

UNIVERSIDAD DE GRANADA



TESIS DOCTORAL

ONDAS GRAVITACIONALES Y AGUJEROS NEGROS PRIMORDIALES EN INFLACIÓN TEMPLADA

Autora:
Marta SUBÍAS DÍAZ-BLANCO

Directora:
Dra. Mar BASTERO GIL

*Tesis presentada en cumplimiento de los requisitos para la obtención del título de
Doctora en Ciencias Físicas*

en el

Departamento de Física Teórica y del Cosmos
Programa de Doctorado en Física y Ciencias del Espacio

9 de mayo de 2022

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Marta Subías Díaz-Blanco
ISBN: 978-84-1117-471-8
URI: <http://hdl.handle.net/10481/76800>

Compromiso Derechos de Autor

La doctoranda Marta SUBÍAS DÍAZ-BLANCO y la directora de la tesis Dra. Mar BASTERO GIL:

Garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, **ONDAS GRAVITACIONALES Y AGUJEROS NEGROS PRIMORDIALES EN INFLACIÓN TEMPLADA**, que el trabajo ha sido realizado por la doctoranda bajo la dirección de la directora de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Doctoranda:

Directora:

Fdo: **Marta SUBÍAS DÍAZ-BLANCO**

Fdo: **Dra. Mar BASTERO GIL**

Granada, 9 de mayo de 2022

«Yo creo que la fe es un precursor de todas nuestras ideas. Sin fe, nunca podría haber evolucionado una hipótesis, teoría, ciencia o matemáticas. Yo creo que la fe es una extensión de la mente. Es la llave que niega lo imposible. Negar la fe es refutarse a uno mismo y al espíritu que genera todas nuestras fuerzas creativas. Mi fe está en lo desconocido, en todo lo que no entiende la razón. »

Charles Chaplin

Dedicatoria

Me gustaría agradecer a toda mi familia el apoyo incondicional en esta aventura. Gracias a mis tres pillastres zalameros por ser tan bonitos. A Miguel, por haberme dado la mejor conversación sobre el origen del universo. A Juan por tu alegría al hablar de agujeros negros y a Gael por tu tesón. Gracias a todos, por estar siempre conmigo en mis presencias y ausencias, por ser ejemplo a través de vuestras acciones, vuestra valía y superación.

También quiero agradecer a todas aquellas personas que me han ayudado en el proceso de investigación, en especial a mi directora de tesis por haberme guiado y apoyado.

Índice general

Compromiso Derechos de Autor	III
Dedicatoria	VII
1. Introducción	1
2. Cosmología	5
2.1. Universo FLRW	5
2.2. Equilibrio termodinámico	9
2.3. Historia térmica	12
2.4. Λ CDM	13
3. Inflación	17
3.1. Inflación	17
3.2. Teoría de perturbaciones lineales	20
3.3. Recalentamiento	27
3.4. Inflación templada	29
4. Ondas gravitacionales y Agujeros negros primordiales	37
4.1. Ondas gravitacionales a segundo orden	37
4.2. Detección de ondas gravitacionales	43
4.3. Agujeros negros primordiales	48
5. Modelos de inflación	55
5.1. Funciones modo creciente/decreciente	56
5.2. Potencial caótico	59
5.3. Potencial híbrido	67
5.4. Disipación	71
5.5. Resultados	76
6. Conclusiones	91
A. Historia del universo	97
B. Perturbaciones en cosmología	99
B.1. Construcción del tensor de Einstein	99
B.2. Cantidades geométricas	111
B.3. 4-velocidad de las perturbaciones de materia del fluido	112
B.4. Transformaciones gauge	113

Lista de Abreviaturas

BAO	Baryon Acoustic Oscillations
BBN	Big-Bang Nucleosynthesis
CMB	Cosmic Microwave Background
CDM	Cold Dark Matter
FLRW	Friedmann, Lemaître, Robertson, Walker
GR	General Relativity
GW	Gravitational Wave
LIGO	Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory
ΛCDM	Λ Cold Dark Matter
LSS	Last Scattering Surface
RDE	Radiation Dominated Era
MDE	Matter Dominated Era
ΛDE	Λ Dominated Era
PBH	Primordial Black Hole
ΛDE	Λ Dominated Era
SM	Standard Model
SMC	Standard Model of Cosmology

Lista de símbolos

Cosmología

a	Factor de escala
c	Velocidad de la luz
c_s	Velocidad adiabática del sonido
C_R	$= \frac{\pi^2}{30} g^*$
C_T	Constante que depende de los parámetros del modelo
d_H	Distancia propia
f	Frecuencia
g^*	Grados de libertad
g_{*s}	Grados de libertad entrópicos
$h_{\mu\nu}$	Tensor proyección
h	Factor de escala para el parámetro de Hubble
H	Parámetro de Hubble
k	Número de onda comóvil
K	Curvatura del universo
\mathcal{L}	Lagrangiano
m_{Pl}	Masa de Planck reducida
N	Número de e-folds
N_{RCD}	Número de regiones causalmente desconectadas
T	Temperatura
z	Redshift
ϵ_H	Primer parámetro de Hubble- <i>slow-roll</i>
η	Tiempo conforme
η_H	Segundo parámetro de Hubble- <i>slow-roll</i>
λ	Longitud de onda comóvil, cte de autoacplo
λ_{obs}	Longitud de onda observada
λ_{em}	Longitud de onda emitida
Λ	Constante cosmológica
ρ_c	Densidad crítica
ω	Ecuación de estado
$\tilde{\omega}$	Ecuación de estado efectiva
Ω	Parámetro de densidad
Ω_b	Parámetro de densidad de los bariones
Ω_c	Parámetro de densidad de la materia oscura fría
Ω_K	Parámetro de densidad de la curvatura
Ω_m	Parámetro de densidad de la materia sin presión
Ω_γ	Parámetro de densidad de los fotones
Ω_Λ	Parámetro de densidad de Λ
Ω_ν	Parámetro de densidad de los neutrinos

Espectro primordial

A_s	Amplitud del espectro primordial de curvatura
$G_\kappa[Q]$	Función modo crecente/decreciente para $\kappa = cte$
$G[\kappa, Q]$	Función modo crecente/decreciente para κ variable
k_p	Número de onda comóvil de referencia (pivot)
n_s	índice espectral
\mathcal{N}_*	Función de distribución del inflatón en el baño térmico
$P_{\mathcal{R}}$	Amplitud de perturbación de curvatura comóvil
$P_{\varphi^{(1)}}$	Amplitud de perturbación del campo
P_ζ	Amplitud de perturbación de curvatura en hypersuperficies de densidad uniforme
\mathcal{R}	Perturbación de curvatura comóvil
r	Índice escalar tensor
α_s	<i>Running</i>
ζ	Perturbación de curvatura en hypersuperficies de densidad uniforme

Métrica

B	Perturbación escalar espacio-temporal de la métrica, <i>Shift</i>
B_i	Perturbación vectorial espacio-temporal de la métrica
ds	Elemento de línea
E	Perturbación escalar espacial de la métrica
E_i	Perturbación vectorial espacial de la métrica
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
h_{ij}	Perturbación tensorial de la métrica
K	Curvatura del universo
L	Parte escalar de la parte espacial de ε_μ
L_i	Parte vectorial de la parte espacial de ε_μ
R	Escalar de Ricci
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
T	Parte escalar de la parte temporal de ε_μ
β_i	Perturbación espacio-temporal de la métrica
$\bar{\gamma}_{ij}$	Métrica espacial
Θ	Expansión de la métrica
ε_μ	Campo vectorial generador de las transformaciones gauge
ϕ	Perturbación escalar de la métrica
$\Phi(k t)$	Función de transferencia para el campo métrico ϕ
ψ	Perturbación escalar espacial de la métrica
$\Psi(k t)$	Función de transferencia para el campo métrico
χ	<i>Shear</i> de la métrica
ω_{ij}	Perturbación espacial de la métrica

Tensor energía-impulso

J	Parte escalar del 4-vector transferencia de momento
J_μ	Parte vectorial del 4-vector transferencia de momento

q_μ	Cuadri-vector transferencia de energía
Q_μ	Transferencia de momento
Q	Transferencia de energía
Q_ν	4-vector de transferencia de energía-impulso
$T_{\mu\nu}$	Tensor energía-impulso
u_μ	Cuadri-velocidad
$\pi^{(S)}$	Parte escalar tensor anisótropo Π_{ij}
$\pi_{\mu\nu}$	Tensor anisótropo
Ψ	Perturbación del momento

Fluidos

E	Energía
n	Densidad en número
m	Masa
P	Presión del <i>background</i>
\mathcal{P}	Presión total
s	Densidad de entropía
S	Entropía
U	Energía total del universo
ρ	Densidad del <i>background</i>
ϱ	Densidad total
μ	Potencial químico

Campos

V	Energía potencial (Volumen)
ϵ_V	Primer parámetro de potencial- <i>slow-roll</i>
η_V	Segundo parámetro de potencial- <i>slow-roll</i>
σ_V	Tercer parámetro de potencial- <i>slow-roll</i>
Φ	Campo inflacionario
φ	Campo escalar (inflatón) en el <i>background</i>
\mathcal{P}	Campo escalar (inflatón)
χ	Bosones

GWs

e_j	Vector de base
e_{ij}	Tensores de polarización
$G_{\mathbf{k}}$	Función de Green
$h_{\mathbf{k}}$	Transformada de Fourier de la perturbación tensorial
\tilde{k}	Eq. 4.14
P_h	Amplitud del espectro de las perturbaciones tensoriales
$\mathcal{S}(\mathbf{k})$	Término de fuente en el espacio de momentos
\mathcal{S}_{ij}	Término de fuente
$\tilde{T}_{ij}{}^{lm}$	Operador proyección
Ω_{GW}	Densidad de energía de las GWs
μ	Ángulo entre k y \tilde{k}

PBHs

P_δ	Amplitud del espectro del contraste de densidad
$\mathcal{P}(\delta)$	Función de distribución gaussiana
$\beta(M)$	Fracción inicial de masas
γ	Factor del colapso gravitatorio
$\delta(\mathbf{x}, t)$	Contraste de densidad
δ_c	Contraste de densidad crítica
δ_k	Contraste de densidad en el espacio de momentos
σ_δ^2	Momento de segundo orden del contraste de densidad
$\xi_\delta(\mathbf{r})$	Función de correlación de dos puntos del contraste de densidad

Disipación

Q	Relación disipativa
Γ_χ	Anchura de decaimiento del bosón χ
κ	Derivada logarítmica de Y_φ
$\xi_{\mathbf{k}}^{(q)}$	Ruido cuántico
$\xi_{\mathbf{k}}^{(T)}$	Ruido térmico
Y_φ	Disipación

Notación

\dot{x}	Derivada temporal	$= \frac{dx}{dt}$
x'	Derivada tiempo conforme	$= \frac{dx}{d\tau}$
$x_{,\mu}$	Derivada parcial	$= \partial_\mu x$
$V_{,\varphi}$	Derivada del V respecto a φ	$= \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}$
$x_{;\mu}$	Derivada covariante	$= D_\mu x$
∇_μ	Derivada covariante	$= D_\mu x$
D_μ	Derivada covariante	$= \partial_\mu x_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} x_\alpha$
\tilde{x}	Transformada gauge	

Capítulo 1

Introducción

“El aburrimiento se cura con curiosidad. La curiosidad no se cura con nada.”

Dorothy Parker

Durante el siglo XX se han producido grandes avances en nuestra concepción del Universo. Desde principios de siglo, en el cuál no teníamos conocimiento del tamaño de nuestra propia galaxia, hasta la actualidad, en el que el modelo Λ CDM describe la evolución del universo desde el Big Bang hasta nuestros días.

Entre medias, ha habido un proceso creativo de ideas acompañadas de observaciones científicas como el nacimiento de la teoría cuántica, formulada por Max Planck [1] en 1900, y la construcción de la teoría general de la relatividad de Albert Einstein [2] en 1916. En 1917, de-Sitter encontró soluciones a las ecuaciones de Einstein, describían un universo sin materia ni radiación, formado sólo por una constante cosmológica que se traduce en un universo en expansión acelerada. En 1922, por otro lado, Friedmann halló soluciones que describen un Universo homogéneo e isótropo y dinámico [3].

Las observaciones de Hubble en 1929 mostraron que la zona del Universo cercana a nosotros se encuentra en expansión, lo que conocemos como **Ley de Hubble** [4]. Sin tener en cuenta las correcciones relativistas, esta ley nos da una relación entre la velocidad a la que las galaxias se alejan de nosotros, v , y el redshift, z , definido como el cociente entre la longitud de onda observada y la emitida:

$$v = cz \quad , \quad 1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}}. \quad (1.1)$$

El modelo de de-Sitter ya había predicho un redshift cosmológico, tal y como descubrió Hubble. En 1931, Lemaître propuso que si el universo se está expandiendo, entonces debe provenir de un universo más pequeño y más denso [5], y sugirió el origen del universo como un "átomo primitivo". En 1948 Gamow y Alpher predijeron que si el universo se está expandiendo [6], el universo temprano tenía que ser caliente, lo que se conoce hoy en día como **Hot Big Bang**. Junto a Herman, predijeron que tendría que quedar resquicios de esa radiación temprana y que además, permanecería como una radiación de cuerpo negro a 3 grados Kelvin [7]. Años más tarde, y en un trabajo independiente, Dicke, Wilkinson y Peebles llegaron a la misma conclusión, debía existir una radiación isótropa originada durante el origen del universo [8]. Por otro lado, durante 1964 los físicos Penzias y Wilson detectaron un tipo de radiación microondas y concluyeron que sólo podría tener un origen extragaláctico. Se había detectado por primera vez el fondo cósmico de microondas, del inglés **CMB** (Cosmic Microwave Background), un fondo isótropo a una frecuencia

de 160.2 GHz correspondiente a una temperatura de cuerpo negro de 2.73 K [9]. Años más tarde Alan Guth se dio cuenta de que para que el CMB fuese consecuente con la Teoría de la Relatividad General, el Universo tuvo que atravesar una etapa de expansión acelerada, este periodo lo denominó **inflación** [10].

Durante el siglo XX hemos pasado de una visión cosmológica desprovista de las herramientas necesarias para su comprensión, tales como la física cuántica y la Teoría de la Relatividad General, al conocimiento de que habitamos un universo en expansión y al nacimiento de la Teoría del Big Bang. A finales de siglo, contábamos con un modelo coherente capaz de hacer predicciones cosmológicas respaldadas por las observaciones, que nos proporciona un modelo exitoso de la historia del Universo desde el Big Bang hasta el CMB como historia inferida, y desde el CMB hasta hoy en día como parte observada directamente.

En el año 1998, los equipos de Adam Riess et al. [11] y Perlmutter et al. [12] anunciaron la expansión acelerada del universo. En su estudio usaron supernovas tipo Ia como indicadores de distancia. Su hallazgo revolucionó de nuevo nuestra concepción del Universo, añadiendo, por motivos observacionales, la componente de **energía oscura** que describe un universo en expansión acelerada.

Destaco por último otro gran hito en la historia de la cosmología, la detección de las ondas gravitacionales (**GW** del inglés Gravitational Waves) en el 2015 por la colaboración **LIGO** (del inglés Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) [13]. La colisión de dos agujeros negros hace 1300 millones de años produjo las GWs detectadas por LIGO. Esta señal supuso, además, obtener la última predicción que faltaba por confirmar de la teoría de Einstein. Esta detección supone la inauguración de una nueva ventana al universo, aportando otra perspectiva a la observación multimensajera del cosmos. Quizás podremos ver a través de ella periodos tempranos del Universo anteriores al CMB, esto es, dependiendo de la física que gobierna el universo primitivo podríamos ver épocas que hasta ahora están veladas a la observación por otros métodos. Esto dependerá de la física que condujo el Universo hasta el Big Bang y de la física más allá del Modelo Estándar de partículas. Esta nueva ventana se convierte en otro laboratorio que, posiblemente, nos ayude a ir más allá de los límites conceptuales de hoy en día, tanto en el campo de la cosmología como en el de física de partículas.

La motivación fundamental de esta tesis se basa en el entendimiento de los procesos físicos que han tenido lugar en el universo primitivo y que han dado lugar al universo que vemos hoy en día. Dado el desconocimiento que tenemos en la actualidad de esta etapa temprana del universo, nuestro interés se enfoca en la posibilidad de que durante el periodo inflacionario las GWs hayan sido amplificadas por algún tipo de mecanismo, de manera que sea factible en un futuro no muy lejano detectar alguna señal y, de ser así, explorar la etapa del universo que ha permanecido oculta hasta el presente.

En el Capítulo (2) daremos una descripción del modelo cosmológico en el que se basa la tesis, desde la descripción de las ecuaciones que describen la evolución del universo a gran escala junto con las ecuaciones necesarias para describir el contenido energético del universo. Situaremos la época en la cuál se enfoca la tesis en la historia térmica del universo, y por último describiremos el modelo cosmológico en el que se basa esta investigación.

La primera evidencia directa que tenemos del universo es la señal del CMB originada alrededor de 400.000 años después del Big Bang, y la primera evidencia indirecta a partir de la nucleosíntesis primordial alrededor de 3 minutos después del Big Bang. A día de hoy no tenemos la certeza de que el universo hubiese atravesado, antes de BBN, por un periodo de expansión acelerada, sin embargo, en el Capítulo

(3) veremos la necesidad de asumir inflación como parte de la historia del universo, y veremos que es la solución plausible a problemas cosmológicos que no podríamos explicar sin dicho periodo. Daremos la formulación necesaria para describir la evolución inflacionaria y describiremos el origen de las fluctuaciones primordiales generadas precisamente en este periodo y que darán lugar a los distintos observables, tanto los que ya han sido detectados como el espectro originado en el CMB, como los que aún no, como es el caso del fondo estocástico de las GWs. Por otro lado, si ha existido inflación, veremos también la necesidad del periodo posterior, denominado **recalentamiento**, que surge de forma natural como la transición entre inflación y la etapa en la que la energía de radiación domina sobre todo el contenido energético del universo. Este periodo es de gran importancia ya que sitúa las condiciones iniciales del periodo post-inflacionario. Dentro de inflación, existen distintos modelos que son capaces de explicar el universo homogéneo, isótropo y plano asumiendo un sólo potencial para el campo inflacionario. Nuestra investigación asume, además, distintas posibilidades de interacción entre partículas que habitaron el universo haciendo posible inflación en presencia de una componente térmica, lo que se conoce como inflación templada [14].

Sabemos que la amplitud del espectro primordial es casi invariante de escala durante una etapa del periodo inflacionario, pero existe otro periodo perteneciente a inflación que aún no ha sido observado. En el Capítulo (4) veremos que si en esta etapa inexplorada la amplitud del espectro primordial se amplifica, tendrá consecuencias en el fondo estocástico de GWs. Dependiendo del mecanismo de interacción entre las distintas componentes del universo inflacionario, habrá modelos que hacen factible una futura detección del fondo estocástico de GWs.

En una visión más global del problema inflacionario, sabemos que cuando la amplitud del espectro primordial aumenta puede producir agujeros negros primordiales (PBHs del inglés Primordial Black Holes) en el periodo post-inflacionario [15, 16]. En el Capítulo (4) estudiamos la producción de PBHs en nuestros modelos. Aunque los PBHs producidos en nuestros modelos no son capaces de justificar la materia oscura presente en el universo, su estudio es fundamental para no sobrepasar los distintos límites impuestos por diferentes procesos físicos.

En el Capítulo (5) veremos primero la formulación necesaria para modelar inflación templada. Mostraremos un estudio previo con distintos potenciales inflacionarios con la finalidad de predecir si cada modelo conseguirá amplificar el espectro al final de inflación. Una vez realizado este estudio, hemos seleccionado aquellos modelos que consiguen una buena predicción y mostramos un cálculo más detallado de inflación templada con producción de un fondo estocástico de GWs cuya señal está cerca del rango observacional de futuros experimentos como Cosmic Explorer y Einstein Telescope.

Por último, en el Capítulo (6) daremos una visión general del motivo de investigación de la tesis y resumiremos los resultados fundamentales.

Capítulo 2

Cosmología

“Las afirmaciones extraordinarias requieren evidencias extraordinarias.”

Carl Sagan

La Relatividad General de Einstein, de aquí en adelante **GR**, es una teoría geométrica en la que la curvatura del espacio-tiempo determina el contenido de energía y momento de la materia y radiación, y viceversa [2]. Se resume en la Ecuación de Campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

en unidades naturales $c = \hbar = 1$ (de aquí en adelante), donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y está determinado por la curvatura del espacio-tiempo, $g_{\mu\nu}$ define la métrica, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci, Λ la constante cosmológica, G es la constante de gravitación de Newton y $T_{\mu\nu}$ el tensor energía-impulso.

La Eq. (2.1) forma en realidad un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales acopladas, cuya solución define el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Existen soluciones conocidas para casos en los que podemos simplificar el conjunto de ecuaciones, como en el caso de la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

2.1. Universo FLRW

La métrica Friedmann, Lemaître, Robertson, Walker, de ahora en adelante **FLRW** [3, 17-19], es la descripción más general de un universo homogéneo e isótropo en expansión. El elemento de línea FLRW es:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] , \quad (2.2)$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, siendo x , y y z coordenadas comóviles con la expansión del universo, θ y φ son las coordenadas angulares comóviles. K hace referencia a la curvatura del universo, $K = -1$ para un universo cerrado, $K = 0$ para un universo plano y $K = +1$ si es abierto.

En un universo en expansión, el **factor de escala** a describe la escala de longitud del universo. Lo más importante de este factor no es su valor en sí mismo, ya que no conocemos el tamaño real del universo. Es por ello que se define un factor mucho más ilustrativo, el cociente de a/a_0 con a_0 el factor de escala actual del universo.

Además, la dinámica del universo se describe mediante el **parámetro de Hubble**:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} , \quad (2.3)$$

donde el punto representa la derivada con respecto al tiempo, por lo que describe el ritmo de expansión del universo. Su valor actual se suele dar referido en su forma adimensional, h . Dadas las escalas cosmológicas, se define el **número de e-folds** como el intervalo en el que el factor de escala aumenta un factor e :

$$N \equiv \log \left(\frac{a}{a_i} \right) = \int_i H dt . \quad (2.4)$$

Además, definimos el corrimiento al rojo z , de aquí en adelante **redshift** del inglés, como:

$$1 + z \equiv \frac{a_0}{a} . \quad (2.5)$$

Una vez seleccionada la métrica que define nuestra descripción del espacio-tiempo, se puede construir el **tensor de Einstein** $G_{\mu\nu}$ en la Eq. (2.1), lo que nos da el lado izquierdo de la ecuación (ver Apéndice (B) para más detalles). El lado derecho describe el contenido energético del mismo a través del **tensor energía-impulso**. En la métrica dada en la Eq. (2.2), un observador que se mueve con el fluido lleva una quadri-velocidad u^μ , tal que $u_\mu u^\mu = -1$. Esta 4-velocidad separa la parte temporal y espacial bajo el **tensor proyección**:

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu . \quad (2.6)$$

De forma general, un tensor de rango 2 puede ser dividido en su componente puramente temporal, en su parte temporal-espacial y en puramente espacial, bajo proyecciones del tensor en u_μ y $h_{\mu\nu}$. Así mismo, cualquier tensor de rango 2 lo podemos descomponer en una parte simétrica, que a su vez puede ser dividida en su traza más la parte libre de traza, más su parte antisimétrica [20]. Esto nos da una forma general del tensor energía-impulso:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P h_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \pi_{\mu\nu} , \quad (2.7)$$

donde ρ es la densidad de energía, P la presión q es la transferencia de energía y $\pi_{\mu\nu}$ es el tensor anisótropo. La parte sin traza de la componente ortogonal a la velocidad del fluido u_μ del tensor $T_{\mu\nu}$, es el tensor $\pi_{\mu\nu}$. Las componentes del tensor energía-impulso cumplen las siguientes relaciones:

$$0 = q^\mu u_\mu = \pi^{\mu\nu} u_\mu , \quad (2.8)$$

$$q_\mu = -h_\mu{}^\nu T_{\nu\alpha} u^\alpha , \quad (2.9)$$

$$\rho = u^\mu u^\nu T_{\mu\nu} , \quad (2.10)$$

$$P = \frac{1}{3} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} , \quad (2.11)$$

$$\pi_{\mu\nu} = h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu T_{\alpha\beta} - P h_{\mu\nu} . \quad (2.12)$$

El tensor energía-impulso ha de ser consistente con la descripción de un universo homogéneo e isótropo, por lo que a primer orden toma la forma de fluido perfecto. Un fluido perfecto es aquel en el que las componentes no diagonales se anulan, y

por lo tanto un observador en reposo ve un entorno isótropo:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, P, P, P) . \quad (2.13)$$

Las ecuaciones de Einstein a primer orden son:

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_{\text{Pl}}^2} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2} \quad \text{Ecuación de Friedmann [3]}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6m_{\text{Pl}}^2}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad \text{Ecuación de Raychaudhuri [21]}, \quad (2.15)$$

donde $m_{\text{Pl}} = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$ es la masa reducida de Planck.

La Ecuación de Friedmann indica que el parámetro de Hubble está directamente relacionado con el contenido energético del universo y con su geometría. Así pues, se define la **densidad crítica**, ρ_c , como la densidad total del universo en el caso de que éste sea plano ($K = 0$):

$$\rho_c \equiv 3m_{\text{Pl}}^2 H^2 , \quad (2.16)$$

a partir de la cual se define el **parámetro de densidad**, que es el cociente entre la densidad total de una componente de energía ($X = b$ para los bariones, $X = c$ la materia oscura "fría", $X = m$ para la materia,...), y la densidad crítica:

$$\Omega_X \equiv \frac{\rho_X}{\rho_c} , \quad (2.17)$$

donde:

$$\Omega_R = \frac{\rho_R}{\rho_c} , \quad \Omega_M = \frac{\rho_m}{\rho_c} , \quad \Omega_K = -\frac{K}{a_0^2 H_0^2} , \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} . \quad (2.18)$$

Reescribiendo la Ecuación de Friedmann (2.14) en función de los parámetros de densidad se llega a la regla de la suma cósmica:

$$1 = \Omega_R + \Omega_M + \Omega_K + \Omega_\Lambda . \quad (2.19)$$

Cuando no nos referimos a una componente concreta, sino a la suma de las contribuciones de radiación, materia y energía oscura, definimos el parámetro de densidad sin subíndice:

$$\Omega = \Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda . \quad (2.20)$$

La derivada covariante¹, ∇_μ , del tensor energía-impulso nos da la **ecuación de conservación** de la energía y momento:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 , \quad (2.21)$$

cuya componente temporal es:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 , \quad (2.22)$$

donde el término $3H\rho$ corresponde a la dilución de la energía a medida que el universo se expande, y $3HP$ corresponde al trabajo que realiza la presión del fluido. Esta presión queda definida por el contenido del universo a través de la ecuación de

¹En esta tesis usamos la notación ∇_μ , D_μ o $;\mu$ para la derivada covariante.

estado, w :

$$w = \frac{P}{\rho}. \quad (2.23)$$

Para la materia sin presión $w = 0$, $w = 1/3$ para la radiación y $w = -1$ para el caso en que domine la constante cosmológica. Las Eqs. (2.22) y (2.23), nos permiten escribir la solución para la densidad de energía en función del factor de escala tanto para una ecuación de estado variable como para $w = cte$:

$$\rho = \rho_i e^{\int_{t_i}^t -3H(1+w(t')) dt'} \quad \underline{w = cte} \quad \rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (2.24)$$

A partir de la métrica de un universo plano, homogéneo e isótropo, Eq. (2.2), distinguimos entre la distancia comóvil η , como aquella que mide el observador que se mueve con la expansión del universo, y la distancia propia, d_H :

$$d_H(t) = a(t) \eta(t). \quad (2.25)$$

Los fotones viajan a través de trayectorias de luz con $ds^2 = 0$. Los más lejanos provienen de épocas cada vez más antiguas. La máxima distancia que puede recorrer un fotón desde el origen del universo hasta nuestros días se conoce como **horizonte cosmológico**, dado por la distancia propia $d_H(t)$, que es dependiente del tiempo, y corresponde a multiplicar el factor de escala por el **horizonte de partículas**, la distancia comóvil, igual al tiempo que tarda un fotón en viajar desde el Big Bang hasta hoy en día sin tener en cuenta la expansión del universo:

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \propto \frac{1}{a(t) H(t)}. \quad (2.26)$$

Dada la ecuación de estado, la dinámica del universo está determinada. Las Eqs. (2.15) y (2.24) tienen, para $w \neq -1$, como solución:

$$H = \frac{2}{3t(1+w)} \propto a^{-\frac{3}{2}(1+w)}, \quad (2.27)$$

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (2.28)$$

$$\eta \propto t^{1-\frac{2}{3(1+w)}} \propto a^{\frac{1}{2}(1+3w)}. \quad (2.29)$$

Las regiones causalmente conectadas son aquellas que se encuentran dentro del horizonte cosmológico. Durante la fase en la que domina la radiación, **RDE** del inglés Radiation Dominated Era, el factor de escala $a \propto t^{1/2}$, mientras que $d_H = 2t$. En la fase en que domina la materia, (**MDE** del inglés Matter Dominated Era), $a \propto t^{2/3}$, mientras que $d_H = 3t$.

Definimos el número de onda comóvil:

$$k = \frac{2\pi a}{\lambda}, \quad (2.30)$$

a partir de la longitud de onda λ [22]. En un universo en expansión, la comparación de λ con el horizonte cosmológico determina si una escala k se encuentra dentro o fuera del horizonte:

$$\frac{\lambda}{d_H} \propto \frac{a H}{k}. \quad (2.31)$$

En la Fig. (2.1) se muestra la evolución de las cantidades propias d_H , y λ para

aquellas escalas que cruzan el horizonte en el presente λ_0 , en el momento de igualdad radiación-materia λ_{EQ} , y para las que cruzan el horizonte en el momento en que empieza a dominar la radiación λ_{RH} . Inflación es un periodo de expansión acelerada $\ddot{a} > 0$ en el que el factor de Hubble se mantiene aproximadamente constante y el factor de escala tiene un crecimiento exponencial $a(t) \propto e^{Ht}$. Las escalas que salen del horizonte durante el periodo inflacionario vuelven a entrar en la etapa post-inflacionaria.

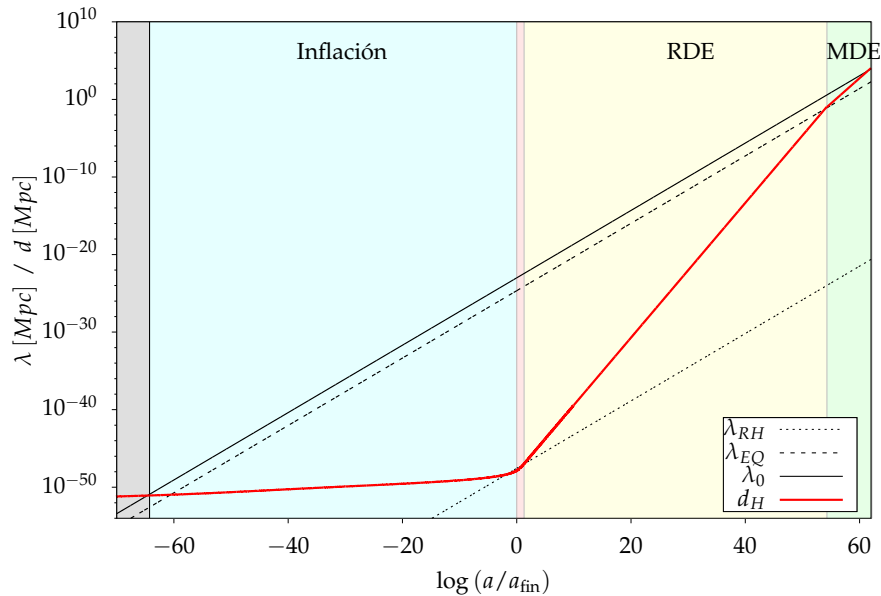


FIGURA 2.1: Ejemplo de evolución del horizonte cosmológico d_H y longitud de onda para las escalas que cruzan el horizonte en distintos momentos, en función del $\log(a/a_{fin})$, donde a_{fin} es el factor de escala al final de inflación. \blacksquare estas escalas aún no han entrado en el horizonte cosmológico actual, \square indica las escalas de inflación que ya han entrado en el horizonte, \blacksquare indica la etapa intermedia entre inflación y la RDE, \square la RDE y, por último, \square indica la MDE.

2.2. Equilibrio termodinámico

La descripción de un gas de partículas interactuantes en un universo a una temperatura dada, en equilibrio termodinámico, proporciona otra visión de la evolución de la densidad de energía, densidad de entropía y temperatura. La mayor parte de la historia térmica transcurre dentro del equilibrio termodinámico, sin embargo, el universo también atravesó momentos excepcionales en los que se produjeron desviaciones del equilibrio térmico, con transiciones de fase que permitieron a algunas especies adquirir abundancias significativas. La idea de que el universo estuvo en equilibrio térmico está sustentada por la forma que presenta el CMB de cuerpo negro, mientras que las desviaciones de equilibrio han dado lugar a la nucleosíntesis primordial y recombinación, entre otros.

Para entender el comportamiento de un gas de partículas con g_* grados de libertad en equilibrio térmico es fundamental la función de distribución de momentos en equilibrio térmico, que corresponden a las distribuciones de Fermi-Dirac (+1 para

fermiones) o Bose-Einstein (-1 para bosones) [23]:

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}, \quad (2.32)$$

donde E es la energía de las partículas, tal que $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, μ es el potencial químico que se conserva en las reacciones si se producen dentro del equilibrio, y T es la temperatura. Para cada partícula se puede calcular la densidad de número n , la densidad de energía ρ y la presión P :

$$n = \frac{g^*}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p}, \quad (2.33)$$

$$\rho = \frac{g^*}{(2\pi)^3} \int E(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p}, \quad (2.34)$$

$$P = \frac{g^*}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E(\mathbf{p})} f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p}. \quad (2.35)$$

En el caso de un gas relativista $T \gg m$ y no degenerado $T \gg \mu$:

$$n = \frac{g^*}{2\pi^2} \int_m^\infty f(\mathbf{p}) E^2 d^3E = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g^* T^3 & \text{Fermiones,} \\ \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g^* T^3 & \text{Bosones,} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\rho = \frac{g^*}{2\pi^2} \int_m^\infty f(\mathbf{p}) E^3 d^3E = \begin{cases} \frac{1}{30} \pi^2 g^* T^4 & \text{Fermiones,} \\ \frac{7}{8} \frac{1}{30} \pi^2 g^* T^4 & \text{Bosones,} \end{cases} \quad (2.37)$$

$$P = \frac{\rho}{3}, \quad (2.38)$$

donde $\zeta(3)$ es la función Zeta de Riemann evaluada en 3, conocida también como constante de Apéry.

Por otro lado, para un gas no relativista $m \gg T$:

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m-\mu}{T}}, \quad (2.39)$$

$$\rho = mn, \quad (2.40)$$

$$P = Tn. \quad (2.41)$$

Cuando domina la radiación, el número de especies no relativistas está suprimida exponencialmente respecto a las relativistas, por lo que sólo tenemos en cuenta estas últimas. La densidad total de todas las especies en equilibrio se puede simplificar:

$$\rho_R = \frac{1}{30} \pi^2 g^* T^4, \quad P_R = \rho_R/3, \quad (2.42)$$

donde g_* es el número de grados de libertad efectivo, correspondiente a la suma de cada especie:

$$g_* = \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermiones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4, \quad (2.43)$$

aquí se tiene en cuenta que cada especie relativista puede estar a una temperatura T_i distinta a la de los fotones T .

La segunda ley de la termodinámica aplicada a un universo en expansión con un volumen comóvil $V = a^3$ es:

$$T dS = dU + P dV - \mu d(nV), \quad (2.44)$$

donde $U = \rho V$ es la energía total del universo. Derivando la presión dada en la Eq. (2.35) respecto de la temperatura, e integrando, se llega a:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1}{T} (\rho + P) + n T \frac{d}{dT} \left(\frac{\mu}{T}\right), \quad (2.45)$$

donde se han utilizado las definiciones (2.36–2.38). Con este resultado podemos reescribir la Eq. (2.44):

$$dS = d \left(\frac{\rho + P - \mu n}{T} V \right), \quad (2.46)$$

y omitiendo la constante de integración, se obtiene:

$$S = \frac{\rho + P - \mu n}{T} V. \quad (2.47)$$

Usando la Eq. (2.24) en la Eq. (2.44) se llega fácilmente a:

$$dS = -\frac{\mu}{T} d(na^3), \quad (2.48)$$

por lo que la entropía total del universo se mantiene constante con la expansión siempre y cuando $\mu \ll T$ o siempre que el número de partículas se mantenga constante. Aunque la ecuación de estado no sea constante la expansión es adiabática. Mantendremos la condición de expansión adiabática en lo que sigue.

Otra cantidad útil es la **densidad de entropía**:

$$s \equiv \frac{S}{V} = \frac{\rho + P}{T} = \frac{2}{45} \pi^2 g_{*s} T^3, \quad (2.49)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado las Eqs. (2.42), sólo que ahora los grados de libertad son *entrópicos*:

$$g_{*s} = \sum_{i=\text{bosones}} g_{Si} \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermiones}} g_{Si} \left(\frac{T_i}{T}\right)^3. \quad (2.50)$$

La conservación de la entropía implica que la cantidad $g_{*s} T^3 a^3$ se mantiene constante, (Eq. (2.49)). Una vez acabada inflación, a medida que el universo evoluciona con la expansión, la temperatura del mismo disminuye ($T \propto g_{*s}^{-1/3} a^{-1}$). Si g_{*s} se mantiene constante entonces $T \propto a^{-1}$. Sin embargo, a medida que baja la temperatura del universo habrá partículas que se hagan no relativistas y dejen de contribuir a los grados de libertad relativistas, dejarán de contribuir por lo tanto a la densidad de

radiación. Este es el momento en que las partículas se **desacoplan** del baño térmico. Mientras g_{*S} disminuye, la temperatura del universo disminuirá de forma más lenta que cuando g_{*S} se mantiene constante. La energía de las partículas que se desacoplan se convierte en energía cinética de las partículas del plasma y se mantiene el equilibrio térmico. Después del desacoplo, cuando la temperatura del universo no es suficiente para mantener la creación de pares de partículas, empieza el proceso de aniquilación de partículas.

La conservación de la entropía permite relacionar los procesos que ocurren antes y después del desacoplo [24, 25]. Usando las Eqs. (2.49) y (2.42) se llega a:

$$\rho \propto g_* g_{*S}^{-4/3} a^{-4}, \quad (2.51)$$

válida para la época en la que domina la radiación. Podemos además relacionar el tiempo con la temperatura del universo en la RDE. Sustituyendo en la Eq. (2.15) la Eq. (2.42) y expresando el resultado en función de las escalas de Planck, se obtiene:

$$\frac{t}{t_{\text{Pl}}} = \frac{45}{16 \pi^3 g_*(T)} \left(\frac{T_{\text{Pl}}}{T} \right)^2. \quad (2.52)$$

2.3. Historia térmica

Además, podemos relacionar la temperatura del universo actual con el redshift cosmológico, Eq. (2.5), a través de la siguiente aproximación:

$$T = T_0 (1 + z). \quad (2.53)$$

El universo estuvo en equilibrio térmico o cerca desde, al menos, el momento en que comenzó la producción de núcleos ligeros, estos son D , ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ y ${}^7\text{Li}$. Este momento se conoce como Big Bang Nucleosíntesis (del inglés **BBN**, Big-Bang Nucleosynthesis). Estas reacciones nucleares ocurren en un rango de energías entre $1 - 0.1 \text{ MeV}$, entre 1 s hasta ~ 3 minutos. Dado que las ondas gravitacionales contribuyen a la densidad de energía, ésta está limitada ya que no puede superar cierto valor límite durante BBN [26-28]. La concordancia de las predicciones de las abundancias de elementos ligeros con las observaciones implica que la escala de energía de BBN supone un límite inferior en la escala para el final de inflación $> 4 \text{ MeV}$ [29-31].

Durante BBN los neutrinos se desacoplan del plasma térmico. Este es un momento importante ya que su contribución a la densidad de radiación cambia cuando, en la escala $\sim 0.5 \text{ MeV}$, momento en el que se produce la aniquilación de pares electrón-positrón, la energía liberada en el proceso se transfiere principalmente a los fotones. Los neutrinos contribuirán desde ese momento a la densidad de energía a una temperatura distinta $T_\nu = (4/11)^{1/3} T_\gamma$.

Según el universo continúa enfriándose, llega un momento en que la densidad de las partículas relativistas se iguala a la densidad de materia. Se produce la igualdad radiación-materia a $\sim 1 \text{ eV}$. Un poco más tarde, a $\sim 0.3 \text{ eV}$, los electrones se unen a los núcleos en lo que se conoce como **recombinación**. La formación de átomos hace que los fotones se desacoplen de la materia, viajando libremente desde ese momento. La luz que nos llega a día de hoy, originada en ese momento, forma la superficie de última dispersión (de aquí en adelante **LSS**, del inglés Last Scattering Surface). Este momento es crucial porque forma parte de la radiación cósmica de fondo que observamos hoy en día. Es la primera detección directa al universo temprano. A

partir de entonces domina la materia hasta la última etapa del universo, en la que la contribución dominante es la energía oscura. En la Fig. (2.2) al final del capítulo se muestra un esquema de la historia térmica del universo, y en el Apéndice (A) se da una tabla de valores para las distintas épocas del universo.

2.4. Λ CDM

El modelo Λ CDM contiene un factor de energía oscura, Λ , junto con la componente de materia oscura fría (no relativista), del inglés Cold Dark Matter, **CDM**. Asume que la Teoría de la Relatividad de Einstein es el formalismo válido para describir el Universo a escalas cosmológicas. Este modelo está en concordancia con las observaciones del CMB, con la descripción de universo homogéneo e isótropo, con la estructura a gran escala del Universo, con la expansión acelerada del universo y con la abundancia de elementos ligeros. El modelo cuenta con sólo 6 parámetros libres en su versión más sencilla, mostrados en la Tabla (2.1).

Parámetro	Descripción	Valor
$\Omega_b h^2$	Parámetro de densidad bariónica	0.02233 ± 0.00015
$\Omega_c h^2$	Parámetro de densidad de CDM	0.1198 ± 0.0012
$100\theta_{MC}$	Escala angular acústica	1.04089 ± 0.00031
τ	Profundidad óptica debido a la reionización	0.0540 ± 0.0074
$\ln(10^{10} A_s)$	Amplitud de la densidad de perturbaciones	3.043 ± 0.014
n_s	Índice espectral	0.9652 ± 0.0042

TABLA 2.1: Parámetros cosmológicos [32].

La **profundidad óptica**, τ , pertenece a la de la época de **reionización**, momento en que la intensa luz de las primeras estrellas y galaxias rompen los átomos de hidrógeno. Los fotones que quedaron libres en la LSS, que corresponde a la radiación que vemos en el CMB, sufren una dispersión producida por los electrones y protones que se encuentran separados en la época de reionización. La profundidad óptica indica que alrededor de un 5.4% de los fotones son dispersados. La **escala angular acústica**, θ_{MC} , es una aproximación a la escala angular $\theta_* \equiv r_*/D_M$, que representa la distancia que las ondas sonoras podrían recorrer antes de la recombinación, r_* , escalada con la distancia a la LSS, D_M . Su valor está relacionado con la curvatura del universo.

Los últimos dos parámetros nos informan sobre cuál es la **amplitud de las fluctuaciones primordiales**, A_s , y cuál es la variación de la amplitud con la escala, el **índice espectral** n_s , donde $n_s = 1$ corresponde a un espectro invariante. Los valores de Planck son $A_s = 2.1 \times 10^{-9}$ y $n_s = 0.9649 \pm 0.0044$ al 68%, ambos referidos a una escala pivote de $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$. Otro test al cuál se han de someter los modelos inflacionarios es la **adiabaticidad** de las fluctuaciones primordiales, ya que es una característica del CMB [33, 34]. Los límites en las correcciones al espectro gaussiano producidas por la no-gaussianidad a un valor menor que el 0.1% de la perturbación [35, 36]. En el caso de un simple campo escalar causante de inflación, la predicción para la desviación es que ésta es pequeña [37, 38]. La derivada logarítmica del índice espectral es lo que se conoce como **running**, su valor en la escala $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ corresponde a $\alpha_s = 0.0011 \pm 0.0099$.

Las observaciones marcan un límite al **índice escalar tensor**, cociente entre la amplitud de las perturbaciones tensoriales y escalares, en $r < 0.06$ en la escala $k = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$.

Todos los demás parámetros se fijan dentro del Modelo Cosmológico Estándar (del inglés **SMC**, Standard Model of Cosmology). El modelo Λ CDM basa su desarrollo en un universo homogéneo e isótropo descrito por la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (Eq. (2.2)).

La **curvatura** del espacio-tiempo obtenida del CMB es compatible con un universo plano, $\Omega_K = 0.001 \pm 0.002$ [32]. Más allá de si es exactamente cero, correspondiente a un indeseable *ajuste fino*, o no [39-41], supone un problema que la cosmología estándar no puede explicar por sí misma. Así mismo, Planck afina los valores del parámetro de densidad de materia $\Omega_m = 0.315 \pm 0.007$, que corresponde a la suma de la densidad de materia bariónica Ω_b , representando un $\sim 0.05\%$ del contenido total de materia, más la densidad de CDM Ω_c , con un $\sim 0.26\%$ del total. Que la curvatura sea plana supone además que la densidad de energía oscura no es un parámetro libre, $\Omega_\Lambda = 0.679$. Los estudios de supernovas Tipo Ia, dan un valor para la ecuación de estado en el presente de $w_0 = -1.03 \pm 0.03$ [42], consistente con una constante cosmológica. De todas estas densidades, la única componente que puede explicar el modelo estándar (del inglés **SM**, Standard Model) de física de partículas es la componente bariónica Ω_b . Vemos que nuestra comprensión del Universo pasa por ir más allá del SM actual.

El parámetro de Hubble es fijado por Planck a $H_0 = (67,4 \pm 0,5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, donde el subíndice 0 indica el valor en el presente. En la actualidad existe una tensión entre distintas medidas de este parámetro. Algunos ejemplos de esta discrepancia se muestran en la Tabla (2.2), donde podemos distinguir dos bloques en los que se agrupan los valores de H_0 . Existen observaciones de la distribución de materia en cúmulos de galaxias en rayos-X y microondas a través del efecto Sunyaev Zel'dovich [43]. Algunos autores revisan el valor de H_0 en otras cosmologías [44-47] como la exploración en el modelo ϕ CDM [48]. Otros utilizan supernovas de tipo Ia [49-52] como por ejemplo CCHP, del inglés Carnegie-Chicago Hubble Program, que basa sus resultados en la calibración de la luminosidad de la rama de las gigantes rojas aplicada a supernovas tipo Ia (SNeIa). También se usan las regiones HII [53], ondas gravitacionales observadas en LIGO / Virgo [54] y lentes gravitacionales [55, 56]. Otras medidas de H_0 es a través de distintas combinaciones. Las fluctuaciones de densidad en la materia bariónica (de aquí en adelante **BAO**, del inglés Baryon Acoustic Oscillations) junto con los datos del CMB [57, 58], o combinando BAOs con Supernovas Ia [42]. DES+BAO+BBN combina los datos del catálogo Dark Energy Survey y de las lentes gravitacionales con BAOs y BBN. BOSS(Full-Shape)+BAO+BBN combina BAOs y BBN con el catálogo Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS). CC describe el método de cronómetros cósmicos (del inglés Cosmic Chronometers, CC) inicialmente propuesto por [59], en el cuál se mide el valor de H_0 a través del estudio de las edades de galaxias relativas a diferentes redshift. H0LiCOW (H0 Lenses in COSMOGRAIL's Wellspring)+STRIDES (STRong-lensing Insights into Dark Energy Survey) usa cuásares con efecto de lente gravitacional; por último SH0ES (del inglés Supernovae, H_0 , for the Equation of State of dark energy) han observado cefeidas en la Gran Nube de Magallanes.

Planck limita los grados de libertad efectivos relativistas extra a $N_{eff} = 2.99 \pm 0.17$, de acuerdo con la predicción del modelo estándar $N_{eff} = 3.046$. Los neutrinos contribuyen a la densidad de radiación en el momento de igualdad y la densidad de materia actual, por lo que su masa afecta al CMB. Planck acota la masa de los neutrinos a $m_\nu < 0.12 \text{ eV}$.

Observaciones	H_0 [$km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$]	Referencia
Rayos X	67.0 ± 3	[43]
Planck	67.4 ± 0.5	[32]
DES+BAO+BBN	67.4 ± 1.2	[60]
ϕ CDM	67.9 ± 2.4	[45]
BOSS(Full-Shape)+BAO+BBN	68.6 ± 1.1	[61]
CCHP	69.6 ± 1.9	[62]
BAO+BBN+CC	72.1 ± 1.2	[63]
H0LiCOW+STRIDES	73.7 ± 1.5	[64]
SH0ES	74.0 ± 1.4	[65]
BAO+BBN+H0LiCOW	74.9 ± 2.0	[63]

TABLA 2.2: Tabla con distintas medidas de H_0

La nucleosíntesis del Big-Bang, basada en el SM [66], ofrece además otra ventana al universo temprano y a la física del SM. Esto es, BBN predice las abundancias de elementos ligeros: D , 3He , 4He , 7Li que están directamente relacionadas con la asimetría bariónica, el ritmo de expansión del universo y con cualquier tipo de asimetría leptónica. Estas observaciones son consistentes con el modelo de Hot Big-Bang estándar, [67-71].

El modelo Λ CDM describe las características del universo y su contenido desde su inicio hasta la actualidad.

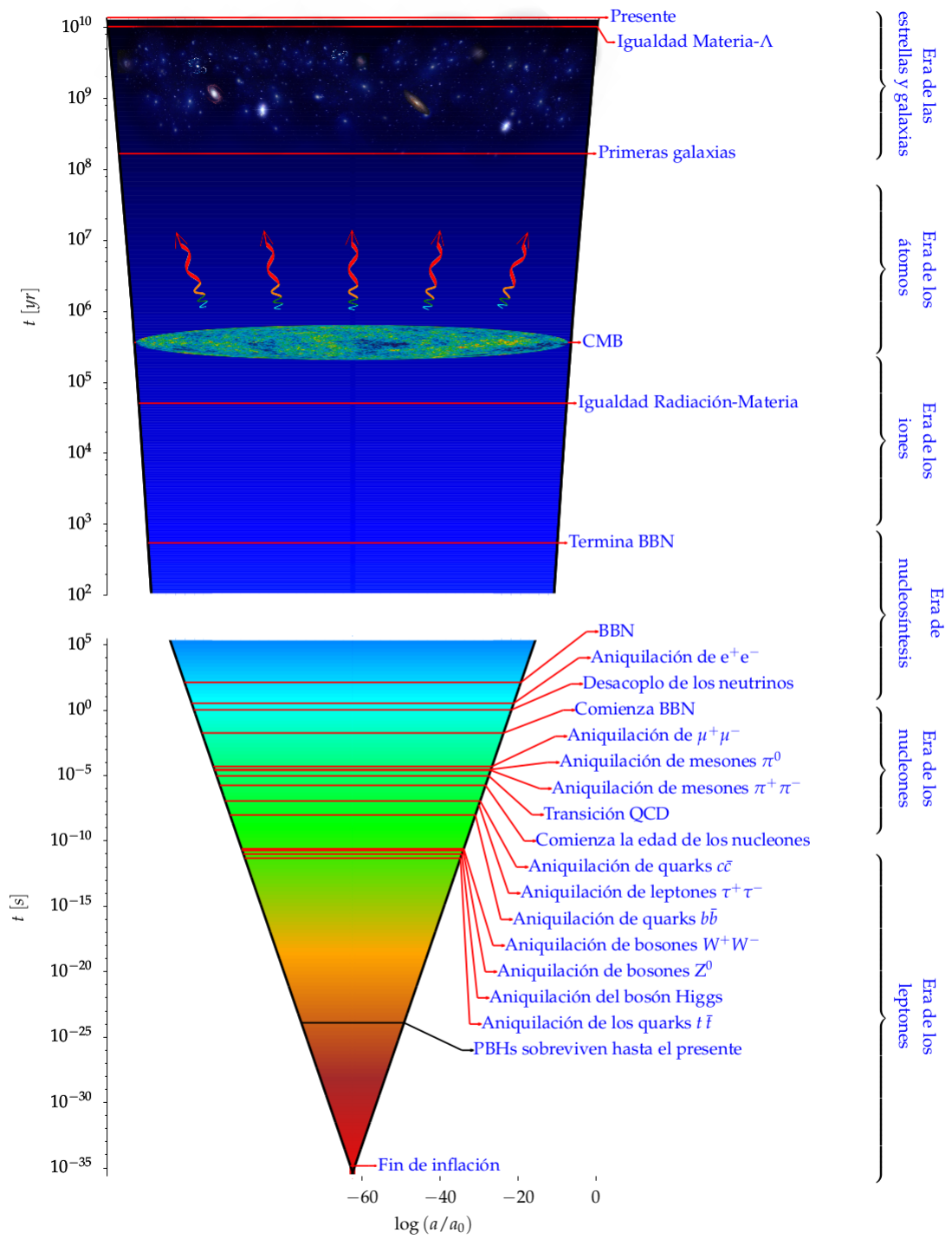


FIGURA 2.2: Historia del universo. Antes de la escala electrodébil se ha asumido un universo dominado por la radiación.

Capítulo 3

Inflación

“Mire vuestra merced -respondió Sancho- que aquellos que allí se parecen no son gigantes, sino molinos de viento, y lo que en ellos parecen brazos son las aspas, que, volteadas del viento, hacen andar la piedra del molino.”

Don Quijote de la Mancha
Miguel de Cervantes

3.1. Inflación

El modelo Λ CMB es coherente con las múltiples observaciones comentadas arriba, pero a su vez, es necesario ampliar el modelo cosmológico estándar, no sólo porque desconozcamos la naturaleza del 95 % del universo, sino porque existen dos problemas fundamentales a la hora de interpretar el CMB, relacionados con la planitud y el horizonte que, sin dicha extensión, no tendríamos respuesta. Guth, Linde, Steinhardt y Albrecht, pioneros en este campo, propusieron la teoría inflacionaria como solución a los problemas de planitud y horizonte [10, 72, 73].

El horizonte cosmológico en un determinado tiempo cosmológico, Eq. (2.25), sufre un redshift debido a la evolución del universo:

$$\frac{d_{\text{H}}^0(t)}{d_{\text{H}}(t)} = 1 + z, \quad (3.1)$$

donde el superíndice 0 en $d_{\text{H}}^0(t_X)$ indica la distancia cosmológica de la época X vista en el presente.

Así, podemos comparar el tamaño actual de una región que estaba causalmente conectada en el momento que se produjo el CMB, conocido como **recombinación**, $d_{\text{H}}^0(t_{\text{rec}})$, con el horizonte cosmológico actual, $d_{\text{H}}(t_0)$:

$$\frac{d_{\text{H}}(t_0)}{d_{\text{H}}^0(t_{\text{rec}})} = \frac{a(t_0) \eta(t_0)}{a(t_0) \eta(t_{\text{rec}})} = \frac{\int_0^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}}{\int_0^{t_{\text{rec}}} \frac{dt'}{a(t')}} \simeq \sqrt{1 + z_{\text{rec}}}. \quad (3.2)$$

El horizonte causal crece más rápidamente que el factor de escala, por lo que, a medida que vamos hacia atrás en el tiempo, el número de regiones causalmente desconectadas, N_{RCD} , aumenta. En MDE, el número de regiones causalmente desconectadas proyectadas en la superficie de última dispersión, LSS, a $z_{\text{CMB}} \simeq 1090$:

$$N_{RCD}(t) = \left(\frac{d_H(t_0)}{d_H^0(t_{rec})} \right)^2 = 1 + z_{CMB} \simeq 10^3, \quad (3.3)$$

que corresponden a regiones de 1° en el cielo. La teoría del Big Bang no puede explicar que observemos homogeneidad e isotropía en el CMB en regiones que estaban desconectadas causalmente cuando se produjo la emisión en el LSS, es lo que se conoce como el **problema del horizonte**.

