16

Tareas de formación para favorecer el sentido de la medida en la formación inicial del profesorado

Formative tasks to promote the Measurement Sense in Prospective Teacher Education

Rafael Ramírez Uclés y Jesús Montejo-Gámez
Universidad de Granada

Resumen
Se presenta una propuesta de tareas de formación para los futuros docentes de Educación Primaria y de Secundaria y Bachillerato. Siguiendo la idea de que el profesorado ejerza de matemático para estimular el aprendizaje con significado de sus alumnos, se ha desarrollado una secuencia, de tres tareas para el Grado de Primaria y tres para el Máster de Secundaria, que fomenta el trabajo matemático del profesorado, su sentido numérico y su conocimiento de la enseñanza con relación al concepto de área, superando los saltos en la conceptualización que establecen los currículos de los diferentes niveles educativos.

Palabras clave: tareas formativas, formación inicial del profesorado, sentido de la medida

Abstract
A proposal of formative tasks for prospective elementary and high school teachers is presented. Following the idea that teachers should act as mathematicians in order to stimulate their students' meaningful learning, a sequence of three tasks has been developed for the elementary school teacher degree and three for the secondary school master's degree. These tasks promote teachers' mathematical learning, their numerical sense and their pedagogical content knowledge in relation to the concept of area, thus overcoming the scholar curricula leaps between the different educational levels.

Keywords: formative tasks, preservice teacher education, measurement sense

1. Introducción

Las aportaciones de Pablo Flores e Isidoro Segovia a la formación de futuros profesores[1] son referentes en las actuales propuestas docentes tanto del Grado de Primaria como en el Máster de Profesorado, especialmente en la Universidad de Granada. Sus ideas se han visto reflejadas en los manuales que sirven de guía en las asignaturas del módulo de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en el Grado en Educación Primaria y en la especialidad de Matemáticas del Máster de profesorado de Secundaria y Bachillerato (Flores y Rico, 2015; Rico y Moreno, 2016; Segovia y Rico, 2011), y también están recogidas en numerosas publicaciones sobre formación del profesorado (p. ej.: Alfaro *et al.*, 2020; Sánchez *et al.*, 2020). En este trabajo queremos ahondar en una de sus líneas de trabajo: la relevancia de dotar de significado los conceptos matemáticos escolares, especialmente con propuestas concretas para que el profesorado reflexione y profundice simultáneamente en sus conocimientos matemático y didáctico del contenido escolar.

Para resaltar esta conexión entre las matemáticas y su didáctica, nuestro punto de partida son dos trabajos en los que, junto con Enrique Castro, Pablo Flores e Isidoro Segovia abordaron la relatividad de las fórmulas de cálculo del área de figuras planas en general (Castro *et al.*, 1997) y del rectángulo en particular (Castro *et al.*, 1996). Estos artículos ejemplifican la idea de «hacer matemáticas» desde el enfoque de la didáctica de la matemática. El propio profesor es quien asume el papel de matemático para organizar ideas de demostraciones previas y producir sus propias creaciones (demostraciones, propiedades, etc.), con la intención de diseñar propuestas de tareas que faciliten la enseñanza con significado en sus estudiantes. Bajo esta perspectiva, los dos trabajos de referencia «aterrizan» la investigación en didáctica de la matemática en propuestas de actividades para trabajar en el aula. Nuestra intención en el presente capítulo es profundizar en esta idea para diseñar tareas de formación del profesorado que respondan a las recomendaciones que los profesores Flores y Segovia planteaban como líneas de trabajo a desarrollar.

1. Por cuestiones de extensión, las alusiones a profesor, maestro, alumno, etc., se consideran neutras en cuanto al género.

Consideramos que, pese al tiempo transcurrido, estas recomendaciones siguen vigentes siempre que se contextualicen dentro de los planes de estudio universitarios de formación del profesorado, los currículos de los diferentes niveles educativos y los avances en los fundamentos teóricos asociados.

En relación con los planes de estudio universitarios, desde la incorporación de las universidades españolas al Espacio Europeo de Educación Superior en 2007, la formación universitaria se centra en el desarrollo de competencias. El proyecto *Tuning Educational Structures in Europe* define *competencia* como:

> [...] una combinación dinámica de atributos, con respecto al conocimiento, su aplicación, a las actitudes y a las responsabilidades, que describen los resultados del aprendizaje de un determinado programa, o cómo los estudiantes serán capaces de desenvolverse al finalizar el proceso educativo. (González y Wagenaar, 2003, p. 280)

El enfoque competencial ha sido llevado a la enseñanza de las matemáticas por un colectivo de profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática a través de la noción de *sentido matemático* (Flores y Rico, 2015). En el contexto de la formación inicial del profesorado, se busca que el futuro profesor desarrolle su propio sentido matemático mediante la resolución de tareas es-

