



ugr

Universidad
de Granada

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Una nueva metodología de toma de
decisiones multi-criterio utilizando
información imprecisa vía ranking difuso
y funciones de agregación difusas

Autor

Miguel Sánchez Maldonado

Directores

Concepción Beatriz Roldán López de Hierro

Antonio Francisco Roldán López de Hierro

MEMORIA DE TESIS DOCTORAL

para optar al grado de doctor por la Universidad de Granada
dentro del programa de Doctorado *Estadística Matemática y Aplicada*



FACULTAD DE CIENCIAS

Granada, junio de 2022

Tesis Doctoral

Doctorado en Estadística Matemática y Aplicada



Universidad de Granada

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

**Una nueva metodología de toma de
decisiones multi-criterio
utilizando información imprecisa
vía ranking difuso
y funciones de agregación difusas**

Miguel Sánchez Maldonado

Granada, junio de 2022

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Miguel Sánchez Maldonado
ISBN: 978-84-1117-465-7
URI: <http://hdl.handle.net/10481/76797>

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a todas las personas que me apoyaron y han hecho que este trabajo se pueda llevar a cabo con éxito. Especialmente a mis directores, Inma y Antonio, por compartir conmigo sus conocimientos y brindarme su ayuda, paciencia y dedicación durante estos años, siempre con una sonrisa.

A mis padres, por darme la vida y enseñarme a vivirla con unos valores y principios que me han transmitido y enseñado desde pequeño, “gracias por creer y confiar en mi”.

A mi hermana Amelia por su apoyo moral, estar siempre ahí y tenerme como referente.

Por último, y no menos importante, a toda mi familia y amigos por compartir tantos momentos buenos estos años.

Publicaciones

- ▶ A.F. Roldán López de Hierro, **M. Sánchez**, C. Roldán. *Multi-criteria decision making involving uncertain information via fuzzy ranking and fuzzy aggregation functions*. Journal of Computational and Applied Mathematics **404** (2022) 113138 (Factor de impacto 2.621, primer cuartil en la categoría “*Mathematics, Applied*” según JCR 2020, Q1).

<https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113138>

- ▶ A.F. Roldán López de Hierro, **M. Sánchez**, D. Puente-Fernández, R. Montoya-Juárez, C. Roldán. *A fuzzy Delphi consensus methodology based on a fuzzy ranking*. Mathematics **2021**, 9, 2323. (Factor de impacto 2.258, Primer decil en la categoría “*Mathematics*” según JCR 2020, Q1).

<https://doi.org/10.3390/math9182323>

Contribuciones a congresos

- A.F. Roldán López de Hierro, **M. Sánchez**, A. Márquez Montávez, C. Roldán. *Multicriteria decision making involving uncertain information via fuzzy ranking and fuzzy aggregation functions*. Proceedings of the 19th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 2019), 30 June-6 July, 2019.
- A.F. Roldán López de Hierro, **M. Sánchez**, D. Puente-Fernández, R. Montoya Juárez, C. Roldán. *A fuzzy Delphi consensus method based on a fuzzy ranking*. Proceedings of the 19th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 2019), 30 June-6 July, 2019.
- A.F. Roldán López de Hierro, María del Mar Rueda, **M. Sánchez**, C. Roldán. *Una nueva herramienta de recogida de datos difusos y su aplicación a un proceso de consenso*. XXXIX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa (SEIO 2022), del 7 al 10 de junio de 2022, Granada.

Índice

Resumen	I
Abstract	III
Introducción	v
1. Objetivos	1
2. Metodología	9
2.1. Los números difusos	10
2.1.1. El concepto de número difuso	11
2.1.2. Primeras características de los números difusos	13
2.1.3. Algunas familias notables de números difusos	15
2.1.4. Interpretación de la noción de número difuso a partir de conceptos estadísticos	20
2.1.5. Operaciones con números difusos	25
2.2. Metodologías de ranking con números difusos	27
2.2.1. Índices de ordenación (o de clasificación)	31
2.2.2. Metodologías basadas en una relación binaria difusa . . .	33