El siguiente problema que el SMC no puede explicar es el **problema de la planitud**. Reescribiendo la Eq. (2.15), sin tener en cuenta la constante cosmológica, en función del parámetro de densidad total (Eq. (2.20)):

$$K = \frac{a^2 \rho}{3 m_{pl}^2} \frac{\Omega - 1}{\Omega}. \quad (3.4)$$

A partir de las Eqs. (3.4) y (2.24), podemos llegar a:

$$\frac{d\Omega}{dN} = (1 + 3w)(\Omega - 1)\Omega. \quad (3.5)$$

El problema de la planitud reside en que cualquier desviación pequeña de $\Omega = 1$ conduciría a un Ω creciente con la expansión del universo, ya que en RDE $w = 1/3$ y en MDE $w = 0$, y además $\Omega > 0$.

Las medidas de Planck combinadas con BAOs, modos de polarización del CMB y lentes gravitacionales dan como resultado un valor para la curvatura $\Omega_K = 0.0007 \pm 0.0019$ a 1σ [32], lo cuál implica una precisión del $\sim 2\%$. Estos valores indican un universo plano en el presente, por lo que, según la Eq. (3.5), también en el pasado.

Cuando decimos que el universo es homogéneo e isótropo nos referimos al universo a gran escala, $> 100 Mpc$. A pequeñas escalas, de $1 Mpc$ a $100 Mpc$ vemos estructuras: estrellas, galaxias, cúmulos, vacíos y supercúmulos, donde el universo ya no es homogéneo. Estas estructuras que vemos hoy en día se pueden explicar a partir del colapso gravitacional de pequeñas fluctuaciones en la distribución de materia que evolucionan hasta la actualidad. Estas perturbaciones fueron vistas en el CMB [74]. Además, el espectro de potencias de las fluctuaciones primordiales ha de ser casi invariante de escala $n_s = 0.9652 \pm 0.0042$ en la escala $k = 0.05 Mpc^{-1}$ [75, 76].

El SMC no es capaz de explicar por sí sólo los problemas de planitud, horizonte y formación de estructuras. Tan sólo cuenta con unas condiciones iniciales tales como las perturbaciones que dan lugar a la formación de estructuras, homogeneidad e isotropía en todas las regiones del universo, una geometría perfectamente plana y un universo en expansión como origen cosmológico. Sin embargo, parece más razonable que sea la propia dinámica del universo la que le conduzca a esas condiciones iniciales. Inflación [10, 72], una vez empieza, resuelve estos problemas, la única condición que propone es una expansión acelerada del universo $\ddot{a} > 0$ antes de BBN.

La física inflacionaria no puede ser conducida por una constante cosmológica ya que dominaría a la radiación y a la materia en épocas posteriores. La forma más común de inflar el universo es a través de la presencia de un campo escalar φ que rueda lentamente al estar sometido al potencial inflacionario $V(\varphi)$. No es de extrañar que este campo sea denominado **inflatón**. En esta tesis nos centramos en los modelos inflacionarios del tipo *slow-roll*. La condición $\ddot{a} > 0$ se expresa habitualmente mediante el parámetro *slow-roll* ϵ_H [77]:

$$\epsilon_H \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \log H}{dN} = \frac{3}{2}(1 + w) = \frac{3\dot{\varphi}^2}{2V + \dot{\varphi}^2}, \quad (3.6)$$

donde inflación ocurre siempre que $\epsilon_H < 1$, y el número de e-folds N ha sido definido en la Eq. (2.4). La ecuación de Raychaudhuri, Eq. (2.15), se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = H^2(1 - \epsilon_H). \quad (3.7)$$

El lagrangiano de un campo escalar en un espacio-tiempo curvado viene dado por:

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi), \quad (3.8)$$

y la ecuación de movimiento para el campo φ con un Lagrangiano dado por la Eq. (3.8), imponiendo homogeneidad en el campo, se obtiene variando la acción respecto de φ . Obtenemos la ecuación de Klein-Gordon:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0, \quad (3.9)$$

donde $V_{,\varphi}$ es la derivada del potencial respecto al campo, y $3H\dot{\varphi}$ actúa como un término de fricción.

El tensor energía-impulso asociado a los campos es:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\varphi. \quad (3.10)$$

Un campo homogéneo corresponde a un fluido perfecto, donde el tensor $T_{\mu\nu}$ asociado al fluido inflacionario (Eq. (2.7)) corresponde al tensor $T_{\mu\nu}$ asociado a los campos (Eq. (3.10)):

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (3.11)$$

$$P_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (3.12)$$

La condición $P < -\rho/3$ se cumple cuando la energía potencial domina a la energía cinética $V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2$. La ecuación de estado no es un valor constante durante inflación, sin embargo, en el límite de de Sitter, $P \simeq -\rho$ es equivalente a $\epsilon_H \simeq 0$. Estas son las condiciones para la expansión cuasi-exponencial del universo. Estas condiciones impuestas en las Eqs. (2.14) y (3.9) dan lugar a las **aproximaciones slow-roll**:

$$H^2 \simeq \frac{V(\varphi)}{3m_{\text{Pl}}^2}, \quad (3.13)$$

$$3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} \simeq 0. \quad (3.14)$$

La Eq. (3.6) implica que la condición (3.13) se cumple para $\epsilon_H < 1$. Además de ϵ_H , definimos el segundo parámetro *slow-roll*:

$$\eta_H \equiv -\frac{1}{2}\frac{\ddot{H}}{H\dot{H}} = -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}}. \quad (3.15)$$

La aproximación (3.14) se cumple para $\epsilon_H < 1$ y $|\eta_H| \ll 1$. Los parámetros ϵ_H y η_H se conocen como **Hubble-slow-roll**. En términos del potencial se definen los parámetros **potencial-slow-roll**:

$$\epsilon_V \equiv \frac{m_{\text{Pl}}^2}{2}\left(\frac{V_{,\varphi}}{V}\right)^2, \quad \eta_V \equiv m_{\text{Pl}}^2\left(\frac{V_{,\varphi\varphi}}{V}\right), \quad \sigma_V \equiv \frac{m_{\text{Pl}}^2 V_{,\varphi}}{V}. \quad (3.16)$$

En los modelos inflacionarios de tipo *slow-roll* la energía está dominada por el potencial inflacionario, que se mantiene casi constante durante inflación. El campo *rueda lentamente* hacia el valor mínimo del potencial. Toda la física inflacionaria depende de la forma que tenga el potencial. Durante este periodo, el parámetro de Hubble se mantiene aproximadamente constante, y el factor de escala crece cuasi-exponencialmente $a(t) \propto e^{Ht}$. Recordando la Eq. (2.26), el crecimiento exponencial del factor de escala implica que el volumen dentro del horizonte comóvil decrezca exponencialmente $\dot{d}_H < 0$, haciendo que todas las regiones del CMB hayan estado conectadas causalmente en el periodo inflacionario. El crecimiento del factor de escala conduce al universo hacia la homogeneidad, isotropía y planitud del universo. Cuando $\epsilon_H < 1$, la ecuación de estado es $w < -1/3$, y de acuerdo con la Eq. (3.5) tenemos $d\Omega/dN < 0$.

Durante inflación, el horizonte de Hubble físico permanece constante mientras que el comóvil decrece inversamente al factor de escala. Dada una escala comóvil, estaremos en dos situaciones distintas según la escala comóvil sea menor o mayor que el horizonte de Hubble comóvil. Cuando es menor, la escala permanece dentro del horizonte de Hubble. A medida que transcurre inflación el horizonte de Hubble comóvil disminuye con lo que llegará un momento en que ambas escalas se igualen. En este momento decimos que la escala **sale** del horizonte, y partir de ese momento la escala permanecerá fuera durante todo el periodo inflacionario. Una vez termine inflación, ocurre la situación inversa, el horizonte de Hubble comóvil crece con el tiempo, con lo que llegará un momento en que la escala que se encuentra fuera del horizonte sea igual al horizonte de Hubble comóvil, momento en que la escala **entra** en el horizonte. Este mecanismo es el que resuelve el problema del horizonte, ya que a través de él las regiones estuvieron causalmente conectadas durante inflación.

3.2. Teoría de perturbaciones lineales

Durante inflación, se producen perturbaciones primordiales tanto en las componentes que describen la geometría del universo, como en aquellas que describen la materia, ya que están relacionadas a través de las ecuaciones de Einstein (Eq. (2.1)). Las perturbaciones que se generan durante inflación se denominan primordiales, y generan las condiciones iniciales que describen la formación de estructura a gran escala. Las perturbaciones primordiales de curvatura, ζ , determinan las perturbaciones de la densidad total del fluido en hipersuperficies de densidad constante, mientras que las perturbaciones primordiales de curvatura comóvil, \mathcal{R} , miden las perturbaciones en hipersuperficies de φ constante. Ambas tienen la propiedad de que se mantienen constantes una vez que salen del horizonte siempre y cuando la presión del fluido sea adiabática $P^{(1)}/\rho^{(1)} = \dot{P}/\dot{\rho}$. Durante inflación, las perturbaciones primordiales de curvatura decrecen hasta que salen del horizonte. Una vez que lo cruzan se mantendrán constantes durante la evolución del universo, hasta que más tarde vuelven a entrar en el horizonte, momento a partir del cual se verán afectadas por la dinámica del universo. Esto se traduce en que hay escalas que están entrando hoy en día en el horizonte, cuya amplitud de la perturbación corresponde a la que tenía la perturbación primordial durante inflación en el momento de salir del horizonte.

El descubrimiento de las anisotropías en la temperatura de orden 10^{-5} por COBE [78, 79], está en concordancia con el crecimiento de estructuras a partir de fluctuaciones cuánticas primordiales [80, 81]. Aunque el universo sea homogéneo e isótropo a gran escala, hoy vemos estructuras que alejan al universo de la homogeneidad. Inflación produce las perturbaciones iniciales a partir de las fluctuaciones cuánticas

$\delta\phi$ que se producen debido el principio de incertidumbre. La Eq. (2.1) nos dice que las fluctuaciones en los campos implica desviaciones en la homogeneidad e isotropía de la métrica. Dado que las observaciones de estas anisotropías son pequeñas, podemos expandir la métrica con teoría de perturbaciones:

$$ds^2 = -(1 + 2\phi) dt^2 + 2a\beta_i dt dx^i + \left((1 - 2\psi)\bar{\gamma}_{ij} + \omega_{ij} \right) dx^i dx^j, \quad (3.17)$$

cuya descomposición, en el espacio real, escalar-vector-tensor:

$$\begin{aligned} \beta_i &= \partial_i B + B_i, & \text{donde } \partial^i B_i &= 0, \\ \omega_{ij} &= 2\partial_{ij} E + 2\partial_i E_j + 2\partial_j E_i + h_{ij}, & \text{donde } \partial^i E_i &= 0, \quad h^i_i = \partial^i h_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

$\bar{\gamma}_{ij}$ es la métrica espacial general, en un universo plano es igual a la delta de Kronecker δ_{ij} . El background homogéneo e isótropo sólo dependerá de la coordenada temporal, mientras que las perturbaciones son, además, dependientes del espacio. De forma general podemos expandir las perturbaciones en serie de la siguiente manera:

$$X(t, \mathbf{x}) = X(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} X^{(n)}(t, \mathbf{x}) = X(t) + X^{(1)}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} X^{(2)}(t, \mathbf{x}) + \dots \quad (3.19)$$

La descomposición en perturbaciones de los campos y fluidos es:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi(t) + \varphi^{(1)}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \varphi^{(2)}(t, \mathbf{x}) + \dots, \quad (3.20)$$

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho(t) + \rho^{(1)}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \rho^{(2)}(t, \mathbf{x}) + \dots, \quad (3.21)$$

$$\mathbb{P}(t, \mathbf{x}) = P(t) + P^{(1)}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} P^{(2)}(t, \mathbf{x}) + \dots \quad (3.22)$$

En un universo homogéneo, φ , ρ y P son funciones sólo del tiempo, sin embargo, en un universo perturbado las fluctuaciones de estas variables dependen además del espacio \mathbf{x} .

La parte escalar de la parte simétrica y libre de traza de la métrica, es lo que denominamos cizalladura, *shear* del inglés, de la métrica χ :

$$\chi \equiv a(\dot{E}^{(1)} - B^{(1)}). \quad (3.23)$$

Las coordenadas comóviles ortogonales son aquellas en las que $B_i^{(1)} = 0$, y en ellas la parte vectorial de la componente espacial de la 4-velocidad que describe el fluido en la Eq. (2.6) se anula:

$$u^0 = 1 - \phi^{(1)}, \quad u_0 = -1 - \phi^{(1)}, \quad (3.24)$$

$$u^i = a^{-1} \partial^i V^{(1)}, \quad u_i = a \partial_i B^{(1)} + a \partial_i V^{(1)}. \quad (3.25)$$

Definimos también la expansión de la métrica como sigue:

$$\Theta \equiv u^\alpha_{;\alpha} = 3H + \Theta^{(1)}, \quad (3.26)$$

donde la perturbación de la expansión escalar es:

$$-\Theta^{(1)} = 3H\phi^{(1)} + 3\dot{\psi}^{(1)} + \frac{k^2}{a^2} \chi. \quad (3.27)$$

De manera más general, las perturbaciones de la métrica incluyen cuatro perturbaciones escalares $\phi^{(n)}$, $B^{(n)}$, $\psi^{(n)}$ y $E^{(n)}$, dos perturbaciones vectoriales $B_i^{(n)}$, y $E_i^{(n)}$ y una perturbación tensorial $E_{ij}^{(n)}$, que surgen de la descomposición escalar-vector-tensor de las perturbaciones. De todas ellas, las vectoriales decaen exponencialmente y no tienen un papel significativo en la historia del universo. Los datos observacionales del CMB limitan la amplitud de las perturbaciones tensoriales respecto de las escalares $r < 0.06$ en la escala $k = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ [32]. Las escalares, por lo tanto, son las más significativas en la evolución del universo inflacionario.

Por otro lado, el **Principio de Covarianza** establece que la física no depende de la elección del sistema de coordenadas. Sin embargo, la separación de la métrica en un background y una parte perturbativa conlleva una dependencia de la elección del sistema de coordenadas. Realizando transformaciones *gauge* [82], se llega a la construcción de cantidades invariantes, que son aquellas que no dependen de la elección de nuestra *foliación* del espacio-tiempo. La teoría de perturbaciones cosmológicas invariantes *gauge* [83, 84], permite escoger las variables que van a definir las cantidades físicas del universo [85]. En este trabajo usaremos el *gauge* longitudinal, en el que se anulan los escalares $B^{(1)} = E^{(1)} = 0$, y además los vectores $B_i^{(1)} = E_i^{(1)} = 0$.

Con el fin de obtener las ecuaciones de evolución, obtenemos primero el tensor energía-impulso asociado al fluido cosmológico a partir de la Eq. (2.7), y el asociado al campo usando la Eq. (3.10):

Fluido

Campo

$$T^0_0 = -(\rho + \rho^{(1)}) = -\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \dot{\phi}\dot{\phi}^{(1)} - \dot{\phi}^2\phi^{(1)} + \phi^{(1)}V_{,\phi}\right), \quad (3.28)$$

$$T^i_0 = -\left(q^{(1)i} + (\rho + P)u^{i(1)}\right) = \frac{1}{a}\partial^i\left(\dot{\phi}^2B^{(1)} + \frac{1}{a}\dot{\phi}\phi^{(1)}\right), \quad (3.29)$$

$$T^0_j = \left(q_j^{(1)} + (\rho + P)u_j^{(1)}\right) = -\dot{\phi}\partial_j\phi^{(1)}, \quad (3.30)$$

$$T^i_j = \bar{\gamma}^i_j\left(P + P^{(1)}\right) + \pi^{(1)i}_j = \bar{\gamma}^i_j\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) + \dot{\phi}\dot{\phi}^{(1)} - \dot{\phi}^2\phi^{(1)} - \phi^{(1)}V_{,\phi}\right), \quad (3.31)$$

donde se ha separado el potencial en los distintos ordenes en perturbaciones:

$$V(\phi) = V(\phi) + V(\phi)^{(1)} + \frac{1}{2}V(\phi)^{(2)}, \quad (3.32)$$

$$V(\phi)^{(1)} = V_{,\phi}\phi^{(1)}. \quad (3.33)$$

Las Ec. (3.28-3.31) corresponden a la parte escalar en la descomposición STV de las componentes de la métrica y del fluido, donde la parte escalar del 4-vector flujo de energía corresponde a $q_i = \partial_i q$.

Las ecuaciones de Einstein a primer orden para la energía y el momento vienen dadas por:

$$G^0_0 \quad \underbrace{(fI)}_{\rightarrow} \quad \frac{\rho^{(1)}}{2m_{\text{Pl}}^2} = H\Theta^{(1)} - \frac{k^2}{a^2}\psi^{(1)}, \quad (3.34)$$

$$G^0_i \quad \underbrace{(\varphi)}_{\rightarrow} \quad \frac{3\Psi}{2m_{\text{Pl}}^2} = -\Theta^{(1)} + \frac{k^2}{a^2}\chi, \quad (3.35)$$

donde se define la perturbación del momento a partir de la componente T^0_j tal que $T^0_j{}^{(1)} \equiv a\partial_j\Psi$:

$$\Psi \equiv -\dot{\phi}\varphi^{(1)} = q^{(1)} + (\rho + P)a \left(B^{(1)} + V^{(1)} \right). \quad (3.36)$$

Las ecuaciones para las variables de la métrica son:

$$G^i_j{}^{(1)} - \frac{1}{3}\delta^i_j G^k_k{}^{(1)} \xrightarrow{(fl)} -\dot{\chi} - H\chi + \phi^{(1)} - \psi^{(1)} = \frac{a^2}{m_{\text{Pl}}^2} \Pi^{(1)}, \quad (3.37)$$

$$G^i_i{}^{(1)} \xrightarrow{(fl)} -\dot{\Theta}^{(1)} - 2H\Theta^{(1)} + \left(3\dot{H} - \frac{k^2}{a^2} \right) \phi^{(1)} = \frac{1}{2m_{\text{Pl}}^2} \left(\rho^{(1)} + 3P^{(1)} \right), \quad (3.38)$$

donde la parte escalar del tensor anisótropo es:

$$\pi^{(S)} = \Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Pi^k_{,k}. \quad (3.39)$$

La Eq. (3.37) se obtiene de la parte simétrica y sin traza de la componente $m_{\text{Pl}}^2 G^i_j{}^{(1)} = T^{(fl)i}_j{}^{(1)}$, y haciendo uso de las ecuaciones de Einstein a orden cero. La Eq. (3.38) sale de la componente $m_{\text{Pl}}^2 G^i_i{}^{(1)} = T^{(fl)i}_i{}^{(1)}$ y usando la Eq. (3.34) para su simplificación.

$$D^\mu T_{\mu 0}{}^{(1)} \xrightarrow{(\varphi)} \ddot{\phi}^{(1)} + 3H\dot{\phi}^{(1)} + \varphi^{(1)} \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,\varphi\varphi} \right) = 3H\dot{\phi}\varphi^{(1)} + 2\ddot{\phi}\varphi^{(1)} + \dot{\phi}(\dot{\phi}^{(1)} - \Theta^{(1)}), \quad (3.40)$$

$$D^\mu T_{\mu 0}{}^{(1)} \xrightarrow{(fl)} \dot{\rho}^{(1)} + 3H(P^{(1)} + \rho^{(1)}) = -(\rho + P)(\Theta^{(1)} + 3H\phi^{(1)}) + \frac{k^2}{a^2}\Psi, \quad (3.41)$$

$$D^\mu T_{\mu 0}{}^{(1)} \xrightarrow{(fl)} \dot{\Psi} + 3H\Psi = -P^{(1)} - (\rho + P)\phi^{(1)} + \frac{2k^2}{3a^2}\Pi^{(1)}. \quad (3.42)$$

Las Eqs. (3.34–3.42) están escritas en la forma general, listas para escoger un *gauge* sobre el que describir la física del sistema. El campo vectorial generador de las transformaciones, ε_μ , es, a primer orden [86]:

$$\varepsilon_0 = T^{(1)}, \quad \varepsilon^i = L^{(1)i} + \partial^i L^{(1)}. \quad (3.43)$$

Bajo estas transformaciones *gauge*, las variables de la métrica transforman de la siguiente manera:

$$\tilde{\phi}^{(1)} = \phi^{(1)} - \dot{T}^{(1)}, \quad \tilde{\psi}^{(1)} = \psi^{(1)} + HT^{(1)}, \quad (3.44)$$

$$\tilde{B}^{(1)} = B^{(1)} - a\dot{L}^{(1)} + a^{-1}T^{(1)}, \quad \tilde{B}^{(1)}_j = B_j^{(1)} - a\dot{L}^{(1)}_j, \quad (3.45)$$

$$\tilde{E}^{(1)} = E^{(1)} - L^{(1)}, \quad \tilde{E}^{(1)}_j = E_j^{(1)} - L^{(1)}_{,j}, \quad \tilde{E}^{(1)}_{ij} = E^{(1)}_{ij}, \quad (3.46)$$

que dan lugar a las transformaciones de la expansión perturbada y de la parte escalar de la *shear* de la métrica:

$$\tilde{\chi} = \chi - T^{(1)}, \quad \tilde{\Theta}^{(1)} = \Theta^{(1)} + \left(\frac{k^2}{a^2} - 3\dot{H} \right) T^{(1)}, \quad (3.47)$$

y las variables del fluido transforman como sigue:

$$\tilde{\rho}^{(1)} = \rho^{(1)} - \dot{\rho} T^{(1)}, \quad \tilde{P}^{(1)} = P^{(1)} - \dot{P} T^{(1)}, \quad (3.48)$$

$$\tilde{u}^{(1)0} = u^{(1)0} - \dot{T}^{(1)}, \quad \tilde{V}^{(1)} = V^{(1)} - a\dot{L}^{(1)}, \quad (3.49)$$

que dan la transformada de la perturbación del momento:

$$\tilde{\Psi} = \Psi + \dot{\phi}^2 T^{(1)}. \quad (3.50)$$

El *gauge longitudinal* es aquel en el que $\tilde{E}^{(1)} = \tilde{B}^{(1)} = 0$, para el cual el generador temporal es:

$$T^{(1)} = a \left(a\dot{E}^{(1)} - B^{(1)} \right). \quad (3.51)$$

La extensión que incluye a los vectores y tensores se denomina *gauge de Poisson*. Las perturbaciones tensoriales son automáticamente independientes del *gauge* hasta primer orden, por lo tanto son invariantes *gauge*.

Las fluctuaciones han sido reescritas en cantidades invariantes *gauge* por [84, 83]. La cantidad invariante *gauge perturbación de curvatura en hipersuperficies de densidad uniforme* es:

$$-\zeta \equiv \psi^{(1)} + \frac{H}{\dot{\rho}} \rho^{(1)}, \quad (3.52)$$

donde ζ también es igual a la elección del *gauge* de densidad uniforme $\rho^{(1)} = 0$ en el cual $-\zeta = \psi^{(1)}$. En la elección del *gauge* de hipersuperficies espacialmente planas $\Psi^{(1)} = 0$ se tiene que $-\zeta = \frac{1}{3}\rho^{(1)}/(\rho + P)$.

En escalas fuera del horizonte ζ es igual a la, también invariante *gauge*, **perturbación de curvatura comóvil**:

$$\mathcal{R} \equiv \psi^{(1)} + \frac{H}{\dot{\phi}} \phi^{(1)}, \quad (3.53)$$

donde $\mathcal{R} = \psi^{(1)}$ en la elección del *gauge* comóvil en el que $\Psi^{(1)} = 0$.

Con estas definiciones tenemos cantidades que no dependen de la foliación del espacio-tiempo. Dado que estamos interesados en las magnitudes observables, necesitamos tratar las perturbaciones primordiales bajo propiedades estadísticas. Suponiendo una estadística gaussiana para la distribución de las perturbaciones, se define el **espectro de potencias** adimensional a partir de la función de correlación de dos puntos de la perturbación. En el caso de la perturbación de curvatura:

$$P_{\mathcal{R}} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'} \rangle. \quad (3.54)$$

Las ecuaciones de Einstein hasta primer orden en teoría de perturbaciones tienen una solución aproximada, donde a primer orden en los parámetros *slow-roll* y en un universo de de-Sitter, la solución es:

$$P_{\mathcal{R}} = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2, \quad (3.55)$$

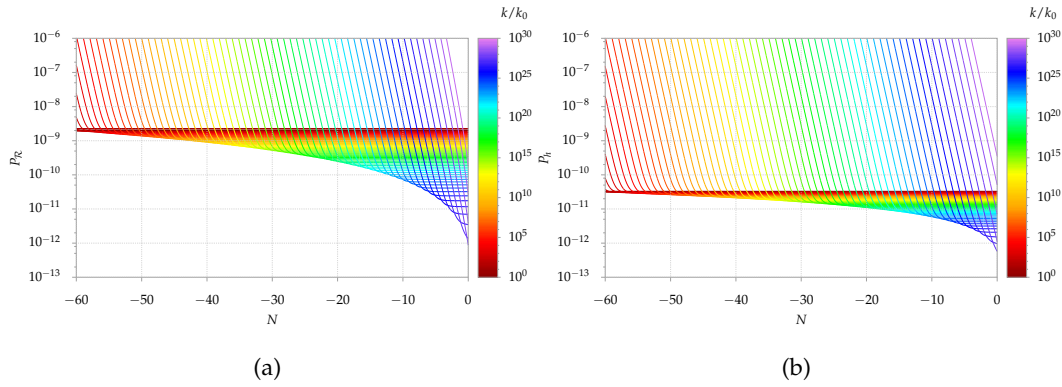


FIGURA 3.1: Ejemplo del comportamiento de la amplitud de las fluctuaciones durante inflación para un potencial del tipo $V = \frac{1}{2}\lambda\varphi^2$. **(a)**: Amplitud del espectro primordial escalar, **(b)**: Amplitud del espectro primordial tensorial. Ambos espectros se dan en función del número de e-folds. La escala de color indica el cociente entre la escala $k = aH$ y la escala que entra hoy en el horizonte $k_0 = a_0 H_0$.

donde esta expresión sólo es válida para modelos inflacionarios con un solo campo, y donde se ha usado la normalización de los campos cuánticos ($u_{\mathbf{k}}^* \partial_\tau u_{\mathbf{k}} - u_{\mathbf{k}} \partial_\tau u_{\mathbf{k}}^* = -i$, con $\varphi_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}/a$) para obtener:

$$P_{\varphi^{(1)}} = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (3.56)$$

La parte escalar y la parte tensorial de las ecuaciones de Einstein están desacopladas a primer orden en teoría de perturbaciones. La transformada de Fourier de la parte tensorial, para un fluido perfecto con $\pi_j^i = 0$:

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{h}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}h_{\mathbf{k}} = 0. \quad (3.57)$$

De la misma manera podemos definir el espectro de potencias de las ondas gravitacionales para cada estado de polarización:

$$P_h(k)\delta^{\lambda\lambda'}\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \langle h_{\mathbf{k}}^\lambda h_{\mathbf{k}'}^{\lambda'} \rangle, \quad (3.58)$$

donde $\lambda, \lambda' = +, \times$ aparece porque los tensores contribuyen con dos estados de polarización. El espectro primordial tensorial es:

$$P_h = 8 \left(\frac{H}{2\pi m_{\text{Pl}}^2} \right)^2. \quad (3.59)$$

La amplitud de las fluctuaciones primordiales escalares y tensoriales están relacionadas a través del **índice escalar-tensor**:

$$r \equiv \frac{P_h}{P_{\mathcal{R}}}. \quad (3.60)$$

En función de los parámetros *slow-roll*, la relación tensor-escalar es:

$$r = 16 \epsilon_H . \quad (3.61)$$

Las Eqs. (3.55) y (3.61) sólo son válidas en modelos inflacionarios estándar (fríos), con un sólo campo escalar. En los modelos de inflación templada, multi-campo,... esta relación no se cumple.

Usando la relación para el momento en que cada modo cruza el horizonte, $k = a H$, podemos relacionar la escala k con el factor de Hubble y con las variables cosmológicas a través de las ecuaciones *slow-roll*. En la Fig. (3.1) se muestra el espectro primordial de curvatura y el espectro primordial tensorial en función del número de e-folds durante el periodo inflacionario para un potencial cuadrático $V = \frac{1}{2} \lambda m_{\text{Pl}}^2 \varphi^2$ con $\lambda = 3.4 \times 10^{-11}$. Una vez que el modo k cruza el horizonte las amplitudes permanecen constantes.

Se define el **índice espectral** como la derivada del espectro de potencias con la escala a primer orden:

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln P_{\mathcal{R}}}{d \ln k} , \quad (3.62)$$

donde n_s mide las desviaciones de la invariancia de escala. A primer orden en los parámetros *slow-roll*:

$$n_s - 1 = 2\eta_H - 4\epsilon_H , \quad (3.63)$$

$$= 2\eta_V - 6\epsilon_V , \quad (3.64)$$

por lo que esperamos un espectro casi plano durante inflación.

A segundo orden, se define el *running*:

$$\alpha_s \equiv \frac{dn_s}{d \ln k} . \quad (3.65)$$

El espectro de potencias lo parametrizamos con estas definiciones:

$$P_{\mathcal{R}} \equiv A_s \left(\frac{k}{k_p} \right)^{n_s(k_p) - 1 + \frac{1}{2} \alpha_s(k_p) \ln(k/k_p)} , \quad (3.66)$$

donde k_p es una escala de referencia (pivote). Las observaciones del CMB [32] dan un valor $A_s = 2.1 \times 10^{-9}$, un índice espectral $n_s = 0.9647 \pm 0.0043$ y el valor del *running* $\alpha_s = 0.0011 \pm 0.0099$ en la escala pivote $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$.

Por otro lado, la distribución de materia está dada por el **contraste de densidad** δ :

$$\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\varphi(\mathbf{x}, t) - \rho(t)}{\rho(t)} , \quad (3.67)$$

cuyas transformadas de Fourier son:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int d^3 \mathbf{k} \delta_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} , \quad \delta_{\mathbf{k}}(t) = \left(\frac{1}{L} \right)^3 \int d^3 \mathbf{x} \delta(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} . \quad (3.68)$$

La distribución de materia se define a través de sus propiedades estadísticas, usando la función de correlación de dos puntos. Su expresión es:

$$\xi_{\delta}(\mathbf{r}) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int d^3 \mathbf{k} \langle |\delta_{\mathbf{k}}(t)|^2 \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} , \quad (3.69)$$

donde en la última igualdad se ha usado $\delta_{\mathbf{k}}^* = \delta_{-\mathbf{k}}$. Los únicos términos que han sobrevivido a la integral son aquellos en los que $k = k'$. La transformada de Fourier de la función de correlación nos da el espectro primordial adimensional de las fluctuaciones de densidad:

$$P_{\delta}(k) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = L^3 \frac{k^3}{2\pi^2} \langle \delta_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}'} \rangle, \quad P_{\delta}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x} \xi_{\delta}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.70)$$

La ventaja del espectro adimensional es que es independiente del volumen L^3 .

El espectro de las fluctuaciones de densidad es clave para medir la agrupación de la materia en las diferentes escalas del universo. Las predicciones teóricas han de estar en concordancia con las observaciones en el CMB, por lo que el contraste de densidad en el momento del LSS ha de tener un valor $\delta \sim 10^{-5}$. Durante RDE la presión radiativa limita el crecimiento del contraste de densidad, pero en MDE, ya sin presión, se produce el colapso de la materia de forma mucho más eficiente llegando a alcanzar un valor de $\delta \sim 10^2$ a un redshift $z < 1$ en la formación de estructuras e incluso $\delta \sim 10^6$ en las galaxias.

El escenario estándar cosmológico es que las perturbaciones definidas arriba provienen de las fluctuaciones cuánticas primordiales generadas durante inflación. Durante inflación se genera el espectro primordial de fluctuaciones. A medida que el universo inflacionario se expande, dichas perturbaciones salen del horizonte, y permanecerán fuera hasta que, una vez acabada inflación, la escala de la fluctuación se iguale a la escala del horizonte de Hubble. Dado que todas las perturbaciones tienen como origen la misma fluctuación cuántica primordial, sus amplitudes están relacionadas:

$$P_{\delta} = \frac{4(1 + \omega)^2}{(5 + 3\omega)^2} \left(\frac{k}{aH} \right)^4 P_{\mathcal{R}}. \quad (3.71)$$

Así mismo, definimos la **densidad de energía de las ondas gravitacionales** como la componente *temporal-temporal* del tensor energía-impulso de las ondas gravitacionales [87]:

$$\rho_{GW} \equiv T_{00}^{GW} = \frac{m_{\text{Pl}}^2}{4} \langle \dot{h}_{ij}(\mathbf{x}, t) \dot{h}^{ij}(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (3.72)$$

que contiene las dos polarizaciones. La densidad de energía por intervalo logarítmico normalizada con la densidad de energía total, asumiendo que el fondo estocástico es isótropo, gaussiano y no polarizado, es:

$$\Omega_{GW} \equiv \frac{1}{\rho_c} \frac{d \ln \rho_{GW}}{d \ln k} = \frac{1}{24} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 P_h. \quad (3.73)$$

3.3. Recalentamiento

Inflación puede ocurrir con cualquier potencial, desde los más sencillos tipo polinómicos, u otras formas, con tal de que el potencial tenga una región suficientemente plana para que la dinámica entre dentro de la aproximación *slow-roll* [88]. Hacia el final de inflación las aproximaciones dejan de ser válidas, nos acercamos a $\epsilon_H = 1$, el campo pierde energía a través del término de fricción y comienza a oscilar alrededor del mínimo del potencial. El primer análisis de un campo homogéneo oscilante en un universo en expansión se puede encontrar en [89]. Para los casos en que el potencial se comporta como una ley de potencias con respecto al campo, $V(\varphi) = \lambda m_{\text{Pl}}^{4-n} |\varphi|^n / n$, las oscilaciones del campo se comportan como un

fluido perfecto con una ecuación de estado definida como:

$$w = \frac{n-2}{n+2}, \quad (3.74)$$

donde se ha usado el teorema del virial. En el caso de un potencial caótico con $n = 4$, una vez que el campo comience a oscilar, la densidad del inflatón se comportará como radiación.

Durante inflación, el campo φ domina la densidad de energía en la evolución inflacionaria, y *rueda* lentamente hacia el valor del mínimo del potencial. La condición de *rodar lentamente* involucra a una dinámica que cumpla $\epsilon_H < 1$. Toda esta energía ha de ser transferida a las partículas del SM, de manera que la radiación sea la nueva contribución dominante a la densidad de energía del universo, y se establezcan las condiciones necesarias para que se desarrolle BBN tal y como observamos nuestro universo. La desintegración a los nuevos campos se modela con el término disipativo $Y_\varphi \dot{\varphi}$ en la Eq. (3.108). En la imagen estándar, al final de inflación H disminuye y la disipación se hace eficiente frente a la expansión del universo, el campo se desintegra a las partículas que vemos hoy en día en el universo o a campos intermedios que decaerán en los grados de libertad del SM. En este escenario las interacciones no juegan un papel significativo durante inflación, sólo al final, cuando $H \sim Y_\varphi$ y el universo acaba en un estado sobre-enfriado, conocido como **inflación fría**. Otro escenario sugerido es el de **inflación templada** [90, 14, 91-95], en la que durante inflación las interacciones son relevantes frente a la expansión del universo y, cuanto más intensa sea, más se aleja del estado sobre-enfriado. Además cambia la evolución del campo que ya no es regido exclusivamente por la expansión. Si los efectos disipativos son relevantes durante inflación, las predicciones de los parámetros cosmológicos diferirán del resultado clásico, y el término de fricción de la Eq. (3.9) ya no estará regulado exclusivamente por el factor de Hubble, por lo que esperamos observables diferentes.

Cuando acaba inflación, en $\epsilon_H = 1$, el inflatón continúa desintegrándose hasta que domina la radiación. Esta etapa, conocida como **recalentamiento**, durará un determinado número de e-folds según sea el ritmo de desintegración del campo. Durante esta fase el inflatón interactúa con las partículas cercanas, estas partículas alcanzan el equilibrio térmico a la temperatura de recalentamiento T_{RH} . Esta temperatura sabemos que es mayor que la temperatura de BBN $T_{BBN} \sim 4 \text{ MeV}$.

En esta fase nos hemos alejado de una cosmología de de-Sitter con un factor de escala que crece exponencialmente para adentrarnos a una fase con un factor de escala $a \propto \sqrt{t}$, Eq. (2.29).

Conociendo las distintas etapas por las que atraviesa el universo, podemos calcular el número de e-folds correspondiente a las escalas que vuelven a entrar en el horizonte en las épocas post-inflacionarias [96], [97]. Partiendo de la definición del número de e-folds dada en la Eq. (2.4):

$$e^N = \frac{a_{end}}{a_k} = \frac{a_{end}}{a_{RH}} \frac{a_{RH} H_k}{a_{EQ} H_{EQ}} \frac{a_{EQ} H_{EQ}}{a_0 H_0} \frac{a_0 H_0}{a_k H_k}. \quad (3.75)$$

Definiendo la ecuación de estado efectiva \tilde{w} a partir de la Eq. (2.24):

$$\tilde{w} \equiv \frac{1}{\Delta N} \int_{N_{end}}^N w_{RH} dN \quad \xrightarrow{w_{RH} \neq cte} \quad \rho \propto \rho_{end} \left(\frac{a}{a_{end}} \right)^{-3(1+\tilde{w}_{RH})}, \quad (3.76)$$

podemos expandir las escalas:

$$N(k) = -\log\left(\frac{k}{k_0}\right) - \frac{1}{3(\tilde{w}_{RH} + 1)} \log\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{(1 - 3\tilde{w}_{RH})}{3(\tilde{w}_{RH} + 1)} \log\left(\frac{\sqrt[4]{\rho_{RH}}}{\sqrt[4]{V_{end}}}\right) \\ + \log\left(\frac{a_{EQ}H_{EQ}}{a_0H_0}\right) + \log\left(\frac{\sqrt[4]{\rho_k}}{\sqrt[4]{V_{end}}}\right) + \log\left(\frac{10^{16}\text{GeV}}{\sqrt[4]{\rho_{EQ}}}\right) + \log\left(\frac{\sqrt[4]{\rho_k}}{10^{16}\text{GeV}}\right), \quad (3.77)$$

donde se ha usado $\rho_{end} = 3V_{end}/2$, que se obtiene de las Eqs. (3.11) y (3.12) para una ecuación de estado al final de inflación $w = -1/3$, o equivalentemente, $\epsilon_H = 1$. Aquí ρ_{RH} es la densidad de energía al final de recalentamiento, V_{end} es el potencial al final de inflación, ρ_k es la densidad de energía inflacionaria a la escala k y k_0 es la escala que corresponde a los modos que entran hoy en día en el horizonte. Teniendo en cuenta que durante recalentamiento no conocemos la ecuación de estado, hemos usado la Eq. (3.76) para la evolución durante esta etapa.

En el caso de que la fase de recalentamiento sea instantánea, $\rho_{end} = \rho_{RH}$, reescribimos la Eq. (3.77):

$$N(k) = 61.49 - \log\left(\frac{k}{k_0}\right) + \log\left(\frac{\rho_k^{1/2}}{V_{end}^{1/2}}\right) + \log\left(\frac{V_{end}^{1/4}}{10^{16}\text{GeV}}\right). \quad (3.78)$$

Si queremos las escalas normalizadas a la escala de referencia del CMB ($k_p = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$), podemos sustituir $-\log(k/k_0)$ por $-\log(k/k_p) - \log(k_p/k_0) = -5.40 - \log(k/k_p)$.

3.4. Inflación templada

En inflación templada el inflatón interactúa con otras partículas. El ritmo al que el inflatón disipa energía en otros grados de libertad viene dado por el coeficiente Y_φ . Según sea el ritmo de producción de partículas en comparación con la expansión, tendremos dos regímenes distintos: uno en el que la producción no es suficiente para competir con la expansión $Y_\varphi < H$, lo que se conoce como **el régimen de disipación débil**, o que estemos en el otro supuesto en el que la producción es comparable con la expansión $Y_\varphi > H$, lo que denominamos **el régimen de disipación fuerte**. A su vez, inflación se divide en dos regímenes según la repercusión que tenga la disipación en los observables. En el caso en que la temperatura sea mucho menor que el parámetro de Hubble, $T \ll H$, la disipación tendrá un efecto despreciable en los observables y estaremos en **inflación fría**. Es por ello que será útil definir la **relación disipativa**:

$$Q \equiv \frac{Y_\varphi}{3H}. \quad (3.79)$$

El mecanismo para construir inflación templada es la interacción del campo escalar inflacionario φ en un campo bosónico χ que a su vez se desintegra en otras partículas bosónicas o fermiónicas σ :

$$\varphi \rightarrow \chi \rightarrow \sigma. \quad (3.80)$$

Cuando $T > H$ estamos dentro de lo que se conoce como **inflación templada**. Los modelos de inflación templada se encuentran dentro de la aproximación adiabática, en la que todos los movimientos microscópicos transcurren en una escala temporal

mayor que todos los movimientos macroscópicos asociados a la dinámica de los valores medios de las variables en un universo en expansión. Esta aproximación se traduce en:

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi} < H < \Gamma_{\chi}, \quad (3.81)$$

donde Γ_{χ} es la anchura de decaimiento del bosón χ .

En inflación templada tendremos que la presencia del baño térmico cambia la masa de χ a través de correcciones térmicas. Esta creación de partículas está directamente relacionada con un nuevo término disipativo en las ecuaciones de evolución:

$$\dot{\rho}_{\phi} + 3H\dot{\phi}^2 = -Y_{\phi}\dot{\phi}^2, \quad (3.82)$$

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = Y_{\phi}\dot{\phi}^2, \quad (3.83)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = -Y_{\phi}\dot{\phi}, \quad (3.84)$$

donde Y_{ϕ} corresponde a la disipación de energía del inflatón en otros grados de libertad.

Durante inflación con múltiples fluidos, separamos la componente del tensor energía-impulso del inflatón $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ y la parte radiativa $T_{\mu\nu}^{(R)}$:

$$T_{\mu\nu}^{(R)} = (\rho + \mathbb{P})u_{\mu}^{(R)}u_{\nu}^{(R)} + \mathbb{P}g_{\mu\nu}, \quad (3.85)$$

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}\phi\partial^{\beta}\phi + V(\phi)\right), \quad (3.86)$$

donde el tensor anisótropo desaparece en la consideración de fluido perfecto. Además, la componente radiativa la expresamos en función de la cuadri-velocidad comóvil u_{μ} que cumple $u_{\mu}u^{\mu} = -1$, y que ha sido definida en la Eq. (3.25).

La densidad y presión total es la suma de todas las contribuciones de cada componente del fluido que denotamos con (α) :

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{(\alpha)} \quad , \quad \mathbb{P} = \sum_{\alpha} \mathbb{P}_{(\alpha)}. \quad (3.87)$$

En esta tesis tendremos en cuenta la transferencia de energía del inflatón con otras partículas a través de un parámetro de acoplo Y_{ϕ} . La ecuación de conservación¹, Eq. (2.21), se modela en este caso con una transferencia de energía entre los campos existentes de manera que la energía total se conserva:

$$D^{\mu}T_{\mu\nu}^{(\alpha)} = \mathcal{Q}_{\nu}^{(\alpha)} \quad \longrightarrow \quad \sum_{\alpha} \mathcal{Q}_{\nu}^{(\alpha)} = 0, \quad (3.88)$$

donde el superíndice (α) diferencia los distintos fluidos.

Separamos el 4-vector de transferencia de energía-impulso [98-101], en su parte ortogonal a la 4-velocidad del fluido Q_{μ} , que representa la transferencia de momento, y su componente paralela \mathcal{Q} , que representa la transferencia de energía:

$$Q_{\mu} = \mathcal{Q}u_{\mu} + Q_{\mu} \quad , \quad \sum_{\alpha} \mathcal{Q}_{(\alpha)}^{\mu} = 0, \quad (3.89)$$

donde la transferencia de momento se separa a su vez en su componente escalar y vectorial $Q_{\mu} = J_{\mu} + \partial_{\mu}J$. Sin embargo, para una componente vectorial de la 4-velocidad nula, Eq. (3.25), se obtienen componentes vectoriales nulas en el tensor

¹Aquí se usa como notación para la derivada covariante D^{μ} o ${}_{;\mu}$

energía impulso, $T_{\mu\nu}^{(\alpha)V} = 0$, y la componente vectorial de las ecuaciones de conservación del tensor energía-impulso es cero, por lo que $J_\mu = 0$.

Ambas transferencias son referidas respecto a la velocidad del fluido u_μ , de manera que la transferencia del momento respecto a la velocidad del fluido es nula $u^\mu Q_\mu = 0$, y la transferencia de energía es la proyección del tensor transferencia energía-impulso sobre la velocidad $Q_\mu u^\mu = -Q$. Igualando, con signo contrario, la contribución radiativa a la del inflatón:

$$Q_{(r)}^\mu = -Q_{(\varphi)}^\mu = -Y_\varphi u_{(r)}^\nu \varphi_{,\nu} \varphi^{,\mu} . \quad (3.90)$$

La definición dada en la Eq. (3.90) separada en sus componentes temporal ($Q_{(\varphi)0}$) y espacial ($Q_{(\varphi)i}$), nos da la transferencia de energía asociada al campo:

$$Q_{(\varphi)0} = Y_\varphi \dot{\varphi}^2 + Y_\varphi^{(1)} \dot{\varphi}^2 + 2Y_\varphi \dot{\varphi} \dot{\varphi}^{(1)} - Y_\varphi \dot{\varphi}^2 \varphi^{(1)} , \quad (3.91)$$

$$Q_{(\varphi)i} = Y_\varphi \dot{\varphi} \partial_i \varphi^{(1)} , \quad (3.92)$$

donde se ha usado la descomposición de las perturbaciones de la 4-velocidad dada en la Eq. (3.25). Para obtener la descomposición en la parte paralela y ortogonal a la velocidad del fluido, proyectamos el 4-vector transferencia de energía en el 4-vector velocidad $Q_{(\varphi)} = u^\mu Q_{(\varphi)\mu}$ y en el tensor proyección $Q_{(\varphi)\mu} = \partial_\mu J_{(\varphi)} = h_\mu{}^\nu Q_{(\varphi)\nu}$ (cuya definición ha sido dada en la Eq. (2.6)). El resultado es, a orden cero y a primer orden, el siguiente:

$$Q_{(\varphi)}^{(0)} = -Y_\varphi \dot{\varphi}^2 , \quad (3.93)$$

$$Q_{(\varphi)}^{(1)} = -Y_\varphi^{(1)} \dot{\varphi}^2 - 2Y_\varphi \dot{\varphi} \dot{\varphi}^{(1)} + 2Y_\varphi \dot{\varphi}^2 \varphi^{(1)} , \quad (3.94)$$

$$J_{(\varphi)}^{(1)} = Y_\varphi \dot{\varphi} \varphi^{(1)} . \quad (3.95)$$

Tomando la componente temporal de la ecuación de conservación a orden cero, y usando la Eq. (3.11) para la ecuación correspondiente al inflatón:

$$D^\mu T_{\mu 0}^{(\alpha)(0)} \quad \underbrace{(fl)} \quad \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \text{Eq. (3.82)} , \\ \text{Eq. (3.83)} , \end{cases} \quad (3.96)$$

$$\underbrace{(\varphi)} \quad \text{Eq. (3.84)} . \quad (3.97)$$

Siguiendo con la conservación del tensor energía-momento (Eq. (3.88)), las componentes temporal y espacial se diferencian de las ecuaciones de la conservación de la energía sin transferencia de energía (ecuaciones (3.40–3.42)) en unos nuevos términos relacionado con el intercambio de energía entre los distintos campos. A primer orden, cada componente del fluido se obtiene a partir de $D^\mu T_{(\varphi)\mu 0}^{(1)}$, $D^\mu T_{(R)\mu 0}^{(1)}$

y $D^\mu T_{(R)\mu j}^{(1)}$ respectivamente:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}^{(1)} + 3H\dot{\phi}^{(1)} + \phi^{(1)} \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,\phi\phi} \right) - 3H\dot{\phi}\phi^{(1)} \\ - 2\ddot{\phi}\phi^{(1)} - \dot{\phi}(\dot{\phi}^{(1)} - \Theta^{(1)}) = -Y_\phi^{(1)} \dot{\phi} - Y_\phi \left(\dot{\phi}^{(1)} - \dot{\phi}\phi^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_R^{(1)} + 3H(P_R^{(1)} + \rho_R^{(1)}) + (P_R + \rho_R)(\Theta^{(1)} + 3H\phi^{(1)}) \\ - \frac{k^2}{a^2} \Psi_R = \mathcal{Q}_{(\phi)0}^{(1)} + \phi^{(1)} \mathcal{Q}_{(\phi)0}^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\dot{\Psi}_R + 3H\Psi_R - \frac{2k^2}{3a^2} \Pi_R^{(1)} + (\rho_R + P_R)\phi^{(1)} + P_R^{(1)} = -J_{(\phi)}^{(1)}. \quad (3.100)$$

Dada la definición de la componente espacial de la 4-velocidad, Eq. (3.25), puramente escalar, la componente vectorial de la transferencia de momento se anula y sólo obtenemos la escalar $Q_\mu = \partial_\mu J$. Además, en una cosmología homogénea e isótropa, la componente espacial de la ecuación de conservación excluye la transferencia de momento a orden cero $J_{(\alpha)}^{(0)} = 0$.

En inflación templada hay una producción constante de partículas. De acuerdo con las ecuaciones (3.82) y (3.83) la densidad de energía de cada componente del fluido se diluye con la expansión del universo por el factor H . El inflatón pierde energía a través de la disipación Y_ϕ , y a través de ese mismo factor la radiación la gana.

Reescribiendo la Eq. (3.98) tenemos:

$$\ddot{\phi}_k^{(1)} + (3H + Y_\phi)\dot{\phi}_k^{(1)} + \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,\phi\phi} \right) \phi_k^{(1)} = F \left(H, \phi^{(1)}, Y_\phi, Y_\phi^{(1)} \dots \right), \quad (3.101)$$

donde $F \left(H, \phi^{(1)}, Y_\phi, Y_\phi^{(1)} \dots \right)$ involucra además las perturbaciones de las variables de la métrica $\Theta^{(1)}, \chi$. A orden cero en *slow-roll* y en el límite de disipación débil, la Eq. (3.101) puede ser descrita por un término de fuente en el lado derecho de la ecuación cuando se puede despreciar el acoplo entre las fluctuaciones del campo y las fluctuaciones del baño térmico.

Así como en la Eq. (3.84) se ha parametrizado la disipación del campo en los grados de libertad relativistas, también existe la reacción inversa del baño térmico, que representamos a través del término de fuente estocástica $\xi_k^{(T)}$ [102-104]. Como consecuencia de esta reacción inversa, las fluctuaciones de campo son gobernadas a través del teorema fluctuación-disipación, y su evolución se determina a través de la ecuación de Langevin [105], adaptada a un universo en expansión [95, 106, 104], en el régimen *slow-roll* [90, 93]:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_k^{(1)} + (3H + Y_\phi)\dot{\phi}_k^{(1)} + \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,\phi\phi} \right) \phi_k^{(1)} = \sqrt{2Y_\phi T} a^{-3/2} \xi_k^{(T)} + \xi_k^{(q)} \\ + F \left(H, \phi^{(1)}, \dots \right), \end{aligned} \quad (3.102)$$

donde $\xi_k^{(q)}$ es el término de fuente que surge de la descomposición de los modos en escalas sub y super horizonte, de manera que las fluctuaciones de campo de larga longitud de onda (típicamente con $k > aH$) actúan como un término de fuente para las escalas de corta longitud de onda (con $k < aH$).

Se puede aproximar la fuente estocástica a una distribución de probabilidad gaussiana con función de correlación:

$$\langle \xi_{\mathbf{k}}^{(T)} \xi_{-\mathbf{k}'}^{(T)} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(t - t'), \quad (3.103)$$

donde $\langle \dots \rangle$ es la media de las fluctuaciones.

En el límite de disipación débil, podemos despreciar el acoplo entre las fluctuaciones del inflatón con las fluctuaciones de densidad, y la ecuación de evolución de las fluctuaciones del campo tiene solución analítica. La solución de la amplitud del espectro primordial es [104]:

$$P_{\mathcal{R}} = \left(\frac{H_*}{\dot{\phi}_*} \right)^2 \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2 \left[1 + 2\mathcal{N}_* + \frac{T_*}{H_*} \frac{4\pi Q_*}{\sqrt{1 + 4\pi Q_*/3}} \right], \quad (3.104)$$

donde las variables están evaluadas en el momento del cruce del horizonte, $k = a_* H_*$. El parámetro \mathcal{N}_* representa cómo se distribuyen las fluctuaciones del inflatón en el baño térmico. Distingue entre los casos no-térmico correspondiente al vacío ($\mathcal{N}_* = 0$), y el caso térmico que incluye la contribución de las excitaciones térmicas con una distribución de Bose-Einstein ($1 + 2\mathcal{N}_* = \coth[H_*/(2T_*)]$).

Debido al acoplo entre las fluctuaciones la amplitud del espectro se modifica. Este cambio se parametriza a través de una función $G(Q)$. La expresión semi-analítica para la amplitud del espectro primordial está dada por [90, 93, 106, 104, 107, 108]:

$$P_{\mathcal{R}} = \left(\frac{H_*}{\dot{\phi}_*} \right)^2 \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2 \left[1 + 2\mathcal{N}_* + \frac{T_*}{H_*} \frac{4\pi Q_*}{\sqrt{1 + 4\pi Q_*/3}} \right] G[Q_*]. \quad (3.105)$$

El término $G(Q)$ es el modo creciente (del inglés growing mode) cuando amplifica el espectro o modo decreciente (del inglés decreasing mode) cuando disminuye el espectro, corresponde al cociente entre la amplitud del espectro primordial total y la amplitud del espectro en el límite de disipación débil. Este efecto es significativo para una disipación fuerte, $Q > 1$, pudiendo suponer una amplificación para el espectro en varios órdenes de magnitud, dependiendo del modelo. La dinámica de las perturbaciones del campo no tiene solución analítica conocida, ya que tenemos un sistema acoplado en las ecuaciones (3.98–3.100), así pues se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones sobre diferentes configuraciones del ruido, y posteriormente promediando todas las soluciones [105], se obtiene la amplitud del espectro final. La forma funcional de la función $G(Q_*)$ en la Eq. (3.102), ha sido obtenida para el potencial caótico e híbrido en los casos en que el la disipación se comporta como:

$$Y_{\varphi} = C_T M^{\alpha} T^{\kappa} \varphi^{\beta}, \quad \text{con } \alpha = 1 - \kappa - \beta, \quad (3.106)$$

en [109–113], donde C_T es una constante que depende de los parámetros del modelo, M una escala de energía y las constantes κ , α y β dependen del modelo que regula la disipación y de la temperatura. El término κ describe la derivada logarítmica de Y_{φ} respecto la temperatura:

$$\kappa \equiv \frac{d \ln Y_{\varphi}}{d \ln T}. \quad (3.107)$$

Para el caso $\kappa = 0$, la función $G(Q)$ tiene como solución analítica $G(Q) = 1$.

La Eq. (3.84) corresponde a la ecuación de Klein-Gordon en un universo en expansión a orden cero con disipación de energía. Se diferencia de la Eq. (3.9) añadiendo un término de disipación:

$$\ddot{\phi} + 3H(1+Q)\dot{\phi} + V_{,\varphi} = 0. \quad (3.108)$$

En este escenario, la disipación de energía del inflatón actúa como un término de fricción en las ecuaciones de evolución del campo, por lo que inflación dura más tiempo.