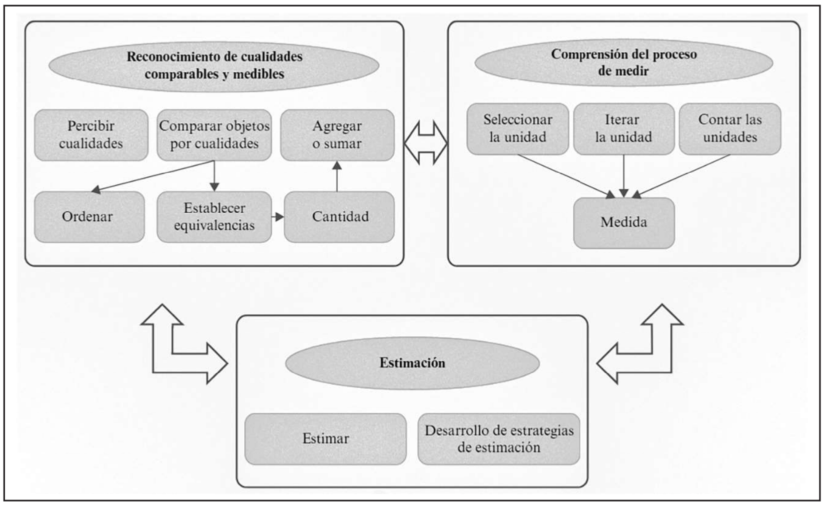

Figura 1. Componentes del sentido de la medida. Fuente: Moreno *et al.* (2015).

colares, y que este proceso de resolución potencie su competencia para analizar y diseñar tareas que favorezcan el sentido matemático de sus futuros estudiantes (Ruiz-Hidalgo *et al.*, 2019). En los últimos años se ha avanzado en la caracterización de las componentes de los sentidos correspondientes (numérico, espacial, de la medida y estocástico) y se han incorporado en las propuestas formativas de los futuros profesores (Flores y Rico, 2015).

Partiendo de los dos trabajos señalados (Castro *et al.*, 1996; 1997), focalizaremos nuestra propuesta en el sentido de la medida. En relación con este sentido matemático, Moreno *et al.* (2015, p. 151) señalaron que:

> Cuando se habla de medir una característica de un objeto son muchos los conceptos y procedimientos que hay que considerar. La comprensión de estos conocimientos que hay que promover en los escolares y de sus conexiones muestra el desarrollo del sentido de la medida.

En otras palabras, el sentido de la medida recoge las expectativas de aprendizaje involucradas en la medición de magnitudes, así como las conexiones entre dichas expectativas. Moreno *et al.* (2015) las organizaron en tres componentes (figura 1): *a*) reconocimiento de magnitudes, *b*) comprensión del proceso de medir, y *c*) estimación. Estas componentes aparecen reflejadas en distintos aspectos de los currículos actuales, donde se ha resaltado el enfoque funcional de la enseñanza de la medida, más allá de memorizar y manipular fórmulas. Siguiendo esta línea, recogemos la idea de Castro *et al.* (1996) en que planteaban: «¿Qué "otras cosas" se pueden hacer, además de saberse las fórmulas de memoria y aplicarlas en distintos casos?» (p. 1). Pretendemos que nuestra propuesta explote este planteamiento, por lo que esperamos cubrir los siguientes objetivos formativos:

- Promover que los futuros profesores de Primaria y de Secundaria «hagan matemáticas» con una intención didáctica.
- Desarrollar su sentido de la medida haciendo hincapié en el concepto de *área*.
- Potenciar la conexión entre su conocimiento de las nociones de medida con el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas.

Para alcanzar los objetivos fijados, y de forma previa a la exposición de las tareas, el trabajo comienza con un recorrido curricular sobre los aspectos relativos a medida a través de Primaria, Secundaria y Bachillerato, poniendo el foco en el concepto de *área*.

2. Revisión del currículo sobre aspectos relativos a medida

En primer lugar, la Orden de 17 de marzo de 2015 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (2015) incluye un bloque de contenido de medidas para los tres ciclos de este nivel educativo. En los dos primeros ciclos se incide en las magnitudes longitud, masa y capacidad, además de las unidades monetarias y de tiempo. Es en el tercer ciclo cuando el currículo aborda la medición de superficies y de volúmenes con los siguientes contenidos: elección del instrumento y de la unidad adecuada a un proceso de medición, uso de las unidades del sistema métrico decimal, realización de mediciones y estrategias para hacerlo de forma exacta y aproximada, estimación de medidas, comparación de superficies por superposición, descomposición y medición, sumar y restar medidas, expresión oral del proceso de medición e interés por ser preciso en la elección de unidades y en el uso de instrumentos de medición.

