0; \quad M(x)_A^E = 2 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_A^E = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2,5)_A^E = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_A^E = \frac{dM(x)_A^E}{dx} = 2 \text{ t}$$

$$N(x)_A^E + 4,75 = 0 \text{ t}; \quad N(x)_A^E = -4,75 \text{ t}$$

TRAMO EB:

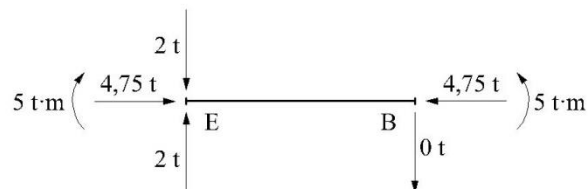


Fig. E.3.2.1.d

$$0 < x < 2,5 \text{ m} \quad M(x)_E^B - 5 = 0; \quad M(x)_E^B = 5 \text{ t}$$

$$V(x)_E^B = \frac{dM(x)_E^B}{dx} = 0 \text{ t}$$

$$N(x)_E^B + 4,75 = 0 \text{ t}; \quad N(x)_E^B = -4,75 \text{ t}$$

TRAMO BC:

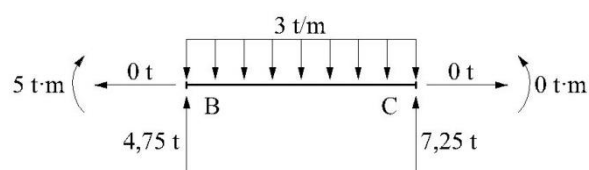


Fig. E.3.2.1.e

$$0 < x < 4 \text{ m} \quad M(x)_B^C - 5 - 4,75 \cdot x + 3 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0;$$

$$M(x)_B^C = 5 + 4,75 \cdot x - 1,5 \cdot x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_B^C = 5 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(4)_B^C = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_B^C = \frac{dM(x)_B^C}{dx} = 4,75 - 3 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} V(0)_B^C = 4,75 \text{ t} \\ V(4)_B^C = -7,25 \text{ t} \end{array} \right.$$

$$N(x)_B^C = 0 \text{ t}$$

Máximo valor del momento flector en el tramo BC:

$$V(x)_B^C = 0 \text{ para: } x = \frac{4,75}{3} = 1,583 \text{ m}; \quad M(1,583)_B^C = 8,76 \text{ t}\cdot\text{m}$$

TRAMO CD:

$$0 < x < 5 \text{ m} \quad M(x)_C^D = 0 \text{ t}$$

$$V(x)_C^D = \frac{dM(x)_C^D}{dx} = 0 \text{ t}$$

$$-N(x)_C^D - 7,25 = 0; \quad N(x)_C^D = -7,25 \text{ t}$$

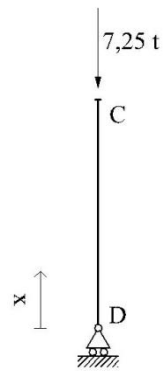


Fig. E.3.2.1.f

Diagramas de esfuerzos:

Momentos flectores:

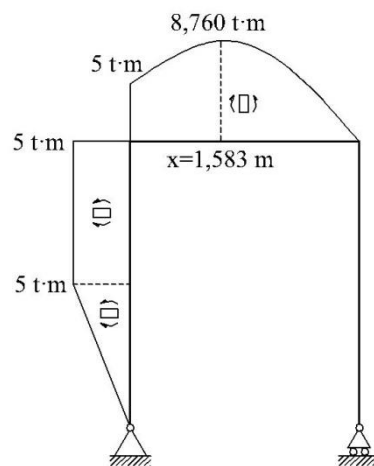


Fig. E.3.2.1.g

Esfuerzos cortantes:

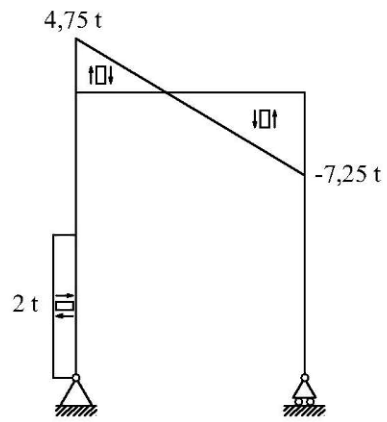


Fig. E.3.2.1.h

Esfuerzos axiales:

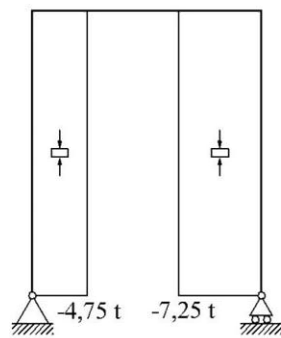


Fig. E.3.2.1.i

Ejercicio 3.2.2

Calcular y representar, acotando los valores singulares, las leyes de esfuerzos del siguiente pórtico (Convocatoria Febrero de 2015).

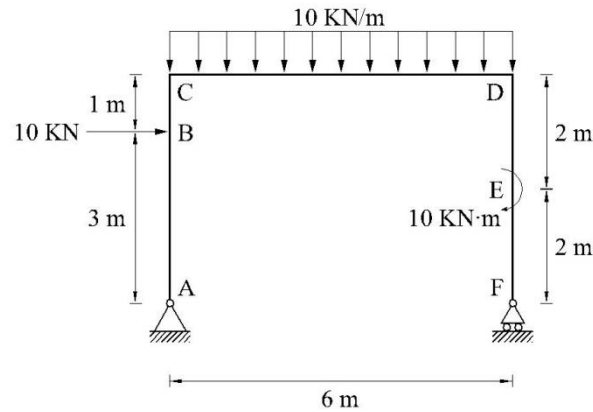


Fig. E.3.2.2.a

Solución:

Reacciones en los apoyos:

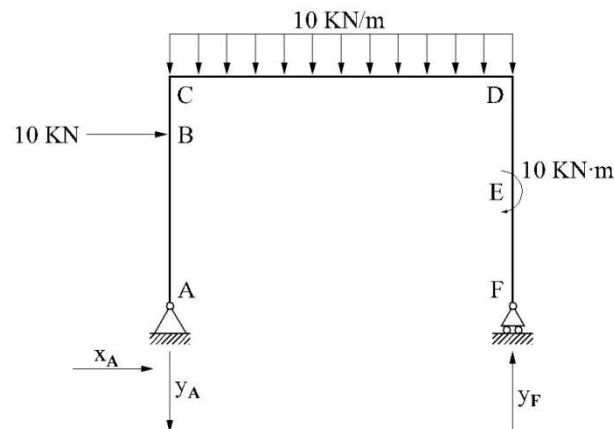


Fig. E.3.2.2.b

Reacciones:

$$\sum F_x = 0 ; \quad x_A + 10 = 0 ; \quad x_A = -10 \text{ kN (Sentido opuesto al considerado inicialmente)}$$

$$\sum F_y = 0 ; \quad -y_A + y_F - 10 \cdot 6 = 0 ; \quad -y_A + y_F = 60$$

$$\sum M_A = 0 ; \quad 6 \cdot y_F - 10 \cdot 3 - 10 - 10 \cdot 6 \cdot 3 = 0 ; \quad y_F = \frac{220}{6} = 36,667 \text{ kN}$$

$$y_A = -60 + y_F = -60 + 36,667 = -23,333 \text{ kN}$$

(Sentido opuesto al considerado inicialmente)

Leyes de esfuerzos:

Tramo AB:

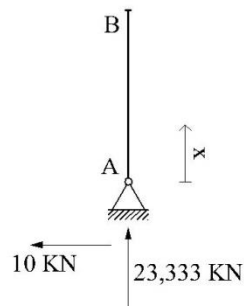


Fig. E.3.2.2.c

$$0 < x < 3 \text{ m}$$

$$M_A^B(x) - 10 \cdot x = 0$$

$$M_A^B(x) = 10 \cdot x ; \quad \begin{cases} M_A^B(0) = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_A^B(3) = 30 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

$$V_A^B(x) = 10 \text{ kN}$$

$$N_A^B(x) + 23,333 = 0 ; N_A^B(x) = -23,333 \text{ kN}$$

Tramo BC:

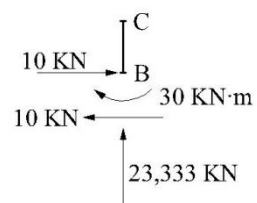


Fig. E.3.2.2.d

$$0 < x < 1 \text{ m}$$

$$M_B^C(x) - 30 - 10 \cdot x + 10 \cdot x = 0 ; M_B^C(x) = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_B^C(x) = 0 \text{ kN}$$

$$N_B^C(x) + 23,333 = 0 ; N_B^C(x) = -23,333 \text{ kN}$$

Tramo CD:

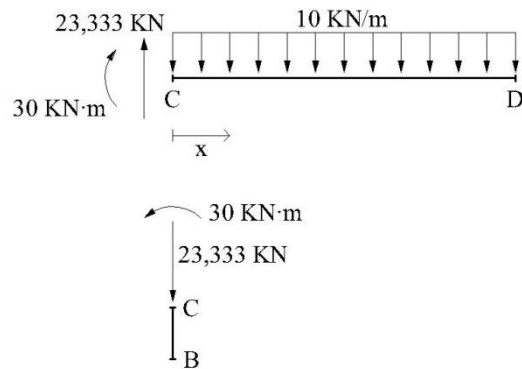


Fig. E.3.2.2.e

$$0 < x < 3 \text{ m}$$

$$M_C^D(x) - 30 - 23,333 \cdot x + 10 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$M_C^D(x) = 30 + 23,333 \cdot x - 5 \cdot x^2; \quad \left| \begin{array}{l} M_C^D(0) = 30 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_C^D(6) = -10 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_C^D(2,333) = 57,221 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V_C^D(x) = 23,333 - 10 \cdot x; \quad \left| \begin{array}{l} V_C^D(0) = 23,333 \text{ kN} \\ V_C^D(6) = -36,667 \text{ kN} \end{array} \right.$$

$$M_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}; \quad 23,333 - 10 \cdot x = 0; \quad x = 2,333 \text{ m}$$

$$N_C^D(x) = 0 \text{ kN}$$

Tramo FE:

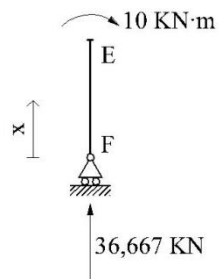


Fig. E.3.2.2.f

$$0 < x < 2 \text{ m}$$

$$M_F^E(x) = 0$$

$$V_F^E(x) = 0$$

$$N_F^E(x) + 36,667 = 0; N_F^E(x) = -36,667 \text{ kN}$$

Tramo ED:

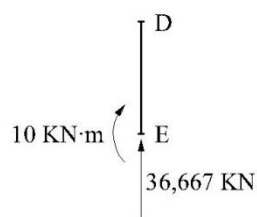


Fig. E.3.2.2.g

$$0 < x < 2 \text{ m}$$

$$-M_E^D(x) - 10 = 0; M_E^D(x) = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_E^D(x) = 0$$

$$N_E^D(x) + 36,667 = 0; N_E^D(x) = -36,667 \text{ kN}$$

Diagramas de esfuerzos:

Esfuerzos cortantes:

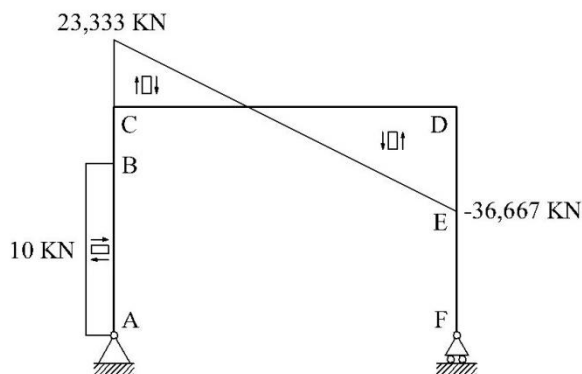


Fig. E.3.2.2.h

Esfuerzos axiales:

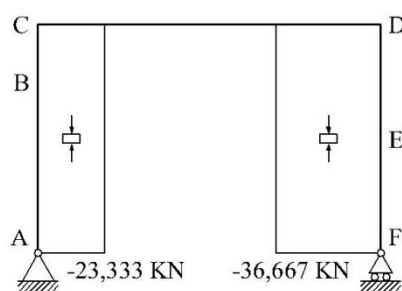


Fig. E.3.2.2.i

Momentos flectores:

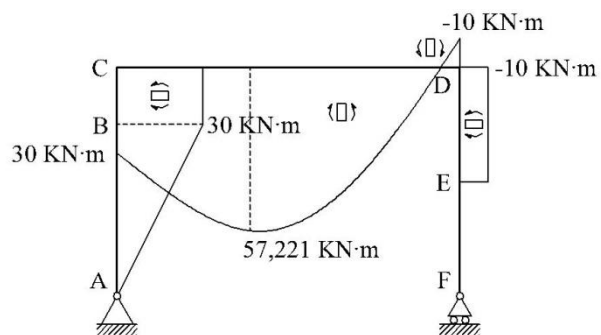


Fig. E.3.2.2.j

3.3 VIGAS GERBER

Ejercicio 3.3.1

Determinar la expresión analítica y dibujar las leyes de esfuerzos (momentos flectores y cortantes) en la viga indicada en la figura (Convocatoria Septiembre de 2014).

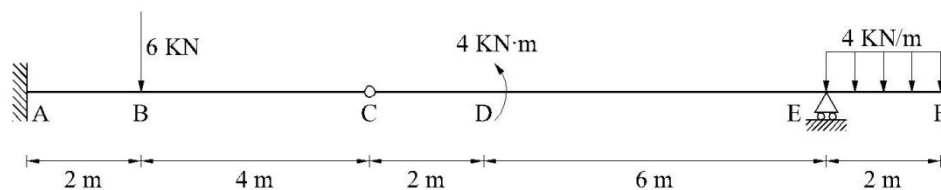


Fig. E.3.3.1.a

Solución:

Reacciones en los apoyos:

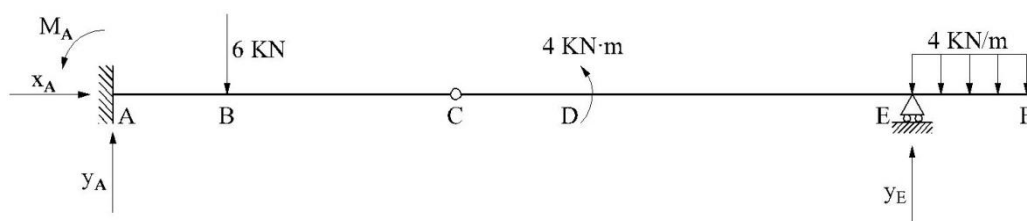


Fig. E.3.3.1.b

$$\Sigma F_x = 0; \quad x_A = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad y_A + y_E - 6 - 4 \cdot 2 = 0; \quad y_A + y_E = 14$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad M_A - 6 \cdot 2 + 4 + y_E \cdot 14 - 4 \cdot 2 \cdot 15 = 0; \quad 14 \cdot y_E + M_A = 128$$

Condición en la rótula C:

$$M_f(C) = 0; \quad M_f(C) + M_A - 6 \cdot y_A + 6 \cdot 4 = 0$$

$$M_f(C) = -M_A + 6 \cdot y_A - 24 = 0; \quad 6 \cdot y_A - M_A = 24$$

Se resuelve el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} y_A + y_E = 14 \\ 14 \cdot y_E + M_A = 128 \\ 6 \cdot y_A - M_A = 24 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y_A = 5,5 \text{ kN} \\ y_E = 8,5 \text{ kN} \\ M_A = 9 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array}$$

Leyes de esfuerzos:

TRAMO AB:

$$0 < x < 2 \text{ m}$$

$$M(x)_A^B = 5,5 \cdot x - 9; \quad \left. \begin{array}{l} M(0)_A^B = -9 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(2)_A^B = 2 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array} \right\}$$

$$V(x)_A^B = \frac{dM(x)_A^B}{dx} = 5,5 \text{ kN}$$

TRAMO BC:

$$0 < x < 4 \text{ m}$$

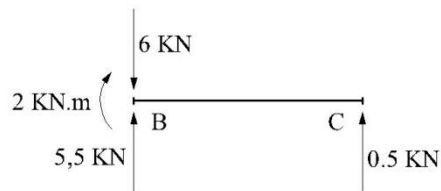


Fig. E.3.3.1.c

$$M(x)_B^C - 2 - 5,5 \cdot x + 6 \cdot x = 0$$

$$M(x)_B^C = 2 - 0,5 \cdot x; \quad \left. \begin{array}{l} M(0)_B^C = 2 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(4)_B^C = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array} \right\}$$

$$V(x)_B^C = \frac{dM(x)_B^C}{dx} = -0,5 \text{ kN}$$

TRAMO CD:

$$0 < x < 2 \text{ m}$$

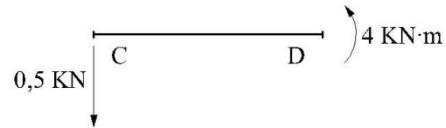


Fig. E.3.3.1.d

$$M(x)_C^D + 0,5 \cdot x = 0$$

$$M(x)_C^D = -0,5 \cdot x ; \quad \left\{ \begin{array}{l} M(0)_C^D = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(2)_C^D = -1 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_C^D = \frac{dM(x)_C^D}{dx} = -0,5 \text{ kN}$$

TRAMO DE:

$$0 < x < 6 \text{ m}$$

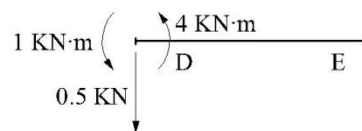


Fig. E.3.3.1.e

$$M(x)_D^E + 4 + 1 + 0,5 \cdot x = 0$$

$$M(x)_D^E = -0,5 \cdot x - 5 \quad \left\{ \begin{array}{l} M(0)_D^E = -5 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(6)_D^E = -8 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_D^E = \frac{dM(x)_D^E}{dx} = -0,5 \text{ kN}$$

TRAMO EF:

$$0 < x < 2 \text{ m}$$

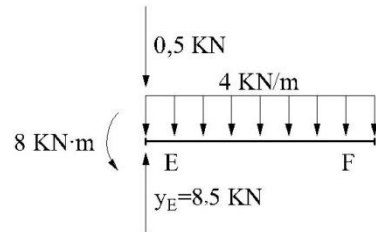


Fig. E.3.3.1.f

$$M(x)_E^F + 8 + 0,5 \cdot x - 8,5 \cdot x + 4 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$M(x)_E^F = -8 + 8 \cdot x - 2 \cdot x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_E^F = -8 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(2)_E^F = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_E^F = \frac{dM(x)_E^F}{dx} = 8 - 4 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} V(0)_E^F = 8 \text{ kN} \\ V(2)_E^F = 0 \text{ kN} \end{array} \right.$$

Diagramas de esfuerzos:

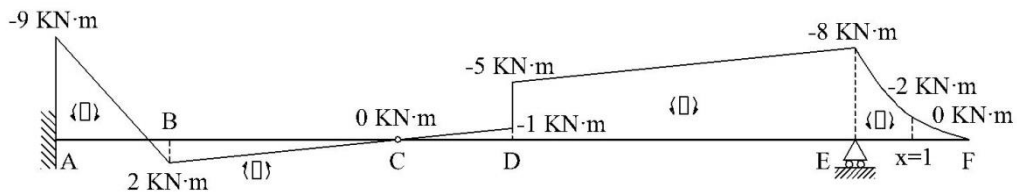


Fig. E.3.3.1.g

Ejercicio 3.3.2

Dibujar leyes de esfuerzos y deformada, señalando los puntos de inflexión, en la viga continua de rigidez constante indicada en la figura, en la que se han dispuesto dos rótulas G_1 y G_2 (Convocatoria Febrero de 2015).

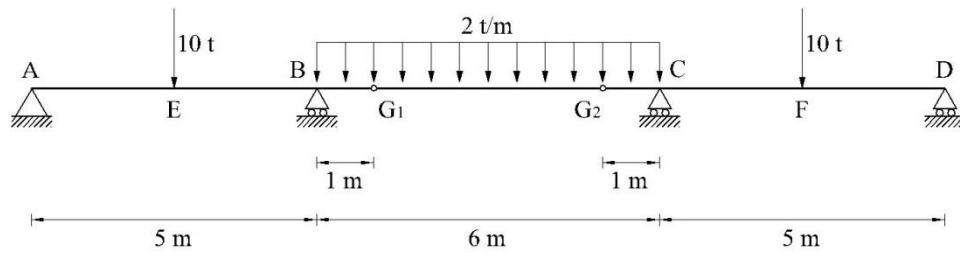


Fig. E.3.3.2.a

Solución:

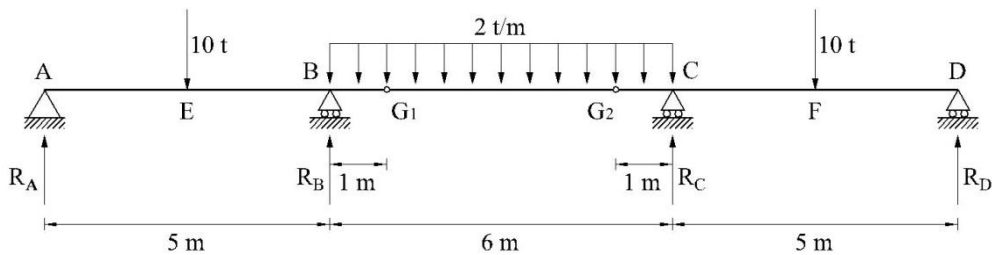


Fig. E.3.3.2.b

Ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_v = 0; \quad R_A + R_B + R_C + R_D = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 32; \quad R_A + R_B + R_C + R_D = 32$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad R_B \cdot 5 + R_C \cdot 11 + R_D \cdot 16 - 10 \cdot 2,5 - 10 \cdot 13,5 - 2 \cdot 6 \cdot (5 + 3) = 0;$$

$$5 \cdot R_B + 11 \cdot R_C + 16 \cdot R_D = 256$$

Condición en las rótulas G_1 y G_2 :

$$M_F(G_1) = 0; \quad M_F(G_1) - 6 \cdot R_A - 1 \cdot R_B + 10 \cdot 3,5 + 2 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0;$$

$$M_F(G_1) = 6R_A + R_B - 36 = 0;$$

$$6 \cdot R_A + R_B = 36$$

$$M_F(G_2) = 0; \quad M_F(G_2) - 10 \cdot R_A - 5 \cdot R_B + 10 \cdot 7,5 + 2 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0;$$

$$M_F(G_2) = 10 \cdot R_A + 5 \cdot R_B - 100 = 0;$$

$$10 \cdot R_A + 5 \cdot R_B = 100$$

Se resuelve el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas siguiente:

$$R_A + R_B + R_C + R_D = 32$$

$$5 \cdot R_B + 11 \cdot R_C + 16 \cdot R_D = 256$$

$$6 \cdot R_A + R_B = 36$$

$$10 \cdot R_A + 5 \cdot R_B = 100$$

$$R_A = 4 \text{ t} \quad R_B = 12 \text{ t} \quad R_C = 12 \text{ t} \quad R_D = 4 \text{ t}$$

Leyes de esfuerzos (expresión analítica):

TRAMO AE:

$$0 < x < 2,5 \text{ m};$$

$$M(x)_A^E - 4 \cdot x = 0; \quad M(x)_A^E = 4 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_A^E = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2,5)_A^E = 10 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_A^E = \frac{dM(x)_A^E}{dx} = 4 \text{ t}$$

TRAMO EB:

$$2,5 \text{ m} < x < 5 \text{ m};$$

$$M(x)_E^B - 4 \cdot x + 10 \cdot (x - 2,5) = 0$$

$$M(x)_E^B = 4 \cdot x - 10 \cdot x + 25; \quad M(x)_E^B = -6 \cdot x + 25 \quad \left| \begin{array}{l} M(2,5)_E^B = 10 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(5)_E^B = -5 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_E^B = \frac{dM(x)_E^B}{dx} = -6 \text{ t}$$

TRAMO BG₁:

$$5 \text{ m} < x < 6 \text{ m};$$

$$M(x)_B^{G1} - 4 \cdot x + 10 \cdot (x - 2,5) - 12 \cdot (x - 5) + 2 \cdot (x - 5) \cdot \frac{(x - 5)}{2} = 0;$$

$$M(x)_B^{G1} = 4 \cdot x - 10 \cdot x + 25 + 12 \cdot x - 60 - (x - 5)^2;$$

$$M(x)_B^{G1} = 16 \cdot x - 60 - x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(5)_B^{G1} = -5 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(6)_B^{G1} = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_B^{G1} = \frac{dM(x)_B^{G1}}{dx} = 16 - 2 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} V(5)_B^{G1} = 6 \text{ t} \\ V(6)_B^{G1} = 4 \text{ t} \end{array} \right.$$

TRAMO G₁G₂:

$$6 \text{ m} < x < 10 \text{ m};$$

$$M(x)_{G1}^{G2} = 16 \cdot x - 60 - x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(6)_{G1}^{G2} = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(10)_{G1}^{G2} = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_{G1}^{G2} = \frac{dM(x)_{G1}^{G2}}{dx} = 16 - 2 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} V(6)_{G1}^{G2} = 4 \text{ t} \\ V(10)_{G1}^{G2} = -4 \text{ t} \end{array} \right.$$

$$M_{\text{máx}}(8\text{m}) = 16 \cdot 8 - 60 - 8^2 = 4 \text{ t}\cdot\text{m}$$

TRAMO G₂C:

$$10 \text{ m} < x < 11 \text{ m};$$

$$M(x)_{G2}^C = 16 \cdot x - 60 - x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(10)_{G2}^C = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(11)_{G2}^C = -5 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_{G2}^C = \frac{dM(x)_{G2}^C}{dx} = 16 - 2 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} V(10)_{G2}^C = -4 \text{ t} \\ V(11)_{G2}^C = -6 \text{ t} \end{array} \right.$$

TRAMO CF:

$$11 \text{ m} < x < 13,5 \text{ m};$$

$$M(x)_C^F - 4 \cdot x + 10 \cdot (x - 2,5) - 12 \cdot (x - 5) + 2 \cdot 6 \cdot (x - 8) - 12 \cdot (x - 11) = 0;$$

$$M(x)_C^F = 6 \cdot x - 71 \quad \left| \begin{array}{l} M(11)_C^F = -5 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(13,5)_C^F = 10 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_C^F = \frac{dM(x)_C^F}{dx} = 6 \text{ t}$$

TRAMO FD:

$$13,5 \text{ m} < x < 16 \text{ m}$$

$$M(x)_F^D - 4 \cdot x + 10 \cdot (x - 2,5) - 12 \cdot (x - 5) + 2 \cdot 6 \cdot (x - 8) - 12 \cdot (x - 11) + 10 \cdot (x - 13,5) = 0$$

$$M(x)_F^D = -4 \cdot x + 64 \quad \left| \begin{array}{l} M(13,5)_F^D = 10 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(16)_F^D = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_F^D = \frac{dM(x)_F^D}{dx} = -4 \text{ t}$$

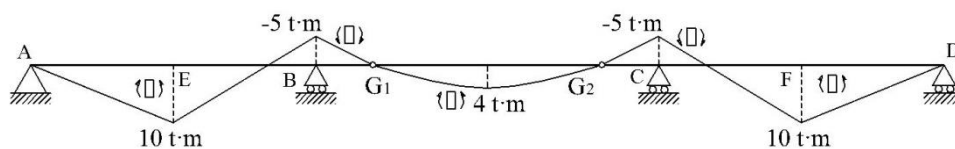
Diagramas de esfuerzos:Momentos flectores:

Fig. E.3.3.2.c

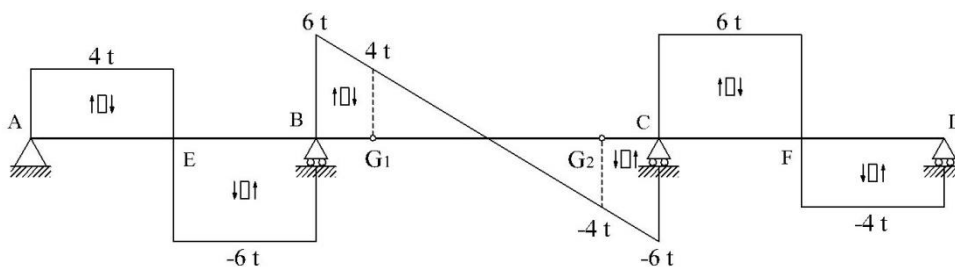
Esfuerzos cortantes:

Fig. E.3.3.2.d

Deformada:



Fig. E.3.3.2.e

3.4 ARCOS

Ejercicio 3.4.1

En el arco isostático de radio R representado en la figura, sometido a su propio peso p , determinar la expresión analítica de las leyes de esfuerzos, en función del ángulo φ .

Representar las leyes de esfuerzos (Convocatoria Febrero de 2015).

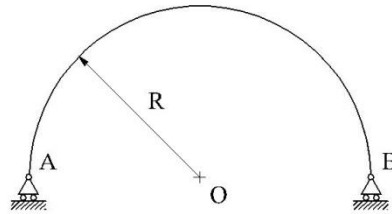


Fig. E.3.4.1.a

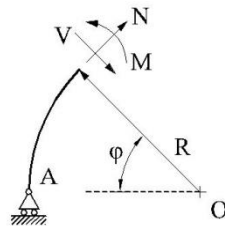


Fig. E.3.4.1.b

Solución:

Reacciones en los apoyos:

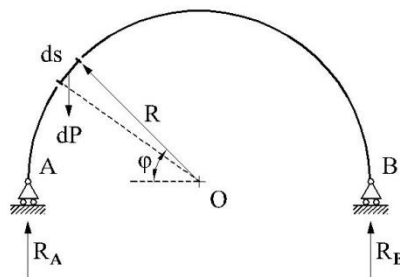


Fig. E.3.4.1.c

$$\begin{aligned} dP &= p \cdot ds \\ ds &= R \cdot d\varphi \end{aligned} \quad \left\| \quad \begin{aligned} dP &= p \cdot R \cdot d\varphi \end{aligned} \right.$$

$$P = \int dP = \int_0^\pi p \cdot R \cdot d\varphi = p \cdot R \cdot \pi$$

$$[1] \quad \sum F_V = 0; \quad R_A + R_B - dP = 0; \quad R_A + R_B - p \cdot R \cdot \pi = 0$$

$$[2] \quad \sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 2 \cdot R - \int_0^\pi dP \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) = 0$$

$$(a) \quad \int_0^\pi p \cdot R \cdot d\varphi \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) = p \cdot R^2 \cdot \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) d\varphi = p \cdot R^2 \cdot (\varphi - \text{sen}\varphi) \Big|_0^\pi =$$

$$= p \cdot R^2 \cdot (\pi - \text{sen}\pi - (0 - \text{sen}0)) = p \cdot R^2 \cdot \pi$$

$$[2] \quad R_B \cdot 2 \cdot R - p \cdot R^2 \cdot \pi = 0$$

$$R_B = \frac{1}{2} \cdot p \cdot R \cdot \pi$$

$$R_A = \frac{1}{2} \cdot p \cdot R \cdot \pi$$

Leyes de esfuerzos (expresiones analíticas):

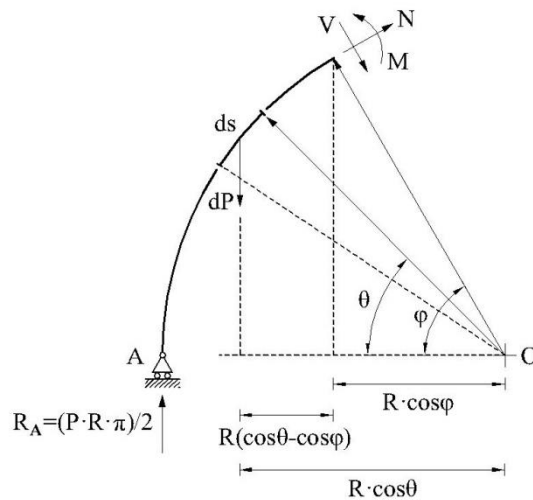


Fig. E.3.4.1.d

$$0 < \varphi < \pi$$

$$M(\varphi) - \frac{1}{2} \cdot p \cdot R \cdot \pi \cdot (R - R \cdot \cos \varphi) + \int_0^\varphi R \cdot (\cos \theta - \cos \varphi) dP = 0;$$

$$[dP = p \cdot R \cdot d\theta]$$

$$M(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot p \cdot R^2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos \varphi) - \int_0^\varphi p \cdot R^2 \cdot (\cos \theta - \cos \varphi) d\theta$$

$$M(\varphi) = \frac{p \cdot R^2}{2} \cdot (\pi + \cos \varphi \cdot (2 \cdot \varphi - \pi) \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \operatorname{sen} \varphi);$$

$$\left| \begin{array}{l} M(0) = 0 \\ M(\pi/4) = 0,617 \cdot \frac{p \cdot R^2}{2} = 0,308 \cdot p \cdot R^2 \\ M(\pi/2) = (\pi - 2) \cdot \frac{p \cdot R^2}{2} = 0,571 \cdot p \cdot R^2 \end{array} \right.$$

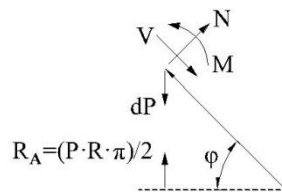


Fig. E.3.4.1.e

$$-V - \int_0^\varphi dP \cdot \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{2} \cdot p \cdot R \cdot \pi \cdot \operatorname{sen} \varphi = 0$$

$$V(\varphi) = \frac{p \cdot R}{2} \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot (2 \cdot \varphi - \pi); \quad \left| \begin{array}{l} V(0) = 0 \\ V(\pi/4) = -1,11 \cdot \frac{p \cdot R}{2} \\ V(\pi/2) = 0 \end{array} \right.$$

$$N - \int_0^\varphi dP \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2} \cdot p \cdot R \cdot \pi \cdot \cos \varphi = 0$$

$$N(\varphi) = \int_0^\varphi p \cdot R \cdot d\theta \cdot \cos \varphi - \frac{1}{2} \cdot p \cdot R \cdot \pi \cdot \cos \varphi$$

$$N(\varphi) = \frac{p \cdot R}{2} \cdot \cos \varphi \cdot (2 \cdot \varphi - \pi); \quad \left| \begin{array}{l} N(0) = -\pi \cdot \frac{p \cdot R}{2} = -1,571 \cdot p \cdot R \\ N(\pi/4) = -1,11 \cdot \frac{p \cdot R}{2} = -0,555 \cdot p \cdot R \\ N(\pi/2) = 0 \end{array} \right.$$

Diagramas de esfuerzos:

Momentos flectores:

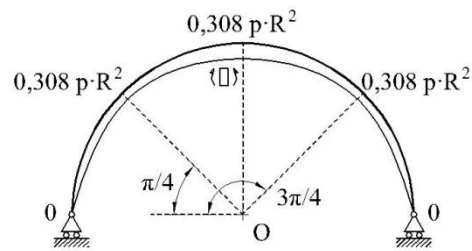


Fig. E.3.4.1.f

Esfuerzos cortantes:

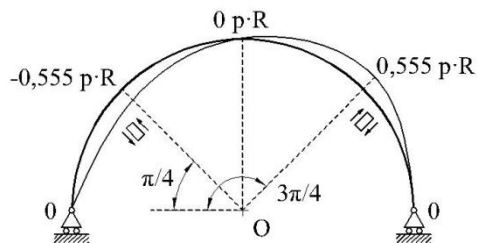


Fig. E.3.4.1.g

Esfuerzos axiales:

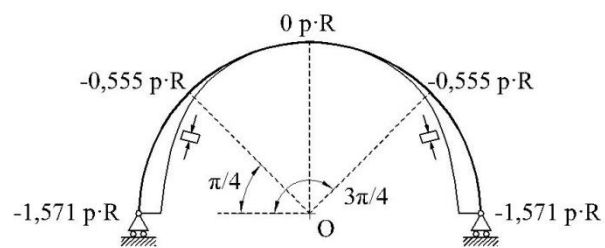


Fig. E.3.4.1.h

TEMA 4: FLEXIÓN

4.1 DEFORMACIONES LONGITUDINALES EN VIGAS

Ejercicio 4.1.1

Una viga en voladizo AB está cargada en su extremo libre por un momento M_0 . La viga tiene una longitud $L=2$ m y la deformación longitudinal unitaria en la superficie superior es de $0,001$. La distancia de la superficie superior de la viga a la superficie neutra es de 60 mm. Calcular el radio de curvatura ρ , la curvatura κ y la deflexión vertical v , en el extremo libre de la viga.

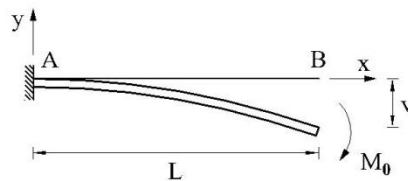


Fig. E.4.1.1.a

Solución:

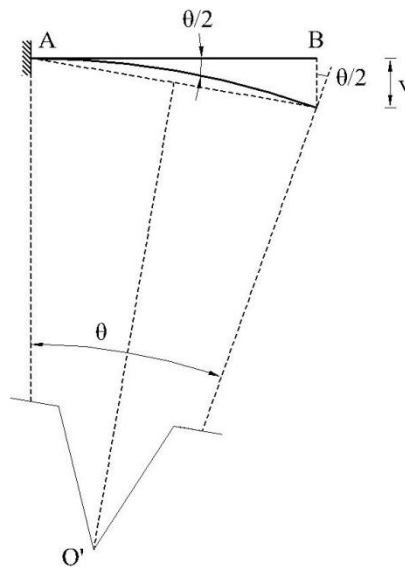


Fig. E.4.1.1.b

La viga está sometida a un estado de flexión pura.

Debido a la acción de los momentos flectores, la viga se flexiona en el plano xy , y las líneas longitudinales de la viga se alargan o acortan, produciéndose deformaciones longitudinales, proporcionales a la distancia y a la superficie neutra e inversamente proporcionales al radio de curvatura ρ :

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}$$

Conocidos ε_x e y , despejamos ρ :

$$\rho = \frac{y}{\varepsilon_x} = \frac{60}{0,001} = 60000 \text{ mm} = 60 \text{ m}$$

De donde la curvatura es:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{60} = 1,667 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1} = 0,01667 \text{ m}^{-1}$$

El ángulo formado por la curva de deflexión será:

$$\theta = \frac{L}{\rho} = \frac{2 \text{ m}}{60 \text{ m}} = 0,0333 \text{ rad}$$

Finalmente, la deflexión de la viga en su extremo libre B será:

$$v = L \cdot \frac{\theta}{2} = 2 \cdot \frac{0,0333}{2} = 0,0333 \text{ m} = 33,33 \text{ mm}$$

Ejercicio 4.1.2

Una viga de sección transversal rectangular, cargada como se ve en la figura.

La distancia entre soportes es $L=3\text{ m}$, y la altura de la viga es $h=140\text{ mm}$. La deflexión v en el punto medio es $3,5\text{ mm}$.

Determinar la deformación lineal máxima en las partes superior e inferior de viga.

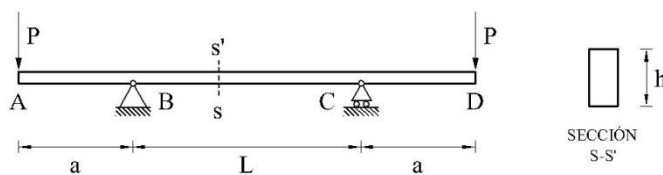


Fig. E.4.1.2.a

Solución:

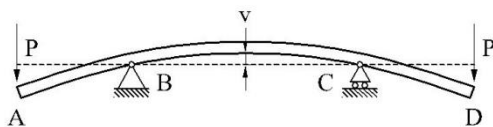


Fig. E.4.1.2.b

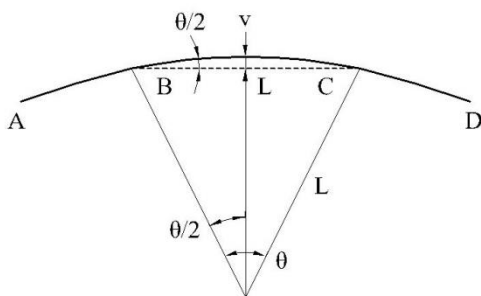


Fig. E.4.1.2.c

De la geometría del dibujo, se deduce:

$$v = \frac{\theta}{2} \cdot \frac{L}{2}$$

De donde despejamos el ángulo formado por la curva de deflexión:

$$\theta = \frac{4 \cdot v}{L} = \frac{4 \cdot 3,5\text{ mm}}{3 \cdot 10^3\text{ mm}} = 4,667 \cdot 10^{-3}\text{ rad}$$

El ángulo θ también está relacionado con el radio de curvatura ρ a partir de la siguiente expresión:

$$\theta = \frac{L}{\rho}$$

De aquí podemos despejar el radio de curvatura.

$$\rho = \frac{L}{\theta} = \frac{3 \text{ m}}{4,667 \cdot 10^{-3} \text{ rad}} = 642,857 \text{ m}$$

La deformación longitudinal se obtiene a partir de:

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}$$

En la superficie superior e inferior el valor de y es máximo:

$$y_{\text{máx}} = \frac{140 \text{ mm}}{2} = 70 \text{ mm}$$

Por tanto, la deformación longitudinal de la viga en las superficies más alejadas de la superficie neutra será:

$$\varepsilon_x = \frac{70 \text{ mm}}{642,857 \cdot 10^3 \text{ mm}} = 1,089 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{x_{\text{inf}}} = -1,089 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{x_{\text{sup}}} = 1,089 \cdot 10^{-4}$$

El signo negativo nos indica que en la superficie inferior de la viga, las fibras longitudinales se acortan.

4.2 TENSIONES NORMALES

Ejercicio 4.2.1

La viga simplemente apoyada mostrada en la figura tiene una luz de 4m, y soporta una carga uniformemente distribuida de valor $q=15\text{kN/m}$.

Determinar la tensión de flexión máxima debida a la carga q , si la viga tiene una sección transversal rectangular con ancho $b=240\text{mm}$ y altura $h=280\text{mm}$.

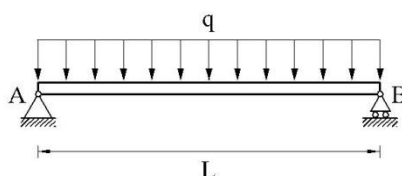


Fig. E.4.2.1.a

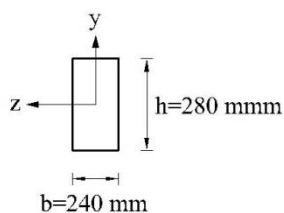


Fig. E.4.2.1.b

Solución:

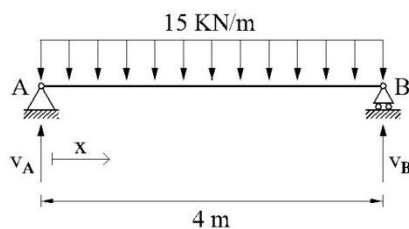


Fig. E.4.2.1.c

Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_V = 0; \quad V_A + V_B - 15 \cdot 4 = 0; \quad V_A = 60 - V_B = 60 - 30 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0; \quad V_B \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad V_B = 30 \text{ kN}$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < 4 \text{ m}$$

$$M(x) - 30 \cdot x + 15 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0;$$

$$M(x) = 30 \cdot x - 7,5 \cdot x^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} M(0) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M(2) = 30 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M(4) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{array} \right.$$

Momento máximo:

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0$$

$$30 - 15 \cdot x = 0 \rightarrow x = 2 \text{ m}$$

El momento máximo se produce en el centro del vano:

$$M_{\text{máx}} = M(2) = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Por tanto la tensión normal máxima se producirá en la sección central.

Tensiones máximas de tracción y de compresión (fórmula de la flexión):

La sección transversal de la viga es doblemente simétrica, es decir, simétrica respecto al eje z y al eje y.

En este caso las tensiones máximas de tracción y de compresión que actúan en los puntos extremos de la sección son:

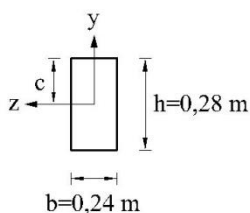


Fig. E.4.2.1.d

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = -\frac{M \cdot c}{I} = -\frac{30 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot 0,14 \text{ m}}{0,439 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4} = -9566,327 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Donde: } I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 0,24 \text{ m} \cdot 0,28^3 \text{ m} = 0,439 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$c = \frac{h}{2} = \frac{0,28 \text{ m}}{2} = 0,14 \text{ m}$$

Distribución de tensiones en la sección central de la viga:

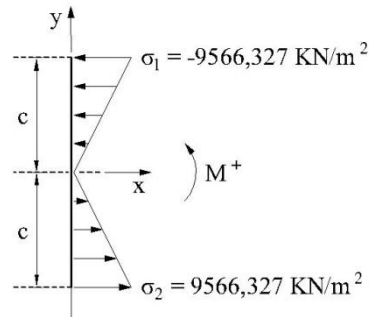


Fig. E.4.2.1.e

Ejercicio 4.2.2

Para la ejecución de un puente de carretera, las vigas principales se han proyectado de pilar a pilar. El tramo en voladizo de cada una de las vigas tiene una longitud de 45m. La sección transversal es en I con las dimensiones indicadas en la siguiente figura.

Cada viga soporta una carga lineal de 11kN/m, que incluye su peso propio. Calcular la tensión máxima de flexión en una de las vigas.

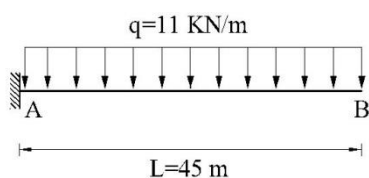


Fig. E.4.2.2.a

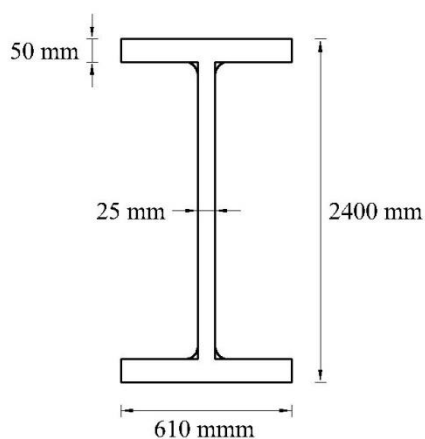


Fig. E.4.2.2.b

Solución:

Cálculo de las reacciones en el empotramiento:

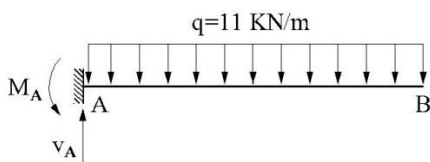


Fig. E.4.2.2.c

$$\sum F_V = 0; \quad V_A - 11 \cdot 45 = 0; \quad V_A = 495 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_A - 11 \cdot 45 \cdot \frac{45}{2} = 0; \quad M_A = 11137,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < 45 \text{ m}$$

$$M(x) + 11137,5 - 495 \cdot x + 11 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0;$$

$$M(x) = -11137,5 + 495 \cdot x - 5,5 \cdot x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = 11137,5 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M(22,5) = -2784,375 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M(45) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{array} \right.$$

Tensiones normales máximas (fórmula de la flexión):

La tensión máxima de flexión se produce en la sección correspondiente al empotramiento.