En presencia de un baño térmico, las aproximaciones *slow-roll*:

$$3H(1+Q)\dot{\phi} \simeq -V_{,\varphi}, \quad (3.109)$$

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = Y_\varphi\dot{\phi}^2, \quad (3.110)$$

$$3m_{\text{Pl}}^2 H^2 \simeq V, \quad (3.111)$$

y los parámetros *slow-roll* están relacionados a través del parámetro Q a primer orden de la siguiente manera:

$$\epsilon_V = (1+Q)\epsilon_H, \quad (3.112)$$

$$\eta_V = (1+Q)(\epsilon_H + \eta_H). \quad (3.113)$$

En la aproximación *slow-roll* podemos obtener una aproximación analítica para la evolución. Cuando Q varía suavemente con la expansión, la variación de la densidad de la radiación es despreciable frente al término de fricción $4H\rho_R$ y podemos hacer la siguiente aproximación en la Eq. (3.111), para $T > H$ [110]:

$$4H\rho_R \simeq Y_\varphi\dot{\phi}^2, \quad (3.114)$$

usando las Eqs. (3.111), (3.114) y (2.42) se llega fácilmente a las siguientes igualdades generales para cualquier tipo de potencial:

$$T^4 = \frac{1}{2C_R} \frac{Q}{(Q+1)^2} V\epsilon_V, \quad (3.115)$$

$$\left(\frac{T}{H}\right)^4 = \frac{9}{2} \frac{1}{C_R} \frac{Q}{(1+Q)^2} \frac{m_{\text{Pl}}^4}{V} \epsilon_V, \quad (3.116)$$

$$\frac{H}{\dot{\phi}} = -\frac{1+Q}{\sqrt{2}m_{\text{Pl}}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_V}}, \quad (3.117)$$

$$Q^{4-\kappa}(Q+1)^{2\kappa} = \frac{1}{9 \times 2^\kappa} \frac{C_T^4}{C_R^\kappa} \left(\frac{M}{m_{\text{Pl}}}\right)^{4\alpha} \left(\frac{V}{m_{\text{Pl}}^4}\right)^{\kappa-2} \left(\frac{\varphi}{m_{\text{Pl}}}\right)^{4\beta} \epsilon_V^\kappa, \quad (3.118)$$

donde $C_R = g_*\pi^2/30$. Con el fin de obtener la evolución del campo a lo largo de inflación, de la definición del número de e-folds en la Eq. (2.4) junto con las Eqs. (3.111), (3.114) y (2.42), obtenemos N para inflación templada:

$$N = \int H dt = - \int_{\varphi_{\text{end}}}^{\varphi_*} \frac{1+Q}{m_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{V}{V_\varphi}\right) d\varphi. \quad (3.119)$$

Siguiendo el cálculo de [111, 114], obtenemos la evolución del cociente disipativo para el caso en que la disipación depende de la temperatura de la forma dada en la Eq. (3.106) usando las ecuaciones (3.115–3.118) junto con la Eq. (3.119) y expresando el resultado en función de los parámetros *slow-roll*, Eq. (3.16), para un coeficiente

disipativo $\kappa = cte$:

$$\frac{d \ln Q}{dN} = \frac{2}{4 - \kappa + (4 + \kappa)Q} [(2 + \kappa)\epsilon_V - \kappa \eta_V - 2\beta \sigma_V] . \quad (3.120)$$

Esta expresión nos permitirá obtener el índice espectral en función del número de e-folds. De esta manera podremos comparar los valores resultantes de los diferentes modelos cosmológicos con los resultados observados por Planck. Siguiendo este objetivo, damos las expresiones generales necesarias en el cálculo del índice espectral:

$$\frac{d \ln H}{dN} = -\frac{\epsilon_V}{1 + Q} , \quad (3.121)$$

$$\frac{d \ln \dot{\phi}}{dN} = \frac{\epsilon_V - \eta_V}{1 + Q} - \frac{Q}{1 + Q} \frac{d \ln Q}{dN} , \quad (3.122)$$

$$\frac{d \ln T}{dN} = \frac{(3 + Q)\epsilon_V - 2(1 + Q)\eta_V - \beta(1 - Q)\sigma_V}{(Q + 1)(4 - \kappa + (4 + \kappa)Q)} . \quad (3.123)$$

Para el espectro primordial dado en la Eq. (3.105), el índice espectral es:

$$\begin{aligned} n_s - 1 = & 4 \frac{d \ln H}{dN} - 2 \frac{d \ln \dot{\phi}}{dN} + \frac{d \ln Q}{dN} \frac{d \ln G(Q)}{d \ln Q} \\ & + \frac{1}{(1 + 2\mathcal{N}_*)\sqrt{3 + 4\pi Q} + 4\pi\sqrt{3} Q T/H} \left[\sqrt{3 + 4\pi Q} \frac{d(1 + 2\mathcal{N}_*)}{dN} \right. \\ & \left. + 4\pi\sqrt{3} Q \frac{T}{H} \left(\frac{3 + 2\pi Q}{3 + 4\pi Q} \frac{d \ln Q}{dN} - \frac{d \ln H}{dN} + \frac{d \ln T}{dN} \right) \right] , \end{aligned} \quad (3.124)$$

donde a primer orden en los parámetros *slow-roll* se tiene $dN = d \ln k$.

En inflación templada, el espectro de potencias de las GWs es el mismo que si no hubiera disipación, por lo que la única diferencia en el índice escalar-tensor viene de del espectro escalar, siendo ahora igual a:

$$r = \frac{16\epsilon_H}{(1 + Q_*)} \frac{1}{F[T_*/H_*, Q_*]} \frac{1}{G[Q_*]} , \quad (3.125)$$

donde

$$F[T_*/H_*, Q_*] = 1 + 2\mathcal{N}_* + \frac{T_*}{H_*} \frac{4\pi Q_*}{\sqrt{1 + 4\pi Q_*/3}} . \quad (3.126)$$

En el régimen de disipación fuerte, si $Q > 1$ y el growing mode $G[Q] > 1$, la Eq. (3.125) nos dice que la contribución tensorial queda suprimida.

Capítulo 4

Ondas gravitacionales y Agujeros negros primordiales

“¿No sería extraño que un universo sin propósito creara accidentalmente a seres humanos que están tan obsesionados con el propósito?”

Lee Strobel

4.1. Ondas gravitacionales a segundo orden

En esta sección veremos las implicaciones cosmológicas que surgen a segundo orden en teoría de perturbaciones. Las medidas del CMB son consistentes con la existencia de modos escalares en las escalas de observación. En cuanto a los modos tensoriales inflacionarios aún no han sido detectados. Por un lado, el límite actual para la relación escalar-tensor, Eq. (3.60), es de $r < 0.06$ en la escala $0.002 Mpc^{-1}$, indicando que la amplitud de los modos tensoriales es pequeña respecto de la amplitud del espectro escalar en las escalas del CMB. Las observaciones del CMB sólo nos dan información en los 10 – 15 e-folds alrededor de la escala pivote $0.002 Mpc^{-1}$. Por otro lado, la detección de GW requiere de un gran esfuerzo tecnológico, como ha sido llevado a cabo en la observación de GWs de fenómenos astronómicos, tales como la fusión de agujeros negros observados por las colaboraciones LIGO y Virgo [13, 115-118]. Los nuevos experimentos DECIGO [119] y BBO [120] están diseñados para detectar GW en un rango de frecuencias $f = 0.1 - 10 Hz$, permitiéndonos, en el caso de que se llegue a observar algún fondo estocástico de GW, ver el universo en escalas distintas al CMB ($10^{-18} - 10^{-14} Hz$), completando algo más la incertidumbre que tenemos sobre cómo se ha producido inflación.

A primer orden en teoría de perturbaciones los modos escalar y tensor están desacoplados, sin embargo, a segundo orden las fluctuaciones primordiales escalares actúan como un término de fuente para las ondas gravitacionales en el universo post-inflacionario [121, 122]. Mientras que el espectro escalar se mantiene prácticamente invariante en las escalas del CMB, existe una incertidumbre en las longitudes de onda menores a las observadas, siendo su amplitud dependiente de los modelos inflacionarios. El término de fuente para las GW es dependiente del cuadrado del espectro escalar, por lo que esperamos a priori que aquellos modelos en los que los escalares sufran amplificación en las escalas al final de inflación, produzcan un término de fuente que amplifique las GWs. Dicha amplificación dependerá del modelo inflacionario, pudiendo ser la contribución dominante en algunos casos [111]. Si el espectro primordial al final de inflación ha sido amplificado por algún

tipo de mecanismo, tendremos además producción de agujeros negros primordiales ligeros que se han evaporado. Los modelos que producen PBHs candidatos a componer la materia oscura son aquellos que amplifican el espectro en escalas menores a $k \sim 10^{15} \text{ Mpc}^{-1}$, entre los cuales sólo son candidatos aquellos que se forman en un rango de masas $10^{18} \text{ kg} \lesssim M_{PBH} \lesssim 10^{23} \text{ kg}$ o en $M_{PBH} \gtrsim 10^{30} \text{ kg}$, ya que en las otras franjas de masas los PBHs sólo contribuyen con un 1 % de su densidad [123-125].

Para calcular la posible amplificación del espectro primordial calculamos las ecuaciones de Einstein a segundo orden, Eq. (2.1), a partir de la métrica FRLW, Eq. (3.17), para un universo con curvatura cero [122, 126]. Además despreciamos los campos métricos a segundo orden $\phi^{(2)}$ y $\psi^{(2)}$ porque su contribución es subdominante. Calculamos la parte diagonal de las ecuaciones de Einstein, y obtenemos el término de fuente S_{ij} a partir de la ecuación de Einstein a segundo orden $G_j^{i(2)} = m_{\text{Pl}}^{-2} T_j^{i(2)}$. Para ello se define el **operador proyección** $\hat{\mathcal{T}}_{ij}{}^{lm}$ que extrae la parte transversa y la traza [122]:

$$\hat{\mathcal{T}}_{ij}{}^{lm} G_{lm}^{(2)} = \frac{1}{m_{\text{Pl}}^2} \hat{\mathcal{T}}_{ij}{}^{lm} T_{lm}^{(2)} \quad \implies \quad \ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \frac{\nabla^2}{a^2} h_{ij} = -4a^2 \hat{\mathcal{T}}_{ij}{}^{lm} S_{lm}. \quad (4.1)$$

La parte transversa y sin traza del tensor de Einstein y el tensor energía-momento a segundo orden [37] vienen dados por:

$$G_j^{i(2)} = \frac{\partial^i \phi^{(1)} \partial_j \phi^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial^i \psi^{(1)} \partial_j \phi^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial^i \phi^{(1)} \partial_j \psi^{(1)}}{a^2} + \frac{3 \partial^i \psi^{(1)} \partial_j \psi^{(1)}}{a^2} \\ + \frac{2\phi^{(1)} \partial_j \partial^i \phi^{(1)}}{a^2} - \frac{2\psi^{(1)} \partial_j \partial^i \phi^{(1)}}{a^2} + \frac{4\psi^{(1)} \partial_j \partial^i \psi^{(1)}}{a^2} \\ + \frac{1}{4} \left(\ddot{h}^i_j + 3H\dot{h}^i_j - \frac{\partial_k \partial^k h^i_j}{a^2} \right), \quad (4.2)$$

$$T_j^{i(2)} = \frac{1}{2} P \Pi^{(2)i}_j + P^{(1)} \Pi^{(1)i}_j + (\rho + P) V^{(1)i} V^{(1)}_j, \quad (4.3)$$

donde hemos despreciado los términos a segundo orden de las perturbaciones de la métrica $\phi^{(2)}$ y $\psi^{(2)}$. Despreciando la parte anisótropa a segundo orden $\Pi_j^{i(2)}$, expresando la presión del background en función de la ecuación de estado $P = \omega\rho$, y la presión a primer orden en función de la velocidad adiabática del sonido $P^{(1)} = c_s^2 \rho^{(1)}$, el término de fuente se puede expresar como sigue:

$$a^2 S_j^i = \partial^i \phi^{(1)} \partial_j \phi^{(1)} + 2\phi^{(1)} \partial^i \partial_j \phi^{(1)} - 2\psi^{(1)} \partial^i \partial_j \phi^{(1)} - \partial^i \psi^{(1)} \partial_j \phi^{(1)} - \partial^i \phi^{(1)} \partial_j \psi^{(1)} \\ + 3\partial^i \psi^{(1)} \partial_j \psi^{(1)} + 4\psi^{(1)} \partial^i \partial_j \psi^{(1)} - \frac{4}{3(1+\omega)H^2} \partial^i (H\phi^{(1)} + \dot{\psi}^{(1)}) \partial_j (H\phi^{(1)} + \dot{\psi}^{(1)}) \\ - \frac{2c_s^2}{3\omega H^2} (3H^2 \phi^{(1)} + 3H\dot{\psi}^{(1)} - \nabla^2 \psi^{(1)}) \partial^i \partial_j (\phi^{(1)} - \psi^{(1)}). \quad (4.4)$$

Queremos expresar el término de fuente en función de las transformadas de Fourier. De manera individual, las transformadas de Fourier para cada componente son:

$$h_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [h_{\mathbf{k}}(t)e_{ij}(\mathbf{k}) + \bar{h}_{\mathbf{k}}(t)\bar{e}_{ij}(\mathbf{k})] , \quad (4.5)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}}(t) , \quad (4.6)$$

$$S_{lm}(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3\mathbf{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} S_{lm}(\mathbf{x}') , \quad (4.7)$$

donde los **tensores de polarización** e_{ij} y \bar{e}_{ij} se expresan en función de la base ortogonal a \mathbf{k} , dada por \mathbf{e} y $\bar{\mathbf{e}}$ como sigue:

$$e_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [e_i(\mathbf{k})e_j(\mathbf{k}) - \bar{e}_i(\mathbf{k})\bar{e}_j(\mathbf{k})] , \quad (4.8)$$

$$\bar{e}_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [e_i(\mathbf{k})\bar{e}_j(\mathbf{k}) + \bar{e}_i(\mathbf{k})e_j(\mathbf{k})] , \quad (4.9)$$

$$\mathbf{e}_i k^i = \bar{\mathbf{e}}_i k^i = \mathbf{e}_i \bar{\mathbf{e}}^i = 0 . \quad (4.10)$$

En términos de los tensores de polarización, el tensor proyección se define:

$$\hat{T}_{ij}{}^{lm} S_{lm} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [e_{ij}(\mathbf{k})e^{lm}(\mathbf{k}) + \bar{e}_{ij}(\mathbf{k})\bar{e}^{lm}(\mathbf{k})] S_{lm}(\mathbf{k}) . \quad (4.11)$$

En el espacio de momentos, la ecuación para los tensores, Eq. (4.1), es:

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{h}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}h_{\mathbf{k}} = -4a^2 e^{lm}(\mathbf{k})S_{lm}(\mathbf{k}) = a^2 S(\mathbf{k}, t) . \quad (4.12)$$

Con la definición dada en la Eq. (4.11), junto con la ecuación para la transformada, Eq. (4.7), el término de fuente es:

$$S(\mathbf{k}, t) = -4 \int \frac{d^3\mathbf{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} e^{lm}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} S_{lm}(\mathbf{x}') . \quad (4.13)$$

Usando el teorema de convolución, y de aquí en adelante abreviando la notación ($\phi^{(1)} = \phi$, $\psi^{(1)} = \psi$), obtenemos el término de fuente en función de las perturbaciones de la métrica:

$$S(\mathbf{k}, t) = 4 \int \frac{d^3\tilde{\mathbf{k}}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{k}_i \tilde{k}_m \left[\left(\frac{7+3\omega}{3(1+\omega)} - \frac{2c_s^2}{\omega} \right) \phi_{\tilde{\mathbf{k}}}(t) \phi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(t) \right. \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} &+ \left(1 - \frac{2c_s^2 \tilde{k}^2}{3\omega a^2 H^2} \right) \psi_{\tilde{\mathbf{k}}}(t) \psi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(t) \\ &+ \frac{2c_s^2}{\omega} \left(1 + \frac{\tilde{k}^2}{3a^2 H^2} \right) \phi_{\tilde{\mathbf{k}}}(t) \psi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(t) + \left(\frac{8}{3(1+\omega)} + \frac{2c_s^2}{\omega} \right) \frac{1}{aH^2} \phi_{\tilde{\mathbf{k}}}(t) \dot{\psi}_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(t) \\ &\left. - \frac{2c_s^2}{\omega H} \psi_{\tilde{\mathbf{k}}}(t) \dot{\psi}_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(t) + \frac{4}{3(1+\omega)H^2} \dot{\psi}_{\tilde{\mathbf{k}}}(t) \dot{\psi}_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}}(t) \right] . \quad (4.15) \end{aligned}$$

Queremos expresar el término de fuente en función del espectro primordial. Separamos la evolución de los campos métricos en una parte que describe su comportamiento fuera del horizonte, por otra parte que describe su evolución una vez entran en el horizonte, lo que se conoce como funciones de transferencia. El comportamiento de las fluctuaciones fuera del horizonte corresponde a las fluctuaciones primordiales originadas durante inflación $\psi_{\mathbf{k}}$. Las funciones de transferencia para cada campo métrico $\phi(k t)$, $\psi(k t)$ son, respectivamente, $\Phi(k t)$, $\Psi(k t)$. Si reescribimos la Eq. (4.15) en función de las funciones de transferencia obtenemos:

$$\phi_{\mathbf{k}}(t) \equiv \Phi(k t) \psi_{\mathbf{k}}, \quad \psi_{\mathbf{k}}(t) \equiv \Psi(k t) \psi_{\mathbf{k}}, \quad (4.16)$$

donde las fluctuaciones primordiales están caracterizadas por el espectro primordial de potencias que durante RDE están relacionados de la siguiente manera [122]:

$$P_{\psi}(k) = \frac{4}{9} P_{\mathcal{R}}(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s - 1}. \quad (4.17)$$

El término de fuente, Eq. (4.15), lo podemos expresar en función de una función $f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, t)$ que contenga la información de las funciones de transferencia y de las fluctuaciones primordiales:

$$\mathcal{S}(\mathbf{k}, \eta) \equiv \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} e(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \eta) \psi_{\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}} \psi_{\tilde{\mathbf{k}}}, \quad (4.18)$$

donde:

$$e(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) \equiv e^{ij}(k) \tilde{k}_i \tilde{k}_j = \tilde{k}^2 [1 - \mu^2], \quad \mu \equiv \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{k}}}{k \tilde{k}}, \quad (4.19)$$

y

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, t) \equiv & 4 \left[\left(\frac{7 + 3\omega}{3(1 + \omega)} - \frac{2c_s^2}{\omega} \right) \Phi(\tilde{k}t) \Phi(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|t) + \left(1 - \frac{2c_s^2 \tilde{k}^2}{3\omega a^2 H^2} \right) \Psi(\tilde{k}t) \Psi(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|t) \right. \\ & + \frac{2c_s^2}{\omega} \left(1 + \frac{\tilde{k}^2}{3a^2 H^2} \right) \Phi(\tilde{k}t) \Psi(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|t) + \left(\frac{8}{3(1 + \omega)} + \frac{2c_s^2}{\omega} \right) \frac{1}{H} \Phi(\tilde{k}t) \dot{\Psi}(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|t) \\ & \left. - \frac{2c_s^2}{\omega H} \Psi(\tilde{k}t) \dot{\Psi}(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|t) + \frac{4}{3(1 + \omega) H^2} \dot{\Psi}(\tilde{k}t) \dot{\Psi}(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|t) \right]. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Calculamos el promedio del término de fuente usando el teorema de Wick [126]

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}(\mathbf{k}, \tilde{t}_1) \mathcal{S}(\mathbf{K}, \tilde{t}_2) \rangle &= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} e(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}) f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{t}_1) \int d^3 \tilde{\mathbf{K}} e(\mathbf{K}, \tilde{\mathbf{K}}) f(\mathbf{K}, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{t}_2) \langle \psi_{\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}} \psi_{\tilde{\mathbf{k}}} \psi_{\mathbf{K} - \tilde{\mathbf{K}}} \psi_{\tilde{\mathbf{K}}} \rangle \\ &= \delta(\mathbf{k} + \mathbf{K}) \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} e(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}})^2 f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{t}_1) \left[f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{t}_2) + f(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{t}_2) \right] \times \\ &\quad \frac{P_{\psi}(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|)}{|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|^3} \frac{P_{\psi}(\tilde{k})}{\tilde{k}^3}. \quad (4.21) \end{aligned}$$

La solución de la Eq. (4.12) viene dada por las funciones de Green solución de la ecuación diferencial homogénea:

$$h_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{a(t)} \int d\tilde{t} G_{\mathbf{k}}(t; \tilde{t}) \left[a(\tilde{t})^2 \mathcal{S}(\mathbf{k}, \tilde{t}) \right], \quad (4.22)$$

donde $G_{\mathbf{k}}$ es la solución de la Eq. (4.12) sin término de fuente:

$$\ddot{G}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{G}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}G_{\mathbf{k}} = \delta(t - \tilde{t}). \quad (4.23)$$

La solución de la Eq. (4.12) para un factor de escala $a(t) \propto t^p$ siguiendo una ley de potencias con $p > 1$, y sin término de fuente, es conocida. La podemos expresar en función de las funciones de Bessel:

$$h_{\mathbf{k}}(t) = a(t)^{\frac{1-3p}{2p}} \left[A_k J_\alpha \left(\frac{p}{1-p} \frac{k}{aH} \right) + B_k Y_\alpha \left(\frac{p}{1-p} \frac{k}{aH} \right) \right], \quad (4.24)$$

donde $\alpha = \frac{3p-1}{2(1-p)}$, $J_\alpha(x)$ es la función de Bessel de primera especie, $Y_\alpha(x)$ es la función de Bessel de segunda especie, y A_k junto con B_k son constantes que dependerán de las condiciones iniciales y del modo k . En escalas superhorizonte $k \ll aH$ las funciones $h_{\mathbf{k}}(t)$ se mantienen constantes. Los modos que han salido del horizonte durante inflación mantienen su amplitud constante, que denominamos h^{prim} , hasta que vuelven a entrar en el horizonte:

$$k \ll aH \quad \longrightarrow \quad h^{prim} = \frac{1}{m_{\text{Pl}}} \frac{1}{a_* \sqrt{k}}, \quad (4.25)$$

donde a_* es el factor de escala en el momento en que cruza el horizonte.

El espectro de potencias para los tensores, $P_h(k, t)$ ha sido definido en la Eq. (3.58). La función de correlación del espectro tensorial se obtiene a partir de la función de correlación del término de fuente. Continuando la Eq. (4.22), se encuentra:

$$\langle h_{\mathbf{k}}(t) h_{\mathbf{K}}(t) \rangle = \frac{1}{a^2(t)} \int_{t_0}^t d\tilde{t}_2 \int_{t_0}^t d\tilde{t}_1 a(\tilde{t}_1) a(\tilde{t}_2) G_{\mathbf{k}}(t; \tilde{t}_1) G_{\mathbf{K}}(t; \tilde{t}_2) \langle \mathcal{S}(\mathbf{k}, \tilde{t}_1) \mathcal{S}(\mathbf{K}, \tilde{t}_2) \rangle. \quad (4.26)$$

Nuevamente, podemos separar la amplitud del espectro tensorial en una función que contiene la información de las funciones de transferencia y otra parte dependiente de la amplitud del espectro primordial:

$$P_h(k, t) = \int_0^\infty d\tilde{k} \int_{-1}^1 d\mu P_\psi(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|) P_\psi(\tilde{k}) \mathcal{F}(k, \tilde{k}, \mu; t), \quad (4.27)$$

donde la función $\mathcal{F}(k, \tilde{k}, \mu; t)$ es [126]:

$$\mathcal{F}(k, \tilde{k}, \mu; t) \equiv \frac{[1 - \mu^2]^2}{a^2(t)} \frac{k^3 \tilde{k}^3}{|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|^3} \int_{t_0}^t d\tilde{t}_2 d\tilde{t}_1 a(\tilde{t}_1) a(\tilde{t}_2) G_k(t; \tilde{t}_1) G_{\tilde{k}}(t; \tilde{t}_2) f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{t}_1) \times \\ \left[f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{t}_2) + f(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{t}_2) \right]. \quad (4.28)$$

En términos de las variables adimensionales $u = |\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|/k$ y $v = \tilde{k}/k$, y definiendo $x \equiv k\eta$ se obtiene finalmente [127]:

$$P_h(\eta, k) = 4 \int_0^\infty dv \int_{|1-v|}^{1+v} du \left(\frac{4v^2 - (1 + v^2 - u^2)^2}{4vu} \right)^2 I^2(v, u, x) P_\zeta(kv) P_\zeta(ku). \quad (4.29)$$

El espectro de las GW amplificado por el término de fuente ha sido reescrito en función de las variables $t = u + v - 1$ y $s = u - v$ [127]:

$$P_h(\eta, k) = 2 \int_0^\infty dt \int_{-1}^1 ds \left[\frac{t(2+t)(s^2-1)}{(1-s+t)(1+s+t)} \right]^2 I^2(t, s, x) P_\zeta(kv) P_\zeta(ku). \quad (4.30)$$

El promedio de la función $I(u, v, x)$ para la RDE es [128]:

$$\begin{aligned} \overline{I_{\text{RDE}}^2(t, s, x \rightarrow \infty)} &= \frac{288(-5 + s^2 + t(2+t))^2}{x^2(1-s+t)^6(1+s+t)^6} \left(\frac{\pi^2}{4}(-5 + s^2 + t(2+t))^2 \times \right. \\ &\quad \Theta(t - (\sqrt{3} - 1)) + (-(t-s+1)(t+s+1) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(-5 + s^2 + t(2+t)) \log \left| \frac{-2 + t(2+t)}{3-s^2} \right| \right)^2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

En la Fig. (4.1) se representa el integrando de la Eq. (4.30) en función de s y t . Debido al logaritmo que aparece en la función, el integrando tiene una parte imaginaria en el intervalo $t < \sqrt{3} - 1$. El máximo del integrando está en $t = \sqrt{3} - 1$, a partir de este valor la función decrece hasta $t = -1 + \sqrt{6-s^2}$, donde se hace cero debido al numerador del término jacobiano $t(2+t)(s^2-1)$. Además, la función es simétrica en s y es máxima en $s = 0$, por lo tanto la parte que más contribuye a la integral se encuentra en $t = \sqrt{3} - 1$ y $s = 0$, que equivale a $k/k_P = 2/\sqrt{3}$, donde k_P es el modo donde el espectro primordial es máximo.

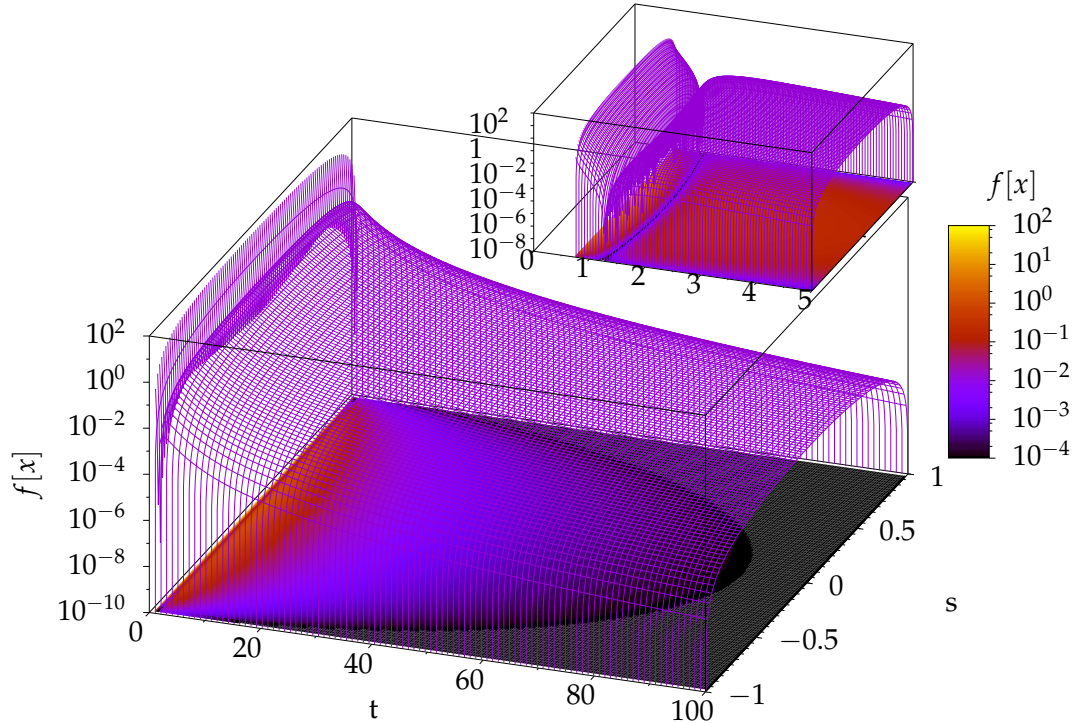


FIGURA 4.1: Representación del integrando de la Eq. (4.30): $f[x] = \left[\frac{t(2+t)(s^2-1)}{(1-s+t)(1+s+t)} \right]^2 \overline{I_{\text{RDE}}^2}$ en función de las variables s y t .

Como ejemplo, podemos tomar un espectro gaussiano para el espectro primordial [128, 129] cuya forma es:

$$P_{\zeta} = \frac{A_{\zeta}}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\log(k/k_p)}{2\sigma^2}}, \quad (4.32)$$

donde k_p es un modo pivote (modo donde el espectro es máximo), σ es la varianza de la función gaussiana y A_{ζ} es la amplitud del espectro primordial máxima (en $k = k_p$). De esta manera podemos calcular la densidad de energía de las ondas gravitacionales y estudiar el efecto que tiene la amplitud del espectro primordial y el índice espectral en la densidad de energía de los tensores. En la Fig. (4.2)(a) se muestran los espectros. En la Fig. (4.2)(b) obtenemos la densidad de energía de las GW en la actualidad suponiendo que el pico del espectro se produce en la RDE. En la Fig. (4.2)(c) hemos representado la derivada logarítmica de la densidad de energía de las GWs en función del modo k normalizado al modo máximo. Se puede observar que la derivada en el límite infrarrojo es igual para todos los espectros, y se ajusta a la aproximación $n_s^{GW} = 3 + 2/\log(k/k_p)$ dada en [130, 131], donde k_p es el modo pivote donde el espectro primordial es máximo.

4.2. Detección de ondas gravitacionales

El resultado de la Eq. (4.30) muestra la dependencia de la amplitud del espectro de las GWs con la amplitud de las fluctuaciones primordiales de curvatura. Si existe algún mecanismo que amplifique el espectro primordial en escalas no observadas en el CMB, existe la posibilidad de que el espectro generado a segundo orden por las fluctuaciones primordiales supere al espectro generado a primer orden. Esta amplificación dependerá de los modelos inflacionarios. Los nuevos detectores están preparados para observar las GWs con una sensibilidad de detección en función de la frecuencia. En la Fig. (4.3) se muestra la clasificación espectral de las GWs para algunos detectores. Por ejemplo, Advanced LIGO tiene una sensibilidad de $\Omega_{GW} \sim 10^{-9}$ a $f \sim 10^2$ Hz, BBO y DECIGO con $\Omega_{GW} \sim 10^{-17}$ a $f \sim 1$ Hz [132-138], y Cosmic Explorer (CE) [139, 116], Einstein Telescope (ET) con $\Omega_{GW} \sim 10^{-12}$ a $f \sim 10^2$ Hz [140, 141]. En la región de interferometría láser existen los proyectos de NEMO [142, 143] con $\Omega_{GW} \sim 10^{-12}$ a $f \sim 10^3$ Hz, Akatsu [144, 145] con $\Omega_{GW} \sim 10^{14}$ a $f \sim 100$ MHz y Holometer [146] con $\Omega_{GW} \sim 10^6$ a $f \sim 1$ MHz. En [147] se puede ver la lista completa. Experimentalmente se podrán explorar las $\Omega_{GW} \lesssim 10^{-12}$ hasta las frecuencias $\sim 10^3$ Hz, lo cuál permitirá sondear experimentalmente las incertidumbres asociadas a ese periodo temprano del universo. Nuestros modelos alcanzan la máxima amplitud del espectro primordial tensorial justo al final de inflación, alrededor, dependiendo de cada modelo concreto, de $\sim 10^6$ Hz. Sin embargo, como veremos más adelante, en las frecuencias $\sim 10^2$ Hz algunos modelos ya han comenzado a amplificar lo suficiente como para estar cerca del rango observacional, tanto en frecuencias como en sensibilidad de la señal. Tendremos en cuenta los límites observacionales en cuanto a la producción de GWs, ya que su contribución a la densidad de energía durante BBN está limitada. Además, la producción de GWs está asociada a la formación de PBHs, también sujetos a límites en cuanto a su producción.

Aquí estamos interesados en las GWs inducidas en la RDE. Con la finalidad de poder comparar nuestras predicciones con los detectores queremos la relación de la densidad de energía de las GWs, Eq. (3.73), con la frecuencia. La frecuencia es la

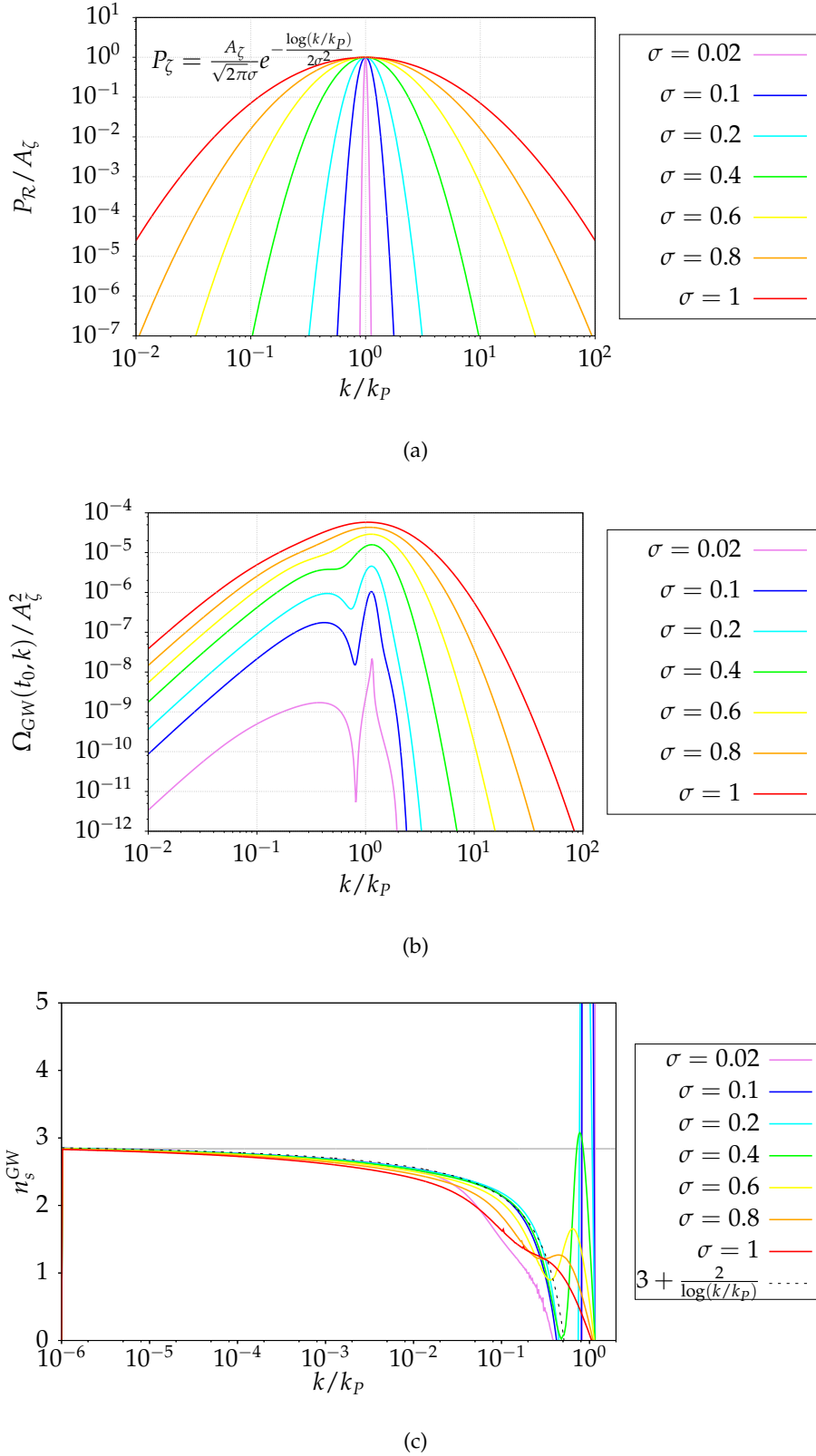


FIGURA 4.2: **(a)**: Espectro primordial en función de los modos normalizado a k_P . **(b)**: Densidad de energía de las GW en la actualidad suponiendo que el pico del espectro se produce en RDE. **(c)**: Índice espectral de la densidad de energía de las GWs.

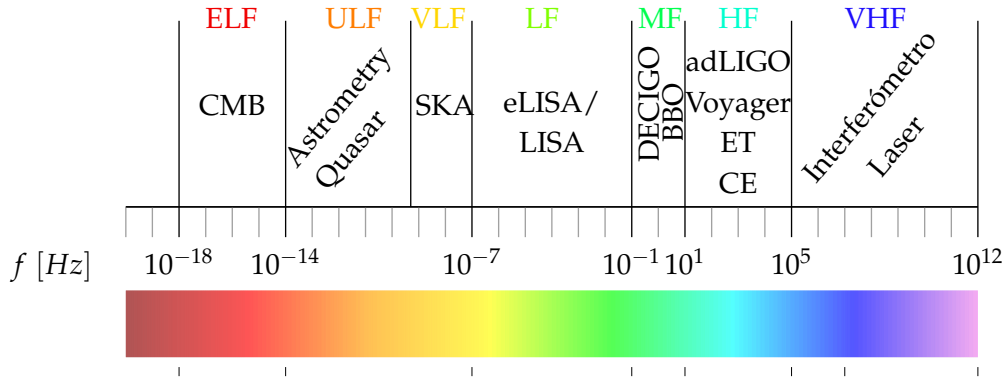


FIGURA 4.3: Clasificación espectral de las GWs (figura obtenida de [148]) y métodos de detección.

inversa de la longitud de onda comóvil, Eq. (2.30):

$$f = \frac{k}{2\pi}. \quad (4.33)$$

Expresando el modo k como aH , podemos expandir las escalas a través de las distintas épocas en las que la ecuación de estado se mantenga constante, $w = cte$ en la Eq. (2.24). Para la RDE, además podemos usar la Eq. (2.51), con lo que la expansión de las escalas se expresa en función de la evolución de los grados de libertad relativistas:

$$k_* = 7.87 \times 10^{20} \text{ Mpc}^{-1} \left(\frac{T_*}{10^{14} \text{ GeV}} \right) \left(\frac{106.75}{g_*} \right)^{1/3} \left(\frac{g_{S*}}{106.75} \right)^{1/2}, \quad (4.34)$$

donde el subíndice $*$ indica los valores en el momento del cruce del horizonte durante RDE. La Eq. (4.34) evaluada en el momento de recalentamiento indica que para los modelos con una $T_{RH} \sim 10^{14} \text{ GeV}$ y $g_* = 106.75$ se obtiene un modo $k_{RH} \sim \mathcal{O}(10^{21}) \text{ Mpc}^{-1}$, y los modos que entran después de recalentamiento serán menores. Dada la incertidumbre que tenemos sobre la ecuación de estado en la época de recalentamiento, extendemos las escalas a partir de la escala al final de esta fase, no siendo válida la Eq. (4.34) en las escalas de recalentamiento del universo. Además, la termalización está asegurada durante la RDE, pero no antes. La expresión en términos de frecuencia se obtiene a partir de las ecuaciones (4.33) y (4.34)

$$f_* = 2.65 \times 10^6 \text{ Hz} \left(\frac{T_*}{10^{14} \text{ GeV}} \right) \left(\frac{106.75}{g_{S*}} \right)^{1/3} \left(\frac{g_*}{106.75} \right)^{1/2}. \quad (4.35)$$

En la Tabla (4.1) se da la temperatura, grados de libertad y frecuencia asociada a los eventos en los que el universo sufre un cambio de fase. La frecuencia de cada evento ha sido obtenida usando la Eq. (4.35).

TABLA 4.1: Lista de eventos de cambios de fase. Número de grados de libertad relativistas g_* y entrópicos g_{*s} , para las distintas temperaturas, T , y frecuencias f_* . Obtenida de [25].

Evento	T	g_*	g_{*s}	f_* [Hz]
Aniquilación de los quarks $t\bar{t}$	<173.3 GeV	106.75	106.75	$< 4.6 \times 10^{-6}$
Aniquilación del bosón Higgs	<125.6 GeV	96.25	96.25	$< 3.3 \times 10^{-6}$
Aniquilación de bosones Z^0	<91.2 GeV	95.25	95.25	$< 2.4 \times 10^{-6}$
Aniquilación de bosones W^+W^-	<80.4 GeV	92.25	92.25	$< 2.1 \times 10^{-6}$
Aniquilación de quarks $b\bar{b}$	<4190 MeV	86.25	86.25	$< 1.1 \times 10^{-7}$
Aniquilación de leptones $\tau^+\tau^-$	<1777 MeV	75.75	75.75	$< 4.4 \times 10^{-8}$
Aniquilación de quarks $c\bar{c}$	<1290 MeV	72.25	72.25	$< 3.2 \times 10^{-8}$
Transición QCD	150–214 MeV	61.75	61.75	$(3.6 - 5.2) \times 10^{-9}$
Aniquilación de mesones $\pi^+\pi^-$	<139.6 MeV	17.25	17.25	$< 2.7 \times 10^{-9}$
Aniquilación de mesones π^0	<135.0 MeV	15.25	15.25	$< 2.6 \times 10^{-9}$
Aniquilación de leptones $\mu^+\mu^-$	<105.7 MeV	14.25	14.25	$< 2.0 \times 10^{-9}$
Desacoplo de los neutrinos	<800 keV	10.75	10.75	$< 1.4 \times 10^{-11}$
Aniquilación de leptones e^+e^-	<511 keV	6.863	7.409	$< 8.3 \times 10^{-11}$
		3.363	3.909	

La densidad de energía de las GWs inducidas es obtenida usando la Eq. (3.72) donde el espectro es calculado con la Eq. (4.30). Esta densidad es principalmente inducida en las escalas cercanas al modo que cruza el horizonte. Expresando el parámetro de densidad de energía de las GW como la fracción de la densidad de energía y la densidad total:

$$\Omega_{GW}(t, k) = \frac{\rho_{GW}(t, k)}{\rho_T(t)}. \quad (4.36)$$

La densidad de energía de las GW decae con la expansión del universo como $\rho_{GW} \propto a^{-4}$. En RDE el parámetro de densidad se mantiene constante $\Omega_{GW} = cte$ salvo en los cambios de fase por los que atraviesa el universo, mientras que en MDE decae como $\Omega_{GW} \sim 1/a$, siendo necesario la propagación a lo largo de la historia térmica [149, 120, 150, 26, 151]. Teniendo estos efectos en cuenta, podemos relacionar el parámetro de densidad en el momento en que la GW entra en el horizonte,

con la densidad que ha sobrevivido hasta el presente:

$$\begin{aligned}\Omega_{GW}(t_0, k) &= \frac{\rho_{GW}(t_0, k)}{\rho_{GW}(t_{in}, k)} \frac{\rho_{GW}(t_{in}, k)}{\rho_R(t_{in})} \frac{\rho_R(t_{in})}{\rho_R(t_0)} \frac{\rho_R(t_0)}{\rho_T(t_0)} \\ &= \Omega_{GW}(t_{in}, k) \frac{g_*(T_{in})}{g_*(T_{EQ})} \left(\frac{g_{*s}(T_{EQ})}{g_{*s}(T_{in})} \right)^{4/3} \Omega_{R,0},\end{aligned}\quad (4.37)$$

donde el subíndice *in* hace referencia a momento en que el modo entra en el horizonte.

Una vez conocida la evolución de $\Omega_{GW}(t, k)$, hemos de tener en cuenta los límites impuestos por medidas de tiempo de púlsar, experimentos con interferómetro láser y la nucleosíntesis estándar de Big Bang. Los púlsares de milisegundos tienen períodos de rotación muy estables, por lo que nos pueden dar información sobre la métrica existente entre el observador y el púlsar, y por consiguiente, información de las GWs estocásticas [152]. En la Fig. (4.4) se muestran los límites superiores del European Pulsar Timing Array (EPTA), y la zona futura de SKA [153]. Los experimentos ya existentes de interferometría láser a su vez imponen límites superiores [154-157, 135, 134] ya que no han detectado ningún fondo estocástico. Por último, si en BBN existiera una componente adicional de radiación las reacciones entre neutrones y protones se desacoplarían antes del baño térmico en comparación con el escenario actual. Dadas las abundancias de elementos ligeros actuales, se puede limitar el contenido extra de radiación para que no exista una sobre-producción de elementos ligeros. Estos límites imponen la condición para $\Omega_{GW}(t_0, k) h_0^2 < 1.8 \times 10^{-6}$ al 95 % nivel de confianza [128].

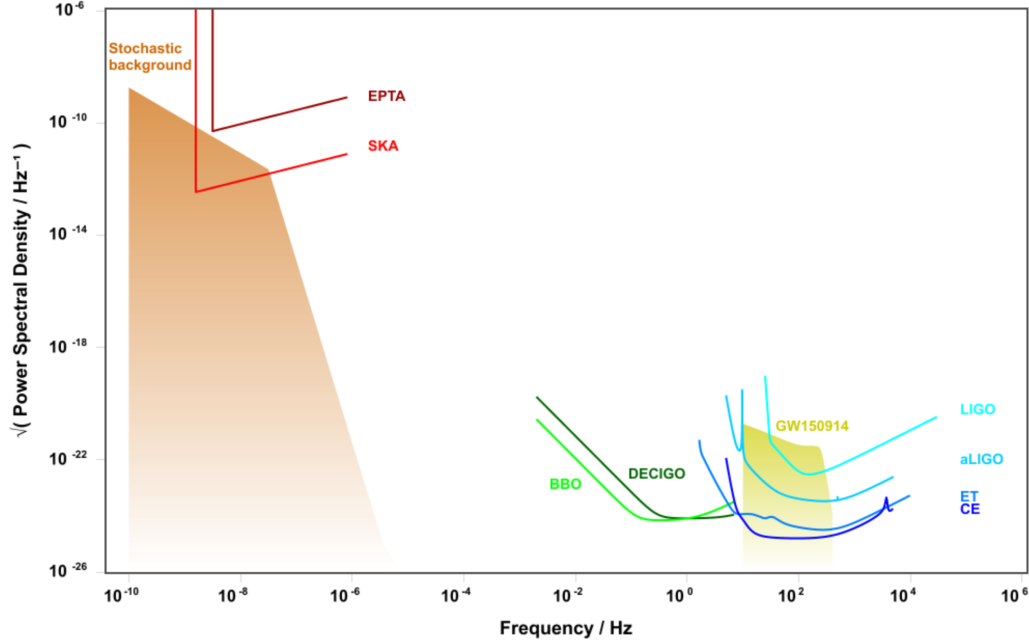


FIGURA 4.4: Sensibilidad de algunos detectores (espectro de densidad de potencia) en función de la frecuencia, junto con la estimación del fondo estocástico de GWs en las escalas del CMB y la primera detección de GWs producidas por la fusión de dos agujeros negros por LIGO. Figura generada gracias a la página web:

<http://gwplotter.com/>

4.3. Agujeros negros primordiales

La formación de agujeros negros se produce cuando la densidad de materia colapsa gravitacionalmente superando un valor umbral, conocido como la densidad crítica δ_c [15, 16]. Cuando el colapso gravitatorio es producido por las perturbaciones primordiales de densidad que entran en el horizonte después de inflación, hablamos de agujeros negros primordiales. Hemos visto que inflación genera perturbaciones de densidad que salen del horizonte hasta que inflación acaba. Estas perturbaciones volverán a entrar en el Universo durante los periodos posteriores, por lo que dependiendo de la amplitud de las perturbaciones se podrían formar PBHs. Asumiendo una estadística homogénea e isotrópica para las perturbaciones generadas durante inflación, tendremos en el espacio real la siguiente distribución de probabilidad gaussiana:

$$\mathcal{P}(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_\delta^2}} d\delta, \quad (4.38)$$

donde σ_δ^2 corresponde al momento de segundo orden del contraste de densidad, que a su vez es la función de correlación de dos puntos, Eq. (3.69), evaluada en $\xi_\delta(\mathbf{r} = 0)$. La distribución de materia está dada por el contraste de densidad $\delta\rho$ definido en la Eq. (3.67). En función del espectro primordial adimensional, la varianza es igual a:

$$\sigma_\delta^2 = \langle \delta(\mathbf{x})^2 \rangle = \int P_\delta(k) d \log k. \quad (4.39)$$

El espectro primordial de densidad depende solamente del módulo de k , por lo que la varianza σ_δ^2 y la distribución de probabilidad gaussiana $\mathcal{P}(\delta_k)$ dependen solamente k .

En la práctica, la varianza no está definida en todas las escalas. Filtramos el campo de densidad a través de una función de filtro suave, de manera que la varianza está definida para los modos dentro del horizonte. Parametrizamos las escalas del filtro con la longitud característica $R = 1/aH$ porque el proceso de formación de los PBHs es causal, esto es, no pueden formarse PBHs con una escala R mayor al tamaño del horizonte. En el espacio real y en el espacio de momentos, usamos el filtro gaussiano:

$$W(x/R) = \frac{L^3}{(2\pi)^{3/2}R^3} e^{-x^2/2R^2}, \quad \tilde{W}(kR) = \frac{1}{L^3} e^{-k^2R^2/2}, \quad (4.40)$$

donde la condición de normalización de la función ventana en el espacio real implica $L = 1$.

La ventaja de una función ventana es que la transformada de Fourier de la convolución en el espacio real es el producto de las transformadas de Fourier. La Eq. (4.39) suavizada es:

$$\sigma_\delta^2 = \int P_\delta(k) \tilde{W}(kR)^2 d \log k. \quad (4.41)$$

Además, podemos expresar la varianza con el espectro primordial de curvatura, usando la Eq. (3.71):

$$\sigma_\delta^2 = \frac{4(1+\omega)^2}{(5+3\omega)^2} \int (kR)^4 P_{\mathcal{R}}(k) \tilde{W}(kR)^2 d \log k. \quad (4.42)$$

El cálculo de σ_δ se realiza numéricamente. Sin embargo, para el caso en que n_s se mantiene constante y $n_s > -3$ se encuentra la siguiente solución analítica [158]:

$$\sigma_\delta^2 = \frac{2(1+\omega)^2}{(5+3\omega)^2} \Gamma\left[\frac{3+n_s}{2}\right] \left(\frac{1}{kR}\right)^{3+n_s} P_{\mathcal{R}}(k), \quad (4.43)$$

donde se ha usado la parametrización del espectro dada en la Eq. (3.66).

Siguiendo el modelo de colapso gravitatorio de la teoría de Press-Schechter [159], la probabilidad de que una zona sobre-densa colapse está dada por la fracción inicial de masas $\beta(M)$. Inicialmente, denotamos con ρ_c a la densidad crítica, que corresponde al umbral de sobre-densidad mínimo necesario para que el colapso gravitatorio forme PBHs. Para una distribución gaussiana y asumiendo que la única fuente de producción de PBHs son las fluctuaciones primordiales de densidad, la fracción inicial de masas corresponde a la integración de la distribución de probabilidad, Eq. (4.38), desde ρ_c :

$$\beta(M_{PBH}) \equiv \frac{\rho_{PBH}}{\rho_T} = 2 \int_{\delta_c}^{\infty} \mathcal{P}(\delta) d\delta = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta} \int_{\delta_c}^{\infty} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_\delta^2}} d\delta, \quad (4.44)$$

$$= \text{Erfc}\left[\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_\delta}\right], \quad (4.45)$$

siendo $\text{Erfc}[x]$ la función error complementaria. En la literatura podemos encontrar diferentes expresiones de $\beta(M)$, por ejemplo, en [129] las Eqs. (4.44) y (4.45) incluyen, al igual que aquí, el factor 2, y aparecen con un factor γ en [160]. Este factor 2 corresponde al conocido *factor de engaño*, que es añadido al formalismo de Press-Schechter. El formalismo Press-Schechter predice que para una longitud característica $R \rightarrow 0$ (en $k \rightarrow \infty$ y $M_{PBH} \rightarrow 0$), la varianza $\sigma_\delta \rightarrow \infty$, por lo tanto $\beta(M_{PBH}) \rightarrow 1/2$, esto es, la mitad de la densidad de energía total del universo está contenida en PBHs. Este hecho parece consistente con que sólo las regiones que superan el umbral de densidad forman objetos colapsados, pero lo que no tiene en cuenta es la probabilidad de que existan zonas con densidades menores a δ_c que formen parte de una estructura mayor con $\delta > \delta_c$, perteneciendo por lo tanto, a regiones donde se produce el colapso. El *factor de engaño* se introduce para asegurar que la probabilidad condicionada para PBHs con masa M_{PBH} positiva es $\mathcal{P}(\delta > \delta_c | M_{PBH} > 0) = 1$ [161, 162]. Aquí, usaremos la definición dada en la Eq. (4.44) que incluye el factor 2. La dependencia exponencial de $\beta(\sigma_\delta)$ se traduce en que la fracción inicial de masas es un cálculo muy fino, por lo que se pueden obtener variaciones en β de varios órdenes de magnitud con variaciones pequeñas de σ , como se aprecia en la Fig. (4.5). La densidad crítica ha sido revisada en [163, 164], aquí usaremos la última revisión $\delta_c = 0.4135$ [165]. La densidad crítica es dependiente de la ecuación de estado, como por ejemplo durante la transición QCD [166].

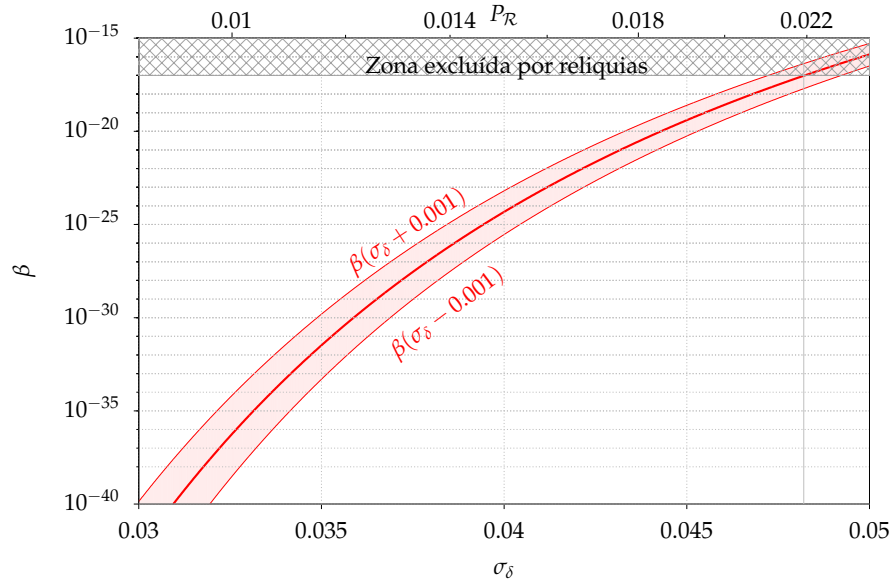


FIGURA 4.5: La fracción inicial de masas en función de la varianza de las perturbaciones de densidad, Eq. (4.45) con una densidad crítica $\delta_c = 0.4135$, corresponde a la curva central. Por encima y debajo de esta curva se muestran las curvas correspondientes a un error de 0.001 en el valor de σ_δ . En el eje superior se muestra el valor del espectro primordial de curvatura para la aproximación del índice espectral constante para $n_s = 1.3$. Por último, la zona sombreada gris corresponde a la zona excluida por la formación de reliquias primordiales.

Para el caso de modelo sencillo como es un espectro gaussiano mostrado en la Fig. (4.2), hemos calculado la evolución de la varianza del espectro primordial de curvatura (Fig. (4.6)(a)) y de la fracción inicial de masas (Fig. (4.6)(b)). En todos los espectros la fracción inicial de masas decae exponencialmente para los modos $k/k_p \lesssim 0.1$ y $k/k_p \gtrsim 10$, por lo que la producción de PBHs es aproximadamente instantánea, es decir, ocurre alrededor de la frecuencia donde el espectro es máximo.

Podemos relacionar la fracción inicial de masas con la escala k_* del universo, con la temperatura y con la masa. Inicialmente suponemos que la masa de un agujero negro M es igual a la masa del horizonte, M_H , multiplicada por el factor γ que depende del colapso gravitatorio, con $0 < \gamma < 1$. Aquí usamos valor de $\gamma \simeq \omega^{3/2} \simeq 0.2$ para la RDE [163]. Si las fluctuaciones primordiales de densidad amplifican el espectro al final de inflación, la acreción de materia es más efectiva al principio del periodo post-inflacionario.