En segundo lugar, la Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la comunidad autónoma de Andalucía (2021) incluye las nociones de medida principalmente en el bloque de contenidos de Geometría. En 1.º de la ESO el currículo centra su atención en el cálculo de áreas de figuras planas (usando descomposiciones en figuras simples), mientras que en 2.º de la ESO el foco está en la razón entre medidas de figuras semejantes, el cálculo de áreas asociadas a cuerpos geométricos y el cálculo de medidas en objetos del mundo físico. En 3.º de la ESO las matemáticas académicas no hacen referencia explícita a cuestiones de medida, mientras que las aplicadas reinciden el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas y el de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. En 4.º de la ESO el currículo incluye la razón entre las medidas de cuerpos semejantes y en el cálculo de medidas para resolver problemas métricos del mundo físico.

En tercer lugar, la Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Bachillerato en la comunidad autónoma de Andalucía (2021) lleva los contenidos de medida al 2.º curso del Bachillerato. Específicamente, las Matemáticas II de las modalidades de Ciencias incluyen el cálculo de áreas utilizando la integral definida (bloque de Análisis) y el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando las operaciones con vectores (bloque de Geometría). Las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales solo hacen referencia al cálculo de área a partir de la integral definida.

En resumen, la revisión curricular evidencia dos saltos importantes en la concepción de área: de Primaria a Secundaria se salta de la iteración de la unidad al uso de fórmulas, mientras que de Secundaria a Bachillerato se salta de las fórmulas a herramientas más sofisticadas como la integral o el producto vectorial. Estos dos saltos son focos de atención en las tareas que se proponen.

3. Propuesta de tareas

Nuestra propuesta se basa en la descripción de tareas de formación (Aguayo, 2018), que incluyen una tarea matemática escolar que los futuros profesores resuelven y después analizan desde las componentes del sentido matemático, para finalmente diseñar ellos mismos una tarea de enseñanza (Ruiz-Hidalgo *et al.*, 2019). Por cuestiones de extensión, este trabajo se ciñe a la exposición de las tareas y su relación con las componentes del sentido de la medida.

Atendiendo a la revisión curricular, las tareas de formación que se plantean para los futuros maestros de Primaria enfatizan la relación entre la medida indirecta, basada en la utilización de fórmulas, con la medida directa obtenida iterando la unidad de medida seleccionada. Se espera así estimular la conexión entre el conocimiento del contenido sobre medida según la formación previa de los futuros maestros de Primaria y el conocimiento de la enseñanza que se debe alcanzar en el grado universitario de

Educación Primaria. Para los estudiantes del Máster de Profesorado de Secundaria y Bachillerato, las tareas se centran en la conexión entre los diferentes conceptos de *área* reflejadas en el currículo. Buscamos que los futuros profesores reflexionen sobre la conexión entre las concepciones de área basadas en iteración de la unidad y fórmulas, habituales en Primaria y Secundaria, con las nociones de *integral definida* y de *determinante*, que aparecen en el Bachillerato. Al igual que con los estudiantes del grado de Primaria, la reflexión debe potenciar el desarrollo coordinado del conocimiento sobre áreas que poseen los futuros profesores de Secundaria y Bachillerato y el conocimiento de la enseñanza que se persigue en el máster profesionalizador.

3.1. Tarea 1: elección de unidad y medición directa (Grado en Educación Primaria)

Meta de la tarea: comparar áreas y longitudes de figuras utilizando medidas directas.

Gestión: la tarea parte del desafío de encontrar, sin utilizar fórmulas, dos figuras distintas del tangram que tengan igual área y perímetro.

Para responder a esa cuestión, se comienza preguntando: «¿Qué figuras tienen la misma área?», «¿Cuánto miden esas áreas utilizando como unidad de medida el área del triángulo más pequeño?». Esto permite identificar que el triángulo pequeño es la figura con menor área (A), que el cuadrado, el triángulo mediano y el paralelogramo tienen área $2A$, y que el triángulo grande tiene área $4A$.

A continuación, se aborda la comparación de los lados de las figuras para lo que se plantea la siguiente cuestión: «¿Existe un lado de alguna de las figuras que permita «medir» todos los lados?». Se espera que el uso del teorema de Pitágoras (medida indirecta) para el cálculo de la raíz de 2 aparezca como indispensable, y se busca mostrar que no es necesario. Para ello, se les pide que construyan los cuadrados de la figura 2a, se ilustra que cada cuadrado tiene justo la mitad de área que el cuadrado inmediatamente más grande y se muestra cómo esta relación permite conocer longitudes de las hipotenusas de los triángulos a partir de sus lados.

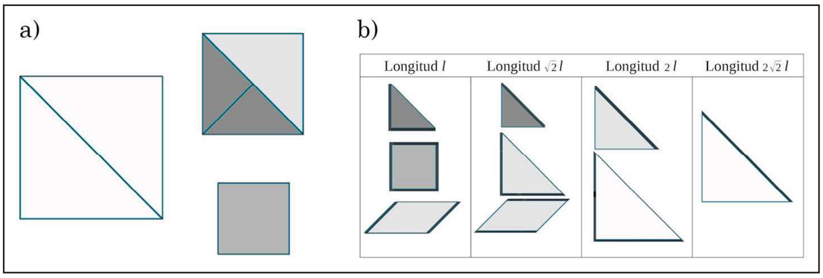

Figura 2. *a*) Construcción propuesta para estudiar la relación entre los lados; *b*) tabla de longitudes.