Por ser la sección doblemente simétrica, las tensiones máximas de tracción y de compresión tienen el mismo valor absoluto.

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = -\frac{M \cdot c}{I}$$

Donde,

$$c = \frac{2,4 \text{ m}}{2} = 1,2 \text{ m}$$

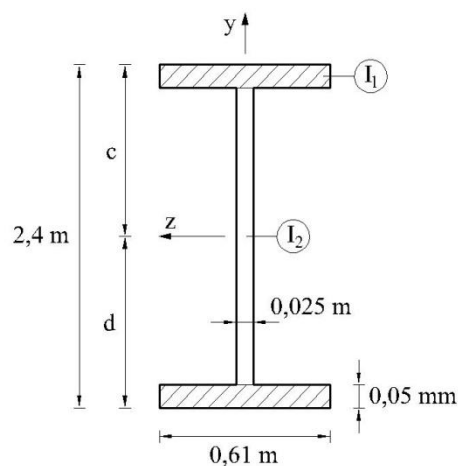


Fig. E.4.2.2.d

$$I_{Iz} = \frac{1}{12} \cdot 0,61 \cdot 0,05^3 + 0,61 \cdot 0,05 \cdot 1,175^2 = 4,212 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$I_{2z} = \frac{1}{12} \cdot 0,025 \cdot (2,4 - 2 \cdot 0,05)^3 = 2,535 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$I_z = 2 \cdot I_{1z} + I_{2z} = 2 \cdot 4,212 \cdot 10^{-2} + 2,535 \cdot 10^{-2} = 0,1096 \text{ m}^4$$

$$\sigma_1 = -\frac{M \cdot c}{I} = \frac{-11137,5 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot 1,2 \text{ m}}{0,1096 \text{ m}^4} = 121943,431 \text{ kN/m}^2 = 121,943 \text{ MPa (TRACCIÓN)}$$

$$\sigma_2 = 121,943 \text{ MPa (COMPRESIÓN)}$$

Distribución de tensiones en la sección del empotramiento de la viga:

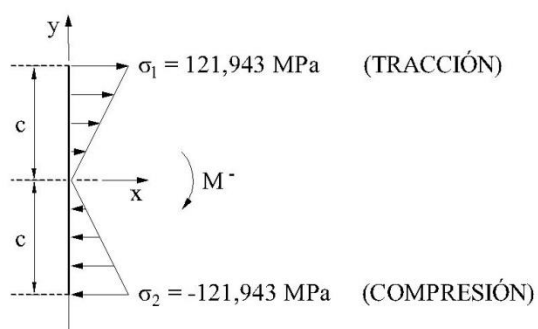


Fig. E.4.2.2.e

4.3 MÓDULOS RESISTENTES DE LA SECCIÓN

Ejercicio 4.3.1

La siguiente viga simplemente apoyada tiene una longitud de 4,5 m.

Soporta una carga uniforme $q=15 \text{ kN/m}$, y una carga puntual en el centro del vano de valor $P=36 \text{ kN}$. La tensión admisible del acero empleado es $\sigma_{adm}=261904,762 \text{ kN/m}^2$.

Determinar el módulo resistente de la sección necesaria W_x , y elija un perfil IPE adecuado.

Recalcula el módulo resistente, teniendo en cuenta el peso propio de la viga para el perfil IPE seleccionado.

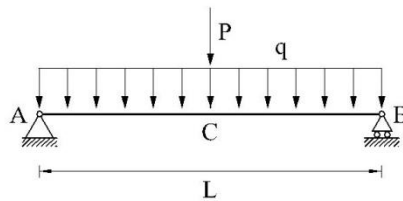


Fig. E.4.3.1.a

Datos: $L = 4,5 \text{ m}$

$q = 15 \text{ kN/m}$

$P = 36 \text{ kN}$

Acero S275JR ($\sigma_e = 275 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_M = 1,05$)

Solución:

Momento máximo:

Para obtener el momento máximo aplicamos el Principio de superposición, considerando los siguientes estados:

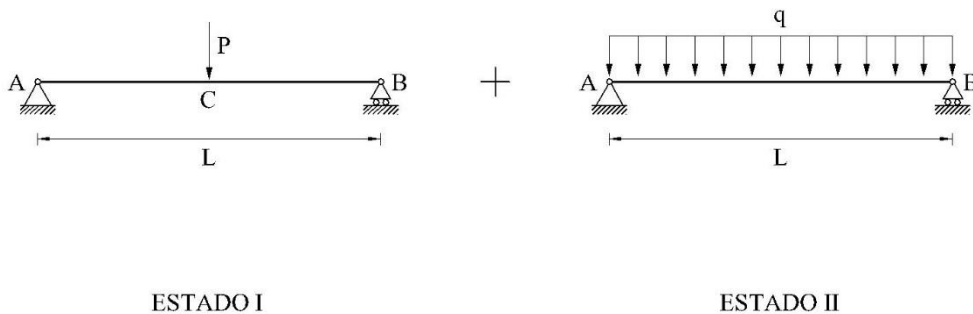


Fig. E.4.3.1.b

En el estado I, el momento máximo se produce en el centro del vano y viene dado por:

$$M_{\text{máxI}} = M_{\text{cl}} = \frac{P \cdot L}{4} = \frac{36 \text{ kN} \cdot 4,5 \text{ m}}{4}$$

$$M_{\text{cl}} = 40,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

En el estado II, el máximo momento también se produce en la sección central de la viga y viene dado por la siguiente expresión:

$$M_{\text{máxII}} = M_{\text{cII}} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{15 \text{ kN} / \text{m} \cdot 4,5^2 \text{ m}^2}{8} = 37,969 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

En el estado real, el momento máximo se produce en el centro de la viga y será la suma de los dos anteriores:

$$M_{\text{máx}} = M_{\text{máxI}} + M_{\text{máxII}} = 78,469 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Módulo resistente de la sección necesaria:

$$W_x = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{78,469 \text{ kN}\cdot\text{m}}{261904,762 \text{ kN} / \text{m}^2} = 2,996 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$W_x = 299,609 \text{ cm}^3$$

Perfil IPE adecuado:

Se elige un perfil IPE 240 cuyo módulo resistente es:

$$W_x = 324 \text{ cm}^3 > W_{\text{xnecesario}} = 299,609 \text{ cm}^3$$

Recálculo teniendo en cuenta peso propio de la viga:

Para el perfil IPE 240, el peso propio es:

$$pp = 30,7 \text{ kp} / \text{m} = 307 \text{ N} / \text{m} = 0,307 \text{ kN} / \text{m}$$

Por tanto, la carga total distribuida a considerar es:

$$q + pp = 15 + 0,307 = 15,307 \text{ kN} / \text{m}$$

En el estado II, el momento máximo en el centro del vano será:

$$M_{\text{máxII}} = M_{\text{cII}} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{15,307 \text{ kN} / \text{m} \cdot 4,5^2 \text{ m}}{8} = 38,746 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Y el momento máximo del estado real:

$$M_{\text{máx}} = M_{\text{máxI}} + M_{\text{máxII}} = 79,246 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

El módulo resistente de la sección necesaria será:

$$W_x = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{79,246 \text{ kN}\cdot\text{m}}{261904,762 \text{ kN}/\text{m}^2} = 3,026 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 302,567 \text{ cm}^3$$

Por tanto, sigue siendo válido el perfil IPE 240, pues tiene $W_x=324 \text{ cm}^3$.

Ejercicio 4.3.2

Una viga en voladizo soporta una carga uniforme $q=2 \text{ t/m}$ y una carga puntual en su extremo libre de valor $P=1,5 \text{ t}$.

Determinar el módulo resistente W_x de la sección requerida, para $\sigma_{adm}=22380,952 \text{ t/m}^2$.

Para el perfil IPE seleccionado, recalcular el módulo resistente W_x necesario teniendo en cuenta el peso propio de la viga. Si es preciso, elegir un perfil distinto.

Acero S235JR, $\gamma_M = 1,05$.

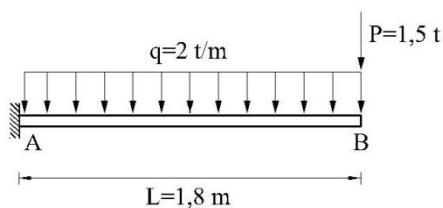


Fig. E.4.3.2.a

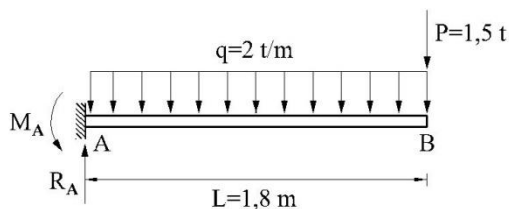
Solución:Cálculo de las reacciones:

Fig. E.4.3.2.b

$$\sum F_V = 0; \quad R_A - 2 \cdot 1,8 - 1,5 = 0; \quad R_A = 5,1 \text{ t}$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_A - 1 \cdot 18 \cdot 0,9 - 1,5 \cdot 1,8 = 0; \quad M_A = 5,94 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < 1,8 \text{ m}$$

$$M(x) + 5,94 - 5,1 \cdot x + 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0;$$

$$M(x) = -5,94 + 5,1 \cdot x - x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = -5,94 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(0,9) = -2,16 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(1,8) = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

Módulo resistente necesario:

$$\sigma_{adm} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{W_x}; \quad W_x = \frac{M_{m\acute{a}x}}{\sigma_{adm}} = \frac{5,94 \text{ t}\cdot\text{m}}{22380,952 \text{ t}/\text{m}^2} = 2,654 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Perfil IPE adecuado:

Se elige un perfil IPE 240 cuyo módulo resistente es:

$$W_x = 324 \text{ cm}^3 > W_{x\text{necesario}} = 265,404 \text{ cm}^3$$

Recálculo teniendo en cuenta peso propio de la viga:

Para el perfil IPE 240, el peso propio es:

$$pp = 30,7 \text{ kp/m} = 0,0307 \text{ t/m}$$

Por tanto, la carga total distribuida a considerar es:

$$q + pp = 2 + 0,0307 = 2,0307 \text{ t/m}$$

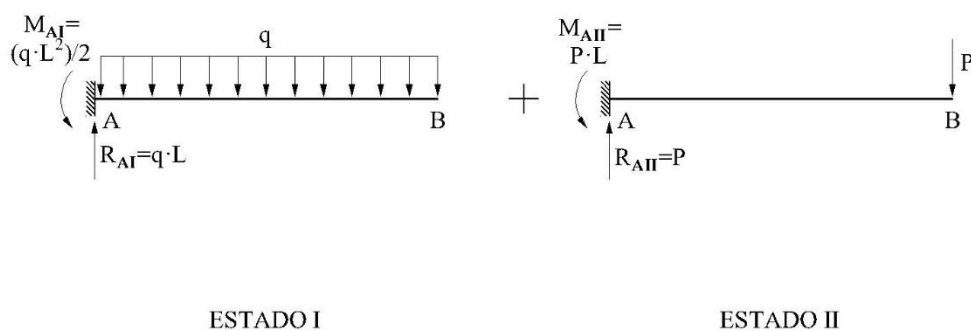


Fig. E.4.3.2.c

En el estado I:

$$M_{AI} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{2,0307 \text{ t/m} \cdot 1,8^2 \text{ m}}{8} = 3,290 \text{ t}\cdot\text{m}$$

En el estado II:

$$M_{AII} = P \cdot L = 1,5 \text{ t} \cdot 1,8 \text{ m} = 2,7 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Y el momento en A del estado real será:

$$M_A = M_{AI} + M_{AII} = 5,99 \text{ t}\cdot\text{m}$$

El módulo resistente de la sección necesaria será:

$$W_x = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{5,99 \text{ t}\cdot\text{m}}{22380,952 \text{ t} / \text{m}^2} = 0,26764 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 267,64 \text{ cm}^3$$

Por tanto, sigue siendo válido el perfil IPE 240, pues tiene $W_x=324 \text{ cm}^3$.

Ejercicio 4.3.3

La viga AB simplemente apoyada está cargada como se muestra en la figura. Sabiendo que $\sigma_{adm}=223809,5 \text{ kN/m}^2$, $L=6 \text{ m}$, $P=10 \text{ kN}$ y $q=30 \text{ kN/m}$, calcule el módulo resistente W_x de la sección requerida.

Seleccione un perfil IPN apropiado y recalculé el módulo resistente W_x teniendo en cuenta el peso propio de la viga. Si es necesario elija un perfil diferente.

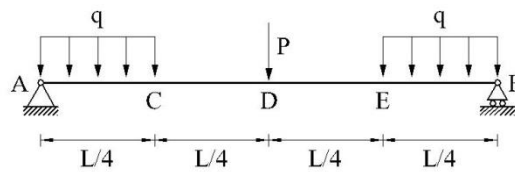


Fig. E.4.3.3.a

Solución:

Principio de superposición:

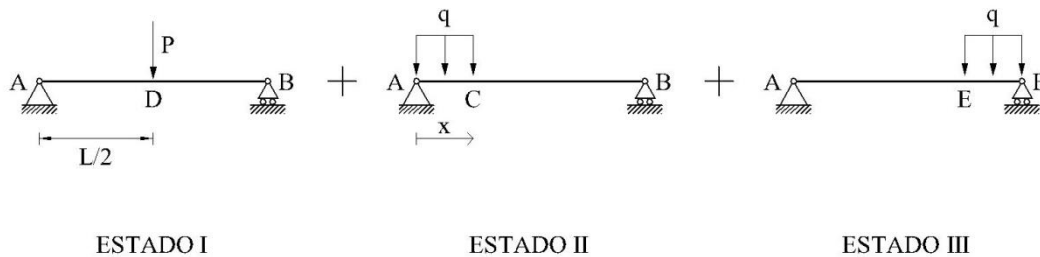


Fig. E.4.3.3.b

Estado I:

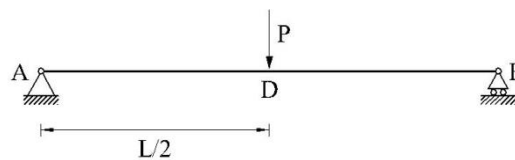


Fig. E.4.3.3.c

$$\text{Para } x = \frac{L}{2} = 3 \text{ m}; \quad M_{\text{máx}} = \frac{P \cdot L}{4} = \frac{10 \cdot 6}{4} = 15 \text{ kN}$$

$$M(x)_A^D = \frac{P}{2} \cdot x = \frac{10}{2} \cdot x = 5 \cdot x ; \quad \begin{cases} M(0)_A^D = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(1,313)_A^D = 6,565 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(3)_A^D = 15 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

Estado II:

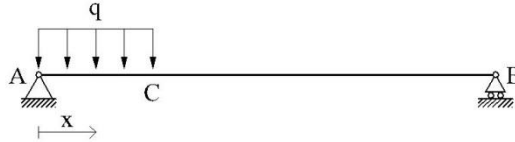


Fig. E.4.3.3.d

$$\text{Para } x = \frac{L}{4} \cdot \left(1 - \frac{L/4}{2 \cdot L}\right) = \frac{7 \cdot L}{32} = \frac{7 \cdot 6}{32} = 1,313 \text{ m}$$

Para $x=3$

$$M(x)_C^B = \frac{q \cdot L}{32} (L - x) = \frac{30 \cdot 6}{32} (6 - x) = 5,625 \cdot (6 - x) ; \quad \begin{cases} M(1,5)_C^B = 25,313 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(3)_C^B = 16,875 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

Estado III:



Fig. E.4.3.3.e

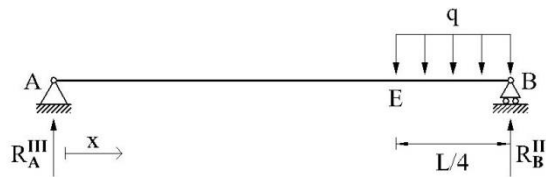


Fig. E.4.3.3.f

$$\sum F_V = 0 ; \quad R_A^{\text{III}} + R_B^{\text{III}} - 30 \cdot \frac{6}{4} = 0 ; \quad R_A^{\text{III}} + R_B^{\text{III}} = 30 \cdot 1,5 = 45 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 ; \quad R_B^{\text{III}} \cdot 6 - 30 \cdot 1,5 \cdot (6 - 0,75) = 0 ; \quad R_B^{\text{III}} = \frac{236,25}{6} = 39,375 \text{ kN}$$

$$R_A^{\text{III}} = 45 - 39,375 = 5,625 \text{ kN}$$

Ley de momentos flectores:

TRAMO AE:

$$0 < x < 4,5 \text{ m}$$

$$M(x)_A^E - 5,625 \cdot x = 0; \quad M(x)_A^E = 5,625 \cdot x;$$

$$\left. \begin{array}{l} M(0)_A^E = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(4,5)_A^E = 25,313 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(1,313)_A^E = 7,386 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(3)_A^E = 16,875 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array} \right\}$$

TRAMO EB:

$$4,5 \text{ m} < x < 6 \text{ m}$$

$$M(x)_E^B - 5,625 \cdot x + 30 \cdot (x - 4,5) \cdot \frac{(x - 4,5)}{2} = 0;$$

$$M(x)_E^B = 5,625 \cdot x - 15 \cdot (x - 4,5)^2;$$

$$\left. \begin{array}{l} M(4,5)_E^B = 25,313 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(6)_E^B = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array} \right\}$$

Momento máximo:

$$M_{\text{REAL}}(x = 1,313 \text{ m}) = M_{\text{I}}(1,313) + M_{\text{II}}(1,313) + M_{\text{III}}(1,313) = 6,565 + 25,84 + 7,386 = 39,791 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{\text{REAL}}(x = 3 \text{ m}) = M_{\text{I}}(3) + M_{\text{II}}(3) + M_{\text{III}}(3) = 15 + 16,875 + 16,875 = 48,75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Módulo resistente necesario, W_x :

$$W_x = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{48,75 \text{ kN}\cdot\text{m}}{223809,5 \text{ kN} / \text{m}^2} = 2,178 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 217,819 \text{ cm}^3$$

Perfil IPE adecuado:

Se elige un perfil IPN 220 cuyo módulo resistente es:

$$W_x = 278 \text{ cm}^3 > W_{x\text{necesario}} = 217,819 \text{ cm}^3$$

Recálculo teniendo en cuenta peso propio de la viga:

Para el perfil IPN 220, el peso propio es:

$$pp = 31,1 \text{ kp} / \text{m} = 0,311 \text{ kN} / \text{m}$$

Consideramos otro estado adicional:

ESTADO IV

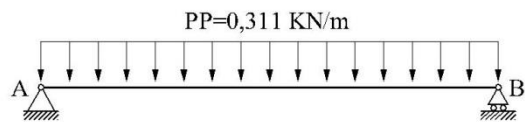


Fig. E.4.3.3.g

$$M_{\text{máxIV}}(x = 3) = \frac{pp \cdot L^2}{8} = \frac{0,311 \cdot 6^2}{8} = 1,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{\text{REAL}}(x = 3 \text{ m}) = M_{\text{I}}(3) + M_{\text{II}}(3) + M_{\text{III}}(3) + M_{\text{IV}}(3) = 15 + 16,875 + 16,875 + 1,4 = 50,15 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$W_x = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{50,15 \text{ kN}\cdot\text{m}}{223809,5 \text{ kN} / \text{m}^2} = 2,241 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 224,075 \text{ cm}^3$$

Por tanto, sigue siendo válido el perfil IPN 220, pues tiene $W_x=278 \text{ cm}^3$.

Ejercicio 4.3.4

Un balcón de madera es soportado por tres vigas idénticas de madera laminada. Cada viga tiene una longitud $L_1=1,9$ m, ancho b y altura $h=(4b)/3$.

El balcón tiene las siguientes dimensiones $L_1 \cdot L_2$, con $L_2=2,4$ m.

La carga de diseño es de 6 kN/m^2 actuando sobre toda la superficie (esta carga incluye todas las cargas excepto el peso propio de las vigas en voladizo).

La tensión admisible a flexión de las vigas de madera es de 30 N/mm^2 .

Se supondrá que la viga intermedia soporta el 50% de la carga y que cada viga exterior soporta el 25% de la carga.

Calcular las dimensiones necesarias para b y h . (PESO ESPECÍFICO: $5,2 \text{ kN/m}^3$)

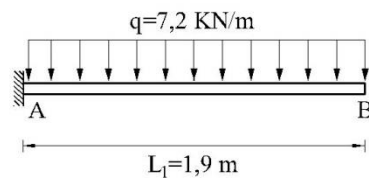
Solución:

Fig. E.4.3.4.a

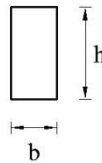


Fig. E.4.3.4.b

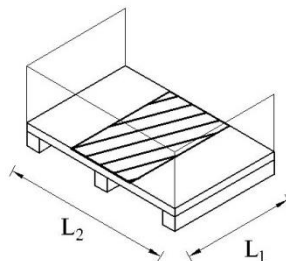


Fig. E.4.3.4.c

Carga sobre viga intermedia:

$$q_{\text{SUP}} = 6 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$q_{\text{LINEAL}} = 2,4 \text{ m} \cdot 0,5 \cdot 1 \text{ m} \cdot 6 \text{ kN} / \text{m}^2 = 7,2 \text{ kN} / \text{m}$$

Cálculo de las reacciones:

$$\sum F_V = 0; \quad R_A - 7,2 \cdot 1,9 = 0; \quad R_A = 13,68 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_A - 7,2 \cdot 1,9 \cdot \frac{1,9}{2} = 0; \quad M_A = 12,996 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < 1,9 \text{ m}$$

$$M(x) + 12,996 - 13,68 \cdot x + 7,2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0;$$

$$M(x) = -12,996 + 13,68 \cdot x - 3,6x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = -12,996 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(1) = -2,916 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M(1,9) = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$M_{\text{máx}} = 12,996 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Módulo resistente de la sección necesario:

$$W_x = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{12,996 \text{ kN}\cdot\text{m}}{30 \cdot 10^3 \text{ kN} / \text{m}^2} = 0,433 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 433,2 \text{ cm}^3$$

Para una sección rectangular,

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (4b/3)^2}{6} = \frac{16 \cdot b^3}{6} = 433,2 \text{ cm}^3 \rightarrow b^3 = 1462,05; \quad b = 11,35 \text{ cm}$$

$$h = \frac{4 \cdot b}{3} = \frac{4 \cdot 11,35}{3} = 15,13 \text{ cm}$$

MEDIDAS COMERCIALES: $b = 120 \text{ mm}$; $h = 160 \text{ mm}$

Comprobación teniendo en cuenta peso propio de la viga:

Debido al peso propio de la viga:

$$q_{\text{pp}} = b \cdot h \cdot 5,2 \text{ kN} / \text{m}^3 = 0,12 \text{ m} \cdot 0,16 \text{ m} \cdot 5,2 \text{ kN} / \text{m}^3 = 0,099 \text{ kN} / \text{m}$$

$$M_{\text{App}} = \frac{q_{\text{pp}} \cdot L^2}{2} = \frac{0,099 \cdot 1,9}{2} = 0,179 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Momento máximo en A:

$$M_{\text{máx}} = M_A + M_{\text{App}} = 12,996 + 0,179 = 13,175 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Módulo resistente:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,12 \cdot 0,16^2}{6} = 5,12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$W_x = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}}}; \quad \sigma = \frac{M_{\text{máx}}}{W_x} = \frac{13,175 \text{ kN}\cdot\text{m}}{5,12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3} = 25,73 \cdot 10^3 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\sigma = 25,73 \cdot 10^3 \text{ kN} / \text{m}^2 < \sigma_{\text{adm}} = 30 \cdot 10^3 \text{ kN} / \text{m}^2$$

Al ser menor que la tensión admisible, la sección de la viga es válida.

4.4 TENSIONES TANGENCIALES

Ejercicio 4.4.1

Una viga simple de madera soporta una carga uniforme de 30 kN/m (incluye el peso de la viga). La longitud es de $L=3$ m, y la sección transversal es rectangular de 240 mm de ancho por 300 mm de alto.

Calcule la tensión tangencial máxima $\tau_{\text{máx}}$ y la tensión de flexión máxima $\sigma_{\text{máx}}$.

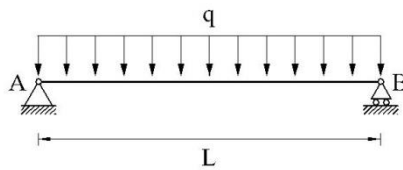


Fig. E.4.4.1.a

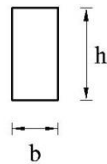


Fig. E.4.3.4.b

Solución:

$L=3$ m; $q=30$ kN/m; $b=240$ mm; $h=300$ mm

$$M_{\text{máx}} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{30 \cdot 3^2}{8} = 33,75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_A = -V_B = \frac{q \cdot L}{2} = \frac{30 \cdot 3}{2} = 45 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M \cdot y_{\text{máx}}}{I} = \frac{33,75 \cdot 0,15}{0,00054} = 9375 \text{ kN} / \text{m}^2 = 9,375 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V \cdot h^2}{8 \cdot I} = \frac{45 \cdot 0,3^2}{8 \cdot 0,00054} = 937,5 \text{ kN} / \text{m}^2 = 937,5 \text{ kPa}$$

TEMA 5: TEOREMAS DE MOHR

5.1 PRIMER TEOREMA DE MOHR

Ejercicio 5.1.1

En la viga en voladizo de la figura determinar los giros de las secciones A y B.

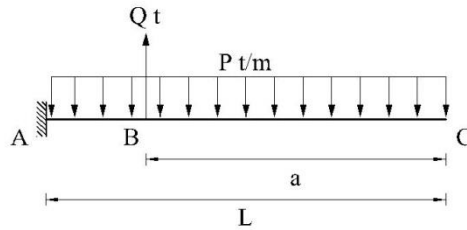


Fig. E.5.1.1.a

Solución:

Para la resolución del ejercicio, se aplica el Principio de superposición descomponiendo el estado real en la suma de dos estados de carga I y II. Después se determinan los giros correspondientes a los estados I y II. El giro de las secciones en A y B se obtendrá como la suma de los giros obtenidos para los estados I y II, respectivamente.

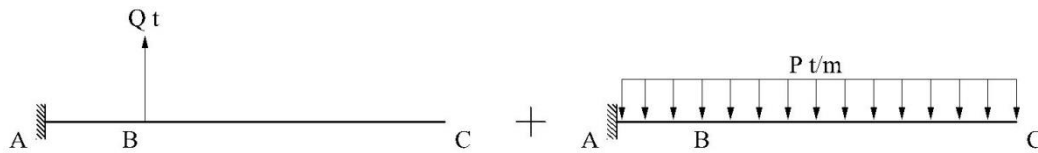
Aplicación del principio de superposición:

Fig. E.5.1.1.b

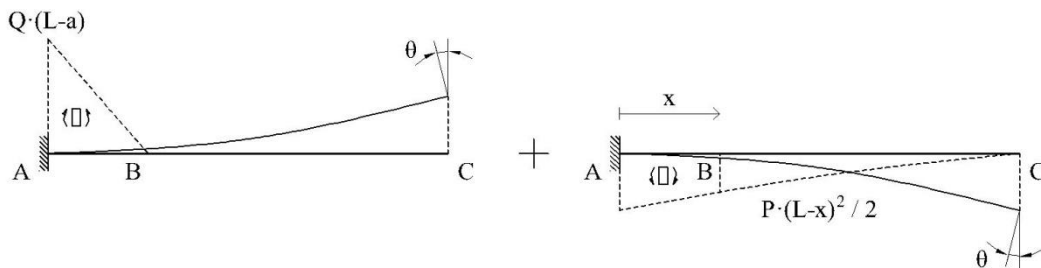
Leyes de momentos flectores:

Fig. E.5.1.1.c

Giro en la sección A:

Estado I:

$$\bar{\theta}_A = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot (L-a) \cdot Q \cdot (L-a) = \frac{Q}{2EI} (L-a)^2$$

Estado II:

$$\bar{\theta}_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{P}{2} (L-x)^2 dx = \frac{PL^3}{6EI}$$

Giro total en la sección A:

$$\bar{\theta}_A = \frac{Q}{2EI} (L-a)^2 - \frac{PL^3}{6EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{Q(L-a)^2}{2} - \frac{PL^3}{6} \right]$$

Giro en la sección B:

Estado I:

$$\bar{\theta}_B = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot (L-a) \cdot Q \cdot (L-a) = \frac{Q}{2EI} (L-a)^2$$

Estado II:

$$\bar{\theta}_B = \frac{1}{EI} \int_0^{L-a} \frac{P}{2} (L-x)^2 dx = \frac{P}{6EI} (L^3 - a^3)$$

Giro total en la sección B:

$$\bar{\theta}_B = \frac{Q}{2EI} (L-a)^2 - \frac{P}{6EI} (L^3 - a^3) = \frac{1}{EI} \left[\frac{Q(L-a)^2}{2} - \frac{P(L^3 - a^3)}{6} \right]$$

5.2 SEGUNDO TEOREMA DE MOHR

Ejercicio 5.2.1

En la viga en voladizo de la figura determinar los giros de las secciones A y B.

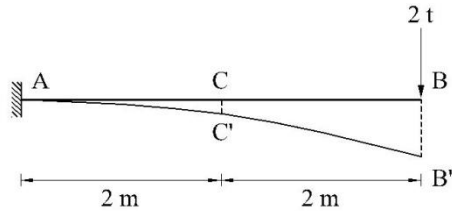


Fig. E.5.2.1.a

Solución:

Para la obtención de las flechas en B y C se aplicará el 2º Teorema de Mohr. Empezamos determinando la ley de momentos flectores.

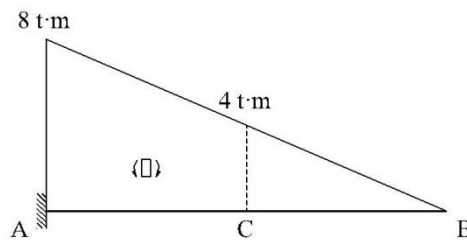
Ley de momentos flectores:

Fig. E.5.2.1.b

Flecha en la sección B:

$$BB' = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{1}{EI} \cdot 42,67 \text{ m}$$

Flecha en la sección C:

$$CC' = \frac{1}{EI} \left(2 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{1}{EI} \cdot 13,33 \text{ m}$$

5.3 TEOREMA DE LA VIGA CONJUGADA

Ejercicio 5.3.1

Dada la pieza prismática AB, indicada en la figura, determinar:

- Valor y sentido de los giros en A, B, C.
- Dibujo a estima de la deformada.

Se tomará: $EI=10^3 \text{ t}\cdot\text{m}^2$.

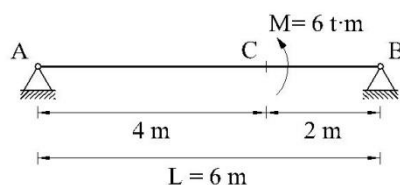


Fig. E.5.3.1.a

Solución:

Cálculo de las reacciones en los apoyos (viga real):

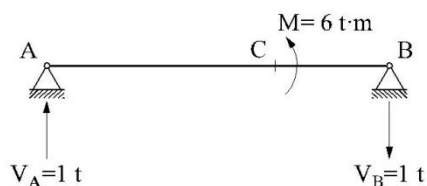


Fig. E.5.3.1.b

$$\sum F_V = 0; \quad V_A + V_B = 0; \quad V_A = -(-1) = 1 \text{ t}$$

$$\sum M_A = 0; \quad 6 + 6 \cdot V_B = 0; \quad V_B = -1 \text{ t}$$

Ley de momentos flectores (viga real):

$$0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$M(x) - 1 \cdot x = 0; \quad M(x) = x \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(4) = 4 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$M(x) - 1 \cdot x + 6 = 0; \quad M(x) = x - 6 \quad \left| \begin{array}{l} M(4) = -2 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(6) = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

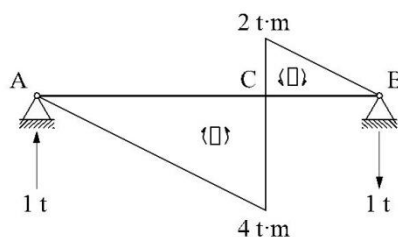


Fig. E.5.3.1.c

Cálculo de las reacciones en los apoyos (viga conjugada):

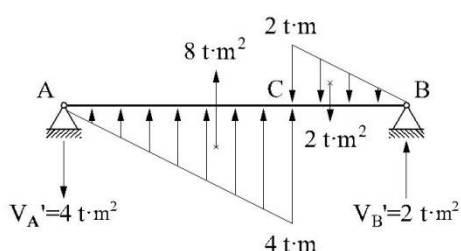


Fig. E.5.3.1.d

$$\Sigma F_V = 0; \quad -V'_A - V'_B + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 0; \quad -V'_A - V'_B = -6$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad -6 \cdot V'_B + 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - 2 \cdot \left(4 + \frac{1}{3} \cdot 2\right) = 0;$$

$$\Sigma M = 0; \quad 6 \cdot V'_B + \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(4 + \frac{1}{3} \cdot 2\right) = 0;$$

$$-6 \cdot V'_B + \frac{64}{3} - 2 \cdot \frac{14}{3} = 0; \quad V'_B = \frac{12}{6} = 2 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

$$V'_A = 6 - V'_B = 6 - 2 = 4 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

Ley de esfuerzos cortantes (viga conjugada):

$$0 < x < 4 \text{ m}$$

$$-V'(x) - 4 + \frac{1}{2} \cdot x \cdot x;$$

$$V'(x) = -4 + 0,5 \cdot x^2; \quad \begin{cases} V'(0) = -4 \text{ t}\cdot\text{m}^2 \\ V'(2) = -2 \text{ t}\cdot\text{m}^2 \\ V'(4) = 4 \text{ t}\cdot\text{m}^2 \end{cases}$$

$$V'(x) = 0 \leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$$

$$M'(x) = -4 \cdot x + 0,5 \cdot \frac{x^3}{3} + C = -4 \cdot x + \frac{x^3}{6} = x \cdot \left(-4 + \frac{x^2}{6} \right);$$

$$\begin{cases} M'(0) = 0 \text{ t}\cdot\text{m}^3 \\ M'(2) = -6,66 \text{ t}\cdot\text{m}^3 \\ M'(4) = -5,33 \text{ t}\cdot\text{m}^3 \\ M'(2\sqrt{2}) = -7,54 \text{ t}\cdot\text{m}^3 \end{cases}$$

$$0 < x_1 < 2 \text{ m}$$

$$V'(x_1) - 2 - \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot x_1 = 0;$$

$$V'(x) = 2 + 0,5 \cdot x_1^2; \quad \begin{cases} V'(0) = 2 \text{ t}\cdot\text{m}^2 \\ V'(1) = 2,5 \text{ t}\cdot\text{m}^2 \\ V'(2) = 4 \text{ t}\cdot\text{m}^2 \end{cases}$$

$$x = 6 - x_1$$

$$dx = -dx_1$$

$$V = -\frac{dM}{dx_1}$$

$$M'(x_1) = -\left[2 \cdot x_1 + 0,5 \cdot \frac{x_1^3}{3} \right] = -\left[2 \cdot x_1 + \frac{x_1}{6} \right] = -x_1 \cdot \left(2 + \frac{x_1^2}{6} \right)$$

$$V_A = -4 \text{ t}\cdot\text{m}^2 \downarrow \uparrow$$

$$V_B = 2 \text{ t}\cdot\text{m}^2 \uparrow \downarrow$$

$$-V'_C - 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 0$$

$$V'_C = -4 + 8 = 4 \text{ t}\cdot\text{m}^2 \uparrow \downarrow$$

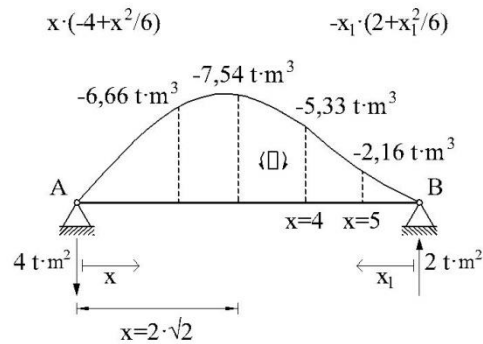


Fig. E.5.3.1.e

Giros en A, B, C (viga real):

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \cdot V'_A = \frac{1}{10^3} \cdot 4 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowright$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \cdot V'_B = \frac{1}{10^3} \cdot 2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowleft$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \cdot V'_C = \frac{1}{10^3} \cdot 4 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowleft$$

Nota: el sentido de los giros se determina observando directamente la deformada de la viga real ya que el procedimiento de la viga conjugada solo nos permite calcular los módulos de los giros y/o flechas.

El giro es cero donde el cortante de la viga conjugada es nulo.

$$V'(x) - 4 + \frac{1}{2} \cdot x \cdot h = 0; \quad x = h$$

$$V'(x) = 4 - \frac{1}{2} x^2 = 0; \quad x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

Deformada (viga real):

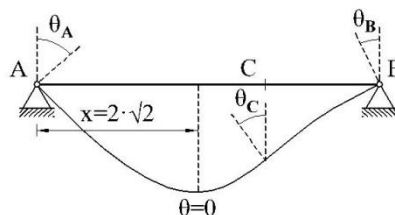


Fig. E.5.3.1.f

Ejercicio 5.3.2

La viga de la figura está sometida a un momento de 2 toneladas en el extremo B. Hallar los giros en los extremos A y B, y la flecha en la sección C.

($EI=10^3 \text{ t}\cdot\text{m}^2$)

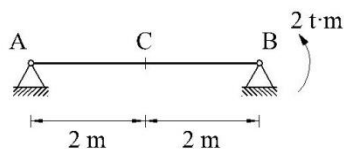


Fig. E.5.3.2.a

Solución:

Cálculo de las reacciones en los apoyos (viga real):

$$\sum F_V = 0; \quad R_A + R_B = 0; \quad R_A = -R_B = 0,5 \text{ t}$$

$$\sum M_A = 0; \quad 2 + 4 \cdot R_B = 0; \quad R_B = -\frac{2}{4} = -0,5 \text{ t}$$

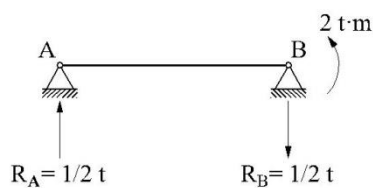


Fig. E.5.3.2.b

Ley de momentos flectores (viga real):

$$M(x) - 0,5 \cdot x = 0; \quad M(x) = 0,5x \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2) = 1 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(4) = 2 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

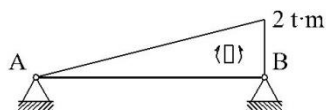


Fig. E.5.3.2.c

Cálculo de las reacciones en los apoyos (viga conjugada):

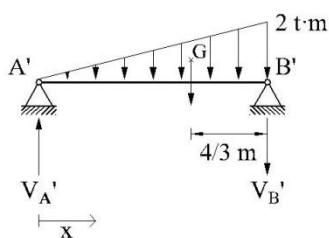


Fig. E.5.3.2.d

$$\Sigma F_V = 0; \quad R'_A + R'_B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad 4 \cdot R'_B - \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \right) = 0$$

$$R'_B = \frac{4 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3} \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$R'_A = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

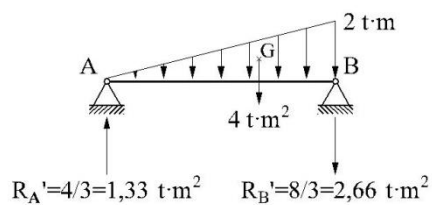


Fig. E.5.3.2.e

Esfuerzos cortantes en A y B (viga conjugada):

$$R'_A = \frac{4}{3} \text{ t}\cdot\text{m}^2 \uparrow \downarrow$$

$$R'_B = \frac{8}{3} \text{ t}\cdot\text{m}^2 \downarrow \uparrow$$

Giros en A y B (viga real):

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \cdot R'_A = \frac{1}{10^3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-3} = 0,00133 \text{ rad}$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \cdot R'_B = \frac{1}{10^3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-3} = 0,00266 \text{ rad}$$

Se observa que el giro que el momento produce en el apoyo en el que está aplicado (B) es doble del que produce en el apoyo opuesto (A).

Deformada (viga real):

Los sentidos de los giros los determinamos observando directamente la deformada de la viga real.

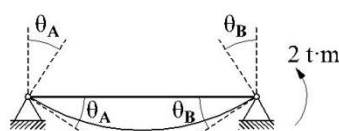


Fig. E.5.3.2.f

$\theta_A \curvearrowright$: sentido horario

$\theta_B \curvearrowleft$: sentido antihorario

Momento flector en C (viga conjugada):

Para calcular la flecha en C, comenzamos obteniendo el momento flector de la viga conjugada en dicha sección.

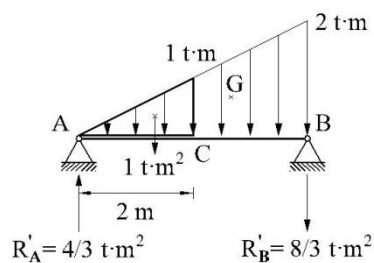


Fig. E.5.3.2.g

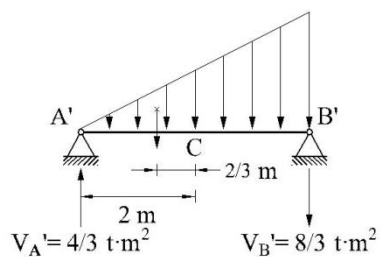


Fig. E.5.3.2.h

$$M'(2) - \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0,5 \cdot 2) \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 0$$

$$M'(2) = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Flecha en la sección C (viga real):

$$f_c = \frac{1}{10^3 \text{ t}\cdot\text{m}^2} \cdot 2 \text{ t}\cdot\text{m}^3 = \frac{2}{10^3} \text{ m} = 2 \text{ mm} \downarrow$$

Si observamos la deformada de la viga real, vemos que la flecha en C va hacia abajo.

5.4 TEOREMAS DE MOHR GENERALIZADOS

Ejercicio 5.4.1

En el sistema estructural cuya forma, dimensiones y cargas se indican en la siguiente figura, se pide determinar el desplazamiento horizontal de B.

Se tomará: $E.I = 10^3 \text{ t.m}^2$

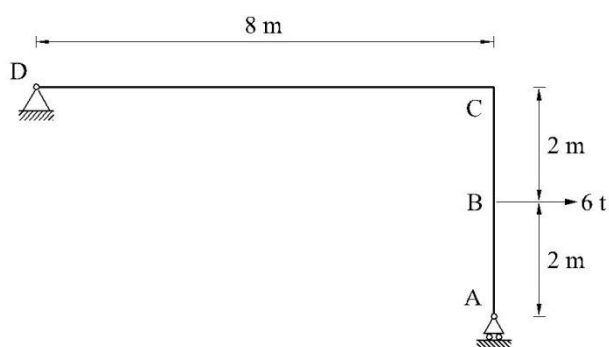


Fig. E.5.4.1.a

Solución:

Para la resolución del ejercicio, se comenzará determinando la ley de momentos flectores de la estructura.

Cálculo de las reacciones en los apoyos:

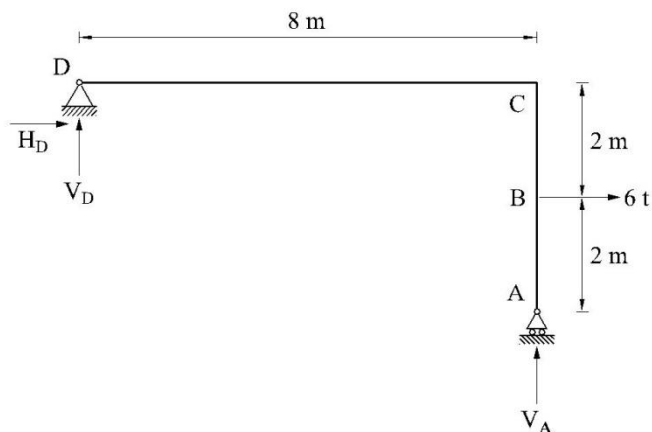


Fig. E.5.4.1.b

$$\sum F_V = 0; \quad V_A + V_D = 0$$

$$\sum F_H = 0; \quad H_D + 6 = 0; \quad H_D = -6 \text{ t}$$

$$\sum M_D = 0; \quad 8 \cdot V_A + 6 \cdot 2 = 0; \quad V_A = -\frac{12}{8} = -1,5 \text{ t}; \quad V_D = -V_A = 1,5 \text{ t}$$

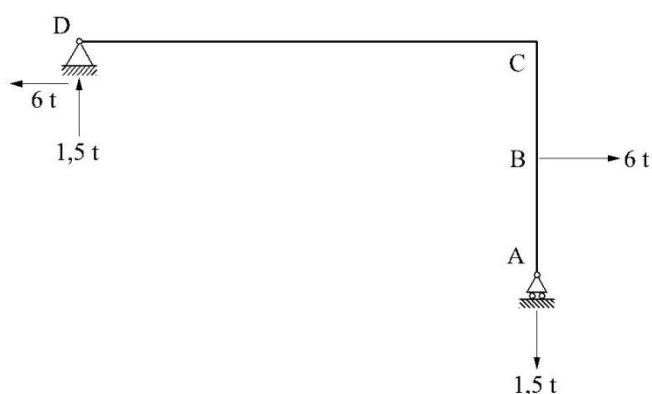


Fig. E.5.4.1.c

Ley de momentos flectores (estructura real):

TRAMO AB:

$$M(x)_A^B = 0$$

TRAMO BC:

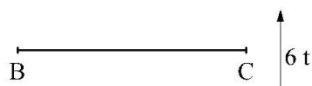


Fig. E.5.4.1.d

$$0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$-M(x)_B^C + 6 \cdot x = 0; \quad M(x)_B^C = 6 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_B^C = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2)_B^C = 12 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

TRAMO CD:

$$0 \leq x \leq 8 \text{ m}$$

$$-M(x)_C^D + 12 - 1,5 \cdot x = 0; \quad M(x)_C^D = 12 - 1,5 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_C^D = 12 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(8)_C^D = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

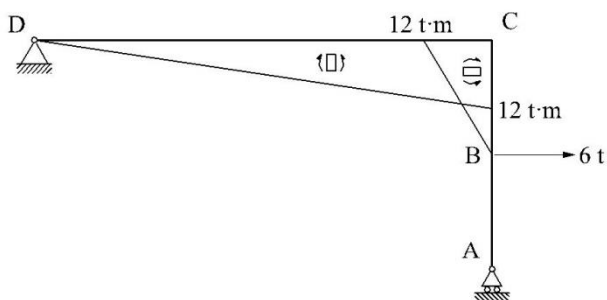


Fig. E.5.4.1.e

Descomposición en estados para aplicación del segundo teorema de Mohr generalizado:

El segundo teorema de Mohr generalizado para obtener los desplazamientos de cualquier punto de la estructura según una dirección cualquiera, se puede aplicar directamente cuando la estructura es una ménsula de directriz recta con puntos angulosos.