La masa del horizonte corresponde a la integración de la densidad de energía contenida dentro del horizonte comóvil, usando la Eq. (2.26) y la Eq. (2.15):

$$M_{PBH} = \gamma M_H = \gamma \frac{4}{3} \pi \frac{\rho}{H^3} = 4\pi\gamma \frac{m_{Pl}^2}{H}. \quad (4.46)$$

La masa de los agujeros negros que se forman durante RDE puede ser reescrita en función de la escala y de los grados de libertad. Haciendo uso de la conservación de la entropía, Eq. (2.51), relacionamos la masa del PBH M_{PBH} , que se forma a una temperatura del universo T_f y escala k_f , propagando las ecuaciones hasta la igualdad radiación-materia, denotado por el subíndice EQ:

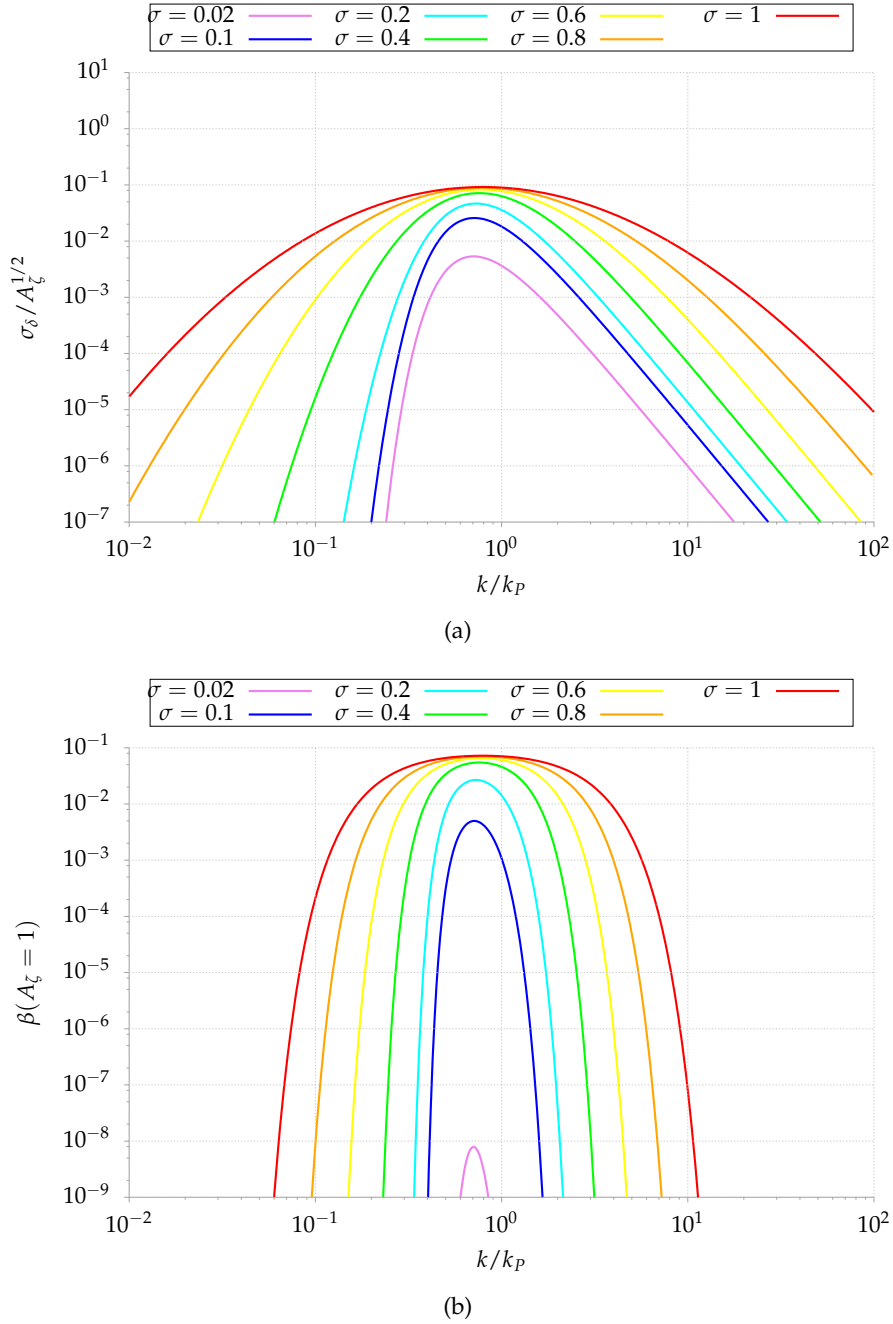


FIGURA 4.6: **(a)**: Varianza del espectro primordial de curvatura. **(b)**: Fracción inicial de masas. Ambos en función de los modos normalizados a k_p . Los espectros corresponden a los de la Fig. (4.2).

$$M_{PBH} = \gamma M_{H(EQ)} \left(\frac{k_{EQ}}{k_*} \right)^2 \left(\frac{g_*(T_f)}{g_*(T_{EQ})} \right)^{1/2} \left(\frac{g_{s*}(T_{EQ})}{g_{s*}(T_f)} \right)^{2/3}, \quad (4.47)$$

$$\simeq 6.14 \times 10^3 g \frac{\gamma}{0.2} \left(\frac{106.75}{g_*(T_f)} \right)^{1/6} \left(\frac{10^{21} \text{Mpc}^{-1}}{k_*} \right)^2, \quad (4.48)$$

donde hemos expresado la Eq. (4.48) en las escalas típicas para el final de inflación,

por lo que esperamos que si nuestros modelos amplifican el espectro justo al final de inflación y obtenemos agujeros negros con una fracción de masas relevantes, se produzcan PBHs en un rango de masas alrededor de $\mathcal{O}(10^4)$ g. Después de la formación de los PBHs, y sin tener en cuenta la evaporación ni la acreción de masa, podemos propagar la fracción de masas a través de las distintas épocas. En este caso, los PBHs se comportan como materia, por lo que diluyen como $\propto a^{-3}$ [167]:

$$\beta(M_{PBH}) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\Omega_{PBH,0}}{\Omega_{R,0}^{3/4}} \left(\frac{g_*}{g_{*0}} \right)^{1/4} \left(\frac{M_{PBH}}{M_0} \right)^{1/2}, \quad (M_{PBH} \gtrsim 10^{15} \text{ g}), \quad (4.49)$$

donde M_0 es la masa del horizonte actual, y $\Omega_{PBH,0} \equiv \rho_{PBH,0}/\rho_c$.

Además, el tiempo de evaporación de los PBHs es [168]:

$$t_{ev}(M_{PBH}) \sim \frac{G^2 M_{PBH}^3}{\hbar c^4} \sim 5.17 \times 10^{-18} \text{ s} \left(\frac{M_{PBH}}{10^4 \text{ g}} \right)^3. \quad (4.50)$$

Para la edad actual del universo dada por Planck $t_0 = 13.801 \pm 0.024 \text{ Gyr}$, los PBHs con masas inferiores a 10^{15} g han tenido tiempo para evaporarse debido a la radiación de Hawking. Así mismo, los PBHs con $M_{PBH} < 10^{10}$ g han tenido tiempo suficiente para haberse evaporado antes de BBN.

Los PBHs con un orden de masas $\mathcal{O}(10^4)$ g no contribuyen a la densidad de materia oscura que observamos en la actualidad (lo cual ocurre para $M > 5 \times 10^{14}$ g) [169]:

$$\beta(M_{PBH}) = 1.57 \times 10^{-17} \left(\frac{M_{PBH}}{10^{15} \text{ g}} \right)^{1/2} \Omega_{PBH,0} h^2. \quad (4.51)$$

Sin embargo, los efectos de PBHs sí pueden ser relevantes en el universo temprano. Los límites a la fracción inicial de masas han sido estudiados en [170, 171]. Existen diferentes límites para las abundancias en cada rango de masas [172]. Aquí estamos interesadas en los efectos que pueden darse en la producción de PBHs con $\mathcal{O}(10^3 - 10^5)$ g, tales como en la bariogénesis, BBN y reliquias. La emisión de los PBHs varía el cociente entre el número de bariones y fotones, n/p , por lo que no pueden exceder un cierto valor. Estos límites, que afectan también a las abundancias de ${}^4\text{He}$, se imponen sin embargo en un rango de masas de $10^6 \text{ g} < M < 10^9 \text{ g}$ [173]. Los fotones que emiten los PBHs con $M < 10^9$ g termalizarán con el baño térmico y además contribuirán a la entropía del universo. La evaporación de los agujeros negros es motivo de estudio actual cuando sus masas son del orden de la masa de Planck. El principio de incertidumbre generalizado (del inglés generalized uncertainty principle **GUP**) [174] tiene como consecuencia que el horizonte no esté bien definido en longitudes menores que la longitud de Planck, L_{Pl} , de manera que los PBHs cuando alcanzan masas del orden de la masa de Planck ($M_{Pl} = 2.19 \times 10^{-5}$ gr) dejan de emitir por radiación de Hawking, dejando reliquias de $R_*(M) \sim \hbar/M$, en lugar de tener PBHs con $R_*(M) = 2GM$ como tenemos para PBHs con $M > M_{Pl}$ [175]. Estas reliquias podrían contribuir a la densidad de materia oscura actual del universo [176].

Los límites en la producción de PBHs se muestran en la Fig. (4.7) (figura obtenida de [177]). De izquierda a derecha, los límites corresponden a que la producción de reliquias no puede superar la densidad total, la producción de entropía no puede producir una cantidad de radiación que afecte al desarrollo de BBN, ni en la producción de helio ni deuterio. Así mismo, si los PBHs se encuentran embebidos en

nuestra galaxia formando cúmulos, contribuiría a la producción de rayos- γ , los cuales están limitados por las observaciones EGRET del fondo estocástico de fotones γ de nuestra galaxia [178]. El límite de la densidad es debido a la acotación que tiene la fracción de masas usando la Eq. (4.51). Mostramos además la masa mínima de producción de PBHs, correspondiente a una masa $\sim 1\text{g}$ para una temperatura de recalentamiento $T_{RH} = 10^{16}\text{ GeV}$. Siguiendo el ejemplo llevado a cabo en el desarrollo, mostramos también la escala mínima/máxima para la masa/número de onda para el caso en que la $T_{RH} = 10^{14}\text{ GeV}$. La escala σ_δ corresponde a una densidad crítica $\delta_c = 0.4135$.

Los modelos inflacionarios que amplifican el espectro justo al final de inflación, se verán limitados fundamentalmente por las reliquias. La estimación del límite en la formación de reliquias con masa μM_{Pl} , donde el rango de $\mu = 1 - 10^3$, para la fracción inicial de masas [177]:

$$\beta < 10^{-27} \mu^{-1} \left(\frac{M}{M_{\text{Pl}}} \right)^{3/2}, \quad (4.52)$$

para las masas entre los siguientes valores:

$$\left(\frac{T_{\text{Pl}}}{T_{\text{RH}}} \right)^2 M_{\text{Pl}} < M < 10^{11} \mu^{2/5} M_{\text{Pl}}. \quad (4.53)$$

La Eq. (4.52) limita la producción de PBHs con masas $M = 10^4\text{g}$ que dejan reliquias con $\mu = 10^3$ a una fracción inicial de masas $\beta < 10^{-17}$. Este límite se impone para que la contribución de la energía de los PBHs no supere la densidad total, por lo que cualquier modelo ha de respetar esta condición. Podemos utilizar la Eq. (4.45) para encontrar que $\beta < 10^{-17}$ siempre y cuando $\sigma_\delta < 0.049$ (para $\delta_c = 0.4135$). Esta estimación la podemos trasladar al caso en que el espectro se comporta con un $n_s = \text{cte}$ usando la Eq. (4.43), de manera que la existencia de reliquias limita la amplitud máxima del espectro primordial en $P_{\mathcal{R}}^{\text{max}} = 0.022 - 0.024$ para $n_s = 1.3 - 1.0$.

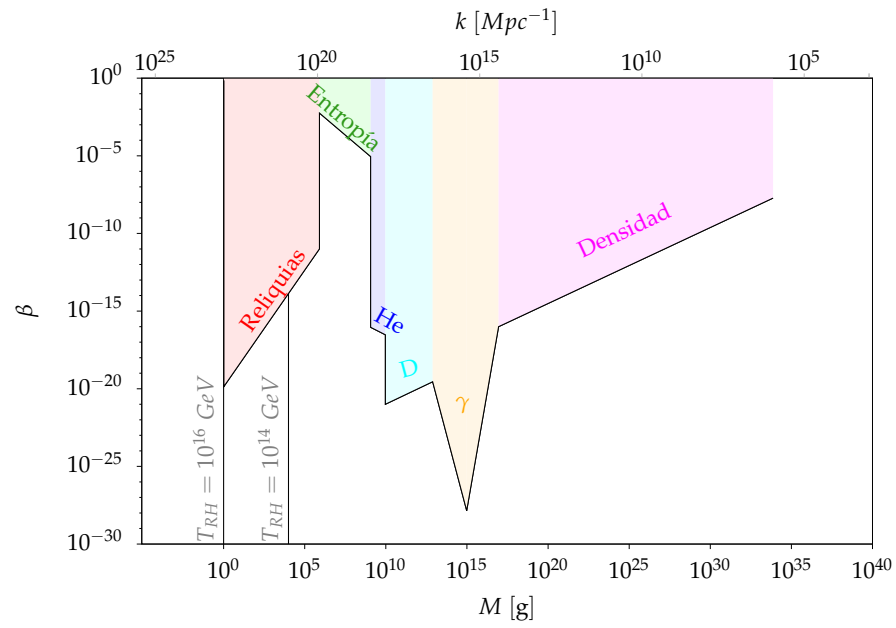


FIGURA 4.7: Límites en la producción de PBHs (figura obtenida de [177]). De izquierda a derecha, los límites corresponden a **reliquias**, **entropía**, **helio**, **deuterio**, rayos- γ y **densidad**.

Capítulo 5

Modelos de inflación

“Mi intención es demostrar que la máquina celestial no es como un ser divino, sino como un reloj.”

Johannes Kepler

En las secciones anteriores hemos mostrado todo lo necesario para el cálculo de la densidad de energía de las GW presente en la actualidad en el universo, así como la fracción inicial de masas de los PBHs. Con el objetivo de determinar si los modelos cosmológicos pueden dar resultados relevantes tanto en lo referente a las GWs como en PBHs, primero hemos calculado semianalíticamente la evolución del campo φ , del cociente disipativo Q , etc.

Existen diferentes propuestas sobre la naturaleza del campo responsable de inflación. Por ejemplo, destacamos que hay modelos previos que no requieren incluir nuevos campos escalares en el SM y que son capaces de producir las perturbaciones primordiales a través de un acoplo no-mínimo del campo de Higgs a la gravedad [179]. Por otro lado, hay modelos inflacionarios con campos vectoriales como en [180, 181], pero parece razonable la elección de campos escalares porque no rompen la invarianza Lorentz cuando adquieren un valor esperado en el vacío.

Vamos a estudiar modelos de inflación templada. Los modelos inflacionarios que vamos a ver están diferenciados en la manera en que inflación termina. Veremos dos casos de inflación templada: uno en el que el campo φ se mueve lentamente a través de la pérdida de energía potencial, y en el que hacia el final de inflación se acelera; y otro en el que el final de inflación se produce un cambio de fase, para lo cual se necesitan dos campos escalares. En el primer tipo de potencial, estudiaremos inflación caótica con $V \propto \varphi^n$, que representa un campo escalar auto-interactuante para $n = 4$, mientras que en el segundo caso estudiaremos el potencial de tipo híbrido con los campos σ y φ [182].

En esta sección veremos ambos tipos de potencial con un coeficiente disipativo dado en la Eq. (3.106), estimando si existen modelos con un $\kappa = cte$ compatibles con las observaciones y que a su vez amplifiquen el espectro lo suficiente para poder detectar las GWs producidas. Posteriormente, seleccionaremos los modelos que dan resultados compatibles para $\kappa = cte$ e introduciremos una disipación más realista que será dependiente de la masa efectiva de las partículas involucradas así como de las constantes de acoplo que definen las interacciones.

Simplificando las ecuaciones de evolución a un recalentamiento instantáneo (Eq. (3.78)), hemos visto en el Capítulo (2) la relación de las escalas k con el potencial del modelo inflacionario, y que depende también del valor al final de inflación y del número de e-folds, (Eq. (3.78)). En la Eq. (3.120) hemos llegado a la relación del cociente disipativo $Q = Y_\varphi/3H$ con el número de e-folds. Para obtener el espectro

primordial primero necesitamos conocer las funciones modo creciente/decreciente, $G[Q]$. Una vez conocido $G[Q]$, en las siguientes secciones concretaremos la evolución para cada potencial.

5.1. Funciones modo creciente/decreciente

La amplificación del espectro primordial de curvatura dado en la Eq. (3.105) depende de la función denominada modo creciente/decreciente. La forma funcional de esta función ha sido obtenida para distintos $\kappa = cte$ en [109-112, 183]:

$$G_{-1}(Q_*) = \frac{0.78Q^{0.2} + 1}{0.088Q^{1.4} + 1} \quad , \quad \kappa = -1 \quad , \quad (5.1)$$

$$G_{0.15}(Q_*) = \frac{0.45Q^{1.08} + 1}{0.34Q^{0.83} + 1} \quad , \quad \kappa = 0.15 \quad , \quad (5.2)$$

$$G_1(Q_*) = 0.0185Q^{2.315} + 0.335Q^{1.364} + 1 \quad , \quad \kappa = 1 \quad , \quad (5.3)$$

$$G_2(Q_*) = 1.61Q^{1.865} + 0.21Q^{3.69} + 1 \quad , \quad \kappa = 2 \quad , \quad (5.4)$$

$$G_3(Q_*) = 4.981Q^{1.946} + 0.127Q^{4.33} + 1 \quad , \quad \kappa = 3 \quad . \quad (5.5)$$

Las funciones de $G_\kappa(Q)$ mostradas en las Eqs. (5.1–5.5) son suficientes para los modelos en los que el coeficiente disipativo se mantiene constante. Sin embargo, para el estudio de los modelos inflacionarios en los que el coeficiente disipativo varía, será necesario una sola función que describa el modo creciente/decreciente en función de Q y κ y que denotamos como $G(Q, \kappa)$.

La función $G_\kappa(Q)$ depende de κ y de la variación de Q a lo largo de inflación. Tanto κ como Q dependen del modelo de interacción que domina la evolución durante inflación. Por otro lado, la normalización del espectro varía según sea la forma $G_\kappa(Q)$. Sin embargo, en la práctica, $G_\kappa(Q)$ depende sólo del valor de Q y κ , por lo que en el cálculo de $G_\kappa(Q)$ se ha mantenido el valor del auto-acoplo para un potencial del tipo $V = \lambda m_{\text{pl}}^{4-n} \varphi^n$ con $\lambda = 10^{-14}$ constante en todo el cálculo. En cada iteración se ha calculado numéricamente la amplitud del espectro primordial para diferentes valores de κ en $Y_\varphi = C_T T^\kappa$ en un potencial cuártico. Las ecuaciones integradas incluyen el ruido estocástico térmico (Eq. (3.102)). La constante C_T es la generalización de los acoplos del modelo. A medida que C_T aumenta la disipación es mayor, y obtendremos distintos valores de Q_* en el momento en que cruza el horizonte para distintos valores de C_T . La función $G_\kappa(Q)$ es el resultado de dividir el resultado numérico entre la función del espectro primordial dado en la Eq. (3.105) donde se ha sustituido $G_\kappa(Q) = 1$.

Para encontrar una única función de $G(Q, \kappa)$ válida para todo valor de κ se ha extendido la lista de las Eqs. (5.1–5.5) para obtener el comportamiento de la función de una forma más precisa. Destacamos aquí que validez de la función $G(Q, \kappa)$ está limitada por la variación de κ con respecto de la temperatura, es decir, $G(Q, \kappa)$ es válida para cualquier $\kappa = cte$ comprendido en el intervalo $[-1, 4]$. Si κ varía podremos encontrar diferencias en la forma funcional del modo creciente/decreciente. Para una forma funcional dada en las ecuaciones siguientes:

$$G(Q, \kappa) = \left(1 + e^{\alpha_s} Q^{\beta_s} + e^{\alpha_w} Q^{\beta_w}\right)^\kappa \quad , \quad \kappa > 0 \quad , \quad (5.6)$$

$$G(Q, \kappa) = \frac{(1 + a_0 Q^{a_1})^{a_5}}{(1 + a_2 Q^{a_3})^{a_4}} \quad , \quad \kappa < 0 \quad , \quad (5.7)$$

se han obtenido los coeficientes para cada valor de $\kappa = cte$ dados en las Tabla (5.1) para $\kappa > 0$ y Tabla (5.2) para $\kappa < 0$ [184]. Posteriormente, se ha obtenido un ajuste de los coeficientes en función de κ , dados en las Eqs. (5.8–5.11) para $\kappa > 0$, y en las Eqs. (5.12–5.17) para $\kappa < 0$. La comparación entre las funciones de partida $G_\kappa(Q)$ para $\kappa = cte$ y la aproximación resultante para κ variable $G(Q, \kappa)$ se muestra en la Fig. (5.1).

TABLA 5.1: Coeficientes del modo creciente de la Eq. (5.6) para $\kappa = cte$:

κ	α_w	β_w	α_s	β_s
0.5	-2.994	1.742	-10.17	3.582
1	-1.090	1.365	-4.580	2.528
1.5	-0.2944	1.244	-4.504	2.504
2	0.2383	0.9325	-4.068	2.360
2.5	0.4068	0.8336	-4.051	2.362
3	0.5352	0.6487	-3.526	2.241
3.5	0.8609	0.5175	-3.384	2.170

TABLA 5.2: Coeficientes del modo decreciente de la Eq. (5.7) para $\kappa = cte$:

κ	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-1.2	3.38927	0.8263	0.728255	0.658566	4.13777	1.63969
-1.	3.19894	0.792654	0.597087	0.623549	4.53933	1.55994
-0.8	3.05106	0.754694	0.570253	0.593948	4.69296	1.56168
-0.6	2.74044	0.730729	0.613238	0.58688	4.44493	1.63969
-0.4	3.01116	0.729725	0.706118	0.577796	3.53671	1.37512
-0.2	3.95336	0.73537	1.14688	0.580395	2.17457	1.04127
-0.1	7.54806	0.819329	2.01698	0.610567	1.14412	0.587546

$$\alpha_w(\kappa) = -1.486 + 0.7091\kappa, \quad (5.8)$$

$$\beta_w(\kappa) = 1.711 - 0.3499\kappa, \quad (5.9)$$

$$\alpha_s(\kappa) = -5.168 + 0.5105\kappa, \quad (5.10)$$

$$\beta_s(\kappa) = 2.692 - 0.1472\kappa, \quad (5.11)$$

$$a_0 = 18.55 + 171.01\kappa + 765.78\kappa^2 + 1758.7\kappa^3 + 2158.7\kappa^4 + 1338.8\kappa^5 + 328.7\kappa^6, \quad (5.12)$$

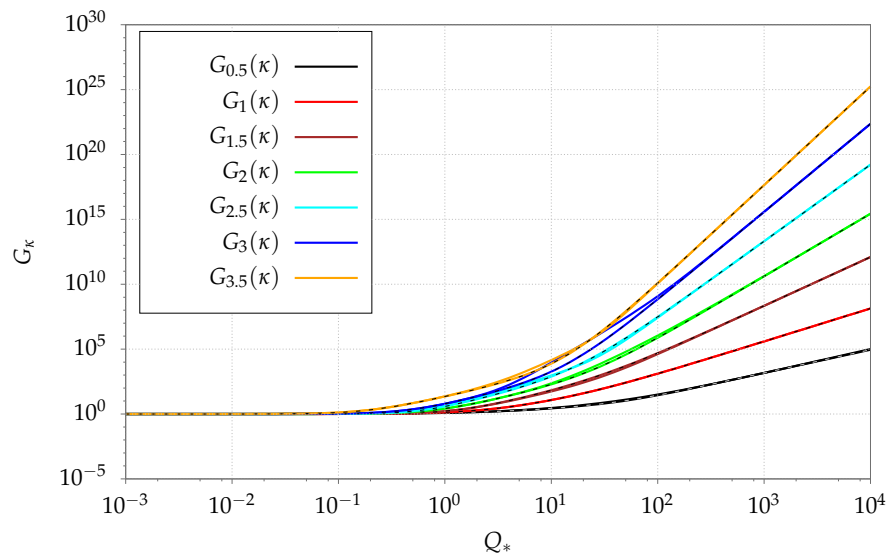
$$a_1 = 1.1094 + 4.619\kappa + 21.647\kappa^2 + 50.429\kappa^3 + 61.783\kappa^4 + 37.797\kappa^5 + 9.098\kappa^6, \quad (5.13)$$

$$a_2 = 4.0275 + 28.686\kappa + 103.74\kappa^2 + 199.28\kappa^3 + 210.14\kappa^4 + 114.8\kappa^5 + 25.45\kappa^6, \quad (5.14)$$

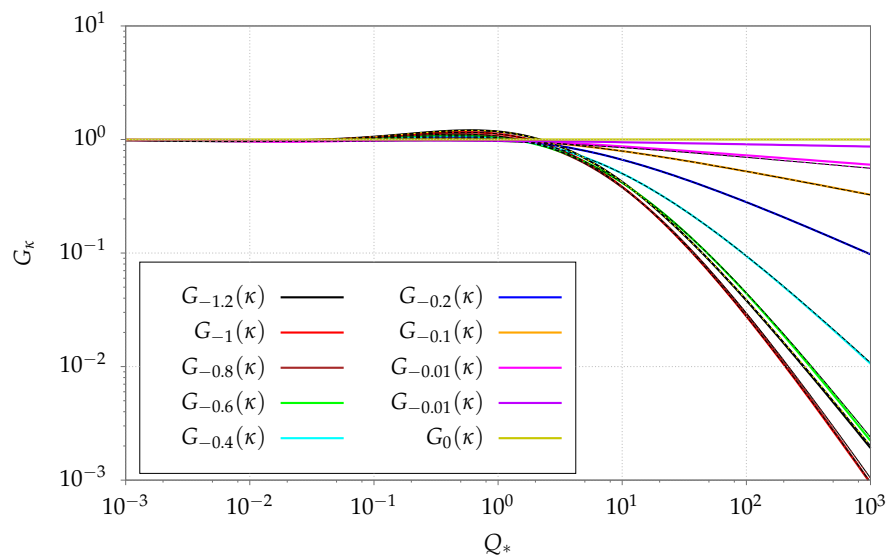
$$a_3 = 0.6826 + 0.9986\kappa + 3.151\kappa^2 + 3.7451\kappa^3 + 0.563\kappa^4 - 1.925\kappa^5 - 0.95376\kappa^6, \quad (5.15)$$

$$a_4 = \kappa(-9.9 + 34.48\kappa + 250.17\kappa^2 + 662.93\kappa^3 + 880.1\kappa^4 + 571.9\kappa^5 + 144.43\kappa^6), \quad (5.16)$$

$$a_5 = \kappa(-4.33 + 36.9\kappa + 284.9\kappa^2 + 803.87\kappa^3 + 1104.5\kappa^4 + 734.8\kappa^5 + 188.95\kappa^6). \quad (5.17)$$



(a)



(b)

FIGURA 5.1: Comparación de cada función $G_\kappa(Q)$ para $\kappa = cte$ (en color), con la aproximación de $G(Q, \kappa)$ (líneas punteadas). **(a)** para el caso de modo creciente y **(b)** para el caso de modo decreciente.

5.2. Potencial caótico

Empezaremos con el estudio de inflación caótica, descrita con un potencial general $V = \lambda m_{\text{Pl}}^{4-n} \varphi^n$.

Los parámetros *slow-roll* han sido definidos en la Eq. (3.16). En el caso de un potencial caótico general son:

$$\epsilon_V = \frac{n^2 m_{\text{Pl}}^2}{2 \varphi^2} \quad , \quad \eta_V = (n-1)n \frac{m_{\text{Pl}}^2}{\varphi^2} \quad , \quad \sigma_V = \frac{2}{n} \epsilon_V \quad . \quad (5.18)$$

Obtenemos los valores del campo y del potencial al final de inflación a partir de los parámetros *slow-roll*. Utilizando la condición de que al final de inflación el parámetro *slow-roll* $\epsilon_V = 1 + Q_{\text{end}}$, obtenemos:

$$\frac{V_{\text{end}}}{m_{\text{Pl}}^4} = \lambda \left(\frac{n(n-1)}{1+Q_{\text{end}}} \right)^{n/2} \quad , \quad \left(\frac{\varphi_{\text{end}}}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 = \frac{n(n-1)}{(1+Q_{\text{end}})} \quad . \quad (5.19)$$

La dependencia de Q con el campo φ ha sido dada para el caso general en la Eq. (3.118). Sustituyendo los parámetros *slow-roll* para el potencial caótico general y usando la parametrización de Y_φ siguiente:

$$Y_\varphi = C_T M^\alpha T^\kappa \varphi^\beta \quad , \quad \text{con} \quad \alpha = 1 - \kappa - \beta \quad , \quad (5.20)$$

la relación de Q y φ para este caso es:

$$Q^{4-\kappa} (1+Q)^{2\kappa} = \frac{n^{2\kappa}}{9 \times 4^\kappa} \lambda^{\kappa-2} \frac{C_T^4}{C_R^\kappa} \left(\frac{M}{m_{\text{Pl}}} \right)^{4\alpha} \left(\frac{\varphi}{m_{\text{Pl}}} \right)^{4\alpha+6\kappa-\kappa n+2n-4} \quad , \quad (5.21)$$

sustituyendo el valor del campo al final de inflación de la Eq. (5.19), usando la Eq. (5.21) podemos conocer el valor de Q_{end} :

$$Q_{\text{end}}^{4-\kappa} (Q_{\text{end}} + 1)^{2\beta+\kappa+\frac{1}{2}(\kappa-2)n} = \frac{\lambda^{\kappa-2}}{9 \times 4^\kappa} \frac{C_T^4}{C_R^\kappa} ((n-1)n)^{2\beta+\frac{1}{2}(\kappa-2)n} \left(\frac{n}{n-1} \right)^\kappa \left(\frac{M}{m_{\text{Pl}}} \right)^{4\alpha} \quad , \quad (5.22)$$

el valor de Q_{end} está determinado únicamente por las constantes del modelo y por el comportamiento de la disipación con la temperatura, κ .

Una vez que conocemos la relación de Q con el campo, podemos integrar la Eq. (3.120) sustituyendo la Eq. (5.21) y obtener así el número de e-folds en función de Q :

$$\begin{aligned} \omega &\equiv 4\beta - 2\kappa + (\kappa - 2)n \quad , \\ N &\equiv f(Q_e) - f(Q_*) \quad , \\ f(Q) &= \frac{1}{4\kappa-2(\omega+8)} \left(3^4 \times 4^{2\kappa} \frac{\lambda^{4-2\kappa}}{n^{4\kappa+\omega}} Q^{8-2\kappa} \frac{C_R^{2\kappa}}{C_T^8} \left(\frac{m_{\text{Pl}}}{M} \right)^{8\alpha} \right)^{1/\omega} \\ &\quad \times \left[2Q(\kappa+4) {}_2F_1 \left(-\frac{4\kappa}{\omega}, \frac{-2\kappa+\omega+8}{\omega}; \frac{2(-\kappa+\omega+4)}{\omega}; -Q \right) \right. \\ &\quad \left. - (2\kappa - \omega - 8) {}_2F_1 \left(\frac{8-2\kappa}{\omega}, -\frac{4\kappa}{\omega}; \frac{-2\kappa+\omega+8}{\omega}; -Q \right) \right] \quad . \quad (5.23) \end{aligned}$$

Para obtener la relación del número de e-folds con las escalas, sustituimos en la Eq. (3.78) la relación de Q con el campo, Eq. (5.21), y los valores al final de inflación

Eq. (5.22), dejando todo en función de Q_* en el momento en que cruza el horizonte:

$$\log\left(\frac{k}{k_0}\right) = 61.51 - N + \frac{1}{2} \log\left(\sqrt{\lambda} \left(\frac{(n-1)n}{Q_{end}+1}\right)^{n/4}\right) + \frac{n}{2(4\beta - 2\kappa + (\kappa - 2)n)} \log\left(\frac{Q_*^{4-\kappa}(Q_*+1)^{2\kappa}}{Q_{end}^{4-\kappa}(Q_{end}+1)^{2\kappa}}\right), \quad (5.24)$$

y sustituyendo N con el resultado obtenido en la Eq. (5.23) obtenemos la relación de la escala k_* con la disipación Q_* . Las constantes del modelo cosmológico fijan el valor de Q_{end} a través de la Eq. (5.22).

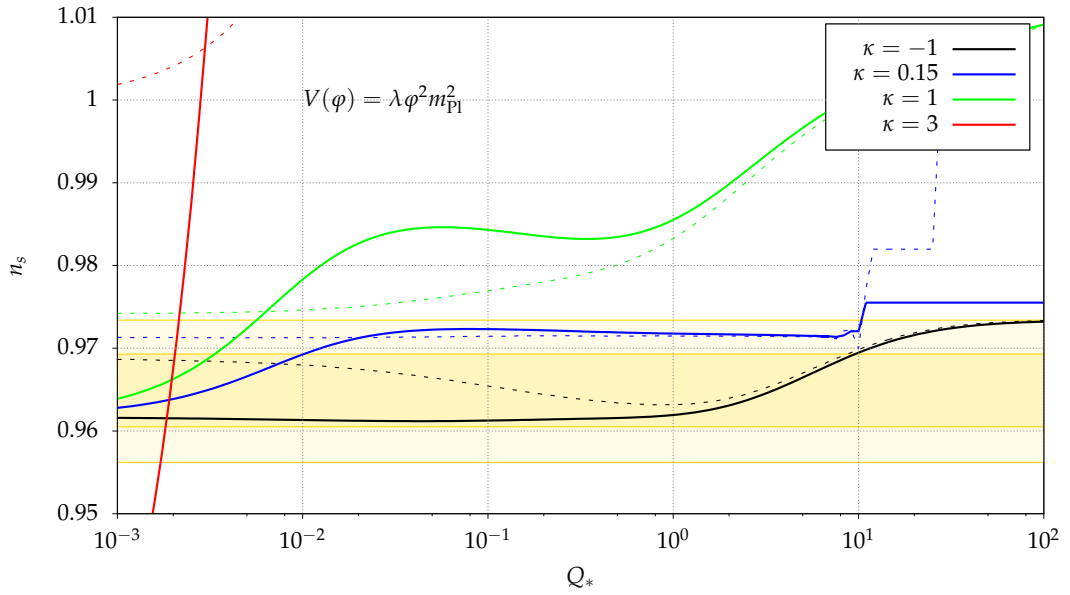
Con la Eq. (5.24) determinamos Q_* cuando cruza el horizonte en las escalas del CMB, $k = k_{cmb}$. En esta expresión sustituimos el valor de Q_{end} dado por la Eq. (5.22), y el número de e-folds dado en la Eq. (5.23). Como consecuencia, tenemos una expresión que nos relaciona el valor de Q_* en el momento que cruza el horizonte en las escalas del CMB con las constantes del modelo C_T , λ , g_* , M , κ y α . Por otro lado, usamos la Eq. (3.105) para obtener el valor del espectro primordial de curvatura en las escalas del CMB. Iterando, por lo tanto, la Eq. (3.105) para un modelo con g_* , M , κ y α fijos, y variando los valores de C_T y λ , obtenemos la combinación de valores de C_T y λ que normalizan el espectro primordial de curvatura a los valores de Planck para cada valor de Q_* comprendidos entre $10^{-3} - 10^2$. Para valores menores de $Q_* < 10^{-3}$ inflación permanece dentro del régimen de disipación débil, y para valores de $Q_* > 10^2$ la amplificación del espectro debido a la función modo creciente será superior a los límites establecidos por la producción de PBHs, en los casos con $\kappa > 0$.

Para los valores fijos de $g_* = 12.5$ y $\beta = 1 - \kappa$ ($\alpha = 0$) obtenemos el índice espectral y evolución de la amplitud del espectro primordial a lo largo de inflación, tanto para el caso térmico como el no térmico. Para obtener el comportamiento del índice espectral derivado del espectro dado en la Eq. (3.105), y así determinar si cada modelo es compatible o no con las observaciones, usamos las ecuaciones de evolución de H , $\dot{\phi}$ y T respecto del número de e-folds (Eqs. 3.121–3.123) en la ecuación del índice espectral (Eq. (3.124)) para determinar el espectro sólo en función de Q , sustituyendo los parámetros *slow-roll* dados en las Eqs. (5.18) y expresando el resultado en función de Q a través de la ecuación que relaciona el campo con Q (Eq. (5.22)). Los resultados para el caso $n = 2$ se muestran en la Fig. (5.2) y para $n = 6$ se muestran en la Fig. (5.3). Para $n = 6$, aunque encontramos predicciones compatibles tanto con el índice espectral como la amplitud del espectro primordial, el rango de compatibilidad en Q_* es pequeño (el rango de valores compatibles se dan en la Tabla (5.3)). Por otro lado, en el caso $n = 6$ comparamos nuestro resultado con [109], ellos obtienen un valor de $Q_* = 4.966$ para $\kappa = 1$ y $Q_* = 0.187$ para $\kappa = 3$. Hay ligeras diferencias en nuestras predicciones que pueden ser debidas a distintos factores. Por ejemplo, podría deberse a que ellos normalizan el espectro asumiendo que las escalas del CMB se sitúan a $N_* = 55$ e-folds, mientras que nosotros hemos calculado el número de e-folds correspondiente a la escala pivote del CMB, obteniendo una duración de ~ 54.7 e-folds para $\kappa = 1$ y $Q_* \sim 5$, y ~ 56.6 e-folds para $\kappa = 3$ y $Q_* \sim 0.19$.

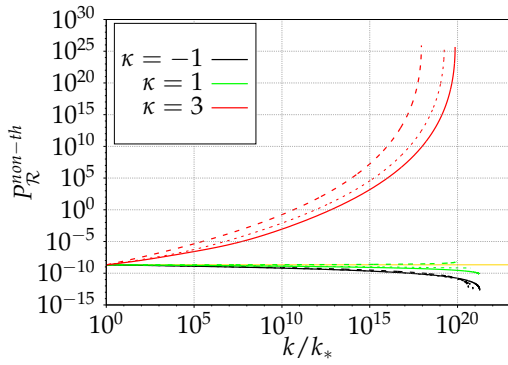
TABLA 5.3: Tabla de valores de Q_* para los que el índice espectral es compatibles con los valores de Planck a 2σ .

	Térmico	No-Térmico
$\kappa = -1$	-	$0.02 \lesssim Q_* \lesssim 0.05$
$\kappa = 0.15$	-	$0.01 \lesssim Q_* \lesssim 0.04$
$\kappa = 1$	$2.8 \lesssim Q_* \lesssim 4.3$	$0.01 \lesssim Q_* \lesssim 0.1$ y $2.2 \lesssim Q_* \lesssim 3.8$
$\kappa = 3$	$0.03 \lesssim Q_* \lesssim 0.15$	$0.004 \lesssim Q_* \lesssim 0.006$

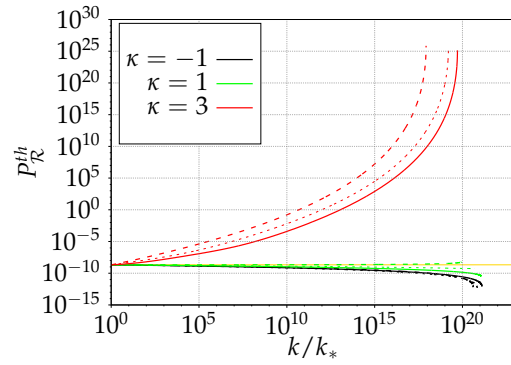
Además, para el caso $n = 6$ y $\kappa = -1$, sólo hay solución para valores de $Q_* \lesssim 0.05$, es decir, no existe ninguna combinación de λ y C_T que normalicen el espectro a $A_0 = 2.1 \times 10^{-9}$ en las escalas del CMB.



(a)

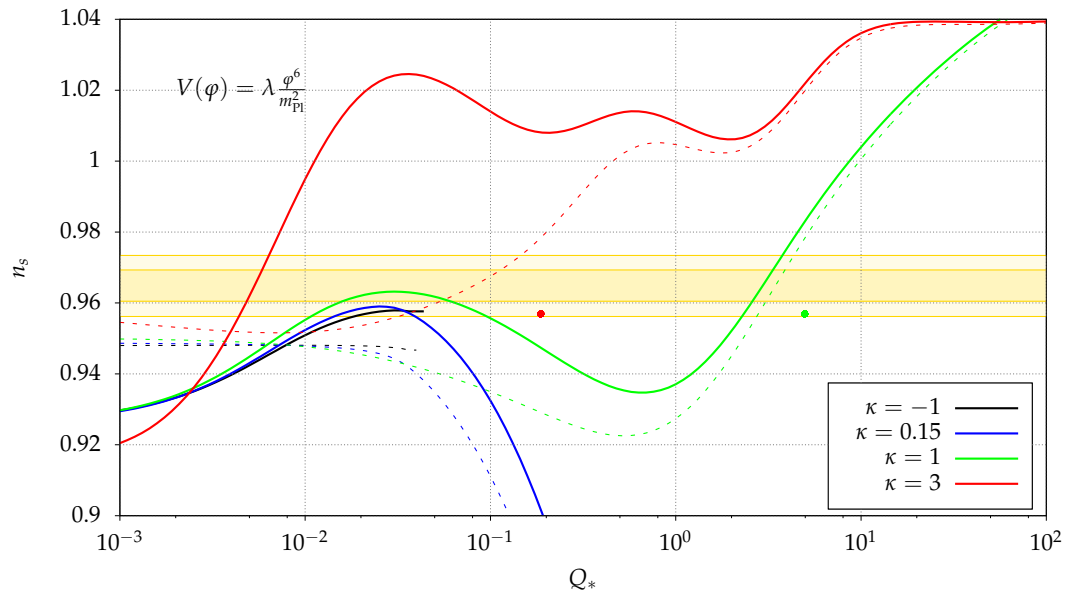


(b)

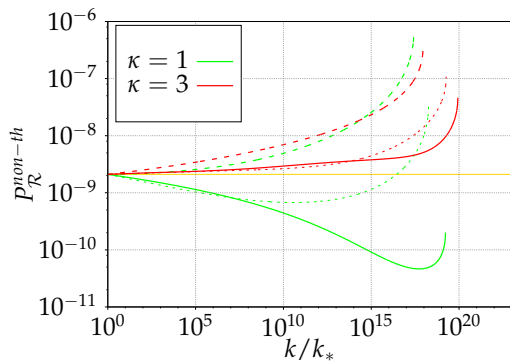


(c)

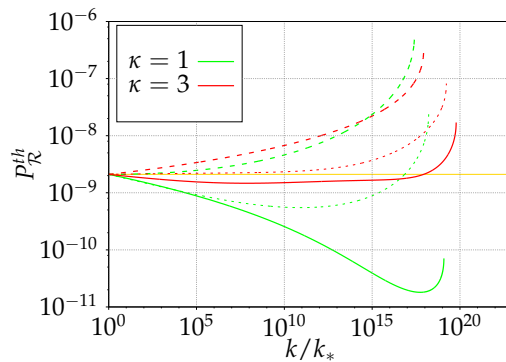
FIGURA 5.2: Caso $n = 2$. **(a)**: Índice espectral en función de Q_* para el caso térmico (línea discontinua) y no térmico (línea continua). En sombreado se muestra la zona compatible con el índice espectral dado por Planck a 1σ y a 2σ . **(b)** y **(c)**: Espectro primordial de curvatura en función del número de onda normalizado a la escala actual del universo. La línea continua es el caso $Q_* = 0.1$, la línea punteada es el caso $Q_* = 1$ y la línea discontinua es el caso $Q_* = 10$. (b) muestra el caso no térmico $\mathcal{N}_* = 0$ y (c) el caso térmico $\mathcal{N}_* \neq 0$.



(a)



(b)



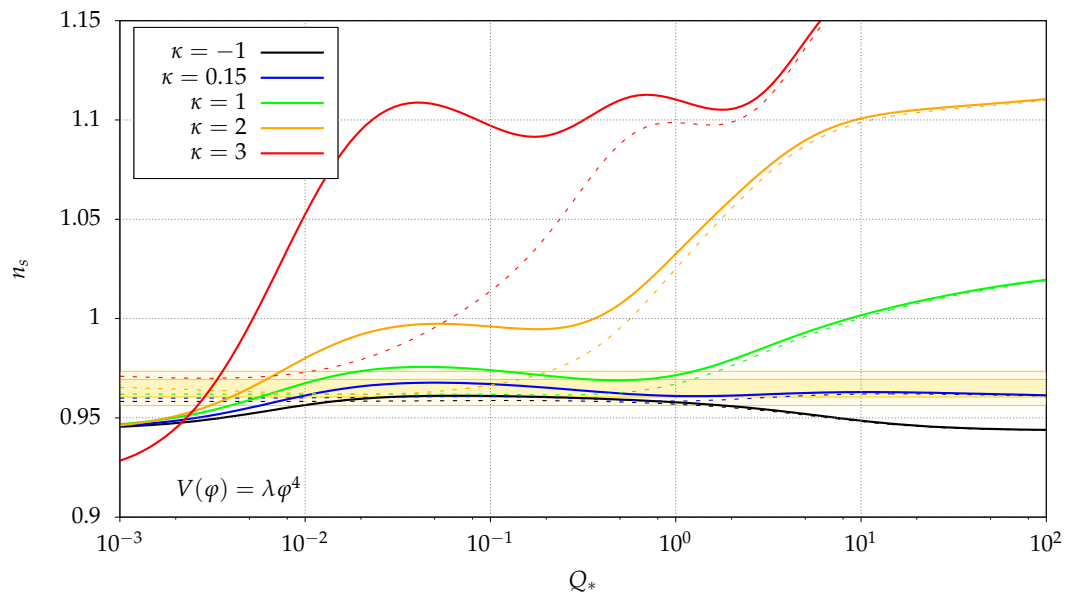
(c)

FIGURA 5.3: Caso $n = 6$. **(a)**: Índice espectral en función de Q_* para el caso térmico (línea discontinua) y no térmico (línea continua). En sombreado se muestra la zona compatible con el índice espectral dado por Planck a 1σ y a 2σ . Los puntos indican los resultados de [109]. **(b)** y **(c)**: Espectro primordial de curvatura en función del número de onda normalizado a la escala actual del universo. La línea continua es el caso $Q_* = 0.1$, la línea punteada es el caso $Q_* = 1$ y la línea discontinua es el caso $Q_* = 10$. **(b)** muestra el caso no térmico $\mathcal{N}_* = 0$ y **(c)** el caso térmico $\mathcal{N}_* \neq 0$. El caso $\kappa = -1$ deja de tener soluciones a partir de $Q_* \sim 0.04$.

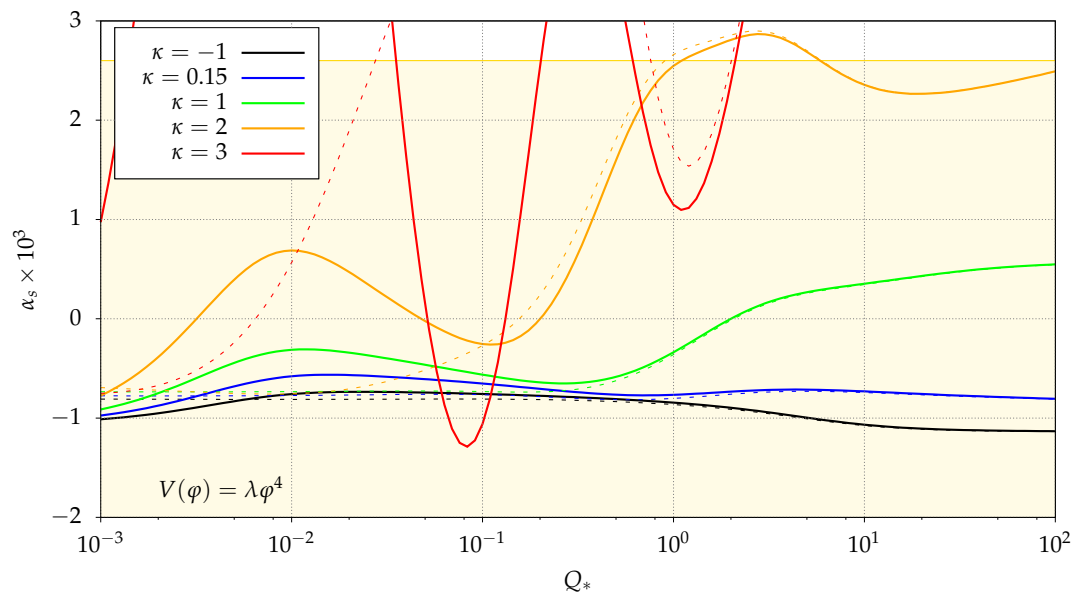
Los resultados para el caso $n = 4$ se muestran en las Figuras (5.4-5.5). Las figuras para el índice espectral n_s (Fig. (5.4)(a)) y el *running* α_s (Fig. (5.4)(b)) se muestran en función de Q_* para valores de $\kappa = [-1, 3]$, tanto para el caso térmico como para el no térmico. Para este caso mostramos más información porque es el potencial que veremos más adelante para el caso de una disipación dependiente con la temperatura $d \log Y_\varphi / d \log T \propto T^\kappa$ con κ variable. Aunque hemos comprobado que la variación del parámetro λ en un intervalo $[10^{-12}, 10^{-16}]$ no da resultados significativamente distintos, hemos calculado los valores de λ y C_T que normalizan el espectro primordial de curvatura a los valores de Planck para cada valor de Q_* comprendidos entre $10^{-3} - 10^2$, y la evolución para los casos concretos $Q_* = (0.1, 1, 10)$, al igual que en

los casos $n = 2$ y $n = 6$. La Fig. (5.5) muestra la amplitud del espectro primordial en función del número de onda, ambos normalizados a las escalas del CMB. La amplificación del espectro se produce a partir de $\kappa > 1$ y cuanto más alto sea mayor amplificación tendremos. Por otro lado, si $\kappa > 3$ el espectro amplifica más de 8 órdenes de magnitud ($A_0 = 2.1 \times 10^{-9}$), pudiendo alcanzar el régimen no perturbativo en el que la definición del espectro deja de ser válida por inconsistencia.

Entre estos potenciales seleccionamos el potencial cuártico por ser compatible con los valores de Planck en las escalas del CMB para una disipación $\propto 1/T$. La variación del comportamiento disipativo permitirá salir del régimen $\kappa = -1$ y aumentar su valor, permitiendo la amplificación del espectro al final de inflación. El amplio rango de valores de Q_* en los que el índice espectral es compatible con Planck nos permitirá estudiar modelos más realistas sin necesidad de un ajuste fino de las condiciones iniciales.

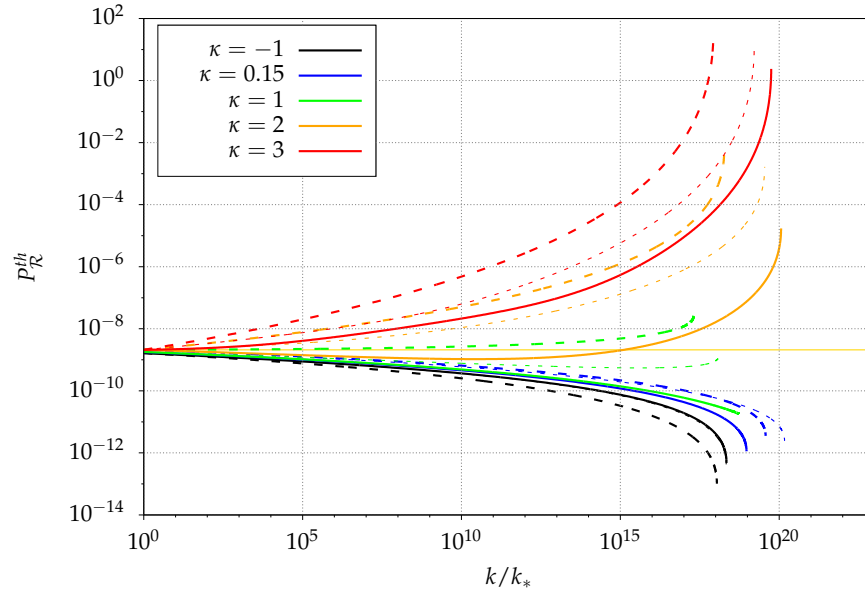


(a)

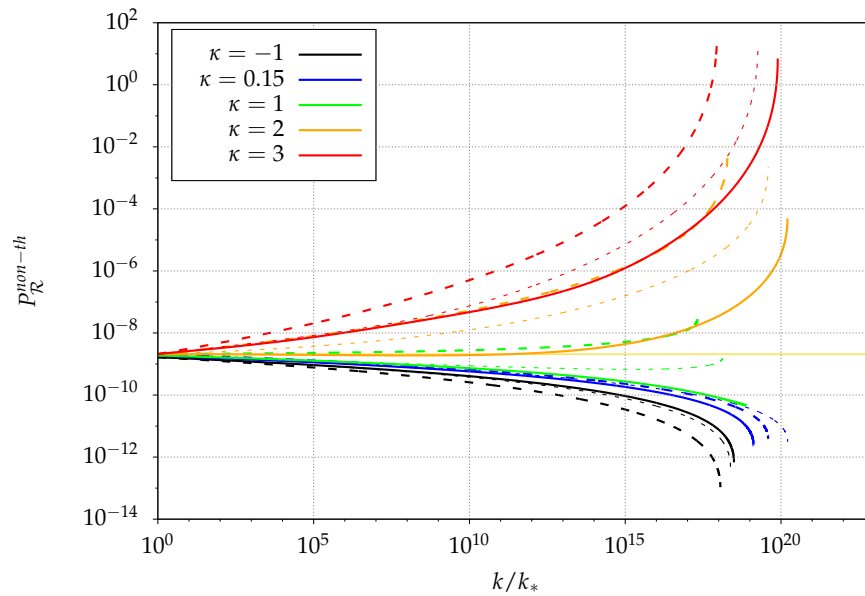


(b)

FIGURA 5.4: Caso $n = 4$ con $g_* = 12.5$. (a) Índice espectral en función de Q_* . (b) Running $\alpha_s = \left. \frac{dn_s}{d \log k} \right|_{k_*}$ en función de Q_* . La línea continua es el caso $\mathcal{N}_* \neq 0$ y la discontinua $\mathcal{N}_* = 0$. La zona sombreada amarilla indica los valores de Planck.



(a)



(b)

FIGURA 5.5: Espectro primordial de curvatura en función del número de onda, con $g_* = 12.5$ para el caso $n = 4$: **(a)**: para el caso térmico y **(b)**: para el caso no-térmico. Los puntos indican $Q_* = 0.1$, la línea continua $Q_* = 1$ y la discontinua $Q_* = 10$.

5.3. Potencial híbrido

En esta sección veremos un ejemplo de otro tipo de potencial inflacionario. El potencial híbrido surge de la descripción de inflación con más de un campo escalar, donde uno de los campos controla inflación y el segundo campo el final de inflación. En este caso, inflación termina no porque se violen las condiciones *slow-roll*, sino porque se produce una transición de fase. Un ejemplo típico del potencial efectivo es [182, 185, 186]:

$$V(\varphi, \sigma) = \frac{1}{4\lambda} (M^2 - \lambda\sigma^2)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g^2}{2}\varphi^2\sigma^2. \quad (5.25)$$

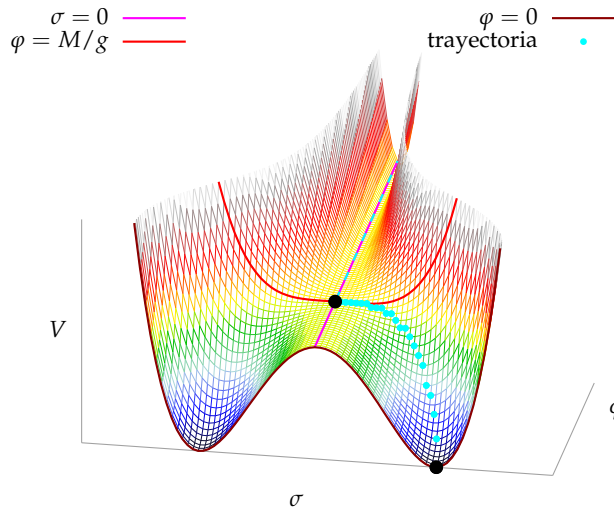


FIGURA 5.6: Potencial híbrido. El punto negro indica el valor de $\varphi = \varphi_c$.

El potencial dado en la Eq. (5.25) describe una masa efectiva para el campo σ igual a $m_\sigma^2 = g^2\varphi^2 - M^2$, y para φ igual a $m_\varphi^2 = g^2\sigma^2 + m^2$. En la Fig. (5.6) se muestra la forma del potencial. El campo φ se desliza por la trayectoria de mínima energía $\sigma = 0$ hasta que alcanza el valor $\varphi = \varphi_c = M/g$. En φ_c el camino de mínima energía cambia, y en $\sigma = \pm M/\sqrt{\lambda}$ alcanza el valor mínimo del potencial $V(0, M/\sqrt{\lambda}) = 0$. Durante el primer canal, con $\sigma = 0$, la forma del potencial efectivo es [187]:

$$V_{eff}(\varphi) = \frac{1}{4} \frac{M^4}{\lambda} + \frac{m^2}{2}\varphi^2 \quad (5.26)$$

El potencial híbrido generalizado durante inflación es:

$$V = V_o \left(1 + \frac{\gamma}{n} \left(\frac{\varphi}{m_{PI}} \right)^n \right). \quad (5.27)$$

Para el potencial híbrido generalizado, el campo φ también rueda a través del canal $\sigma = 0$ hasta que llega al valor crítico φ_c , momento en que inflación termina.