Esto lleva a orientarlos a que utilicen como unidad de longitud el cateto del triángulo pequeño para medir los lados del resto de las figuras, completando así la tabla que se muestra en la figura 2b. Esta tabla y los resultados obtenidos sobre las áreas conduce a concluir que el paralelogramo y el triángulo mediano son las figuras con la misma área ($2A$) y el mismo perímetro ($2l+2\sqrt{2}l$). Una vez que se realiza la puesta en común de las soluciones propuestas en la tarea escolar, se les plantean tareas de análisis y diseño propio de actividades para los niños de Educación Primaria.

En relación con las componentes del sentido de la medida, se resalta la conexión entre las capacidades relativas al reconocimiento de cualidades comparables y medibles y el proceso de medir. Respecto a la primera capacidad, la tarea promueve que los futuros maestros perciban que las magnitudes área y perímetro pueden ser comparadas y medidas independientemente una de la otra. En cuanto a la comprensión del proceso de medir, se enfatiza que la elección de la unidad de medida requiere poder determinar la relación de la cantidad a medir respecto a dicha unidad.

Para fortalecer la conexión de estas componentes, se plantea una nueva reflexión que parte de las longitudes encontradas, en particular de que el lado del cuadrado «cabe raíz de dos veces» en la hipotenusa del triángulo pequeño. Si entendemos ese número de veces que cabe como el número de veces que hay que iterar el lado del cuadrado para medir la hipotenusa, llegamos a un conflicto de inconmensurabilidad: dado que un número irracional no se puede expresar como cociente de enteros, «contar la unidad» supondría un proceso infinito. Por ejemplo, medir una longitud de raíz de 2 metros supondría contar un metro, luego 4 decímetros, luego 1 centímetro, etc.

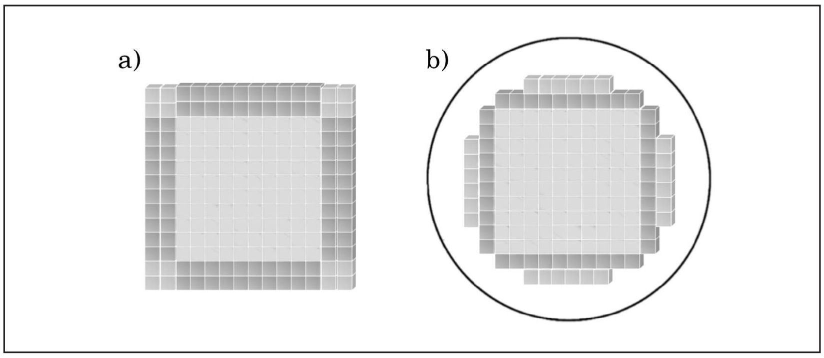

Figura 3. Usos de bloques multibase en la presente propuesta: *a*) Representación del cuadrado de lado $\sqrt{2}$ *l* (aproximando $\sqrt{2}$ por 1,4) en la tarea 1; *b*) Estrategia de estimación del área del círculo para la tarea 3.

Aprovechando esta aproximación, se les pregunta a los futuros maestros la relación entre «1,4 al cuadrado» con «el área de un cuadrado de lado 1,4». Para ello, se parte de la construcción que se muestra en la figura 3a, donde se toma el lado de la placa 10×10 (en el centro de la figura) como unidad de longitud l y se representa «1,4 al cuadrado» o «un cuadrado de lado 1,4». El conteo apropiado de las áreas de la figura 3a pone de manifiesto que la longitud 1 + 0,4 «al cuadrado» es igual al área de 1 (placa central) + 0,16 (cuadrados de las esquinas) + 0,80 (área de las barras), que es igual a 1,96.

3.2. Tarea 2: obtención de fórmulas desde la medición directa (Grado en Educación Primaria)

Meta de la tarea: relacionar las fórmulas de áreas conocidas con el proceso de medida directa.

Gestión: la tarea comienza preguntando a los futuros maestros «cuántas veces cabe la unidad de área» en diferentes figuras: *a*) un rectángulo de dimensiones 2×3, *b*) un rectángulo de dimensiones (1/2)x(1/3), *c*) un rectángulo de dimensiones lx$\sqrt{2}$, y *d*) un cuadrado de lado $\sqrt{2}$. La revisión de los procedimientos seguidos invita a la cuestión principal: «¿Qué relación existe entre el área del rectángulo como "base por altura" con el conteo de unidades de medida?»

Tabla 1. Figuras planas dadas, magnitudes que determinan las fórmulas de sus áreas y relaciones esperadas.