Si cambian las condiciones de sustentación, los desplazamientos de cualquier punto de la estructura se determinan como suma de los desplazamientos correspondientes a los siguientes estados:

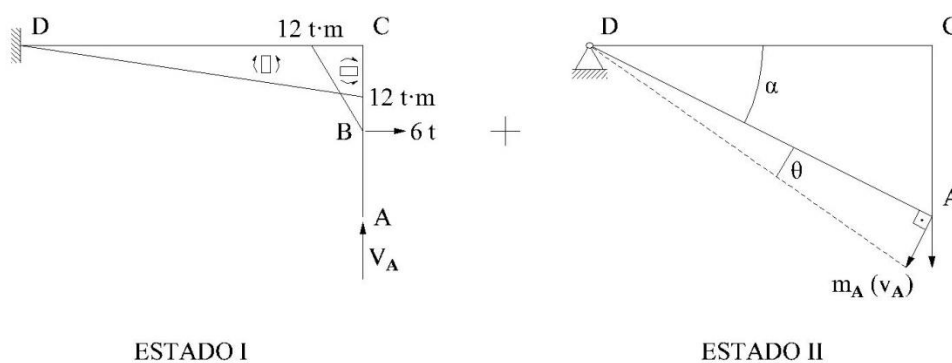


Fig. E.5.4.1.f

Estado I:

Desplazamiento horizontal de B:

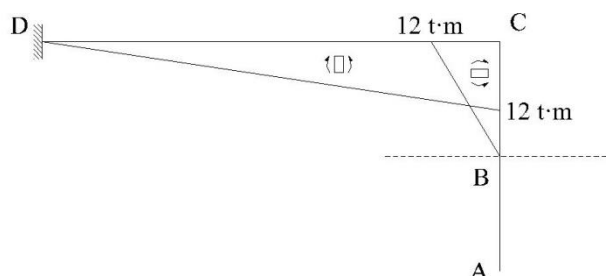


Fig. E.5.4.1.g

$$h_B^I = \frac{1}{EI} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{1}{10^3} \cdot 112 = 0,112 \text{ m} \rightarrow$$

Desplazamiento vertical de A:

$$v_A = \frac{1}{EI} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \right) \cdot 0 \right] = \frac{1}{10^3} \cdot 128 = 0,128 \text{ m} \uparrow$$

Estado II:

Giro de la estructura ficticia alrededor de D:

Para contrarrestar el desplazamiento vertical de A correspondiente al estado I, la estructura debe girar alrededor del punto D en sentido horario.

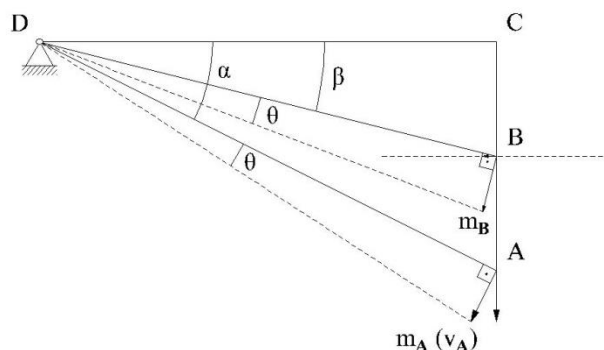


Fig. E.5.4.1.h

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{8}\right) = 26,565^\circ$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{8}\right) = 14,036^\circ$$

El giro de la estructura alrededor de D debe ser tal que la componente vertical del desplazamiento del punto A valga 0,128 m y tenga sentido hacia abajo.

$$m_A = \frac{v_A}{\cos \alpha} = \frac{0,128}{\cos 26,565^\circ} = 0,143 \text{ m}$$

Por tanto, el giro de la estructura ficticia alrededor de D será:

$$\theta = \frac{m_A}{DA} = \frac{0,143}{8,944} = 1,599 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \cong 0,016 \text{ rad}$$

$$\left[DA = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 8,944 \text{ m} \right]$$

Desplazamiento horizontal de B debido al giro alrededor de D:

$$m_B = \theta \cdot DB = 0,01599 \cdot 8,246 = 0,132 \text{ m}$$

$$\left[DB = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 8,246 \text{ m} \right]$$

$$h_B^{\text{II}} = m_B \cdot \operatorname{sen} \beta = 0,132 \cdot \operatorname{sen}(14,036^\circ) = 0,032 \text{ m} \leftarrow$$

Desplazamiento horizontal de B de la estructura real:

$$h_B = h_B^{\text{I}} + h_B^{\text{II}} = 0,112 - 0,032 = 0,08 \text{ m}$$

Ejercicio 5.4.2

En la estructura cuya forma, dimensiones y cargas se indican a continuación, se pide determinar el desplazamiento horizontal de A y C.

Se tomará: $E.I = 10^3 \text{ t.m}^2$

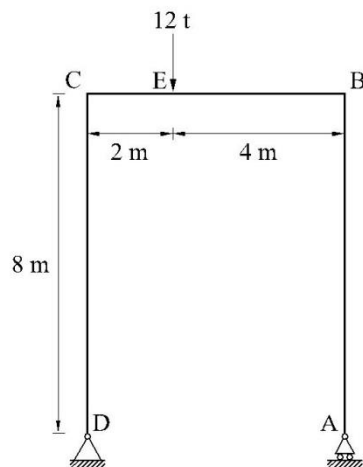


Fig. E.5.4.2.a

Solución:

Cálculo de las reacciones en los apoyos:

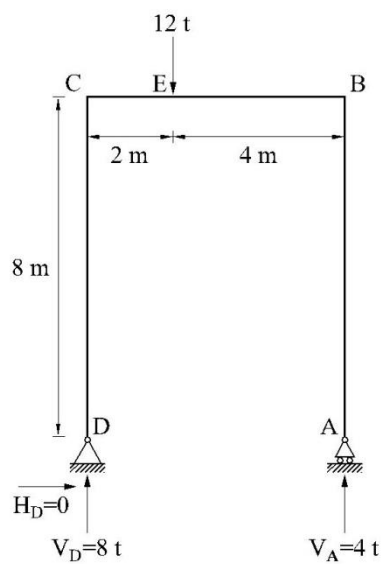


Fig. E.5.4.2.b

$$\sum F_V = 0; \quad V_A + V_D - 12 = 0; \quad V_D = 12 - 4 = 8 \text{ t}$$

$$\sum F_H = 0; \quad H_D = 0$$

$$\sum M_D = 0; \quad 6 \cdot V_A = 12 \cdot 2; \quad V_A = \frac{24}{6} = 4 \text{ t}$$

Ley de momentos flectores (estructura real):

TRAMO AB:

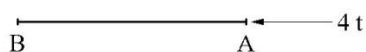


Fig. E.5.4.2.c

$$0 \leq x \leq 8 \text{ m}$$

$$M(x)_A^B = 0$$

TRAMO BE:



Fig. E.5.4.2.d

$$0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$M(x)_B^E = 4 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_B^E = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(4)_B^E = 16 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

TRAMO EC:

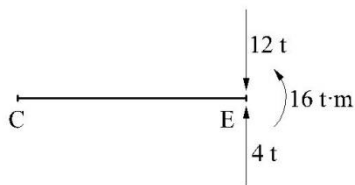


Fig. E.5.4.2.e

$$0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$M(x)_E^C - 4 \cdot (4 + x) + 12 \cdot x = 0;$$

$$M(x)_E^C = -12 \cdot x + 16 + 4 \cdot x = -8 \cdot x + 16 \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_E^C = 16 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2)_E^C = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

TRAMO CD:

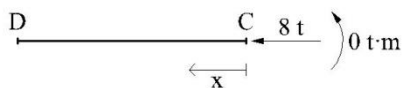


Fig. E.5.4.2.f

$$0 \leq x \leq 8 \text{ m}$$

$$M(x)_C^D = 0$$

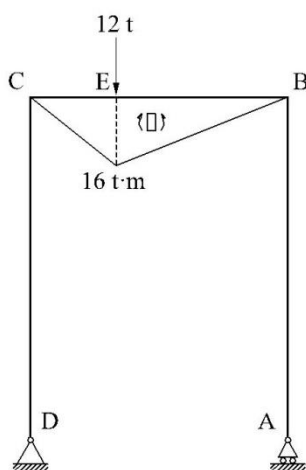


Fig. E.5.4.2.g

Estado I:

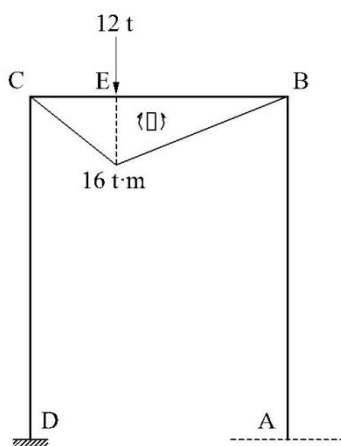


Fig. E.5.4.2.h

Desplazamiento horizontal de A (2° Teorema de Mohr generalizado):

$$h_A^I = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 \right) \cdot 8 = \overline{0,384} \text{ m}$$

Desplazamiento horizontal de C (2° Teorema de Mohr generalizado):

Como no existe ley de momentos flectores entre C y el empotramiento D, al aplicar el 2° Teorema de Mohr, el desplazamiento horizontal de C es nulo.

$$h_C^I = 0$$

Desplazamiento vertical de A (2° Teorema de Mohr generalizado):

$$v_A^I = \frac{1}{EI} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 16 \right) \cdot \left(4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right] = \frac{1}{EI} \cdot 160 = 0,16 \text{ m} \uparrow$$

Estado II:

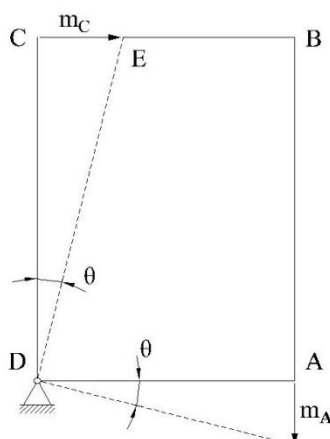


Fig. E.5.4.2.i

Giro de la estructura ficticia alrededor de D:

$$\theta = \frac{m_A}{DA} = \frac{0,16}{6} = 0,0267 \text{ rad} \quad [m_A = v_A^{\text{II}} = 0,16 \text{ m}]$$

Desplazamiento horizontal de A debido al giro alrededor de D:

Cuando gira la estructura ficticia alrededor de D, el punto A se mueve según la normal al radio vector DA, es decir, verticalmente. Este desplazamiento no tiene proyección horizontal, de modo que:

$$h_A^{\text{II}} = 0$$

Desplazamiento horizontal de C debido al giro alrededor de D:

$$m_C = DC \cdot \theta$$

$$m_C = h_C^{\text{II}} = \frac{8}{6} \cdot 0,16 = 0,213 \text{ m} \rightarrow$$

Desplazamiento horizontal de A (estructura real):

$$h_A = h_A^{\text{I}} + h_A^{\text{II}} = 0,348 + 0 = 0,348 \text{ m} \rightarrow$$

Desplazamiento horizontal de C (estructura real):

$$h_C = h_C^{\text{I}} + h_C^{\text{II}} = 0 + 0,213 = 0,213 \text{ m} \rightarrow$$

Ejercicio 5.4.3

En la estructura indicada en la figura, calcular el desplazamiento horizontal y vertical del nudo B (Convocatoria Febrero de 2015).

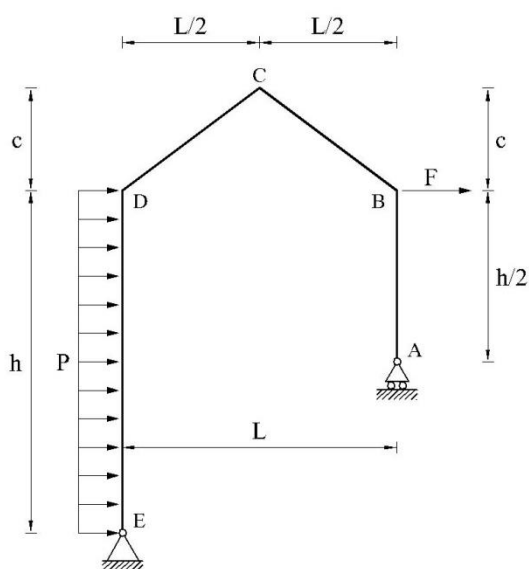


Fig. E.5.4.3.a

Barras:

$$EI = 10^4 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

Dimensiones:

$$h = 10 \text{ m}$$

$$l = 8 \text{ m}$$

$$c = 3 \text{ m}$$

Cargas:

$$P = 2 \text{ t/ml}$$

$$F = 5 \text{ t}$$

Solución:

Para la resolución del ejercicio, se aplicará el segundo teorema de Mohr generalizado. Comenzamos determinando la ley de momentos flectores de la estructura real.

Cálculo de las reacciones en los apoyos:

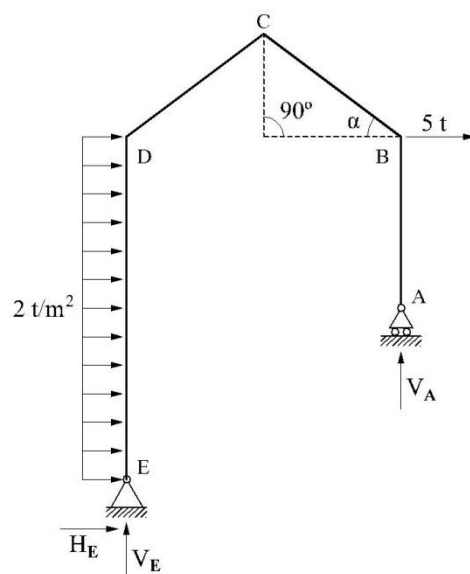


Fig. E.5.4.3.b

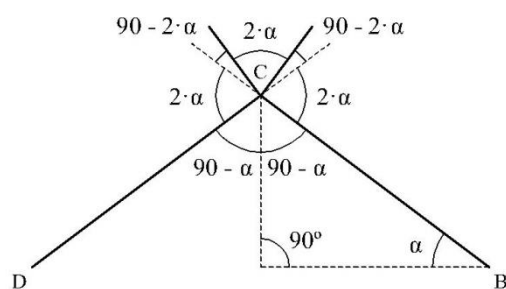


Fig. E.5.4.3.c

$$\Sigma F_v = 0; \quad V_A + V_E = 0; \quad V_A = -V_E; \quad V_E = -18,75 \text{ t}$$

$$\Sigma F_H = 0; \quad H_E + 2 \cdot 10 + 5 = 0; \quad H_E = -25 \text{ t}$$

$$\Sigma M_E = 0 \quad V_A \cdot 8 - 5 \cdot 10 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} = 0; \quad V_A = \frac{150}{8} = 18,75 \text{ t}$$

Ley momentos flectores (estructura real):

TRAMO ED:

$$0 < x < 10 \text{ m}; \quad M(x)_E^D - 25 \cdot x + 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0;$$

$$M(x)_E^D = 25 \cdot x - x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_E^D = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(10)_E^D = 150 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_E^D = 25 - 2 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} V(0)_E^D = 25 \text{ t} \\ V(10)_E^D = 5 \text{ t} \end{array} \right.$$

$$N(x)_E^D - 18,75 = 0; \quad N(x)_E^D = 18,75 \text{ t}$$

TRAMO DC:

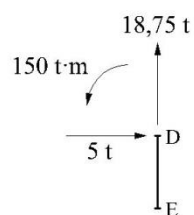
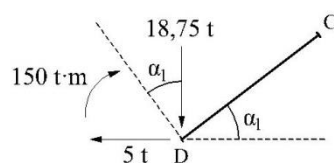


Fig. E.5.4.3.d

$$0 < x < 5 \text{ m}; \quad M(x)_D^C - 150 + 18,75 \cdot \cos \alpha \cdot x - 5 \cdot \text{sen} \alpha \cdot x = 0;$$

$$M(x)_D^C = -12 \cdot x + 150 \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_D^C = 150 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(5)_D^C = 90 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_D^C = -12 \text{ t}$$

$$N(x)_D^C - 18,75 \cdot \text{sen} \alpha - 5 \cdot \cos \alpha = 0; \quad N(x)_D^C = 15,25 \text{ t}$$

TRAMO CB:

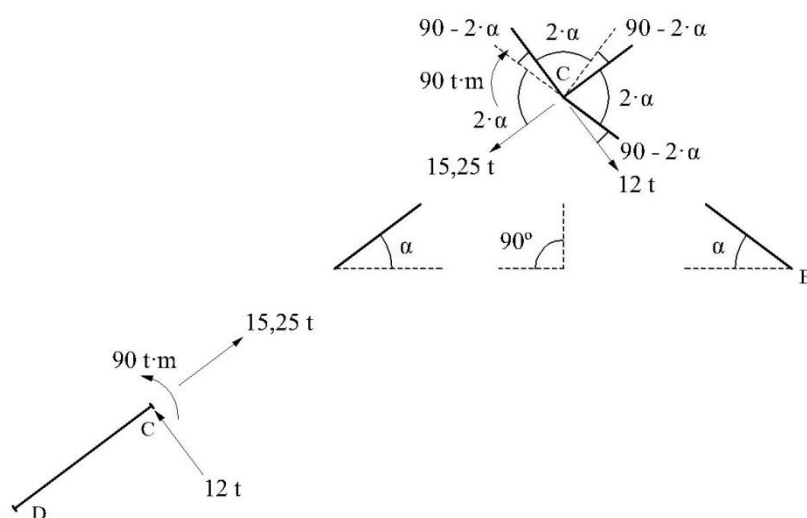


Fig. E.5.4.3.e

$0 < x < 5 \text{ m}$;

$$M(x)_C^B - 90 + 15,25 \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha) \cdot x + 12 \cdot \text{sen}(90^\circ - 2 \cdot \alpha) \cdot x = 0 ;$$

$$M(x)_C^B = -18 \cdot x + 90 \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_C^B = 90 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(5)_C^B = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$-V(x)_C^B - 12 \cdot \text{sen}(90^\circ - 2 \cdot \alpha) - 15,25 \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha) = 0 ;$$

$$V(x)_C^B = -18 \text{ t}$$

$$N(x)_C^B + 12 \cdot \text{cos}(90^\circ - 2 \cdot \alpha) - 15,25 \cdot \text{cos}(2 \cdot \alpha) = 0 ;$$

$$N(x)_C^B = -7,25 \text{ t}$$

TRAMO BA:

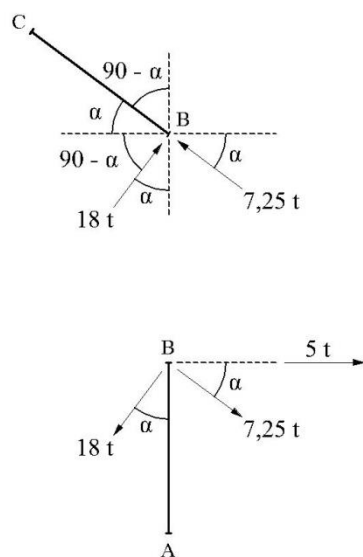


Fig. E.5.4.3.f

$$M(x)_B^A = 0 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$-V(x)_B^A + 5 + 7,25 \cdot \cos \alpha - 18 \cdot \text{sen} \alpha = 0; \quad V(x)_B^A = 0 \text{ t}$$

$$-N(x)_B^A - 7,25 \cdot \text{sen} \alpha - 18 \cdot \cos \alpha = 0; \quad N(x)_B^A = -18,75 \text{ t}$$

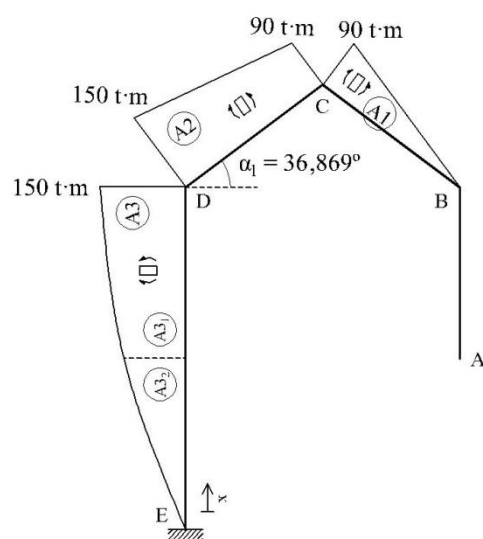


Fig. E.5.4.3.g

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 5 = 225 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$A_2 = \frac{(90+150)}{2} \cdot 5 = 600 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$A_3 = \int_0^{10} (25 \cdot x - x^2) dx = \left[\frac{25}{2} \cdot x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} = \frac{25}{2} \cdot 10^2 - \frac{10^3}{3} = 916,667 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$x_2 = \frac{90 \cdot 5 \cdot 2,5 + \frac{1}{2} \cdot (150 - 90) \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5}{A_2} = 2,292 \text{ m}$$

$$x_3 = \frac{\int_0^{10} x \cdot (25 \cdot x - x^2) dx}{A_3} = \frac{\left[\frac{25}{3} \cdot x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^{10}}{A_3} = 6,364 \text{ m}$$

Descomposición en estados para aplicación del segundo teorema de Mohr generalizado:

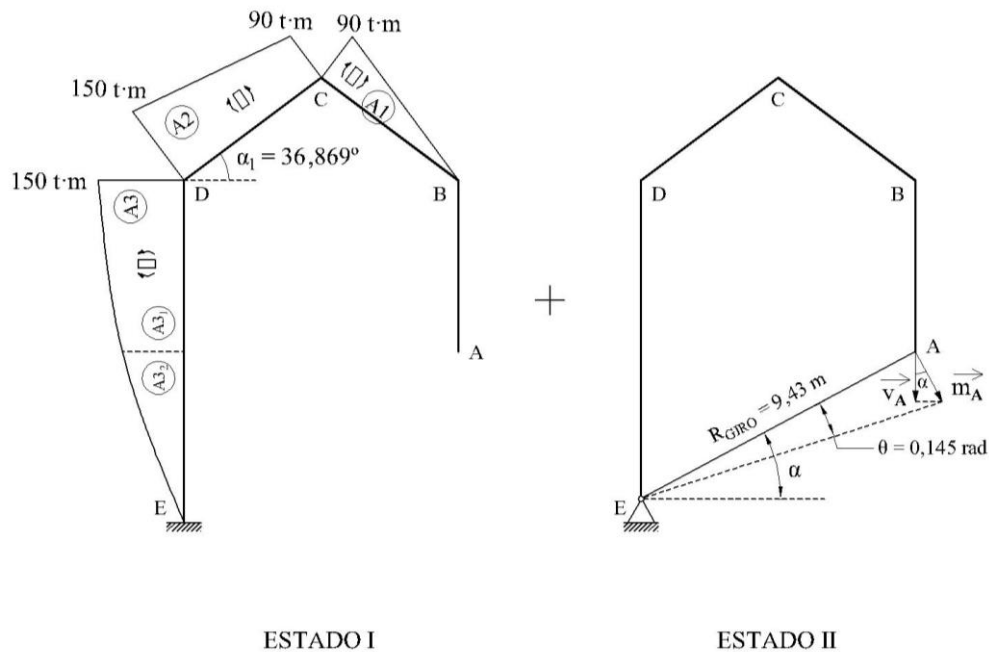


Fig. E.5.4.3.h

Estado I:

Desplazamiento vertical de A y B:

$$v_A^I = \frac{1}{EI} \cdot \left[916,667 \cdot 8 + 600 \cdot (8 - 2,292 \cdot \cos \alpha_1) + 225 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \cos \alpha_1 \right) \right] = 1,163 \text{ m } \uparrow$$

$$v_B^I = 1,163 \text{ m } \uparrow$$

Desplazamiento horizontal de B:

$$h_B^I = \frac{1}{EI} \cdot \left[-A_3 \cdot (10 - 6,364) + A_2 \cdot (2,292 \cdot \sin \alpha) + A_1 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \sin \alpha \right) \right] = -0,2058 \text{ m } \leftarrow$$

Estado II:

Desplazamiento vertical de A y giro de la estructura:

$$v_A^{II} = m_A \cdot \cos \alpha = \theta \cdot \overline{EA} \cdot \cos \alpha = 1,16 \text{ m } \downarrow$$

$$\overline{EA} = \sqrt{5^2 + 8^2} = 9,434 \text{ m}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{5}{8}\right) = 32,005^\circ$$

$$\theta = \frac{v_A^{II}}{\overline{EA} \cdot \cos \alpha} = 0,1453747 \text{ rad (radio de giro)}$$

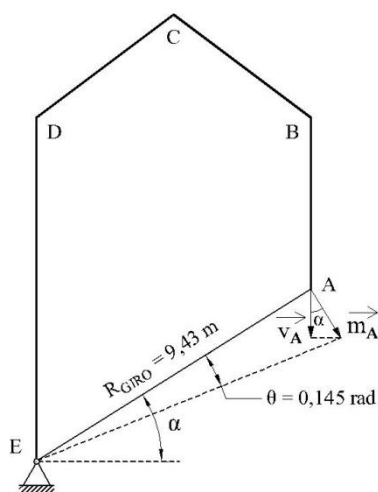


Fig. E.5.4.3.i

Desplazamiento vertical de B:

$$v_B^{\text{II}} = m_B \cdot \cos\gamma = \theta \cdot \overline{EB} \cdot \cos\gamma = 1,16 \text{ m} \downarrow$$

$$\overline{EB} = \sqrt{10^2 + 8^2} = 12,806 \text{ m}$$

$$\gamma = \arctg\left(\frac{10}{8}\right) = 51,334019^\circ$$

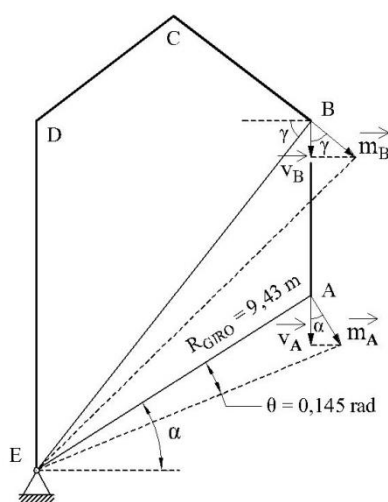


Fig. E.5.4.3.j

Desplazamiento horizontal de B:

$$h_B^{\text{II}} = m_B \cdot \text{sen}\gamma = \theta \cdot \overline{EB} \cdot \text{sen}\gamma = 1,45 \text{ m} \rightarrow$$

Desplazamiento vertical y horizontal de B de la estructura real:

$$v_B = 1,163 - 1,15998 = 0,00302 \text{ m} \uparrow$$

$$h_B = 1,45 - 0,2058 = 1,244 \text{ m} \leftarrow$$

5.5 FÓRMULAS DE BRESSE

Ejercicio 5.5.1

Calcular los movimientos del punto B del arco de la figura.

$I_x = cte.$

$E = cte.$

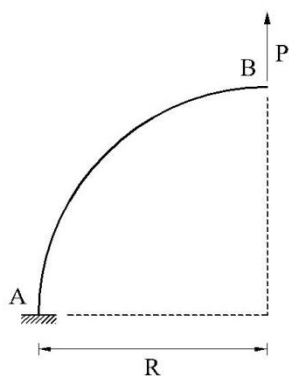


Fig. E.5.5.1.a

Solución:

Para la resolución del ejercicio se aplican las fórmulas de Bresse.

Cálculo de las reacciones en el empotramiento:

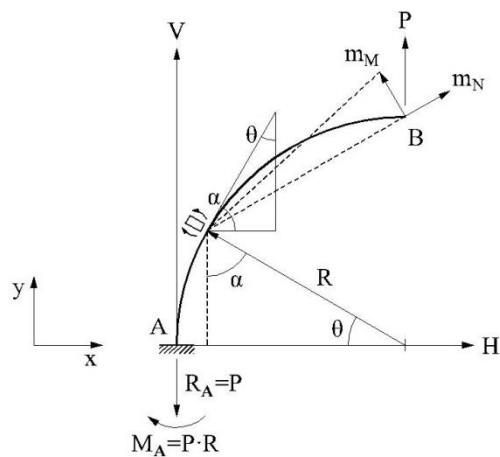


Fig. E.5.5.1.b

$$\sum F_V = 0; \quad R_A + P = 0; \quad R_A = -P$$

$$\sum M_A = 0; \quad P \cdot R - M_A = 0; \quad M_A = P \cdot R$$

Leyes de esfuerzos:

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$M(\theta) - P \cdot R + P \cdot (R - R \cdot \cos \theta) = 0; \quad M(\theta) = P \cdot R \cdot \cos \theta$$

$$N(\theta) = P \cdot \cos \theta$$

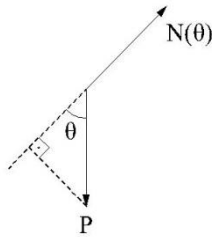


Fig. E.5.5.1.c

Aplicación de las fórmulas de Bresse:

Desplazamiento vertical de B:

$$\delta_{Bv} = \delta_{Av} \pm \theta_A \cdot r_A \pm \int_A^B (r \cdot k) ds \pm \int_A^B (\cos \gamma \cdot \varepsilon) ds$$

$$[1] \begin{cases} r = R \cdot \cos \theta \\ k = \frac{M(\theta)}{EI_z} = \frac{P \cdot R \cdot \cos \theta}{EI_z} \\ ds = R \cdot d\theta \end{cases} \quad [2] \begin{cases} \cos \gamma = \cos \theta, \text{ pues } \gamma = \theta \\ \sigma = E \cdot \varepsilon \\ \sigma = \frac{N}{A}; \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} = \frac{P \cdot \cos \theta}{EA} \end{cases}$$

$$\delta_{Bv} = \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{P \cdot R \cdot \cos \theta}{EI_z} \right) \cdot R \cdot d\theta \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \frac{P \cdot \cos \theta}{EA} \cdot R \cdot d\theta$$

$$\delta_{Bv} = \pm \frac{R^3 \cdot P}{EI_z} \cdot \frac{\pi}{4} \pm \frac{R \cdot P}{EA} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{R \cdot P \cdot \pi}{4E} \cdot \left(\frac{R^2}{I_z} + \frac{1}{A} \right) \uparrow$$

Desplazamiento horizontal de B:

$$\delta_{Bh} = \delta_{Ah} \pm \theta_A \cdot r_A \pm \int_A^B (r \cdot k) ds \pm \int_A^B (\cos \gamma \cdot \varepsilon) ds$$

$$[1] \begin{cases} r = R - R \cdot \text{sen}\theta \\ k = \frac{M(\theta)}{EI_z} = \frac{P \cdot R \cdot \cos\theta}{EI_z} \\ ds = R \cdot d\theta \end{cases} \quad [2] \begin{cases} \cos\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen}\theta \\ \varepsilon = \frac{P \cdot \cos\theta}{EA} \end{cases}$$

$$\delta_{B_H} = \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot (1 - \text{sen}\theta) \cdot \left(\frac{P \cdot R \cdot \cos\theta}{EI_z} \right) \cdot R \cdot d\theta \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P \cdot \cos\theta}{EA} \cdot \text{sen}\theta \cdot R \cdot d\theta$$

$$\delta_{B_H} = \pm \frac{R^3 \cdot P}{EI_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \text{sen}\theta) \cdot \cos\theta \cdot d\theta \pm \frac{P \cdot R}{EA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot d\theta$$

$$\delta_{B_H} = \pm \frac{R^3 \cdot P}{EI_z} \cdot \frac{1}{2} \pm \frac{P \cdot R}{EA} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{R \cdot P}{2E} \cdot \left(\frac{R^2}{I_z} - \frac{1}{A} \right) = \frac{R \cdot P}{2E} \cdot \left(\frac{1}{A} - \frac{R^2}{I_z} \right)$$

Giro en B:

$$\theta_B = \theta_A \pm \int_A^B k \cdot ds = \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M(\theta)}{EI_z} ds = \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P \cdot R \cdot \cos\theta}{EI_z} \cdot R \cdot d\theta = \pm \frac{P \cdot R^2}{EI_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot d\theta$$

$$\theta_B = \frac{P \cdot R^2}{EI_z} \mathcal{U}$$

Ejercicio 5.5.2

Calcular los movimientos del punto B del arco de la figura. Datos: I_z , E , A (ctes.).

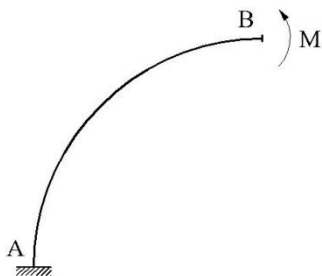


Fig. E.5.5.2.a

Solución:

Se sigue el procedimiento especificado en el ejercicio anterior E.5.5.1.

Cálculo de las reacciones en el empotramiento:

$$\sum F_v = 0; \quad R_A = 0$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_A + M = 0; \quad M_A = M$$

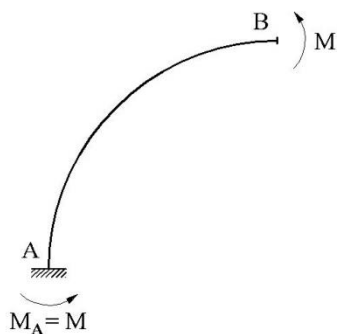


Fig. E.5.5.2.b

Leyes de esfuerzos:

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$M(\theta) - M = 0; \quad M(\theta) = M$$

$$N(\theta) = 0$$

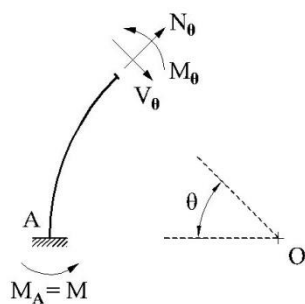


Fig. E.5.5.2.c

Aplicación de las fórmulas de Bresse:

Desplazamiento vertical de B:

$$\delta_{Bv} = \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{M}{EI_z} \right) \cdot R \cdot d\theta = \pm \frac{R^2 \cdot M}{EI_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot d\theta = \frac{R^2 \cdot M}{EI_z} \uparrow$$

Desplazamiento horizontal de B:

$$\delta_{Bh} = \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot (1 - \text{sen} \theta) \cdot \left(\frac{M}{EI_z} \right) \cdot R \cdot d\theta = \pm \frac{R^2 \cdot M}{EI_z} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \text{sen} \theta) d\theta = \pm \frac{R^2 \cdot M}{EI_z} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \leftarrow$$

Giro en B:

$$\theta_B = \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{EI_z} \cdot R \cdot d\theta = \pm \frac{M \cdot R}{EI_z} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \curvearrowright$$

TEMA 6: TEOREMAS ENERGÉTICOS

6.1 EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Ejercicio 6.1.1

Mediante aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales, calcular la flecha en el centro del vano de una viga biapoyada sobre la que actúa una carga P centrada, como se indica en la figura.

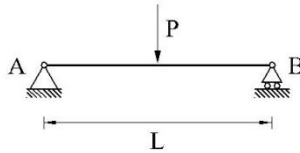
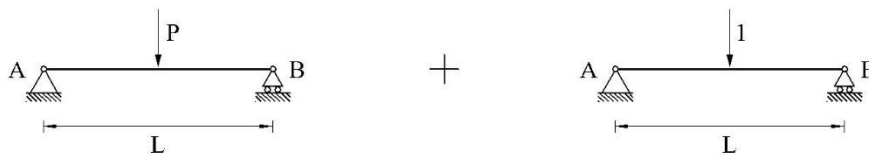


Fig. E.6.1.1.a

Solución:

El estado virtual será la misma viga, con una fuerza vertical de valor unidad en el punto medio.



ESTADO I

ESTADO II

Fig. E.6.1.1.b

Estado I: estado real.

Estado II: estado virtual de la viga con una fuerza vertical de valor unidad en el punto medio, que es donde queremos obtener el valor de la flecha.

Leyes de momentos flectores de los dos estados I y II:Estado I:

$$0 < x < \frac{L}{2}$$

$$M(x) - \frac{P}{2} \cdot x = 0; \quad M(x) = \frac{P}{2} \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = 0 \\ M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{P \cdot L}{4} \end{array} \right.$$

$$\frac{L}{2} < x < L$$

$$M(x) - \frac{P}{2} \cdot x + P \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right) = 0$$

$$M(x) = \frac{P \cdot L}{2} - \frac{P}{2} \cdot x = \frac{P}{2} \cdot (L - x) \quad \left| \begin{array}{l} M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{P \cdot L}{4} \\ M(L) = 0 \end{array} \right.$$

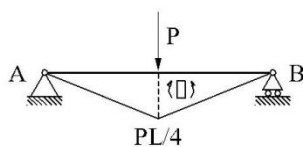


Fig. E.6.1.1.c

Estado II:

$$0 < x < \frac{L}{2}$$

$$M^*(x) = \frac{x}{2} \quad \left| \begin{array}{l} M^*(0) = 0 \\ M^*\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{4} \end{array} \right.$$

$$\frac{L}{2} < x < L$$

$$M^*(x) = \frac{1}{2} \cdot (L - x) \quad \left| \begin{array}{l} M^*\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{4} \\ M^*(L) = 0 \end{array} \right.$$

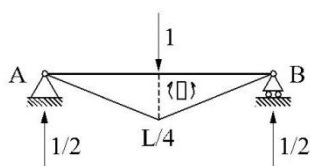


Fig. E.6.1.1.d

Aplicación del PTV:

$$\tau_{\text{ext}}^* = \tau_{\text{esf}}^*$$

$$F_{Dv} \cdot \delta_{Dv} = \int M^* \cdot k \cdot dx + \int N^* \cdot \varepsilon \cdot dx$$

$$1 \cdot \delta_v = \int_0^L M^* \cdot \frac{M}{EI} \cdot dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{P}{2} \cdot x\right) dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{1}{2}(L-x) \cdot \frac{P}{2}(L-x) dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{P \cdot L^3}{96} + \frac{P \cdot L^3}{96} \right)$$

$$\delta_v = \frac{P \cdot L^3}{48EI}$$

Nota aclaratoria:

$$(A) \quad \frac{P}{4} \int_0^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \frac{P}{4} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{P}{4 \cdot 3} \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^3 = \frac{P \cdot L^3}{96}$$

$$(B) \quad \frac{P}{4} \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x)^2 dx = \frac{P}{4} \left(L^2 \cdot x + \frac{x^3}{3} - L \cdot x^2 \right) \Big|_{\frac{L}{2}}^L = \frac{P}{4} \cdot \frac{L^3}{24} = \frac{P \cdot L^3}{96}$$

TEMA 7: INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS HIPERESTÁTICO

7.1 MÉTODO DE LA COMPATIBILIDAD

Ejercicio 7.1.1

Una viga sobre tres apoyos está sometida a una carga uniformemente repartida de valor q . Determinar las reacciones en los apoyos.

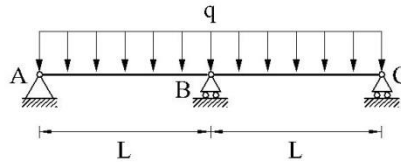


Fig. E.7.1.1.a

Solución:

Para la resolución del ejercicio, se calculará la reacción en el punto B, aplicando la condición de compatibilidad de deformaciones en este punto:

$$\delta v_B = \delta v_B^I + \delta v_B^{II} = 0$$

Grado de hiperestatismo:

2 ecuaciones de equilibrio estático } \rightarrow GH = 1 (Estáticamente indeterminada de primer grado)
3 incógnitas (R_A , R_B y R_C)

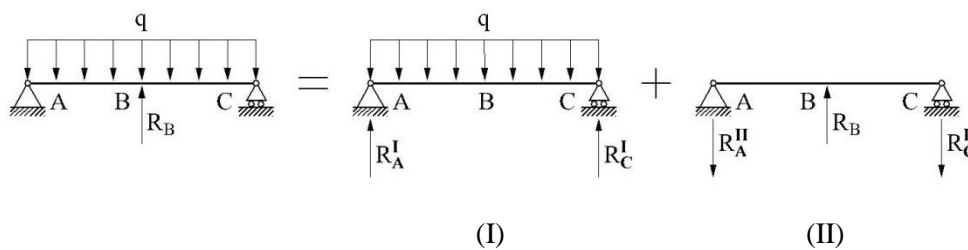
Aplicación del principio de superposición:

Fig. E.7.1.1.b

Cálculo de las reacciones y las leyes de momentos:

ESTADO I

Reacciones:

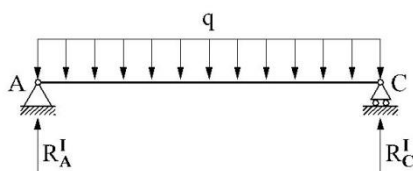


Fig. E.7.1.1.c

$$\sum F_V = 0; \quad R_A^I + R_C^I - q \cdot 2L = 0; \quad R_A^I = q \cdot 2L - R_C^I = q \cdot L$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_C^I \cdot 2L - q \cdot 2L \cdot L = 0; \quad R_C^I = q \cdot L$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < 2L$$

$$M(x) = q \cdot L \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = 0 \\ M(L) = \frac{q \cdot L^2}{2} \\ M(2L) = 0 \end{array} \right.$$

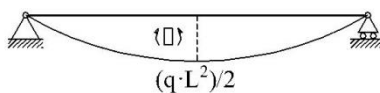
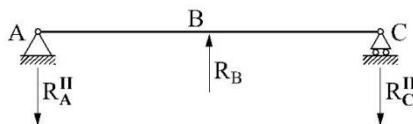


Fig. E.7.1.1.d

ESTADO II



(II)

Fig. E.7.1.1.e

Reacciones:

$$\sum F_V = 0; \quad -R_A^{\text{II}} - R_C^{\text{II}} + R_B = 0; \quad R_A^{\text{II}} = R_B - R_C^{\text{II}}; \quad R_A^{\text{II}} = R_B - \frac{R_B}{2} = \frac{R_B}{2}$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot L - R_C^{\text{II}} \cdot 2L = 0; \quad R_C^{\text{II}} = \frac{R_B}{2}$$

Ley de momentos flectores:

$$0 < x < L$$

$$M(x) + R_A^{\text{II}} \cdot x = 0; \quad M(x) = -\frac{R_B}{2} \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = 0 \\ M(L) = -\frac{R_B}{2} \cdot L \end{array} \right.$$

$$L < x < 2L$$

$$M(x) + R_A^{\text{II}} \cdot x - R_B \cdot (x - L) = 0;$$

$$M(x) = -\frac{R_B}{2} \cdot x + R_B \cdot (x - L) = -\frac{R_B}{2} \cdot x + R_B \cdot x - R_B \cdot L = \frac{R_B}{2} \cdot x - R_B \cdot L$$

$$M(x) = \frac{R_B}{2} \cdot x - R_B \cdot L; \quad \left| \begin{array}{l} M(L) = -\frac{R_B}{2} \cdot L \\ M(2L) = 0 \end{array} \right.$$

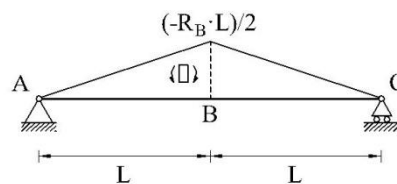


Fig. E.7.1.1.f

Ecuación de compatibilidad de deformaciones:

Se ha liberado la viga continua en el punto B, quedando como una viga simplemente apoyada en los puntos A y C.

La condición de compatibilidad de deformaciones es que el desplazamiento en el punto B debe ser cero:

$$\delta v_B = \delta v_B^{\text{I}} + \delta v_B^{\text{II}} = 0$$

Ahora se calculan los desplazamientos: δv_B^I y δv_B^{II} , aplicando el Teorema de la viga conjugada.