Los parámetros *slow-roll*, Eq. (3.16), en este modelo inflacionario son:

$$\epsilon_V = \frac{1}{2}\gamma^2 \left(\frac{\varphi}{m_{\text{Pl}}}\right)^{2n-2}, \quad \eta_V = \gamma(n-1) \left(\frac{\varphi}{m_{\text{Pl}}}\right)^{n-2}, \quad \sigma_V = \gamma \left(\frac{\varphi}{m_{\text{Pl}}}\right)^{n-2}, \quad (5.28)$$

donde se ha hecho la aproximación $V \simeq V_0$.

Típicamente el parámetro de *slow-roll* $\epsilon_V \ll \eta_V$ en estos modelos, así que por simplificar imponemos que inflación termina cuando $\eta_V = 1 + Q_{\text{end}}$ y obtenemos el valor del potencial al final de inflación:

$$\frac{V_{\text{end}}}{V_0} = 1 + \frac{1}{n} \left((n-1) \frac{\gamma^{2/n}}{1+Q_{\text{end}}} \right)^{\frac{n}{2-n}}, \quad \left(\frac{\varphi_{\text{end}}}{m_{\text{Pl}}}\right)^{2-n} = \frac{\gamma}{1+Q_{\text{end}}} (n-1). \quad (5.29)$$

La relación del campo con la disipación Q , Eq. (3.118), para este caso es:

$$Q^{4-\kappa} (1+Q)^{2\kappa} = \frac{\gamma^{2\kappa}}{9 \times 4^\kappa} \frac{C_T^4}{C_R^\kappa} \left(\frac{M}{m_{\text{Pl}}}\right)^{4\alpha} \left(\frac{\varphi}{m_{\text{Pl}}}\right)^{4\beta+2\kappa(n-1)} \left(\frac{V_0}{m_{\text{Pl}}^4}\right)^{\kappa-2}. \quad (5.30)$$

Sustituyendo el valor del campo al final de inflación de la Eq. (5.29) y usando la Eq. (5.30) podemos conocer el valor de Q_{end} :

$$Q_{\text{end}}^{4-\kappa} (1+Q_{\text{end}})^{-\frac{2(2\beta+\kappa)}{n-2}} = \frac{1}{9 \times 4^\kappa} \frac{C_T^4}{C_R^\kappa} (n-1)^{\frac{2(2\beta+\kappa(n-1))}{2-n}} \gamma^{\frac{2(2\beta+\kappa)}{2-n}} \left(\frac{V_0}{m_{\text{Pl}}^4}\right)^{\kappa-2} \left(\frac{M}{m_{\text{Pl}}}\right)^{4\alpha}. \quad (5.31)$$

Para este caso el valor de Q_{end} también está determinado únicamente por las constantes del modelo inflacionario y por el comportamiento de la disipación con la temperatura.

Las relaciones de T/H y $H/\dot{\varphi}$ dadas en las Eqs. (3.116) y (3.117), en la caso de potencial híbrido se convierten en:

$$\left(\frac{T}{H}\right)^4 = \frac{9\gamma^2}{4C_R} \frac{Q}{(Q+1)^2} \left(\frac{\varphi_c}{m_{\text{Pl}}}\right)^{2n-2} \frac{m_{\text{Pl}}^4}{V_0} m_{\text{Pl}}^4, \quad (5.32)$$

$$\frac{H}{\dot{\varphi}} = -\frac{Q+1}{\gamma} \left(\frac{\varphi_c}{m_{\text{Pl}}}\right)^{1-n} \frac{1}{m_{\text{Pl}}}, \quad (5.33)$$

donde se ha usado la aproximación $V = V_0$, o lo que es lo mismo $(\varphi/m_{\text{Pl}})^n \ll n/\gamma$.

El potencial híbrido se diferencia del caótico en que el recorrido que hace el campo a través del potencial es muy pequeño. Si llamamos a la diferencia del campo entre el momento del cruce del horizonte en el CMB y su valor al final de inflación como Δ , tendremos que $\Delta \ll 1$. Estamos interesados en modelos que puedan amplificar el espectro al final de inflación. Dada la Eq. (5.31), una variación pequeña del campo se traduce en una variación pequeña de Q , por lo que en este caso la región de interés es $Q > 1$ en todo el periodo inflacionario. El número de e-folds lo obtenemos

en este caso bajo la suposición de que $Q > 1$.

$$\begin{aligned}
N &= -\frac{\kappa + 4}{4(\beta + 2) + (\kappa - 4)n} \left(\frac{\gamma^{\kappa-4} C_T^4}{9 \times 4^\kappa C_R^\kappa} \left(\frac{M}{m_{\text{Pl}}} \right)^{4\kappa} \left(\frac{V_0}{m_{\text{Pl}}^4} \right)^{\kappa-2} \right)^{\frac{1}{\kappa+4}} \\
&\times \left(\left(\frac{(1 + \Delta)\varphi_c}{m_{\text{Pl}}} \right)^{\frac{4\beta+(\kappa-4)n+8}{\kappa+4}} - \left(\frac{\varphi_c}{m_{\text{Pl}}} \right)^{\frac{4\beta+(\kappa-4)n+8}{\kappa+4}} \right) \\
&= \frac{(\kappa + 4)(n - 1)Q}{\eta_V(4(\beta + 2) + (\kappa - 4)n)} \left((\Delta + 1)^{\frac{4\beta+\kappa n-4n+8}{\kappa+4}} - 1 \right) \quad (5.34)
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se han utilizado las Eqs. (5.30) y (5.28).

Para un desplazamiento del campo $\Delta \ll 1$ podemos hacer un desarrollo en serie de la Eq. (5.34):

$$N = (n - 1) \frac{Q}{\eta_V} \Delta. \quad (5.35)$$

Obtenemos la relación del número de e-folds con las escalas, como en el caso anterior, sustituyendo en la Eq. (3.78) la Eq. (5.30) y Eq. (5.31), en función de Q :

$$\log \left(\frac{k}{k_0} \right) = 61.51 - N + \frac{1}{4} \log \left[\frac{V_0}{m_{\text{Pl}}^4} \left(1 + \frac{1}{n} \left((n - 1) \frac{\gamma^{2/n}}{Q_{\text{end}} + 1} \right)^{\frac{n}{n-2}} \right)^{-1} \right]. \quad (5.36)$$

La Eq. (5.36) junto con la Eq. (5.35) nos permite relacionar las escalas con el valor de la disipación en el momento del cruce del horizonte. Como en el caso anterior, las constantes del modelo cosmológico fijan el valor de Q_{end} a través de la Eq. (5.31). Podemos relacionar el valor de Q_* con la escala a la que cruza el horizonte a través de la Eq. (5.36).

Así mismo, en el caso $Q \gg 1$ podemos utilizar la aproximación del espectro [110, 105, 188]:

$$P_{\mathcal{R}} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi^{3/2}} \frac{H^3 T}{\dot{\varphi}^2} \left(\frac{Q}{Q_\kappa} \right)^{\iota\kappa} \sqrt{Q}, \quad (5.37)$$

con los valores: $Q_1 = 8.53$, $Q_2 = 7.66$ y $Q_3 = 7.27$, y donde el coeficiente ι depende del comportamiento de la disipación con la temperatura κ . Su valor es ajustado a través de simulaciones numéricas, siendo igual a $\iota = 1.96$ para $\kappa < 0$ y $\iota = 2.692$ para $\kappa > 0$ ¹. El índice espectral corresponde a:

$$n_s - 1 = 3 \frac{d \log H}{d N} + \frac{d \log T}{d N} - 2 \frac{d \log \dot{\varphi}}{d N} + \left(\iota\kappa + \frac{1}{2} \right) \frac{d \log Q}{d N}, \quad (5.38)$$

$$\simeq -\frac{\beta(4\iota\kappa + 9) + (n - 1)(2\iota\kappa^2 + 3\kappa - 6)}{(\kappa + 4)Q} \frac{\eta_V}{(n - 1)} \quad (5.39)$$

Reemplazando el factor Q/η_V de la Eq. (5.39) por la Eq. (5.35) llegamos a relacionar el número de e-folds con el índice espectral y el desplazamiento del campo:

$$n_s - 1 \simeq -\frac{\beta(4\iota\kappa + 9) + (n - 1)(2\iota\kappa^2 + 3\kappa - 6)}{(\kappa + 4)} \frac{\Delta}{N}. \quad (5.40)$$

¹Sin embargo, en [188] dan los valores de $\iota = 1.6$ para $\kappa = -1$, e $\iota = 2.5$ para $\kappa = 1$

En la Tabla (5.4) mostramos los valores de β máximos para cada valor de κ para que Q aumente, (Eq. (3.120)):

$$\frac{d \log Q}{dN} > 0 \quad \Rightarrow \quad \beta < \frac{1}{2}(1-n)\kappa. \quad (5.41)$$

TABLA 5.4: Valor de β máximo necesario para que $dQ/dN > 0$:

κ	n	β_{max}	n	β_{max}	n	β_{max}
1	2	$-\frac{1}{2}$	4	$-\frac{3}{2}$	6	$-\frac{5}{2}$
2	2	-1	4	-3	6	-5
3	2	$-\frac{3}{2}$	4	$-\frac{9}{2}$	6	$-\frac{15}{2}$

La variación del índice espectral en función de Δ para valores del número de e-folds típicos de inflación, aquí fijados a $N = (50, 60)$ se muestra en la Fig. (5.7). En estas figuras mostramos un rango amplio de Δ para ver la tendencia, aunque los valores físicos corresponden a $\Delta < 1$. En las gráficas vemos algunos ejemplos para valores de $n = 2, 4, 6$, $\kappa = [1, 3]$ y β dado por los valores de la Tabla (5.4). Esta estimación permite descartar los modelos no compatibles con el índice espectral observado por Planck. Añadimos la condición necesaria para la amplificación del espectro dada por la Tabla (5.4). Este procedimiento se ha repetido para distintos valores de β , sin embargo, imponiendo ambas condiciones no hemos encontrado ningún modelo capaz de amplificar el espectro y que sea consistente con los valores de Planck.

Hasta ahora hemos visto distintos potenciales con $\kappa = cte$. Hemos estimado la evolución de los parámetros cosmológicos para ver qué modelos pueden ser compatibles con los observables del CMB, esto es, el índice espectral y la amplitud del espectro primordial. Hemos calculado la amplitud del espectro primordial en las escalas correspondientes al final de inflación. Descartamos aquellos modelos que no son compatibles con las observaciones, y dentro de los que sí son compatibles estamos interesados en los casos en que el espectro se amplifique al final de inflación. La amplificación del espectro primordial de curvatura al final de inflación producirá una amplificación en el espectro de las GWs, en un rango de frecuencias cercano al rango de detección de los futuros experimentos como Cosmic Explorer y Einstein Telescope.

El potencial híbrido no muestra ningún espacio de parámetros compatible con las observaciones, mientras que los potenciales caóticos si lo hacen. Dentro de los modelos caóticos, para los casos $n = 2$ y $n = 6$ existe un espacio de parámetros compatible con las observaciones, dando como resultado un rango de valores de Q_* reducido. El potencial cuadrático tiene un n_s compatible con el CMB en el rango de $Q_* \sim 10$ sólo para $\kappa = -1$, mientras que el potencial séxtico sólo es compatible con el CMB si la disipación comienza con un comportamiento $\kappa \geq 1$. Descartamos, por lo tanto, el potencial séxtico dado que inflación comienza con $\kappa > 0$, y para estos modelos el modo creciente no amplifica lo suficiente como para producir GWs con una amplitud y frecuencia cercana a las curvas de detección de los futuros experimentos.

El potencial cuártico, por el contrario, tiene un espacio de parámetros amplio compatible con el CMB. Si la disipación comienza con $\kappa > 0$, hay que tener en cuenta las funciones modo creciente a la hora de normalizar el espectro. Para los casos $\kappa = 1, 2$ tenemos que el espectro no amplifica lo suficiente, y para $\kappa = 3$ el índice espectral limita los valores de Q_* en $\lesssim 10^{-2}$. Sin embargo, para $\kappa = -1$, hemos obtenido un amplio rango de valor de Q al cruzar el horizonte en las escalas del CMB, $Q_* \lesssim 2$, con

un índice espectral y *running* compatibles con el CMB. El potencial cuártico cumple con los requisitos deseados, por un lado, el espacio de parámetros compatibles con el CMB es amplio, incluyendo un comportamiento disipativo de $\kappa < 0$. A su vez, los modelos con $\kappa > 0$ amplifican el espectro en las escalas pertenecientes al final de inflación, con lo que nuestra siguiente motivación es incluir un modelo más natural del comportamiento disipativo en el que κ no sea una función constante y podamos pasar de un $\kappa < 0$ en las escalas del CMB a un $\kappa > 0$ en las escalas al final de inflación. Nuestro objetivo es encontrar un modelo cuyo κ al final de inflación sea lo suficientemente alto como para que la amplificación del espectro primordial de curvatura provoque una amplificación de la densidad de energía de las GWs en el rango de frecuencias de los futuros experimentos, y que κ no sea lo suficientemente alto como para sobrepasar los límites observacionales en la producción de PBHs ni en la producción de radiación en el momento de BBN.

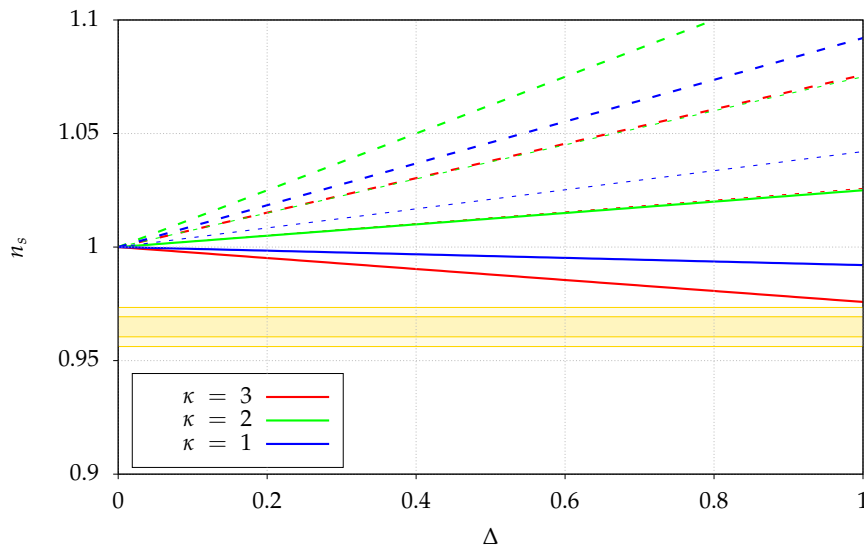


FIGURA 5.7: Índice espectral en función del incremento del valor del campo, Δ , para el potencial híbrido con β dado por los valores de la Tabla (5.4). La línea continua es para $n = 2$, la línea discontinua es $n = 4$ y la línea punteada es $n = 6$.

5.4. Disipación

Hasta ahora hemos considerado un coeficiente disipativo $Y_\varphi \propto T^\kappa$ en el que κ se mantiene constante durante toda la evolución. Sin embargo, el término disipativo proviene de las interacciones entre las partículas del baño térmico, por lo que la dependencia de las masas con la temperatura hace que la dependencia de Y_φ con la temperatura sea algo más compleja.

La disipación producida por los campos interactuantes en la cosmología inflacionaria fue inicialmente estudiada en [92]. El hecho de que inflación se produce dentro de la aproximación *slow-roll* en la que el campo φ se mueve lentamente, es consistente con la aproximación adiabática del sistema. Como condición adicional, las correcciones térmicas no pueden alterar la condición de *planitud* del potencial. La

contribución de la disipación se obtiene de las interacciones del campo inflacionario $\Phi_{1,2}$ que decae en un par de bosones $\chi_{1,2}$, y a su vez estos decaen en un par de fermiones. El campo inflacionario es:

$$\Phi_{1,2} = \frac{M}{\sqrt{2}} e^{\pm i\varphi/M}, \quad (5.42)$$

donde φ es el valor del inflatón sin perturbar, y M es la escala de energía del valor del campo en el vacío, $M = \sqrt{2} \langle |\Phi| \rangle_V$.

En el modelo **Warm Little Inflation** (El nombre de este modelo proviene de los modelos de Little Higgs de ruptura de simetría electrodébil [188]) se impone el intercambio de simetría $\Phi_1 \leftrightarrow i\Phi_2$, $\chi_1 \leftrightarrow \chi_2$ [189], y asumiendo la igualdad de los acoplos $g_1 = g_2$ el lagrangiano de interacción toma la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_I[\Phi_1, \Phi_2, \chi_1, \chi_2] = \frac{1}{2}g^2|\Phi_1 + \Phi_2|^2|\chi_1|^2 + \frac{1}{2}g^2|\Phi_1 - \Phi_2|^2|\chi_2|^2. \quad (5.43)$$

Bajo este intercambio de simetría el bosón χ_1 se acopla a la combinación $|\Phi_1 + \Phi_2|$, mientras que χ_2 se acopla a $|\Phi_1 - \Phi_2|$. El campo χ se acopla a fermiones sin masa con acoplo h , y a otros posibles campos con acoplo h_S , incluidas sus auto-interacciones, dando lugar a correcciones térmicas en su masa, dada por:

$$m_{R,\chi}^2(T) \simeq \frac{g^2 M^2}{2} + \frac{h^2 + h_S^2}{12} T^2, \quad (5.44)$$

por lo que m_χ está limitada por la contribución gM , y ahora $m_\chi > gM/\sqrt{2}$. Definimos la masa efectiva normalizada por temperatura como el cociente entre la masa $m_{R,\chi}(T)$ y T :

$$\tilde{m}_{R,\chi}(T) \equiv \frac{m_{R,\chi}(T)}{T}. \quad (5.45)$$

El coeficiente disipativo debido al acoplo del inflatón con los bosones χ es [113, 190]:

$$Y_\varphi = \frac{4g^4 M^2}{T} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rho_\chi(p_0, \mathbf{p})^2 n_B(p_0) (1 + n_B(p_0)), \quad (5.46)$$

donde (p_0, \mathbf{p}) es el cuadri-momento, con la energía p_0 y 3-momento \mathbf{p} , y n_B es la función de distribución de Bose-Einstein:

$$n_B(p_0) = (e^{p_0/T} - 1)^{-1}. \quad (5.47)$$

La distribución espectral es:

$$\rho_\chi(p_0, \mathbf{p}) = \frac{4\omega_\chi(\mathbf{p})\Gamma_\chi(p_0, \mathbf{p})}{(-p_0^2 + \omega_\chi(\mathbf{p})^2)^2 + (2\omega_\chi(\mathbf{p})\Gamma_\chi(p_0, \mathbf{p}))^2}, \quad (5.48)$$

donde:

$$\omega_\chi(\mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2 + m_{R,\chi}^2, \quad (5.49)$$

y la tasa de desintegración térmica es:

$$\Gamma_\chi(p_0, \mathbf{p}) = \frac{h^2}{16\pi} \frac{m_{R,\chi}}{\omega_\chi(\mathbf{p})} \left(1 + 2 \frac{T}{|\mathbf{p}|} \log \left(\frac{1 + e^{-\frac{\omega_+}{T}}}{1 + e^{-\frac{\omega_-}{T}}} \right) \right), \quad (5.50)$$

con $\omega_\pm = \omega_\chi(\mathbf{p}) \pm \mathbf{p}$.

En el primer modelo de Warm Little Inflation, el inflatón interactúa con fermiones, dando lugar a una disipación lineal con la temperatura $Y_\varphi \propto T$. Aquí, la interacción con bosones da lugar a una disipación inversamente lineal con la temperatura $Y_\varphi \propto 1/T$. Precisamente, el comportamiento de $Y_\varphi \propto 1/T$ en las escalas del CMB facilita que tanto la amplitud del espectro primordial como el índice espectral sean compatibles con los valores de Planck.

Se puede obtener una función semianalítica para el coeficiente disipativo en los límites de alta y baja temperatura. Para obtener una única función que recoja el comportamiento en todo el rango de $\tilde{m}_{R,\chi}(T)$, la disipación se obtiene por ajuste de la integración numérica de la Eq. (5.46) para diferentes valores de h :

$$Y_\varphi = \frac{4}{h^2} \frac{g^4 M^2}{T} \left(\frac{1}{\tilde{m}_{R,\chi}} \right)^3 \left(e^{-0.77\tilde{m}_{R,\chi}} + 0.0135h^6 e^{-20/\tilde{m}_{R,\chi}} \left(\frac{1}{\tilde{m}_{R,\chi}} \right)^5 \right). \quad (5.51)$$

La Eq. (5.51) es la aproximación de la disipación para los regímenes de alta y baja temperatura. En la distribución espectral dada en la Eq. (5.48), la contribución del polo domina la integral cuando las masas de los campos intermedios son pequeñas. En ese caso, podemos aproximar la energía p_0 a la relación de dispersión de las partículas ω_χ . Esta aproximación funciona bien cuando $T > m_\chi$, y en este rango de masas domina a la contribución del polo. La aproximación del polo dada en la bibliografía [188] es:

$$Y_\varphi = \frac{4}{h^2} \frac{g^4 M^2}{T} \left(\frac{1}{\tilde{m}_{R,\chi}} \right)^3 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{m}_{R,\chi}^{3/2} \right) e^{-\tilde{m}_{R,\chi}}. \quad (5.52)$$

La aproximación de bajo-momento o masas pesadas ocurre cuando el 4-momento es pequeño. Comparamos nuestra expresión con la aproximación dada en [113]:

$$Y_\varphi = 0.055 h^2 \frac{g^2 M^2}{T} \frac{1}{\tilde{m}_{R,\chi}^8}. \quad (5.53)$$

En la Fig. (5.8) se muestra la dependencia de $Y_\varphi(T/g^4 M^2) \tilde{m}_{R,\chi}^3$ en función de $\tilde{m}_{R,\chi}$. Para valores de $\tilde{m}_{R,\chi} \sim 1 - 10$, se produce la supresión exponencial de Boltzmann, pero a partir de $\tilde{m}_{R,\chi} \gtrsim 10$ la supresión adopta una ley de potencias $Y_\varphi \propto \tilde{m}_{R,\chi}^{-8}$.

Durante inflación, la temperatura disminuye, por lo que la masa efectiva normalizada con la temperatura aumenta. Inflación comienza con una masa efectiva $m_{R,\chi}^2(T) \sim (h^2 + h_S^2)T^2/12$ y $\kappa \sim -1$, a medida que T disminuye la masa efectiva se acerca al límite de baja temperatura $m_{R,\chi}^2(T) \sim g^2 M^2/2$ en el que la derivada tiende a $\kappa \sim 7$. Sin embargo, nuestro modelos no llegarán a alcanzar $\kappa \sim 7$, y según sean los valores de los acoplos del modelo κ se mantendrá constante a lo largo de inflación con $\kappa = -1$, o aumentará su valor manteniéndose en $\kappa < 5$ y estando dentro del régimen de bajo momento.

El comportamiento de Y_φ con la temperatura ha sido dado en la Eq. (3.107). La separación de Y_φ en dos partes:

$$Y_\varphi = \frac{4}{h^2} \frac{g^4 M^2}{T} F[\tilde{m}_{R,\chi}], \quad (5.54)$$

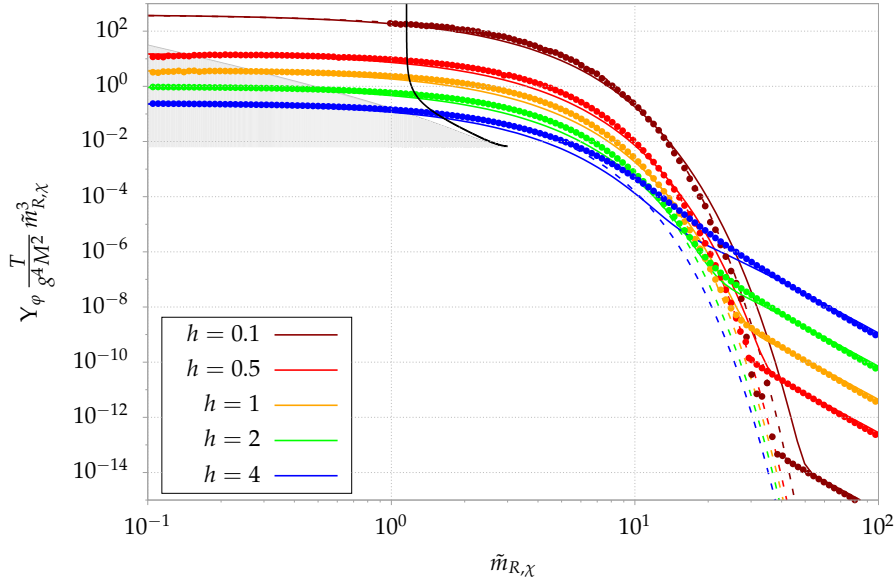


FIGURA 5.8: Coeficiente disipativo dividido entre el factor $g^4 M^2 / T \tilde{m}_{R,\chi}^{-3}$ en función de $\tilde{m}_{R,\chi}$. Los puntos corresponden a la integración numérica, la línea continua corresponde a la aproximación de la disipación numérica dada en la Eq. (5.51) para distintos valores de h . La línea discontinua corresponde a la aproximación del polo. La línea gris es la $\tilde{m}_{R,\chi}$ mínima para $h_S = 0$, y la línea negra indica la $\tilde{m}_{R,\chi}$ mínima para $h_S = 4$.

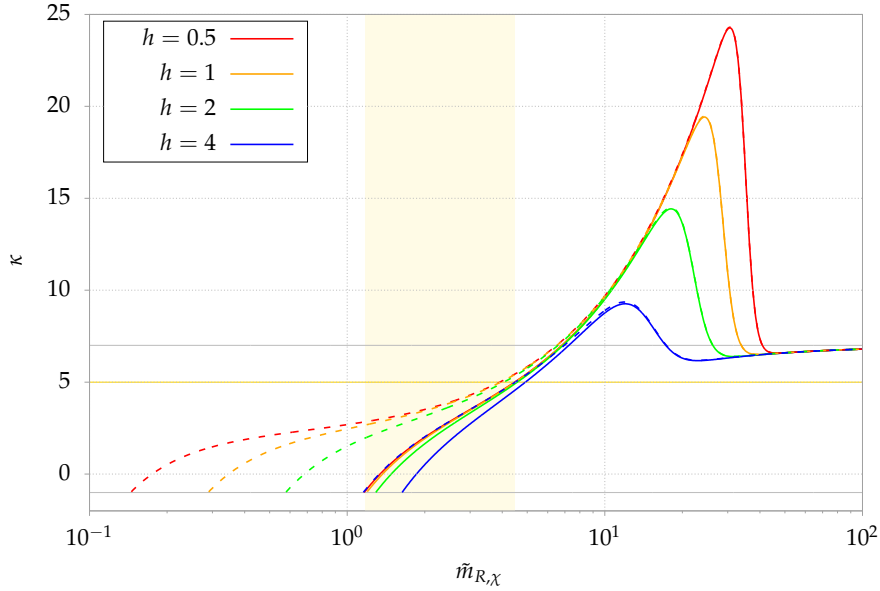


FIGURA 5.9: κ en función de $\tilde{m}_{R,\chi}$. Las líneas continuas son para $h_S = 4$, y las discontinuas para $h_S = 0$. Las líneas grises indican los límites de baja y alta temperatura. La zona sombreada es el rango de $\tilde{m}_{R,\chi}$ de nuestros modelos, que alcanzan $\kappa = 5$ (línea horizontal amarilla).

con:

$$F[\tilde{m}_{R,\chi}] \equiv \left(\frac{1}{\tilde{m}_{R,\chi}} \right)^3 \left(e^{-0.77\tilde{m}_{R,\chi}} + 0.0135h^6 e^{-20/\tilde{m}_{R,\chi}} \left(\frac{1}{\tilde{m}_{R,\chi}} \right)^5 \right), \quad (5.55)$$

no permite separar las distintas contribuciones a la derivada logarítmica de Y_φ respecto del logaritmo de T :

$$\kappa = -1 + f_T, \quad (5.56)$$

donde:

$$f_T \equiv \frac{d \log F[\tilde{m}_{R,\chi}]}{d \log T}. \quad (5.57)$$

La expresión de f_T está compuesta de una parte dependiente sólo de la masa $m_{R,\chi}$ normalizada con la temperatura, y otra parte igual a $g^2 M^2 / T^2$:

$$f_T = \frac{g^2 M^2}{2T^2} \frac{\left(0.0135 h^6 e^{0.77 \tilde{m}_{R,\chi}} (8 \tilde{m}_{R,\chi} - 20) + e^{\frac{20}{\tilde{m}_{R,\chi}}} (0.77 \tilde{m}_{R,\chi} + 3) \tilde{m}_{R,\chi}^6 \right)}{\tilde{m}_{R,\chi}^3 \left(0.0135 h^6 e^{0.77 \tilde{m}_{R,\chi}} + e^{\frac{20}{\tilde{m}_{R,\chi}}} \tilde{m}_{R,\chi}^5 \right)}. \quad (5.58)$$

El comportamiento de κ con la masa efectiva normalizada con la temperatura se muestra en la Fig. (5.9). El límite de alta temperatura está impuesto por la condición $\tilde{m}_{R,\chi}^2 \geq (h^2 + h_S^2)/12$ donde $\kappa = -1$. Para valores superiores de $\kappa > 4$, la radiación aumenta e inflación termina. En la Fig. (5.10) se muestra los valores de κ_{end} en función de Q_{end} del modelo cuártico no térmico, donde además hemos calculado la amplitud del espectro primordial al final de inflación, cuyo valor se muestra con una escala de color. Para calcular la amplitud del espectro primordial se han usado las funciones modo creciente/decreciente dadas en ecuaciones (5.6) y (5.7). Para valores de $Q_{end} \sim 10^2$ la amplitud del espectro primordial es superior a los límites establecidos por los PBHs. A medida que Q_{end} disminuye la amplitud del espectro primordial es menor y el espectro comienza a amplificar más tarde durante inflación. Alrededor de $Q_{end} \sim 5/2$ los resultados se dividen en $\kappa_{end} \simeq -1$ ($Q_{end} \lesssim 5/2$), es decir, no han salido del régimen de alta temperatura, y $\kappa_{end} > -1$ ($Q_{end} \gtrsim 5/2$) para los que sí han salido.

Por otro lado, podemos estimar las derivadas de las variables durante *slow-roll* tal y como hicimos en el Capítulo (3), a partir de las ecuaciones de evolución en *slow-roll* (ecuaciones (3.109–3.111)). Para el potencial $V(\varphi) = \lambda \varphi^4 / 4$ se tiene:

$$\frac{d \log Q}{dN} = \frac{(Q+1)(5-f_T)}{5-f_T+Q(f_T+3)} \epsilon_H, \quad (5.59)$$

$$\frac{d \log T}{dN} = \frac{-2Q}{5-f_T+Q(f_T+3)} \epsilon_H, \quad (5.60)$$

$$\frac{d \log T/H}{dN} = \frac{5-f_T+Q(f_T+1)}{5-f_T+Q(f_T+3)} \epsilon_H, \quad (5.61)$$

$$\frac{d \log \epsilon_H}{dN} = \frac{5-f_T-2Q(1-f_T)}{5-f_T+Q(f_T+3)} \epsilon_H. \quad (5.62)$$

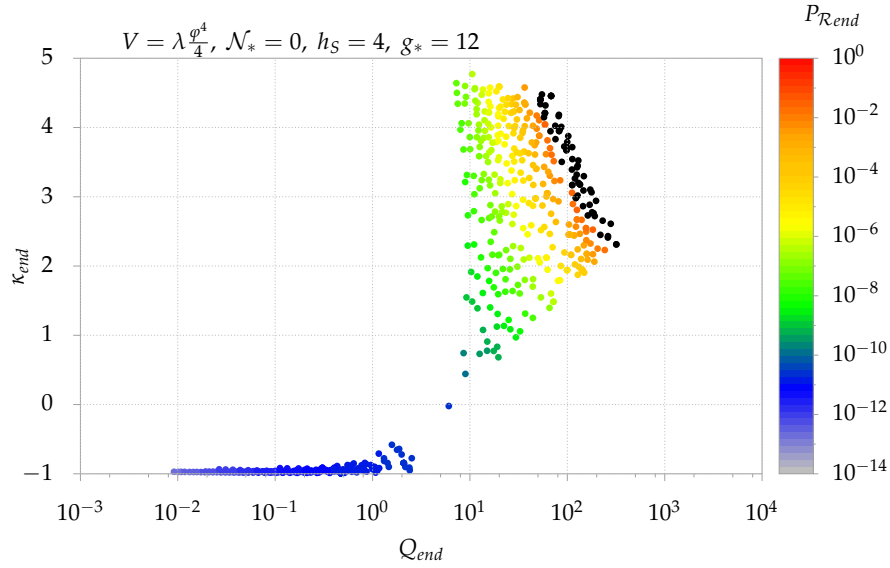


FIGURA 5.10: Variación de κ en nuestros modelos inflacionarios. Los puntos negros son aquellos modelos en los que el espectro primordial al final de inflación supera el valor: $P_{\mathcal{R}}^{end} > 0.024$.

De la Eq. (5.60) se obtiene que la temperatura disminuye durante todo el periodo inflacionario. Las Eqs. (5.59) y (5.61) indican que para los modelos que mantengan $f_T < 5$ durante inflación, Q y T/H aumentan también. Sin embargo, la Eq. (5.62) divide el crecimiento de ϵ_H con respecto al número de e-folds en distintas franjas de f_T , de las cuales sólo los valores de $f_T < 5$ tienen $d \log Q / dN > 0$:

$$\frac{d \log \epsilon_H}{dN} < 0 \quad \text{para} \quad \begin{cases} f_T < 1 & \text{y} \quad Q > \frac{f_T - 5}{2(f_T - 1)}, \\ f_T > 5 & \text{y} \quad \frac{f_T - 5}{2f_T - 2} < Q < \frac{f_T - 5}{f_T + 3}. \end{cases} \quad (5.63)$$

Cuando $f_T > 5$, el valor de $Q > 1$ por lo que Q comienza a disminuir y ϵ_H a aumentar. El sistema empieza a ser inestable y deja de ser consistente con *slow-roll*, por lo que inflación termina.

En la Fig. (5.10), vemos que se produce una discontinuidad en $Q_{end} \sim 5/2$ (que corresponde a $f_T = 0$ en la Eq. (5.63)). Si Q es menor que $5/2$ al final de inflación, κ no saldrá del límite de alta temperatura, sin embargo, para Q_{end} mayores, las correcciones térmicas de la masa de las partículas dejan de ser dominantes frente a gM y la disminución de la disipación permitirá salir del régimen de alta temperatura. Por otro lado, los modelos con $Q_{end} \gtrsim 10^2$ quedan excluidos ya que la amplificación del espectro primordial es superior a los límites impuestos por la producción de PBHs.

5.5. Resultados

En esta sección vamos a analizar los resultados obtenidos de inflación templada con una disipación que depende de la temperatura $Y_\phi \propto T^\kappa$, con κ variable, en el contexto de Warm Little Inflation que hemos visto en la sección anterior.

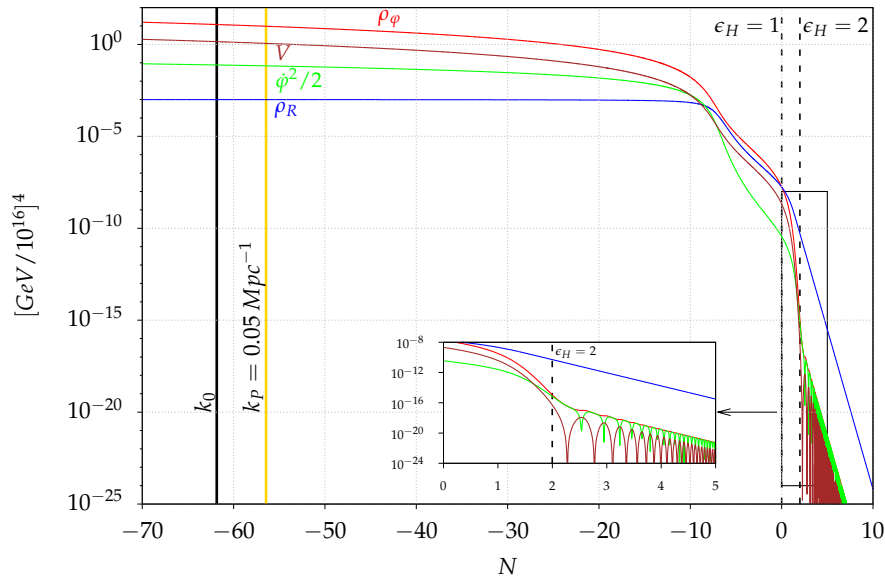


FIGURA 5.11: Evolución de las densidades de energía en función del número de e-folds. La densidad del inflatón, ρ_ϕ , la densidad de la radiación ρ_R , la energía cinética $\dot{\phi}^2/2$ y la energía potencial V . Inflación acaba en $\epsilon_H = 1$, y la etapa de recalentamiento en $\epsilon_H = 2$ (líneas discontinuas negras verticales). Para el caso $M = 10^{-4} m_{\text{Pl}}$, $g = 1$, $h = 3$ y $h_5 = 4$. Además, se muestra la escala acutual del universo $k_0 = a_0 H_0$ y la escala pivote del CMB k_p .

El resultado de la integración de las ecuaciones de Einstein a orden cero, nos da la evolución de las densidad de energía, del término cinético y del potencial inflacionario. Como se puede ver en la Fig. (5.11), la duración típica de inflación en los modelos es ~ 62 e-folds para los modelos que consiguen salir del régimen de alta temperatura, la escala pivote del CMB se sitúa en unos ~ 5.4 e-folds después. Los modelos que no consiguen salir del régimen de alta temperatura tienen una duración mayor, ~ 66 e-folds. Una disminución de ~ 3 e-folds en la duración total de inflación, supone una disminución aproximadamente igual a un orden de magnitud en la escala física k , cambio que es relevante en la producción de PBHs y en el espectro de las GWs.

Por otro lado, la disipación depende de la temperatura del baño térmico, y hemos visto que las partículas del baño térmico adquieren masa a medida que la temperatura disminuye. Este aumento de masa cambia el comportamiento de Y_ϕ con la temperatura, por lo que κ aumentará desde, como mínimo $\kappa = -1$ (cuando dominan las correcciones térmicas a la masa) hasta, como máximo $\kappa = 7$, pudiendo empezar y acabar en valores intermedios. Cuando la temperatura disminuye, nos acercamos al régimen de bajas temperaturas ($m_\chi = M g/2$) donde $\kappa > 0$.

De los resultados mostrados en la Sec. (5.2) vemos que si κ toma valores altos desde el principio, los valores de los observables tales como el índice espectral y la amplitud del espectro primordial se alejan de los valores observados por Planck, por lo que a priori esperamos que los modelos compatibles se encuentren con valores de κ cercanos a -1 en las escalas del CMB, y que a medida que transcurre inflación κ aumente lo suficiente para amplificar el espectro. Esta suposición previa es compatible con que si empezamos inflación en las escalas del CMB con un $\kappa \sim 3$ (como hemos visto en los modelos con $\kappa = cte$, Fig. (5.5)), el índice espectral limita los casos

compatibles con $Q_* \lesssim 10^{-2}$, para los que el espectro no amplifica lo suficiente.

Los espectros primordiales dependerán también de si consideramos la distribución de las fluctuaciones en el vacío ($\mathcal{N}_* = 0$), o en el caso térmico ($1 + 2\mathcal{N}_* = \coth[H_*/(2T_*)]$). Sin embargo, el caso $\mathcal{N}_* \neq 0$ no es tan eficiente a la hora de amplificar el espectro, por lo que aquí estudiaremos el caso $\mathcal{N}_* = 0$.

En inflación templada, las condiciones de *slow-roll* se mantienen siempre que ϵ_V y η_V sean $< (1 + Q)$, Eqs. (3.112) y (3.113), lo cuál nos permite acabar con $\epsilon_V > 1$ si $Q > 1$ al final de inflación. Además, inflación templada supone una transición de inflación a la RDE más suave. Además, se tiene en cuenta contribuciones extra resumadas en h_S pertenecientes a contribuciones bosónicas y a auto-interacciones. Cuanto mayor sea h_S más tarde se alcanza el límite de baja temperatura en la Fig. (5.8), por lo que tanto h como h_S regulan el aumento de κ hasta el final de inflación. Este término es importante porque si $Q_{end} \gg 1$ la función modo creciente puede amplificar el espectro primordial más allá de los límites observacionales (Fig. (5.1)) para valores altos de κ .

La condición de que Q crezca durante inflación es que $f_T < 5$, ($\kappa < 4$). Bajo esta condición, la Eq. (5.63) muestra que para $f_T = 0$, ($\kappa = -1$), ϵ_H empezará a decrecer si $Q > 5/2$, y cuando f_T sea igual a 1, ϵ_H volverá a aumentar². A medida que h aumenta o g o M disminuyen, la disipación disminuye y más tiempo permanece en el límite de alta temperatura. Si mantenemos g y M constantes y variamos sólo el acoplo h , entonces existe un h para el cual $Q_{end} \simeq 5/2$, y que separa ambos regímenes. Así mismo, la discontinuidad separa los modelos con $\kappa_{end} \sim -1$ de aquellos en los que κ aumenta.

Una vez obtenida la disipación, calculamos la evolución del campo, del factor de escala, H , T , junto con la evolución de las densidades de energía y del campo (Eqs. (3.96) y (3.97)) para cada combinación de valores M , g , h y h_S . En cada caso, iteramos el valor de λ hasta que en $N = -60$ el valor de la amplitud del espectro primordial sea el observado por Planck, $A_0 = 2.1 \times 10^{-9}$.

En las Fig. (5.12), Fig. (5.13), Fig. (5.14) se muestra el comportamiento típico de Q , T/H , ϵ_H , κ y $P_{\mathcal{R}}$ en función del número de e-folds, para varios acoplos h manteniendo constante el valor de $g = 0.8$, $h_S = 4$ y de $M = 10^{-4} m_{\text{Pl}}$ (aquí mostramos este valor de g y M para cubrir los casos en los que al final de inflación tenemos $\kappa_{end} = [-1, 4]$). A medida que h disminuye, la disipación es mayor y los valores de Q , T/H , ϵ_H , κ y $P_{\mathcal{R}}$ son mayores para un mismo número de e-folds, N .

En la Fig. (5.12)(a) se muestra la evolución de Q con el número de e-folds. Tal y como se muestra en la ecuación $d \log Q/dN$ (Eq. (5.59)), Q aumenta durante inflación salvo en los casos en que κ alcanza el valor $\kappa = 4$, momento en que empieza a decrecer. Además vemos la discontinuidad en el valor final debida a que inflación acaba en el régimen de baja temperatura. En la Fig. (5.12)(b) se muestra la evolución de ϵ_H con N . Podemos ver el comportamiento creciente/decreciente de ϵ_H tal y como se describe en la ecuación de evolución $d \log \epsilon_H/dN$ (Eq. (5.63)). ϵ_H crece con el número de e-folds hasta que Q alcanza el valor $\sim 5/2$, desde ese momento $d \log \epsilon_H/dN < 0$ hasta que $f_T = 1$ ($\kappa = 0$). Si $Q_{end} < 5/2$ entonces $d \log \epsilon_H/dN > 0$ durante todo el periodo inflacionario, pero si $Q_{end} > 5/2$ inflación dura más tiempo debido al cambio de comportamiento de ϵ_H , y Q sigue aumentando. Este hecho produce una discontinuidad en los valores finales de los parámetros cosmológicos: Q_{end} , κ_{end} , $(T/H)_{end}$ y $P_{\mathcal{R}}^{end}$.

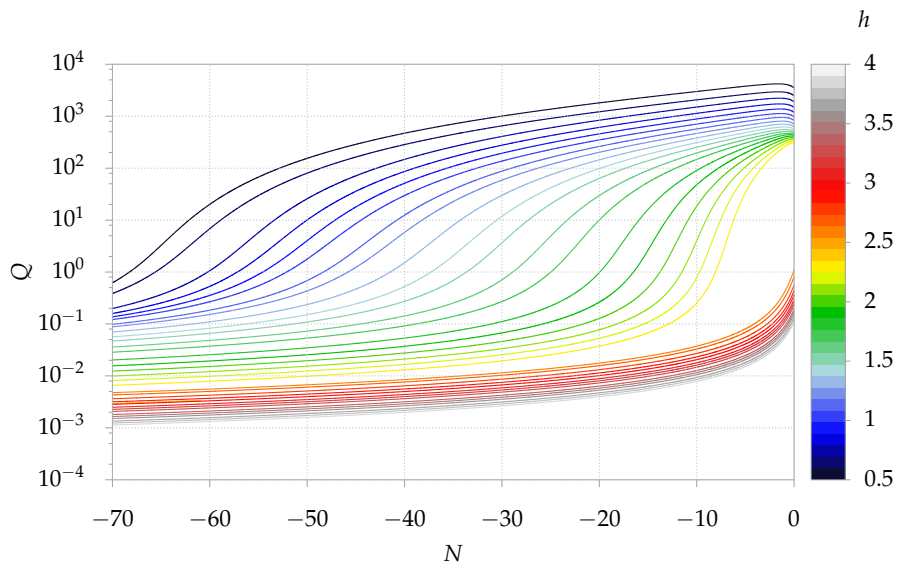
²A diferencia con la Sección (5.2), donde hemos estudiado los casos con $\kappa = cte = -1$ con $Y_\phi = C_T T^\kappa \phi^2$ de manera que la dependencia con ϕ^2 es suficiente para asegurar que ϵ_H aumenta siempre durante inflación.

En la Fig. (5.13)(a) vemos el comportamiento creciente de T/H durante inflación, así como la discontinuidad en $(T/H)_{end}$. En la Fig. (5.13)(b) mostramos el comportamiento de κ , y podemos ver los dos casos: $Q_{end} < 5/2$ en los que no se permanece en el régimen de alta temperatura y $Q_{end} > 5/2$ en los que se alcanza el régimen de baja temperatura $\kappa_{end} > -1$.

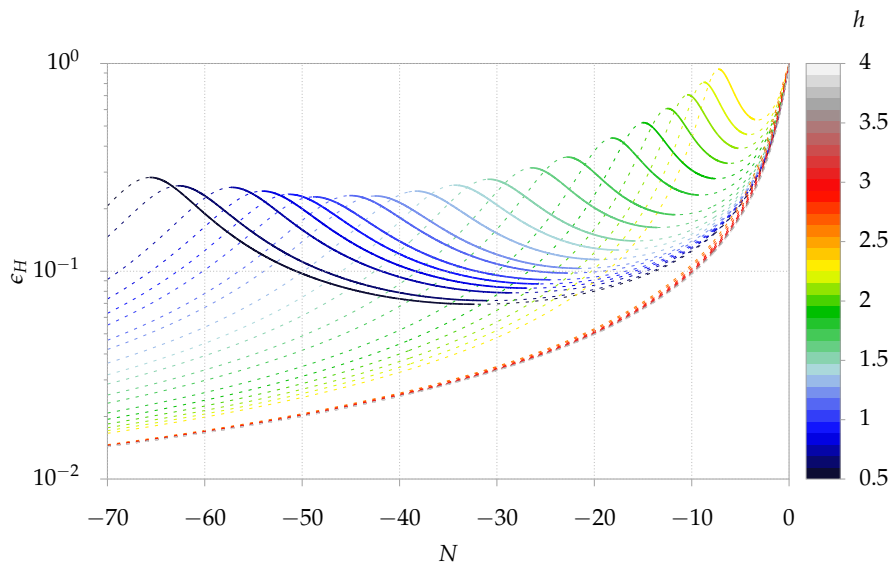
En la Fig. (5.14) se muestra la amplitud del espectro primordial de curvatura durante inflación. Los casos que consiguen amplificar la amplitud corresponden a aquellos que alcanzan el régimen de baja temperatura. El aumento de κ repercute en la amplitud del espectro primordial a través, fundamentalmente, de las funciones modo creciente/decreciente. Para estos acoplos, $\kappa > 0$ para $N \gtrsim -35$. A partir de $\kappa > 0$ el espectro primordial pasa del *red-tilted* a *blue-tilted*. Dado que la amplitud del espectro al final de inflación está sujeta a los límites comentados en los capítulos anteriores, sólo sobrevivirán los modelos cuya amplificación empiece a producirse en los últimos ~ 10 e-folds.

El valor de λ se ha obtenido iterando numéricamente las ecuaciones hasta obtener la amplitud del espectro primordial dado por Planck en las escalas del CMB, aquí fijadas en 60 e-folds (ver Fig. (5.15)), y donde se han usado las ecuaciones (5.6) y (5.7) para describir la función modo creciente/decreciente. La normalización del espectro a 60 e-folds antes del fin de inflación también sufre una discontinuidad en las soluciones de λ , ya que inflación dura más tiempo.

En la Fig. (5.15) se muestra tres ejemplos con distintas situaciones a la hora de normalizar el espectro primordial de curvatura en las escalas del CMB. En general, podemos encontrar casos en los que la normalización del espectro no tiene solución por el salto que produce finalizar inflación en $\epsilon_H = 1$, otros casos en los que sí existe solución y, finalmente, casos en los cuales la disipación es lo suficientemente alta como para que la amplificación del espectro se empiece a producir en las escalas del CMB y no exista una solución en λ capaz de normalizar el espectro.

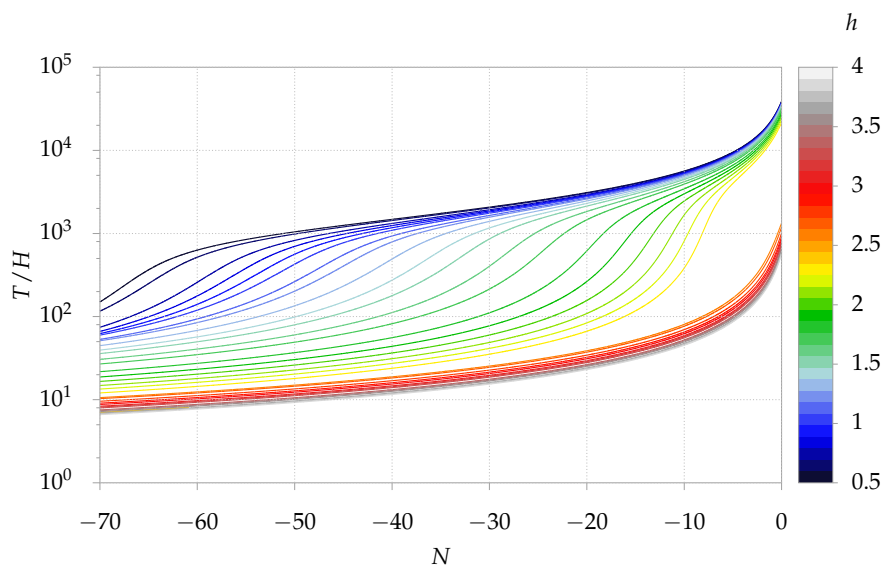


(a)

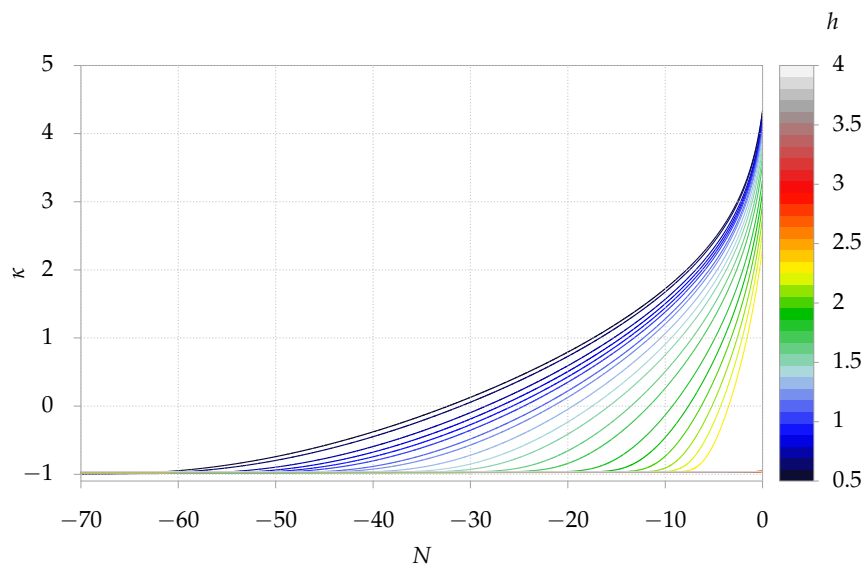


(b)

FIGURA 5.12: **(a)**: Evolución de Q frente al número de e-folds. **(b)**: Evolución de ϵ_H frente al número de e-folds. Las líneas discontinuas indican $Q < 5/2$ y $\kappa < 0$ o $\kappa > 0$, y las continuas los otros casos. En todos los casos $M = 10^{-4}m_{\text{pl}}$, $g = 0.8$, $h_S = 4$, $g_* = 12$ y el valor de λ corresponde al que normaliza el espectro en las escalas del CMB. La escala de color toma los valores de $h = 0.5, \dots, 2.3, 2.6, \dots, 4.0$.



(a)



(b)

FIGURA 5.13: **(a)**: Evolución de T/H frente al número de e-folds. **(b)**: Evolución de κ frente al número de e-folds. En todos los casos $M = 10^{-4}m_{\text{Pl}}$, $g = 0.8$, $h_S = 4$, $g_* = 12$ y el valor de λ corresponde al que normaliza el espectro en las escalas del CMB. La escala de color toma los valores de $h = 0.5, \dots, 2.3, 2.6, \dots, 4.0$.

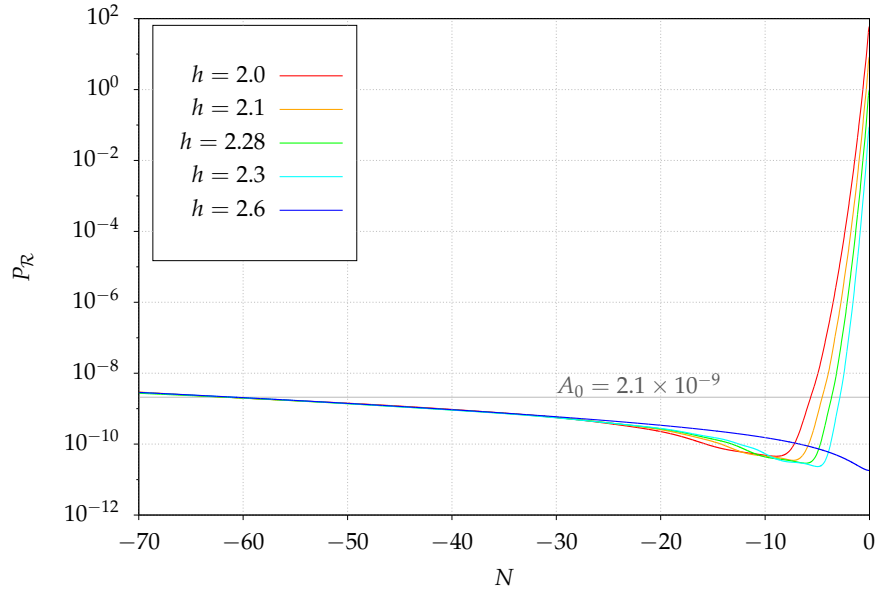


FIGURA 5.14: Evolución del espectro primordial de curvatura $P_{\mathcal{R}}$ frente al número de e-folds. En todos los casos $M = 10^{-4}m_{\text{Pl}}$, $g = 0.8$, $h_S = 4$, $g_* = 12$ y el valor de λ corresponde al que normaliza el espectro en las escalas del CMB.