Figura	**Magnitudes**	**Relación**
Rombo	Diagonales	El rombo cabe 2 veces en el rectángulo formado por las diagonales
Triángulo	Base y altura	El triángulo cabe 2 veces en el rectángulo formado por la base y la altura
Trapecio	Suma de las bases y la altura	El paralelogramo cabe una vez en el rectángulo formado por la base y la altura
Círculo	Cuadrado de radio el lado	El cuadrado cabe π veces en el área del círculo

Para responder a esas preguntas, se pide a los futuros maestros que busquen «cuántas veces caben» diferentes figuras planas dentro del rectángulo determinado por las longitudes que determinan la fórmula usual de su área, para, así, completar la tabla 1.

Tabla 2. Figuras propuestas como unidades de medida y subdivisiones sugeridas.

Figura	**Subdivisiones**
Cuadrado	Cuadrados, rectángulos, triángulos rectángulos.
Triángulo equilátero	Triángulos equiláteros, triángulos rectángulos
Triángulo rectángulo e isósceles	Triángulos semejantes
Hexágono regular	Hexágonos, triángulos equiláteros
Rectángulo (doble cuadrado)	Rectángulos semejantes, cuadrados
Paralelogramos	Paralelogramos semejantes

La comprensión del proceso de medir iterando y contando la unidad lleva asociado un problema de «relleno» de la superficie de la figura a medir con la unidad de medida seleccionada. En este sentido, la unidad de medida puede valorarse según la facilidad con la que iteraciones (o subdivisiones) de ella misma «rellenen» el resto de las figuras. Aparece así el problema del relleno del plano y la relación con la aproximación y estimación. Se plantea a los futuros maestros que valoren las cualidades como unidad de área de las figuras que se muestran en la tabla 2, atendiendo al relleno del espacio por ellos mismos y sus subdivisiones, y que establezcan relaciones entre ellas. La medición directa de una figura descomponiéndola en unidades de medida y sus divisiones puede resultar un proceso complejo e infinito en algunos casos. Para abordarlo en relación con la aproximación y la estimación, se plantea la tercera tarea de la propuesta.

3.3. Tarea 3: estimación de Pi a través de medición directa (Grado en Educación Primaria)

Meta de la tarea: estimar y aproximar el área del círculo utilizando bloques multibase.

Gestión: la tarea comienza pidiéndoles a los futuros maestros que construyan un círculo de radio igual al lado del cuadrado grande de los bloques multibase. La pregunta de partida es la siguiente: «¿Cuántas veces crees que cabe el cuadrado en dicho círculo? ¿Por qué?» Con ellas, se pretende estimular las estrategias de estimación, como cubrir el círculo con cuatro placas o insertar en su interior bloques de diferentes tipos para ir dando aproximaciones por defecto (figura 3*b* arriba).

A continuación, se cuestiona qué ocurre cuando en un problema se decide «quedarse con dos decimales» para relacionar el área del círculo y del cuadrado. Usando los bloques multibase y asumiendo como unidad de área la placa (P), tenemos que la barra tiene de área 0,1 P, mientras que los cubitos tienen área 0,01 P. Por tanto, redondear el cálculo del área con dos decimales utilizando la placa como unidad de área es equivalente a rellenar el círculo utilizando cubitos. Así la fórmula del área del círculo se interpretaría como «el cuadrado de lado el radio cabe 3,14 veces en el círculo», es decir, aproximadamente 314 cubitos rellenarían el círculo.

3.4. Tarea 4: derivación del teorema fundamental del cálculo desde la medición directa de polígonos (Máster de Profesorado)

Meta de la tarea: inducir el teorema fundamental del cálculo para funciones afines calculando áreas mediante iteración de la unidad.

Gestión: la tarea comienza calculando las áreas de polígonos vinculados a funciones afines, siguiendo la secuencia *a*)-*d*) que se muestra en la figura 4. En una primera etapa se toman los polígonos concretos de la figura y las áreas deben obtenerse sin más que contabilizar cuadrados o fracciones de cuadrado. En una segunda etapa se pide a los futuros profesores que induzcan fórmulas, una para cada función, que proporcionen el área del polígono cuyo lado apoyado en el eje tiene una longitud indeterminada x. En este momento no se dan pautas sobre cómo hacerlo, pero se espera que algunos futuros profesores generalicen los resultados obtenidos previamente y otros aprovechen las fórmulas escolares para encontrar las expresiones algebraicas *a*) $3x$, *b*) $9x/2$, *c*) $x^2/4$ y *d*) $x^2/2 + x$. A continuación, se invita a «derivar las áreas» e identificar en cada caso las derivadas obtenidas como las ecuaciones de las rectas que determinan las figuras. Se espera, así, que emerja la idea intuitiva de que «la función es la derivada del área bajo la función», que invita a la discusión sobre el teorema fundamental del cálculo y cómo este resultado aporta razón de ser a la búsqueda de primitivas de funciones (cálculo de áreas).