ESTADO I: δv_B^I

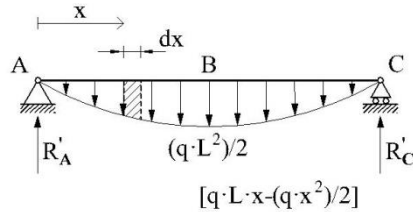


Fig. E.7.1.1.g

$$\sum F_V = 0;$$

$$R'_A + R'_C = \int_0^{2L} \left(q \cdot L \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(q \cdot L \cdot \frac{x^2}{2} - q \cdot \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^{2L} = \frac{q \cdot L}{2} \cdot (2L)^2 - \frac{q}{6} (2L)^3;$$

$$R'_A + R'_C = \frac{2}{3} \cdot q \cdot L^3$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$R'_C \cdot 2L - \int_0^{2L} \left(\left(q \cdot L \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) x \right) dx = 0$$

$$R'_C \cdot 2L - \frac{2}{3} \cdot q \cdot L^4 = 0; \quad R'_C = \frac{1}{3} \cdot q \cdot L^3$$

$$R'_A = \frac{2}{3} \cdot q \cdot L^3 - R'_C = \frac{2}{3} \cdot q \cdot L^3 - \frac{1}{3} \cdot q \cdot L^3 = \frac{1}{3} \cdot q \cdot L^3$$

$$\delta v_B^I = \frac{1}{EI} \cdot Mf_B^I = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{q \cdot L^3}{3} \cdot L + \int_0^L \left(q \cdot L \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) \cdot (L-x) dx \right] = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{q \cdot L^4}{3} + \frac{q \cdot L^4}{8} \right]$$

$$\delta v_B^I = \frac{1}{EI} \cdot \frac{5}{24} \cdot q \cdot L^4 \quad (\downarrow)$$

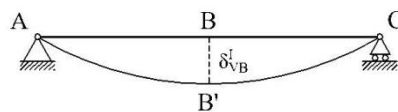


Fig. E.7.1.1.h

ESTADO II: δv_B^{II}

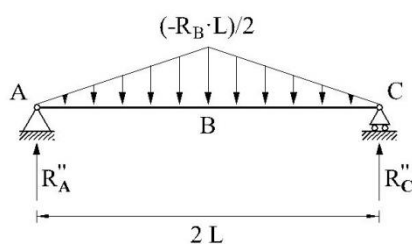


Fig. E.7.1.1.i

$$\sum F_V = 0; \quad R'_A + R'_C - \frac{1}{2} \cdot (2L) \cdot \left(R_B \cdot \frac{L}{2} \right) = 0; \quad R'_A + R'_C = \frac{1}{2} \cdot R_B \cdot L^2$$

$$\sum M_A = 0; \quad R'_C \cdot 2L - \frac{1}{2} \cdot (2L) \cdot \left(R_B \cdot \frac{L}{2} \right) \cdot L = 0$$

$$2R'_C - \frac{1}{2} \cdot R_B \cdot L^2 = 0; \quad R'_C = \frac{1}{4} \cdot R_B \cdot L^2$$

$$R'_A = R_B \cdot L^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \cdot R_B \cdot L^2$$

Mf'_B : momento flector en B de la viga conjugada

$$Mf'_B - R'_A \cdot L + \frac{1}{2} \cdot L \cdot R_B \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot L = 0; \quad Mf'_B = \frac{1}{4} \cdot R_B \cdot L^3 - \frac{R_B \cdot L^3}{12} = \frac{1}{6} \cdot R_B \cdot L^3$$

$$\delta v_B^{\text{II}} = \frac{1}{EI} \cdot Mf'_B = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot R_B \cdot L^3 \right) = \frac{1}{6EI} \cdot R_B \cdot L^3 \quad (\uparrow)$$

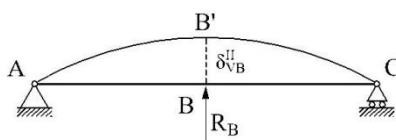


Fig. E.7.1.1.j

Condición de compatibilidad de deformaciones: R_B

$$\delta v_B^{\text{I}} + \delta v_B^{\text{II}} = 0$$

$$\frac{1}{6EI} \cdot R_B \cdot L^3 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{5}{24} \cdot q \cdot L^4 = 0$$

$$R_B = \frac{5 \cdot 6}{24} \cdot q \cdot L = \frac{5}{4} \cdot q \cdot L$$

Equilibrio de la viga continua:

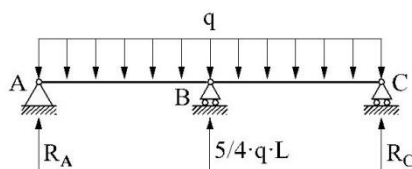


Fig. E.7.1.1.k

$$\sum F_V = 0; \quad R_A + R_C + \frac{5}{4} \cdot q \cdot L - q \cdot 2L = 0; \quad R_A + R_C = \frac{3}{4} \cdot q \cdot L$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_C \cdot 2L + \frac{5}{4} \cdot q \cdot L \cdot L - q \cdot 2L \cdot L = 0; \quad 2R_C - \frac{3}{4} \cdot q \cdot L = 0$$

$$R_C = \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot q \cdot L = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$$

$$R_A = \frac{3}{4} \cdot q \cdot L - \frac{3}{8} \cdot q \cdot L = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$$

7.2 TEOREMA DE LOS TRES MOMENTOS

Ejercicio 7.2.1

En la viga continua sobre cuatro apoyos con el sistema de cargas que muestra la figura, determinar las reacciones en los apoyos, las leyes de esfuerzos y la deformada.

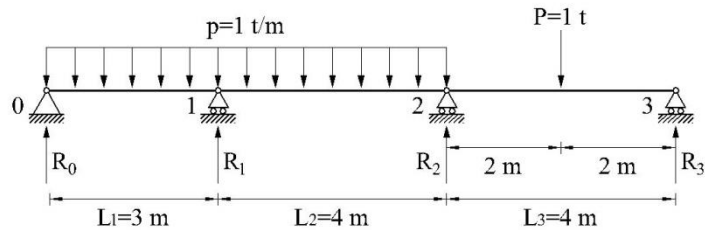


Fig. E.7.2.1.a

Solución:

Para la resolución del ejercicio, se calcularán las reacciones hiperestáticas M_1 y M_2 aplicando el Teorema de los tres momentos:

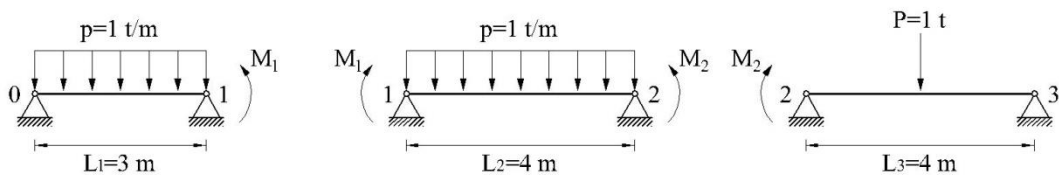


Fig. E.7.2.1.b

Aplicación del Teorema de los tres momentos:

$$M_{m-1} \cdot L_m + 2 \cdot M_m \cdot (L_m + L_{m+1}) + M_{m+1} \cdot L_{m+1} = -6 \cdot \left[\frac{\Omega_m \cdot D_m}{L_m} + \frac{\Omega_{m+1} \cdot d_{m+1}}{L_{m+1}} \right]$$

TRAMO 0-1:

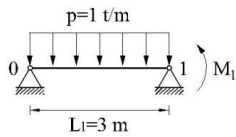


Fig. E.7.2.1.c

TRAMO 1-2:

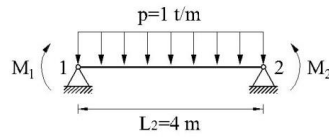


Fig. E.7.2.1.e

TRAMO 2-3:

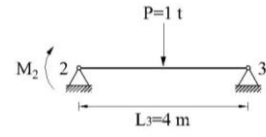


Fig. E.7.2.1.g

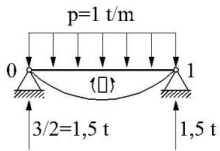


Fig. E.7.2.1.d

$$M(x) = 1,5 \cdot x - \frac{x^2}{2}$$

$$\Omega_1 = \int_0^3 \left(1,5 \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2,25 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$D_1 = 1,5 \text{ m}$$

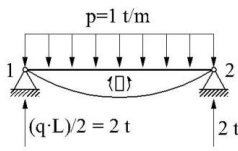


Fig. E.7.2.1.f

$$M(x) = 2 \cdot x - \frac{x^2}{2}$$

$$\Omega_2 = \int_0^4 \left(2 \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{16}{3} \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$D_2 = 2 \text{ m}; \quad d_2 = 2 \text{ m}$$

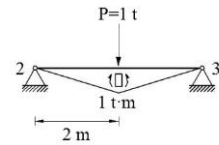


Fig. E.7.2.1.h

$$M = \frac{P \cdot L}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$d_3 = 2 \text{ m}$$

m=1

$$[1] \quad \cancel{M_0} \cdot L_1 + 2 \cdot M_1 \cdot (L_1 + L_2) + M_2 \cdot L_2 = -6 \cdot \left[\frac{\Omega_1 \cdot D_1}{L_1} + \frac{\Omega_2 \cdot d_2}{L_2} \right]$$

m=2

$$[2] \quad M_1 \cdot L_2 + 2 \cdot M_2 \cdot (L_2 + L_3) + \cancel{M_3} \cdot L_3 = -6 \cdot \left[\frac{\Omega_2 \cdot D_2}{L_2} + \frac{\Omega_3 \cdot d_3}{L_3} \right]$$

Sustituyendo:

$$[1] \quad 2 \cdot M_1 \cdot (3+4) + M_2 \cdot 4 = -6 \cdot \left[\frac{\Omega_1 \cdot D_1}{3} + \frac{\Omega_2 \cdot d_2}{4} \right]$$

$$[2] \quad M_1 \cdot 4 + 2 \cdot M_2 \cdot (4+4) = -6 \cdot \left[\frac{\Omega_2 \cdot D_2}{4} + \frac{\Omega_3 \cdot d_3}{4} \right]$$

$$\Omega_1 = \int_0^3 \left(1,5 \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(1,5 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \right) \Big|_0^3 = \frac{1,5}{2} \cdot 3^2 - \frac{3^3}{6} = 2,25 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$\Omega_2 = \int_0^4 \left(2 \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \right) \Big|_0^4 = 4^2 - \frac{4^3}{6} = \frac{16}{3} \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$[1] \quad 14 \cdot M_1 + M_2 \cdot 4 = -6 \cdot \left[\frac{2,25 \cdot 1,5}{3} + \frac{16}{3} \cdot \frac{2}{4} \right] = -22,75$$

$$[2] \quad M_1 \cdot 4 + 16 \cdot M_2 = -6 \cdot \left[\frac{16}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2 \cdot 2}{4} \right] = -22$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$M_1 = -1,327 \text{ t}\cdot\text{m}$$

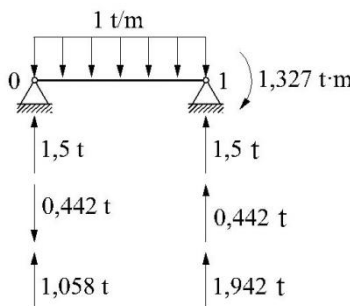
$$M_2 = -1,043 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Nota: El signo negativo nos indica que tienen sentido contrario al considerado inicialmente.

Determinación de las reacciones y leyes de esfuerzos (M, V):

TRAMO 0-1:

Reacciones:



$$\text{Reacciones isostáticas (debidas a } p=1 \text{ t/m): } R_0 = R_1 = \frac{P \cdot L}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1,5 \text{ t}$$

$$\text{Reacciones hiperestáticas (debidas a } M=1,327 \text{ t}\cdot\text{m): } -R_0 = R_1 = \frac{M}{L} = \frac{1,327}{3} = 0,442 \text{ t}$$

Totales

Fig. E.7.2.1.i

Leyes de esfuerzos:

$$0 < x < 3 \text{ m}$$

$$M_0^1(x) = 1,058 \cdot x - 1 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

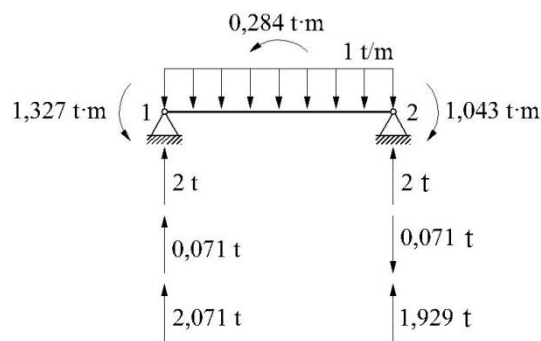
$$M_0^1(x) = 1,058 \cdot x - \frac{x^2}{2}; \begin{cases} M(0) = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(3) = -1,327 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(1,5) = 0,462 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(1,058) = 0,559 \text{ t}\cdot\text{m} \end{cases}$$

$$V_0^1(x) = \frac{dM_0^1(x)}{dx} = 1,058 - x ; \quad \left| \begin{array}{l} V(0) = 1,058 \text{ t} \\ V(3) = -1,942 \text{ t} \end{array} \right.$$

$$V_0^1(x) = 0 \rightarrow x = 1,058 \text{ m}$$

TRAMO 1-2:

Reacciones:



Reacciones isostáticas (debidas a $p=1 \text{ t/m}$): $R_1 = R_2 = \frac{P \cdot L}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2 \text{ t}$

Reacciones hiperestáticas (debidas a M_1 y M_2): $-R_1 = R_2 = \frac{M}{L} = 0,071 \text{ t}$

Totales

Fig. E.7.2.1.j

Leyes de esfuerzos:

$$0 < x < 4 \text{ m}$$

$$M_1^2(x) = 2,071 \cdot x - 1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - 1,327$$

$$M_1^2(x) = 2,071 \cdot x - \frac{x^2}{2} - 1,327 ; \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = -1,327 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(4) = -1,043 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2,071) = 0,818 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$M(x) = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 3,35 \text{ m} \\ x = 0,792 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$V_1^2(x) = \frac{dM_1^2(x)}{dx} = 2,071 - x ; \quad \left| \begin{array}{l} V(0) = 2,071 \text{ t} \\ V(4) = -1,929 \text{ t} \end{array} \right.$$

$$V(x) = 0 \rightarrow x = 2,071 \text{ m}$$

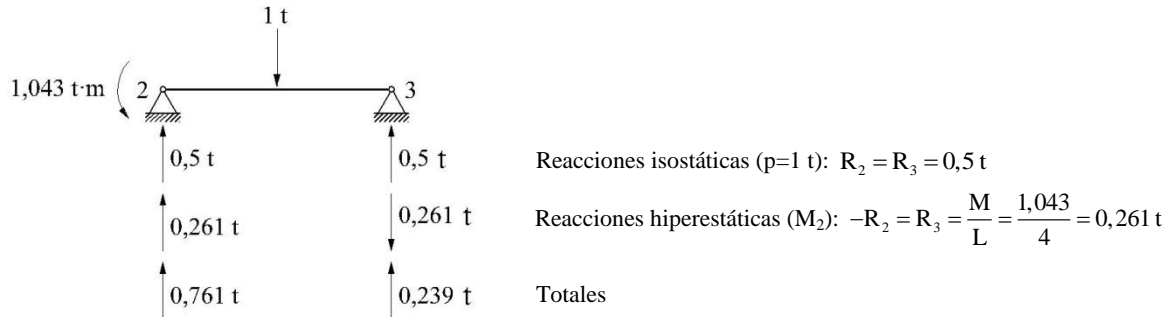
TRAMO 2-3:Reacciones:

Fig. E.7.2.1.k

Leyes de esfuerzos:

$$0 < x < 2 \text{ m}$$

$$M_2^3(x) = -1,043 + 0,761 \cdot x ; \quad \begin{cases} M(0) = -1,043 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2) = 0,479 \text{ t}\cdot\text{m} \end{cases}$$

$$V_2^3(x) = \frac{dM_2^3(x)}{dx} = 0,761 \text{ t}$$

$$2 \text{ m} < x < 4 \text{ m}$$

$$M_2^3(x) = -1,043 + 0,761 \cdot x - 1 \cdot (x - 2) = 0,957 - 0,239 \cdot x ; \quad \begin{cases} M(2) = 0,479 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(4) = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{cases}$$

$$V_2^3(x) = \frac{dM_2^3(x)}{dx} = -0,239 \text{ t}$$

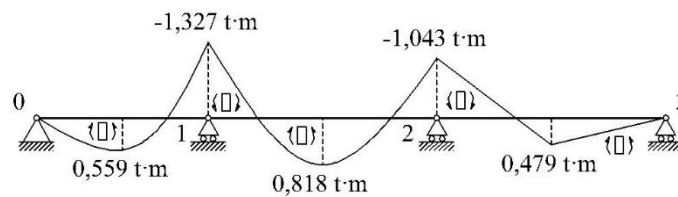
Diagramas de esfuerzos:Momentos flectores:

Fig. E.7.2.1.l

Esfuerzos cortantes:

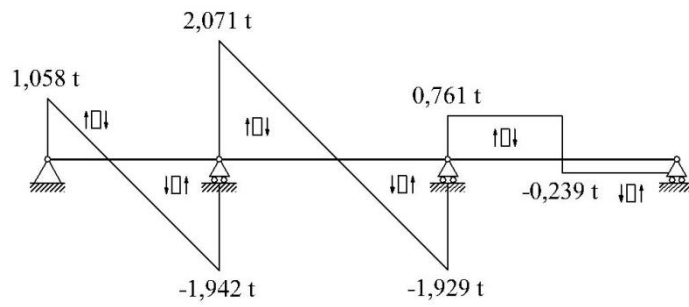


Fig. E.7.2.1.m

Deformada:

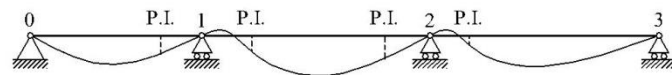


Fig. E.7.2.1.n

Ejercicio 7.2.2

Dibujar las leyes de esfuerzos y deformada, señalando los puntos de inflexión, en la viga continua de rigidez constante indicada en la figura (Convocatoria Febrero de 2015).

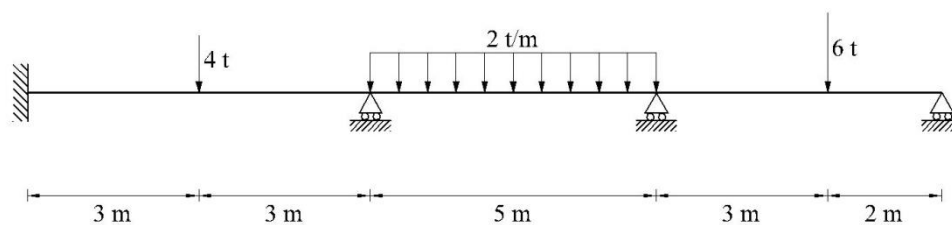


Fig. E.7.2.2.a

Solución:

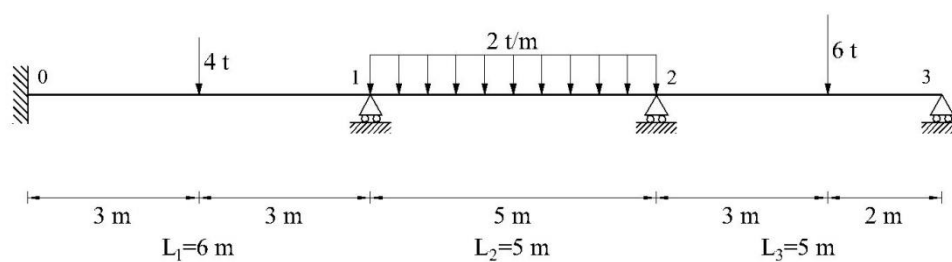


Fig. E.7.2.2.b

Se aplica el teorema de los dos momentos al tramo 0-1, y el teorema de los tres momentos a los tramos 0-1-2 y 1-2-3.

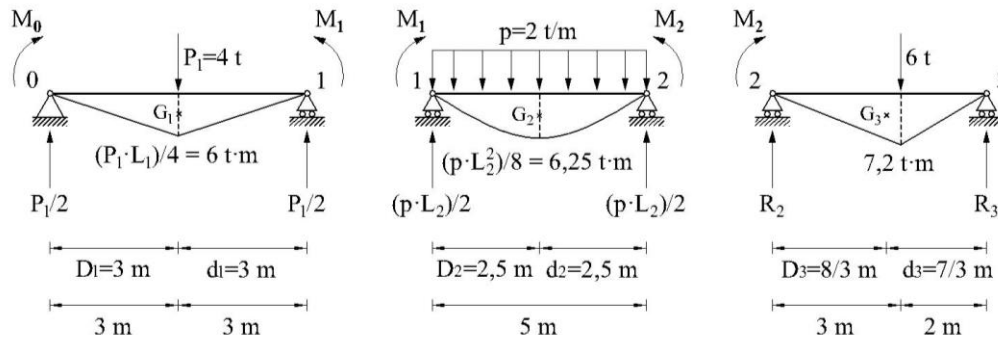


Fig. E.7.2.2.c

TRAMO 0-1:

$L_1 = 6 \text{ m}$

$\frac{P_1 \cdot L_1}{4} = \frac{4 \cdot 6}{4} = 6 \text{ t}$

$\Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ t} \cdot \text{m}^2$

$D_1 = 3 \text{ m}$

$d_1 = 3 \text{ m}$

TRAMO 1-2:

$L_2 = 5 \text{ m}$

$\frac{P \cdot L_2}{8} = 6,25 \text{ t} \cdot \text{m}$

$0 < x < 5 \text{ m}$

$M(x) - \frac{p \cdot L_2}{2} \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2} = 5 \cdot x - x^2$

$M(0) = 0$

$M(5 \text{ m}) = 0$

$M(2,5 \text{ m}) = 6,25 \text{ t} \cdot \text{m}$

$\Omega_2 = \int_0^{L_2} (5 \cdot x - x^2) dx = 5 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^5$

$\Omega_2 = \frac{62,5}{3} = 20,83$

$D_2 = d_2 = 2,5 \text{ m}$

TRAMO 2-3:

$\Sigma F_v = 0; R_2 + R_3 - 6 = 0;$

$R_2 = 2,4 \text{ t}$

$\Sigma M_2 = 0; R_3 \cdot 5 - 6 \cdot 3 = 0;$

$R_3 = 3,6 \text{ t}$

$0 < x < 3 \text{ m}$

$M(x) - 2,4 \cdot x = 0;$

$M(x) = 2,4 \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = 0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ M(3) = 7,2 \text{ t} \cdot \text{m} \end{array} \right.$

$3 \text{ m} < x < 5 \text{ m}$

$M(x) - 2,4 \cdot x + 6 \cdot (x - 3) = 0;$

$M(x) = -3,6 \cdot x + 18;$

$M(3) = 7,2 \text{ t} \cdot \text{m}$

$M(5) = 0 \text{ t} \cdot \text{m}$

$\Omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7,2 = 18$

$\Omega_{31} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7,2 = 10,8$

$\Omega_{32} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7,2 = 7,2$

$x_{G3} = \frac{10,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 7,2 \cdot \left(3 + \frac{1}{3} \cdot 2\right)}{18} = 2,667 \text{ m}$

$D_3 = \frac{8}{3} = 2,667 \text{ m}$

$d_3 = 5 - \frac{8}{3} = 2,333 \text{ m}$

Teorema de los dos momentos

$$2 \cdot M_0 + M_1 = -6 \cdot \frac{18 \cdot 3}{6^2} ; \quad 2 \cdot M_0 + M_1 = -9$$

Teorema de los tres momentos

$$m = 1; \quad M_0 \cdot L_1 + 2 \cdot M_1 \cdot (L_1 + L_2) + M_2 \cdot L_2 = -6 \cdot \left(\frac{\Omega_1 \cdot D_1}{L_1} + \frac{\Omega_2 \cdot d_2}{L_2} \right)$$

$$6 \cdot M_0 + 22 \cdot M_1 + 5 \cdot M_2 = -116,5$$

$$m = 2; \quad M_1 \cdot L_2 + 2 \cdot M_2 \cdot (L_2 + L_3) + M_3 \cdot L_3 = -6 \cdot \left(\frac{\Omega_2 \cdot D_2}{L_2} + \frac{\Omega_3 \cdot d_3}{L_3} \right)$$

$$5 \cdot M_1 + 20 \cdot M_2 = -112,9$$

Se obtiene el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$2 \cdot M_0 + M_1 = -9$$

$$6 \cdot M_0 + 22 \cdot M_1 + 5 \cdot M_2 = -116,5$$

$$5 \cdot M_1 + 20 \cdot M_2 = -112,9$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son:

$$M_0 = -2,774 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$M_1 = -3,452 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$M_2 = -4,782 \text{ t}\cdot\text{m}$$

M_0 es el momento en el empotramiento, y M_1 y M_2 son los momentos en los apoyos intermedios 1 y 2.

A continuación se obtienen las expresiones analíticas de las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes:

Leyes de esfuerzos y reacciones

TRAMO 0-1:

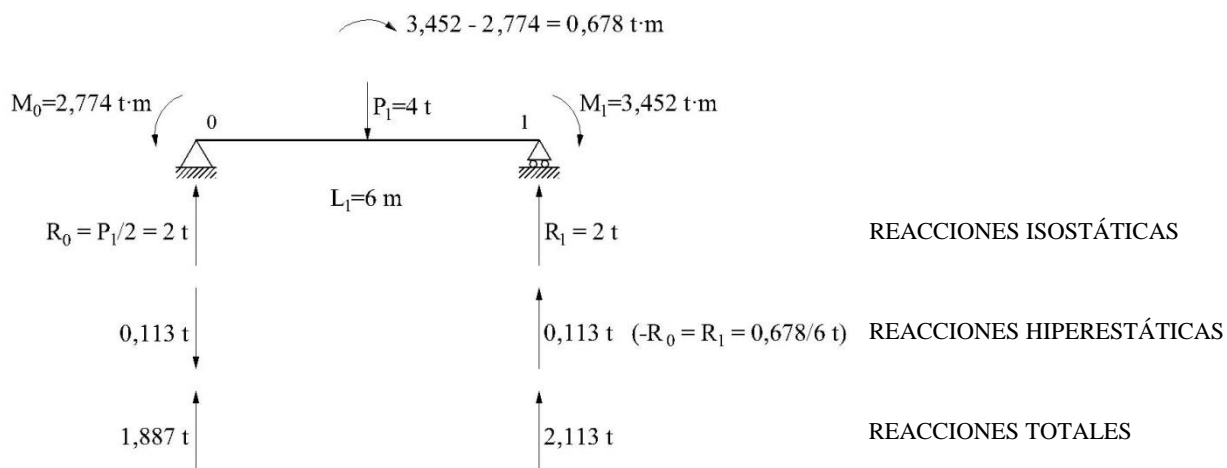


Fig. E.7.2.2.d

$0 \text{ m} < x < 3 \text{ m}; \quad M(x) - 1,887 \cdot x + 2,774 = 0;$

$$M(x) = 1,887 \cdot x - 2,774 \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = -2,774 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(3) = 2,887 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$V(x) = 1,887 \text{ t}$

$3 \text{ m} < x < 6 \text{ m}; \quad M(x) - 1,887 \cdot x + 4 \cdot (x - 3) + 2,774 = 0;$

$$M(x) = -2,113 \cdot x + 9,226 \quad \left| \begin{array}{l} M(3) = 2,887 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(6) = -3,452 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$V(x) = -2,113 \text{ t}$

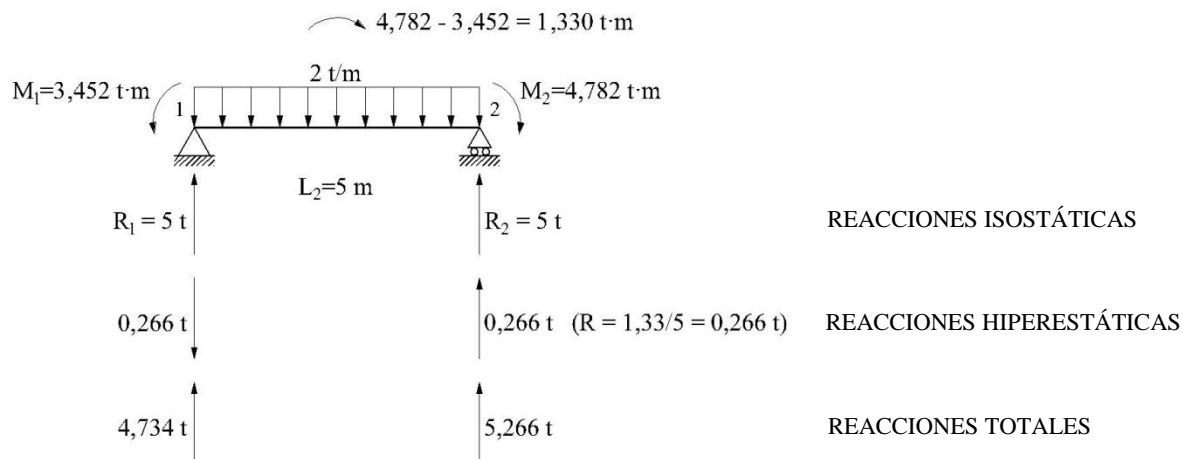
TRAMO 1-2:

Fig. E.7.2.2.e

$$0 \text{ m} < x < 5 \text{ m}; \quad M(x) - 4,734 \cdot x + 3,452 + 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0;$$

$$M(x) = -x^2 + 4,734 \cdot x - 3,452 \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = -3,452 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(5) = -4,782 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x) = -2 \cdot x + 4,734 \quad \left| \begin{array}{l} V(0) = 4,734 \text{ t} \\ V(5) = -5,266 \text{ t} \end{array} \right.$$

$$M_{\max} \rightarrow V(x)=0 \rightarrow x=2,367 \text{ m}; \quad M_{\max}(2,367 \text{ m}) = 2,1507 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$M(x) = 0 \rightarrow x_1 = 3,834 \text{ m}; \quad x_2 = 0,9005 \text{ m}$$

TRAMO 2-3:

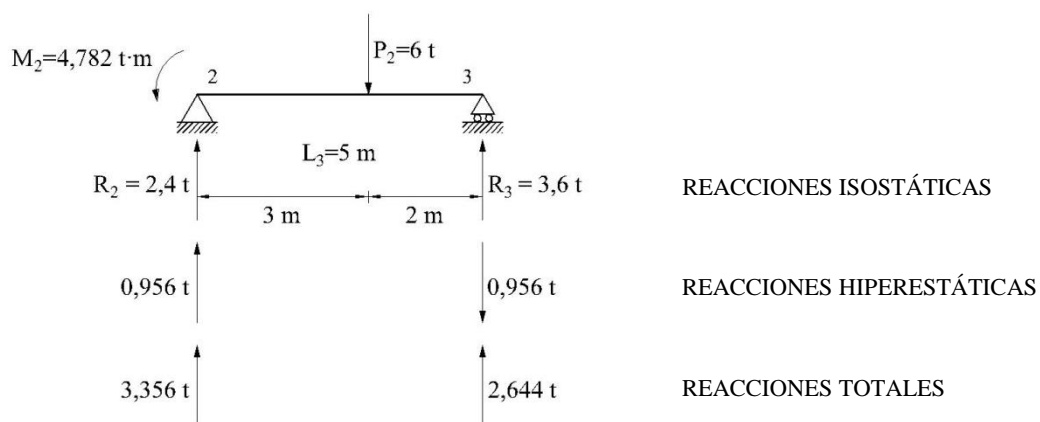


Fig. E.7.2.2.f

$0 \text{ m} < x < 3 \text{ m}; \quad M(x) - 3,356 \cdot x + 4,782 = 0;$

$$M(x) = 3,356 \cdot x - 4,782 \quad \left| \begin{array}{l} M(0) = -4,782 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(3) = 5,286 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$V(x) = 3,356 \text{ t}$

$3 \text{ m} < x < 5 \text{ m}; \quad M(x) - 3,356 \cdot x + 6 \cdot (x - 3) + 4,782 = 0;$

$$M(x) = -2,644 \cdot x + 13,218 \quad \left| \begin{array}{l} M(3) = 5,286 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(5) = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$V(x) = -2,644 \text{ t}$

Diagramas de esfuerzos

Esfuerzos cortantes:

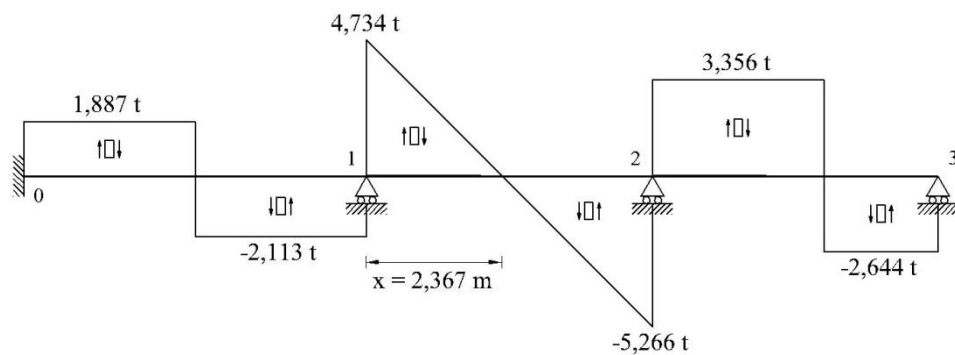


Fig. E.7.2.2.g

Momentos flectores:

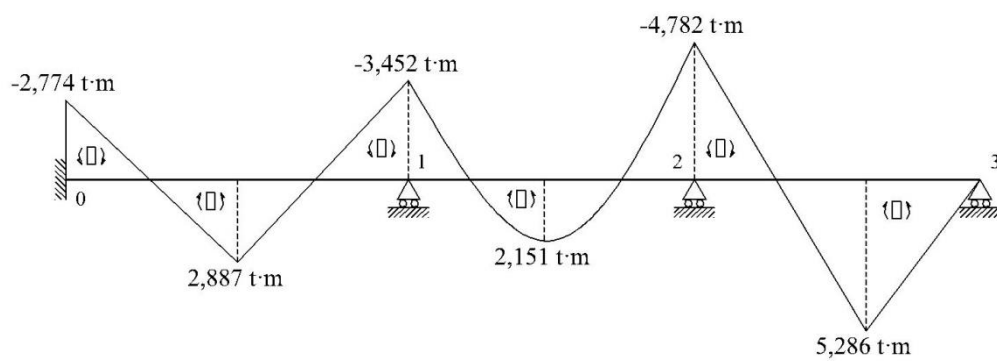


Fig. E.7.2.2.h

Deformada:



Fig. E.7.2.2.i

TEMA 8: SIMETRÍA Y ANTIMETRÍA

8.1 SIMETRÍA Y ANTIMETRÍA

Ejercicio 8.1.1

El pórtico de la figura es simétrico de forma pero no de carga. Sabiendo que las barras tienen un módulo de elasticidad de valor $E=2,1 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2$ y una sección de dimensiones 0,35 (ancho) x 0,40 (alto) m ($I = 0,00227813 \text{ m}^4$).

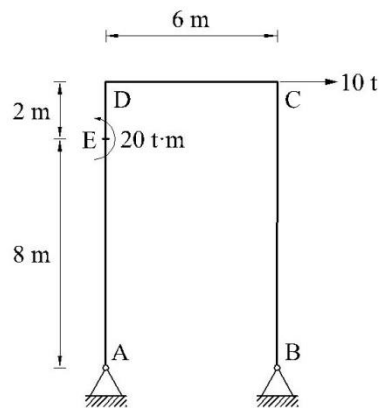


Fig. E.8.1.1.a

Se pide:

- Las leyes de esfuerzos (momentos flectores, cortantes y axiales).
- Los desplazamientos y giros de todos los nudos.
- La representación de la deformada.

Solución:

Descomposición en los estados simétrico y antimétrico:

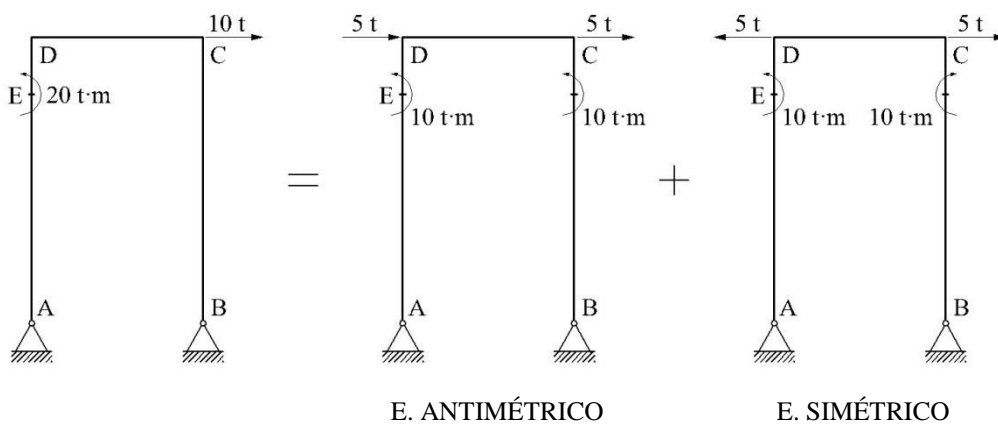


Fig. E.8.1.1.b

Resolución del estado simétrico: determinación de los momentos hiperestáticos M

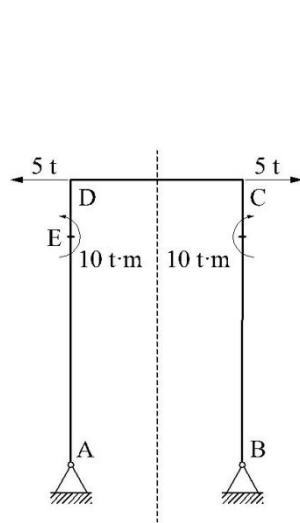


Fig. E.8.1.1.c

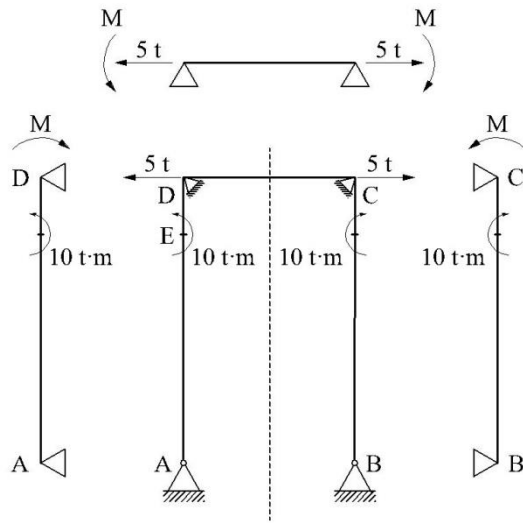
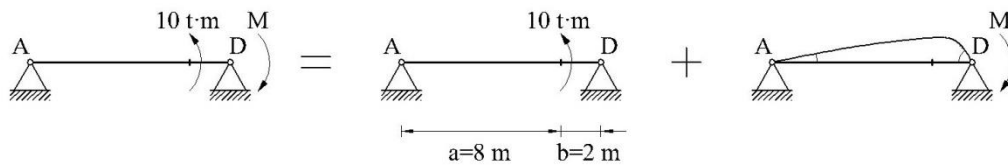


Fig. E.8.1.1.d

Tramo AD:



(I) (II)
Fig. E.8.1.1.e

$$\theta_A = \theta_A^I + \theta_A^{II}$$

$$\theta_A^I = -\frac{M \cdot (L^2 - 3 \cdot b^2)}{6EI \cdot L}$$

$$\theta_D^{II} = -\frac{M \cdot L}{3EI}$$

$$\theta_D = \theta_D^I + \theta_D^{II}$$

$$\theta_D^I = -\frac{M \cdot (L^2 - 3 \cdot a^2)}{6EI \cdot L}$$

$$\theta_A^{II} = \frac{M \cdot 10}{6EI}$$

$$\theta_D = \frac{46}{3EI} - \frac{M \cdot 10}{3EI} = \theta_D^{izq}$$

$$L = 10m$$

$$\theta_D^{II} = -\frac{M \cdot 10}{3EI}$$

$$\theta_A^I = -\frac{10 \cdot (L^2 - 3 \cdot 2^2)}{6EI \cdot 10} = -\frac{44}{3EI}$$

$$\theta_D^I = -\frac{10 \cdot (L^2 - 3 \cdot 8^2)}{6EI \cdot 10} = \frac{46}{3EI}$$

$$\theta_A^{II} = \frac{M \cdot L}{6EI}$$

Tramo DC:

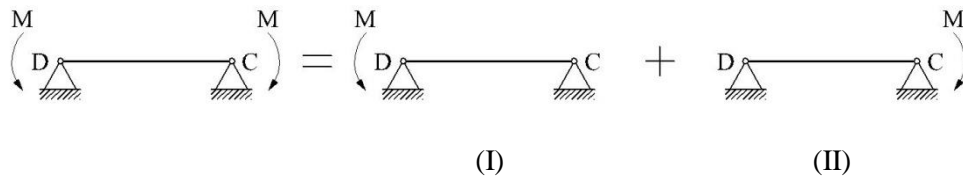


Fig. E.8.1.1.f

$$\theta_D = \theta_D^I + \theta_D^{II}$$

$$\theta_D^{\text{dcha}} = \frac{M \cdot L}{3EI} + \frac{M \cdot L}{6EI} = \frac{M \cdot L}{2EI}$$

$$\theta_D^{\text{dcha}} = \frac{M \cdot 6}{2EI} = \frac{3 \cdot M}{EI}$$

$$\theta_D^I = \frac{M \cdot L}{3EI}$$

$$\theta_D^{\text{I}} = -\frac{M \cdot L}{6EI}$$

$$\theta_D^{II} = \frac{M \cdot L}{6EI}$$

$$\theta_D^{\text{II}} = -\frac{M \cdot L}{3EI}$$

Obtención del momento hiperestático M: aplicación de condición de compatibilidad de giros en D.

$$\theta_D^{\text{izq}} = \theta_D^{\text{dcha}}$$

$$\frac{46}{3EI} - \frac{10 \cdot M}{3EI} = \frac{3 \cdot M}{EI} ; M \cdot (9 + 10) = 46$$

$$M = \frac{46}{19} = 2,421 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Leyes de esfuerzos del estado simétrico

Tramo AD:

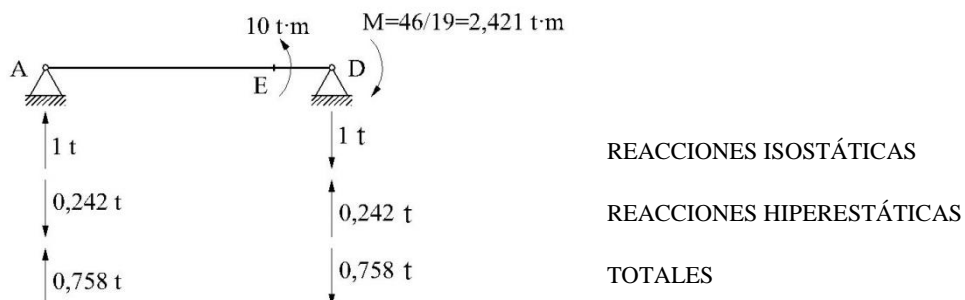


Fig. E.8.1.1.g

Leyes de esfuerzos: tramo AD

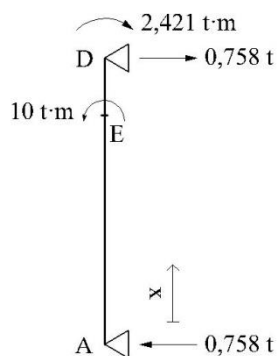


Fig. E.8.1.1.h

$$0 < x < 8 \text{ m}$$

$$M(x)_A^E - 0,758 \cdot x = 0; \quad M(x)_A^E = 0,758 \cdot x; \quad \left. \begin{array}{l} M(0)_A^E = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(8)_A^E = 6,064 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right\}$$

$$V(x)_A^E = \frac{dM(x)}{dx} = 0,758 \text{ t}$$

$$N(x)_A^E = 0 \text{ t}$$

$$8 \text{ m} < x < 10 \text{ m}$$

$$M(x)_E^D - 0,758 \cdot x + 10 = 0; \quad M(x)_E^D = 0,758 \cdot x - 10; \quad \left. \begin{array}{l} M(8)_E^D = -3,936 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(10)_E^D = -2,421 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right\}$$

$$V(x)_E^D = \frac{dM(x)}{dx} = 0,758 \text{ t}$$

$$N(x)_E^D = 0 \text{ t}$$

Tramo DC:

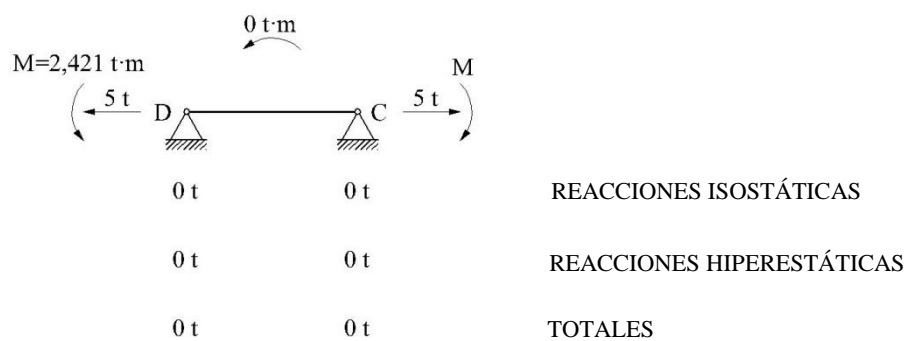


Fig. E.8.1.1.i

Leyes de esfuerzos: tramo DC

$$0 < x < 6 \text{ m}$$

$$M(x)_D^C + 2,421 = 0; \quad M(x)_D^C = -2,421 \text{ t}\cdot\text{m}$$

$$V(x)_D^C = \frac{dM(x)}{dx} = 0 \text{ t}$$

$$N(x)_D^C - 5,758 = 0; \quad N(x)_D^C = 5,758 \text{ t}$$

Diagramas de esfuerzos: estado simétrico

Momentos flectores:

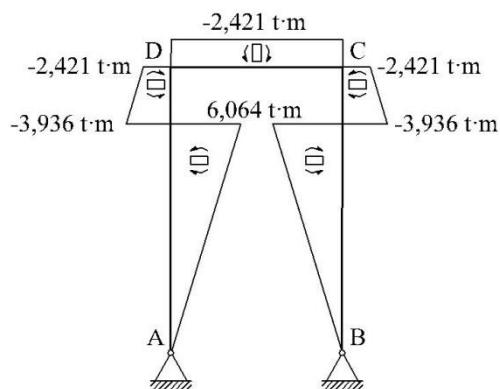


Fig. E.8.1.1.j

Esfuerzos cortantes:

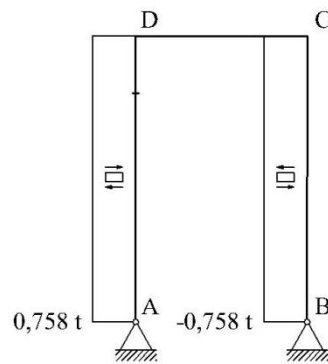


Fig. E.8.1.1.k

Esfuerzos axiales:

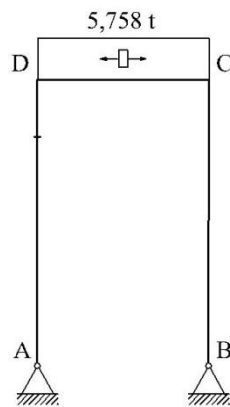


Fig. E.8.1.1.l

Leyes de esfuerzos del estado asimétrico

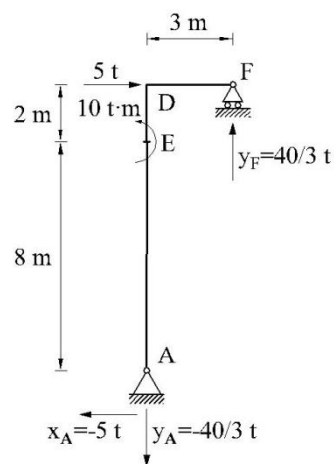


Fig. E.8.1.1.m

$$\sum F_x = 0; \quad x_A + 5 = 0; \quad x_A = -5 \text{ t}$$

$$\sum F_y = 0; \quad y_A + y_F = 0; \quad y_A = -y_F = -\frac{40}{3} \text{ t}$$

$$\sum M_A = 0; \quad 10 - 5 \cdot 10 + y_F \cdot 3 = 0; \quad y_F = \frac{40}{3} \text{ t}$$

Leyes de esfuerzos: tramo AE

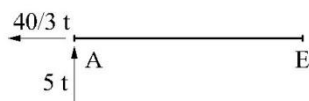


Fig. E.8.1.1.n

$$0 < x < 8 \text{ m}$$

$$M(x)_A^E - 5 \cdot x = 0; \quad M(x)_A^E = 5 \cdot x; \quad \left. \begin{array}{l} M(0)_A^E = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(8)_A^E = 40 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right\}$$

$$V(x)_A^E = \frac{dM(x)}{dx} = 5 \text{ t}$$

$$N(x)_A^E - \frac{40}{3} = 0; \quad N(x)_A^E = \frac{40}{3} \text{ t}$$

Leyes de esfuerzos: tramo ED

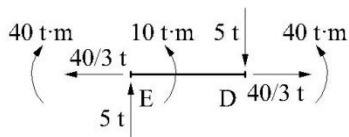


Fig. E.8.1.1.ñ

$$0 < x < 2 \text{ m}$$

$$M(x)_E^D + 10 - 40 - 5 \cdot x = 0; \quad M(x)_E^D = 5 \cdot x + 30; \quad \left. \begin{array}{l} M(0)_E^D = 30 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2)_E^D = 40 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right\}$$

$$V(x)_E^D = \frac{dM(x)}{dx} = 5 \text{ t}$$

$$N(x)_E^D - \frac{40}{3} = 0; \quad N(x)_E^D = \frac{40}{3} \text{ t}$$

Leyes de esfuerzos: tramo DF

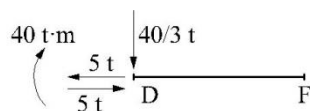


Fig. E.8.1.1.o

$$0 < x < 3 \text{ m}$$

$$M(x)_D^F - 40 + \frac{40}{3} \cdot x = 0; \quad M(x)_D^F = 40 - \frac{40}{3} \cdot x; \quad \begin{cases} M(0)_D^F = 40 \text{ t·m} \\ M(3)_D^F = 0 \text{ t·m} \end{cases}$$

$$V(x)_D^F = \frac{dM(x)}{dx} = -\frac{40}{3} \text{ t}$$

$$N(x)_D^F - 5 + 5 = 0; \quad N(x)_D^F = 0 \text{ t}$$

Diagramas de esfuerzos: estructura antisimétrica

Momentos flectores:

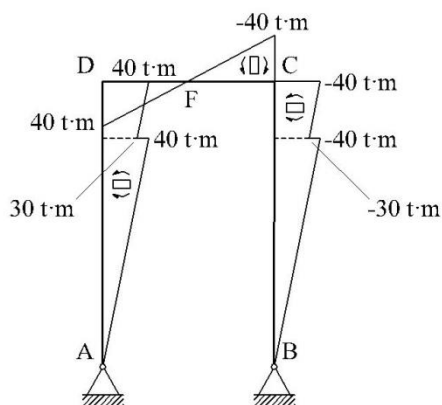


Fig. E.8.1.1.p

Esfuerzos cortantes:

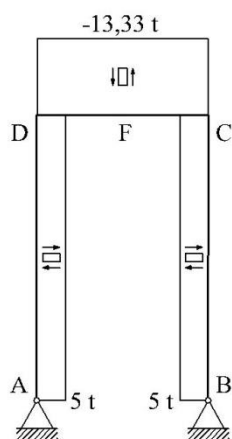


Fig. E.8.1.1.q

Esfuerzos axiales:

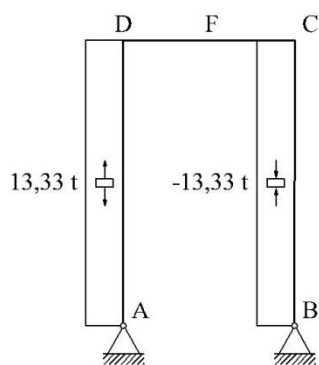


Fig. E.8.1.1.r

Leyes de esfuerzos de la estructura real (Estado simétrico + Estado antimétrico):

Tramo AE:

$$0 < x < 8 \text{ m}$$

$$M(x)_A^E = 5 \cdot x + 0,758 \cdot x = 5,758 \cdot x ; \quad \begin{cases} M(0)_A^E = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(8)_A^E = 46,064 \text{ t}\cdot\text{m} \end{cases}$$

$$V(x)_A^E = \frac{dM(x)}{dx} = 5,758 \text{ t}$$

$$N(x)_A^E = 13,333 + 0 = 13,333 \text{ t}$$

Tramo ED:

$$0 < x < 2 \text{ m}$$

$$M(x)_E^D = 5 \cdot x + 30 + 0,758 \cdot x - 3,936 = 5,758 \cdot x + 26,064 ; \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_E^D = 26,064 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2)_E^D = 37,58 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_E^D = \frac{dM(x)}{dx} = 5,758 \text{ t}$$

$$N(x)_E^D = 13,333 + 0 = 13,333 \text{ t}$$

Tramo DC:

$$0 < x < 6 \text{ m}$$

$$M(x)_D^C = 40 - \frac{40}{3} \cdot x - 2,421 = 37,579 - 13,333 \cdot x ; \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_D^C = 37,579 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(3)_D^C = -2,421 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(6)_D^C = -42,421 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$M(x)_D^F = 0 = 37,579 - 13,333 \cdot x ; \quad x = 37,579 \cdot \frac{3}{40} = 2,8184 \text{ m}$$

$$V(x)_D^F = \frac{dM(x)}{dx} = -13,333 \text{ t}$$

$$N(x)_D^F = 0 + 5,758 = 5,758 \text{ t}$$

Tramo BG:

$$0 < x < 8 \text{ m}$$

$$M(x)_B^G = 0,758 \cdot x - 5 \cdot x = -4,242 \cdot x ; \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_B^G = 0 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(8)_B^G = -33,936 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_B^G = \frac{dM(x)}{dx} = 4,242 \text{ t}$$

$$N(x)_B^G = 0 - 13,333 = -13,333 \text{ t}$$

Tramo GC:

$$0 < x < 2 \text{ m}$$

$$M(x)_G^C = 0,758 \cdot x - 3,936 - 5 \cdot x - 30$$

$$M(x)_G^C = -4,242 \cdot x - 33,936 \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_G^C = -33,936 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2)_G^C = -42,421 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$V(x)_G^C = \frac{dM(x)}{dx} = 4,242 \text{ t}$$

$$N(x)_G^C = 0 - 13,333 = -13,333 \text{ t}$$

Leyes de esfuerzos estructura real

Momentos flectores:

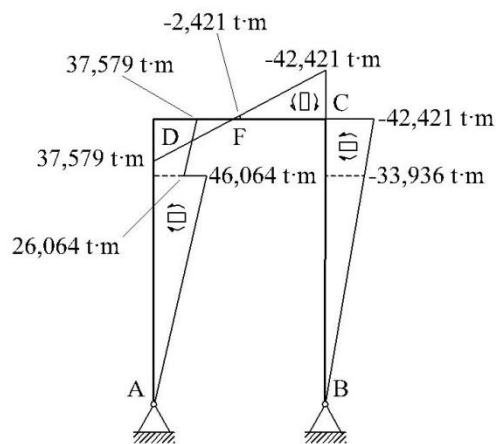


Fig. E.8.1.1.s

Esfuerzos cortantes:

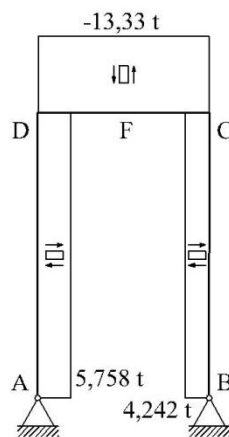


Fig. E.8.1.1.t

Esfuerzos axiales:

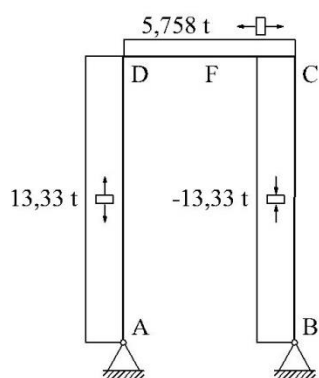


Fig. E.8.1.1.u

Movimientos en los nudos: aplicación de los Th. de Mohr generalizados

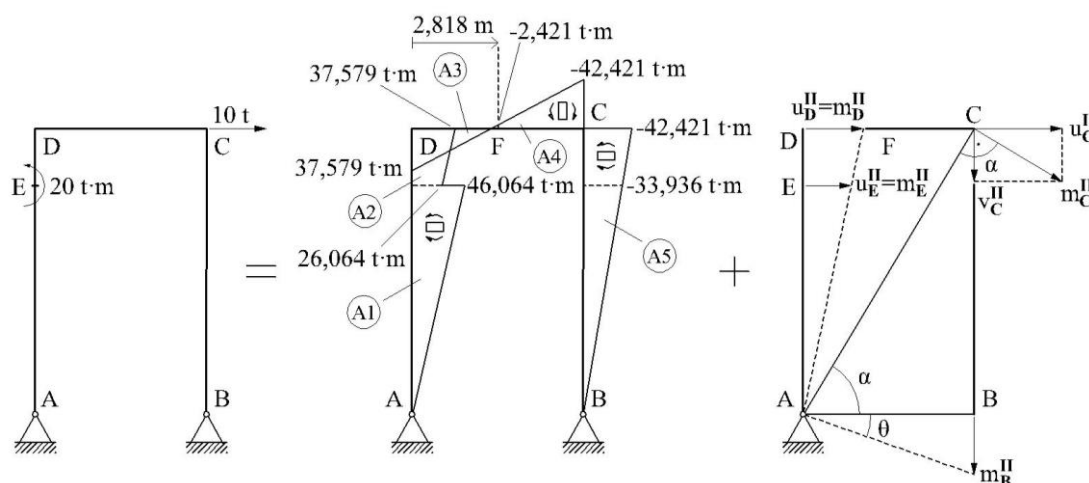


Fig. E.8.1.1.v

$$EI = 4784,073 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 46,064 = 184,256 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$A_2 = \frac{26,064 + 37,579}{2} \cdot 2 = 63,643 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 37,579 \cdot 2,818 = 52,949 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$A_4 = \frac{1}{2} \cdot 42,421 \cdot 3,182 = 67,492 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$A_5 = \frac{1}{2} \cdot 42,421 \cdot 10 = 212,105 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

Estado I:

$$u_B^I = \frac{1}{EI} \left[\left(A_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \right) + (A_2 \cdot (8 + 0,6508)) + (A_3 \cdot 10) - (A_4 \cdot 10) - \left(A_5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 \right) \right]$$

$$u_B^I = \frac{1}{EI} \cdot (-26,202) = -5,476923 \cdot 10^{-3} \text{ m} (\leftarrow)$$

$$v_B^I = \frac{1}{EI} \left[\left(A_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) + (A_2 \cdot 6) + \left(A_3 \cdot \left(6 - \frac{1}{3} \cdot 2,818 \right) \right) - \left(A_4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,182 \right) - (A_5 \cdot 0) \right]$$

$$v_B^I = \frac{1}{EI} \cdot (1683,764) = 0,351952 \text{ m} (\uparrow)$$

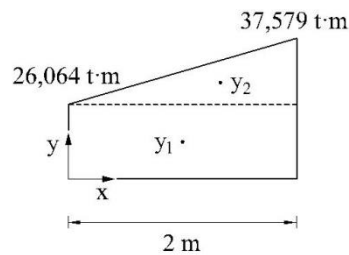


Fig. E.8.1.1.w

$$A_2 = \frac{26,064 + 37,579}{2} \cdot 2 = 63,643 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

$$x_{CG} = \frac{\left(26,064 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (37,579 - 26,064) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right)}{63,643} = 0,6508 \text{ m}$$

Estado II:

$$m_B^II = m_B^I$$

$$v_B^II = v_B^I$$

$$m_B^II = \theta \cdot AB; \quad \theta = \frac{m_B^II}{AB} = \frac{v_B^II}{AB} = \frac{-0,351952}{6} = -5,86587 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \approx$$

$$v_B^II = m_B^II \cdot \cos 0 = -0,351952 \text{ m} (\downarrow)$$

Desplazamientos de la estructura real:Punto E:

$$u_B^I = \frac{1}{EI} \left(-A_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 \right) = \frac{-491,349}{EI} = -0,102705 \text{ m}(\leftarrow)$$

$$v_B^I = 0$$

$$u_B^{II} = AE \cdot \theta = 8 \cdot 5,86587 \cdot 10^{-2} = 0,469269 \text{ m}(\rightarrow)$$

$$v_B^{II} = 0$$

$$u_B = u_B^I + u_B^{II} = -0,102705 + 0,469269 = 0,366564 \text{ m}(\rightarrow)$$

$$v_B = 0$$

Punto D:

$$u_D^I = \frac{1}{EI} \left(-A_1 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 8 \right) - A_2 \cdot (2 - 0,6508) \right) = -0,197683 \text{ m}(\leftarrow)$$

$$v_D^I = 0$$

$$u_D^{II} = AD \cdot \theta = 10 \cdot 5,86587 \cdot 10^{-2} = 0,586587 \text{ m}(\rightarrow)$$

$$v_D^{II} = 0$$

$$u_D = u_D^I + u_D^{II} = -0,193683 + 0,586587 = 0,388904 \text{ m}(\rightarrow)$$

$$v_D = 0$$

Punto C:

$$u_C^I = \frac{1}{EI} \left(-A_1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 8 + 2 \right) - A_2 \cdot (2 - 0,6508) \right) = -0,197683 \text{ m}(\leftarrow)$$

$$v_C^I = \frac{1}{EI} \left[A_1 \cdot 6 + A_2 \cdot 6 + A_3 \cdot \left(6 - \frac{1}{3} \cdot 2,818 \right) - A_4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,182 \right] = \frac{1}{EI} \cdot 1683,764 = 0,351952 \text{ m}(\uparrow)$$

$$AC = \sqrt{6^2 + 10^2} = 11,662 \text{ m}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{10}{6}\right) = 59,036^\circ$$

$$m_C^{II} = AC \cdot \theta = 11,662 \cdot 5,86587 \cdot 10^{-2} = 0,684072$$

$$u_C^{\text{II}} = m_C^{\text{II}} \cdot \text{sen} \alpha = 0,586587 \text{ m}(\rightarrow)$$

$$v_C^{\text{II}} = -m_C^{\text{II}} \cdot \text{cos} \alpha = -0,3519522 \text{ m}(\downarrow)$$

$$u_C = u_C^{\text{I}} + u_C^{\text{II}} = -0,197683 + 0,586587 = 0,388904 \text{ m}(\rightarrow)$$

$$v_C = v_C^{\text{I}} + v_C^{\text{II}} = 0,3519522 - 0,3519522 = 0 \text{ m}$$

Giros de la estructura real:

Giro en A:

$$\theta_A = \theta_A^{\text{I}} + \theta = -5,86587 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \curvearrowright$$

Giro en B:

$$\theta_B^{\text{I}} = \frac{1}{EI} \cdot (A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5) = 4,442031 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowright$$

$$\theta_B = \theta_B^{\text{I}} + \theta = 4,442031 \cdot 10^{-3} - 5,86587 \cdot 10^{-2} = -5,421667 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \curvearrowright$$

Giro en C:

$$\theta_C^{\text{I}} = \frac{1}{EI} \cdot (A_1 + A_2 + A_3 - A_4) = 4,877768 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \curvearrowright$$

$$\theta_C = \theta_C^{\text{I}} + \theta = 4,877768 \cdot 10^{-2} - 5,86587 \cdot 10^{-2} = -9,88102 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowright$$

Giro en D:

$$\theta_D^{\text{I}} = \frac{1}{EI} \cdot (A_1 + A_2) = 5,181756 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \curvearrowright$$

$$\theta_D = \theta_D^{\text{I}} + \theta = 5,181756 \cdot 10^{-2} - 5,86587 \cdot 10^{-2} = -6,84114 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowright$$

Giro en E:

$$\theta_E^{\text{I}} = \frac{1}{EI} \cdot (A_1) = 3,851446 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \curvearrowright$$

$$\theta_E = \theta_E^{\text{I}} + \theta = 3,851446 \cdot 10^{-2} - 5,86587 \cdot 10^{-2} = -2,014424 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \curvearrowright$$

Deformada:

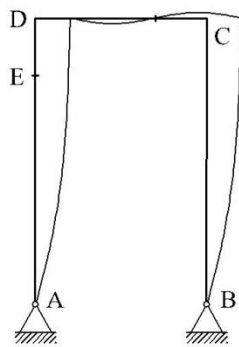


Fig. E.8.1.1.y

TEMA 9: CÁLCULO MATRICIAL

9.1 ESTRUCTURAS RETICULADAS PLANAS

Ejercicio 9.1.1

Calcular mediante análisis matricial las reacciones del terreno y la distribución de momentos flectores en las vigas del pórtico representado, siendo:

Características geométricas:

- Distancia entre ejes de pilares: 5,50 m
- Canto del forjado: 29 (24+5) cm
- Altura libre entre forjados: 2,6 m
- Predimensionado de las vigas: vigas planas de 70x29 (bxh) cm
- Pilares cuadrados: 30x30 cm

Materiales:

- Acero: B500S
- Hormigón: HA25
- $E = 2,5 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$

Cargas:

- Forjado de cubierta: 4,206 t/m
- Forjado de planta: 3,536 t/m

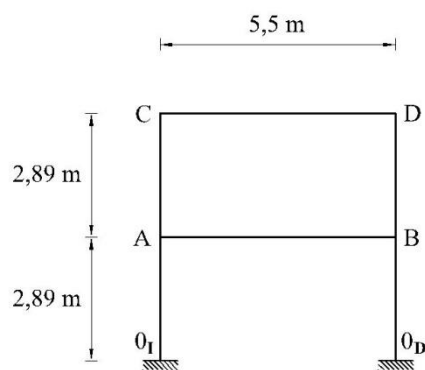


Fig. E.9.1.1.a

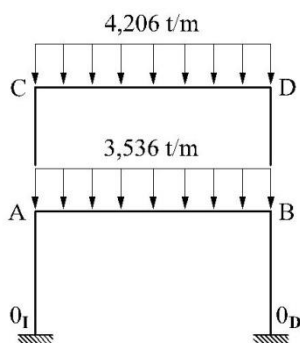


Fig. E.9.1.1.b

Solución:

Aplicación del Principio de Superposición:

La estructura está sometida a un sistema de cargas distribuidas (fuerzas no aplicadas en los nudos). Para la resolución del ejercicio mediante el método matricial, es necesario sustituir las cargas distribuidas por su acción equivalente sobre los nudos. Para ello, se descompone en los dos estados siguientes:

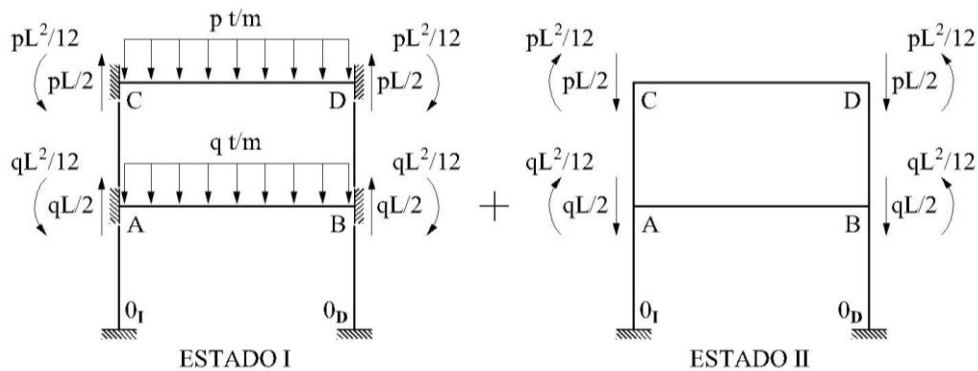


Fig. E.9.1.1.c

Resolución del Estado II de la estructura por el método matricial:

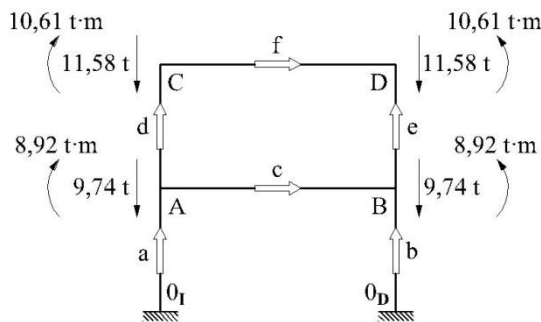


Fig. E.9.1.1.d

Discretización de la estructura:

En la siguiente figura se ha definido:

- Sistema de referencia global ($X'Y'$): S.G.
- Numeración de barras y nudos de la estructura: los nudos empotrados se numeran con 0.
- Sistema de referencia local (S.L.): en cada barra se indica el sentido del eje longitudinal a la barra, del nudo inicial al nudo final (del extremo dorsal al extremo frontal). Los nudos 0 se consideran siempre nudos iniciales o extremos dorsales.

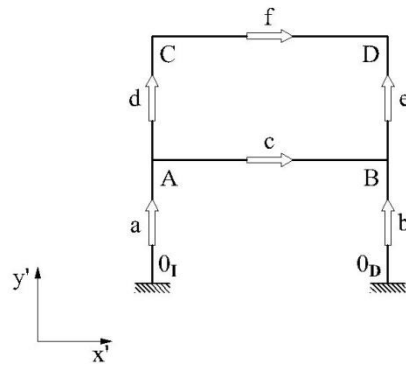


Fig. E.9.1.1.e

En la siguiente tabla se indican los datos fundamentales de cada una de las barras de la estructura:

Barras	Ancho (m)	Canto (m)	Área (m ²)	L (m)	I (m ⁴)	E (t/m ²)	α
a	0,300	0,300	0,090	2,890	0,00067500	$2,5 \cdot 10^6$	90°
b	0,300	0,300	0,090	2,890	0,00067500	$2,5 \cdot 10^6$	90°
c	0,700	0,290	0,203	5,500	0,00142269	$2,5 \cdot 10^6$	0°
d	0,300	0,300	0,090	2,890	0,00067500	$2,5 \cdot 10^6$	90°
e	0,300	0,300	0,090	2,890	0,00067500	$2,5 \cdot 10^6$	90°
f	0,700	0,290	0,203	5,500	0,00142269	$2,5 \cdot 10^6$	0°

Matriz de rigidez de la estructura en el sistema de referencia global:

A continuación se define la matriz de rigidez de la estructura. Ha de tenerse en cuenta que se han eliminado las filas y columnas correspondientes a los nudos con desplazamientos restringidos o nulos, es decir solo se incluyen las filas y columnas correspondientes a los nudos A, B, C y D (en este orden):

$$K'_E = \begin{pmatrix} (K'_{22a} + K'_{11d} + K'_{11c}) & K'_{12c} & K'_{12d} & \Omega \\ K'_{21c} & (K'_{22b} + K'_{22c} + K'_{11e}) & \Omega & K'_{12e} \\ K'_{21d} & \Omega & (K'_{22d} + K'_{11f}) & K'_{12f} \\ \Omega & K'_{21e} & K'_{21f} & (K'_{22e} + K'_{22f}) \end{pmatrix}$$

Matrices de rigidez elementales de las barras (S.G.):

Al tratarse de barras reticuladas planas, la expresión de las matrices elementales de cada barra en coordenadas locales es:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Se procede a calcular la submatriz K'_{22a} . El procedimiento indicado es similar para el resto de submatrices necesarias (K'_{11d} , K'_{11c} , ...) para completar la matriz de la estructura K'_E :

La submatriz elemental K_{22} de la barra "a" en coordenadas locales es:

$$K_{22a} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77854,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 838,94 & -1212,27 \\ 0,00 & -1212,27 & 2335,64 \end{pmatrix}$$

La matriz K'_{22a} en coordenadas globales se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$K'_{22a} = C \cdot K_{22a} \cdot C^T$$

Donde la matriz de transformación o de cambio de ejes C, para la barra a es:

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sena} & 0 \\ \text{sena} & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0 & -1,0 & 0,0 \\ 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}$$

Resultando,

$$K'_{22a} = \begin{pmatrix} 838,94 & 0,00 & 1212,27 \\ 0,00 & 77854,67 & 0,00 \\ 1212,27 & 0,00 & 2335,64 \end{pmatrix}$$

Una vez calculadas las submatrices K'_{11d} , K'_{11c} , K'_{22a} ,... se determina la matriz K'_E .

$$K'_E = \begin{pmatrix} 93950,61 & 0,00 & 0,00 & -92272,73 & 0,00 & 0,00 & -838,94 & 0,00 & -1212,27 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 155965,88 & 705,47 & 0,00 & -256,53 & 705,47 & 0,00 & -77854,67 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 705,47 & 7257,99 & 0,00 & -705,47 & 1293,36 & 1212,27 & 0,00 & 1167,82 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -92272,73 & 0,00 & 0,00 & 93950,61 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -838,94 & 0,00 & -1212,27 \\ 0,00 & -256,53 & -705,47 & 0,00 & 155965,88 & -705,47 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -77854,67 & 0,00 \\ 0,00 & 705,47 & 1293,36 & 0,00 & -705,47 & 7257,99 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1212,27 & 0,00 & 1167,82 \\ -838,94 & 0,00 & 1212,27 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 93111,67 & 0,00 & 1212,27 & -92272,73 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -77854,67 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 78111,20 & 705,47 & 0,00 & -256,53 & 705,47 \\ -1212,27 & 0,00 & 1167,82 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1212,27 & 705,47 & 4922,35 & 0,00 & -705,47 & 1293,36 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & -838,94 & 0,00 & 1212,27 & -92272,72 & 0,00 & 0,00 & 93111,67 & 0,00 & 1212,27 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -77854,67 & 0,00 & 0,00 & -256,53 & -705,47 & 0,00 & 78111,20 & -705,47 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & -1212,27 & 0,00 & 1167,82 & 0,00 & 705,47 & 1293,36 & 1212,27 & -705,47 & 4922,35 \end{pmatrix}$$

Vector de cargas o fuerzas exteriores en los nudos:

$$P'_E = \begin{pmatrix} P'_{Ax} = 0,000 \text{ t} \\ P'_{Ay} = -9,725 \text{ t} \\ M'_A = -8,914 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Bx} = 0,000 \text{ t} \\ P'_{By} = -9,725 \text{ t} \\ M'_B = 8,914 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Cx} = 0,000 \text{ t} \\ P'_{Cy} = -11,566 \text{ t} \\ M'_C = -10,602 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Dx} = 0,000 \text{ t} \\ P'_{Dy} = -11,566 \text{ t} \\ M'_D = 10,602 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Desplazamientos en los nudos libres o no restringidos:

A partir de la siguiente expresión obtenemos los desplazamientos de los nudos libres (A, B, C, D) en el sistema de coordenadas globales:

$$d'_E = (K'_E)^{-1} \cdot P'_E = \begin{pmatrix} u'_A = -0,0000169 \text{ m} \\ v'_A = -0,0002735 \text{ m} \\ \theta'_A = -0,0009868 \text{ rad} \\ u'_B = -0,0000169 \text{ m} \\ v'_B = -0,0002735 \text{ m} \\ \theta'_B = -0,0009868 \text{ rad} \\ u'_C = -0,0000169 \text{ m} \\ v'_C = -0,0002735 \text{ m} \\ \theta'_C = -0,0009868 \text{ rad} \\ u'_D = -0,0000169 \text{ m} \\ v'_D = -0,0002735 \text{ m} \\ \theta'_D = -0,0009868 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Esfuerzos en los extremos de las barras en coordenadas locales:

Barra a:

Los desplazamientos de los extremos de la barra en coordenadas locales son:

$$d_a = C_a^T \cdot d'_a = \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,000000 \\ -0,000017 \\ -0,000273 \\ -0,000987 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00000000 \text{ m} \\ 0,00000000 \text{ m} \\ 0,00000000 \text{ rad} \\ -0,00027350 \text{ m} \\ 0,00001693 \text{ m} \\ -0,00098680 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra a en coordenadas locales son:

$$E_a = K_a \cdot d_a = \begin{pmatrix} 77854,67 & 0,00 & 0,00 & -77854,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 838,94 & 1212,27 & 0,00 & -838,94 & 1212,27 \\ 0,00 & 1212,27 & 2335,64 & 0,00 & -1212,27 & 1167,82 \\ -77854,67 & 0,00 & 0,00 & 77854,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -838,94 & -1212,27 & 0,00 & 838,94 & -1212,27 \\ 0,00 & 1212,27 & 1167,82 & 0,00 & -1212,27 & 2335,64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,00000000 \\ 0,00000000 \\ 0,00000000 \\ -0,00027350 \\ 0,00001693 \\ -0,00098680 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0 = 21,29 \text{ t} \\ V_0 = -1,21 \text{ t} \\ M_0 = -1,17 \text{ t-m} \\ N_A = -21,29 \text{ t} \\ V_A = 1,21 \text{ t} \\ M_A = -2,33 \text{ t-m} \end{pmatrix}$$

Barra b:

Los desplazamientos de los extremos de la barra en coordenadas locales son:

$$d_b = C_b^T \cdot d'_b$$

$$d_b = \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,000017 \\ -0,000273 \\ 0,000987 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00000000 \text{ m} \\ 0,00000000 \text{ m} \\ 0,00000000 \text{ rad} \\ -0,00027350 \text{ m} \\ -0,0001693 \text{ m} \\ 0,00098680 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra b en coordenadas locales son:

$$E_b = K_b \cdot d_b$$

$$E_b = \begin{pmatrix} 77854,67 & 0,00 & 0,00 & -77854,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 838,94 & 1212,27 & 0,00 & -838,94 & 1212,27 \\ 0,00 & 1212,27 & 2335,64 & 0,00 & -1212,27 & 1167,82 \\ -77854,67 & 0,00 & 0,00 & 77854,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -838,94 & -1212,27 & 0,00 & 838,94 & -1212,27 \\ 0,00 & 1212,27 & 1167,82 & 0,00 & -1212,27 & 2335,64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,00000000 \\ 0,00000000 \\ 0,00000000 \\ -0,00027350 \\ -0,0001693 \\ 0,00098680 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0 = 21,29 \text{ t} \\ V_0 = 1,21 \text{ t} \\ M_0 = 1,17 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_B = -21,29 \text{ t} \\ V_B = -1,21 \text{ t} \\ M_B = 2,33 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Barra c:

Los desplazamientos de los extremos de la barra c en coordenadas locales son:

$$d_c = C_c^T \cdot d'_c$$

$$d_c = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,000017 \\ -0,000273 \\ -0,000987 \\ 0,000017 \\ -0,000273 \\ 0,000987 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0001693 \text{ m} \\ -0,00027350 \text{ m} \\ -0,00098680 \text{ rad} \\ 0,0001693 \text{ m} \\ -0,00027350 \text{ m} \\ 0,00098680 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra c en coordenadas locales, en el estado II, son:

$$E_{cII} = K_c \cdot d_c$$

$$E_{cII} = \begin{pmatrix} 92272,73 & 0,00 & 0,00 & -92272,73 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 256,53 & 705,47 & 0,00 & -256,53 & 705,47 \\ 0,00 & 705,47 & 2586,71 & 0,00 & -705,47 & 1293,36 \\ -92272,73 & 0,00 & 0,00 & 92272,73 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -256,53 & -705,47 & 0,00 & 256,53 & -705,47 \\ 0,00 & 705,47 & 1293,36 & 0,00 & -705,47 & 2586,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,00001693 \\ -0,00027350 \\ -0,00098680 \\ 0,00001693 \\ -0,00027350 \\ 0,00098680 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_A = -3,13 \text{ t} \\ V_A = 0,00 \text{ t} \\ M_A = -1,28 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_B = 3,13 \text{ t} \\ V_B = 0,00 \text{ t} \\ M_B = 1,28 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

En el Estado I, los esfuerzos en los extremos de la barra c son:

$$E_{cI} = \begin{pmatrix} N_A = 0,00 \text{ t} \\ V_A = 9,72 \text{ t} \\ M_A = 8,91 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_B = 0,00 \text{ t} \\ V_B = 9,72 \text{ t} \\ M_B = -8,91 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

De modo que para el estado real los esfuerzos en los extremos de la barra c, serán:

$$E_{cREAL} = E_{cI} + E_{cII} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 9,72 \\ 8,91 \\ 0,00 \\ 9,72 \\ -8,91 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3,13 \\ 0,00 \\ -1,28 \\ 3,13 \\ 0,00 \\ 1,28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_A = -3,13 \text{ t} \\ V_A = 9,72 \text{ t} \\ M_A = 7,64 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_B = 3,13 \text{ t} \\ V_B = 9,72 \text{ t} \\ M_B = -7,64 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Barra d:

Los desplazamientos de los extremos de la barra d en coordenadas locales son:

$$d_d = C_d^T \cdot d'_d$$

$$d_d = \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,000017 \\ -0,000273 \\ -0,000987 \\ 0,000023 \\ -0,000422 \\ -0,002618 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,00027350 \text{ m} \\ 0,00001693 \text{ m} \\ -0,00098680 \text{ rad} \\ -0,00042200 \text{ m} \\ -0,00002349 \text{ m} \\ -0,00261800 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra d en coordenadas locales, son:

$$E_d = K_d \cdot d_d$$

$$E_d = \begin{pmatrix} 77854,67 & 0,00 & 0,00 & -77854,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 838,94 & 1212,27 & 0,00 & -838,94 & 1212,27 \\ 0,00 & 1212,27 & 2335,64 & 0,00 & -1212,27 & 1167,82 \\ -77854,67 & 0,00 & 0,00 & 77854,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -838,94 & -1212,27 & 0,00 & 838,94 & -1212,27 \\ 0,00 & 1212,27 & 1167,82 & 0,00 & -1212,27 & 2335,64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,00027350 \\ 0,00001693 \\ -0,00098680 \\ -0,00042200 \\ -0,00002349 \\ -0,00261800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_A = 11,57 \text{ t} \\ V_A = -4,34 \text{ t} \\ M_A = -5,31 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_C = -11,57 \text{ t} \\ V_C = 4,34 \text{ t} \\ M_C = -7,22 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Barra e:

Los desplazamientos de los extremos de la barra e en coordenadas locales son:

$$d_e = C_e^T \cdot d'_e$$

$$d_e = \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000017 \\ -0,000273 \\ 0,000987 \\ -0,000023 \\ -0,000422 \\ 0,002618 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,00027350 \text{ m} \\ -0,00001693 \text{ m} \\ 0,00098680 \text{ rad} \\ -0,00042200 \text{ m} \\ 0,00002349 \text{ m} \\ 0,00261800 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra e en coordenadas locales, son:

$$E_e = K_e \cdot d_e$$

$$E_e = \begin{pmatrix} 77854,67 & 0,00 & 0,00 & -77854,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 838,94 & 1212,27 & 0,00 & -838,94 & 1212,27 \\ 0,00 & 1212,27 & 2335,64 & 0,00 & -1212,27 & 1167,82 \\ -77854,67 & 0,00 & 0,00 & 77854,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -838,94 & -1212,27 & 0,00 & 838,94 & -1212,27 \\ 0,00 & 1212,27 & 1167,82 & 0,00 & -1212,27 & 2335,64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,00027350 \\ -0,00001693 \\ 0,00098680 \\ -0,00042200 \\ 0,00002349 \\ 0,00261800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_B = 11,57 \text{ t} \\ V_B = 4,34 \text{ t} \\ M_B = 5,31 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_D = -11,57 \text{ t} \\ V_D = -4,34 \text{ t} \\ M_D = 7,22 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Barra f:

Los desplazamientos de los extremos de la barra f en coordenadas locales son:

$$d_f = C_f^T \cdot d'_f$$

$$d_f = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000023 \\ -0,000422 \\ -0,002618 \\ -0,000023 \\ -0,000422 \\ 0,002618 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00002349 \text{ m} \\ -0,00042200 \text{ m} \\ -0,00261800 \text{ rad} \\ -0,00002349 \text{ m} \\ -0,00042200 \text{ m} \\ 0,00261800 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra f en coordenadas locales, en el estado II, son:

$$E_{fII} = K_f \cdot d_f$$

$$E_{fII} = \begin{pmatrix} 92272,73 & 0,00 & 0,00 & -92272,73 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 256,53 & 705,47 & 0,00 & -256,53 & 705,47 \\ 0,00 & 705,47 & 2586,71 & 0,00 & -705,47 & 1293,36 \\ -92272,73 & 0,00 & 0,00 & 92272,73 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -256,53 & -705,47 & 0,00 & 256,53 & -705,47 \\ 0,00 & 705,47 & 1293,36 & 0,00 & -705,47 & 2586,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,00002349 \\ -0,00042200 \\ -0,00261800 \\ -0,00002349 \\ -0,00042200 \\ 0,00261800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_c = 4,34 \text{ t} \\ V_c = 0,00 \text{ t} \\ M_c = -3,39 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_D = -4,34 \text{ t} \\ V_D = 0,00 \text{ t} \\ M_D = 3,39 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

En el Estado I, los esfuerzos en los extremos de la barra f son:

$$E_{fI} = \begin{pmatrix} N_c = 0,00 \text{ t} \\ V_c = 11,57 \text{ t} \\ M_c = 10,60 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_D = 0,00 \text{ t} \\ V_D = 11,57 \text{ t} \\ M_D = -10,60 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Así que para el estado real los esfuerzos en los extremos de la barra f, serán:

$$E_{fREAL} = E_{fI} + E_{fII} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 11,57 \\ 10,60 \\ 0,00 \\ 11,57 \\ -10,60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4,34 \\ 0,00 \\ -3,39 \\ -4,34 \\ 0,00 \\ 3,39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_c = 4,34 \text{ t} \\ V_c = 11,57 \text{ t} \\ M_c = 7,22 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_D = -4,34 \text{ t} \\ V_D = 11,57 \text{ t} \\ M_D = -7,22 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Leyes de momentos flectores de los dos estados I y II:Estado I:

En el estado I las barras horizontales c y f (vigas), están sometidas a las cargas indicadas, resultando las siguientes leyes de momentos flectores:

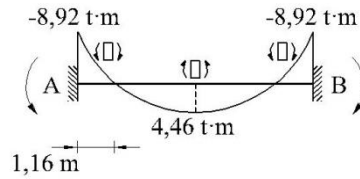
Barra c:

Fig. E.9.1.1.f

$$M(x)_A^B = -8,91 + 9,73 \cdot x - 1,77 \cdot x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_A^B = -8,91 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2,75)_A^B = 4,46 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(5,5)_A^B = -8,91 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$M(x)_A^B = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4,34 \text{ m} \\ x_2 = 1,16 \text{ m} \end{array}$$

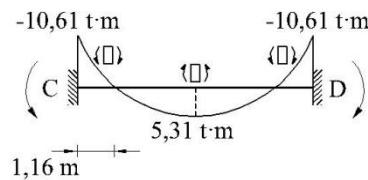
Barra f:

Fig. E.9.1.1.g

$$M(x)_C^D = -10,61 + 11,57 \cdot x - 2,1 \cdot x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_C^D = -10,61 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2,75)_C^D = 5,31 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(5,5)_C^D = -10,61 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$M(x)_C^D = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1,16 \text{ m} \\ x_2 = 4,35 \text{ m} \end{array}$$

Estado II:

Barra c:

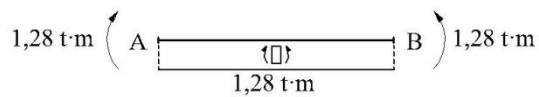


Fig. E.9.1.1.h

$$M(x)_A^B = 1,28 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Barra f:

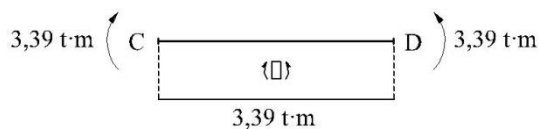


Fig. E.9.1.1.i

$$M(x)_C^D = 3,39 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Estado I + II:

Barra c:

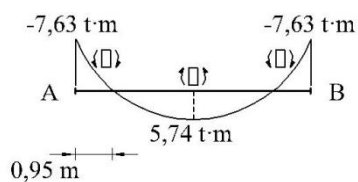


Fig. E.9.1.1.j

$$M(x)_A^B = -7,63 + 9,73 \cdot x - 1,77 \cdot x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_A^B = -7,63 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2,75)_A^B = 5,74 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(5,5)_A^B = -7,63 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$M(x)_A^B = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4,55 \text{ m} \\ x_2 = 0,95 \text{ m} \end{array}$$

Barra f:

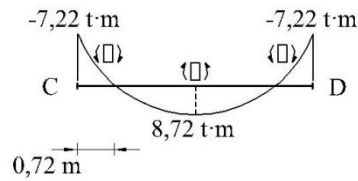


Fig. E.9.1.1.k

$$M(x)_C^D = -7,22 + 11,57 \cdot x - 2,10 \cdot x^2 \quad \left| \begin{array}{l} M(0)_C^D = -7,22 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(2,75)_C^D = 8,72 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M(5,5)_C^D = -7,22 \text{ t}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$M(x)_C^D = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4,74 \text{ m} \\ x_2 = 0,72 \text{ m} \end{array}$$

El diagrama de momentos flectores de la estructuras queda como sigue:

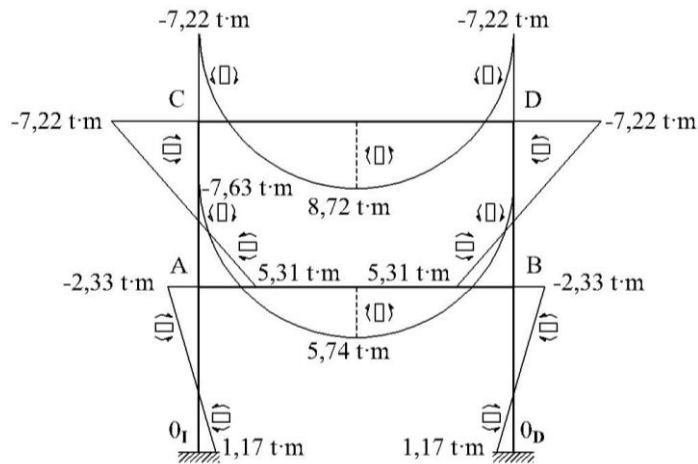


Fig. E.9.1.1.1

Reacciones en los apoyos en ejes globales:

Las reacciones en los apoyos se pueden determinar a partir de los esfuerzos en las barras, estableciendo el equilibrio en los nudos correspondientes a los apoyos:

Apoyo izquierdo:

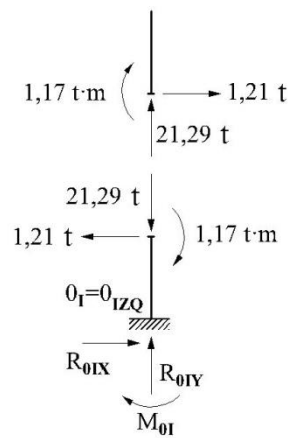


Fig. E.9.1.1.m

$$\sum F_x = 0; \quad R'_{0,x} - 1,21 = 0; \quad R'_{0,x} = 1,21 \text{ t}$$

$$\sum F_y = 0; \quad R'_{0,y} - 21,29 = 0; \quad R'_{0,y} = 21,29 \text{ t}$$

$$\sum M_{0I} = 0; \quad -M'_{0I} + 1,17 = 0; \quad M'_{0I} = 1,17 \text{ t·m}$$

Apoyo derecho:

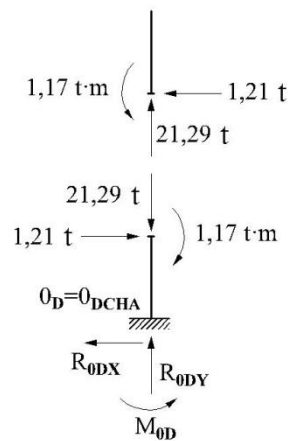


Fig. E.9.1.1.n

$$\sum F_x = 0; \quad R'_{0D,x} - 1,21 = 0; \quad R'_{0D,x} = 1,21 \text{ t}$$

$$\sum F_y = 0; \quad R'_{0D,y} - 21,29 = 0; \quad R'_{0D,y} = 21,29 \text{ t}$$

$$\sum M_{0D} = 0; \quad -M'_{0D} + 1,17 = 0; \quad M'_{0D} = 1,17 \text{ t·m}$$

Por tanto, las reacciones en los apoyos serán:

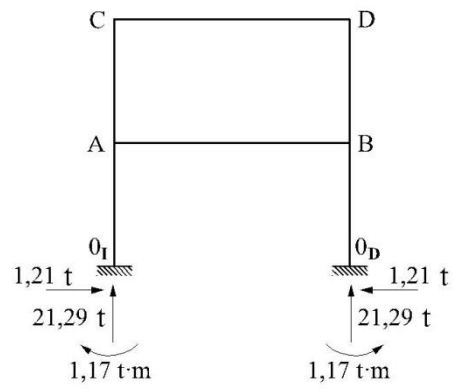


Fig. E.9.1.1.ñ

Ejercicio 9.1.2

Calcular mediante análisis matricial, las reacciones en los apoyos, y el movimiento de los nudos en la estructura representada de la figura.

Características de las barras:

$E=2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Sección: $0,3 \cdot 0,3 \text{ m}^2$

Representar la ley de momentos flectores y la deformada.