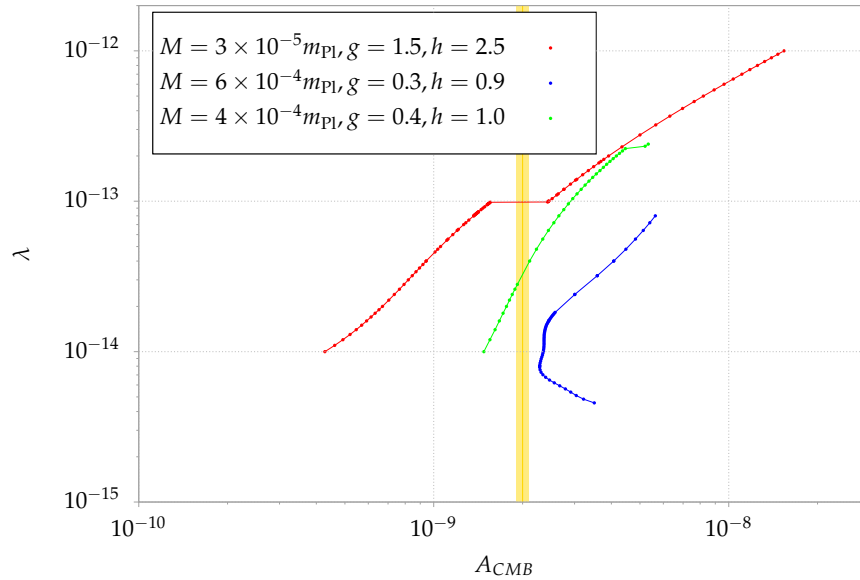


FIGURA 5.15: λ en función de la amplitud del espectro primordial en las escalas del CMB. Aquí, se ha fijado la escala en 60 e-folds previos al fin de inflación.

Una vez obtenida la evolución, obtenemos la escala física de los modos. Para ello, partimos de la relación de las escalas con el número de e-folds dada en la Eq. (3.77). Dado que tenemos la evolución de los parámetros hasta la fase de radiación, obtenemos el número de e-folds correspondiente a la duración de recalentamiento, N_{RH} , directamente de los datos, contando el número de e-folds desde $\epsilon_H = 1$ hasta $\epsilon_H = 2$, que es cuando se alcanza la RDE. La duración de inflación, desde la escala actual del universo hasta el final, la calculamos evaluando en el momento en que k es

igual a la escala actual del universo k_0 y sustituyendo los parámetros cosmológicos:

$$N_T = N_{RH} + 61.4225 + \log \left(\frac{\sqrt[4]{V_0}}{\sqrt[4]{V_{end}}} \right) + \log \left(\frac{\sqrt[4]{V_0}}{10^{16} \text{GeV}} \right), \quad (5.64)$$

$$N_{CMB} = N_{RH} + 56.018 - \log \left(\frac{k}{k_p} \right) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\rho_k}{\rho_{RH}} \right) + \log \left(\frac{\rho_{RH}^{1/4}}{10^{16} \text{GeV}} \right), \quad (5.65)$$

donde V_0 es el potencial en la escala correspondiente a la escala actual del universo y $k_p = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$.

En la Fig. (5.16)(a) se muestra el índice espectral en función de Q_* para los resultados comprendidos entre $M/m_{\text{Pl}} = [10^{-4} - 7 \times 10^{-4}]$, $g = [0.1, 1.7]$, $h = [0.1, 4]$ y $h_S = [2, 4]$. Los valores de Planck para el índice espectral son:

$$n_s = 0.9649 \pm 0.0044 \quad \text{al } 68\% \text{ C.L.}, \quad (5.66)$$

$$n_s = 0.9649^{+0.0085}_{-0.0087} \quad \text{al } 95\% \text{ C.L.}, \quad (5.67)$$

Alrededor de $Q_* \sim 0.01$ se produce la discontinuidad que corresponde a $Q_{end} \sim 5/2$. Para valores de $Q_{end} \lesssim 5/2$, el índice espectral no depende de los acoplos elegidos (M, g, h, h_S). Por otro lado, todos los casos con $Q_* \gtrsim 1$ quedan excluidos por estar fuera del rango observacional. Entre medias la mayoría de los parámetros son compatibles con las observaciones, aunque a medida que aumenta la disipación el índice espectral aumenta, pudiendo salir de la zona observable en valores $10^{-2} \lesssim Q_* \lesssim 0.1$, y, si por el contrario disminuye, saldrá del rango observable antes, para $10^{-1} \lesssim Q_* \lesssim 1$.

En la Fig. (5.16)(b) se muestra el índice escalar-tensor en el momento en que cruza el horizonte en las escalas del CMB, donde la zona sombreada gris queda excluida por las observaciones de Planck $r_* < 0.06$ [32]. Este límite impone que los valores de Q_* tienen que ser mayores a $\sim 10^{-2}$. En este modelo, los valores compatibles con el índice espectral y el índice escalar-tensor para Q_* están dentro del rango $\sim [10^{-2}, 1]$.

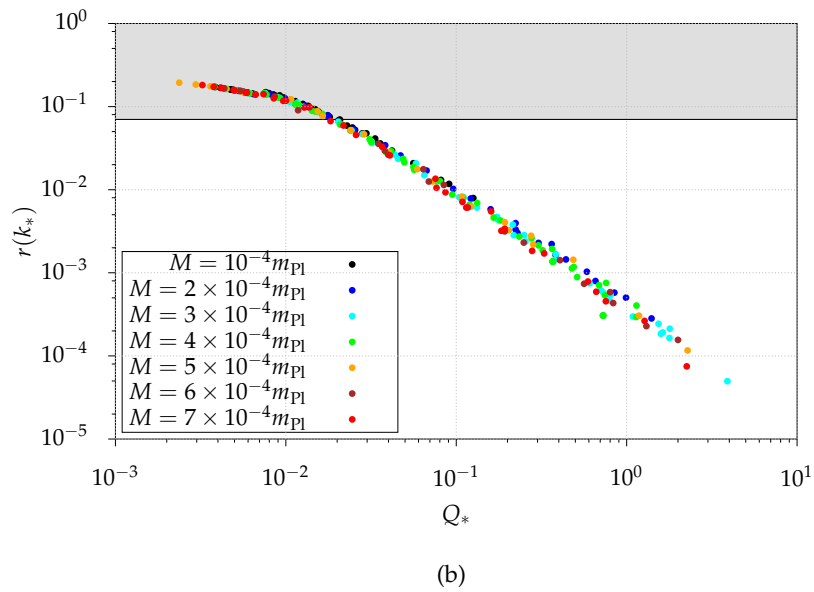
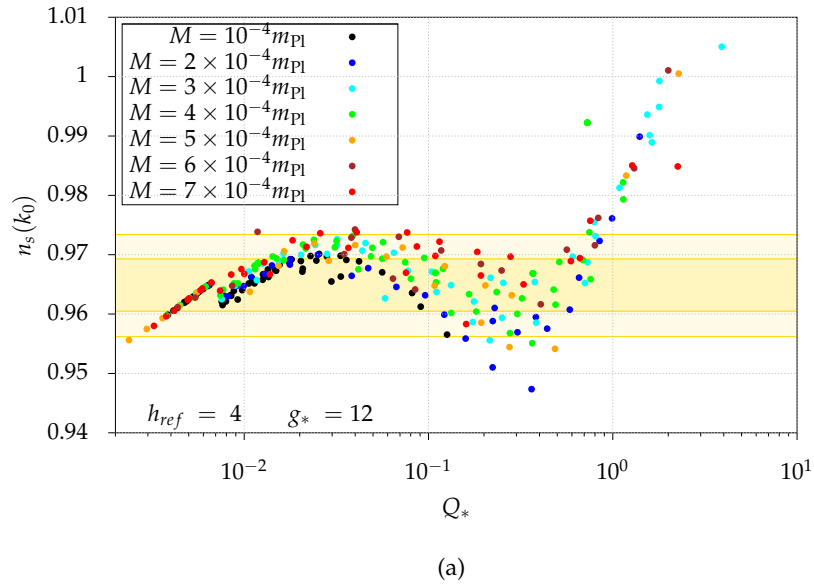
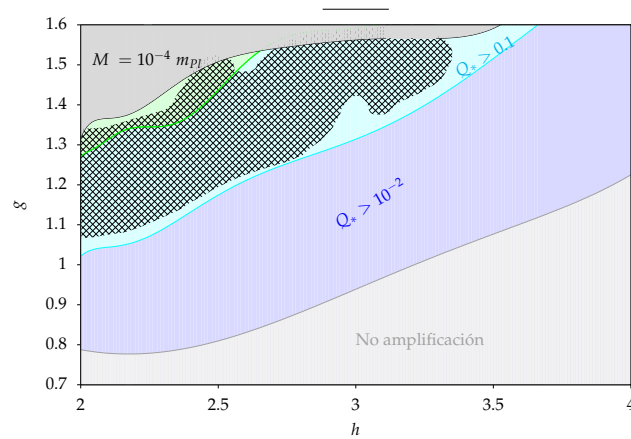
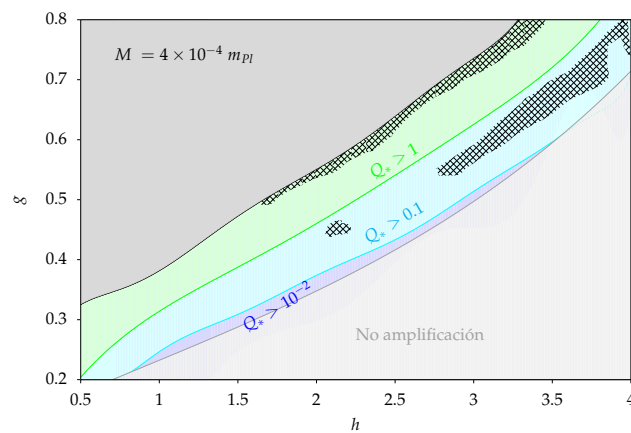


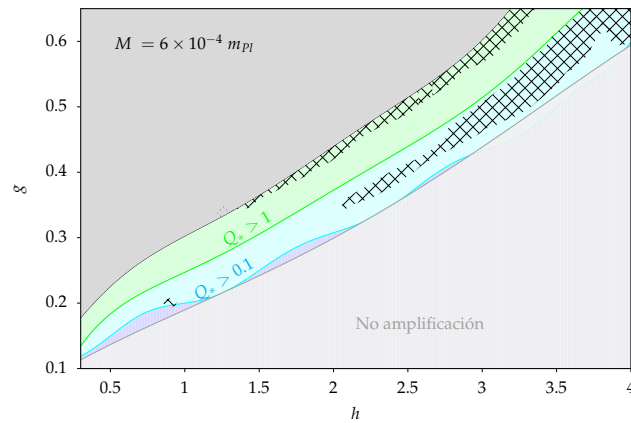
FIGURA 5.16: **(a)**: Índice espectral en función de Q_* . Las zonas sombreadas indican los valores de Planck a 1σ y 2σ . **(b)**: Índice escalar-tensor en función de Q_* . La zona sombreada gris indica el límite de Planck.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 5.17: Espacio de parámetros para valores de $M/(10^4 m_{Pl}) = 1, 4$ y 6 , $h_S = 4$ y $g_* = 12$. En la esquina inferior derecha de la figura la zona sombreada gris \blacksquare indica aquellos modelos que no amplifican su espectro al final de inflación. Hacia arriba, la zona \square $Q_* > 10^{-2}$, la zona \square $Q_* > 10^{-1}$ y la zona \square $Q_* > 1$. En la esquina superior izquierda, \blacksquare la normalización del espectro no tiene solución y la amplitud del espectro primordial en las escalas del CMB es siempre superior a los valores de Planck. Por último, la zona con cruces está excluida porque el índice espectral está fuera del rango observacional.

El espacio de parámetros $g - h$ se muestra en la Fig. (5.17), para valores de $M/m_{\text{Pl}} = 10^4, 4 \times 10^4$ y 6×10^4 , $h_S = 4$ y $g_* = 12$. El auto-acoplo λ se ha obtenido por iteración numérica hasta normalizar el espectro primordial a los valores de Planck en las escalas del CMB, a través de la relación de las escalas con el número de e-folds dado (Eq. (5.65)). Se muestra el parámetro g frente a h para valores de M y h_S constantes. Cuando la disipación aumenta con valores de h menores o valores de g más altos, los efectos disipativos empiezan a ser relevantes y los valores del espectro primordial de curvatura al final de inflación aumenta. En todos los ejemplos aparece una zona en la que no existe solución a la hora de normalizar el espectro, y su amplitud es siempre mayor que el valor de Planck (zona sombreada gris). Sobre estas áreas se superponen otras, que hemos señalado con cruces, indicando los modelos cuyo índice espectral está fuera de los valores de Planck a 2σ .

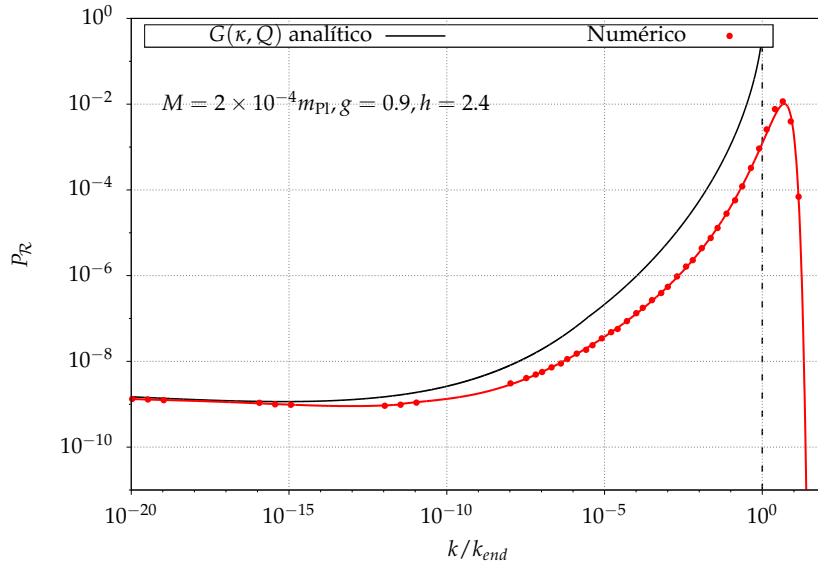
5.5.1. Espectro primordial al final de inflación

Hasta este punto hemos considerado que la función modo creciente/decreciente general $G(\kappa, Q)$ dada en las ecuaciones (5.6) y (5.7) es válida para describir la amplitud del espectro primordial en los casos en que el comportamiento de Y_φ con la temperatura es $Y_\varphi \propto T^\kappa$ con κ variable. Sin embargo, esta función no tiene en cuenta la derivada de κ con respecto de la temperatura. Con el propósito de comprobar la validez de $G(\kappa, Q)$ en nuestros modelos, se han integrado las ecuaciones de evolución de las perturbaciones con la disipación dada en la Eq. (5.51). En la Fig. (5.18)(a) se muestra la sobre-estimación que da la aproximación $G(\kappa, Q)$ con respecto al resultado numérico. En la Fig. (5.18)(b) se ha representado el espectro primordial de curvatura en el momento en que cruza el horizonte en función de la escala física k (aquellos modos con $k < k_{\text{end}}$), y se incluyen los modos que no han conseguido salir del horizonte, (aquellos con $k > k_{\text{end}}$). Los espectros son similares en escalas pequeñas de k , hasta que k aumenta y la amplificación del espectro empieza a ser eficiente. Dependiendo de los parámetros, la última escala física que sale del horizonte durante inflación alcanza un valor k_{end} distinto, pero todos del orden $\sim 10^{20}$. Se observa que en las escalas altas $\sim 10^{20} \text{ Mpc}^{-1}$, la amplitud del espectro primordial aumenta durante inflación hasta el modo $k \sim 5k_{\text{end}}$, y decae en escalas mayores a $> 5k_{\text{end}}$. Lo interesante de estos nuevos espectros es que la amplitud del espectro primordial es máxima en los modos que no consiguen salir del horizonte, alrededor de $k \sim 5k_{\text{end}}$, y aunque no consigan salir serán la parte dominante en la generación tanto de PBHs como en la densidad de energía de las GWs en la actualidad. Una vez que el espectro alcanza su máximo, el espectro cae exponencialmente para los modos mayores a $\sim 5k_{\text{end}}$. Dado que la aproximación $G(\kappa, Q)$ funciona bien cuando κ no varía, mantenemos el cálculo del índice espectral y del índice escalar-tensor ya que no se ven afectados por las diferencias analítico/numérico porque en las escalas del CMB $\kappa \simeq -1$.

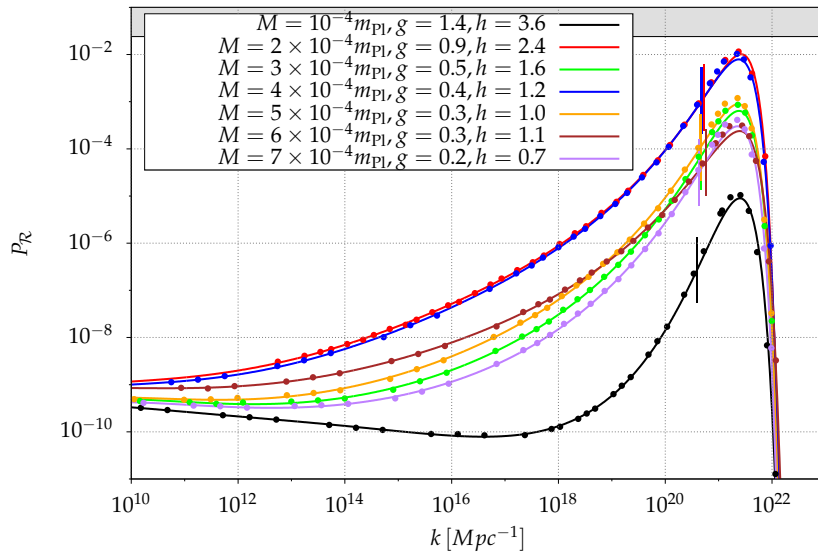
Hemos seleccionado, para cada valor de M , los parámetros de g y h que dan una mayor amplificación del espectro al final de inflación con $P_{\mathcal{R}} < 0.024$, donde el espectro ha sido calculado usando la función $G(\kappa, Q)$. Sin embargo, queremos ver el comportamiento del espectro incluyendo los efectos de la variación de κ no sólo en la amplitud del espectro primordial de curvatura, sino también en la producción de PBHs y GWs. Para poder calcular la densidad de energía de las GWs y la varianza de las fluctuaciones de densidad de los espectros seleccionados, se ha realizado un ajuste de los datos numéricos. La función elegida es:

$$\log P_{\mathcal{R}}(k) = c_0 + \left(1 - e^{b_0 x - b_1}\right) P_5(x), \quad (5.68)$$

donde $x = \log(k/k_{end})$, $P_5(x) = \sum_0^5 a_i x^i$ y $c_0 = -25$. La función $(1 - e^{b_0 x - b_1})$ modela la caída exponencial del espectro para los modos $k \gtrsim 5k_{end}$, mientras que $P_5(x)$ se ajusta al espectro primordial para los modos que salen durante inflación. La constante c_0 se introduce para evitar que el espectro se haga negativo. Los coeficientes del ajuste se dan en la Tabla (5.5). Este ajuste funciona bien para los modos $k/k_{end} > 10^{-12}$.



(a)

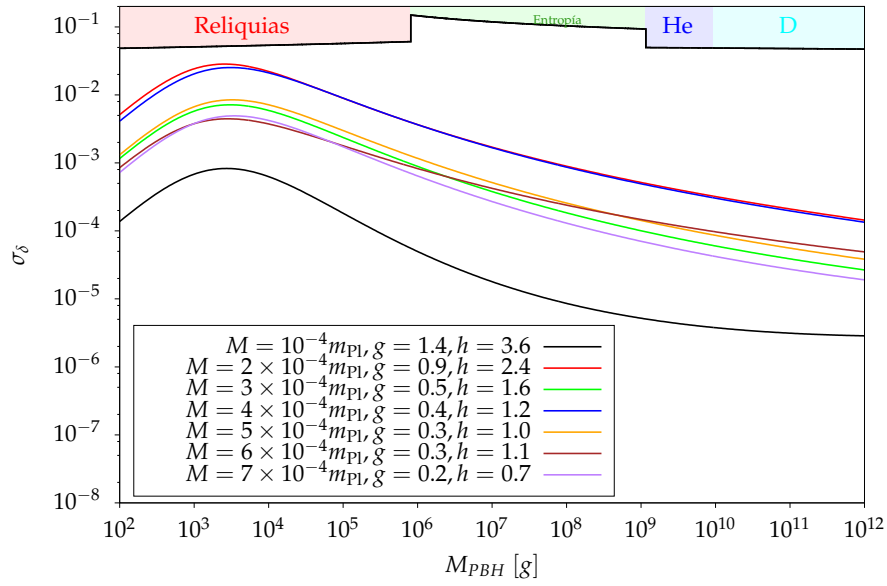


(b)

FIGURA 5.18: **(a)**: Espectro primordial de curvatura en función del número de onda normalizado. Los puntos corresponden al resultado numérico, mientras que las líneas continuas son el ajuste de las funciones. Las líneas verticales indican el modo máximo que consigue salir del horizonte. La zona gris indica el límite $P_{\mathcal{R}} > 0.024$. **(b)**: Espectro primordial de curvatura numérico en función del número de onda, incluyendo los modos que no han salido del horizonte durante inflación. Las líneas verticales indican el último modo que sale del horizonte.

TABLA 5.5: Coeficientes del ajuste del espectro primordial, Eq. (5.68).

M/m_{Pl}	g	h	a_0	a_1	a_2	$a_3 \times 10^3$	$a_4 \times 10^4$	$a_5 \times 10^6$	b_0	b_1
10^{-4}	1.4	3.6	10.101	2.7069	0.32689	18.567	5.1652	5.6499	1.12985	3.7934
2×10^{-4}	0.9	2.4	18.351	1.7829	0.14145	8.3661	2.7298	3.45	1.81186	5.7949
3×10^{-4}	0.5	1.6	15.487	1.94	0.14802	7.783	2.5559	3.4977	1.53848	5.09359
4×10^{-4}	0.4	1.2	18.233	1.8019	0.14391	8.6305	2.8623	3.6692	1.60554	5.32719
5×10^{-4}	0.3	1.0	15.963	1.8733	0.14483	8.0364	2.6916	3.6427	1.54388	5.10092
6×10^{-4}	0.3	1.1	15.25	1.5821	0.12109	6.6757	2.1502	2.7598	1.56107	4.99287
7×10^{-4}	0.2	0.7	14.745	1.944	0.14338	6.7079	2.0095	2.6645	1.51569	5.01758

FIGURA 5.19: Varianza de las fluctuaciones de densidad en función de la masa de los PBHs. Las zonas sombreadas, $\sigma_\delta \gtrsim 0.05$, quedan excluidas por los límites en la fracción inicial de masas.

Una vez obtenido el espectro, continuamos viendo los posibles límites que existen en la formación de PBHs. Para ello, calculamos la varianza de las perturbaciones de densidad a través de la integración numérica del espectro, cuya dependencia es:

$$\sigma_\delta^2 = \frac{4(1+\omega)^2}{(5+3\omega)^2} \int (kR)^4 P_{\mathcal{R}}(k) \tilde{W}(kR)^2 d \log k, \quad (5.69)$$

integrando numéricamente el espectro primordial. El resultado es la relación de σ_δ en función de la escala física k . Usando la relación de la escala k con las masa de los PBHs (Eq. (4.48)) podemos obtener la variación de σ_δ en función de la masa de los PBHs. Los resultados para los parámetros seleccionados se muestran en la Fig. (5.19). Hemos obtenido PBHs con masas del orden $10^3 - 10^4$ g, los cuales han tenido tiempo suficiente para evaporarse antes de BBN y no contribuyen, por lo tanto, a la densidad de materia oscura del universo. Además, se muestra el límite superior impuesto por la fracción inicial de masas máxima permitida por la formación de reliquias, producción de entropía, helio y deuterio (ver Fig. (4.7)). En todos los casos

estamos por debajo de estos límites, por lo que la posible formación de PBHs no añade ninguna restricción adicional en estos modelos.

Por último, la amplitud del espectro primordial de curvatura actúa como término de fuente para la amplitud de las ondas gravitacionales una vez que las perturbaciones vuelven a entrar en el horizonte. Cuando el espectro primordial escalar es amplificado en los últimos e-folds al final de inflación, se traduce en una amplificación en la densidad de energía de las GWs en esas mismas escalas. Así pues, hemos calculado el espectro de densidad de energía de las GWs integrando numéricamente la Eq. (4.30) en la RDE, donde el integrando está dado por la Eq. (4.31). Por último, en la Fig. (5.20) se muestra el objetivo final de esta tesis. Mostramos algunos ejemplos de la densidad actual de las GWs generadas por las perturbaciones escalares una vez entran en la fase de radiación en función de la frecuencia. Los casos tienen los valores de $h_s = 4$ y $g_* = 12$. La temperatura de recalentamiento en estos ejemplos es del orden de $\sim 10^{13}$ GeV, correspondiente a una frecuencia de $\sim 10^6$ Hz. El pico del espectro lo obtenemos a frecuencias mayores, con $\Omega_{GW,0} \sim 7 \times 10^{-10}$ en $f \sim 5 \times 10^6$ Hz. En estos casos obtenemos un índice espectral para los tensores $n_s^{GW} \approx 2.5$ antes de alcanzar el máximo, que coincide con $n_s^{GW} = 3 + 2/\log(f/f_p)$ dado en [130, 131].

Arriba, está marcado el límite superior de BBN. Tanto los límites permitidos como las curvas de sensibilidad para los detectores LIGO, eLisa, Voyager, Einstein Telescope y Cosmic Explorer, han sido obtenidos de la página web de Mandic V. & Floden E.. Las curvas de sensibilidad de los detectores DECIGO y BBO han sido obtenidas de [191]. De todos los detectores, Cosmic Explorer y Einstein Telescope operan en el rango de frecuencias a un nivel de intensidad cercano a las predicciones de nuestros modelos. Sin embargo, para que una futura detección sea plausible, es necesario poder amplificar más los espectros para poder acercarnos a la zona operativa de los detectores.

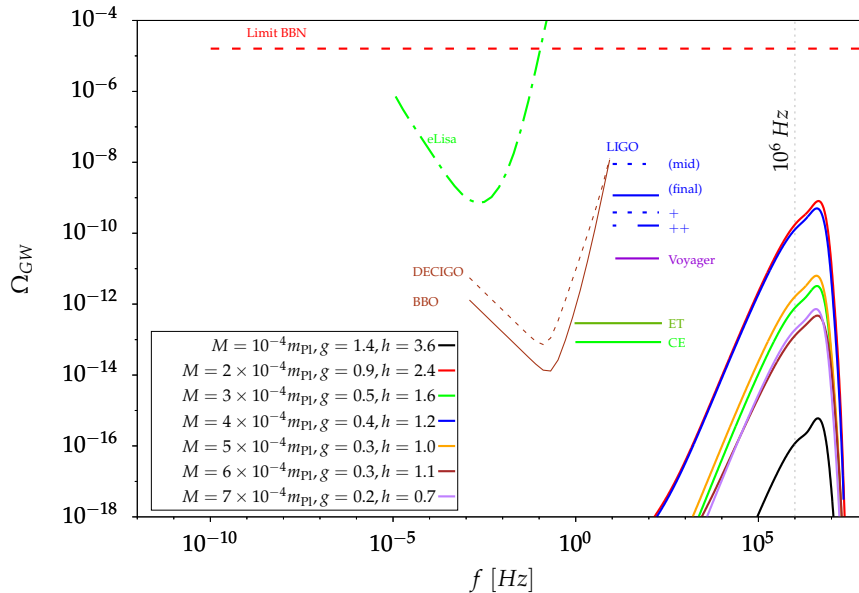


FIGURA 5.20: Conjunto de espectros de la densidad de energía de las GW que entran hoy en el horizonte en función de la frecuencia (área naranja). El límite de BBN se muestra arriba con una línea roja discontinua. Además, se muestran algunas curvas de sensibilidad de algunos detectores.

Capítulo 6

Conclusiones

“Dame una vara... y te mediré ¡La Tierra!”

Eratóstenes (276 a.C.)

El origen de esta tesis reside en la pregunta de si es posible en un futuro próximo observar el universo en los periodos que hasta día de hoy permanecen ocultos a través de cualquier ventana observacional. La primera detección de ondas gravitacionales en el año 2015 ha marcado un hito en la historia de la astronomía y cosmología, primero por la confirmación de la existencia de ondas gravitacionales y segundo por la creación de una nueva ventana a través de la cual podemos observar el universo. Hemos visto en el Capítulo (4) diversos detectores de GWs que trabajan en un rango de frecuencias perteneciente a periodos anteriores al momento en que se produjo el CMB, tales como DECIGO, BBO, ET, CE, LIGO, entre otros (ver Fig. (5.20)).

La siguiente pregunta que nos hemos hecho es si existe la posibilidad de que inflación produzca un espectro que sea compatible con el rango observacional de los futuros detectores de GWs. Para resolverla, hemos analizado distintos potenciales causantes de inflación en el escenario de inflación templada, donde la disipación entre el inflatón y otros campos se produce durante el periodo inflacionario y no sólo en la época de recalentamiento, siendo un proceso más natural. En las ecuaciones de las perturbaciones primordiales aparece, por un lado, un nuevo término de fricción que modifica la dinámica con respecto a inflación clásica, y por otro lado, la amplitud del espectro primordial de curvatura se ve modificado por la influencia de las fluctuaciones del baño térmico, que hemos modelado con la función modo creciente/decreciente. Ambas modificaciones dependen del tipo de disipación del inflatón a otros grados de libertad, y del potencial inflacionario. Este marco teórico ofrece, por lo tanto, un mecanismo para la generación de ondas gravitacionales que merece la pena ser analizado a fondo.

Hemos realizado un primer análisis para el potencial caótico general: cuadrático, cuártico y séxtico, y para el potencial híbrido general. En estos casos hemos estudiado inflación con un comportamiento disipativo $\kappa = cte$ y dentro de las aproximaciones *slow-roll*. Con este estudio, hemos calculado las predicciones para cada caso del índice espectral, de la evolución del espectro primordial de curvatura y de la densidad de energía de las GWs. Hemos calculado los parámetros de manera que amplitud del espectro primordial esté normalizada en las escalas del CMB. De esta forma, nos hemos hecho una idea previa de si existen parámetros para cada modelo que sean capaces de amplificar el espectro y que además sean compatibles con el índice espectral y el valor de la amplitud del espectro de curvatura en las escalas del

CMB. Los potenciales cuadrático y cuártico, tienen un espacio de parámetros amplio compatible con el índice espectral. Si empezamos por $\kappa = -1$ y aumentamos su valor, la zona compatible es cada vez más pequeña. En el potencial séxtico, por el contrario, tenemos un espacio de parámetros más pequeño y sólo para $\kappa > 0$.

En el potencial híbrido tenemos dos campos, donde el campo inflacionario tiene una pequeña variación en su trayectoria inflacionaria ($\Delta = \varphi - \varphi_{end} \ll 1$) e inflación termina por una transición de fase. En este caso, la relación disipativa Q varía poco en el régimen *slow-roll*, por lo que si queremos ver una amplificación en el espectro hemos de empezar en el régimen de una fuerte disipación. Bajo estas condiciones, hemos normalizado el espectro primordial de curvatura y calculado el índice espectral en las escalas del CMB. No hemos encontrado ningún caso que sea compatible $\Delta \ll 1$ y que sea compatible con las observaciones.

Para poder estudiar el problema e identificar los modelos en los que aumente el espectro fuera de las escalas del CMB, y obtener predicciones fiables, hemos estudiado en mayor profundidad la forma funcional de las funciones modo creciente/decreciente, estudiando modelos con un comportamiento de $Y_\varphi \propto T^\kappa$ con κ variable. Dado que Y_φ depende de la masa efectiva, existen modelos de inflación en los cuales κ no se mantendrá constante a lo largo de inflación, por lo que hemos analizado su influencia en la amplitud del espectro primordial de curvatura, y hemos visto que la aproximación general de la amplitud del espectro primordial con $Y_\varphi \propto T^\kappa$ con κ variable difiere de la numérica cuando $d\kappa/d \log T$ aumenta. En nuestros modelos, esa diferencia empieza a ser significativa en las escalas $k \gtrsim 10^{-10} k_{end}$. Por este motivo, sería necesario ampliar el estudio de un potencial caótico en WLI más allá de los ejemplos mostrados aquí.

En este escenario, nos hemos enfocado en inflación caótica, donde el inflatón interactúa con bosones y cuyas simetrías permiten que en el régimen de alta temperatura la disipación se comporte como $Y_\varphi \propto 1/T$. Inflación comienza con $\kappa = -1$, donde el estudio previo con $\kappa = cte$ nos dice que existe una zona amplia en el espacio de parámetros cuyos observables son compatibles con las observaciones de Planck. Cuando la temperatura disminuye a medida que transcurre inflación, tendremos modelos que consiguen salir del régimen de alta temperatura y alcanzar $\kappa > 0$ al final de inflación. Los casos con $\kappa > 0$ son aquellos en los que la amplitud del espectro primordial de curvatura es amplificada por la función modo creciente.

Por otro lado, en el Capítulo (4) vimos que una vez que las fluctuaciones primordiales escalares vuelven a entrar en el horizonte en la época post-inflacionaria, éstas actúan como término de fuente de las ondas gravitacionales. Como consecuencia, la densidad de energía de las GWs depende de la amplitud del espectro primordial de curvatura al cuadrado. Es decir, si se amplifica el espectro primordial de curvatura se produce la amplificación en el espectro de las GWs en las escalas cercanas al pico del espectro escalar.

Así como la amplificación del espectro primordial de curvatura afecta a las GWs, también aumenta la fracción inicial de masas de los PBHs (Sección 4.2). La producción de los PBHs que se producen justo después de inflación está limitada por la generación de entropía al evaporarse. Nuestros modelos producen PBHs con masas del orden de $10^4 g$, cuyo tiempo de evaporación es $10^{-18} s$, por lo que no contribuyen a la densidad de materia oscura actual del universo, ni alteran las condiciones del universo en BBN. Además, nos hemos asegurado de que la densidad de las GWs está dentro del límite producido por la densidad de radiación en el momento de BBN.

Finalmente, seleccionamos aquellos modelos cuyas predicciones del índice escalar, del índice escalar-tensor y de la amplitud del espectro primordial de curvatura

son compatibles con los datos de Planck, que amplifican el espectro al final de inflación y que están dentro de los límites impuestos por BBN y por los PBHs. Hemos encontrado que la amplitud del espectro primordial continúa aumentando para los modos que no han conseguido salir del horizonte durante inflación, moviendo el pico del espectro a $\sim 5 \kappa_{end}$. Después de alcanzar su valor máximo el espectro sufre una caída exponencial debido a que la disipación no es capaz de amplificar el espectro una vez inflación termina y la transferencia de energía a otros grados de libertad deja de ser significativa. El pico del espectro primordial de curvatura produce un pico en el espectro de los tensores a $\sim 7 \times 10^6 \text{ Hz}$. Con un índice espectral tensorial $n_s^{GW} \sim 2.5$, los modelos seleccionados distan de la zona observable de los detectores de GWs en $\sim 10^2 \text{ Hz}$, o en amplitud la distancia es del orden de 10^4 , con Einstein Telescope o Cosmic Explorer. Mientras que los resultados mostrados en esta tesis no ofrecen posibilidad de detección a través de ET o CE, los futuros detectores diseñados para la detección de ondas gravitacionales en frecuencias superiores a $\sim 10^5 \text{ Hz}$ sí podrían llegar a detectar el fondo estocástico de GWs.

Constantes físicas y factores de conversión

Constantes físicas

Velocidad de la luz	$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante de gravitación de Newton	$G_N = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Constante de Planck	$h = 6.62606896(33) \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de Planck reducida	$\hbar \equiv h/2\pi = 1.054571628 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Longitud de Planck	$l_{\text{Pl}} = 1.61605(10) \times 10^{-35} \text{ m}$
Tiempo de Planck	$t_{\text{Pl}} = 5.39056(34) \times 10^{-44} \text{ s}$
Temperatura de Planck	$T_{\text{Pl}} = 1.41679(11) \times 10^{32} \text{ K}$
Masa de Planck	$M_{\text{Pl}} = 1.22089 \times 10^{19} \text{ GeV}$
Masa de Planck reducida	$m_{\text{Pl}} = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.380658(12) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Masa solar	$M_{\odot} = 1.98841 \times 10^{30} \text{ kg}$

Parámetros FLRW

Parámetro de Hubble actual	$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Factor de escala para el parámetro de Hubble	$h = 0.674(5)$
Longitud de Hubble	$c/H_0 = 1.372 \times 10^{26} \text{ m}$
Densidad crítica actual	$\rho_c = 3m_{\text{Pl}}^2 H_0^2 = 1.053672 \times 10^{-5} \text{ h}^2 (\text{GeV}/c^2) \text{ cm}^{-3}$

Λ CDM [32]

Amplitud del espectro primordial de curvatura ¹	$A_s = 2.1 \times 10^{-9}$
Índice espectral ¹	$n_s = 0.9649 \pm 0.0044$
<i>Running</i> ¹	$\alpha_s = 0.0011 \pm 0.0099$
Razón escalar-tensor ²	$r < 0.06$
Densidad en número de fotones del CMB	$n_\gamma = 410.7(T/2.7255)^3 \text{ cm}^{-3}$
Densidad de fotones del CMB	$\rho_\gamma = 0.260 \text{ eV cm}^{-3}$
Parámetro de densidad de radiación ($\Omega_\gamma + \Omega_\nu$)	$\Omega_R = 5.38 \times 10^{-5}$
Parámetro de densidad bariónica	$\Omega_b = 0.0493$
Parámetro de densidad de CDM	$\Omega_c = 0.265$
Parámetro de densidad de materia ($\Omega_b + \Omega_c$)	$\Omega_m = 0.315$
Parámetro de densidad de la energía oscura	$\Omega_\Lambda = 0.685$
Constante cosmológica	$\Lambda = 1.088 \times 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$
Edad actual del universo	$t_0 = 13.797 \text{ Gyr}$
Número efectivo de ν	$N_{\text{eff}} = 2.99$

¹En la escala pivote 0.05 Mpc^{-1}

²En la escala pivote 0.002 Mpc^{-1}

Densidad de entropía/ k_B
Temperatura actual CMB

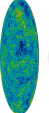

$$s/k_B = 3182.39 T \text{ cm}^{-3}$$
$$T_0 = 2.7255 \text{ K}$$

Factores de conversión

$$pc = 3.08567758149 \times 10^{16} \text{ m}$$
$$1 \text{ Mpc} = 3.0856 \times 10^{24} \text{ cm}$$
$$\hbar c = 197.3269631 \text{ MeV fm}$$
$$1 \text{ s} = 9.7157 \times 10^{-15} \text{ Mpc}$$
$$1 \text{ yr} = 3.1558 \times 10^7 \text{ s}$$
$$1 \text{ GeV} = 1.7827 \times 10^{-24} \text{ g}$$
$$1 \text{ GeV} = 1.1610^{13} \text{ K}$$
$$1 \text{ GeV} = 5.06 \times 10^{13} \text{ cm}^{-1}$$
$$1 \text{ GeV} = 1.52 \times 10^{24} \text{ s}^{-1}$$

Apéndice A

Historia del universo

	a	N	z	t	H [GeV]	L [Mpc]	T	k [Mpc ⁻¹]	f [Hz]	M [gr]
10 ¹⁶ GeV	7.8 · 10 ⁻³⁰	67	1.3 · 10 ²⁹	1.5 · 10 ⁻³⁹ s	2.3 · 10 ¹⁴	1.3 · 10 ⁻²³	10 ¹⁶ GeV	7.9 · 10 ²²	1.2 · 10 ⁸	0.59
10 ¹⁴ GeV	7.8 · 10 ⁻²⁸	62	1.3 · 10 ²⁷	1.5 · 10 ⁻³⁵ s	2.3 · 10 ¹⁰	1.3 · 10 ⁻²¹	10 ¹⁴ GeV	7.9 · 10 ²⁰	1.2 · 10 ⁶	5.9 · 10 ³
PBHs	2.3 · 10 ⁻²²	50	4.4 · 10 ²¹	1.2 · 10 ⁻²⁴ s	0.27	3.7 · 10 ⁻¹⁶	3.4 · 10 ⁸ GeV	2.7 · 10 ¹⁵	4.2	5.0 · 10 ¹⁴
t f	4.5 · 10 ⁻¹⁶	35	2.2 · 10 ¹⁵	4.8 · 10 ⁻¹² s	6.8 · 10 ⁻¹⁴	7.3 · 10 ⁻¹⁰	170 GeV	1.4 · 10 ⁹	2.1 · 10 ⁻⁶	2.0 · 10 ²⁷
Higgs	6.4 · 10 ⁻¹⁶	35	1.6 · 10 ¹⁵	9.9 · 10 ⁻¹² s	3.3 · 10 ⁻¹⁴	1.0 · 10 ⁻⁹	130 GeV	9.7 · 10 ⁸	1.5 · 10 ⁻⁶	4.0 · 10 ²⁷
Z ⁰	8.9 · 10 ⁻¹⁶	35	1.1 · 10 ¹⁵	1.9 · 10 ⁻¹¹ s	1.7 · 10 ⁻¹⁴	1.4 · 10 ⁻⁹	91 GeV	7.0 · 10 ⁸	1.1 · 10 ⁻⁶	7.7 · 10 ²⁷
W ⁺ W ⁻	1.0 · 10 ⁻¹⁵	35	9.8 · 10 ¹⁴	2.5 · 10 ⁻¹¹ s	1.3 · 10 ⁻¹⁴	1.6 · 10 ⁻⁹	80 GeV	6.2 · 10 ⁸	9.5 · 10 ⁻⁷	1.0 · 10 ²⁸
b b̄	2.0 · 10 ⁻¹⁴	32	5.0 · 10 ¹³	9.6 · 10 ⁻⁹ s	3.4 · 10 ⁻¹⁷	3.1 · 10 ⁻⁸	4.2 GeV	3.2 · 10 ⁷	4.9 · 10 ⁻⁸	3.9 · 10 ³⁰
τ ⁺ τ ⁻	4.9 · 10 ⁻¹⁴	31	2.0 · 10 ¹³	5.8 · 10 ⁻⁸ s	5.7 · 10 ⁻¹⁸	7.6 · 10 ⁻⁸	1.8 GeV	1.3 · 10 ⁷	2.0 · 10 ⁻⁸	2.3 · 10 ³¹
c c̄	6.9 · 10 ⁻¹⁴	30	1.4 · 10 ¹³	1.1 · 10 ⁻⁷ s	2.9 · 10 ⁻¹⁸	1.1 · 10 ⁻⁷	1.3 GeV	9.5 · 10 ⁶	1.5 · 10 ⁻⁸	4.6 · 10 ³¹
Nucleones	2.7 · 10 ⁻¹³	29	3.7 · 10 ¹²	1.8 · 10 ⁻⁶ s	1.9 · 10 ⁻¹⁹	2.4 · 10 ⁻⁷	0.86 GeV	4.1 · 10 ⁶	6.4 · 10 ⁻⁹	7.2 · 10 ³²
Transición QCD	6.3 · 10 ⁻¹³	28	1.6 · 10 ¹²	9.3 · 10 ⁻⁶ s	3.5 · 10 ⁻²⁰	9.3 · 10 ⁻⁷	0.15 GeV	1.1 · 10 ⁶	1.7 · 10 ⁻⁹	3.8 · 10 ³³
π ⁺ π ⁻	1.0 · 10 ⁻¹²	28	9.7 · 10 ¹¹	2.5 · 10 ⁻⁵ s	1.3 · 10 ⁻²⁰	1.2 · 10 ⁻⁶	0.14 GeV	8.1 · 10 ⁵	1.3 · 10 ⁻⁹	1.0 · 10 ³⁴
π ⁰	1.1 · 10 ⁻¹²	28	9.0 · 10 ¹¹	2.9 · 10 ⁻⁵ s	1.1 · 10 ⁻²⁰	1.3 · 10 ⁻⁶	0.14 GeV	7.7 · 10 ⁵	1.2 · 10 ⁻⁹	1.2 · 10 ³⁴
μ ⁺ μ ⁻	1.4 · 10 ⁻¹²	27	6.9 · 10 ¹¹	5.0 · 10 ⁻⁵ s	6.6 · 10 ⁻²¹	1.7 · 10 ⁻⁶	0.11 GeV	5.9 · 10 ⁵	9.2 · 10 ⁻¹⁰	2.0 · 10 ³⁴
Comienzo BBN	2.7 · 10 ⁻¹¹	24	3.7 · 10 ¹⁰	1.8 · 10 ⁻² s	1.9 · 10 ⁻²³	2.4 · 10 ⁻⁵	8.6 · 10 ⁻³ GeV	4.1 · 10 ⁴	6.4 · 10 ⁻¹¹	7.2 · 10 ³⁶
Desacoplo de ν	2.1 · 10 ⁻¹⁰	22	4.8 · 10 ⁹	1.1 s	3.1 · 10 ⁻²⁵	2.3 · 10 ⁻⁴	8.0 · 10 ⁻⁴ GeV	4.3 · 10 ³	6.6 · 10 ⁻¹²	4.3 · 10 ³⁸
e ⁺ e ⁻	3.7 · 10 ⁻¹⁰	22	2.7 · 10 ⁹	3.3 s	1.0 · 10 ⁻²⁵	3.8 · 10 ⁻⁴	5.1 · 10 ⁻⁴ GeV	2.6 · 10 ³	4.1 · 10 ⁻¹²	1.3 · 10 ³⁹
BBN	2.4 · 10 ⁻⁹	20	4.2 · 10 ⁸	2.2 min	2.5 · 10 ⁻²⁷	2.1 · 10 ⁻³	10 ⁻⁴ GeV	4.8 · 10 ²	7.4 · 10 ⁻¹³	5.3 · 10 ⁴⁰
Termina BBN	2.7 · 10 ⁻⁵	11	3.7 · 10 ⁴	5.5 · 10 ² yr	1.9 · 10 ⁻³⁵	12	10 ⁵ K	8.3 · 10 ⁻²	1.3 · 10 ⁻¹⁶	6.9 · 10 ⁴⁸
Igualdad R=M	2.9 · 10 ⁻⁴	8.1	3402	50883 yr	2.3 · 10 ⁻³⁷	96	8725.9K	0.01	1.6 · 10 ⁻¹⁷	5.9 · 10 ⁵⁰
CMB 	9.1 · 10 ⁻⁴	7.0	1100	3.7 · 10 ⁵ yr	3.4 · 10 ⁻³⁸	2.1 · 10 ²	3 · 10 ³ K	4.8 · 10 ⁻³	7.4 · 10 ⁻¹⁸	3.9 · 10 ⁵¹
Primeras 	0.046	3.1	21	1.7 · 10 ⁸ yr	8.3 · 10 ⁻⁴¹	1.7 · 10 ³	60K	5.9 · 10 ⁻⁴	9.2 · 10 ⁻¹⁹	1.6 · 10 ⁵⁴
Igualdad Λ=M	0.77	0.26	0.3	10.3 Gyr	1.7 · 10 ⁻⁴²	4.9 · 10 ³	3.5K	2.0 · 10 ⁻⁴	3.1 · 10 ⁻¹⁹	7.9 · 10 ⁵⁵
Presente	1	0	0	13.8 Gyr	1.4 · 10 ⁻⁴²	4.4 · 10 ³	2.7K	2.2 · 10 ⁻⁴	3.5 · 10 ⁻¹⁹	9.3 · 10 ⁵⁵

Apéndice B

Perturbaciones en cosmología

De forma general expandimos las perturbaciones en serie de potencias como sigue:

$$X(t, \mathbf{x}) = X^{(0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} X^{(n)}(t, \mathbf{x}) = X^{(0)}(t) + \epsilon X^{(1)}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \epsilon^2 X^{(2)}(t, \mathbf{x}) + \dots, \quad (\text{B.1})$$

donde el orden de la perturbación corresponde a la potencia de ϵ . En lo sucesivo, se omite el parámetro ϵ .

B.1. Construcción del tensor de Einstein

B.1.1. Perturbaciones de la métrica

La métrica espacialmente plana (FLRW) hasta segundo orden:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(-1 - 2\phi^{(1)} - \phi^{(2)} \right) dt^2 \\ & + 2 \left(a\partial_j B^{(1)} + \frac{1}{2} a\partial_j B^{(2)} \right) dt dx^j \\ & + a^2 \left(\bar{\gamma}_{ij} - 2\bar{\gamma}_{ij}\psi^{(1)} - \bar{\gamma}_{ij}\psi^{(2)} + 2\partial_j\partial_i E^{(1)} + \partial_j\partial_i E^{(2)} + h^{(2)}{}_{ij} \right) dx^i dx^j, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$g_{00} = -1 - 2\phi^{(1)} - \phi^{(2)}, \quad (\text{B.3})$$

$$g_{0j} = a\partial_j B^{(1)} + \frac{1}{2} a\partial_j B^{(2)}, \quad (\text{B.4})$$

$$g_{ij} = a^2 \left(\bar{\gamma}_{ij} - 2\bar{\gamma}_{ij}\psi^{(1)} - \bar{\gamma}_{ij}\psi^{(2)} + 2\partial_j\partial_i E^{(1)} + \partial_j\partial_i E^{(2)} + h^{(2)}{}_{ij} \right), \quad (\text{B.5})$$

$$g^{00} = -1 + 2\phi^{(1)} - 4\phi^{(1)2} + \phi^{(2)} + \partial_k B^{(1)} \partial^k B^{(1)}, \quad (\text{B.6})$$

$$g^{0j} = a^{-1} \left(\partial^j B^{(1)} - 2\phi^{(1)} \partial^j B^{(1)} + 2\psi^{(1)} \partial^j B^{(1)} + \frac{1}{2} \partial^j B^{(2)} - 2\partial_k \partial^j E^{(1)} \partial^k B^{(1)} \right), \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} g^{ij} = & a^{-2} \left(\bar{\gamma}^{ij} + 2\bar{\gamma}^{ij}\psi^{(1)} \right. \\ & + \bar{\gamma}^{ij} \left(4\psi^{(1)2} + \psi^{(2)} \right) - \partial^i B^{(1)} \partial^j B^{(1)} - 2\partial^j \partial^i E^{(1)} \\ & \left. - 8\psi^{(1)} \partial^j \partial^i E^{(1)} - \partial^j \partial^i E^{(2)} + 4\partial_k \partial^j E^{(1)} \partial^k \partial^i E^{(1)} - h^{(2)}{}^{ij} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

B.1.2. Perturbaciones de la conexión afín

$$\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\rho\nu} \{ \partial_{\lambda}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\lambda\nu} - \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} \}, \quad (\text{B.9})$$

$$\Gamma^0_{00}{}^{(0)} = 0, \quad (\text{B.10})$$

$$\Gamma^0_{00}{}^{(1)} = \dot{\phi}^{(1)}, \quad (\text{B.11})$$

$$\Gamma^0_{00}{}^{(2)} = -2\phi^{(1)}\dot{\phi}^{(1)} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^{(2)} + H\partial_j B^{(1)}\partial^j B^{(1)} + \partial_j \dot{B}^{(1)}\partial^j B^{(1)} + \frac{\partial_j \phi^{(1)}\partial^j B^{(1)}}{a}, \quad (\text{B.12})$$

$$\Gamma^0_{0j}{}^{(0)} = 0, \quad (\text{B.13})$$

$$\Gamma^0_{0j}{}^{(1)} = aH\partial_j B^{(1)} + \partial_j \phi^{(1)}, \quad (\text{B.14})$$

$$\Gamma^0_{0j}{}^{(2)} = -2\phi^{(1)}\partial_j \phi^{(1)} + \frac{1}{2}\partial_j \phi^{(2)} - 2aH\phi^{(1)}\partial_j B^{(1)} - a\dot{\psi}^{(1)}\partial_j B^{(1)} + \frac{1}{2}aH\partial_j B^{(2)} + a\partial^i B^{(1)}\partial_j \partial_i \dot{E}^{(1)}, \quad (\text{B.15})$$

$$\Gamma^0_{ij}{}^{(0)} = a^2 H \bar{\gamma}_{ij}, \quad (\text{B.16})$$

$$\Gamma^0_{ij}{}^{(1)} = -2a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} - 2a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \psi^{(1)} - a^2 \bar{\gamma}_{ij} \dot{\psi}^{(1)} - a\partial_i \partial_j B^{(1)} + 2a^2 H \partial_j \partial_i E^{(1)} + a^2 \partial_j \partial_i \dot{E}^{(1)}, \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{ij}{}^{(2)} = & 4a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)2} - a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(2)} + 4a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} \psi^{(1)} + 2a^2 \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} \dot{\psi}^{(1)} \\ & - a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \dot{\psi}^{(2)} - \frac{1}{2}a^2 \bar{\gamma}_{ij} \dot{\psi}^{(2)} + 2a\phi^{(1)}\partial_i \partial_j B^{(1)} - \frac{1}{2}a\partial_i \partial_j B^{(2)} \\ & - a\partial_i \psi^{(1)}\partial_j B^{(1)} - a\partial_i B^{(1)}\partial_j \psi^{(1)} + a\bar{\gamma}_{ij}\partial_i \psi^{(1)}\partial^l B^{(1)} - 4a^2 H \phi^{(1)}\partial_j \partial_i E^{(1)} \\ & - 2a^2 \phi^{(1)}\partial_j \partial_i \dot{E}^{(1)} + a\partial_i \partial_j \partial_k E^{(1)}\partial^k B^{(1)} - a^2 H \bar{\gamma}_{ij}\partial_k B^{(1)}\partial^k B^{(1)} \\ & + a^2 H \partial_j \partial_i E^{(2)} + \frac{1}{2}a^2 \partial_j \partial_i \dot{E}^{(2)} + \frac{1}{2}a^2 \dot{h}^{(2)}_{ij} + a^2 H h^{(2)}_{ij}, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\Gamma^k_{00}{}^{(0)} = 0, \quad (\text{B.19})$$

$$\Gamma^k_{00}{}^{(1)} = \frac{\partial^k \phi^{(1)}}{a^2} + \frac{\partial^k \phi^{(2)}}{2a^2} + \frac{2\psi^{(1)}\partial^k \phi^{(1)}}{a^2} + \frac{H\partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{\partial^k \dot{B}^{(1)}}{a}, \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{00}{}^{(2)} = & -\frac{\dot{\phi}^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{2H\psi^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{2\psi^{(1)}\partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} + \frac{H\partial^k B^{(2)}}{2a} + \frac{\partial^k \dot{B}^{(2)}}{2a} \\ & - \frac{2H\partial_i B^{(1)}\partial^k \partial^i E^{(1)}}{a} - \frac{2\partial_i \dot{B}^{(1)}\partial^k \partial^i E^{(1)}}{a} - \frac{2\partial_i \phi^{(1)}\partial^k \partial^i E^{(1)}}{a^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\Gamma^k_{0j}{}^{(0)} = H\bar{\gamma}^k_j, \quad (\text{B.22})$$

$$\Gamma^k_{0j}{}^{(1)} = -\bar{\gamma}^k_j\dot{\psi}^{(1)} + \partial_j\partial^k\dot{E}^{(1)}, \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{0j}{}^{(2)} = & -2\bar{\gamma}^k_j\psi^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} - \frac{1}{2}\bar{\gamma}^k_j\psi^{(2)} - \frac{\partial_j\phi^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} - H\partial_j B^{(1)}\partial^k B^{(1)} + 2\psi^{(1)}\partial_j\partial^k\dot{E}^{(1)} \\ & - 2\partial_j\partial_i\dot{E}^{(1)}\partial^k\partial^i E^{(1)} + 2\dot{\psi}^{(1)}\partial^k\partial_j E^{(1)} + \frac{1}{2}\dot{h}^{(2)k}_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial^k\dot{E}^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\Gamma^k_{ij}{}^{(0)} = 0, \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ij}{}^{(1)} = & -\bar{\gamma}^k_j\partial_i\psi^{(1)} - \bar{\gamma}^k_i\partial_j\psi^{(1)} + \bar{\gamma}_{ij}\partial^k\psi^{(1)} - aH\bar{\gamma}_{ij}\partial^k B^{(1)} + \partial_i\partial_j\partial^k E^{(1)} \\ & + 2\bar{\gamma}_{ij}\psi^{(1)}\partial^k\psi^{(1)} - 2\bar{\gamma}^k_i\psi^{(1)}\partial_j\psi^{(1)} - 2\bar{\gamma}^k_j\psi^{(1)}\partial_i\psi^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ij}{}^{(2)} = & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{ij}\partial^k\psi^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{\gamma}^k_i\partial_j\psi^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{\gamma}^k_j\partial_i\psi^{(2)} + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j\partial^k E^{(2)} \\ & + 2aH\bar{\gamma}_{ij}\phi^{(1)}\partial^k B^{(1)} + a\bar{\gamma}_{ij}\dot{\psi}^{(1)}\partial^k B^{(1)} + \partial_i\partial_j B^{(1)}\partial^k B^{(1)} - \frac{1}{2}aH\bar{\gamma}_{ij}\partial^k B^{(2)} \\ & + 2\partial_i\psi^{(1)}\partial_j\partial^k E^{(1)} + 2\partial_i\partial^k E^{(1)}\partial_j\psi^{(1)} - 2\bar{\gamma}_{ij}\partial_i\psi^{(1)}\partial^l\partial^k E^{(1)} + 2\psi^{(1)}\partial_i\partial_j\partial^k E^{(1)} \\ & - 2aH\partial_j\partial_i E^{(1)}\partial^k B^{(1)} - a\partial_j\partial_i\dot{E}^{(1)}\partial^k B^{(1)} + 2aH\bar{\gamma}_{ij}\partial_m\partial^k E^{(1)}\partial^m B^{(1)} \\ & - 2\partial_j\partial_i\partial_l E^{(1)}\partial^l\partial^k E^{(1)} - \frac{1}{2}\partial^k h^{(2)}_{ij} + \frac{1}{2}\partial_j h^{(2)}_i{}^k + \frac{1}{2}\partial_i h^{(2)k}_j, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