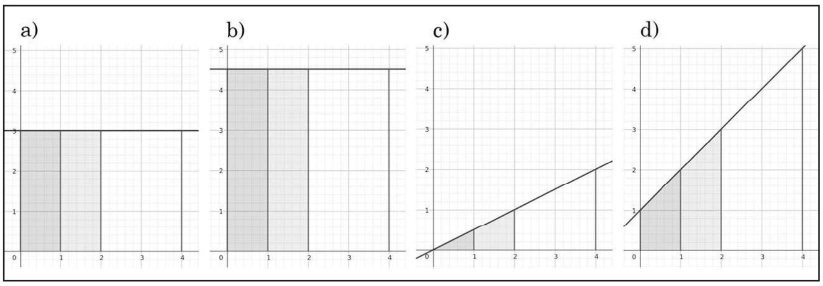

Figura 4. Polígonos cuya área se propone calcular al inicio de la tarea 4. Las ecuaciones de las rectas asociadas son: *a*) $y = 3$, *b*) $y = 9x/2$, *c*) $y = x/2$, *d*) $y = x + 1$.

La tarea continúa solicitando a los futuros profesores una versión propia del teorema fundamental del cálculo para funciones afines. Para ello, se les pide que revisen el proceso de obtención de expresiones algebraicas ya hecho, pero esta vez utilizando obligatoriamente las fórmulas escolares habituales. Así, se espera que identifiquen las ecuaciones de las rectas como las alturas de los polígonos si la longitud de la base es x y que, a partir de esta identificación, proporcionen la expresión $mx^2/2 + nx$ para el área bajo una recta genérica (siendo m y n la pendiente y ordenada en el origen de la recta, respectivamente). Una vez obtenida esta fórmula, se elabora en gran grupo un enunciado del teorema que refuerce el significado encontrado al cálculo de primitivas. Se discuten entonces las conexiones entre el resultado formulado y la regla de Barrow, incidiendo en cómo se ha llegado a ideas matemáticas sofisticadas (primitiva de una función) a partir de otras más sencillas (iteración de unidad y fórmulas) y enfatizando que esta conexión podría aprovecharse para la enseñanza del cálculo integral. La tarea finaliza solicitando a los futuros profesores actividades de diseño propio para alumnos de Bachillerato con este fin.

3.5. Tarea 5: obtención de fórmulas para áreas de figuras planas usando cálculo integral (Máster de Profesorado)

Meta de la tarea: obtener fórmulas usuales de áreas de figuras planas usando cálculo integral.

Gestión: se comienza recordando la conexión entre obtención de primitivas y el cálculo de áreas desarrollado en la tarea 4. Se plantea entonces si las fórmulas de cálculo de áreas usuales se pueden obtener a través del cálculo integral. Para responder a esta cuestión, se reincide en la relación entre la expresión $mx^2/2 + nx$, obtenida anteriormente, y las fórmulas usuales. Se espera, así, que asocien la situación $m = 0$ con un rectángulo de base x y altura n, y la situación $n = 0$ con un triángulo de base x y altura mx. Esta reflexión pone de manifiesto la importancia de ubicar adecuadamente la figura de referencia e identificar las longitudes relevantes para el cálculo del área cuando se busca obtener una fórmula a partir del cálculo integral.

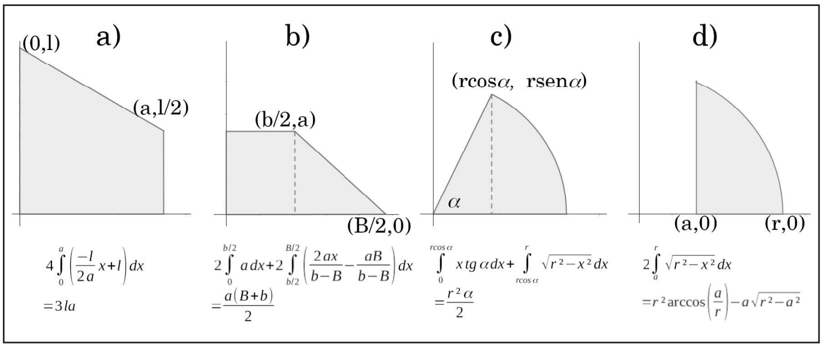

Figura 5. Planteamiento esperado para el cálculo de las áreas de la tarea 5, expresiones integrales asociadas a las áreas de las figuras completas y fórmulas resultantes.