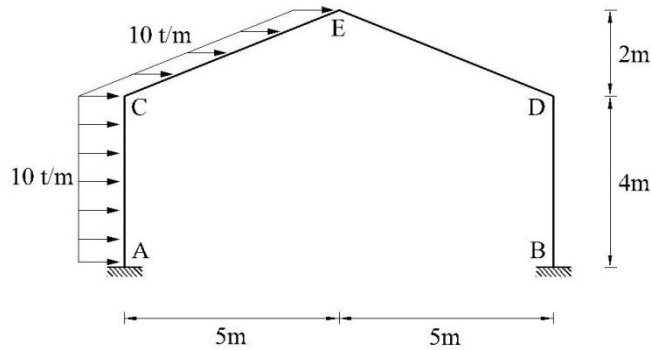


Fig. E.9.1.2.a

Solución:

Discretización de la estructura:

En la siguiente figura se ha definido:

- Sistema de referencia global (X'Y'): S.G.
- Designación de barras y nudos de la estructura.
- Sistema de referencia local (S.L.): en cada barra se indica el sentido del eje longitudinal de la barra (del nudo inicial al nudo final).

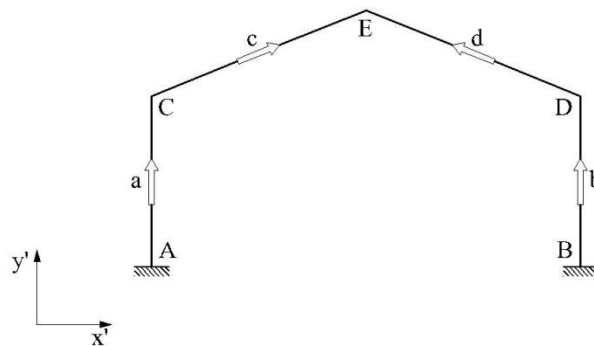


Fig. E.9.1.2.b

En la tabla siguiente se muestran los datos geométricos de cada una de las barras de la estructura:

Barras	Ancho (m)	Canto (m)	Área (m ²)	L (m)	I (m ⁴)	E (t/m ²)	α (°)
a (A-C)	0,300	0,300	0,090	4,000	0,000675	$2,10 \cdot 10^7$	90
b (B-D)	0,300	0,300	0,090	4,000	0,000675	$2,10 \cdot 10^7$	90
c (C-E)	0,300	0,300	0,090	5,385	0,000675	$2,10 \cdot 10^7$	21,801
d (D-E)	0,300	0,300	0,090	5,385	0,000675	$2,10 \cdot 10^7$	158,199

Aplicación del Principio de Superposición:

La estructura está sometida a un sistema de cargas distribuidas por lo que se sustituirán las cargas por su acción equivalente en los nudos. Por ello, el estado de carga real se descompone en los dos siguientes estados:

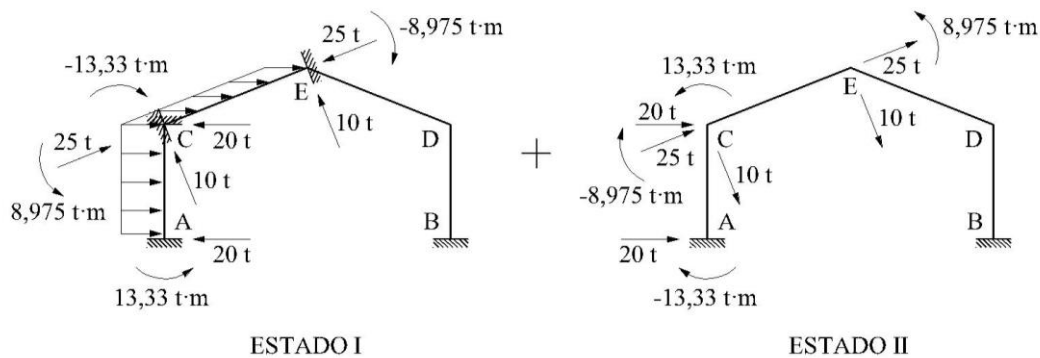


Fig. E.9.1.2.c

Estado I:

Barra a:

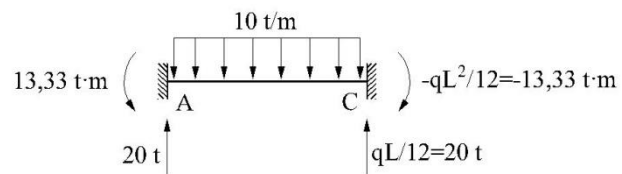


Fig. E.9.1.2.d

Barra c:

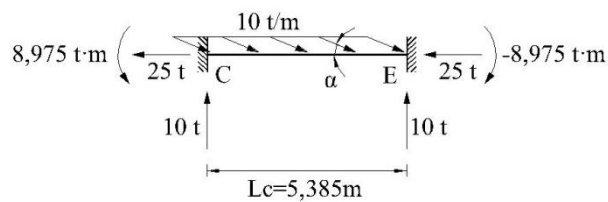


Fig. E.9.1.2.e

$$\alpha_c = \arctg\left(\frac{2}{5}\right) = 21,801^\circ$$

$$P_x = P \cdot \cos \alpha_c = 10 \cdot \cos \alpha_c = 9,29 \text{ t/m}$$

$$P_y = P \cdot \text{sen} \alpha_c = 10 \cdot \text{sen} \alpha_c = 3,71 \text{ t/m}$$



Fig. E.9.1.2.f

Estado II:

Barra a:

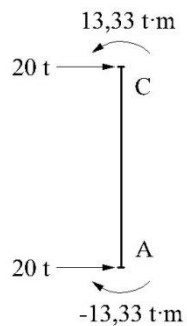


Fig. E.9.1.2.g

Barra c:

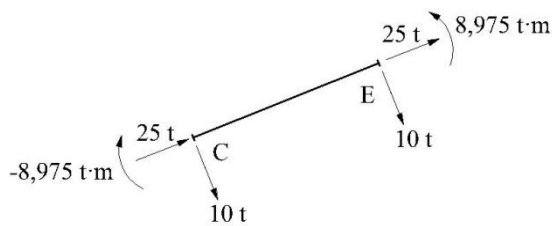


Fig. E.9.1.2.h

Resolución del Estado II de la estructura por el método matricial:

Matriz de rigidez de la estructura en el sistema de referencia global:

Seguidamente se define la matriz de rigidez de la estructura K'_E .

Se han eliminado las filas y columnas correspondientes a los nudos con desplazamientos nulos, y solamente se incluyen las filas y columnas correspondientes a los nudos C, D y E (en este orden):

$$K'_E = \begin{matrix} & \begin{matrix} C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} K'_{22a} + K'_{11c} & \Omega & K'_{12c} \\ \Omega & K'_{22b} + K'_{11c} & K'_{12d} \\ K'_{21c} & K'_{21d} & K'_{22c} + K'_{22d} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matrices de rigidez elementales de las barras (S.G.):

Las barras que forman la estructura son reticuladas planas. Por tanto, la expresión de las matrices elementales de cada barra en coordenadas locales es:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Se procede a calcular la submatriz K'_{12c} . El procedimiento indicado es similar para el resto de submatrices necesarias (K'_{22a} , K'_{11c} ,...) para completar la matriz de la estructura K'_E :

La submatriz elemental K_{12} de la barra "c" en coordenadas locales es:

$$K_{12c} = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{pmatrix}$$

La matriz K'_{12c} en coordenadas globales se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$K'_{12c} = C \cdot K_{12c} \cdot C^T$$

La matriz de transformación C, para la barra c es:

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,4 & 0,0 \\ 0,4 & 0,9 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}$$

Resultando,

$$K'_{12c} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,4 & 0,0 \\ 0,4 & 0,9 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -350964,2 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -1089,2 & 2932,8 \\ 0,0 & -2932,8 & 5264,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 & 0,0 \\ -0,4 & 0,9 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}$$

$$K'_{12c} = \begin{pmatrix} -302705,57 & -120646,55 & -1089,20 \\ -120646,55 & -49347,82 & 2723,00 \\ 1089,20 & -2723,00 & 5264,46 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidas las submatrices K'_{22a} , K'_{22d} , K'_{11c} , ... se compone la matriz K'_E .

$$K'_E = \begin{pmatrix} 305363,38 & 120646,55 & 4226,43 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -302705,57 & -120646,55 & -1089,20 \\ 120646,55 & 521847,82 & 2723,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -120646,55 & -49347,82 & 2723,00 \\ 4226,43 & 2723,00 & 24703,93 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1089,20 & -2723,00 & 5264,46 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 305363,38 & -120646,55 & 4226,43 & -302705,57 & 120646,55 & -1089,20 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & -120646,55 & 521847,82 & -2723,00 & 120646,55 & -49347,82 & -2723,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 4226,43 & -2723,00 & 24703,93 & 1089,20 & 2723,00 & 5264,46 \\ -302705,57 & -120646,55 & 1089,20 & -302705,57 & 120646,55 & 1089,20 & 605411,14 & 0,00 & 2178,40 \\ -120646,55 & -49347,82 & -2723,00 & 120646,55 & -49347,82 & 2723,00 & 0,00 & 98695,64 & 0,00 \\ -1089,20 & 2723,00 & 5264,46 & -1089,20 & -2723,00 & 5264,46 & 2178,40 & 0,00 & 21057,85 \end{pmatrix}$$

Vector de cargas o fuerzas exteriores en los nudos:

$$P'_E = \begin{pmatrix} P'_{Cx} = 46,926 \text{ t} \\ P'_{Cy} = 0,000 \text{ t} \\ M'_C = 4,358 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Dx} = 0,000 \text{ t} \\ P'_{Dy} = 0,000 \text{ t} \\ M'_D = 0,000 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Ex} = 26,926 \text{ t} \\ P'_{Ey} = 0,000 \text{ t} \\ M'_E = 8,975 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Desplazamientos en los nudos libres o no restringidos:

A continuación calculamos los desplazamientos de los nudos libres (C, D y E) en el sistema de coordenadas globales:

$$d'_E = (K'_E)^{-1} \cdot P'_E = \begin{pmatrix} u'_C = 0,0291585 \text{ m} \\ v'_C = 0,0000301 \text{ m} \\ \theta'_C = -0,0061483 \text{ rad} \\ u'_D = 0,0244990 \text{ m} \\ v'_D = -0,0000301 \text{ m} \\ \theta'_D = -0,0067871 \text{ rad} \\ u'_E = 0,0268954 \text{ m} \\ v'_E = 0,0057134 \text{ m} \\ \theta'_E = 0,0036454 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Esfuerzos en los extremos de las barras en coordenadas locales:

Barra a:

Los desplazamientos de los extremos de la barra en coordenadas locales son:

$$d_a = C_a^T \cdot d'_a$$

$$d_a = \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,029159 \\ 0,000030 \\ -0,006148 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,000000 \text{ m} \\ 0,000000 \text{ m} \\ 0,000000 \text{ rad} \\ 0,000030 \text{ m} \\ -0,029159 \text{ m} \\ -0,006148 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra a en coordenadas locales, en el estado II son:

$$E_{aII} = K_a \cdot d_a$$

$$E_{aII} = \begin{pmatrix} 472500,00 & 0,00 & 0,00 & -472500,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 2657,81 & 5315,63 & 0,00 & -2657,81 & 5315,63 \\ 0,00 & 5315,63 & 14175,00 & 0,00 & -5315,63 & 7087,50 \\ -472500,00 & 0,00 & 0,00 & 472500,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -2657,81 & -5315,63 & 0,00 & 2657,81 & -5315,63 \\ 0,00 & 5315,63 & 7087,50 & 0,00 & -5315,63 & 14175,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,000030 \\ -0,029159 \\ -0,006148 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_A = -14,24 \text{ t} \\ V_A = 44,82 \text{ t} \\ M_A = 111,42 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_C = 14,24 \text{ t} \\ V_C = -44,82 \text{ t} \\ M_C = 67,84 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

En el Estado I, los esfuerzos en los extremos de la barra a eran:

$$E_{aI} = \begin{pmatrix} N_A = 0,00 \text{ t} \\ V_A = 20,00 \text{ t} \\ M_A = 13,33 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_C = 0,00 \text{ t} \\ V_C = 20,00 \text{ t} \\ M_C = -13,33 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Así que para el estado real los esfuerzos en los extremos de la barra a, serán en el sistema de referencia local:

$$E_{aREAL} = E_{aI} + E_{aII} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 20,00 \\ 13,33 \\ 0,00 \\ 20,00 \\ -13,33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14,24 \\ 44,82 \\ 111,42 \\ 14,24 \\ -44,82 \\ 67,84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_A = -14,24 \text{ t} \\ V_A = 64,82 \text{ t} \\ M_A = 124,75 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_C = 14,24 \text{ t} \\ V_C = -24,82 \text{ t} \\ M_C = 54,51 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Barra b:

Los desplazamientos de los extremos de la barra b en coordenadas locales son:

$$d_b = C_b^T \cdot d'_b$$

$$d_b = \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,024499 \\ -0,000030 \\ -0,006787 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,000000 \text{ m} \\ 0,000000 \text{ m} \\ 0,000000 \text{ rad} \\ -0,000030 \text{ m} \\ -0,024499 \text{ m} \\ -0,006787 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra b en coordenadas locales son:

$$E_b = K_b \cdot d_b$$

$$E_b = \begin{pmatrix} 472500,00 & 0,00 & 0,00 & -472500,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 2657,81 & 5315,63 & 0,00 & -2657,81 & 5315,63 \\ 0,00 & 5315,63 & 14175,00 & 0,00 & -5315,63 & 7087,50 \\ -472500,00 & 0,00 & 0,00 & 472500,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -2657,81 & -5315,63 & 0,00 & 2657,81 & -5315,63 \\ 0,00 & 5315,63 & 7087,50 & 0,00 & -5315,63 & 14175,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,000000 \\ -0,000030 \\ -0,024499 \\ -0,006787 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_D = 14,24 \text{ t} \\ V_D = 29,04 \text{ t} \\ M_D = 82,12 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_B = -14,24 \text{ t} \\ V_B = -29,04 \text{ t} \\ M_B = 34,02 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Barra c:

Los desplazamientos de los extremos de la barra c en coordenadas locales son:

$$d_c = C_c^T \cdot d'_c$$

$$d_c = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -0,4 & 0,9 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,9 & 0,4 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & -0,4 & 0,9 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,029159 \\ 0,000030 \\ -0,006148 \\ 0,026895 \\ 0,005713 \\ 0,003645 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,027084 \text{ m} \\ -0,010801 \text{ m} \\ -0,006148 \text{ rad} \\ 0,027094 \text{ m} \\ -0,004684 \text{ m} \\ 0,003645 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra c en coordenadas locales, para el estado II, son:

$$E_{cII} = K_c \cdot d_c$$

$$E_{cII} = \begin{pmatrix} 350964,19 & 0,00 & 0,00 & -350964,19 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1089,20 & 2932,76 & 0,00 & -1089,20 & 2932,76 \\ 0,00 & 2932,76 & 10528,93 & 0,00 & -2932,76 & 5264,46 \\ -350964,19 & 0,00 & 0,00 & 350964,19 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -1089,20 & -2932,76 & 0,00 & 1089,20 & -2932,76 \\ 0,00 & 2932,76 & 5264,46 & 0,00 & -2932,76 & 10528,93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,027084 \\ -0,010801 \\ -0,006148 \\ 0,027094 \\ -0,004684 \\ 0,003645 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_c = -3,33 \text{ t} \\ V_c = -14,00 \text{ t} \\ M_c = -63,48 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_e = 3,33 \text{ t} \\ V_e = 14,00 \text{ t} \\ M_e = -11,93 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

En el Estado I, los esfuerzos en los extremos de la barra c son:

$$E_{cl} = \begin{pmatrix} N_C = -25,00 \text{ t} \\ V_C = 10,00 \text{ t} \\ M_C = 8,98 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_E = -25,00 \text{ t} \\ V_E = 10,00 \text{ t} \\ M_E = -8,98 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

De modo que para el estado real los esfuerzos en los extremos de la barra c, serán:

$$E_{cREAL} = E_{cl} + E_{cII} = \begin{pmatrix} -25,00 \\ 10,00 \\ 8,98 \\ -25,00 \\ 10,00 \\ -8,98 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3,33 \\ -14,00 \\ -63,48 \\ 3,33 \\ 14,00 \\ -11,93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_C = -28,33 \text{ t} \\ V_C = -4,00 \text{ t} \\ M_C = -54,51 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_E = -21,67 \text{ t} \\ V_E = 24,00 \text{ t} \\ M_E = -20,90 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Barra d:

Los desplazamientos de los extremos de la barra d en coordenadas locales son:

$$d_d = C_d^T \cdot d'_d$$

$$d_d = \begin{pmatrix} -0,9 & 0,4 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -0,4 & -0,9 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & -0,9 & 0,4 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & -0,4 & -0,9 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,024499 \\ -0,000030 \\ -0,006787 \\ 0,026895 \\ 0,005713 \\ 0,003645 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,022758 \text{ m} \\ -0,009071 \text{ m} \\ -0,006787 \text{ rad} \\ -0,022850 \text{ m} \\ -0,015294 \text{ m} \\ 0,003645 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra d en el sistema de referencia local, son:

$$E_d = K_d \cdot d_d$$

$$E_d = \begin{pmatrix} 350964,19 & 0,00 & 0,00 & -350964,19 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1089,20 & 2932,76 & 0,00 & -1089,20 & 2932,76 \\ 0,00 & 2932,76 & 10528,93 & 0,00 & -2932,76 & 5264,46 \\ -350964,19 & 0,00 & 0,00 & 350964,19 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -1089,20 & -2932,76 & 0,00 & 1089,20 & -2932,76 \\ 0,00 & 2932,76 & 5264,46 & 0,00 & -2932,76 & 10528,93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,022758 \\ -0,009071 \\ -0,006787 \\ -0,022850 \\ -0,015294 \\ 0,003645 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_E = 32,25 \text{ t} \\ V_E = -2,44 \text{ t} \\ M_E = -34,02 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_D = -32,25 \text{ t} \\ V_D = 2,44 \text{ t} \\ M_D = 20,90 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Reacciones en los apoyos en ejes globales:

Las reacciones en los apoyos se pueden determinar a partir de las siguientes expresiones matriciales (Estado II). A continuación se sumarán las reacciones correspondientes al estado I.

Estado II:

$$R'_A{}^{\text{II}} = (K'_{11a}) \cdot d'_A + (K'_{12a}) \cdot d'_C$$

$$R'_B{}^{\text{II}} = (K'_{11b}) \cdot d'_B + (K'_{12b}) \cdot d'_D$$

$$R'_A{}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 2657,81 & 0,00 & -5315,63 \\ 0,00 & 472500,00 & 0,00 \\ -5315,63 & 0,00 & 14175,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2657,81 & 0,00 & -5315,63 \\ 0,00 & -472500,00 & 0,00 \\ 5315,63 & 0,00 & 7087,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,029159 \\ 0,000030 \\ -0,006148 \end{pmatrix}$$

$$R'_A{}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} -44,82 \text{ t} \\ -14,24 \text{ t} \\ 111,42 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

$$R'_B{}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 2657,81 & 0,00 & -5315,63 \\ 0,00 & 472500,00 & 0,00 \\ -5315,63 & 0,00 & 14175,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2657,81 & 0,00 & -5315,63 \\ 0,00 & -472500,00 & 0,00 \\ 5315,63 & 0,00 & 7087,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,024499 \\ -0,000030 \\ -0,006787 \end{pmatrix}$$

$$R'_B{}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} -29,04 \text{ t} \\ 14,24 \text{ t} \\ 82,12 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Estado I:

$$R'_A{}^{\text{I}} = \begin{pmatrix} -20,00 \text{ t} \\ 0,00 \text{ t} \\ 13,33 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

$$R'_B{}^{\text{I}} = \begin{pmatrix} 0,00 \text{ t} \\ 0,00 \text{ t} \\ 0,00 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Por tanto, las reacciones en los apoyos serán (en el sistema de referencia global):

$$R'_A{}^{\text{REAL}} = R'_A{}^{\text{I}} + R'_A{}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} -20,00 \\ 0,00 \\ 13,33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -44,82 \\ -14,24 \\ 111,42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -64,82 \text{ t} \\ -14,24 \text{ t} \\ 124,75 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

$$R'_B{}^{REAL} = R'_B{}^I + R'_B{}^{II} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -29,04 \\ 14,24 \\ 82,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29,04 \text{ t} \\ 14,24 \text{ t} \\ 82,12 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

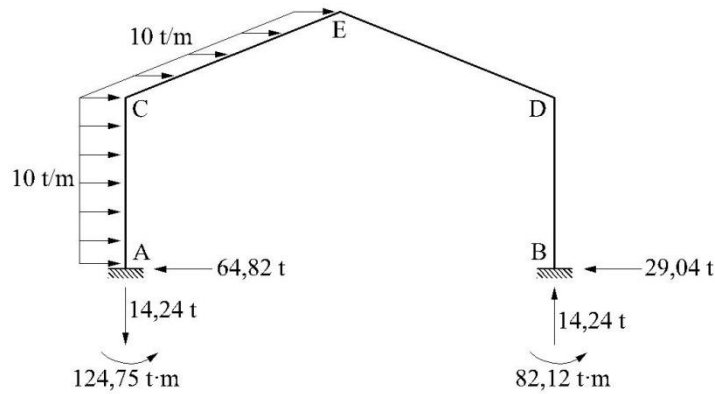


Fig. E.9.1.2.i

Equilibrio global:

A continuación comprobamos que las reacciones obtenidas son correctas, estableciendo el equilibrio estático de la estructura.

$$\sum F_H = -64,82 - 29,04 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 5,39 = 0$$

$$\sum F_V = -14,24 + 14,24 = 0$$

$$\sum M_A = 124,753 + 82,124 - 10 \cdot 4 \cdot 2 - 10 \cdot 5,39 \cdot 5 + 14,238 \cdot 10 = 0$$

Leyes de momentos flectores de los dos estados I, II y estado real:

Las barras a y c están sometidas a las cargas indicadas más arriba, las leyes de momentos reales resultan de sumar las correspondientes a los estados I y II:

Barra a:

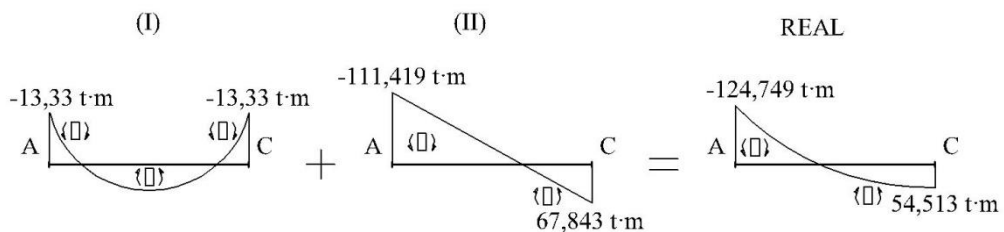


Fig. E.9.1.2.j

$$M_I = -13,33 + 20 \cdot x - 5 \cdot x^2 \quad | \quad M_{II} = 44,816 \cdot x + 111,419 \quad | \quad M = -124,749 + 64,816 \cdot x - 5 \cdot x^2$$

Barra c:

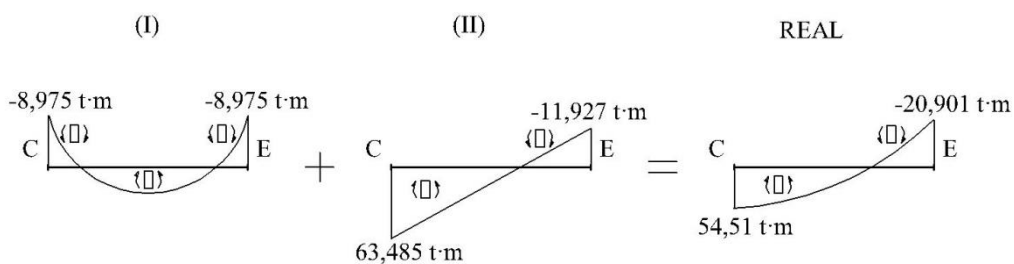


Fig. E.9.1.2.k

$$M_I = -8,975 + 10 \cdot x - 1,857 \cdot x^2 \quad | \quad M_{II} = 63,485 \cdot x - 14,004 \quad | \quad M = 54,51 - 4,004 \cdot x - 1,857 \cdot x^2$$

El diagrama de momentos flectores del pórtico queda como se indica a continuación:

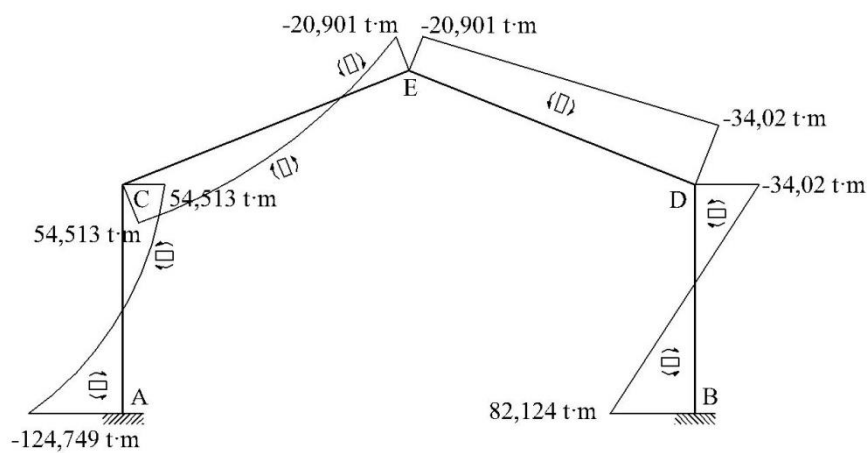


Fig. E.9.1.2.1

Deformada:

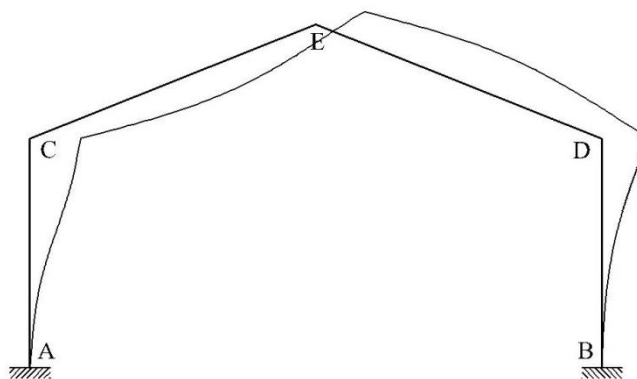


Fig. E.9.1.2.m

Ejercicio 9.1.3

Aplicando análisis matricial, calcular los movimientos de los nudos y las reacciones en los apoyos, en la estructura de la figura:

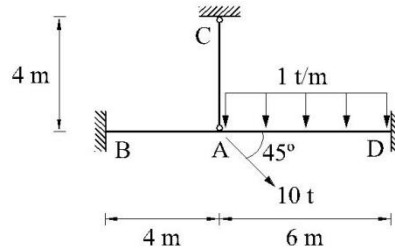


Fig. E.9.1.3.a

Cable AC: Sección $2 \times 2 \text{ cm}^2$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

Barras BA, AD: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$

Sección: canto = 60 cm / ancho = 30 cm

Solución:

Para resolver el ejercicio, el cable AC se sustituye por su acción en la barra.

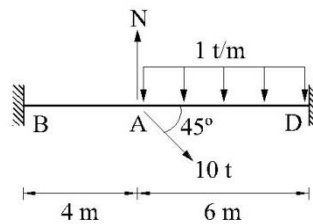


Fig. E.9.1.3.b

Discretización de la estructura:

En la siguiente figura se ha definido:

- Sistema de referencia global (X'Y'): S.G.
- Designación de barras y nudos de la estructura.
- Sistema de referencia local (S.L.): en cada barra se indica el sentido del eje longitudinal de la barra (del nudo inicial al nudo final).

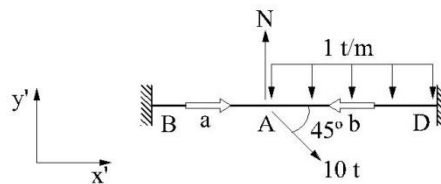


Fig. E.9.1.3.c

En la tabla siguiente se indican los datos geométricos y mecánicos de cada una de las barras de la estructura y del cable A-C:

Barras	Ancho (m)	Canto (m)	Área (m ²)	L (m)	I (m ⁴)	E (Kp/cm ²)	E (t/m ²)	α
a (B-A)	0,300	0,600	0,180	4,000	0,00540000	$2,00 \cdot 10^5$	$2,00 \cdot 10^6$	0
b (A-D)	0,300	0,600	0,180	6,000	0,00540000	$2,00 \cdot 10^5$	$2,00 \cdot 10^6$	180

Cable	Ancho (m)	Canto (m)	Área (m ²)	L (m)	I (m ⁴)	E (Kp/cm ²)	E (t/m ²)	α
A-C	0,020	0,020	0,0004	4,000	0,00000001	$2,00 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^7$	90

Aplicación del Principio de Superposición:

El estado de carga real se descompone en los siguientes estados:

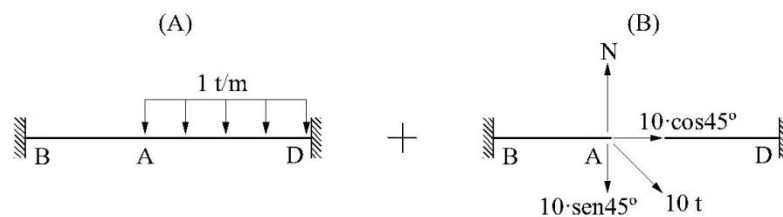


Fig. E.9.1.3.d

A su vez, el estado A se descompone en los siguientes estados:

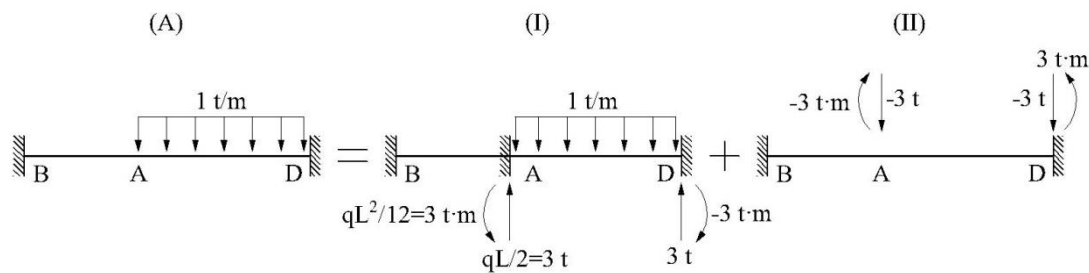


Fig. E.9.1.3.e

El análisis matricial se aplica a la suma de los estados (B)+(II de A).

Resolución del Estado II de la estructura por el método matricial:

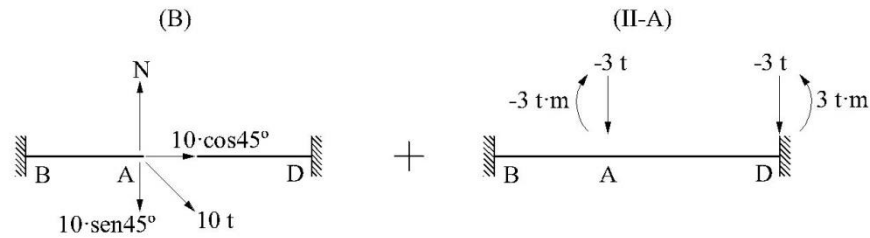


Fig. E.9.1.3.f

Matriz de rigidez de la estructura en el sistema de referencia global:

Seguidamente, se define la matriz de rigidez de la estructura K'_E incluyendo las filas y columnas de los nudos con desplazamiento, que en esta estructura únicamente es el nudo A.

$$K'_E = (K'_{22a} + K'_{22b})$$

Matrices de rigidez elementales de las barras (S.G.):

Las barras que forman la estructura son reticuladas planas. Por tanto, la expresión de la submatriz elemental K_{22} de cada barra en coordenadas locales es:

$$K_{22} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

Se procede a calcular las submatrices K'_{22a} y K'_{22b} .

La matriz K'_{22a} en coordenadas globales se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$K'_{22a} = C \cdot K_{22a} \cdot C^T$$

$$K'_{22a} = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90000,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 2025,0 & -4050,0 \\ 0,0 & -4050,0 & 10800,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}$$

$$K'_{22a} = \begin{pmatrix} 90000,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 2025,0 & -4050,0 \\ 0,0 & -4050,0 & 10800,0 \end{pmatrix}$$

La matriz K'_{22b} en coordenadas globales se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$K'_{22b} = C \cdot K_{22b} \cdot C^T$$

$$K'_{22a} = \begin{pmatrix} -1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60000,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 600,0 & -1800,0 \\ 0,0 & -1800,0 & 7200,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}$$

$$K'_{22a} = \begin{pmatrix} 60000,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 600,0 & 1800,0 \\ 0,0 & 1800,0 & 7200,0 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidas las submatrices K'_{22a} y K'_{22b} se compone la matriz K'_E .

$$K'_E = \begin{pmatrix} 150000,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 2625,00 & -2250,00 \\ 0,00 & -2250,00 & 18000,00 \end{pmatrix}$$

Vector de cargas o fuerzas exteriores en los nudos:

La acción del cable AC sobre las barras se sustituye por el axil N al que está sometido dicho cable por la acción de las cargas.

$$P'_E = \begin{pmatrix} P'_{Ax} = 10 \cdot \cos 45^\circ \\ P'_{Ay} = N - 10 \cdot \sin 45^\circ - 3 \\ M'_A = -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_{Ax} = 7,071 \\ P'_{Ay} = N - 10,071 \\ M'_A = -3 \end{pmatrix}$$

Desplazamiento en el nudo A y acción del cable AC:

Para calcular las componentes del desplazamiento del nudo libre (A) y la acción del cable AC sobre la estructura (N), resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones en el sistema de referencia global (se expresa en forma matricial):

$$P'_E = K'_E \cdot d'_E$$

$$\begin{pmatrix} 7,071 \\ N - 10,071 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150000,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 2625,0 & -2250,0 \\ 0,0 & -2250,0 & 18000,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'_A \\ v'_A \\ \theta'_A \end{pmatrix}$$

$$u'_A = \frac{7,071}{15 \cdot 10^4}$$

$$2625 \cdot v'_A - 2250 \cdot \theta'_A = N - 10,071$$

$$-2250 \cdot v'_A + 18000 \cdot \theta'_A = -3$$

Además, tendremos en cuenta que en el cable debe verificarse la siguiente relación:

$$N = \frac{EA}{L} \cdot \Delta L$$

Donde:

$$\Delta L = -v'_A$$

El cable AC está traccionado porque el punto A desciende ($v'_{Ay} < 0$) por acción de las cargas. Por tanto, el cable AC aumenta de longitud, con lo que $\Delta l > 0$.

$$N = E \cdot A \cdot \frac{(-v'_A)}{L} = -2 \cdot 10^7 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot v'_A = -2000 \cdot v'_A$$

Sustituimos en el sistema de ecuaciones inicial:

$$2625 \cdot v'_A - 2250 \cdot \theta'_A = N - 10,071 = -2000 \cdot v'_A - 10,071$$

Resultando:

$$4615 \cdot v'_A - 2250 \cdot \theta'_A = -10,071$$

$$u'_A = \frac{7,071}{15 \cdot 10^4} = 0,00004714 \text{ m}$$

$$\theta'_A = (-3 + 2250 \cdot v'_A) \cdot \frac{1}{18000} = -1,667 \cdot 10^{-4} + 0,125 \cdot v'_A$$

$$4625 \cdot v'_A - \frac{2250}{18000} \cdot (-3 - 2250 \cdot v'_A) = -10,071$$

$$4625 \cdot v'_A + 0,375 - 281,25 \cdot v'_A = -10,071$$

$$4343,75 \cdot v'_A = -10,446$$

$$v'_A = \frac{-10,446}{4343,75} = -0,0024049 \text{ m}$$

$$\theta'_A = -1,677 \cdot 10^{-4} + 0,125 \cdot v'_A = -0,0004673 \text{ rad}$$

$$d'_E = \begin{pmatrix} u'_A = 0,0000471 \text{ m} \\ v'_A = -0,0024049 \text{ m} \\ \theta'_A = -0,0004673 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Finalmente, el axil en el cable AC resulta ser:

$$N = E \cdot A \cdot \frac{(-v'_A)}{L} = -2 \cdot 10^7 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot v'_A = -2000 \cdot v'_A$$

$$N = 4,810 \text{ t}$$

Reacciones en los apoyos en ejes globales:

Las reacciones en los apoyos en el Estado II, se pueden determinar a partir de las siguientes expresiones matriciales.

$$\mathbf{R}'_B{}^{\text{II}} = (\mathbf{K}'_{12a}) \cdot \mathbf{d}'_A$$

$$\mathbf{R}'_D{}^{\text{II}} = (\mathbf{K}'_{12b}) \cdot \mathbf{d}'_A$$

Posteriormente se sumarán las reacciones correspondientes al estado I.

Estado II:

$$\mathbf{R}'_B{}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} -90000,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -2025,00 & 4050,00 \\ 0,00 & -4050,00 & 5400,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000047 \\ -0,002405 \\ -0,000467 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,24 \text{ t} \\ 2,98 \text{ t} \\ 7,22 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}'_D{}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} -60000,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -600,00 & -1800,00 \\ 0,00 & 1800,00 & 3600,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000047 \\ -0,002405 \\ -0,000467 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,83 \text{ t} \\ 2,28 \text{ t} \\ -6,01 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Estado I:

$$\mathbf{R}'_B{}^{\text{I}} = \begin{pmatrix} 0,00 \text{ t} \\ 0,00 \text{ t} \\ 0,00 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}'_D{}^{\text{I}} = \begin{pmatrix} 0,00 \text{ t} \\ 3,00 \text{ t} \\ -3,00 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Las reacciones reales en los empotramientos B y D, en el sistema de referencia global, las obtenemos como suma de las correspondientes a los estados I y II:

$$\mathbf{R}'_B{}^{\text{REAL}} = \mathbf{R}'_B{}^{\text{I}} + \mathbf{R}'_B{}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4,24 \\ 2,98 \\ 7,22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,24 \text{ t} \\ 2,98 \text{ t} \\ 7,22 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}'_D{}^{\text{REAL}} = \mathbf{R}'_D{}^{\text{I}} + \mathbf{R}'_D{}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 0,00 \\ 3,00 \\ -3,00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2,83 \\ 2,28 \\ -6,01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,83 \text{ t} \\ 5,28 \text{ t} \\ -9,01 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

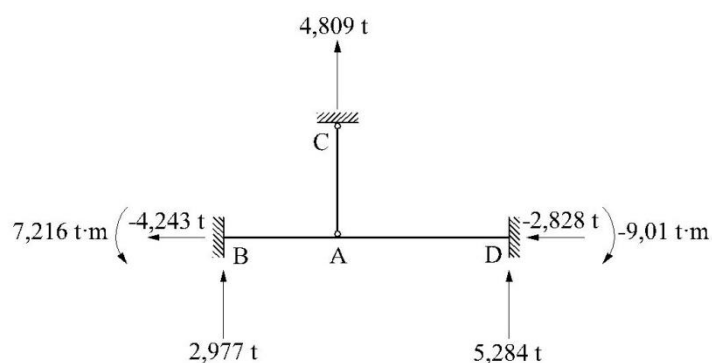


Fig. E.9.1.3.g

Equilibrio global:

En este apartado se verifica que las reacciones obtenidas son correctas, estableciendo el equilibrio estático de la estructura.

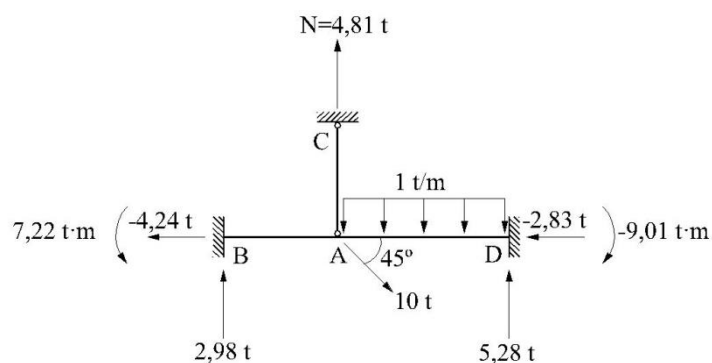


Fig. E.9.1.3.h

$$\sum F_H = 4,24 + 2,83 - 10 \cdot \cos 45^\circ = 7,07 - 7,07 = 0$$

$$\sum F_V = 2,98 + 5,28 + 4,81 - 1 \cdot 6 - 10 \cdot \sen 45^\circ = 13,07 - 13,07 = 0$$

$$\sum M_B = 7,22 - 9,01 + 5,28 \cdot 10 + 4,81 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \cdot 7 - 10 \cdot \sen 45^\circ \cdot 4 = 79,29 - 79,29 = 0$$

Ejercicio 9.1.4

En la estructura de la figura calcular el movimiento de los nudos y las reacciones en los apoyos.

Barras:

Sección: $0,6 \times 0,4 \text{ m}^2$

$E: 2 \cdot 10^5 \text{ Kg/cm}^2$

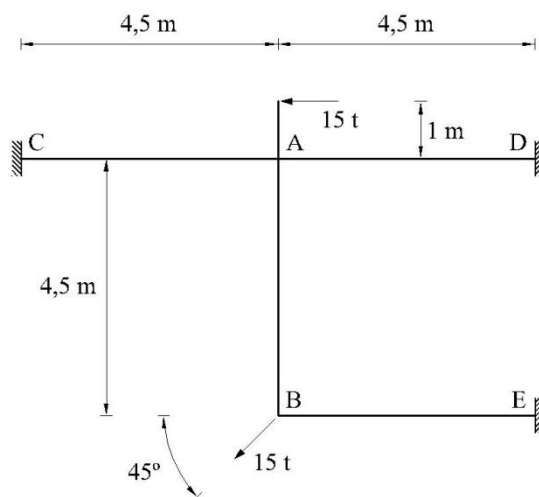


Fig. E.9.1.4.a

Solución:

Para resolver el ejercicio consideramos el siguiente estado equivalente al de la estructura real:

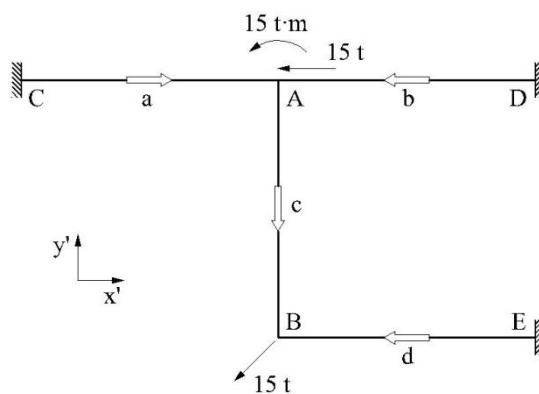


Fig. E.9.1.4.b

Discretización de la estructura:

En la figura anterior se ha definido también:

- Sistema de referencia global (X'Y'): S.G.
- Numeración de barras y nudos de la estructura.
- Sistema de referencia local (S.L.).