B.1.3. Perturbaciones del tensor de Riemann

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \equiv \frac{\partial\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} - \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}, \quad (\text{B.28})$$

$$R^0{}_{00i}{}^{(0)} = 0, \quad (\text{B.29})$$

$$R^0{}_{00i}{}^{(1)} = aH^2\partial_i B^{(1)} + a\dot{H}\partial_i B^{(1)}, \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} R^0{}_{00i}{}^{(2)} = & -2aH^2\phi^{(1)}\partial_i B^{(1)} - 2a\dot{H}\phi^{(1)}\partial_i B^{(1)} - aH\dot{\phi}^{(1)}\partial_i B^{(1)} - 2aH\psi^{(1)}\partial_i B^{(1)} \\ & - a\dot{\psi}^{(1)}\partial_i B^{(1)} + \frac{1}{2}aH^2\partial_i B^{(2)} + \frac{1}{2}a\dot{H}\partial_i B^{(2)} - H\partial_j\partial_i B^{(1)}\partial^j B^{(1)} \\ & - \partial_j\partial_i\dot{B}^{(1)}\partial^j B^{(1)} + 2aH\partial_j\partial_i\dot{E}^{(1)}\partial^j B^{(1)} + a\partial_j\partial_i\ddot{E}^{(1)}\partial^j B^{(1)} - \frac{\partial_j\partial_i\phi^{(1)}\partial^j B^{(1)}}{a}, \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$R^k{}_{00j}{}^{(0)} = H^2 \bar{\gamma}{}^k{}_j + \dot{H} \bar{\gamma}{}^k{}_j, \quad (\text{B.32})$$

$$R^k{}_{00j}{}^{(1)} = -H \bar{\gamma}{}^k{}_j \dot{\phi}^{(1)} - 2H \bar{\gamma}{}^k{}_j \dot{\psi}^{(1)} - \bar{\gamma}{}^k{}_j \ddot{\psi}^{(1)} - \frac{H \partial_j \partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{\partial_j \partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} \\ + 2H \partial_j \partial^k \dot{E}^{(1)} + \partial_j \partial^k \ddot{E}^{(1)} - \frac{\partial_j \partial^k \phi^{(1)}}{a^2}, \quad (\text{B.33})$$

$$R^k{}_{00j}{}^{(2)} = \frac{1}{2} \ddot{h}^{(2)k}{}_j + \dot{h}^{(2)k}{}_j H + 2H \bar{\gamma}{}^k{}_j \dot{\phi}^{(1)} \dot{\phi}^{(1)} - \frac{1}{2} H \bar{\gamma}{}^k{}_j \dot{\phi}^{(2)} + \bar{\gamma}{}^k{}_j \dot{\phi}^{(1)} \dot{\psi}^{(1)} \\ - 4H \bar{\gamma}{}^k{}_j \dot{\psi}^{(1)} \dot{\psi}^{(1)} - \bar{\gamma}{}^k{}_j \dot{\psi}^{(1)2} - 2\bar{\gamma}{}^k{}_j \dot{\psi}^{(1)} \ddot{\psi}^{(1)} - H \bar{\gamma}{}^k{}_j \dot{\psi}^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{\gamma}{}^k{}_j \ddot{\psi}^{(2)} \\ + \frac{\dot{\phi}^{(1)} \partial_j \partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{2H \psi^{(1)} \partial_j \partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{2\psi^{(1)} \partial_j \partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} - \frac{H \partial_j \partial^k B^{(2)}}{2a} - \frac{\partial_j \partial^k \dot{B}^{(2)}}{2a} \\ + 4H \dot{\psi}^{(1)} \partial_j \partial^k E^{(1)} + 2\ddot{\psi}^{(1)} \partial_j \partial^k E^{(1)} - \dot{\phi}^{(1)} \partial_j \partial^k \dot{E}^{(1)} + 4H \psi^{(1)} \partial_j \partial^k \dot{E}^{(1)} \\ + 2\dot{\psi}^{(1)} \partial_j \partial^k \dot{E}^{(1)} + 2\psi^{(1)} \partial_j \partial^k \ddot{E}^{(1)} + H \partial_j \partial^k \dot{E}^{(2)} + \frac{1}{2} \partial_j \partial^k \ddot{E}^{(2)} - \frac{2\psi^{(1)} \partial_j \partial^k \phi^{(1)}}{a^2} \\ - \frac{\partial_j \partial^k \phi^{(2)}}{2a^2} - \dot{H} \partial_j B^{(1)} \partial^k B^{(1)} + \frac{H \partial_j \phi^{(1)} \partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{H \partial_j \psi^{(1)} \partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{\partial_j \psi^{(1)} \partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} \\ + \frac{H \partial_j B^{(1)} \partial^k \phi^{(1)}}{a} + \frac{\partial_j \phi^{(1)} \partial^k \phi^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_j \psi^{(1)} \partial^k \phi^{(1)}}{a^2} - \frac{H \partial_j B^{(1)} \partial^k \psi^{(1)}}{a} \\ - \frac{\partial_j \dot{B}^{(1)} \partial^k \psi^{(1)}}{a} - \frac{\partial_j \phi^{(1)} \partial^k \psi^{(1)}}{a^2} - H^2 \bar{\gamma}{}^k{}_j \partial_m B^{(1)} \partial^m B^{(1)} - H \bar{\gamma}{}^k{}_j \partial_m \dot{B}^{(1)} \partial^m B^{(1)} \\ - \frac{H \bar{\gamma}{}^k{}_j \partial_m \phi^{(1)} \partial^m B^{(1)}}{a} + \frac{H \bar{\gamma}{}^k{}_j \partial_m \psi^{(1)} \partial^m B^{(1)}}{a} + \frac{H \partial_m \partial_j \partial^k E^{(1)} \partial^m B^{(1)}}{a} \\ + \frac{\bar{\gamma}{}^k{}_j \partial_m \psi^{(1)} \partial^m \dot{B}^{(1)}}{a} + \frac{\partial_m \partial_j \partial^k E^{(1)} \partial^m \dot{B}^{(1)}}{a} + \frac{\bar{\gamma}{}^k{}_j \partial_m \psi^{(1)} \partial^m \phi^{(1)}}{a^2} \\ + \frac{\partial_m \partial_j \partial^k E^{(1)} \partial^m \phi^{(1)}}{a^2} + \frac{2H \partial_m \partial^k E^{(1)} \partial^m \partial_j B^{(1)}}{a} + \frac{2\partial_m \partial^k E^{(1)} \partial^m \partial_j \dot{B}^{(1)}}{a} \\ - 4H \partial_m \partial_j \dot{E}^{(1)} \partial^m \partial^k E^{(1)} - 2\partial_m \partial_j \ddot{E}^{(1)} \partial^m \partial^k E^{(1)} + \frac{2\partial_m \partial_j \phi^{(1)} \partial^m \partial^k E^{(1)}}{a^2} \\ - \partial_m \partial_j \dot{E}^{(1)} \partial^m \partial^k \dot{E}^{(1)}, \quad (\text{B.34})$$

$$R^k_{0ij}{}^{(0)} = 0, \quad (\text{B.35})$$

$$R^k_{0ij}{}^{(1)} = aH^2\bar{\gamma}^k_j\partial_i B^{(1)} + H\bar{\gamma}^k_j\partial_i\phi^{(1)} + \bar{\gamma}^k_j\partial_i\psi^{(1)} - aH^2\bar{\gamma}^k_i\partial_j B^{(1)} - H\bar{\gamma}^k_i\partial_j\phi^{(1)} - \bar{\gamma}^k_i\partial_j\psi^{(1)}, \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} R^k_{0ij}{}^{(2)} = & 2aH^2\bar{\gamma}^k_i\phi^{(1)}\partial_j B^{(1)} + 2aH\bar{\gamma}^k_i\psi^{(1)}\partial_j B^{(1)} - \frac{1}{2}aH^2\bar{\gamma}^k_i\partial_j B^{(2)} + \frac{1}{2}\partial_j\dot{h}^{(2)k}_i \\ & + 2H\bar{\gamma}^k_i\phi^{(1)}\partial_j\phi^{(1)} + \bar{\gamma}^k_i\psi^{(1)}\partial_j\phi^{(1)} - \frac{1}{2}H\bar{\gamma}^k_i\partial_j\phi^{(2)} - 2\bar{\gamma}^k_i\psi^{(1)}\partial_j\psi^{(1)} \\ & - 2\bar{\gamma}^k_i\psi^{(1)}\partial_j\dot{\psi}^{(1)} - \frac{1}{2}\bar{\gamma}^k_i\partial_j\dot{\psi}^{(2)} - aH\bar{\gamma}^k_i\partial_m\partial_j\dot{E}^{(1)}\partial^m B^{(1)} \\ & + aH\bar{\gamma}^k_j\partial_m\partial_i\dot{E}^{(1)}\partial^m B^{(1)} + \bar{\gamma}^k_i\partial_m\partial_j\dot{E}^{(1)}\partial^m\psi^{(1)} - \bar{\gamma}^k_j\partial_m\partial_i\dot{E}^{(1)}\partial^m\psi^{(1)} \\ & + \partial_m\partial_i\partial^k E^{(1)}\partial^m\partial_j\dot{E}^{(1)} - \partial_m\partial_j\partial^k E^{(1)}\partial^m\partial_i\dot{E}^{(1)} - 2aH^2\bar{\gamma}^k_j\phi^{(1)}\partial_i B^{(1)} \\ & - 2aH\bar{\gamma}^k_j\psi^{(1)}\partial_i B^{(1)} - H\partial_j\partial^k B^{(1)}\partial_i B^{(1)} + aH\partial_j\partial^k\dot{E}^{(1)}\partial_i B^{(1)} \\ & + \frac{1}{2}aH^2\bar{\gamma}^k_j\partial_i B^{(2)} - \frac{1}{2}\partial_i\dot{h}^{(2)k}_j - 2H\bar{\gamma}^k_j\phi^{(1)}\partial_i\phi^{(1)} - \bar{\gamma}^k_j\psi^{(1)}\partial_i\phi^{(1)} \\ & - \frac{\partial_j\partial^k B^{(1)}\partial_i\phi^{(1)}}{a} + \partial_j\partial^k\dot{E}^{(1)}\partial_i\phi^{(1)} + \frac{1}{2}H\bar{\gamma}^k_j\partial_i\phi^{(2)} + 2\bar{\gamma}^k_j\psi^{(1)}\partial_i\psi^{(1)} \\ & - \partial_j\partial^k\dot{E}^{(1)}\partial_i\psi^{(1)} + 2\bar{\gamma}^k_j\psi^{(1)}\partial_i\psi^{(1)} - 2\partial_j\partial^k E^{(1)}\partial_i\psi^{(1)} \\ & + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^k_j\partial_i\psi^{(2)} + H\partial_j B^{(1)}\partial_i\partial^k B^{(1)} + \frac{\partial_j\phi^{(1)}\partial_i\partial^k B^{(1)}}{a} + 2\partial_j\psi^{(1)}\partial_i\partial^k E^{(1)} \\ & - aH\partial_j B^{(1)}\partial_i\partial^k\dot{E}^{(1)} - \partial_j\phi^{(1)}\partial_i\partial^k\dot{E}^{(1)} + \partial_j\psi^{(1)}\partial_i\partial^k\dot{E}^{(1)}, \quad (\text{B.37}) \end{aligned}$$

$$R^i_{jkl}{}^{(0)} = -a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_l \bar{\gamma}_{jk} + a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_k \bar{\gamma}_{jl}, \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned} R^i_{jkl}{}^{(1)} = & 2a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_l \bar{\gamma}_{jk} \phi^{(1)} - 2a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_k \bar{\gamma}_{jl} \phi^{(1)} + 2a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_l \bar{\gamma}_{jk} \psi^{(1)} - 2a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_k \bar{\gamma}_{jl} \psi^{(1)} \\ & + 2a^2 H \bar{\gamma}^i_l \bar{\gamma}_{jk} \dot{\psi}^{(1)} - 2a^2 H \bar{\gamma}^i_k \bar{\gamma}_{jl} \dot{\psi}^{(1)} - a H \bar{\gamma}_{jl} \partial_k \partial^i B^{(1)} + a^2 H \bar{\gamma}_{jl} \partial_k \partial^i \dot{E}^{(1)} \\ & + \bar{\gamma}_{jl} \partial_k \partial^i \psi^{(1)} + a H \bar{\gamma}^i_l \partial_k \partial_j B^{(1)} - 2a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_l \partial_k \partial_j E^{(1)} - a^2 H \bar{\gamma}^i_l \partial_k \partial_j \dot{E}^{(1)} \\ & - \bar{\gamma}^i_l \partial_k \partial_j \psi^{(1)} + a H \bar{\gamma}_{jk} \partial_l \partial^i B^{(1)} - a^2 H \bar{\gamma}_{jk} \partial_l \partial^i \dot{E}^{(1)} - \bar{\gamma}_{jk} \partial_l \partial^i \psi^{(1)} \\ & - a H \bar{\gamma}^i_k \partial_l \partial_j B^{(1)} + 2a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_k \partial_l \partial_j E^{(1)} + a^2 H \bar{\gamma}^i_k \partial_l \partial_j \dot{E}^{(1)} + \bar{\gamma}^i_k \partial_l \partial_j \psi^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} R^i_{jkl}{}^{(2)} = & \frac{1}{2} a^2 \dot{h}^{(2)}_{jl} H \bar{\gamma}^i_k + a^2 h^{(2)}_{jl} H^2 \bar{\gamma}^i_k - \frac{1}{2} a^2 \dot{h}^{(2)}_{jk} H \bar{\gamma}^i_l - a^2 h^{(2)}_{jk} H^2 \bar{\gamma}^i_l \\ & - \frac{1}{2} a^2 \dot{h}^{(2)}{}^i_l H \bar{\gamma}_{jk} + \frac{1}{2} a^2 \dot{h}^{(2)}{}^i_k H \bar{\gamma}_{jl} - 4a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_l \bar{\gamma}_{jk} \phi^{(1)2} + 4a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_k \bar{\gamma}_{jl} \phi^{(1)2} \\ & + a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_l \bar{\gamma}_{jk} \phi^{(2)} - a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_k \bar{\gamma}_{jl} \phi^{(2)} - 4a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_l \bar{\gamma}_{jk} \phi^{(1)} \psi^{(1)} + 4a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_k \bar{\gamma}_{jl} \phi^{(1)} \psi^{(1)} \\ & - 4a^2 H \bar{\gamma}^i_l \bar{\gamma}_{jk} \phi^{(1)} \dot{\psi}^{(1)} + 4a^2 H \bar{\gamma}^i_k \bar{\gamma}_{jl} \phi^{(1)} \dot{\psi}^{(1)} - a^2 \bar{\gamma}^i_l \bar{\gamma}_{jk} \dot{\psi}^{(1)2} + a^2 \bar{\gamma}^i_k \bar{\gamma}_{jl} \dot{\psi}^{(1)2} \\ & + a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_l \bar{\gamma}_{jk} \psi^{(2)} - a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_k \bar{\gamma}_{jl} \psi^{(2)} + a^2 H \bar{\gamma}^i_l \bar{\gamma}_{jk} \dot{\psi}^{(2)} - a^2 H \bar{\gamma}^i_k \bar{\gamma}_{jl} \dot{\psi}^{(2)} \\ & - a H \bar{\gamma}_{jl} \partial^i \psi^{(1)} \partial_k B^{(1)} + a H \bar{\gamma}^i_l \partial_j \psi^{(1)} \partial_k B^{(1)} + a H \bar{\gamma}_{jl} \partial^i B^{(1)} \partial_k \phi^{(1)} - a H \bar{\gamma}_{jl} \partial^i B^{(1)} \partial_k \psi^{(1)} \\ & + 3 \bar{\gamma}_{jl} \partial^i \psi^{(1)} \partial_k \psi^{(1)} + a H \bar{\gamma}^i_l \partial_j B^{(1)} \partial_k \psi^{(1)} - 3 \bar{\gamma}^i_l \partial_j \psi^{(1)} \partial_k \psi^{(1)} + a \bar{\gamma}_{jl} \partial^i B^{(1)} \partial_k \dot{\psi}^{(1)} \\ & + 2a H \bar{\gamma}_{jl} \phi^{(1)} \partial_k \partial^i B^{(1)} + a \bar{\gamma}_{jl} \dot{\psi}^{(1)} \partial_k \partial^i B^{(1)} - \frac{1}{2} a H \bar{\gamma}_{jl} \partial_k \partial^i B^{(2)} \\ & + 2a^2 H \bar{\gamma}_{jl} \dot{\psi}^{(1)} \partial_k \partial^i E^{(1)} - 2a^2 H \bar{\gamma}_{jl} \phi^{(1)} \partial_k \partial^i \dot{E}^{(1)} - a^2 \bar{\gamma}_{jl} \dot{\psi}^{(1)} \partial_k \partial^i \dot{E}^{(1)} + \frac{1}{2} a^2 H \bar{\gamma}_{jl} \partial_k \partial^i \dot{E}^{(2)} \\ & - \frac{1}{2} \partial_k \partial^i h^{(2)}_{jl} + 2 \bar{\gamma}_{jl} \psi^{(1)} \partial_k \partial^i \psi^{(1)} + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{jl} \partial_k \partial^i \psi^{(2)} - 2a H \bar{\gamma}^i_l \phi^{(1)} \partial_k \partial_j B^{(1)} \\ & - a \bar{\gamma}^i_l \dot{\psi}^{(1)} \partial_k \partial_j B^{(1)} + \frac{1}{2} a H \bar{\gamma}^i_l \partial_k \partial_j B^{(2)} + 4a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_l \phi^{(1)} \partial_k \partial_j E^{(1)} + 2a^2 H \bar{\gamma}^i_l \dot{\psi}^{(1)} \partial_k \partial_j E^{(1)} \\ & + 2a^2 H \bar{\gamma}^i_l \phi^{(1)} \partial_k \partial_j \dot{E}^{(1)} + a^2 \bar{\gamma}^i_l \dot{\psi}^{(1)} \partial_k \partial_j \dot{E}^{(1)} - a^2 H^2 \bar{\gamma}^i_l \partial_k \partial_j E^{(2)} - \frac{1}{2} a^2 H \bar{\gamma}^i_l \partial_k \partial_j \dot{E}^{(2)} \\ & + \frac{1}{2} \partial_k \partial_j h^{(2)}{}^i_l - 2 \bar{\gamma}^i_l \psi^{(1)} \partial_k \partial_j \psi^{(1)} - \frac{1}{2} \bar{\gamma}^i_l \partial_k \partial_j \psi^{(2)} + a H \bar{\gamma}_{jk} \partial^i \psi^{(1)} \partial_l B^{(1)} - a H \bar{\gamma}^i_k \partial_j \psi^{(1)} \partial_l B^{(1)} \\ & - a H \bar{\gamma}_{jk} \partial^i B^{(1)} \partial_l \phi^{(1)} + a H \bar{\gamma}_{jk} \partial^i B^{(1)} \partial_l \psi^{(1)} - 3 \bar{\gamma}_{jk} \partial^i \psi^{(1)} \partial_l \psi^{(1)} - a H \bar{\gamma}^i_k \partial_j B^{(1)} \partial_l \psi^{(1)} \\ & + 3 \bar{\gamma}^i_k \partial_j \psi^{(1)} \partial_l \psi^{(1)} - a \bar{\gamma}_{jk} \partial^i B^{(1)} \partial_l \dot{\psi}^{(1)} - 2a H \bar{\gamma}_{jk} \phi^{(1)} \partial_l \partial^i B^{(1)} - a \bar{\gamma}_{jk} \dot{\psi}^{(1)} \partial_l \partial^i B^{(1)} \\ & - \partial_k \partial_j B^{(1)} \partial_l \partial^i B^{(1)} + 2a H \partial_k \partial_j E^{(1)} \partial_l \partial^i B^{(1)} + a \partial_k \partial_j \dot{E}^{(1)} \partial_l \partial^i B^{(1)} + \frac{1}{2} a H \bar{\gamma}_{jk} \partial_l \partial^i B^{(2)} \\ & - 2a^2 H \bar{\gamma}_{jk} \dot{\psi}^{(1)} \partial_l \partial^i E^{(1)} + 2 \partial_k \partial_j \psi^{(1)} \partial_l \partial^i E^{(1)} + 2a^2 H \bar{\gamma}_{jk} \phi^{(1)} \partial_l \partial^i \dot{E}^{(1)} + a^2 \bar{\gamma}_{jk} \dot{\psi}^{(1)} \partial_l \partial^i \dot{E}^{(1)} \\ & + a \partial_k \partial_j B^{(1)} \partial_l \partial^i \dot{E}^{(1)} - 2a^2 H \partial_k \partial_j E^{(1)} \partial_l \partial^i \dot{E}^{(1)} - a^2 \partial_k \partial_j \dot{E}^{(1)} \partial_l \partial^i \dot{E}^{(1)} - \frac{1}{2} a^2 H \bar{\gamma}_{jk} \partial_l \partial^i \dot{E}^{(2)} \\ & + \frac{1}{2} \partial_l \partial^i h^{(2)}{}_{jk} - 2 \bar{\gamma}_{jk} \psi^{(1)} \partial_l \partial^i \psi^{(1)} - \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{jk} \partial_l \partial^i \psi^{(2)} + 2a H \bar{\gamma}^i_k \phi^{(1)} \partial_l \partial_j B^{(1)} \\ & + a \bar{\gamma}^i_k \dot{\psi}^{(1)} \partial_l \partial_j B^{(1)} + \partial_k \partial^i B^{(1)} \partial_l \partial_j B^{(1)} - a \partial_k \partial^i \dot{E}^{(1)} \partial_l \partial_j B^{(1)} - \frac{1}{2} a H \bar{\gamma}^i_k \partial_l \partial_j B^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned}
& -4a^2 H^2 \bar{\gamma}^i{}_{k\phi}{}^{(1)} \partial_l \partial_j E^{(1)} - 2a^2 H \bar{\gamma}^i{}_{k\psi}{}^{(1)} \partial_l \partial_j E^{(1)} - 2a H \partial_k \partial^i B^{(1)} \partial_l \partial_j E^{(1)} + 2a^2 H \partial_k \partial^i \dot{E}^{(1)} \partial_l \partial_j E^{(1)} \\
& - 2a^2 H \bar{\gamma}^i{}_{k\phi}{}^{(1)} \partial_l \partial_j \dot{E}^{(1)} - a^2 \bar{\gamma}^i{}_{k\psi}{}^{(1)} \partial_l \partial_j \dot{E}^{(1)} - a \partial_k \partial^i B^{(1)} \partial_l \partial_j \dot{E}^{(1)} + a^2 \partial_k \partial^i \dot{E}^{(1)} \partial_l \partial_j \dot{E}^{(1)} \\
& + a^2 H^2 \bar{\gamma}^i{}_{k\partial_l \partial_j E^{(2)}} + \frac{1}{2} a^2 H \bar{\gamma}^i{}_{k\partial_l \partial_j \dot{E}^{(2)}} - \frac{1}{2} \partial_l \partial_j h^{(2) i}{}_k + 2 \bar{\gamma}^i{}_{k\psi}{}^{(1)} \partial_l \partial_j \psi^{(1)} \\
& - 2 \partial_k \partial^i E^{(1)} \partial_l \partial_j \psi^{(1)} + \frac{1}{2} \bar{\gamma}^i{}_{k\partial_l \partial_j \psi^{(2)}} + a^2 H^2 \bar{\gamma}^i{}_{l\bar{\gamma}_{jk}} \partial_m B^{(1)} \partial^m B^{(1)} - a^2 H^2 \bar{\gamma}^i{}_{k\bar{\gamma}_{jl}} \partial_m B^{(1)} \partial^m B^{(1)} \\
& - 2a H \bar{\gamma}^i{}_{l\bar{\gamma}_{jk}} \partial_m \psi^{(1)} \partial^m B^{(1)} + 2a H \bar{\gamma}^i{}_{k\bar{\gamma}_{jl}} \partial_m \psi^{(1)} \partial^m B^{(1)} + a H \bar{\gamma}_{jl} \partial_m \partial_k \partial^i E^{(1)} \partial^m B^{(1)} \\
& - a H \bar{\gamma}^i{}_{l\partial_m \partial_k \partial_j E^{(1)}} \partial^m B^{(1)} - a H \bar{\gamma}_{jk} \partial_m \partial_l \partial^i E^{(1)} \partial^m B^{(1)} + a H \bar{\gamma}^i{}_{k\partial_m \partial_l \partial_j E^{(1)}} \partial^m B^{(1)} \\
& + \bar{\gamma}^i{}_{l\bar{\gamma}_{jk}} \partial_m \psi^{(1)} \partial^m \psi^{(1)} - \bar{\gamma}^i{}_{k\bar{\gamma}_{jl}} \partial_m \psi^{(1)} \partial^m \psi^{(1)} - \bar{\gamma}_{jl} \partial_m \partial_k \partial^i E^{(1)} \partial^m \psi^{(1)} \\
& + \bar{\gamma}^i{}_{l\partial_m \partial_k \partial_j E^{(1)}} \partial^m \psi^{(1)} + \bar{\gamma}_{jk} \partial_m \partial_l \partial^i E^{(1)} \partial^m \psi^{(1)} - \bar{\gamma}^i{}_{k\partial_m \partial_l \partial_j E^{(1)}} \partial^m \psi^{(1)} \\
& - 2a^2 H \bar{\gamma}_{jl} \partial_m \partial_k \dot{E}^{(1)} \partial^m \partial^i E^{(1)} - 2 \bar{\gamma}_{jl} \partial_m \partial_k \psi^{(1)} \partial^m \partial^i E^{(1)} + 2a^2 H \bar{\gamma}_{jk} \partial_m \partial_l \dot{E}^{(1)} \partial^m \partial^i E^{(1)} \\
& + 2 \bar{\gamma}_{jk} \partial_m \partial_l \psi^{(1)} \partial^m \partial^i E^{(1)} + 2a H \bar{\gamma}_{jl} \partial_m \partial^i E^{(1)} \partial^m \partial_k B^{(1)} - \partial_m \partial_l \partial_j E^{(1)} \partial^m \partial_k \partial^i E^{(1)} \\
& - 2a H \bar{\gamma}_{jk} \partial_m \partial^i E^{(1)} \partial^m \partial_l B^{(1)} + \partial_m \partial_k \partial_j E^{(1)} \partial^m \partial_l \partial^i E^{(1)} , \tag{B.41}
\end{aligned}$$

B.1.4. Perturbaciones del tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \tag{B.42}$$

$$R_{00}^{(0)} = -3H^2 - 3\dot{H}, \quad (\text{B.43})$$

$$R_{00}^{(1)} = 3H\dot{\phi}^{(1)} + 6H\dot{\psi}^{(1)} + 3\ddot{\psi}^{(1)} + \frac{H\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{\partial_k\partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} - 2H\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} - \partial_k\partial^k \ddot{E}^{(1)} + \frac{\partial_k\partial^k \phi^{(1)}}{a^2}, \quad (\text{B.44})$$

$$\begin{aligned} R_{00}^{(2)} = & -6H\phi^{(1)}\dot{\phi}^{(1)} + \frac{3}{2}H\dot{\phi}^{(2)} - 3\dot{\phi}^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} + 12H\psi^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} + 3\dot{\psi}^{(1)2} \\ & + 6\psi^{(1)}\ddot{\psi}^{(1)} + 3H\dot{\psi}^{(2)} + \frac{3}{2}\ddot{\psi}^{(2)} - \frac{\dot{\phi}^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{2H\psi^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} \\ & + \frac{2\psi^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} + \frac{H\partial_k\partial^k B^{(2)}}{2a} + \frac{\partial_k\partial^k \dot{B}^{(2)}}{2a} - 4H\psi^{(1)}\partial_k\partial^k E^{(1)} \\ & - 2\ddot{\psi}^{(1)}\partial_k\partial^k E^{(1)} + \dot{\phi}^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} - 4H\psi^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} - 2\dot{\psi}^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} \\ & - 2\psi^{(1)}\partial_k\partial^k \ddot{E}^{(1)} - H\partial_k\partial^k \dot{E}^{(2)} - \frac{1}{2}\partial_k\partial^k \ddot{E}^{(2)} + \frac{2\psi^{(1)}\partial_k\partial^k \phi^{(1)}}{a^2} + \frac{\partial_k\partial^k \phi^{(2)}}{2a^2} \\ & + 3H^2\partial_k B^{(1)}\partial^k B^{(1)} + \dot{H}\partial_k B^{(1)}\partial^k B^{(1)} + 3H\partial_k \dot{B}^{(1)}\partial^k B^{(1)} + \frac{H\partial_k \phi^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} \\ & - \frac{H\partial_k \psi^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{H\partial_k \partial_l \partial^l E^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{\partial_k \psi^{(1)}\partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} - \frac{\partial_k \partial_l \partial^l E^{(1)}\partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} \\ & - \frac{\partial_k \phi^{(1)}\partial^k \phi^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_k \psi^{(1)}\partial^k \phi^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_k \partial_l \partial^l E^{(1)}\partial^k \phi^{(1)}}{a^2} - \frac{2H\partial_l \partial_k E^{(1)}\partial^l \partial^k B^{(1)}}{a} \\ & - \frac{2\partial_l \partial_k E^{(1)}\partial^l \partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} + 4H\partial_l \partial_k \dot{E}^{(1)}\partial^l \partial^k E^{(1)} + 2\partial_l \partial_k \ddot{E}^{(1)}\partial^l \partial^k E^{(1)} \\ & - \frac{2\partial_l \partial_k \phi^{(1)}\partial^l \partial^k E^{(1)}}{a^2} + \partial_l \partial_k \dot{E}^{(1)}\partial^l \partial^k \dot{E}^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

$$R_{0j}^{(0)} = 0, \quad (\text{B.46})$$

$$R_{0j}^{(1)} = 3aH^2\partial_j B^{(1)} + a\dot{H}\partial_j B^{(1)} + 2H\partial_j \phi^{(1)} + 2\partial_j \dot{\psi}^{(1)}, \quad (\text{B.47})$$

$$\begin{aligned} R_{0j}^{(2)} = & -6aH^2\phi^{(1)}\partial_j B^{(1)} - 2a\dot{H}\phi^{(1)}\partial_j B^{(1)} - aH\dot{\phi}^{(1)}\partial_j B^{(1)} - 6aH\dot{\psi}^{(1)}\partial_j B^{(1)} \\ & - a\ddot{\psi}^{(1)}\partial_j B^{(1)} + \frac{3}{2}aH^2\partial_j B^{(2)} + \frac{1}{2}a\dot{H}\partial_j B^{(2)} - 4H\phi^{(1)}\partial_j \phi^{(1)} - 2\dot{\psi}^{(1)}\partial_j \phi^{(1)} \\ & + H\partial_j \phi^{(2)} + 4\dot{\psi}^{(1)}\partial_j \psi^{(1)} + 4\psi^{(1)}\partial_j \dot{\psi}^{(1)} + \partial_j \dot{\psi}^{(2)} - H\partial_j B^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)} \\ & - \frac{\partial_j \phi^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} - 2\partial_j \dot{\psi}^{(1)}\partial_k\partial^k E^{(1)} + aH\partial_j B^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} + \partial_j \phi^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} \\ & - \partial_j \psi^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} - \partial_k\partial_j \dot{B}^{(1)}\partial^k B^{(1)} + 3aH\partial_k\partial_j \dot{E}^{(1)}\partial^k B^{(1)} + a\partial_k\partial_j \ddot{E}^{(1)}\partial^k B^{(1)} \\ & - \frac{\partial_k\partial_j \phi^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{\partial_k\partial_j B^{(1)}\partial^k \phi^{(1)}}{a} - \partial_k\partial_j \dot{E}^{(1)}\partial^k \phi^{(1)} - \partial_k\partial_j \dot{E}^{(1)}\partial^k \psi^{(1)} \\ & + 2\partial_k\partial_j E^{(1)}\partial^k \dot{\psi}^{(1)} - \partial_k\partial_l \partial^l E^{(1)}\partial^k \partial_j \dot{E}^{(1)} + \partial_l \partial_k \partial_j E^{(1)}\partial^l \partial^k \dot{E}^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

$$R_{ij}^{(0)} = 3a^2 H^2 \bar{\gamma}_{ij} + a^2 \dot{H} \bar{\gamma}_{ij}, \quad (\text{B.49})$$

$$\begin{aligned} R_{ij}^{(1)} = & -6a^2 H^2 \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} - 2a^2 \dot{H} \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} - a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \dot{\phi}^{(1)} - 6a^2 H^2 \bar{\gamma}_{ij} \psi^{(1)} \\ & - 2a^2 \dot{H} \bar{\gamma}_{ij} \psi^{(1)} - 6a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \dot{\psi}^{(1)} - a^2 \bar{\gamma}_{ij} \ddot{\psi}^{(1)} - 2aH \partial_j \partial_i B^{(1)} - a \partial_j \partial_i \dot{B}^{(1)} \\ & + 6a^2 H^2 \partial_j \partial_i E^{(1)} + 2a^2 \dot{H} \partial_j \partial_i E^{(1)} + 3a^2 H \partial_j \partial_i \dot{E}^{(1)} + a^2 \partial_j \partial_i \ddot{E}^{(1)} - \partial_j \partial_i \phi^{(1)} \\ & + \partial_j \partial_i \psi^{(1)} - aH \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \partial^k B^{(1)} + a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \partial^k \dot{E}^{(1)} + \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \partial^k \psi^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

$$\begin{aligned} R_{ij}^{(2)} = & \frac{1}{2} a^2 \ddot{E}^{(2)}_{ij} + \frac{3}{2} a^2 \dot{E}^{(2)}_{ij} H + 3a^2 E^{(2)}_{ij} H^2 + a^2 E^{(2)}_{ij} \dot{H} + 12a^2 H^2 \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)2} \\ & + 4a^2 \dot{H} \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)2} + 4a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} \dot{\phi}^{(1)} - 3a^2 H^2 \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(2)} - a^2 \dot{H} \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(2)} \\ & - \frac{1}{2} a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \dot{\phi}^{(2)} + 12a^2 H^2 \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} \psi^{(1)} + 4a^2 \dot{H} \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} \psi^{(1)} + 2a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \dot{\phi}^{(1)} \psi^{(1)} \\ & + 12a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} \dot{\psi}^{(1)} + a^2 \bar{\gamma}_{ij} \dot{\phi}^{(1)} \dot{\psi}^{(1)} + a^2 \bar{\gamma}_{ij} \psi^{(1)2} + 2a^2 \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} \ddot{\psi}^{(1)} \\ & - 3a^2 H^2 \bar{\gamma}_{ij} \psi^{(2)} - a^2 \dot{H} \bar{\gamma}_{ij} \psi^{(2)} - 3a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \dot{\psi}^{(2)} - \frac{1}{2} a^2 \bar{\gamma}_{ij} \ddot{\psi}^{(2)} - 2aH \partial_i \psi^{(1)} \partial_j B^{(1)} \\ & - a \partial_i \dot{\psi}^{(1)} \partial_j B^{(1)} - a \partial_i \psi^{(1)} \partial_j \dot{B}^{(1)} + \partial_i \phi^{(1)} \partial_j \phi^{(1)} - \partial_i \psi^{(1)} \partial_j \phi^{(1)} - 2aH \partial_i B^{(1)} \partial_j \psi^{(1)} \\ & - a \partial_i \dot{B}^{(1)} \partial_j \psi^{(1)} - \partial_i \phi^{(1)} \partial_j \psi^{(1)} + 3 \partial_i \psi^{(1)} \partial_j \psi^{(1)} - a \partial_i B^{(1)} \partial_j \dot{\psi}^{(1)} + 4aH \phi^{(1)} \partial_j \partial_i B^{(1)} \\ & + a \dot{\phi}^{(1)} \partial_j \partial_i B^{(1)} + a \dot{\psi}^{(1)} \partial_j \partial_i B^{(1)} + 2a \phi^{(1)} \partial_j \partial_i \dot{B}^{(1)} - aH \partial_j \partial_i B^{(2)} - \frac{1}{2} a \partial_j \partial_i \dot{B}^{(2)} \\ & - 12a^2 H^2 \phi^{(1)} \partial_j \partial_i E^{(1)} - 4a^2 \dot{H} \phi^{(1)} \partial_j \partial_i E^{(1)} - 2a^2 H \phi^{(1)} \partial_j \partial_i \dot{E}^{(1)} - 6a^2 H \psi^{(1)} \partial_j \partial_i E^{(1)} \\ & - 6a^2 H \phi^{(1)} \partial_j \partial_i \dot{E}^{(1)} - a^2 \dot{\phi}^{(1)} \partial_j \partial_i \dot{E}^{(1)} + a^2 \dot{\psi}^{(1)} \partial_j \partial_i \dot{E}^{(1)} - 2a^2 \phi^{(1)} \partial_j \partial_i \ddot{E}^{(1)} \\ & + 3a^2 H^2 \partial_j \partial_i E^{(2)} + a^2 \dot{H} \partial_j \partial_i E^{(2)} + \frac{3}{2} a^2 H \partial_j \partial_i \dot{E}^{(2)} + \frac{1}{2} a^2 \partial_j \partial_i \ddot{E}^{(2)} + 2\phi^{(1)} \partial_j \partial_i \phi^{(1)} \\ & - \frac{1}{2} \partial_j \partial_i \phi^{(2)} + 2\psi^{(1)} \partial_j \partial_i \psi^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_j \partial_i \psi^{(2)} + 2aH \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} \partial_k \partial^k B^{(1)} + a \bar{\gamma}_{ij} \dot{\psi}^{(1)} \partial_k \partial^k B^{(1)} \\ & + \partial_j \partial_i B^{(1)} \partial_k \partial^k B^{(1)} - 2aH \partial_j \partial_i E^{(1)} \partial_k \partial^k B^{(1)} - a \partial_j \partial_i \dot{E}^{(1)} \partial_k \partial^k B^{(1)} - \frac{1}{2} aH \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \partial^k B^{(2)} \\ & + 2a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \dot{\psi}^{(1)} \partial_k \partial^k E^{(1)} - 2 \partial_j \partial_i \psi^{(1)} \partial_k \partial^k E^{(1)} - 2a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \phi^{(1)} \partial_k \partial^k \dot{E}^{(1)} \\ & - a^2 \bar{\gamma}_{ij} \dot{\psi}^{(1)} \partial_k \partial^k \dot{E}^{(1)} - a \partial_j \partial_i B^{(1)} \partial_k \partial^k \dot{E}^{(1)} + 2a^2 H \partial_j \partial_i E^{(1)} \partial_k \partial^k \dot{E}^{(1)} \\ & + a^2 \partial_j \partial_i \dot{E}^{(1)} \partial_k \partial^k \dot{E}^{(1)} + \frac{1}{2} a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \partial^k \dot{E}^{(2)} - \frac{1}{2} \partial_k \partial^k E^{(2)}_{ij} + 2 \bar{\gamma}_{ij} \psi^{(1)} \partial_k \partial^k \psi^{(1)} \\ & + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \partial^k \psi^{(2)} - 3a^2 H^2 \bar{\gamma}_{ij} \partial_k B^{(1)} \partial^k B^{(1)} - a^2 \dot{H} \bar{\gamma}_{ij} \partial_k B^{(1)} \partial^k B^{(1)} - a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \dot{B}^{(1)} \partial^k B^{(1)} \\ & + aH \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \phi^{(1)} \partial^k B^{(1)} + 3aH \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \psi^{(1)} \partial^k B^{(1)} + 2a \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \dot{\psi}^{(1)} \partial^k B^{(1)} + 2aH \partial_k \partial_j \partial_i E^{(1)} \partial^k B^{(1)} \\ & + aH \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \partial_l \partial^l E^{(1)} \partial^k B^{(1)} + a \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \psi^{(1)} \partial^k \dot{B}^{(1)} + a \partial_k \partial_j \partial_i E^{(1)} \partial^k \dot{B}^{(1)} + \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \psi^{(1)} \partial^k \phi^{(1)} \\ & + \partial_k \partial_j \partial_i E^{(1)} \partial^k \phi^{(1)} + \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \psi^{(1)} \partial^k \psi^{(1)} - \partial_k \partial_j \partial_i E^{(1)} \partial^k \psi^{(1)} - \bar{\gamma}_{ij} \partial_k \partial_l \partial^l E^{(1)} \partial^k \psi^{(1)} \\ & - \partial_k \partial_j B^{(1)} \partial^k \partial_i B^{(1)} + a \partial_k \partial_j \dot{E}^{(1)} \partial^k \partial_i B^{(1)} + 2 \partial_k \partial_j \psi^{(1)} \partial^k \partial_i E^{(1)} - 2a^2 \partial_k \partial_j \dot{E}^{(1)} \partial^k \partial_i \dot{E}^{(1)} \\ & + a \partial_k \partial_i \dot{E}^{(1)} \partial^k \partial_j B^{(1)} + 2 \partial_k \partial_i \psi^{(1)} \partial^k \partial_j E^{(1)} - \partial_k \partial_l \partial^l E^{(1)} \partial^k \partial_j \partial_i E^{(1)} + 2aH \bar{\gamma}_{ij} \partial_l \partial_k E^{(1)} \partial^l \partial^k B^{(1)} \\ & - 2a^2 H \bar{\gamma}_{ij} \partial_l \partial_k \dot{E}^{(1)} \partial^l \partial^k E^{(1)} - 2 \bar{\gamma}_{ij} \partial_l \partial_k \psi^{(1)} \partial^l \partial^k E^{(1)} + \partial_l \partial_k \partial_j E^{(1)} \partial^l \partial^k \partial_i E^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

B.1.5. Perturbaciones del escalar de Ricci

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \equiv R^\mu{}_\mu, \quad (\text{B.52})$$

$$R^{(0)} = 12H^2 + 6\dot{H}, \quad (\text{B.53})$$

$$R^{(1)} = -24H^2\phi^{(1)} - 12\dot{H}\phi^{(1)} - 6H\dot{\phi}^{(1)} - 24H\dot{\psi}^{(1)} - 6\ddot{\psi}^{(1)} - \frac{6H\partial_i\partial^i B^{(1)}}{a} - \frac{2\partial_i\partial^i\dot{B}^{(1)}}{a} \\ + 8H\partial_i\partial^i\dot{E}^{(1)} + 2\partial_i\partial^i\ddot{E}^{(1)} - \frac{2\partial_i\partial^i\dot{\phi}^{(1)}}{a^2} + \frac{4\partial_i\partial^i\dot{\psi}^{(1)}}{a^2}, \quad (\text{B.54})$$

$$R^{(2)} = +48H^2\phi^{(1)2} + 24\dot{H}\phi^{(1)2} + 24H\phi^{(1)}\dot{\phi}^{(1)} - 12H^2\phi^{(2)} - 6\dot{H}\phi^{(2)} - 3H\dot{\phi}^{(2)} \\ + 48H\phi^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} + 6\dot{\phi}^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} - 48H\psi^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} + 12\phi^{(1)}\ddot{\psi}^{(1)} - 12\psi^{(1)}\ddot{\psi}^{(1)} \\ - 12H\dot{\psi}^{(2)} - 3\ddot{\psi}^{(2)} + \frac{12H\phi^{(1)}\partial_i\partial^i B^{(1)}}{a} + \frac{2\dot{\phi}^{(1)}\partial_i\partial^i B^{(1)}}{a} - \frac{12H\psi^{(1)}\partial_i\partial^i B^{(1)}}{a} \\ + \frac{4\dot{\psi}^{(1)}\partial_i\partial^i B^{(1)}}{a} + \frac{4\phi^{(1)}\partial_i\partial^i\dot{B}^{(1)}}{a} - \frac{4\psi^{(1)}\partial_i\partial^i\dot{B}^{(1)}}{a} - \frac{3H\partial_i\partial^i B^{(2)}}{a} - \frac{\partial_i\partial^i\dot{B}^{(2)}}{a} \\ + 16H\dot{\psi}^{(1)}\partial_i\partial^i E^{(1)} + 4\ddot{\psi}^{(1)}\partial_i\partial^i E^{(1)} - 16H\phi^{(1)}\partial_i\partial^i\dot{E}^{(1)} - 2\dot{\phi}^{(1)}\partial_i\partial^i\dot{E}^{(1)} \\ + 16H\psi^{(1)}\partial_i\partial^i\dot{E}^{(1)} - 4\phi^{(1)}\partial_i\partial^i\ddot{E}^{(1)} + 4\psi^{(1)}\partial_i\partial^i\ddot{E}^{(1)} + 4H\partial_i\partial^i\dot{E}^{(2)} + \partial_i\partial^i\ddot{E}^{(2)} \\ + \frac{4\phi^{(1)}\partial_i\partial^i\dot{\phi}^{(1)}}{a^2} - \frac{4\psi^{(1)}\partial_i\partial^i\dot{\phi}^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_i\partial^i\dot{\phi}^{(2)}}{a^2} + \frac{16\psi^{(1)}\partial_i\partial^i\dot{\psi}^{(1)}}{a^2} + \frac{2\partial_i\partial^i\dot{\psi}^{(2)}}{a^2} \\ - 12H^2\partial_i B^{(1)}\partial^i B^{(1)} - 6\dot{H}\partial_i B^{(1)}\partial^i B^{(1)} - 6H\partial_i\dot{B}^{(1)}\partial^i B^{(1)} + \frac{6H\partial_i\phi^{(1)}\partial^i B^{(1)}}{a} \\ + \frac{6H\partial_i\psi^{(1)}\partial^i B^{(1)}}{a} + \frac{8\partial_i\dot{\psi}^{(1)}\partial^i B^{(1)}}{a} + \frac{6H\partial_i\partial_j\partial^j E^{(1)}\partial^i B^{(1)}}{a} + \frac{2\partial_i\psi^{(1)}\partial^i\dot{B}^{(1)}}{a} \\ + \frac{2\partial_i\partial_j\partial^j E^{(1)}\partial^i\dot{B}^{(1)}}{a} + \frac{2\partial_i\phi^{(1)}\partial^i\dot{\phi}^{(1)}}{a^2} + \frac{2\partial_i\psi^{(1)}\partial^i\dot{\phi}^{(1)}}{a^2} + \frac{2\partial_i\partial_j\partial^j E^{(1)}\partial^i\dot{\phi}^{(1)}}{a^2} \\ + \frac{6\partial_i\psi^{(1)}\partial^i\dot{\psi}^{(1)}}{a^2} - \frac{4\partial_i\partial_j\partial^j E^{(1)}\partial^i\dot{\psi}^{(1)}}{a^2} + \frac{\partial_i\partial^i B^{(1)}\partial_j\partial^j B^{(1)}}{a^2} - \frac{2\partial_i\partial^i B^{(1)}\partial_j\partial^j\dot{E}^{(1)}}{a} \\ + \partial_i\partial^i\dot{E}^{(1)}\partial_j\partial^j\dot{E}^{(1)} - \frac{4\partial_i\partial^i E^{(1)}\partial_j\partial^j\dot{\psi}^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_j\partial_k\partial^k E^{(1)}\partial^j\partial_i\partial^i E^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_j\partial_i B^{(1)}\partial^j\partial^i B^{(1)}}{a^2} \\ + \frac{12H\partial_j\partial_i E^{(1)}\partial^j\partial^i B^{(1)}}{a} + \frac{2\partial_j\partial_i\dot{E}^{(1)}\partial^j\partial^i B^{(1)}}{a} + \frac{4\partial_j\partial_i E^{(1)}\partial^j\partial^i\dot{B}^{(1)}}{a} \\ - 16H\partial_j\partial_i\dot{E}^{(1)}\partial^j\partial^i E^{(1)} - 4\partial_j\partial_i\ddot{E}^{(1)}\partial^j\partial^i E^{(1)} + \frac{4\partial_j\partial_i\phi^{(1)}\partial^j\partial^i E^{(1)}}{a^2} \\ - \frac{4\partial_j\partial_i\psi^{(1)}\partial^j\partial^i E^{(1)}}{a^2} - 3\partial_j\partial_i\dot{E}^{(1)}\partial^j\partial^i\dot{E}^{(1)} + \frac{\partial_k\partial_j\partial_i E^{(1)}\partial^k\partial^j\partial^i E^{(1)}}{a^2}, \quad (\text{B.55})$$