A continuación, se proponen diferentes figuras planas y se invita a los futuros profesores a que adapten las ideas discutidas a diferentes casos particulares. El primero de ellos es un hexágono regular, sobre el que se busca identificar la ubicación óptima de la figura, su apotema (*a*) y su lado (*l*, en lugar de su perímetro) como se ilustra en la figura 5*a*. En este caso es necesario obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, l) y (*a*, l) y escribir la integral definida entre 0 y *a* correspondiente, cuyo resultado multiplicado por cuatro proporciona una expresión equivalente a la fórmula clásica (figura 5a). La segunda figura que se propone es un trapecio isósceles, sobre el que se plantea la pertinencia de aprovechar el planteamiento de la tarea 4 o, por el contrario, ubicar la mitad de la figura según se dispone en la figura 5b. Se promueve esta segunda alternativa para ilustrar la integración de funciones a trozos, cuya expresión para este caso conduce a la fórmula escolar usual. El tercer caso que se aborda es el área de un sector circular (figura 5c), que conduce a situar el centro del círculo en el origen de coordenadas y dar una expresión de la circunferencia de radio r en la que la coordenada y se escriba como función de *x*. De nuevo, el área queda descrita por dos integrales indefinidas, cuya resolución implica la fórmula habitual. Finalmente, se propone la obtención del área de un segmento circular, que se plantea como muestra la figura 5d, pero cuya resolución presenta una demanda técnica más alta y se deja como problema abierto (quede también como ejercicio para el lector interesado). La tarea 5 se cierra discutiendo el interés de obtener las fórmulas conocidas para los estudiantes de Secundaria y Bachillerato y la pertinencia de que el profesorado establezca puentes entre el conocimiento escolar sobre área que es habitual en Secundaria y las herramientas novedosas que se presentan en el Bachillerato. Finalmente, se solicita a los futuros profesores actividades de aprendizaje basadas en estas ideas.

3.6. Tarea 6: conexión entre concepto de *área* y cálculo de determinantes (Máster de Profesorado)

Meta de la tarea: mostrar que el área de un paralelogramo plano «es» un determinante 2×2.

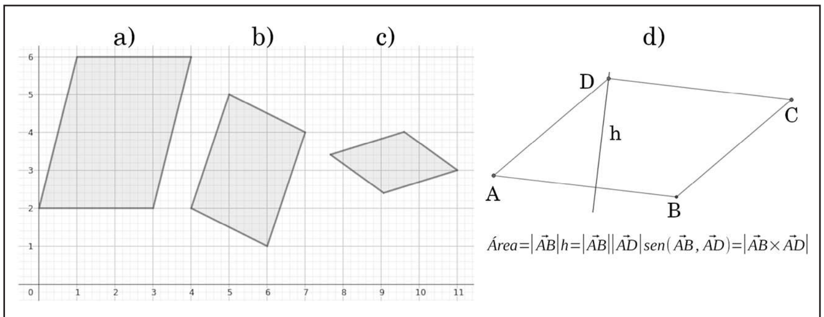

Figura 6. Secuencia de figuras propuestas para iniciar la tarea 6 (*a*, *b* y *c*). Expresión del área de un paralelogramo usando trigonometría y su conexión con el producto vectorial en el espacio (*d*).

Gestión: la tarea parte del problema de calcular el área de un paralelogramo en el plano conociendo las posiciones de sus vértices (en lugar de longitudes asociadas a la figura). Para ello, se comienza proponiendo a los futuros profesores los casos particulares sobre retículas que se muestran en la figura 6. En *a*) y *b*) se esperan estrategias basadas en la iteración de la unidad, pero el caso *c*) evidencia las limitaciones de estas para el caso general. A continuación, se pide relacionar el problema planteado con el producto de la base por la altura, lo que se espera que desemboque en la fórmula «trigonométrica» mostrada en las dos primeras igualdades de la figura 6*d*, o incluso a estrategias basadas en la distancia de un punto a una recta. Ambas ideas se reconocerán como válidas, pero se demanda un procedimiento de cálculo más sencillo. Para ello, se pregunta a qué recuerda la fórmula «trigonométrica», en busca de que emerja la idea de usar el producto vectorial. En ese momento, se hace un inciso donde se recuerda la definición de producto vectorial de dos vectores u y v en el espacio (vector de módulo $|u||v| sen\left(\widehat{u,v}\right)$ y perpendicular a u y v) y se discute en gran grupo cómo se calculan las coordenadas de ese vector conocidas las de u y v, lo que lleva a la expresión usual para paralelogramos en el espacio, que involucra el cálculo de determinantes.

De vuelta al problema de partida, se recuerda la interpretación geométrica del producto vectorial como área de figuras en el espacio y se pregunta a los futuros profesores si se podría aprovechar esta idea para paralelogramos en el plano. Se espera que salgan a relucir dos obstáculos: el carácter tridimensional del producto vectorial y su aparente complejidad, que no simplifica los métodos ya discutidos. Ante estos obstáculos, se pide abordar el primero respondiendo a la siguiente pregunta: «¿se puede adaptar el producto vectorial a problemas en el plano?» Se espera que se plantee la interpretación del plano como parte del espacio (mediante la identificación del punto $A(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ como $\hat{A}(x,y,0)$ de $\mathbb{R}^3$) como posible solución. Esta idea supone introducir ceros en los cálculos, lo que plantea la duda razonable sobre si aplicarla simplifica la fórmula del producto vectorial usual. Se invita a los futuros profesores a que comprueben qué ocurre, lo que los lleva a que el área del paralelogramo de vértices A, B, C y D es igual a $det(AB, CD)$. Se propone la validación de la fórmula usando los ejemplos trabajados previamente, se incide en la sencillez de la misma y se discute la pertinencia de usar esta fórmula en niveles inferiores a Bachillerato y, en general, de trabajar contenidos escolares cuyo origen no está al alcance de los estudiantes.