En la siguiente tabla se indican las características geométricas y mecánicas de cada una de las barras de la estructura:

Barras	Ancho (m)	Canto (m)	Área (m ²)	L (m)	I (m ⁴)	E (Kp/cm ²)	E (t/m ²)	α
a	0,400	0,600	0,240	4,500	0,00720000	2,00·10 ⁵	2,00·10 ⁶	0°
b	0,400	0,600	0,240	4,500	0,00720000	2,00·10 ⁵	2,00·10 ⁶	180°
c	0,400	0,600	0,240	4,500	0,00720000	2,00·10 ⁵	2,00·10 ⁶	270°
d	0,400	0,600	0,240	4,500	0,00720000	2,00·10 ⁵	2,00·10 ⁶	180°

Matriz de rigidez de la estructura en el sistema de referencia global:

A continuación se define la matriz de rigidez de la estructura. Solo se incluyen las filas y columnas correspondientes a los nudos libres A y B (en este orden):

$$K'_E = \begin{matrix} & A & B \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} K'_{22a} + K'_{22b} + K'_{11c} & K'_{12c} \\ K'_{21c} & K'_{22c} + K'_{22d} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matrices de rigidez elementales de las barras (S.G.):

Al tratarse de barras reticuladas planas, la expresión de las matrices elementales de cada barra en coordenadas locales es:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

A continuación se calcula la submatriz K'_{22a} . El procedimiento indicado es similar para el resto de submatrices necesarias (K'_{22b} , K'_{11c} , ...) para determinar los coeficientes de la matriz de la estructura K'_E :

La submatriz elemental K_{22} de la barra "a" en coordenadas locales es:

$$K_{22a} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

La matriz K'_{22a} en coordenadas globales se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$K'_{22a} = C \cdot K_{22a} \cdot C^T$$

Donde C, la matriz de transformación o de cambio de ejes, para la barra a es:

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sena} & 0 \\ \text{sena} & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0 & -1,0 & 0,0 \\ 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}$$

Resultando,

$$K'_{22a} = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 106666,7 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1896,3 & -4266,7 \\ 0,0 & -4266,7 & 12800,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}$$

$$K'_{22a} = \begin{pmatrix} 106666,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1896,30 & -4266,67 \\ 0,00 & -4266,67 & 12800,00 \end{pmatrix}$$

Una vez calculadas las submatrices K'_{22a} , K'_{11c} , K'_{22a} , ... se determina la matriz K'_E :

$$K'_E = \begin{pmatrix} 215229,63 & 0,00 & 4266,67 & -1896,30 & 0,00 & 4266,67 \\ 0,00 & 110459,26 & 0,00 & 0,00 & -106666,67 & 0,00 \\ 4266,67 & 0,00 & 38400,00 & -4266,67 & 0,00 & 6400,00 \\ -1896,30 & 0,00 & -4266,67 & 108562,96 & 0,00 & -4266,67 \\ 0,00 & -106666,67 & 0,00 & 0,00 & 108562,96 & 4266,67 \\ 4266,67 & 0,00 & 6400,00 & -4266,67 & 4266,67 & 25600,00 \end{pmatrix}$$

Vector de cargas o fuerzas exteriores en los nudos:

$$P'_E = \begin{pmatrix} P'_{Ax} = -15,000 \text{ t} \\ P'_{Ay} = 0,000 \text{ t} \\ M'_A = 15,000 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Bx} = -10,607 \text{ t} \\ P'_{By} = -10,607 \text{ t} \\ M'_B = 0,000 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Desplazamientos en los nudos libres o no restringidos:

Los desplazamientos de los nudos libres (A y B) en el sistema de referencia global lo obtenemos a partir de la ecuación:

$$d'_E = (K'_E)^{-1} \cdot P'_E = \begin{pmatrix} u'_A = -0,0000825 \text{ m} \\ v'_A = -0,0020402 \text{ m} \\ \theta'_A = 0,0003470 \text{ rad} \\ u'_B = -0,0000750 \text{ m} \\ v'_B = -0,0021128 \text{ m} \\ \theta'_B = 0,0002666 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Reacciones en los apoyos en ejes globales:

Las reacciones en los apoyos se determinan a partir de las siguientes ecuaciones matriciales:

Empotramiento C:

$$R'_C = K'_{12a} \cdot d'_A$$

$$R'_C = \begin{pmatrix} -106666,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -1896,30 & 4266,67 \\ 0,00 & -4266,67 & 6400,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0000825 \\ -0,0020402 \\ 0,0003470 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{Cx} = 8,802 \text{ t} \\ R'_{Cy} = 5,349 \text{ t} \\ M'_C = 10,926 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Empotramiento D:

$$R'_D = K'_{12b} \cdot d'_A$$

$$R'_D = \begin{pmatrix} -106666,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -1896,30 & -4266,67 \\ 0,00 & 4266,67 & 6400,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0000825 \\ -0,0020402 \\ 0,0003470 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{Dx} = 8,802 \text{ t} \\ R'_{Dy} = 2,338 \text{ t} \\ M'_D = -6,484 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Empotramiento E:

$$R'_E = K'_{21c} \cdot d'_A + (K'_{22c} + K'_{22d}) \cdot d'_B$$

$$R'_E = \begin{pmatrix} -1896,30 & 0,00 & -4266,67 \\ 0,00 & -106666,67 & 0,00 \\ 4266,67 & 0,00 & 6400,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0000825 \\ -0,0020402 \\ 0,0003470 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1896,30 & 0,00 & -4266,67 \\ 0,00 & 106666,67 & 0,00 \\ -4266,67 & 0,00 & 12800,00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 106666,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1896,30 & 4266,67 \\ 0,00 & 4266,67 & 12800,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0000750 \\ -0,0021128 \\ 0,0002666 \end{pmatrix}$$

$$R'_E = \begin{pmatrix} R'_{Ex} = 8,003 \text{ t} \\ R'_{Ey} = 2,869 \text{ t} \\ M'_E = -7,308 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Las reacciones en los apoyos son:

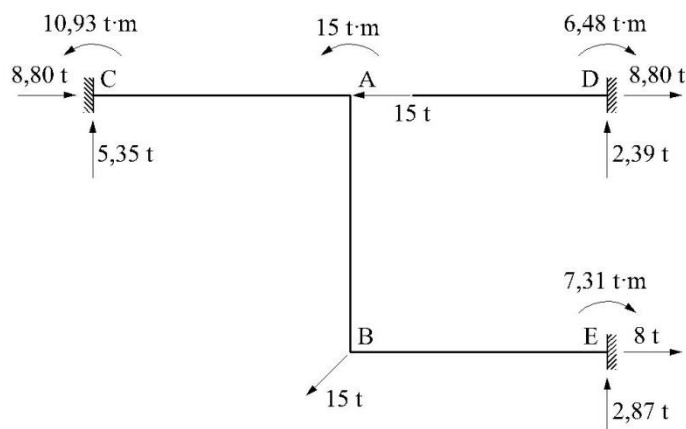


Fig. E.9.1.4.c

Equilibrio global de la estructura:

Se comprueba, a continuación, el equilibrio global de la estructura:

$$\Sigma F_H = 0;$$

$$8,8 + 8,8 + 8 - 15 - 15 \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad 25,6 - 25,6 = 0$$

$$\Sigma F_V = 0;$$

$$5,35 + 2,39 + 2,87 - 15 \cdot \sin 45^\circ = 0; \quad 10,6 - 10,6 = 0$$

$$\Sigma M_C = 0;$$

$$10,93 + 15 + 2,39 \cdot 9 - 6,48 - 7,31 + 8 \cdot 4,5 + 2,87 \cdot 9 - 15 \cdot \cos 45^\circ \cdot 4,5 - 15 \cdot \sin 45^\circ \cdot 4,5 = 0$$

$$109,27 - 109,27 = 0$$

Deformada:

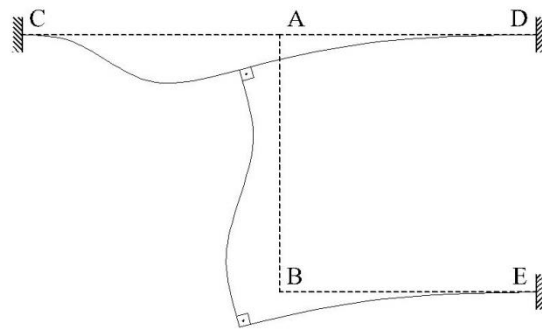


Fig. E.9.1.4.d

Ejercicio 9.1.5

En la estructura indicada calcular movimientos en los nudos y reacciones de empotramiento. Dibujar la ley de momentos flectores.

Barras:

$$E=2 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2$$

$$\text{Sección: } 0,3 \times 0,3 \text{ m}^2$$

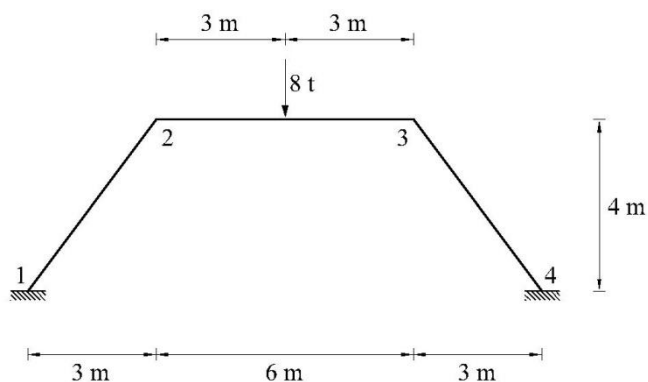


Fig. E.9.1.5.a

Solución:

Descomposición en estados:

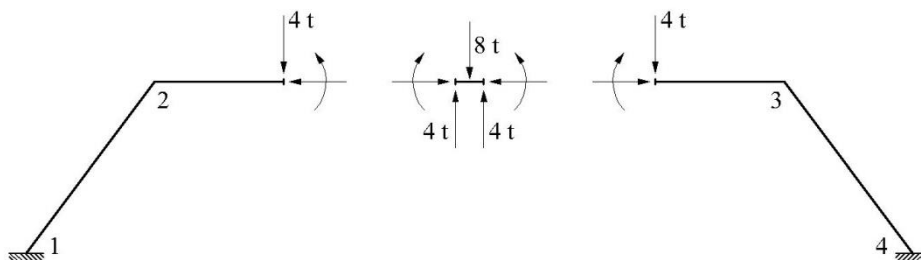


Fig. E.9.1.5.b

Por simetría, se estudia el elemento 1-2-A:

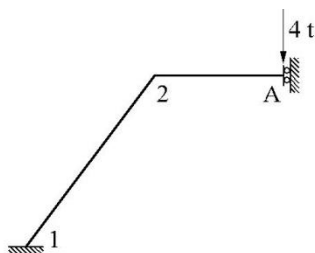


Fig. E.9.1.5.c

La carga aplicada en la deslizadera se puede considerar desplazada, una distancia diferencial δ :

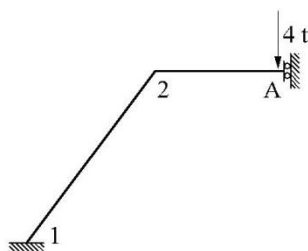


Fig. E.9.1.5.d

Estado I:

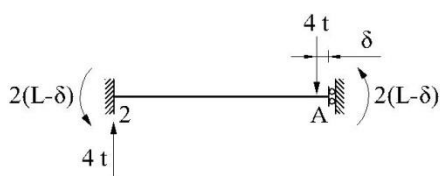


Fig. E.9.1.5.e

Ley de momentos correspondiente a la barra 2-A:

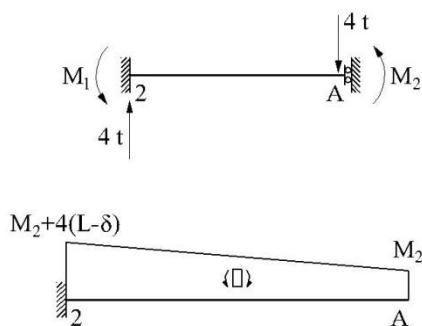


Fig. E.9.1.5.f

$$\theta = \frac{1}{EI} \cdot \left(M_2 \cdot L + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (L - \delta) \cdot L \right) = 0; \quad M_2 = -2(L - \delta)$$

$$M_1 = 4 \cdot (L - \delta) - 2 \cdot (L - \delta) = 2 \cdot (L - \delta)$$

De modo que:



Fig. E.9.1.5.g

Los estados a considerar son, por tanto:

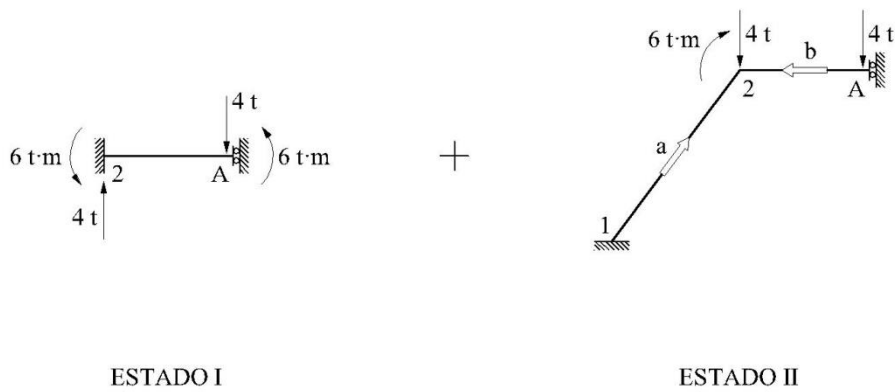


Fig. E.9.1.5.h

Estado II:

Resolución del Estado II de la estructura por el método matricial:

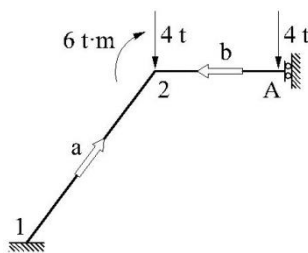


Fig. E.9.1.5.i

En la siguiente tabla se muestran los datos geométricos de cada una de las barras:

Barras	Ancho (m)	Canto (m)	Área (m ²)	L (m)	I (m ⁴)	E (t/m ²)	α
a (1-2)	0,300	0,300	0,090	5,000	0,00067500	$2,00 \cdot 10^7$	53,130
b (2-A)	0,300	0,300	0,090	3,000	0,00067500	$2,00 \cdot 10^7$	180

Matriz de rigidez de la estructura en el sistema de referencia global:

$$K'_E = (K'_{22a} + K'_{22b})$$

Matrices de rigidez elementales de las barras:

- Barra empotrada (barra a):

$$K_a = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

- Barra empotrada-deslizadera (barra b):

$$K_b = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} & 0 & 0 & -\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{L} & 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{pmatrix}$$

Las submatrices K'_{22a} y K'_{22b} para completar la matriz de la estructura K'_E se calculan según la siguiente expresión:

$$K'_{22a} = C \cdot K_{22a} \cdot C^T$$

$$K'_{22b} = C \cdot K_{22b} \cdot C^T$$

Siendo C la matriz de transformación:

$$C_a = C_b = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidas las submatrices K'_{22a} y K'_{22b} se compone la matriz K'_E

$$K'_E = \begin{pmatrix} 730429,44 & 172177,92 & 2592,00 \\ 172177,92 & 230866,56 & -1944,00 \\ 2592,00 & -1944,00 & 15300,00 \end{pmatrix}$$

Vector de cargas o fuerzas exteriores en el nudo 2:

$$P'_E = \begin{pmatrix} P'_{2x} = 0,000 \text{ t} \\ P'_{2y} = -4,000 \text{ t} \\ M'_2 = -6,000 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Desplazamiento en los nudos libres o no restringidos:

$$d'_E = (K'_E)^{-1} \cdot P'_E = \begin{pmatrix} u'_2 = 0,0000076 \text{ m} \\ v'_2 = -0,0000263 \text{ m} \\ \theta'_2 = -0,0003968 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Desplazamiento deslizador:

$$v_A = \frac{L^3}{12EI} \cdot \left(\frac{12EI}{L^3} \cdot v_2 - \frac{6EI}{L^2} \cdot \theta_2 \right)$$

En el sistema local:

$$\begin{pmatrix} u_2 = -0,00000762 \text{ m} \\ v_2 = 0,00002635 \text{ m} \\ \theta_2 = -0,00039680 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Sustituimos obteniendo v'_A (Deslizadera):

$$d'_A \text{ (deslizadera)} = \begin{pmatrix} u'_A = 0,0000000 \text{ m} \\ v'_A = 0,0006215 \text{ m} \\ \theta'_A = 0,0000000 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Reacciones en los apoyos en ejes globales:

Las reacciones en los apoyos se determinan a partir de las expresiones matriciales correspondientes al Estado II. A continuación se sumarán las reacciones correspondientes al Estado I.

Apoyo A (deslizadera):

Estado I:

$$R'_{AI} = \begin{pmatrix} N'_A = 0,000 \text{ t} \\ V'_A = 0,000 \text{ t} \\ M'_A = 6,000 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Estado II:

$$R'_{AII} = K'_{12b} \cdot d'_2 + K'_{11b} \cdot d'_A = \begin{pmatrix} N'_A = -4,572 \text{ t} \\ V'_A = 0,000 \text{ t} \\ M'_A = 1,786 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Por tanto, las reacciones en el apoyo A (deslizadera) serán:

$$R'_{Areal} = R'_{AI} + R'_{AII} = \begin{pmatrix} N'_A = -4,572 \text{ t} \\ V'_A = 0,000 \text{ t} \\ M'_A = 7,786 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Apoyo 1:

Estado I:

$$R'_{II} = \begin{pmatrix} N'_I = 0,000 \text{ t} \\ V'_I = 0,000 \text{ t} \\ M'_I = 0,000 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Estado II:

$$R'_{III} = K'_{12a} \cdot d'_2 = \begin{pmatrix} N'_A = 4,572 \text{ t} \\ V'_A = 4,000 \text{ t} \\ M'_A = -2,072 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Por tanto, las reacciones en el apoyo 1 serán:

$$R'_{Ireal} = R'_{II} + R'_{III} = \begin{pmatrix} N'_I = 4,572 \text{ t} \\ V'_I = 4,000 \text{ t} \\ M'_I = -2,072 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

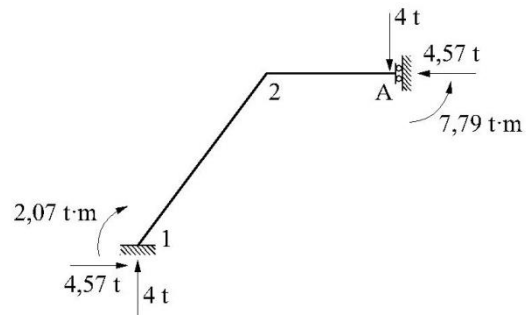


Fig. E.9. 1.5.j

Equilibrio global estructura real:

Comprobamos que las reacciones obtenidas son correctas, estableciendo el equilibrio estático de la estructura.

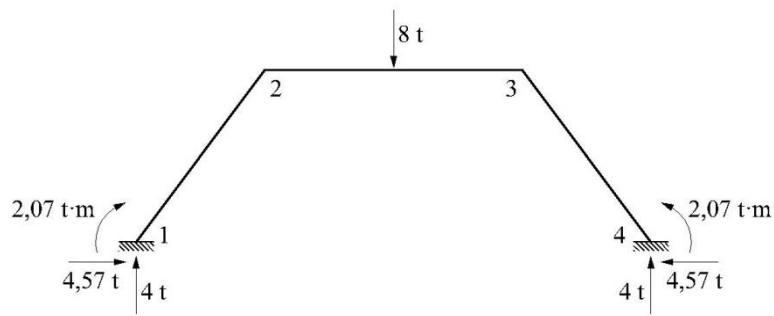


Fig. E.9.1.5.k

$$\Sigma F_H = 0; \quad 4,57 - 4,57 = 0$$

$$\Sigma F_V = 0; \quad 4 + 4 - 8 = 0$$

$$\Sigma M_1 = 0; \quad -2,07 - 8 \cdot 6 + 2,07 + 4 \cdot 12 = 0; \quad 50,07 - 50,07 = 0$$

Esfuerzos en las barras:*Barra a:*

Desplazamiento en ejes globales:

$$\mathbf{d}'_a = \begin{pmatrix} u'_1 = 0,0000000 \text{ m} \\ v'_1 = 0,0000000 \text{ m} \\ \theta'_1 = 0,0000000 \text{ rad} \\ u'_2 = 0,0000076 \text{ m} \\ v'_2 = -0,0000263 \text{ m} \\ \theta'_2 = -0,0003968 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Desplazamiento en ejes locales:

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{d}'_a = \begin{pmatrix} u_1 = 0,0000000 \text{ m} \\ v_1 = 0,0000000 \text{ m} \\ \theta_1 = 0,0000000 \text{ rad} \\ u_2 = -0,0000165 \text{ m} \\ v_2 = -0,0000219 \text{ m} \\ \theta_2 = -0,0003968 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Esfuerzos en los extremos de la barra (S.L.)

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{K}_a \cdot \mathbf{d}_a = \begin{pmatrix} N_1 = 5,943 \text{ t} \\ V_1 = -1,257 \text{ t} \\ M_1 = -2,072 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_2 = -5,943 \text{ t} \\ V_2 = 1,257 \text{ t} \\ M_2 = -4,214 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Barra b:

Desplazamiento en ejes globales

$$\mathbf{d}'_b = \begin{pmatrix} u'_A = 0,0000000 \text{ m} \\ v'_A = 0,0006215 \text{ m} \\ \theta'_A = 0,0000000 \text{ rad} \\ u'_2 = 0,0000076 \text{ m} \\ v'_2 = -0,0000263 \text{ m} \\ \theta'_2 = -0,0003968 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Desplazamiento en ejes locales

$$d_b = C^T \cdot d'_b = \begin{pmatrix} u_A = 0,000000 \text{ m} \\ v_A = -0,0006215 \text{ m} \\ \theta_A = 0,000000 \text{ rad} \\ u_2 = -0,0000076 \text{ m} \\ v_2 = 0,0000263 \text{ m} \\ \theta_2 = -0,0003968 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Esfuerzos en los extremos de la barra (II) (S.L.)

$$E_{bII} = K_b \cdot d_b = \begin{pmatrix} N_A = 4,572 \text{ t} \\ V_A = 0,000 \text{ t} \\ M_A = 1,786 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_2 = -4,572 \text{ t} \\ V_2 = 0,000 \text{ t} \\ M_2 = -1,786 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

$$E_{bI} = \begin{pmatrix} N_A = 0,000 \text{ t} \\ V_A = 0,000 \text{ t} \\ M_A = 6,000 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_2 = 0,000 \text{ t} \\ V_2 = 4,000 \text{ t} \\ M_2 = 6,000 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

$$E_{bI} = \begin{pmatrix} N_A = 0,000 \text{ t} \\ V_A = 0,000 \text{ t} \\ M_A = 6,000 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_2 = 0,000 \text{ t} \\ V_2 = 4,000 \text{ t} \\ M_2 = 6,000 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

$$E_{bREAL} = E_{bI} + E_{bII} = \begin{pmatrix} N_A = 4,572 \text{ t} \\ V_A = 0,000 \text{ t} \\ M_A = 7,786 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_2 = -4,572 \text{ t} \\ V_2 = 4,000 \text{ t} \\ M_2 = 4,214 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Ley de momentos flectores:

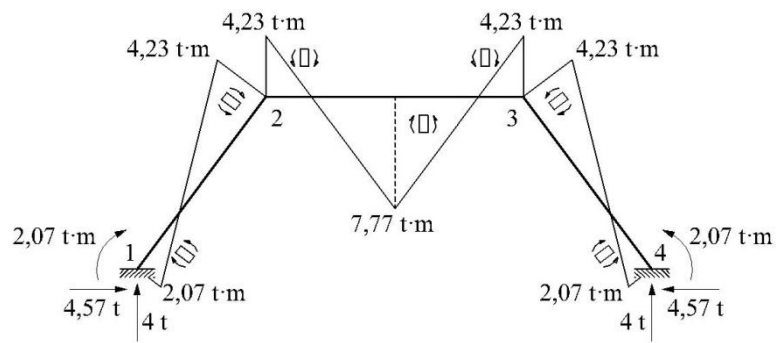


Fig. E.9.1.5.1

9.2 ESTRUCTURAS ARTICULADAS PLANAS

Ejercicio 9.2.1

Mediante aplicación de análisis matricial determinar en el pórtico indicado:

1. Reacciones en apoyos.
2. Movimiento de los nudos A, B, C y D.
3. Distribución de momentos flectores.
4. Deformada.

Características de las barras:

$$E=2,1 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2$$

$$\text{Sección: } 30 \times 30 \text{ cm}^2$$

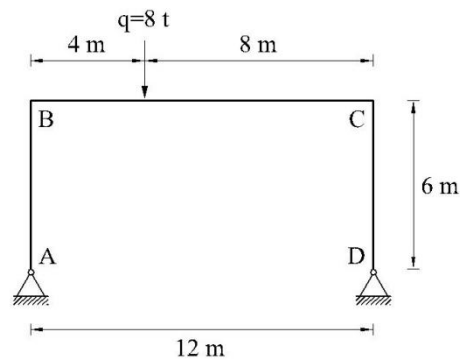


Fig. E.9.2.1.a

Solución:Aplicación del Principio de Superposición:

La barra BC está sometida a una carga puntual en su vano. Para resolver el ejercicio mediante el método matricial se descompone el estado real en los dos estados siguientes: Estado I (de empotramiento perfecto), Estado II (cálculo matricial).

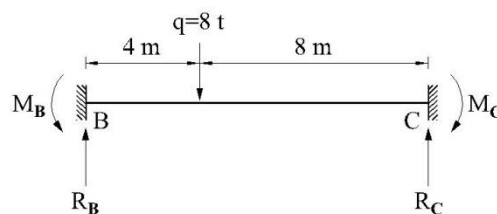


Fig. E.9.2.1.b

$$R_B = q \cdot \frac{b^2}{L^2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{b}{L} \right) = 5,9259t \cong 5,93 t$$

$$R_C = q \cdot \frac{a^2}{L^2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{a}{L} \right) = 2,074t \cong 2,07 t$$

$$M_B = q \cdot \frac{a \cdot b^2}{L^2} = 14,22 t \cdot m$$

$$M_C = -q \cdot \frac{a^2 \cdot b}{L^2} = -7,11 t \cdot m$$

Discretización de cargas:

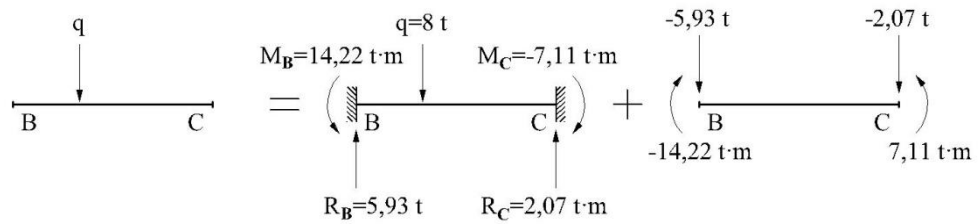


Fig. E.9.2.1.c

Resolución del Estado II de la estructura por el método matricial:

Discretización de la estructura:

En la siguiente figura se ha definido:

- Sistema de referencia global (X'Y'): S.G.
- Designación de barras y nudos de la estructura.
- Sistema de referencia local (S.L.).

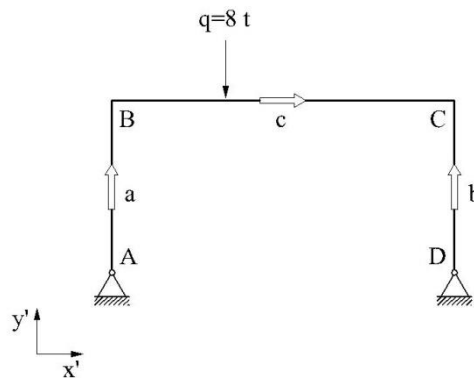


Fig. E.9.2.1.d

La tabla siguiente muestra las características geométricas y mecánicas de cada una de las barras de la estructura:

Barras	Ancho (m)	Canto (m)	Área (m ²)	L (m)	I (m ⁴)	E (t/m ²)	α
a (A-B)	0,300	0,300	0,090	6,0	0,000675	$2,10 \cdot 10^7$	90
b (C-D)	0,300	0,300	0,090	6,0	0,000675	$2,10 \cdot 10^7$	90
c (B-C)	0,300	0,300	0,090	12,0	0,000675	$2,10 \cdot 10^7$	0

Matriz de rigidez de la estructura en el sistema de referencia global:

La matriz reducida de la estructura K'_E se obtiene incluyendo las filas y columnas de los nudos libres B y C:

$$K'_E = \begin{matrix} & \text{B} & \text{C} \\ \text{B} & (K'_{22a} + K'_{11c}) & K'_{12c} \\ \text{C} & K'_{21c} & (K'_{22b} + K'_{22c}) \end{matrix}$$

Matrices de rigidez elementales de las barras (S.G.):

Las barras AB y DC son articuladas-empotradas, por lo que la expresión de la matriz de rigidez elemental de cualquier barra articulada-empotrada en el sistema de referencia local es:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

La barra BC es empotrada-empotrada, y la expresión de la matriz elemental la hemos visto en otros ejercicios anteriores.

En cuanto a la matriz C de transformación del sistema de referencia local al sistema de referencia global es igual para barras articuladas-empotradas y para barras biempotradas:

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se calculan las matrices de las barras a, b y c en coordenadas globales:

Barra a:

$$K'_a = C \cdot K_a \cdot C^T$$

Donde:

$$C = \begin{pmatrix} 0,0 & -1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}$$

y,

$$K_a = \begin{pmatrix} 315000,0 & 0,0 & 0,0 & -315000,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 196,9 & 0,0 & 0,0 & -196,9 & 1181,3 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -315000,0 & 0,0 & 0,0 & 315000,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -196,9 & 0,0 & 0,0 & 196,9 & -1181,3 \\ 0,0 & 1181,3 & 0,0 & 0,0 & -1181,3 & 7087,5 \end{pmatrix}$$

Resultando,

$$K'_a = \begin{pmatrix} 196,88 & 0,00 & 0,00 & -196,88 & 0,00 & -1181,25 \\ 0,00 & 315000,00 & 0,00 & 0,00 & -315000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -196,88 & 0,00 & 0,00 & 196,88 & 0,00 & 1181,25 \\ 0,00 & -315000,00 & 0,00 & 0,00 & 315000,00 & 0,00 \\ -1181,25 & 0,00 & 0,00 & 1181,25 & 0,00 & 7087,50 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen las matrices del resto de las barras en el sistema de referencia global.

Barra b:

$$K'_b = \begin{pmatrix} 196,88 & 0,00 & 0,00 & -196,88 & 0,00 & -1181,25 \\ 0,00 & 315000,00 & 0,00 & 0,00 & -315000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -196,88 & 0,00 & 0,00 & 196,88 & 0,00 & 1181,25 \\ 0,00 & -315000,00 & 0,00 & 0,00 & 315000,00 & 0,00 \\ -1181,25 & 0,00 & 0,00 & 1181,25 & 0,00 & 7087,50 \end{pmatrix}$$

Barra c:

$$K'_c = \begin{pmatrix} 157500,00 & 0,00 & 0,00 & -157500,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 98,44 & 590,63 & 0,00 & -98,44 & 590,63 \\ 0,00 & 590,63 & 4725,00 & 0,00 & -590,63 & 2362,50 \\ -157500,00 & 0,00 & 0,00 & 157500,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -98,44 & -590,63 & 0,00 & 98,44 & -590,63 \\ 0,00 & 590,63 & 2362,50 & 0,00 & -590,63 & 4725,00 \end{pmatrix}$$

Conocidas las submatrices K'_{22a} , K'_{22b} y K'_c se compone la matriz reducida K'_E .

$$K'_E = \begin{pmatrix} 157696,88 & 0,00 & 1181,25 & -157500,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 315098,44 & 590,63 & 0,00 & -98,44 & 590,63 \\ 1181,25 & 590,63 & 11812,50 & 0,00 & -590,63 & 2362,50 \\ -157500,00 & 0,00 & 0,00 & 157696,88 & 0,00 & 1181,25 \\ 0,00 & -98,44 & -590,63 & 0,00 & 315098,44 & -590,63 \\ 0,00 & 590,63 & 2362,50 & 1181,25 & -590,63 & 11812,50 \end{pmatrix}$$

Vector de cargas o fuerzas exteriores en los nudos:

$$P'_E = \begin{pmatrix} P'_{Bx} = 0,000 \text{ t} \\ P'_{By} = -5,926 \text{ t} \\ M'_B = -14,222 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Cx} = 0,000 \text{ t} \\ P'_{Cy} = -2,074 \text{ t} \\ M'_C = 7,111 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Desplazamiento en el nudo E:

Las componentes del desplazamiento del nudo E, se calcula a partir de la siguiente expresión en el sistema de referencia global:

$$\mathbf{d}'_E = (\mathbf{K}'_E)^{-1} \cdot \mathbf{P}'_E$$

$$\mathbf{d}'_E = \begin{pmatrix} u'_B = 0,0030100 \text{ m} \\ v'_B = -0,0000169 \text{ m} \\ \theta'_B = -0,0016302 \text{ rad} \\ u'_C = 0,0030015 \text{ m} \\ v'_C = -0,0000085 \text{ m} \\ \theta'_C = 0,0006283 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Giros en los nudos A y D

Para determinar los giros en los nudos A y D consideramos las barras a y b biempotradas, y la ecuación que resulta para calcular el momento en dichos nudos la igualamos a cero, puesto que en la estructura real hay una articulación que no impide el giro en dichos nudos y por tanto no aparece ningún momento.

La ecuación del momento se puede obtener aplicando la condición anterior tanto en el sistema de referencia global como local.

Giro en A

En el sistema de referencia global, la ecuación que resulta es:

$$M'_A = 9450,0 \cdot \theta'_A + 2362,5 \cdot u'_B + 4725,0 \cdot \theta'_B = 0$$

De donde despejamos θ'_A :

$$\theta'_A = 0,0000626 \text{ rad}$$

Giro en D

Para obtener el giro en D, seguimos el mismo procedimiento:

$$M'_D = 9450,0 \cdot \theta'_D + 2362,5 \cdot u'_C + 4725,0 \cdot \theta'_C = 0$$

De donde se obtiene:

$$\theta'_D = -0,0010645 \text{ rad}$$

Reacciones en los apoyos A y D en ejes globales:

Las reacciones en los apoyos (nudos A y D), se determinan a partir de las siguientes expresiones matriciales, en el sistema de referencia global.

Puesto que las barras a y b no están sometidas a ninguna carga, las reacciones que resultan de aplicar el cálculo matricial (Estado II) coinciden con las reacciones del estado real.

Nudo A:

$$\mathbf{R}'_A = \mathbf{K}'_{11a} \cdot \mathbf{d}'_A + \mathbf{K}'_{12a} \cdot \mathbf{d}'_B$$

$$\mathbf{R}'_A = \begin{pmatrix} 196,88 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 315000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0000000 \\ 0,0000000 \\ 0,0000626 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -196,88 & 0,00 & -1181,25 \\ 0,00 & -315000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0030100 \\ -0,0000169 \\ -0,0016302 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}'_A = \begin{pmatrix} \mathbf{R}'_{Ax} = 1,333 \text{ t} \\ \mathbf{R}'_{Ay} = 5,333 \text{ t} \\ \mathbf{M}'_A = 0,000 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Nudo D:

$$\mathbf{R}'_D = \mathbf{K}'_{12b} \cdot \mathbf{d}'_C + \mathbf{K}'_{11b} \cdot \mathbf{d}'_D$$

$$\mathbf{R}'_D = \begin{pmatrix} -196,88 & 0,00 & -1181,25 \\ 0,00 & -315000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0030015 \\ -0,0000085 \\ 0,0006283 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 196,88 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 315000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0000000 \\ 0,0000000 \\ -0,0010645 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}'_D = \begin{pmatrix} \mathbf{R}'_{Dx} = -1,333 \text{ t} \\ \mathbf{R}'_{Dy} = 2,667 \text{ t} \\ \mathbf{M}'_D = 0,000 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Equilibrio global:

En este apartado se comprueba el equilibrio global de la estructura, con los valores de las reacciones calculadas anteriormente.

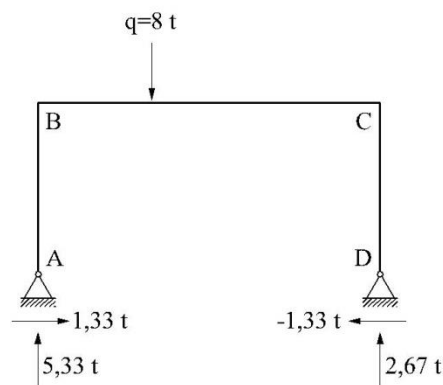


Fig. E.9.2.1.e

$$\begin{aligned} \Sigma F_H = 0, & \quad 1,333 - 1,333 = 0 \\ \Sigma F_V = 0, & \quad 5,333 + 2,667 - 8 = 0 \\ \Sigma M_A = 0, & \quad -8 \cdot 4 + 2,667 \cdot 12 = 0 \end{aligned}$$

Ley de momentos flectores

Para definir la distribución de momentos flectores de la estructura, calculamos los esfuerzos en los extremos de las barras mediante cálculo matricial (Estado II).

En la barra c los esfuerzos reales se obtendrán sumando los esfuerzos correspondientes a los a los Estado I y II.

En las barras a y b los esfuerzos reales son los calculados directamente en el Estado II.

Esfuerzos en los extremos de las barras en coordenadas locales:

Barra a:

Los desplazamientos en los extremos de la barra a en coordenadas locales son:

$$d_a = C_a^T \cdot d'_a$$

$$d_a = \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,000063 \\ 0,003010 \\ -0,000017 \\ -0,001630 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,000000 \text{ m} \\ 0,000000 \text{ m} \\ 0,000063 \text{ rad} \\ -0,000017 \text{ m} \\ -0,003010 \text{ m} \\ -0,001630 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra a en coordenadas locales son:

$$E_a = K_a \cdot d_a$$

$$E_a = \begin{pmatrix} 315000,0 & 0,0 & 0,0 & -315000,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 196,9 & 0,0 & 0,0 & -196,9 & 1181,3 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -315000,0 & 0,0 & 0,0 & 315000,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -196,9 & 0,0 & 0,0 & 196,9 & -1181,3 \\ 0,0 & 1181,3 & 0,0 & 0,0 & -1181,3 & 7087,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 \\ 0,000063 \\ 0,003010 \\ -0,000017 \\ -0,001630 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_A = 5,333 \text{ t} \\ V_A = -1,333 \text{ t} \\ M_A = 0,000 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_B = -5,333 \text{ t} \\ V_B = 1,333 \text{ t} \\ M_B = -7,999 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Barra b:

Los desplazamientos de los extremos de la barra en coordenadas locales son:

$$d_b = C_b^T \cdot d'_b$$

$$d_b = \begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 \\ -0,001065 \\ 0,003002 \\ -0,000008 \\ 0,000628 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,000000 \text{ m} \\ 0,000000 \text{ m} \\ -0,001065 \text{ rad} \\ -0,000008 \text{ m} \\ -0,003002 \text{ m} \\ 0,000628 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra b en coordenadas locales son:

$$E_b = K_b \cdot d_b$$

$$E_b = \begin{pmatrix} 315000,0 & 0,0 & 0,0 & -315000,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 196,9 & 0,0 & 0,0 & -196,9 & 1181,3 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -315000,0 & 0,0 & 0,0 & 315000,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -196,9 & 0,0 & 0,0 & 196,9 & -1181,3 \\ 0,0 & 1181,3 & 0,0 & 0,0 & -1181,3 & 7087,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000000 \\ 0,000000 \\ -0,001065 \\ -0,000008 \\ -0,003002 \\ 0,000628 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_D = 2,667 \text{ t} \\ V_D = 1,333 \text{ t} \\ M_D = 0,000 \text{ t-m} \\ N_C = -2,667 \text{ t} \\ V_C = -1,333 \text{ t} \\ M_C = 7,999 \text{ t-m} \end{pmatrix}$$

Barra c

Los desplazamientos de los extremos de la barra c en coordenadas locales son:

$$d_c = C_c^T \cdot d'_c$$

$$d_c = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,003010 \\ -0,000017 \\ -0,001630 \\ 0,003002 \\ -0,000008 \\ 0,000628 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,003010 \text{ m} \\ -0,000017 \text{ m} \\ -0,001630 \text{ rad} \\ 0,003002 \text{ m} \\ -0,000008 \text{ m} \\ 0,000628 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de la barra c en coordenadas locales, en el estado II, son:

$$E_{cII} = K_c \cdot d_c$$

$$E_{cII} = \begin{pmatrix} 157500,0 & 0,0 & 0,0 & -157500,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 98,4 & 590,6 & 0,0 & -98,4 & 590,6 \\ 0,0 & 590,6 & 4725,0 & 0,0 & -590,6 & 2362,5 \\ -157500,0 & 0,0 & 0,0 & 157500,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -98,4 & -590,6 & 0,0 & 98,4 & -590,6 \\ 0,0 & 590,6 & 2362,5 & 0,0 & -590,6 & 4725,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,003010 \\ -0,000017 \\ -0,001630 \\ 0,003002 \\ -0,000008 \\ 0,000628 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_B = 1,333 \text{ t} \\ V_B = -0,593 \text{ t} \\ M_B = -6,223 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_C = -1,333 \text{ t} \\ V_C = 0,593 \text{ t} \\ M_C = -0,888 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

En el Estado I, los esfuerzos en los extremos de la barra c son:

$$E_{cI} = \begin{pmatrix} N_B = 0,000 \text{ t} \\ V_B = 5,926 \text{ t} \\ M_B = 14,222 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_C = 0,000 \text{ t} \\ V_C = 2,074 \text{ t} \\ M_C = -7,111 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

De modo que para el estado real los esfuerzos en los extremos de la barra c, serán:

$$E_{cREAL} = E_{cI} + E_{cII} = \begin{pmatrix} 0,000 \\ 5,926 \\ 14,222 \\ 0,000 \\ 2,074 \\ -7,111 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,333 \\ -0,593 \\ -6,223 \\ -1,333 \\ 0,593 \\ -0,888 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_B = 1,333 \text{ t} \\ V_B = 5,333 \text{ t} \\ M_B = 7,999 \text{ t}\cdot\text{m} \\ N_C = -1,333 \text{ t} \\ V_C = 2,667 \text{ t} \\ M_C = -7,999 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Estado I: barra c

$$0 < x < 4; \quad M + 14,222 - 5,926 \cdot x = 0$$

$$M = -14,222 + 5,926 \cdot x$$

$$4 < x < 12; \quad M + 14,222 - 5,926 \cdot x + 8 \cdot (x - 4) = 0$$

$$M = -2,074 \cdot x + 17,778$$



Fig. E.9.2.1.f

Estado II:

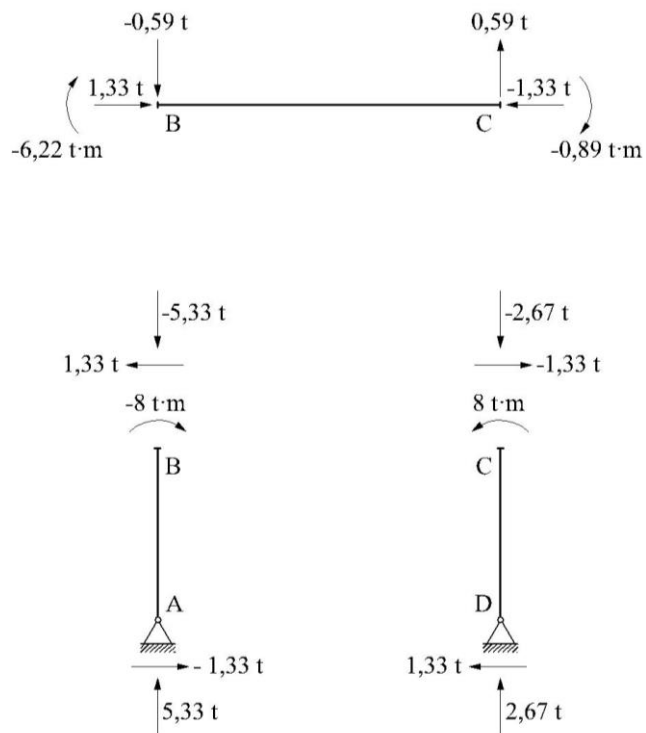


Fig. E.9.2.1.g

Estado I + II: barra c



Fig. E.9.2.1.h

$$0 < x < 4; \quad M_{I+II} = -8 + 5,333 \cdot x$$

$$4 < x < 12; \quad M_{I+II} = 24,001 - 2,667 \cdot x$$

Diagrama de momentos flectores:

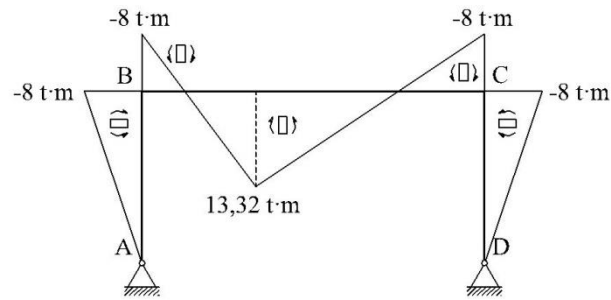


Fig. E.9.2.1.i

Diagrama de esfuerzos cortantes:

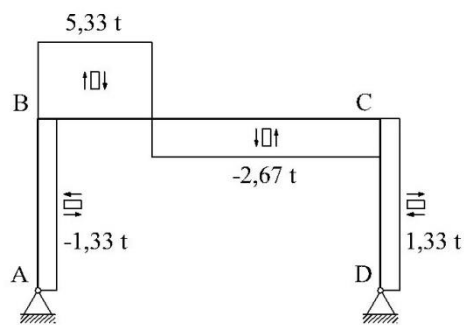


Fig. E.9.2.1.j

Diagrama de axiles:

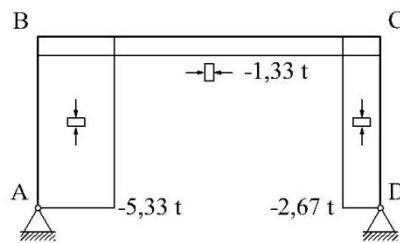


Fig. E.9.2.1.k

Ejercicio 9.2.2

En la estructura de la figura, las barras superiores están sometidas a un incremento térmico de 30°; calcular las reacciones en los apoyos.

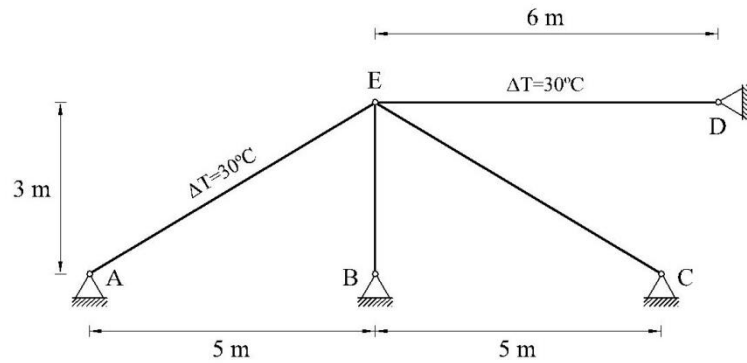


Fig. E.9.2.2.a

Barras: $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

$$\Omega = 30 \text{ cm}^2$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2$$

Solución:Aplicación del Principio de Superposición:

Las barras AE y DE están sometidas a un incremento de temperatura que induce la aparición de esfuerzos axiales.

Para la resolución del ejercicio mediante el método matricial, se descompone el estado real en los dos estados siguientes. En el estado de empotramiento perfecto, se han calculado los esfuerzos axiales por efecto de la temperatura.

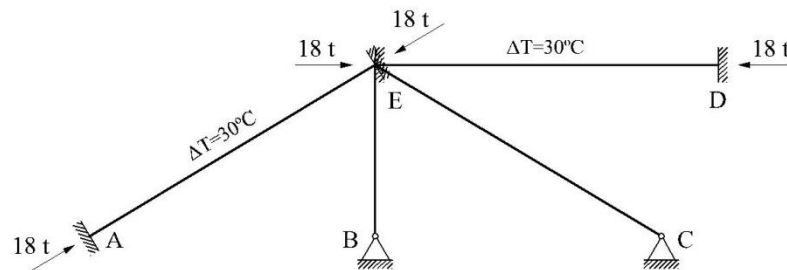
Estado I:

Fig. E.9.2.2.b

Estado II:

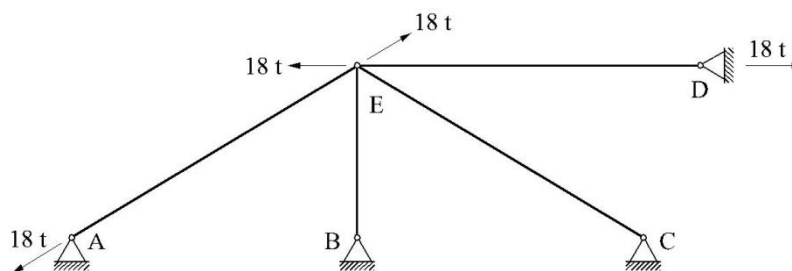


Fig. E.9.2.2.c

Resolución del Estado II de la estructura por el método matricial:

Discretización de la estructura:

En la siguiente figura se ha definido:

- Sistema de referencia global (X'Y'): S.G.
- Designación de barras y nudos de la estructura.
- Sistema de referencia local (S.L.).