B.1.6. Perturbaciones del tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (\text{B.56})$$

$$G_0^0(0) = -3H^2, \quad (\text{B.57})$$

$$G_0^0(1) = 6H^2\phi^{(1)} + 6H\dot{\psi}^{(1)} + \frac{2H\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} - 2H\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} - \frac{2\partial_k\partial^k \psi^{(1)}}{a^2}, \quad (\text{B.58})$$

$$\begin{aligned} G_0^0(2) = & -12H^2\phi^{(1)2} + 3H^2\phi^{(2)} - 12H\phi^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} + 12H\psi^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} - 3\dot{\psi}^{(1)2} + 3H\dot{\psi}^{(2)} \\ & - \frac{4H\phi^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{4H\psi^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{2\dot{\psi}^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{H\partial_k\partial^k B^{(2)}}{a} \\ & - 4H\dot{\psi}^{(1)}\partial_k\partial^k E^{(1)} + 4H\phi^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} - 4H\psi^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} + 2\dot{\psi}^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} \\ & - H\partial_k\partial^k \dot{E}^{(2)} - \frac{8\psi^{(1)}\partial_k\partial^k \psi^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_k\partial^k \psi^{(2)}}{a^2} + 3H^2\partial_k B^{(1)}\partial^k B^{(1)} - \frac{2H\partial_k\phi^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} \\ & - \frac{2H\partial_k\psi^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{2\partial_k\dot{\psi}^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{2H\partial_k\partial_l\partial^l E^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{3\partial_k\psi^{(1)}\partial^k \psi^{(1)}}{a^2} \\ & + \frac{2\partial_k\partial_l\partial^l E^{(1)}\partial^k \psi^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_k\partial^k B^{(1)}\partial_l\partial^l B^{(1)}}{2a^2} + \frac{\partial_k\partial^k B^{(1)}\partial_l\partial^l \dot{E}^{(1)}}{a} - \frac{1}{2}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)}\partial_l\partial^l \dot{E}^{(1)} \\ & + \frac{2\partial_k\partial^k E^{(1)}\partial_l\partial^l \psi^{(1)}}{a^2} + \frac{\partial_l\partial_m\partial^m E^{(1)}\partial^l\partial_k\partial^k E^{(1)}}{2a^2} + \frac{\partial_l\partial_k B^{(1)}\partial^l\partial^k B^{(1)}}{2a^2} \\ & - \frac{4H\partial_l\partial_k E^{(1)}\partial^l\partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{\partial_l\partial_k \dot{E}^{(1)}\partial^l\partial^k B^{(1)}}{a} + 4H\partial_l\partial_k \dot{E}^{(1)}\partial^l\partial^k E^{(1)} \\ & + \frac{2\partial_l\partial_k \psi^{(1)}\partial^l\partial^k E^{(1)}}{a^2} + \frac{1}{2}\partial_l\partial_k \dot{E}^{(1)}\partial^l\partial^k \dot{E}^{(1)} - \frac{\partial_m\partial_l\partial_k E^{(1)}\partial^m\partial^l\partial^k E^{(1)}}{2a^2}, \quad (\text{B.59}) \end{aligned}$$

$$G_j^0(0) = 0, \quad (\text{B.60})$$

$$G_j^0(1) = -2H\partial_j\phi^{(1)} - 2\partial_j\dot{\psi}^{(1)}, \quad (\text{B.61})$$

$$\begin{aligned} G_j^0(2) = & 8H\phi^{(1)}\partial_j\phi^{(1)} + 2\dot{\psi}^{(1)}\partial_j\phi^{(1)} - H\partial_j\phi^{(2)} - 4\dot{\psi}^{(1)}\partial_j\psi^{(1)} + 4\phi^{(1)}\partial_j\dot{\psi}^{(1)} \\ & - 4\psi^{(1)}\partial_j\dot{\psi}^{(1)} - \partial_j\dot{\psi}^{(2)} + \frac{\partial_j\phi^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} + 2\partial_j\psi^{(1)}\partial_k\partial^k E^{(1)} - \partial_j\phi^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} \\ & + \partial_j\psi^{(1)}\partial_k\partial^k \dot{E}^{(1)} + \frac{\partial_j B^{(1)}\partial_k\partial^k \psi^{(1)}}{a} - 2H\partial_k\partial_j B^{(1)}\partial^k B^{(1)} + \frac{\partial_k\partial_j\psi^{(1)}\partial^k B^{(1)}}{a} \\ & - \frac{\partial_k\partial_j B^{(1)}\partial^k \phi^{(1)}}{a} + \partial_k\partial_j \dot{E}^{(1)}\partial^k \phi^{(1)} + \partial_k\partial_j \dot{E}^{(1)}\partial^k \psi^{(1)} - 2\partial_k\partial_j E^{(1)}\partial^k \dot{\psi}^{(1)} \\ & + \partial_k\partial_l\partial^l E^{(1)}\partial^k\partial_j \dot{E}^{(1)} - \partial_l\partial_k\partial_j E^{(1)}\partial^l\partial^k \dot{E}^{(1)}, \quad (\text{B.62}) \end{aligned}$$

$$G_j^{i(0)} = -3H^2\bar{\gamma}_j^{-i} - 2\dot{H}\bar{\gamma}_j^{-i}, \quad (\text{B.63})$$

$$\begin{aligned} G_j^{i(1)} = & 6H^2\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)} + 4\dot{H}\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)} + 2H\bar{\gamma}_j^{-i}\dot{\phi}^{(1)} + 6H\bar{\gamma}_j^{-i}\dot{\psi}^{(1)} + 2\bar{\gamma}_j^{-i}\ddot{\psi}^{(1)} - \frac{2H\partial_j\partial^i B^{(1)}}{a} \\ & - \frac{\partial_j\partial^i\dot{B}^{(1)}}{a} + 3H\partial_j\partial^i\dot{E}^{(1)} + \partial_j\partial^i\ddot{E}^{(1)} - \frac{\partial_j\partial^i\phi^{(1)}}{a^2} + \frac{\partial_j\partial^i\psi^{(1)}}{a^2} + \frac{2H\bar{\gamma}_j^{-i}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} \\ & + \frac{\bar{\gamma}_j^{-i}\partial_k\partial^k\dot{B}^{(1)}}{a} - 3H\bar{\gamma}_j^{-i}\partial_k\partial^k\dot{E}^{(1)} - \bar{\gamma}_j^{-i}\partial_k\partial^k\ddot{E}^{(1)} + \frac{\bar{\gamma}_j^{-i}\partial_k\partial^k\phi^{(1)}}{a^2} - \frac{\bar{\gamma}_j^{-i}\partial_k\partial^k\psi^{(1)}}{a^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

$$\begin{aligned} G_j^{i(2)} = & \frac{1}{2}\ddot{E}^{(2)ij} + \frac{3}{2}\dot{E}^{(2)ij}H - 12H^2\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)2} - 8H\bar{\gamma}_j^{-i}\dot{\phi}^{(1)2} - 8H\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)}\dot{\phi}^{(1)} + 3H^2\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(2)} \\ & + 2\dot{H}\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(2)} + H\bar{\gamma}_j^{-i}\dot{\phi}^{(2)} - 12H\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} - 2\bar{\gamma}_j^{-i}\dot{\phi}^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} + 12H\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} \\ & + \bar{\gamma}_j^{-i}\dot{\psi}^{(1)2} - 4\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)}\ddot{\psi}^{(1)} + 4\bar{\gamma}_j^{-i}\psi^{(1)}\ddot{\psi}^{(1)} + 3H\bar{\gamma}_j^{-i}\dot{\psi}^{(2)} + \bar{\gamma}_j^{-i}\ddot{\psi}^{(2)} \\ & - \frac{2H\partial^i\psi^{(1)}\partial_j B^{(1)}}{a} - \frac{\partial^i\psi^{(1)}\partial_j B^{(1)}}{a} - \frac{\partial^i\psi^{(1)}\partial_j\dot{B}^{(1)}}{a} + \frac{2H\partial^i B^{(1)}\partial_j\phi^{(1)}}{a} \\ & + \frac{\partial^i\phi^{(1)}\partial_j\phi^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial^i\psi^{(1)}\partial_j\psi^{(1)}}{a^2} - \frac{2H\partial^i B^{(1)}\partial_j\psi^{(1)}}{a} - \frac{\partial^i\dot{B}^{(1)}\partial_j\psi^{(1)}}{a} \\ & - \frac{\partial^i\phi^{(1)}\partial_j\psi^{(1)}}{a^2} + \frac{3\partial^i\psi^{(1)}\partial_j\psi^{(1)}}{a^2} + \frac{\partial^i B^{(1)}\partial_j\dot{\psi}^{(1)}}{a} + \frac{4H\phi^{(1)}\partial_j\partial^i B^{(1)}}{a} \\ & + \frac{\dot{\phi}^{(1)}\partial_j\partial^i B^{(1)}}{a} - \frac{4H\psi^{(1)}\partial_j\partial^i B^{(1)}}{a} + \frac{\dot{\psi}^{(1)}\partial_j\partial^i B^{(1)}}{a} + \frac{2\phi^{(1)}\partial_j\partial^i\dot{B}^{(1)}}{a} \\ & - \frac{2\psi^{(1)}\partial_j\partial^i\dot{B}^{(1)}}{a} - \frac{H\partial_j\partial^i B^{(2)}}{a} - \frac{\partial_j\partial^i\dot{B}^{(2)}}{2a} + 6H\dot{\psi}^{(1)}\partial_j\partial^i E^{(1)} + 2\ddot{\psi}^{(1)}\partial_j\partial^i E^{(1)} \\ & - 6H\phi^{(1)}\partial_j\partial^i\dot{E}^{(1)} - \dot{\phi}^{(1)}\partial_j\partial^i\dot{E}^{(1)} + 6H\psi^{(1)}\partial_j\partial^i\dot{E}^{(1)} + \dot{\psi}^{(1)}\partial_j\partial^i\dot{E}^{(1)} \\ & - 2\phi^{(1)}\partial_j\partial^i\ddot{E}^{(1)} + 2\psi^{(1)}\partial_j\partial^i\ddot{E}^{(1)} + \frac{3}{2}H\partial_j\partial^i\dot{E}^{(2)} + \frac{1}{2}\partial_j\partial^i\ddot{E}^{(2)} + \frac{2\phi^{(1)}\partial_j\partial^i\phi^{(1)}}{a^2} \\ & - \frac{2\psi^{(1)}\partial_j\partial^i\phi^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_j\partial^i\phi^{(2)}}{2a^2} + \frac{4\psi^{(1)}\partial_j\partial^i\psi^{(1)}}{a^2} + \frac{\partial_j\partial^i\psi^{(2)}}{2a^2} - \frac{4H\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} \\ & - \frac{\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{4H\bar{\gamma}_j^{-i}\psi^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{\bar{\gamma}_j^{-i}\psi^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{\partial_j\partial^i B^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a^2} \\ & - \frac{\partial_j\partial^i\dot{E}^{(1)}\partial_k\partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{2\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)}\partial_k\partial^k\dot{B}^{(1)}}{a} + \frac{2\bar{\gamma}_j^{-i}\psi^{(1)}\partial_k\partial^k\dot{B}^{(1)}}{a} + \frac{H\bar{\gamma}_j^{-i}\partial_k\partial^k B^{(2)}}{a} \\ & + \frac{\bar{\gamma}_j^{-i}\partial_k\partial^k\dot{B}^{(2)}}{2a} - 6H\bar{\gamma}_j^{-i}\dot{\psi}^{(1)}\partial_k\partial^k E^{(1)} - 2\bar{\gamma}_j^{-i}\ddot{\psi}^{(1)}\partial_k\partial^k E^{(1)} - \frac{2\partial_j\partial^i\psi^{(1)}\partial_k\partial^k E^{(1)}}{a^2} \\ & + 6H\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)}\partial_k\partial^k\dot{E}^{(1)} + \bar{\gamma}_j^{-i}\dot{\phi}^{(1)}\partial_k\partial^k\dot{E}^{(1)} - 6H\bar{\gamma}_j^{-i}\psi^{(1)}\partial_k\partial^k\dot{E}^{(1)} - \bar{\gamma}_j^{-i}\dot{\psi}^{(1)}\partial_k\partial^k\dot{E}^{(1)} \\ & - \frac{\partial_j\partial^i B^{(1)}\partial_k\partial^k\dot{E}^{(1)}}{a} + \partial_j\partial^i\dot{E}^{(1)}\partial_k\partial^k\dot{E}^{(1)} + 2\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)}\partial_k\partial^k\ddot{E}^{(1)} - 2\bar{\gamma}_j^{-i}\psi^{(1)}\partial_k\partial^k\ddot{E}^{(1)} \\ & - \frac{3}{2}H\bar{\gamma}_j^{-i}\partial_k\partial^k\dot{E}^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{\gamma}_j^{-i}\partial_k\partial^k\ddot{E}^{(2)} - \frac{\partial_k\partial^k E^{(2)ij}}{2a^2} - \frac{2\bar{\gamma}_j^{-i}\phi^{(1)}\partial_k\partial^k\phi^{(1)}}{a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\bar{\gamma}^i_j \psi^{(1)} \partial_k \partial^k \phi^{(1)}}{a^2} + \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_k \partial^k \phi^{(2)}}{2a^2} - \frac{4\bar{\gamma}^i_j \psi^{(1)} \partial_k \partial^k \psi^{(1)}}{a^2} - \frac{2\partial_j \partial^i E^{(1)} \partial_k \partial^k \psi^{(1)}}{a^2} \\
& - \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_k \partial^k \psi^{(2)}}{2a^2} + 3H^2 \bar{\gamma}^i_j \partial_k B^{(1)} \partial^k B^{(1)} + 2\dot{H} \bar{\gamma}^i_j \partial_k B^{(1)} \partial^k B^{(1)} + 2H \bar{\gamma}^i_j \partial_k \dot{B}^{(1)} \partial^k B^{(1)} \\
& - \frac{2H \bar{\gamma}^i_j \partial_k \phi^{(1)} \partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{2\bar{\gamma}^i_j \partial_k \psi^{(1)} \partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{2H \partial_k \partial_j \partial^i E^{(1)} \partial^k B^{(1)}}{a} \\
& - \frac{2H \bar{\gamma}^i_j \partial_k \partial_l \partial^l E^{(1)} \partial^k B^{(1)}}{a} + \frac{\partial_k \partial_j \partial^i E^{(1)} \partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} - \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_k \partial_l \partial^l E^{(1)} \partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} - \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_k \phi^{(1)} \partial^k \phi^{(1)}}{a^2} \\
& + \frac{\partial_k \partial_j \partial^i E^{(1)} \partial^k \phi^{(1)}}{a^2} - \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_k \partial_l \partial^l E^{(1)} \partial^k \phi^{(1)}}{a^2} - \frac{2\bar{\gamma}^i_j \partial_k \psi^{(1)} \partial^k \psi^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_k \partial_j \partial^i E^{(1)} \partial^k \psi^{(1)}}{a^2} \\
& + \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_k \partial_l \partial^l E^{(1)} \partial^k \psi^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_k \partial_j B^{(1)} \partial^k \partial^i B^{(1)}}{a^2} + \frac{\partial_k \partial_j \dot{E}^{(1)} \partial^k \partial^i B^{(1)}}{a} - 6H \partial_k \partial_j \dot{E}^{(1)} \partial^k \partial^i E^{(1)} \\
& - 2\partial_k \partial_j \ddot{E}^{(1)} \partial^k \partial^i E^{(1)} + \frac{2\partial_k \partial_j \phi^{(1)} \partial^k \partial^i E^{(1)}}{a^2} - 2\partial_k \partial_j \dot{E}^{(1)} \partial^k \partial^i \dot{E}^{(1)} + \frac{4H \partial_k \partial^i E^{(1)} \partial^k \partial_j B^{(1)}}{a} \\
& + \frac{\partial_k \partial^i \dot{E}^{(1)} \partial^k \partial_j B^{(1)}}{a} + \frac{2\partial_k \partial^i E^{(1)} \partial^k \partial_j \dot{B}^{(1)}}{a} + \frac{2\partial_k \partial^i \psi^{(1)} \partial^k \partial_j E^{(1)}}{a^2} - \frac{\partial_k \partial_l \partial^l E^{(1)} \partial^k \partial_j \partial^i E^{(1)}}{a^2} \\
& - \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_k \partial^k B^{(1)} \partial_l \partial^l B^{(1)}}{2a^2} + \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_k \partial^k B^{(1)} \partial_l \partial^l \dot{E}^{(1)}}{a} - \frac{1}{2} \bar{\gamma}^i_j \partial_k \partial^k \dot{E}^{(1)} \partial_l \partial^l \dot{E}^{(1)} + \frac{2\bar{\gamma}^i_j \partial_k \partial^k E^{(1)} \partial_l \partial^l \psi^{(1)}}{a^2} \\
& + \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_l \partial_m \partial^m E^{(1)} \partial^l \partial_k \partial^k E^{(1)}}{2a^2} + \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_l \partial_k B^{(1)} \partial^l \partial^k B^{(1)}}{2a^2} - \frac{4H \bar{\gamma}^i_j \partial_l \partial_k E^{(1)} \partial^l \partial^k B^{(1)}}{a} \\
& - \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_l \partial_k \dot{E}^{(1)} \partial^l \partial^k B^{(1)}}{a} - \frac{2\bar{\gamma}^i_j \partial_l \partial_k E^{(1)} \partial^l \partial^k \dot{B}^{(1)}}{a} + 6H \bar{\gamma}^i_j \partial_l \partial_k \dot{E}^{(1)} \partial^l \partial^k E^{(1)} \\
& + 2\bar{\gamma}^i_j \partial_l \partial_k \ddot{E}^{(1)} \partial^l \partial^k E^{(1)} - \frac{2\bar{\gamma}^i_j \partial_l \partial_k \phi^{(1)} \partial^l \partial^k E^{(1)}}{a^2} + \frac{3}{2} \bar{\gamma}^i_j \partial_l \partial_k \dot{E}^{(1)} \partial^l \partial^k \dot{E}^{(1)} \\
& + \frac{\partial_l \partial_k \partial_j E^{(1)} \partial^l \partial^k \partial^i E^{(1)}}{a^2} - \frac{\bar{\gamma}^i_j \partial_m \partial_l \partial_k E^{(1)} \partial^m \partial^l \partial^k E^{(1)}}{2a^2}, \tag{B.65}
\end{aligned}$$

B.2. Cantidades geométricas

La derivada covariante de cualquier vector de tipo tiempo, se puede descomponer en:

$$n_{\mu;\nu} = \frac{1}{3} \Theta \mathcal{P}_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} - a_\mu n_\nu, \tag{B.66}$$

donde $\frac{1}{3} \Theta \mathcal{P}_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$ corresponde a la parte puramente espacial ortogonal a n_μ . El vector unitario ortogonal a la hipersuperficie espacial:

$$n^0 = 1 - \phi^{(1)}, \quad n_0 = -1 - \phi^{(1)}, \tag{B.67}$$

$$n^i = 1 - \phi^{(1)}, \quad n_i = 0, \tag{B.68}$$

- El tensor **proyección espacial** es:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (\text{B.69})$$

- La **expansión** es

$$\Theta \equiv n^\alpha{}_{;\alpha} = 3H + \Theta^{(1)}, \quad (\text{B.70})$$

donde la perturbación de la expansión escalar es:

$$-\Theta^{(1)} = 3H\phi^{(1)} + 3\dot{\psi}^{(1)} + \frac{k^2}{a^2}\chi. \quad (\text{B.71})$$

donde:

$$\chi \equiv a(a\dot{E}^{(1)} - B^{(1)}), \quad (\text{B.72})$$

- La parte simétrica sin traza, la **cizalladura** (*shear* del inglés) es

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_\mu^\alpha\mathcal{P}_\nu^\beta (n_{\alpha;\beta} + n_{\beta;\alpha}) - \frac{1}{3}\Theta\mathcal{P}_{\mu\nu}, \quad (\text{B.73})$$

La descomposición de la *shear* da como resultado una parte puramente espacial escalar:

$$\sigma_{00} = 0 \quad (\text{B.74})$$

$$\sigma_{0j} = 0, \quad (\text{B.75})$$

$$\sigma_{ij} = (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\bar{\gamma}_{ij}\partial_k\partial^k)\sigma, \quad (\text{B.76})$$

$$\sigma^{(1)} = a(a\dot{E}^{(1)} - B^{(1)}) = \chi, \quad (\text{B.77})$$

- La parte antisimétrica, la **vorticidad**

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_\mu^\alpha\mathcal{P}_\nu^\beta (n_{\alpha;\beta} - n_{\beta;\alpha}) \quad (\text{B.78})$$

$$= 0, \quad (\text{B.79})$$

- La **aceleración** $a_\nu = n_{\nu;\mu}n^\mu$

$$a_0 = 0 \quad (\text{B.80})$$

$$a_i = \partial_i\phi^{(1)}, \quad (\text{B.81})$$

B.3. 4-velocidad de las perturbaciones de materia del fluido

El cuadvectores velocidad, u_μ , se define:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (\text{B.82})$$

donde τ es el tiempo propio comóvil con el fluido, tal que

$$u^\mu u_\mu = -1, \quad (\text{B.83})$$

Las componentes de la 4-velocidad hasta segundo orden:

$$u_0 = -1 - \phi^{(1)} + \frac{1}{2}\phi^{(1)2} - \frac{1}{2}\phi^{(2)} - \frac{1}{2}\partial_j V^{(1)} \partial^j V^{(1)}, \quad (\text{B.84})$$

$$u_i = a\partial_i B^{(1)} + a\partial_i V^{(1)} - a\phi^{(1)} \partial_i B^{(1)} + \frac{1}{2}a\partial_i B^{(2)} - 2a\psi^{(1)} \partial_i V^{(1)} + \frac{1}{2}a \partial_i V^{(2)} + 2a \partial_j \partial_i E^{(1)} \partial^j V^{(1)}, \quad (\text{B.85})$$

$$u^0 = 1 - \phi^{(1)} + \frac{3}{2}\phi^{(1)2} - \frac{1}{2}\phi^{(2)} + \partial_j V^{(1)} \partial^j B^{(1)} + \frac{1}{2}\partial_j V^{(1)} \partial^j V^{(1)}, \quad (\text{B.86})$$

$$u^i = a^{-1} \left(\partial^i V^{(1)} + \frac{1}{2}\partial^i V^{(2)} \right), \quad (\text{B.87})$$

B.4. Transformaciones gauge

El campo vectorial generador de las transformaciones, ζ :

$$\zeta_0 = T^{(1)} + \frac{1}{2}T^{(2)}, \quad (\text{B.88})$$

$$\zeta^i = L^{(1)i} + \partial^i L^{(1)} + \frac{1}{2}L^{(2)i} + \frac{1}{2}\partial^i L^{(2)}, \quad (\text{B.89})$$

$$\zeta_0 = T^{(1)} + \frac{1}{2}T^{(2)}, \quad (\text{B.90})$$

$$\zeta^i = L^{(1)i} + \partial^i L^{(1)} + \frac{1}{2}L^{(2)i} + \frac{1}{2}\partial^i L^{(2)}, \quad (\text{B.91})$$

B.4.1. Transformaciones de las perturbaciones de la métrica a primer orden

$$\tilde{\phi}^{(1)} = \dot{T}^{(1)} + \phi^{(1)}, \quad (\text{B.92})$$

$$\tilde{B}^{(1)} = B^{(1)} + a\dot{L}^{(1)} - a^{-1}T^{(1)}, \quad (\text{B.93})$$

$$\tilde{B}^{(1)}_j = B^{(1)}_j + a\dot{L}^{(1)}_j, \quad (\text{B.94})$$

$$\tilde{\psi}^{(1)} = \psi^{(1)} - HT^{(1)}, \quad (\text{B.95})$$

$$\tilde{E}^{(1)} = E^{(1)} + L^{(1)}, \quad (\text{B.96})$$

$$\tilde{E}^{(1)}_j = E^{(1)}_j + L^{(1)}_j, \quad (\text{B.97})$$

$$\tilde{E}^{(1)}_{ij} = E^{(1)}_{ij}, \quad (\text{B.98})$$

El **gauge longitudinal** está definido por la siguiente igualdad:

$$T^{(1)} = B^{(1)} - a\dot{E}^{(1)}, \quad (\text{B.99})$$

Además, el gauge longitudinal está definido por la elección: $\tilde{E}^{(1)} = 0 \Rightarrow L^{(1)} = -E^{(1)} \Rightarrow \tilde{B}^{(1)} = 0$, con lo que tenemos:

$$\alpha = T^{(1)}, \quad (\text{B.100})$$

$$\beta = L^{(1)}. \quad (\text{B.101})$$

La extensión que incluye a los vectores y tensores se denomina **gauge de Poisson**. Las perturbaciones tensoriales son automáticamente independientes del gauge hasta primer orden, por lo tanto son invariantes gauge.

Eliminando la parte espacial $L^{(1)}_i = 0$, tenemos:

$$\tilde{B}^{(1)}_i = 0, \quad (\text{B.102})$$

$$\tilde{E}^{(1)}_i = 0, \quad (\text{B.103})$$

B.4.2. Transformaciones de las componentes del fluido

- Los escalares transforman de la siguiente manera:

$$\tilde{\rho}^{(1)} = \rho^{(1)} + T^{(1)} \dot{\rho}, \quad (\text{B.104})$$

$$\tilde{P}^{(1)} = P^{(1)} + T^{(1)} \dot{P}, \quad (\text{B.105})$$

- Los 4-vectores, en cambio, transforman como sigue:

$$\tilde{V}^{(1)0} = V^{(1)0} - a\dot{T}^{(1)}, \quad (\text{B.106})$$

$$\tilde{\mathcal{V}}^{(1)i} = \mathcal{V}^{(1)i} - a\dot{L}^{(1)i} - a\partial^i \dot{L}^{(1)}, \quad (\text{B.107})$$

$$\tilde{V}^{(1)} = V^{(1)} - a\dot{L}^{(1)}, \quad (\text{B.108})$$

$$\tilde{\mathcal{V}}^{(1)i} = \mathcal{V}^{(1)i} - a\dot{L}^{(1)i}, \quad (\text{B.109})$$

Podemos definir las siguientes variables invariantes gauge:

$$\Phi = \phi^{(1)} - \frac{d}{dt} \left(a^2 (\dot{E}^{(1)} - B^{(1)}) \right), \quad (\text{B.110})$$

$$\Psi = \psi^{(1)} + Ha^2 \left(\dot{E}^{(1)} - \frac{B^{(1)}}{a} \right). \quad (\text{B.111})$$

Bibliografía

- [1] Max Planck. «2 – On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum†». En: 1967.
- [2] Albert Einstein. «The Foundation of the General Theory of Relativity». En: *Annalen Phys.* 49.7 (1916).
- [3] A. Friedman. «On the Curvature of space». En: *Z. Phys.* 10 (1922).
- [4] Edwin Hubble. «A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae». En: *Proc. Nat. Acad. Sci.* 15 (1929).
- [5] Georges Lemaître. «Republication of: The beginning of the world from the point of view of quantum theory». En: *Nature* 127 (1931).
- [6] R. A. Alpher, H. Bethe y G. Gamow. «The Origin of Chemical Elements». En: *Phys. Rev.* 73 (1948). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.803>.
- [7] Ralph A. Alpher, George Gamow y Robert Herman. «Thermal Cosmic Radiation and The Formation of Protogalaxies». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 58.6 (1967). URL: <https://www.pnas.org/content/58/6/2179>.
- [8] R. H. Dicke y col. «Cosmic Black-Body Radiation». En: *Astrophys. J.* 142 (1965).
- [9] Arno A. Penzias y Robert Woodrow Wilson. «A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s». En: *Astrophys. J.* 142 (1965).
- [10] Alan H. Guth. «Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems». En: *PRD* 23.2 (1981).
- [11] Adam G. Riess y col. «Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant». En: *Astron. J.* 116 (1998). arXiv: [astro-ph/9805201](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201).
- [12] S. Perlmutter y col. «Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe and its cosmological implications». En: *Nature* 391 (1998). arXiv: [astro-ph/9712212](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9712212).
- [13] B. P. Abbott y col. «Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger». En: *Centennial of General Relativity: A Celebration*. 2017.
- [14] Arjun Berera. «Warm inflation». En: *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995). arXiv: [astro-ph/9509049](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9509049).
- [15] Ya. B. ; Novikov Zel'dovich I. D. «The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model». En: *Soviet Astron. AJ (Engl. Transl.)*, 10 (1967).
- [16] James M. Bardeen, B. Carter y S. W. Hawking. «The Four laws of black hole mechanics». En: *Commun. Math. Phys.* 31 (1973).
- [17] G. Lemaître. «Expansion of the universe, A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae». En: *MNRAS* 91 (1931).

- [18] H. P. Robertson. «Kinematics and World-Structure». En: *Astrophys. J.* 82 (1935).
- [19] A. G. Walker. «On Milne's Theory of World-Structure». En: *Proceedings of the London Mathematical Society* 42 (1937).
- [20] Roy Maartens. «Causal thermodynamics in relativity». En: 1996. arXiv: [astro-ph/9609119](#).
- [21] Amalkumar Raychaudhuri. «Relativistic Cosmology. I». En: *Phys. Rev.* 98 (1955). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.98.1123>.
- [22] Antonio Riotto. «Inflation and the theory of cosmological perturbations». En: *ICTP Lect. Notes Ser.* 14 (2003). arXiv: [hep-ph/0210162](#).
- [23] Edward W. Kolb y Michael S. Turner. *The Early Universe*. Vol. 69. 1990.
- [24] Yuki Watanabe y Eiichiro Komatsu. «Improved Calculation of the Primordial Gravitational Wave Spectrum in the Standard Model». En: *Phys. Rev. D* 73 (2006). arXiv: [astro-ph/0604176](#).
- [25] Lars Husdal. «On Effective Degrees of Freedom in the Early Universe». En: *Galaxies* 4.4 (2016). arXiv: [1609.04979 \[astro-ph.CO\]](#).
- [26] Kazunori Nakayama y col. «Probing reheating temperature of the universe with gravitational wave background». En: *JCAP* 06 (2008). arXiv: [0804.1827 \[astro-ph\]](#).
- [27] Latham A. Boyle y Paul J. Steinhardt. «Probing the early universe with inflationary gravitational waves». En: *Phys. Rev. D* 77 (2008). arXiv: [astro-ph/0512014](#).
- [28] Sachiko Kuroyanagi, Takeshi Chiba y Naoshi Sugiyama. «Precision calculations of the gravitational wave background spectrum from inflation». En: *Phys. Rev. D* 79 (2009). arXiv: [0804.3249 \[astro-ph\]](#).
- [29] M. Kawasaki, Kazunori Kohri y Naoshi Sugiyama. «MeV scale reheating temperature and thermalization of neutrino background». En: *Phys. Rev. D* 62 (2000). arXiv: [astro-ph/0002127](#).
- [30] Steen Hannestad. «What is the lowest possible reheating temperature?» En: *Phys. Rev. D* 70 (2004). arXiv: [astro-ph/0403291](#).
- [31] Francesco De Bernardis, Luca Pagano y Alessandro Melchiorri. «New constraints on the reheating temperature of the universe after WMAP-5». En: *Astropart. Phys.* 30 (2008).
- [32] N. Aghanim y col. «Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters». En: *Astron. Astrophys.* 641 (2020). [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)]. arXiv: [1807.06209 \[astro-ph.CO\]](#).
- [33] H. V. Peiris y col. «First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Implications for inflation». En: *Astrophys. J. Suppl.* 148 (2003). arXiv: [astro-ph/0302225](#).
- [34] David N. Spergel y Matias Zaldarriaga. «CMB polarization as a direct test of inflation». En: *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997). arXiv: [astro-ph/9705182](#).
- [35] Kendrick M. Smith, Leonardo Senatore y Matias Zaldarriaga. «Optimal limits on f_{NL}^{local} from WMAP 5-year data». En: *JCAP* 09 (2009). arXiv: [0901.2572 \[astro-ph.CO\]](#).
- [36] J. Hamann y col. «A New Probe of Gaussianity and Isotropy applied to the CMB Maps». En: (2019). arXiv: [1911.11442 \[astro-ph.CO\]](#).

- [37] Viviana Acquaviva y col. «Second order cosmological perturbations from inflation». En: *Nucl. Phys. B* 667 (2003). arXiv: [astro-ph/0209156](#).
- [38] Juan Martin Maldacena. «Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models». En: *JHEP* 05 (2003). arXiv: [astro-ph/0210603](#).
- [39] Sean M. Carroll. «In What Sense Is the Early Universe Fine-Tuned?» En: 2014. arXiv: [1406.3057 \[astro-ph.CO\]](#).
- [40] Kayll Lake. «The Flatness problem and lambda». En: *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005). arXiv: [astro-ph/0404319](#).
- [41] R. J. Adler y J. M. Overduin. «The Nearly flat universe». En: *Gen. Rel. Grav.* 37 (2005). arXiv: [gr-qc/0501061](#).
- [42] Éric Aubourg y col. «Cosmological implications of baryon acoustic oscillation measurements». En: *Phys. Rev. D* 92.12 (2015). arXiv: [1411.1074 \[astro-ph.CO\]](#).
- [43] Arpine Kozmalyan y col. «Deriving the Hubble constant using Planck and XMM-Newton observations of galaxy clusters». En: *Astron. Astrophys.* 621 (2019). arXiv: [1809.09560 \[astro-ph.CO\]](#).
- [44] Jun-Jie Wei y Xue-Feng Wu. «An Improved Method to Measure the Cosmic Curvature». En: *Astrophys. J.* 838.2 (2017). arXiv: [1611.00904 \[astro-ph.CO\]](#).
- [45] Yun Chen, Suresh Kumar y Bharat Ratra. «Determining the Hubble constant from Hubble parameter measurements». En: *Astrophys. J.* 835.1 (2017). arXiv: [1606.07316 \[astro-ph.CO\]](#).
- [46] Licia Verde, Pavlos Protopapas y Raul Jimenez. «The expansion rate of the intermediate Universe in light of Planck». En: *Phys. Dark Univ.* 5-6 (2014). arXiv: [1403.2181 \[astro-ph.CO\]](#).
- [47] Omer Farooq y Bharat Ratra. «Hubble parameter measurement constraints on the cosmological deceleration-acceleration transition redshift». En: *ApJL* 766 (2013). arXiv: [1301.5243 \[astro-ph.CO\]](#).
- [48] Bharat Ratra y P. J. E. Peebles. «Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field». En: *Phys. Rev. D* 37 (1988).
- [49] Adam G. Riess y col. «A 2.4 % Determination of the Local Value of the Hubble Constant». En: *Astrophys. J.* 826.1 (2016). arXiv: [1604.01424 \[astro-ph.CO\]](#).
- [50] Wendy L. Freedman y col. «The Carnegie-Chicago Hubble Program. VIII. An Independent Determination of the Hubble Constant Based on the Tip of the Red Giant Branch». En: (2019). arXiv: [1907.05922 \[astro-ph.CO\]](#).
- [51] W. L. Freedman y col. «Final results from the Hubble Space Telescope key project to measure the Hubble constant». En: *Astrophys. J.* 553 (2001). arXiv: [astro-ph/0012376](#).
- [52] Adam G. Riess y col. «A 3 % Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3». En: *Astrophys. J.* 730 (2011). [Erratum: *Astrophys. J.* 732, 129 (2011)]. arXiv: [1103.2976 \[astro-ph.CO\]](#).
- [53] David Fernández Arenas y col. «An independent determination of the local Hubble constant». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 474.1 (2018). arXiv: [1710.05951 \[astro-ph.CO\]](#).

- [54] T. M. C. Abbott y col. «First Cosmology Results using Type Ia Supernovae from the Dark Energy Survey: Constraints on Cosmological Parameters». En: *Astrophys. J. Lett.* 872.2 (2019). arXiv: [1811.02374 \[astro-ph.CO\]](#).
- [55] Kenneth C. Wong y col. «H0LiCOW – XIII. A 2.4 per cent measurement of H0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early- and late-Universe probes». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 498.1 (2020). arXiv: [1907.04869 \[astro-ph.CO\]](#).
- [56] V. Bonvin y col. «H0LiCOW – V. New COSMOGRAIL time delays of HE 0435–1223: H_0 to 3.8 per cent precision from strong lensing in a flat Λ CDM model». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 465.4 (2017). arXiv: [1607.01790](#).
- [57] Graeme E. Addison, Gary Hinshaw y Mark Halpern. «Cosmological constraints from baryon acoustic oscillations and clustering of large-scale structure». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 436 (2013). arXiv: [1304.6984 \[astro-ph.CO\]](#).
- [58] G. E. Addison y col. «Elucidating Λ CDM: Impact of Baryon Acoustic Oscillation Measurements on the Hubble Constant Discrepancy». En: *Astrophys. J.* 853.2 (2018). arXiv: [1707.06547 \[astro-ph.CO\]](#).
- [59] Raul Jimenez y Abraham Loeb. «Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages». En: *Astrophys. J.* 573 (2002). arXiv: [astro-ph/0106145](#).
- [60] T. M. C. Abbott y col. «Dark Energy Survey Year 1 Results: A Precise H0 Estimate from DES Y1, BAO, and D/H Data». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 480.3 (2018). arXiv: [1711.00403 \[astro-ph.CO\]](#).
- [61] Oliver H. E. Philcox y col. «Combining Full-Shape and BAO Analyses of Galaxy Power Spectra: A 1.6% CMB-independent constraint on H_0 ». En: *JCAP* 05 (2020). arXiv: [2002.04035 \[astro-ph.CO\]](#).
- [62] Wendy L. Freedman y col. «The Carnegie-Chicago Hubble Program. VIII. An Independent Determination of the Hubble Constant Based on the Tip of the Red Giant Branch». En: (2019). arXiv: [1907.05922 \[astro-ph.CO\]](#).
- [63] Rafael C. Nunes y Armando Bernui. «BAO signatures in the 2-point angular correlations and the Hubble tension». En: *Eur. Phys. J. C* 80.11 (2020). arXiv: [2008.03259 \[astro-ph.CO\]](#).
- [64] Kenneth C. Wong y col. «H0LiCOW – XIII. A 2.4 per cent measurement of H0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early- and late-Universe probes». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 498.1 (2020). arXiv: [1907.04869 \[astro-ph.CO\]](#).
- [65] Adam G. Riess y col. «Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM». En: *Astrophys. J.* 876.1 (2019). arXiv: [1903.07603 \[astro-ph.CO\]](#).
- [66] Robert V. Wagoner, William A. Fowler y Fred Hoyle. «On the Synthesis of elements at very high temperatures». En: *Astrophys. J.* 148 (1967).
- [67] Gary Steigman. «Primordial Nucleosynthesis in the Precision Cosmology Era». En: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 57 (2007). arXiv: [0712.1100 \[astro-ph\]](#).
- [68] Vimal Simha y Gary Steigman. «Constraining The Early-Universe Baryon Density And Expansion Rate». En: *JCAP* 06 (2008). arXiv: [0803.3465 \[astro-ph\]](#).
- [69] Gary Steigman. «Primordial Nucleosynthesis: The Predicted and Observed Abundances and Their Consequences». En: *PoS NICXI* (2010). arXiv: [1008.4765 \[astro-ph.CO\]](#).

- [70] Kenneth M. Nollett y Gilbert P. Holder. «An analysis of constraints on relativistic species from primordial nucleosynthesis and the cosmic microwave background». En: (2011). arXiv: [1112.2683 \[astro-ph.CO\]](#).
- [71] Ryan Cooke y col. «Precision measures of the primordial abundance of deuterium». En: *Astrophys. J.* 781.1 (2014). arXiv: [1308.3240 \[astro-ph.CO\]](#).
- [72] Andrei D. Linde. «A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems». En: *Phys. Lett. B* 108 (1982).
- [73] Andreas Albrecht y Paul J. Steinhardt. «Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking». En: *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982).
- [74] George F. Smoot y col. «First results of the COBE satellite measurement of the anisotropy of the cosmic microwave background radiation». En: *2nd Rencontre de Blois on Physical Cosmology: 25th Anniversary of the Cosmic Background Radiation Discovery*. 1991.
- [75] Ya. B. Zeldovich. «A Hypothesis, unifying the structure and the entropy of the universe». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 160 (1972).
- [76] Edward R. Harrison. «Fluctuations at the threshold of classical cosmology». En: *Phys. Rev. D* 1 (1970).
- [77] Andrew R. Liddle, Paul Parsons y John D. Barrow. «Formalizing the slow roll approximation in inflation». En: *Phys. Rev. D* 50 (1994). arXiv: [astro-ph/9408015](#).
- [78] George F. Smoot y col. «Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps». En: *Astrophys. J. Lett.* 396 (1992).
- [79] C. L. Bennett y col. «Four year COBE DMR cosmic microwave background observations: Maps and basic results». En: *Astrophys. J. Lett.* 464 (1996). arXiv: [astro-ph/9601067](#).
- [80] R. A. Sunyaev y Ya. B. Zeldovich. «Small scale fluctuations of relic radiation». En: *Astrophys. Space Sci.* 7 (1970).
- [81] P. J. E. Peebles. *The large-scale structure of the universe*. 1980.
- [82] Sean M. Carroll. «Lecture notes on general relativity». En: (1997). arXiv: [gr-qc/9712019](#).
- [83] James M. Bardeen. «Gauge Invariant Cosmological Perturbations». En: *Phys. Rev. D* 22 (1980).
- [84] Hideo Kodama y Misao Sasaki. «Cosmological Perturbation Theory». En: *Progress of Theoretical Physics Supplement* 78 (1984). URL: <https://doi.org/10.1143/PTPS.78.1>.
- [85] Marco Bruni, Peter K. S. Dunsby y George F. R. Ellis. «Cosmological perturbations and the physical meaning of gauge invariant variables». En: *Astrophys. J.* 395 (1992).
- [86] Karim A. Malik y David Wands. «Cosmological perturbations». En: *Phys. Rept.* 475 (2009). arXiv: [0809.4944 \[astro-ph\]](#).
- [87] Charles W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.
- [88] Robert Brandenberger. «Initial conditions for inflation — A short review». En: *Int. J. Mod. Phys. D* 26.01 (2016). arXiv: [1601.01918 \[hep-th\]](#).

- [89] Michael S. Turner. «Coherent Scalar Field Oscillations in an Expanding Universe». En: *Phys. Rev. D* 28 (1983).
- [90] Arjun Berera y Li-Zhi Fang. «Thermally induced density perturbations in the inflation era». En: *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995). arXiv: [astro-ph/9501024](#).
- [91] Arjun Berera. «Thermal properties of an inflationary universe». En: *Phys. Rev. D* 54 (1996). arXiv: [hep-th/9601134](#).
- [92] Arjun Berera, Marcelo Gleiser y Rudnei O. Ramos. «Strong dissipative behavior in quantum field theory». En: *Phys. Rev. D* 58 (1998). arXiv: [hep-ph/9803394](#).
- [93] Arjun Berera. «Warm inflation at arbitrary adiabaticity: A Model, an existence proof for inflationary dynamics in quantum field theory». En: *Nucl. Phys. B* 585 (2000). arXiv: [hep-ph/9904409](#).
- [94] Arjun Berera y Rudnei O. Ramos. «Dynamics of interacting scalar fields in expanding space-time». En: *Phys. Rev. D* 71 (2005). arXiv: [hep-ph/0406339](#).
- [95] Arjun Berera, Ian G. Moss y Rudnei O. Ramos. «Warm Inflation and its Microphysical Basis». En: *Rept. Prog. Phys.* 72 (2009). arXiv: [0808.1855 \[hep-ph\]](#).
- [96] Andrew R Liddle y Samuel M Leach. «How long before the end of inflation were observable perturbations produced?». En: *Phys. Rev. D* 68 (2003). arXiv: [astro-ph/0305263](#).
- [97] Peter Adshead y col. «Inflation and the Scale Dependent Spectral Index: Prospects and Strategies». En: *JCAP* 02 (2011). arXiv: [1007.3748 \[astro-ph.CO\]](#).
- [98] Jai-chan Hwang. «Perturbations of the Robertson-Walker space - Multicomponent sources and generalized gravity». En: *Astrophys. J.* 375 (1991).
- [99] Jai-chan Hwang y Hyerim Noh. «Cosmological perturbations with multiple fluids and fields». En: *Class. Quant. Grav.* 19 (2002). arXiv: [astro-ph/0103244](#).
- [100] Jai-chan Hwang y Hye-rim Noh. «Gauge ready formulation of the cosmological kinetic theory in generalized gravity theories». En: *Phys. Rev. D* 65 (2002). arXiv: [astro-ph/0102005](#).
- [101] Karim A. Malik, David Wands y Carlo Ungarelli. «Large scale curvature and entropy perturbations for multiple interacting fluids». En: *Phys. Rev. D* 67 (2003). arXiv: [astro-ph/0211602](#).
- [102] Esteban Calzetta y B. L. Hu. «Noise and fluctuations in semiclassical gravity». En: *Phys. Rev. D* 49 (1994). arXiv: [gr-qc/9312036](#).
- [103] Esteban A. Calzetta, Bei Lok Hu y Francisco D. Mazzitelli. «Coarse grained effective action and renormalization group theory in semiclassical gravity and cosmology». En: *Phys. Rept.* 352 (2001). arXiv: [hep-th/0102199](#).
- [104] Rudnei O. Ramos y L. A. da Silva. «Power spectrum for inflation models with quantum and thermal noises». En: *JCAP* 03 (2013). arXiv: [1302.3544 \[astro-ph.CO\]](#).
- [105] Chris Graham y Ian G. Moss. «Density fluctuations from warm inflation». En: *JCAP* 07 (2009). arXiv: [0905.3500 \[astro-ph.CO\]](#).
- [106] Lisa M. H. Hall, Ian G. Moss y Arjun Berera. «Scalar perturbation spectra from warm inflation». En: *Phys. Rev. D* 69 (2004). arXiv: [astro-ph/0305015](#).
- [107] Sam Bartrum y col. «The importance of being warm (during inflation)». En: *Phys. Lett. B* 732 (2014). arXiv: [1307.5868 \[hep-ph\]](#).

- [108] Mar Bastero-Gil y col. «Cosmological fluctuations of a random field and radiation fluid». En: *JCAP* 05 (2014). arXiv: [1401.1149 \[astro-ph.CO\]](#).
- [109] Micol Benetti y Rudnei O. Ramos. «Warm inflation dissipative effects: predictions and constraints from the Planck data». En: *Phys. Rev. D* 95.2 (2017). arXiv: [1610.08758 \[astro-ph.CO\]](#).
- [110] Kim V. Berghaus, Peter W. Graham y David E. Kaplan. «Minimal Warm Inflation». En: *JCAP* 03 (2020). arXiv: [1910.07525 \[hep-ph\]](#).
- [111] Richa Arya y col. «Revisiting CMB constraints on warm inflation». En: *JCAP* 02 (2018). arXiv: [1710.11109 \[astro-ph.CO\]](#).
- [112] Mar Bastero-Gil y col. «Dynamical and observational constraints on the Warm Little Inflaton scenario». En: *Phys. Rev. D* 98.8 (2018). arXiv: [1805.07186 \[astro-ph.CO\]](#).
- [113] Mar Bastero-Gil, Arjun Berera y Rudnei O. Ramos. «Dissipation coefficients from scalar and fermion quantum field interactions». En: *JCAP* 09 (2011). arXiv: [1008.1929 \[hep-ph\]](#).
- [114] Mar Bastero-Gil y col. «Constraining Warm Inflation with CMB data». En: *JCAP* 02 (2018). arXiv: [1710.10008 \[astro-ph.CO\]](#).
- [115] B. P. Abbott y col. «GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence». En: *Phys. Rev. Lett.* 116.24 (2016). arXiv: [1606.04855 \[gr-qc\]](#).
- [116] Benjamin P. Abbott y col. «GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2». En: *Phys. Rev. Lett.* 118.22 (2017). [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 121, 129901 (2018)]. arXiv: [1706.01812 \[gr-qc\]](#).
- [117] B. P. Abbott y col. «GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence». En: *Phys. Rev. Lett.* 119.14 (2017). arXiv: [1709.09660 \[gr-qc\]](#).
- [118] B. . P. . Abbott y col. «GW170608: Observation of a 19-solar-mass Binary Black Hole Coalescence». En: *Astrophys. J. Lett.* 851 (2017). arXiv: [1711.05578 \[astro-ph.HE\]](#).
- [119] Sachiko Kuroyanagi, Kazunori Nakayama y Jun'ichi Yokoyama. «Prospects of determination of reheating temperature after inflation by DECIGO». En: *PTEP* 2015.1 (2015). arXiv: [1410.6618 \[astro-ph.CO\]](#).
- [120] Kazunori Nakayama y col. «Space laser interferometers can determine the thermal history of the early Universe». En: *Phys. Rev. D* 77 (2008). arXiv: [0802.2452 \[hep-ph\]](#).
- [121] Sabino Matarrese, Silvia Mollerach y Marco Bruni. «Second order perturbations of the Einstein-de Sitter universe». En: *Phys. Rev. D* 58 (1998). arXiv: [astro-ph/9707278](#).
- [122] Kishore N. Ananda, Chris Clarkson y David Wands. «The Cosmological gravitational wave background from primordial density perturbations». En: *Phys. Rev. D* 75 (2007). arXiv: [gr-qc/0612013](#).
- [123] Bernard Carr, Florian Kuhnel y Marit Sandstad. «Primordial Black Holes as Dark Matter». En: *Phys. Rev. D* 94.8 (2016). arXiv: [1607.06077 \[astro-ph.CO\]](#).
- [124] Sébastien Clesse y Juan García-Bellido. «Massive Primordial Black Holes from Hybrid Inflation as Dark Matter and the seeds of Galaxies». En: *Phys. Rev. D* 92.2 (2015). arXiv: [1501.07565 \[astro-ph.CO\]](#).

- [125] Guillermo Ballesteros y Marco Taoso. «Primordial black hole dark matter from single field inflation». En: *Phys. Rev. D* 97.2 (2018). arXiv: [1709.05565 \[hep-ph\]](#).
- [126] Daniel Baumann y col. «Gravitational Wave Spectrum Induced by Primordial Scalar Perturbations». En: *Phys. Rev. D* 76 (2007). arXiv: [hep-th/0703290](#).
- [127] Keisuke Inomata y Tomohiro Nakama. «Gravitational waves induced by scalar perturbations as probes of the small-scale primordial spectrum». En: *Phys. Rev. D* 99.4 (2019). arXiv: [1812.00674 \[astro-ph.CO\]](#).
- [128] Kazunori Kohri y Takahiro Terada. «Semianalytic calculation of gravitational wave spectrum nonlinearly induced from primordial curvature perturbations». En: *Phys. Rev. D* 97.12 (2018). arXiv: [1804.08577 \[gr-qc\]](#).
- [129] Yizhou Lu y col. «Constraints on primordial curvature perturbations from primordial black hole dark matter and secondary gravitational waves». En: *JCAP* 12 (2019). arXiv: [1907.11896 \[gr-qc\]](#).
- [130] Guillem Domènech. «Scalar Induced Gravitational Waves Review». En: *Universe* 7.11 (2021). arXiv: [2109.01398 \[gr-qc\]](#).
- [131] Chen Yuan, Zu-Cheng Chen y Qing-Guo Huang. «Log-dependent slope of scalar induced gravitational waves in the infrared regions». En: *Phys. Rev. D* 101.4 (2020). arXiv: [1910.09099 \[astro-ph.CO\]](#).
- [132] Jeff Crowder y Neil J. Cornish. «Beyond LISA: Exploring future gravitational wave missions». En: *Phys. Rev. D* 72 (2005). arXiv: [gr-qc/0506015](#).
- [133] Vincent Corbin y Neil J. Cornish. «Detecting the cosmic gravitational wave background with the big bang observer». En: *Class. Quant. Grav.* 23 (2006). arXiv: [gr-qc/0512039](#).
- [134] G. M. Harry y col. «Laser interferometry for the big bang observer». En: *Class. Quant. Grav.* 23 (2006). [Erratum: *Class. Quant. Grav.* 23, 7361 (2006)].
- [135] S. Kawamura y col. «The Japanese space gravitational wave antenna DECIGO». En: *Class. Quant. Grav.* 23 (2006).
- [136] Naoki Seto, Seiji Kawamura y Takashi Nakamura. «Possibility of direct measurement of the acceleration of the universe using 0.1-Hz band laser interferometer gravitational wave antenna in space». En: *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001). arXiv: [astro-ph/0108011](#).
- [137] Kent Yagi y Naoki Seto. «Detector configuration of DECIGO/BBO and identification of cosmological neutron-star binaries». En: *Phys. Rev. D* 83 (2011). [Erratum: *Phys. Rev. D* 95, 109901 (2017)]. arXiv: [1101.3940 \[astro-ph.CO\]](#).
- [138] Soichiro Isoyama, Hiroyuki Nakano y Takashi Nakamura. «Multiband Gravitational Wave Astronomy: Observing binary inspirals with a decihertz detector, B-DECIGO». En: *PTEP* 2018.7 (2018). arXiv: [1802.06977 \[gr-qc\]](#).
- [139] David Reitze y col. «Cosmic Explorer: The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO». En: *Bull. Am. Astron. Soc.* 51.7 (2019). arXiv: [1907.04833 \[astro-ph.IM\]](#).
- [140] M. Punturo y col. «The Einstein Telescope: A third-generation gravitational wave observatory». En: *Class. Quant. Grav.* 27 (2010).
- [141] S. Hild y col. «Sensitivity Studies for Third-Generation Gravitational Wave Observatories». En: *Class. Quant. Grav.* 28 (2011). arXiv: [1012.0908 \[gr-qc\]](#).

- [142] K. Ackley y col. «Neutron Star Extreme Matter Observatory: A kilohertz-band gravitational-wave detector in the global network». En: *Publ. Astron. Soc. Austral.* 37 (2020). arXiv: [2007.03128 \[astro-ph.HE\]](#).
- [143] Matthew Bailes y col. «Ground-Based Gravitational-Wave Astronomy in Australia: 2019 White Paper». En: (2019). arXiv: [1912.06305 \[astro-ph.IM\]](#).
- [144] Tomotada Akutsu y col. «Search for a stochastic background of 100-MHz gravitational waves with laser interferometers». En: *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008). arXiv: [0803.4094 \[gr-qc\]](#).
- [145] Atsushi Nishizawa y col. «Laser-interferometric Detectors for Gravitational Wave Background at 100 MHz: Detector Design and Sensitivity». En: *Phys. Rev. D* 77 (2008). arXiv: [0710.1944 \[gr-qc\]](#).
- [146] Aaron S. Chou y col. «MHz Gravitational Wave Constraints with Decameter Michelson Interferometers». En: *Phys. Rev. D* 95.6 (2017). arXiv: [1611.05560 \[astro-ph.IM\]](#).
- [147] Nancy Aggarwal y col. «Challenges and opportunities of gravitational-wave searches at MHz to GHz frequencies». En: *Living Rev. Rel.* 24.1 (2021). arXiv: [2011.12414 \[gr-qc\]](#).
- [148] Kazuaki Kuroda, Wei-Tou Ni y Wei-Ping Pan. «Gravitational waves: Classification, Methods of detection, Sensitivities, and Sources». En: *Int. J. Mod. Phys. D* 24.14 (2015). arXiv: [1511.00231 \[gr-qc\]](#).
- [149] Naoki Seto y Jun'Ichi Yokoyama. «Probing the equation of state of the early universe with a space laser interferometer». En: *J. Phys. Soc. Jap.* 72 (2003). arXiv: [gr-qc/0305096](#).
- [150] Latham A. Boyle y Alessandra Buonanno. «Relating gravitational wave constraints from primordial nucleosynthesis, pulsar timing, laser interferometers, and the CMB: Implications for the early Universe». En: *Phys. Rev. D* 78 (2008). arXiv: [0708.2279 \[astro-ph\]](#).
- [151] Ryusuke Jinno, Takeo Moroi y Kazunori Nakayama. «Inflationary Gravitational Waves and the Evolution of the Early Universe». En: *JCAP* 01 (2014). arXiv: [1307.3010 \[hep-ph\]](#).
- [152] Rong-Gen Cai y col. «Pulsar Timing Array Constraints on the Induced Gravitational Waves». En: *JCAP* 10 (2019). arXiv: [1907.06372 \[astro-ph.CO\]](#).
- [153] C. J. Moore, R. H. Cole y C. P. L. Berry. «Gravitational-wave sensitivity curves». En: *Class. Quant. Grav.* 32 (2015). arXiv: [1408.0740 \[gr-qc\]](#).
- [154] B. P. Abbott y col. «LIGO: The Laser interferometer gravitational-wave observatory». En: *Rept. Prog. Phys.* 72 (2009). arXiv: [0711.3041 \[gr-qc\]](#).
- [155] H. Luck. «The GEO-600 project». En: *Class. Quant. Grav.* 14 (1997).
- [156] B. Caron y col. «The Virgo interferometer». En: *Class. Quant. Grav.* 14 (1997).
- [157] Masaki Ando y col. «Stable operation of a 300-m laser interferometer with sufficient sensitivity to detect gravitational wave events within our galaxy». En: *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001). arXiv: [astro-ph/0105473](#).
- [158] Manuel Drees y Encieh Erfani. «Running Spectral Index and Formation of Primordial Black Hole in Single Field Inflation Models». En: *JCAP* 01 (2012). arXiv: [1110.6052 \[astro-ph.CO\]](#).
- [159] William H. Press y Paul Schechter. «Formation of galaxies and clusters of galaxies by selfsimilar gravitational condensation». En: *Astrophys. J.* 187 (1974).

- [160] Laila Alabidi y col. «Observable Spectra of Induced Gravitational Waves from Inflation». En: *JCAP* 09 (2012). arXiv: [1203.4663 \[astro-ph.CO\]](#).
- [161] J. A. Peacock y A. F. Heavens. «Alternatives to the Press-Schechter cosmological mass function». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 243 (1990).
- [162] J. R. Bond y col. «Excursion set mass functions for hierarchical Gaussian fluctuations». En: *Astrophys. J.* 379 (1991).
- [163] Bernard J. Carr. «The Primordial black hole mass spectrum». En: *Astrophys. J.* 201 (1975).
- [164] B. J. Carr y col. «New cosmological constraints on primordial black holes». En: *Phys. Rev. D* 81 (2010). arXiv: [0912.5297 \[astro-ph.CO\]](#).
- [165] Tomohiro Harada, Chul-Moon Yoo y Kazunori Kohri. «Threshold of primordial black hole formation». En: *Phys. Rev. D* 88.8 (2013). [Erratum: *Phys. Rev. D* 89, 029903 (2014)]. arXiv: [1309.4201 \[astro-ph.CO\]](#).
- [166] Abdel Nasser Tawfik y Carsten Greiner. «Early Universe Thermodynamics and Evolution in Nonviscous and Viscous Strong and Electroweak epochs: Possible Analytical Solutions». En: *Entropy* 23.3 (2021). arXiv: [2102.12477 \[gr-qc\]](#).
- [167] Richa Arya. «Formation of Primordial Black Holes from Warm Inflation». En: *JCAP* 09 (2020). arXiv: [1910.05238 \[astro-ph.CO\]](#).
- [168] Nilanjandev Bhaumik y Rajeev Kumar Jain. «Primordial black holes dark matter from inflection point models of inflation and the effects of reheating». En: *JCAP* 01 (2020). arXiv: [1907.04125 \[astro-ph.CO\]](#).
- [169] Torsten Bringmann, Claus Kiefer y David Polarski. «Primordial black holes from inflationary models with and without broken scale invariance». En: *Phys. Rev. D* 65 (2002). arXiv: [astro-ph/0109404](#).
- [170] I. D. Novikov y col. «Primordial black holes». En: *A&A* 80.1 (1979).
- [171] Anne M. Green y Andrew R. Liddle. «Constraints on the density perturbation spectrum from primordial black holes». En: *Phys. Rev. D* 56 (1997). arXiv: [astro-ph/9704251](#).
- [172] Amandeep S. Josan, Anne M. Green y Karim A. Malik. «Generalised constraints on the curvature perturbation from primordial black holes». En: *Phys. Rev. D* 79 (2009). arXiv: [0903.3184 \[astro-ph.CO\]](#).
- [173] Ia. B. Zeldovich y col. «Primordial black holes and the deuterium problem». En: *Soviet Astronomy Letters* 3 (1977).
- [174] A. Bina, S. Jalalzadeh y A. Moslehi. «Quantum Black Hole in the Generalized Uncertainty Principle Framework». En: *Phys. Rev. D* 81 (2010). arXiv: [1001.0861 \[gr-qc\]](#).
- [175] Michele Maggiore. «A Generalized uncertainty principle in quantum gravity». En: *Phys. Lett. B* 304 (1993). arXiv: [hep-th/9301067](#).
- [176] Pisin Chen y Ronald J. Adler. «Black hole remnants and dark matter». En: *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* 124 (2003). arXiv: [gr-qc/0205106](#).
- [177] Bernard J. Carr, J. H. Gilbert y James E. Lidsey. «Black hole relics and inflation: Limits on blue perturbation spectra». En: *Phys. Rev. D* 50 (1994). arXiv: [astro-ph/9405027](#).
- [178] P. Sreekumar y col. «EGRET observations of the extragalactic gamma-ray emission». En: *Astrophys. J.* 494 (1998). arXiv: [astro-ph/9709257](#).

- [179] Fedor L. Bezrukov y Mikhail Shaposhnikov. «The Standard Model Higgs boson as the inflaton». En: *Phys. Lett. B* 659 (2008). arXiv: [0710.3755 \[hep-th\]](#).
- [180] S. Shankaranarayanan. «Dark spinor driven inflation». En: *12th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*. 2010. arXiv: [1002.1128 \[astro-ph.CO\]](#).
- [181] C. Armendariz-Picon y Patrick B. Greene. «Spinors, inflation, and nonsingular cyclic cosmologies». En: *Gen. Rel. Grav.* 35 (2003). arXiv: [hep-th/0301129](#).
- [182] Andrei D. Linde. «Hybrid inflation». En: *Phys. Rev. D* 49 (1994). arXiv: [astro-ph/9307002](#).
- [183] Mar Bastero-Gil, Arjun Berera y Rudnei O. Ramos. «Shear viscous effects on the primordial power spectrum from warm inflation». En: *JCAP* 07 (2011). arXiv: [1106.0701 \[astro-ph.CO\]](#).
- [184] Mar Bastero-Gil y Marta Subías Díaz-Blanco. «Gravity waves and primordial black holes in scalar warm little inflation». En: *JCAP* 12.12 (2021). arXiv: [2105.08045 \[hep-ph\]](#).
- [185] Andrew R. Liddle. «An Introduction to cosmological inflation». En: *ICTP Summer School in High-Energy Physics and Cosmology*. 1999. arXiv: [astro-ph/9901124](#).
- [186] Edmund J. Copeland y col. «False vacuum inflation with Einstein gravity». En: *Phys. Rev. D* 49 (1994). arXiv: [astro-ph/9401011](#).
- [187] Mar Bastero-Gil y Arjun Berera. «Warm inflation model building». En: *Int. J. Mod. Phys. A* 24 (2009). arXiv: [0902.0521 \[hep-ph\]](#).
- [188] Mar Bastero-Gil y col. «Towards a reliable effective field theory of inflation». En: *Phys. Lett. B* 813 (2021). arXiv: [1907.13410 \[hep-ph\]](#).
- [189] Mar Bastero-Gil y col. «Warm Little Inflaton». En: *Phys. Rev. Lett.* 117.15 (2016). arXiv: [1604.08838 \[hep-ph\]](#).
- [190] Ian G Moss y Chun Xiong. «Dissipation coefficients for supersymmetric inflatonary models». En: (2006). arXiv: [hep-ph/0603266](#).
- [191] Kent Yagi y Naoki Seto. «Detector configuration of DECIGO/BBO and identification of cosmological neutron-star binaries». En: *Phys. Rev. D* 83 (2011). [Erratum: *Phys.Rev.D* 95, 109901 (2017)]. arXiv: [1101.3940 \[astro-ph.CO\]](#).