Finalmente, se discute que el volumen de un paralelepípedo está asociado a un determinante 3×3 formado por los vectores de sus aristas y se les pide que interpreten geométricamente las propiedades de los determinantes en función de esta asociación volumen-determinante. Por ejemplo, la propiedad de multiplicar todas las filas del determinante por 2 se interpreta geométricamente como calcular el volumen de un paralelepípedo en el que se han duplicado todos sus lados y, por tanto, el volumen se ha multiplicado por 8. La tarea concluye pidiendo a los futuros profesores que diseñen tareas para explotar la conexión área-determinante y volumen-determinante.

4. Conclusiones

Este capítulo presenta un conjunto de tareas de formación para futuros profesores de Primaria y Secundaria con el triple propósito de que estos hagan trabajo matemático con intenciones didácticas, desarrollen su sentido de la medida y adquieran conocimiento para la enseñanza en el proceso.

Respecto al trabajo matemático con intención didáctica, la propuesta recoge la idea de que el profesor asuma el papel de matemático para crear conocimiento matemático y estimular el de su alumnado. En este sentido, la pregunta «¿qué otras cosas se pueden hacer cuando se trabaja la medida?», planteada por Castro *et al.* (2016), se responde mediante tareas que estimulan la indagación autónoma, la exploración de casos particulares y la generalización, la obtención de fórmulas conocidas y otras no conocidas mediante la conexión entre diferentes concepciones de área, la generación autónoma de preguntas y discusión sobre sus posibles respuestas e incluso la formulación de resultados matemáticos propios.

En cuanto a las componentes del sentido de la medida de los futuros profesores (Moreno *et al.*, 2015), las tareas de formación descritas promueven la identificación y diferenciación de magnitudes, la aproximación y la estimación, y la obtención de resultados de mediciones a partir de diferentes concepciones de área: desde iteración directa de la unidad hasta el cálculo integral y el uso de determinantes, pasando por las fórmulas escolares usuales.

En relación con la conexión entre conocimiento del contenido y conocimiento para la enseñanza, la propuesta busca enfocar la formación del profesorado desde el ejemplo que sirva de estímulo al profesorado en formación para fomentar el aprendizaje con sentido de las matemáticas. En particular, se proporcionan ideas para superar los saltos en la conceptualización de área que plantean los currículos escolares, se fomenta la reflexión sobre la pertinencia de ciertos contenidos y estrategias vinculados al área y se hace hincapié en la importancia de formular adecuadamente una situación matemática para favorecer la comprensión de las ideas involucradas.

5. Referencias

Aguayo, C. G. (2018). *El análisis didáctico en la formación inicial de maestros de primaria*. [tesis doctoral no publicada]. Universidad de Granada.

Alfaro, C., Flores, P. y Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA 14*(2), 85-117.

Castro, E., Flores, P. y Segovia, I. (1997). Relatividad de las fórmulas de cálculo de la superficie de figuras planas. *SUMA 26*, 23-32.

Castro, E., Segovia, I., Flores, P. (1996). El área del rectángulo. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, *10*, 63-78.

Flores, P. y Rico, L. (coords.) (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria.* Pirámide.

González, J. y Wagenaar, R. (coords.) (2003). *Tuning Educational Structures in Europe. Informe Final, fase Uno.* Universidad de Deusto.

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En: Flores, P. y Rico, L. (coords). *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 147-168). Pirámide.

Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado (2021). *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, *7*, de 18 de enero de 2021, 224 a 655. https://www.juntadeandalucia.es/boja/2021/507/BOJA21-507-01024.pdf

Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas (2021). *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, *7*, de 18 de enero de 2021, 656 a 1024. https://www.juntadeandalucia.es/boja/2021/507/BOJA21-507-01024.pdf

Orden de 17 de marzo de 2015 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (2015). *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 60*, de 27 de marzo de 2015, 9 696. https://www.juntadeandalucia.es/boja/2015/60/BOJA15-060-00831.pdf

Rico, L. y Moreno, A. (coords.) (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria.* Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Ramírez-Uclés, R., Fernández-Plaza, J. A. (2019). Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores. *Educación Matemática, 31*(1), 121-143. https://doi.org/10.24844/em3101.05

Sánchez, J., Segovia, I., Miñán, A. (2020). Anxiety and Self-Confidence toward Mathematics in Preservice Primary Education Teachers. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 18*(51), 127-152.

Segovia, I. y Rico, L. (coords.) (2011). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Pirámide.