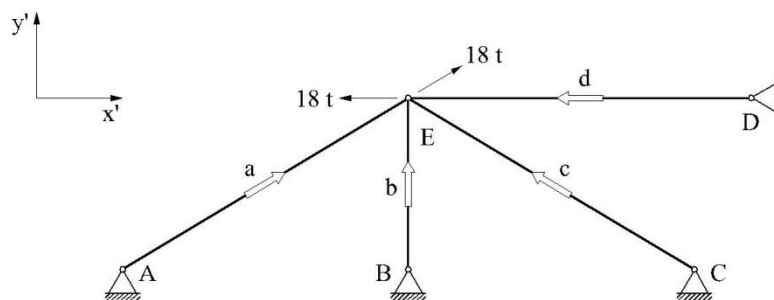


Fig. E.9.2.2.d

La tabla siguiente muestra las características geométricas y mecánicas de cada una de las barras de la estructura:

Barras	Área (m ²)	L (m)	E (Kp/cm ²)	E (t/m ²)	α
a (AE)	0,003	5,831	$2,00 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^7$	30,964
b (BE)	0,003	3,000	$2,00 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^7$	90
c (CE)	0,003	5,831	$2,00 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^7$	149,036
d (DE)	0,003	6,000	$2,00 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^7$	180,000

Matriz de rigidez de la estructura en el sistema de referencia global:

La matriz reducida de la estructura K'_E se obtiene incluyendo las filas y columnas del nudo libre E:

$$K'_E = (K'_{22a} + K'_{22b} + K'_{22c} + K'_{22d})$$

Matrices de rigidez elementales de las barras (S.G.):

Las barras que forman la estructura son articuladas planas. La expresión de la matriz de rigidez elemental de cualquier barra articulada en el sistema de referencia local es:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ 0 \\ N_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot \Omega}{L} & 0 & -\frac{E \cdot \Omega}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E \cdot \Omega}{L} & 0 & \frac{E \cdot \Omega}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

En el caso de las barras biarticuladas, la matriz C de transformación del sistema de referencia local al sistema de referencia global es:

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

A continuación se calculan las matrices de las barras a, b, c y d en coordenadas globales:

Barra a:

$$K'_a = C \cdot K_a \cdot C^T$$

$$K'_a = \begin{pmatrix} 0,857 & -0,514 & 0,857 & -0,514 \\ 0,514 & 0,857 & 0,514 & 0,857 \\ 0,857 & -0,514 & 0,857 & -0,514 \\ 0,514 & 0,857 & 0,514 & 0,857 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10289,92 & 0,00 & -10289,92 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -10289,92 & 0,00 & 10289,92 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,857 & 0,514 & 0,857 & 0,514 \\ -0,514 & 0,857 & -0,514 & 0,857 \\ 0,857 & 0,514 & 0,857 & 0,514 \\ -0,514 & 0,857 & -0,514 & 0,857 \end{pmatrix}$$

$$K'_a = \begin{pmatrix} 7566,11 & 4539,67 & -7566,11 & -4539,67 \\ 4539,67 & 2723,80 & -4539,67 & -2723,80 \\ -7566,11 & -4539,67 & 7566,11 & 4539,67 \\ -4539,67 & -2723,80 & 4539,67 & 2723,80 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo se obtienen las matrices del resto de las barras en el sistema de referencia global.

Barra b:

$$K'_b = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 20000,00 & 0,00 & -20000,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -20000,00 & 0,00 & 20000,00 \end{pmatrix}$$

Barra c:

$$K'_c = \begin{pmatrix} 7566,11 & -4539,67 & -7566,11 & 4539,67 \\ -4539,67 & 2723,80 & 4539,67 & -2723,80 \\ -7566,11 & 4539,67 & 7566,11 & -4539,67 \\ 4539,67 & -2723,80 & -4539,67 & 2723,80 \end{pmatrix}$$

Barra d:

$$K'_d = \begin{pmatrix} 10000,00 & 0,00 & -10000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -10000,00 & 0,00 & 10000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix}$$

Conocidas las submatrices K'_{22a} , K'_{22b} , K'_{22c} y K'_{22d} se compone la matriz reducida K'_E .

$$K'_E = \begin{pmatrix} 25132,23 & 0,00 \\ 0,00 & 25447,60 \end{pmatrix}$$

Vector de cargas o fuerzas exteriores en los nudos:

$$P'_E = \begin{pmatrix} P'_{Ex} = -2,565 \text{ t} \\ P'_{Ey} = 9,261 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Desplazamiento en el nudo E:

Las componentes del desplazamiento del nudo E, se calcula a partir de la siguiente expresión en el sistema de referencia global:

$$d'_E = (K'_E)^{-1} \cdot P'_E$$

$$d'_E = \begin{pmatrix} u'_E = -0,0001021 \text{ m} \\ v'_E = 0,0003639 \text{ m} \end{pmatrix}$$

Reacciones en los apoyos en ejes globales:

En los nudos A y D para obtener los valores reales de las reacciones, se sumarán las reacciones que aparecían en el Estado I (empotramiento perfecto) a las que resultan del cálculo matricial (Estado II).

Las reacciones en los apoyos correspondientes al Estado II, se determinan a partir de las siguientes expresiones matriciales, en el sistema de referencia global.

Nudo A:

$$R'_{AII} = K'_{12a} \cdot d'_E$$

$$R'_{AII} = \begin{pmatrix} -7566,11 & -4539,67 \\ -4539,67 & -2723,80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0001021 \\ 0,0003639 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{AIIx} = -0,880 \text{ t} \\ R'_{AIly} = -0,528 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Por tanto, en Estado real las reacciones en el apoyo A serán:

$$R'_{A-REAL} = R'_{AI} + R'_{AII} = \begin{pmatrix} 15,435 \\ 9,261 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,880 \\ -0,528 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{Ax} = 14,555 \text{ t} \\ R'_{Ay} = 8,733 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Nudo B:

$$R'_B = K'_{12b} \cdot d'_E$$

$$R'_B = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -20000,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0001021 \\ 0,0003639 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{Bx} = 0,000 \text{ t} \\ R'_{By} = -7,278 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Nudo C:

$$R'_C = K'_{12c} \cdot d'_E$$

$$R'_C = \begin{pmatrix} -7566,11 & 4539,67 \\ 4539,67 & -2723,80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0001021 \\ 0,0003639 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{Cx} = 2,424 \text{ t} \\ R'_{Cy} = -1,455 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Nudo D:

$$R'_{DII} = K'_{12d} \cdot d'_E$$

$$R'_{DII} = \begin{pmatrix} -10000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0001021 \\ 0,0003639 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{DIIx} = 1,021 \text{ t} \\ R'_{DIly} = 0,000 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Por tanto, en Estado real las reacciones en el apoyo D serán:

$$R'_{D-REAL} = R'_{DI} + R'_{DII} = \begin{pmatrix} -18,000 \\ 0,000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,021 \\ 0,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{Dx} = -16,979 \text{ t} \\ R'_{Dy} = 0,000 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Equilibrio global:

A continuación se comprueba el equilibrio global de la estructura, con los valores de las reacciones determinados en el apartado anterior. De este modo también se verifica que en todo el proceso de cálculo no ha habido errores.

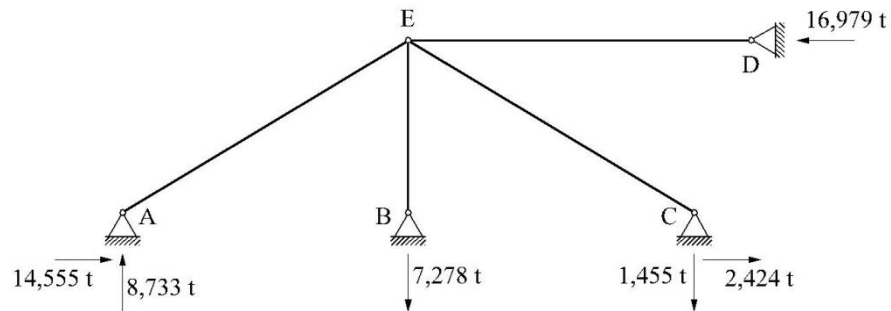


Fig. E.9.2.2.e

$$\sum F_H = 0; \quad R'_{Ax} + R'_{Cx} - R'_{Dx} = 0; \quad 14,555 + 2,424 - 16,979 = 0$$

$$\sum F_V = 0; \quad R'_{Ay} - R'_{By} - R'_{Cy} = 0; \quad 8,733 - 7,278 - 1,455 = 0$$

$$\begin{pmatrix} R'_{Ax} = 14,555 \text{ t} \\ R'_{Ay} = 8,733 \text{ t} \\ R'_{Ex} = 0,000 \text{ t} \\ R'_{Ey} = 0,000 \text{ t} \\ R'_{Bx} = 0,000 \text{ t} \\ R'_{By} = -7,278 \text{ t} \\ R'_{Cx} = 2,424 \text{ t} \\ R'_{Cy} = -1,455 \text{ t} \\ R'_{Dx} = -16,979 \text{ t} \\ R'_{Dy} = 0,000 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.2.3

Mediante aplicación de análisis matricial, determinar los desplazamientos de los nudos A y B, y las reacciones de apoyo.

Barras: $E=2 \cdot 10^4 \text{ Kg/cm}^2$

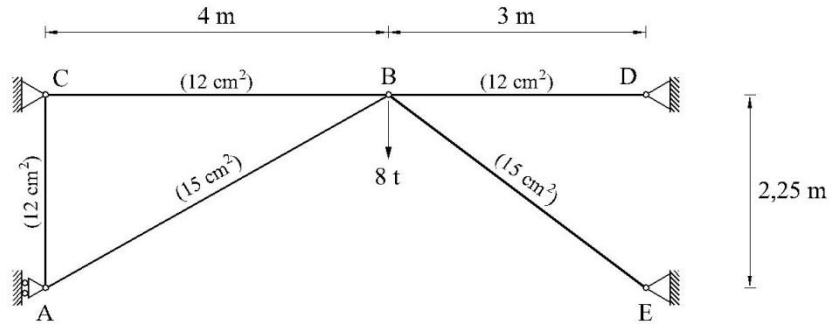


Fig. E.9.2.3.a

Solución:Discretización de la estructura:

En la siguiente figura se ha definido:

- Sistema de referencia global ($X'Y'$): S.G.
- Designación de barras y nudos de la estructura.
- Sistema de referencia local (S.L.).

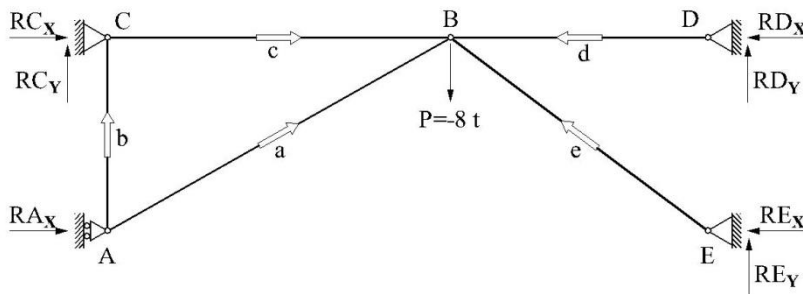


Fig. E.9.2.3.b

La tabla siguiente muestra los datos geométricos y mecánicos de cada una de las barras de la estructura:

Barras	Área (cm ²)	Área (m ²)	L (m)	E (Kp/cm ²)	E (t/m ²)	α
a	15,000	0,0015	4,589	$2,00 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^7$	29,358
b	12,000	0,0012	2,250	$2,00 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^7$	90
c	12,000	0,0012	4,000	$2,00 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^7$	0,000
d	12,000	0,0012	3,000	$2,00 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^7$	180,000
e	15,000	0,0015	3,750	$2,00 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^7$	143,130

Matriz de rigidez de la estructura en el sistema de referencia global:

La expresión matricial que relaciona las solicitaciones exteriores y los desplazamientos de la estructura en su conjunto, es:

$$\begin{pmatrix} P'_A \\ P'_B \\ P'_C \\ P'_D \\ P'_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K'_{11a} + K'_{11b} & & K'_{12a} & & K'_{12b} & 0 & 0 \\ & K'_{21a} & & K'_{22a} + K'_{22c} + K'_{22d} + K'_{22e} & & K'_{21c} & K'_{21d} & K'_{21e} \\ K'_{21b} & & K'_{12c} & & K'_{22b} + K'_{11c} & 0 & 0 & \\ 0 & & K'_{12d} & & 0 & K'_{11d} & 0 & \\ 0 & & K'_{12e} & & 0 & 0 & K'_{11e} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_A \\ d'_B \\ d'_C \\ d'_D = 0 \\ d'_E = 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz reducida de la estructura K'_E , se incluyen las filas y columnas de los nudos libres A y B, teniendo en cuenta que la componente horizontal del desplazamiento del nudo A es cero, esto es, $u'_A=0$, ya que el carrito en A solo se permite el desplazamiento vertical.

$$K'_E = \begin{pmatrix} K'_{11a} + K'_{11b} & & K'_{12a} \\ & K'_{21a} & & K'_{22a} + K'_{22c} + K'_{22d} + K'_{22e} \end{pmatrix}$$

En la matriz arriba indicada, de orden 4x4, se debe eliminar la fila y columna correspondiente a la componente horizontal del desplazamiento en A: $u'_A=0$.

K'_E resultará, por tanto, ser una matriz de orden tres (3x3).

Matrices de rigidez elementales de las barras (S.G.):

Las barras que forman la estructura son articuladas planas. Por tanto, la expresión de la matriz elemental de cada barra en el sistema de referencia local es:

$$\begin{pmatrix} \frac{E \cdot \Omega}{L} & 0 & -\frac{E \cdot \Omega}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E \cdot \Omega}{L} & 0 & \frac{E \cdot \Omega}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz C de transformación del sistema de referencia local al sistema de referencia global se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Se procede a calcular las matrices de las barras a, b, c, d y e en coordenadas globales

Barra a:

$$K'_a = C \cdot K_a \cdot C^T$$

$$K'_a = \begin{pmatrix} 0,872 & -0,490 & 0,872 & -0,490 \\ 0,490 & 0,872 & 0,490 & 0,872 \\ 0,872 & -0,490 & 0,872 & -0,490 \\ 0,490 & 0,872 & 0,490 & 0,872 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6536,82 & 0,00 & -6536,82 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -6536,82 & 0,00 & 6536,82 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,872 & 0,490 & 0,872 & 0,490 \\ -0,490 & 0,872 & -0,490 & 0,872 \\ 0,872 & 0,490 & 0,872 & 0,490 \\ -0,490 & 0,872 & -0,490 & 0,872 \end{pmatrix}$$

$$K'_a = \begin{pmatrix} 4965,65 & 2793,18 & -4965,65 & -2793,18 \\ 2793,18 & 1571,16 & -2793,18 & -1571,16 \\ -4965,65 & -2793,18 & 4965,65 & 2793,18 \\ -2793,18 & -1571,16 & 2793,18 & 1571,16 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo se obtienen el resto de matrices de las barras en coordenadas globales.

Barra b:

$$K'_b = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 10666,67 & 0,00 & -10666,67 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -10666,67 & 0,00 & 10666,67 \end{pmatrix}$$

Barra c:

$$K'_c = \begin{pmatrix} 6000,00 & 0,00 & -6000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -6000,00 & 0,00 & 6000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix}$$

Barra d:

$$K'_d = \begin{pmatrix} 8000,00 & 0,00 & -8000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -8000,00 & 0,00 & 8000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix}$$

Barra e:

$$K'_e = \begin{pmatrix} 5120,00 & -3840,00 & -5120,00 & 3840,00 \\ -3840,00 & 2880,00 & 3840,00 & -2880,00 \\ -5120,00 & 3840,00 & 5120,00 & -3840,00 \\ 3840,00 & -2880,00 & -3840,00 & 2880,00 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidas las submatrices se compone la matriz reducida K'_E .

$$K'_E = \begin{pmatrix} 12237,83 & -2793,18 & -1571,16 \\ -2793,18 & 24085,65 & -1046,82 \\ -1571,16 & -1046,82 & 4451,16 \end{pmatrix}$$

Vector de cargas o fuerzas exteriores en los nudos:

$$P'_E = \begin{pmatrix} P'_{Ay} = 0,00 \text{ t} \\ P'_{Bx} = 0,00 \text{ t} \\ P'_{By} = -8,00 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Desplazamiento en los nudos A y B:

Las componentes incógnitas del desplazamiento en los nudos A y B, se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones en el sistema de referencia global (se expresa en forma matricial):

$$P'_E = K'_E \cdot d'_E$$

$$\begin{pmatrix} P'_{Ay} = 0,00 \\ P'_{Bx} = 0,00 \\ P'_{By} = -8,00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12237,83 & -2793,18 & -1571,16 \\ -2793,18 & 24085,65 & -1046,82 \\ -1571,16 & -1046,82 & 4451,16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v'_A \\ u'_B \\ v'_B \end{pmatrix}$$

$$d'_E = \begin{pmatrix} v'_A = -0,0002729 \text{ m} \\ u'_B = -0,0001151 \text{ m} \\ v'_B = -0,0019207 \text{ m} \end{pmatrix}$$

Reacciones en los apoyos en ejes globales:

Las reacciones en los apoyos se determinan a partir de las siguientes expresiones matriciales, en el sistema de referencia global.

Nudo A:

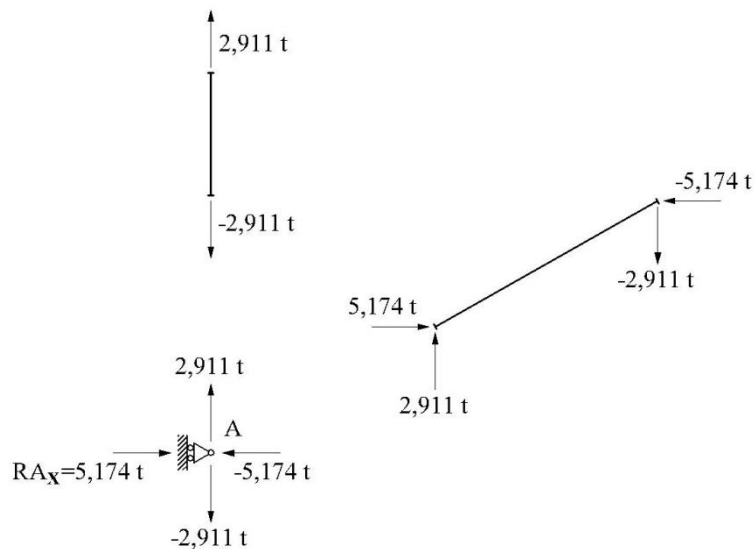


Fig. E.9.2.3.c

$$R'_A = (K'_{11a} + K'_{22b}) \cdot d'_A + K'_{12b} \cdot d'_B$$

$$R'_A = \begin{pmatrix} 4965,65 & 2793,18 \\ 2793,18 & 12237,83 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0000000 \\ -0,0002729 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -10666,67 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0001151 \\ -0,0019207 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{Ax} = 5,174 \text{ t} \\ R'_{Ay} = 0,000 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Nudo C:

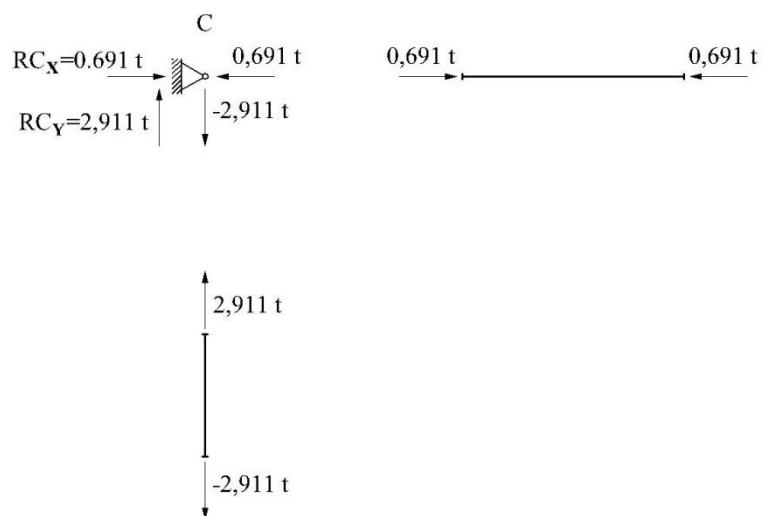


Fig. E.9.2.3.d

$$R'_C = K'_{21b} \cdot d'_A + K'_{12c} \cdot d'_B$$

$$R'_C = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -10666,67 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0000000 \\ -0,0002729 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0001151 \\ -0,0019207 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{Cx} = 0,691 \text{ t} \\ R'_{Cy} = 2,911 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Nudo D:



Fig. E.9.2.3.e

$$R'_D = K'_{12d} \cdot d'_B$$

$$R'_D = \begin{pmatrix} -8000,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0001151 \\ -0,0019207 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R'_{Dx} = 0,921 \text{ t} \\ R'_{Dy} = 0,000 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Nudo E:

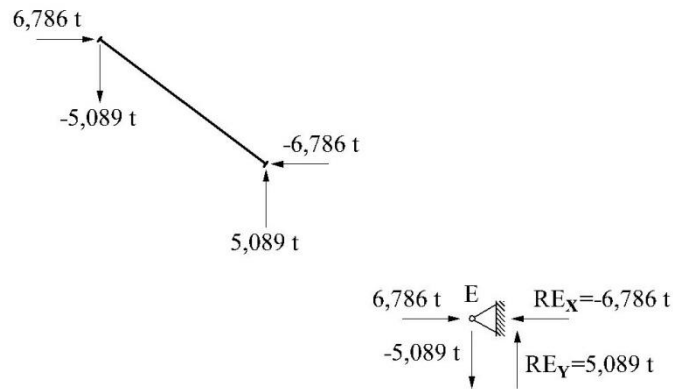


Fig. E.9.2.3.f

$$\mathbf{R}'_E = \mathbf{K}'_{12e} \cdot \mathbf{d}'_B$$

$$\mathbf{R}'_E = \begin{pmatrix} -5120,00 & 3840,00 \\ 3840,00 & -2880,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,0001151 \\ -0,0019207 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}'_{E_x} = -6,786 \text{ t} \\ \mathbf{R}'_{E_y} = 5,089 \text{ t} \end{pmatrix}$$

Nudo B:

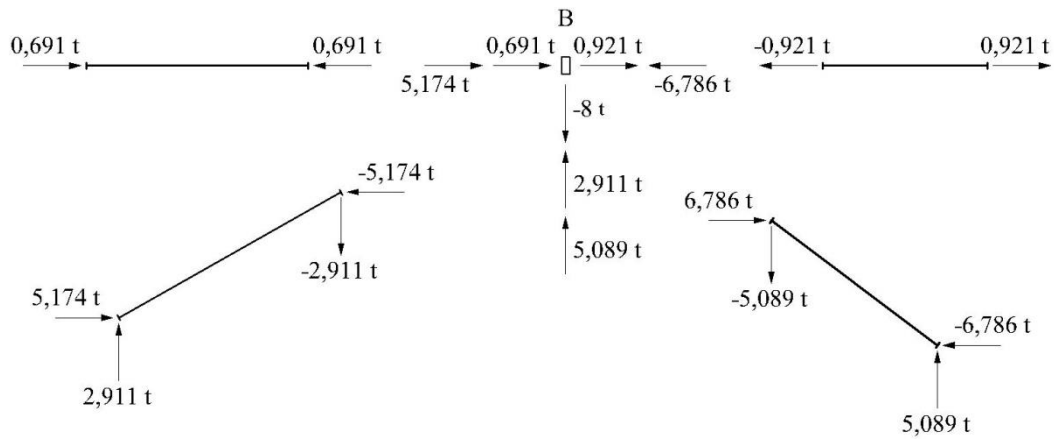


Fig. E.9.2.3.g

Equilibrio global:

En este apartado se comprueba que los valores de las reacciones calculadas son exactos. Para ello se establece el equilibrio estático de la estructura.

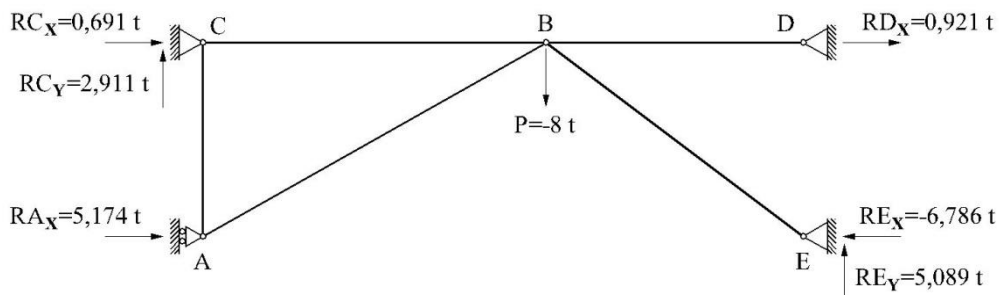


Fig. E.9.2.3.h

$$\sum F_H = 0; \quad R'_{Ax} + R'_{Cx} + R'_{Dx} - R'_{Ex} = 0; \quad 5,174 + 0,691 + 0,921 - 6,786 = 0$$

$$\sum F_V = 0; \quad R'_{Cy} + R'_{Ey} - P = 0; \quad 2,911 + 5,089 - 8 = 0$$

$$\begin{pmatrix} R'_{Ax} = 5,174 \text{ t} \\ R'_{Ay} = 0,000 \text{ t} \\ R'_{Cx} = 0,691 \text{ t} \\ R'_{Cy} = 2,911 \text{ t} \\ R'_{Dx} = 0,921 \text{ t} \\ R'_{Dy} = 0,000 \text{ t} \\ R'_{Ex} = -6,786 \text{ t} \\ R'_{Ey} = 5,089 \text{ t} \end{pmatrix}$$

9.3 EMPARRILLADOS

Ejercicio 9.3.1

En la estructura representada en la figura (emparrillado) las barras AB y BC están sometidas a una carga uniformemente repartida de 8 t/m.

Mediante análisis matricial calcular el movimiento del nudo B, el esfuerzo del tirante BD y las reacciones en los apoyos.

Características de las barras AB y CD:

$$E=2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$\nu=0,15$$

Sección: canto 50 cm / ancho 35 cm

Características del tirante BD:

$$E=2 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2$$

$$\Omega=12 \text{ cm}^2$$

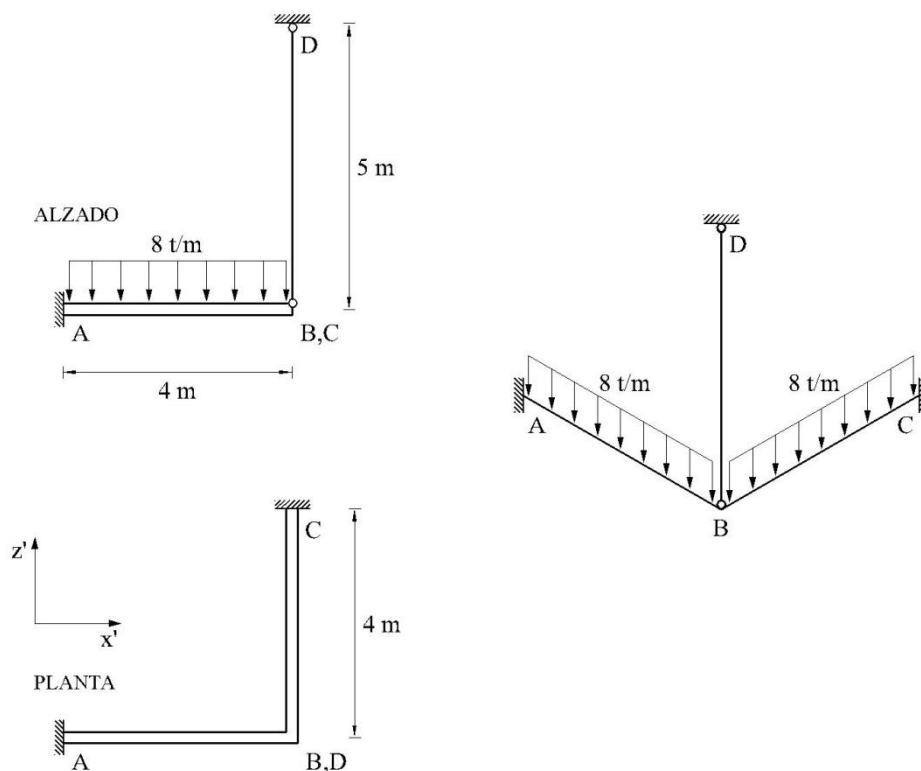


Fig. E.9.3.1.a

Solución:

Aplicación del Principio de Superposición:

Las barras AB y BC están sometidas a una carga distribuida. Para resolver el ejercicio mediante el método matricial se descompone el estado real en los dos estados siguientes: Estado I (de empotramiento perfecto) y Estado II (cálculo matricial).

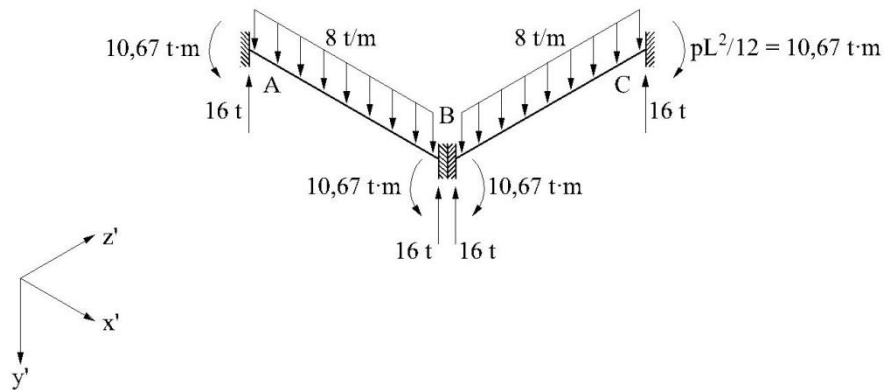


Fig. E.9.3.1.b

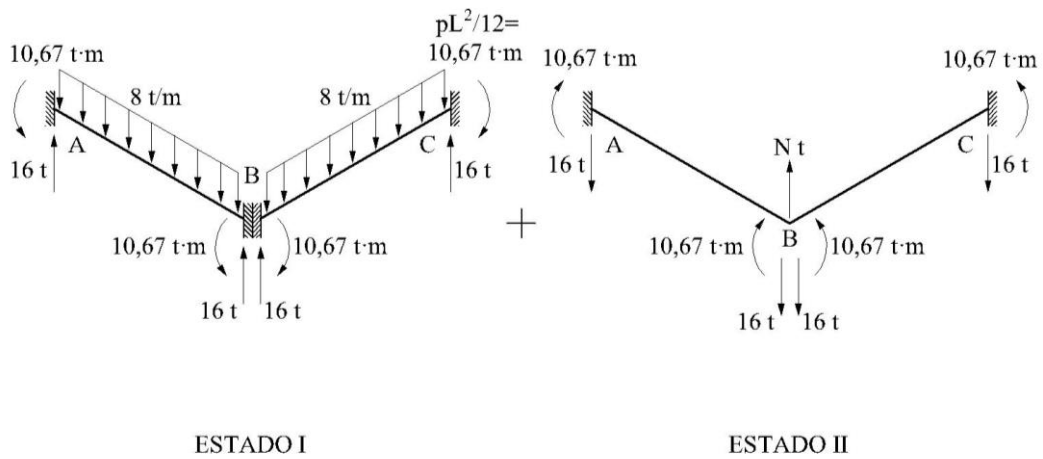


Fig. E.9.3.1.c

Además, en el nudo B se ha sustituido el tirante por la fuerza vertical N que ejerce sobre dicho nudo.

Resolución del Estado II de la estructura por el método matricial:

Discretización de la estructura:

En la siguiente figura se ha definido:

- Sistema de referencia global ($X'Y'$): S.G.
- Designación de barras y nudos de la estructura.
- Sistema de referencia local (S.L.).

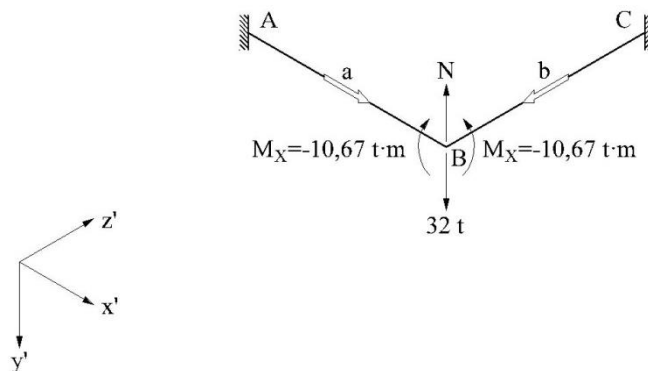


Fig. E.9.3.1.d

La tabla siguiente resume las características geométricas y mecánicas de las barras y el tirante de la estructura:

Barras	Ancho (m)	Canto (m)	Área (m ²)	L (m)	Iz (m ⁴)	Jo	v	E (t/m ²)	G (t/m ²)	α
a (A-B)	0,350	0,500	0,175	4,0	0,003646	0,005432	0,15	$2,00 \cdot 10^6$	$8,70 \cdot 10^5$	0
b (B-C)	0,350	0,500	0,175	4,0	0,003646	0,005432	0,15	$2,00 \cdot 10^6$	$8,70 \cdot 10^5$	270
Tirante (B-D)			0,001	5,0				$2,00 \cdot 10^7$		

Matriz de rigidez de la estructura en el sistema de referencia global:

La matriz reducida de la estructura K'_E se obtiene incluyendo las filas y columnas del nudo B que no tiene movimientos restringidos:

$$K'_E = (K'_{22a} + K'_{22b})$$

Matrices de rigidez elementales de las barras (S.G.):

Las barras AB y BC forman parte de un emparrillado, por lo que la expresión de la matriz de rigidez elemental de cualquier barra de un emparrillado en el sistema de referencia local es:

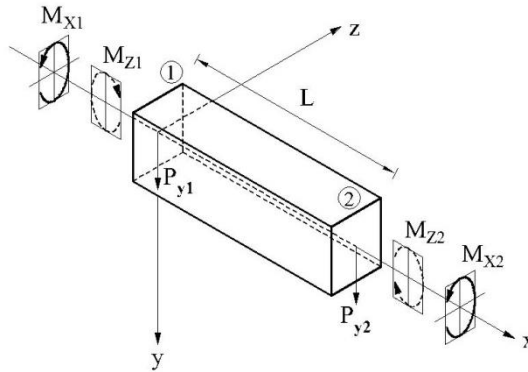


Fig. E.9.3.1.e

$$\begin{pmatrix} M_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{pmatrix}$$

La matriz C de transformación del sistema de referencia local al sistema de referencia global para cualquier barra de un emparrillado es:

$$C_{\text{barra}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\text{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Siendo α el ángulo que forma el eje X de la barra con el eje global X'.

A continuación se calculan las matrices de las barras a y b:

Barra a:

$$K'_a = C \cdot K_a \cdot C^T$$

Donde:

$$C = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{pmatrix}$$

y,

$$K_a = \begin{pmatrix} 1180,93 & 0,00 & 0,00 & -1180,93 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1367,19 & 2734,38 & 0,00 & -1367,19 & 2734,38 \\ 0,00 & 2734,38 & 7291,67 & 0,00 & -2734,38 & 3645,83 \\ -1180,93 & 0,00 & 0,00 & 1180,93 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -1367,19 & -2734,38 & 0,00 & 1367,19 & -2734,38 \\ 0,00 & 2734,38 & 3645,83 & 0,00 & -2734,38 & 7291,67 \end{pmatrix}$$

Resultando,

$$K'_a = \begin{pmatrix} 1180,93 & 0,00 & 0,00 & -1180,93 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1367,19 & 2734,38 & 0,00 & -1367,19 & 2734,38 \\ 0,00 & 2734,38 & 7291,67 & 0,00 & -2734,38 & 3645,83 \\ -1180,93 & 0,00 & 0,00 & 1180,93 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -1367,19 & -2734,38 & 0,00 & 1367,19 & -2734,38 \\ 0,00 & 2734,38 & 3645,83 & 0,00 & -2734,38 & 7291,67 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo obtenemos la matriz de la barra b en el sistema de referencia global.

Barra b:

$$K'_b = C \cdot K_b \cdot C^T$$

$$K'_b = \begin{pmatrix} 7291,67 & 2734,38 & 0,00 & 3645,83 & -2734,38 & 0,00 \\ 2734,38 & 1367,19 & 0,00 & 2734,38 & -1367,19 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1180,93 & 0,00 & 0,00 & -1180,93 \\ 3645,83 & 2734,38 & 0,00 & 7291,67 & -2734,38 & 0,00 \\ -2734,38 & -1367,19 & 0,00 & -2734,38 & 1367,19 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & -1180,93 & 0,00 & 0,00 & 1180,93 \end{pmatrix}$$

Conocidas las submatrices K'_{22a} y K'_{22b} se determina la matriz reducida K'_E .

$$K'_E = \begin{pmatrix} 8472,60 & -2734,38 & 0,00 \\ -2734,38 & 2734,38 & -2734,38 \\ 0,00 & -2734,38 & 8472,60 \end{pmatrix}$$

Vector de cargas o fuerzas exteriores en el nudo B:

La componente del vector de cargas en B, P'_{By} , es igual a:

$$P'_{By} = 32 - N$$

El valor de N se obtiene imponiendo la condición de que el desplazamiento vertical de B, v'_B , coincide con el alargamiento del tirante:

$$\Delta L = v'_B$$

$$\Delta L = \frac{N \cdot L_T}{E_T \cdot \Omega_T} = 0,00020833 \cdot N \quad (1)$$

v'_B se determina a partir de la ecuación matricial:

$$d'_N = (K'_E)^{-1} \cdot P'_N$$

$$v'_B = 0,000333 \cdot (-10,667) + 0,001032 \cdot (32 - N) + 0,000333 \cdot (-10,667) \quad (2)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones (1) y (2), y se calculan los valores de N y v'_B :

$$N = 20,875 \text{ t}$$

$$v'_B = 0,0043531 \text{ m}$$

A continuación se define el vector de cargas P'_E :

$$P'_E = \begin{pmatrix} M'_{Bx} = -10,667 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{By} = 11,105 \text{ t} \\ M'_{Bz} = -10,667 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Desplazamiento en el nudo B:

El resto de componentes del desplazamiento del nudo B, se calcula a partir de la siguiente expresión en el sistema de referencia global:

$$d'_E = (K'_E)^{-1} \cdot P'_E = \begin{pmatrix} 0,0002255 & 0,0003329 & 0,0001074 \\ 0,0003329 & 0,0010315 & 0,0003329 \\ 0,0001074 & 0,0003329 & 0,0002255 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10,667 \\ 11,105 \\ -10,667 \end{pmatrix}$$

$$d'_E = \begin{pmatrix} \theta'_{Bx} = 0,0001459 \text{ rad} \\ v'_B = 0,0043531 \text{ m} \\ \theta'_{Bz} = 0,0001459 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Reacciones en los apoyos A y C en el sistema de referencia global:

En el Estado II, las reacciones en los apoyos (nudos A y C), se determinan a partir de las siguientes expresiones matriciales, en el sistema de referencia global.

$$R'_{AII} = K'_{12a} \cdot d'_B$$

$$R'_{CII} = K'_{12b} \cdot d'_B$$

A las reacciones obtenidas en el Estado II se le suman las correspondientes al Estado I para determinar las reacciones que aparecen en la estructura real.

Nudo A:

$$R'_{AII} = K'_{12a} \cdot d'_B$$

$$R'_{AII} = \begin{pmatrix} -1180,93 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -1367,19 & 2734,38 \\ 0,00 & -2734,38 & 3645,83 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0001459 \\ 0,0043531 \\ 0,0001459 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M'_{Ax} = -0,172 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Ay} = -5,553 \text{ t} \\ M'_{Az} = -11,371 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Las reacciones reales en el empotramiento A resultan:

$$R'_A = R'_{AI} + R'_{AII} = \begin{pmatrix} 0,000 \\ -16,000 \\ -10,667 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,172 \\ -5,553 \\ -11,371 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M'_{Ax} = -0,172 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Ay} = -21,553 \text{ t} \\ M'_{Az} = -22,038 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Nudo C:

$$R'_{CII} = K'_{12b} \cdot d'_B$$

$$R'_{CII} = \begin{pmatrix} 3645,83 & -2734,38 & 0,00 \\ 2734,38 & -1367,19 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & -1180,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0001459 \\ 0,0043531 \\ 0,0001459 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M'_{Cx} = -11,371 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Cy} = -5,553 \text{ t} \\ M'_{Cz} = -0,172 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

En el Estado I, de empotramiento perfecto, las reacciones en C, son:

$$R'_{CI} = \begin{pmatrix} M'_{Cx} = -10,667 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Cy} = -16,000 \text{ t} \\ M'_{Cz} = 0,000 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Por tanto, las reacciones reales en el empotramiento C serán:

$$R'_C = R'_{CI} + R'_{CII} = \begin{pmatrix} -10,667 \\ -16,000 \\ 0,000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11,371 \\ -5,553 \\ -0,172 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M'_{Cx} = -22,038 \text{ t}\cdot\text{m} \\ P'_{Cy} = -21,553 \text{ t} \\ M'_{Cz} = -0,172 \text{ t}\cdot\text{m} \end{pmatrix}$$

Equilibrio global:

En este apartado se comprueba el equilibrio global de la estructura, con los valores de las reacciones calculadas anteriormente.

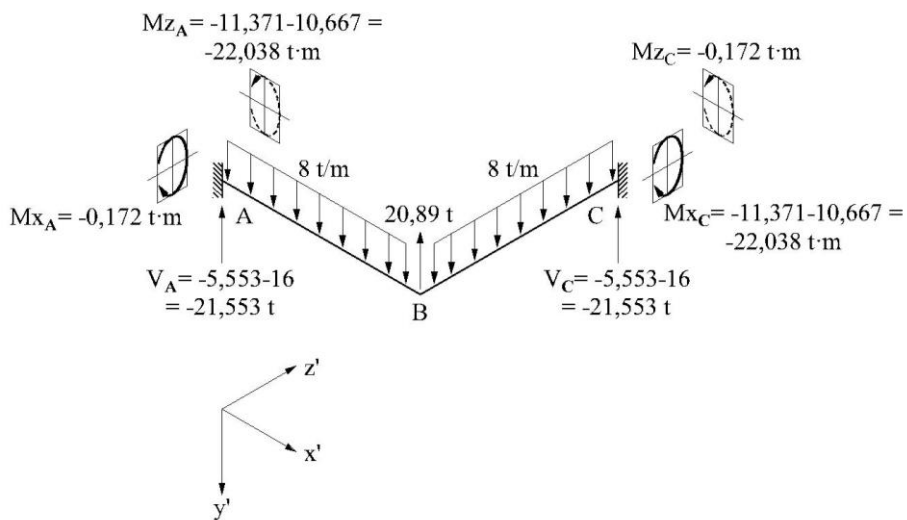


Fig. E.9.3.1.f

$$\Sigma P'_y = -21,553 - 21,553 - 20,895 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 0; \quad -64 + 64 = 0$$

$$\Sigma M'_{Ax} = -0,172 - 22,038 - 8 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + 21,553 \cdot 4 = 0; \quad -86,21 + 86,21 = 0$$

$$\Sigma M'_{Az} = -22,038 - 0,172 - 20,895 \cdot 4 - 8 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 21,553 \cdot 4 + 8 \cdot 4 \cdot 4 = 0; \quad -192 + 192 = 0$$

ANEXO: UNIDADES PRINCIPALES (S.I.) Y MATERIALES

UNIDADES PRINCIPALES USADAS (S.I.)

Magnitud (Símbolo)	Nombre de la unidad	Símbolo	Fórmula
Área (A)	metro cuadrado		m^2
Densidad (masa) (masa específica) (d y ρ)	kilogramo por metro cúbico		kg/m^3
Densidad (peso) (peso específico) (γ)	newton por metro cúbico		N/m^3
Coeficiente de dilatación térmica (α)	grado centígrado a la menos uno		$^{\circ}C^{-1}$
Fuerza (F)	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Fuerza por unidad de longitud (intensidad de fuerza)	newton por metro		N/m
Longitud (L, l)	metro	m	(unidad básica)
Masa (m)	kilogramo	kg	(unidad básica)
Momento de una fuerza, par (M)	newton-metro		$N \cdot m$
Momento de inercia (área) (I)	metro a la cuarta potencia		m^4
Momento de inercia (masa) (I)	kilogramo-metro cuadrado		$kg \cdot m^2$
Presión (p)	pascal	Pa	N/m^2
Modulo resistente de sección (W)	metro al cubo		m^3
Tensión (σ)	pascal	Pa	N/m^2
Tiempo (t)	segundo	s	(unidad básica)
Volumen (líquidos) (V)	litro	l	$10^{-3} m^3$
Volumen (sólidos) (V)	metro cúbico		m^3

OTRAS UNIDADES ACEPTADAS POR EL S.I.

Magnitud (Símbolo)	Nombre de la unidad	Símbolo	Equivalencia
Masa (m)	tonelada	t	10^3 kg

CARACTERÍSTICAS DE ALGUNOS MATERIALES**HORMIGÓN:**

Módulo de Elasticidad o de Young: $2,1 \cdot 10^5$ kg / cm² = $2,1 \cdot 10^4$ MPa

Coefficiente de Poisson: 0,20

Coefficiente de dilatación térmica: 10^{-5} °C⁻¹

Peso específico (armado o pretensado): 25kN / m³

ACERO:

Módulo de Elasticidad o de Young: $2,1 \cdot 10^5$ MPa

Coefficiente de Poisson: 0,30

Coefficiente de dilatación térmica: $1,2 \cdot 10^{-5}$ °C⁻¹

Peso específico (armado o pretensado): 78,5kN / m³

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Beer, Ferdinand P., E. Russel Johnston y cols.: *Mecánica vectorial para ingenieros*. McGraw-Hill, 10ª edición, 2013.
- [2] Bronte Abaurrea, R., López Martínez, J.: *Resistencia de materiales: teoría y problemas*. 1ª edición, 1972.
- [3] Gallego Sevilla, R., Rus Carlborg, G. *Cálculo de estructuras de barras: fundamentos*. Los autores, 1ª edición, 2010.
- [4] Gere, James M.: *Timoshenko resistencia de materiales*. Paraninfo, 5ª edición, 2002.
- [5] McCormac, Jack C.: *Structural analysis: using classical and matrix methods*. Wiley, 4ª edición, 2012.
- [6] Ortiz Berrocal, Luis: *Elasticidad*. McGraw-Hill, 3ª edición, 1998.
- [7] Ortiz Berrocal, Luis: *Resistencia de Materiales*. McGraw-Hill, 3ª edición, 2007.
- [8] Suárez Medina, Javier: *Introducción a la elasticidad lineal*. Universidad de Granada, 1ª edición, 2010.