2.3. Una metodología propiamente difusa de ordenación de números difusos	35
2.4. Funciones de agregación	37
3. Resultados principales	41
3.1. Funciones de agregación extendidas sobre números difusos triangulares	43
3.2. Algunas nuevas propiedades de la relación binaria \preceq sobre el conjunto de los números difusos triangulares	46
3.3. Funciones no decrecientes sobre números difusos. Funciones de agregación difusa	51
3.4. Relaciones binarias difusas que preservan el producto de números difusos triangulares no negativos	57
3.5. Toma de decisiones multicriterio a partir de información difusa .	65
3.6. Una nueva metodología Delphi difusa	73
3.6.1. Una aplicación informática para recoger las opiniones de los expertos como números difusos trapezoidales	74
3.6.2. Descripción de la nueva metodología Delphi difusa	76
3.7. Resultados de un caso real de validación transcultural de una escala	78
3.7.1. Discusión	87
3.7.2. Conclusiones de la metodología propuesta y de su aplicación	88
4. La librería <i>RankingTraFNs</i> implementada en <i>R</i>	91
4.1. Instalación de la librería <i>RankingTraFNs</i>	93
4.2. Resultados que producirá la librería <i>RankingTraFNs</i>	96
4.3. Funciones auxiliares implementadas en la librería <i>RankingTraFNs</i>	99
4.4. La función principal <code>menu()</code>	112

ÍNDICE

4.4.1. Generación de números difusos trapezoidales aleatorios en un cierto rango	119
4.4.2. Introducción manual de números difusos trapezoidales	120
4.4.3. Introducción de datos mediante un archivo con extensión <i>.xlsx</i>	120
4.4.4. Ejecución de la rutina <code>menu()</code>	121
4.5. Ejemplos de utilización de la librería <i>RankingTraFNs</i>	122
4.6. Aplicación informática para recogida de datos	125
5. Conclusiones	133
Funciones implementadas en la librería <i>RankingTwoTraFNs</i>	139
Índice de Figuras	145
Índice de Tablas	149
Bibliografía	151

Resumen

Muchos avances en inteligencia artificial y aprendizaje automático se basan en la toma de decisiones, especialmente en contextos de incertidumbre. Debido a sus posibles aplicaciones, el desarrollo de este tipo de procedimientos es actualmente un campo de estudio amplio en muchas áreas tales como Computación, Economía y Gestión Empresarial. Las primeras técnicas aparecieron en escenarios donde la información se representaba mediante números reales. En todos los casos, uno de los pasos clave en tales procesos consiste en resumir de la información disponible en unos pocos valores que ayuden a la persona que toma la decisión a completar esta tarea. En esta Memoria presentamos una nueva metodología de toma de decisiones multi-criterio en un contexto difuso en el que los pesos y las opiniones de los expertos (tal vez obtenidos a partir de etiquetas lingüísticas) se expresan como números difusos triangulares. Para realizar esta tarea, se considera una relación binaria difusa recientemente introducida cuyas propiedades están de acuerdo con la intuición humana y se realiza un estudio de las propiedades principales que una función de agregación (esto es, una función para resumir información) debe satisfacer en el caso difuso. El procedimiento presentado toma una decisión final basada en números difusos parabólicos (no triangulares). Además, mostraremos un ejemplo ilustrativo acerca de cómo aplicar estas herramientas algebraicas proponiendo una nueva metodología Delphi difusa para alcanzar el consenso entre expertos. Para desarrollar de una forma automática la tarea de ordenación de números difusos, se ha implementado en *R* una librería denominada *RankingTraFNs*, capaz de ordenar (siguiendo la meto-

dología de Roldán López de Hierro y otros) una cantidad finita, arbitrariamente grande, de números difusos trapezoidales, a la vez que de producir un gráfico explícito sobre dicha ordenación.

Palabras clave: Toma de decisiones multicriterio, Función de agregación, Número difuso, Ranking de números difusos, Método Delphi.

Abstract

Many advances in Artificial Intelligence and Machine Learning are based on decision making, especially in uncertain settings. Due to its possible applications, decision making is currently a broad field of study in many areas like Computation, Economics and Business Management. The first techniques appeared in scenarios where information was modeled by real numbers. In all cases, one of the key steps in such processes was the summarization of the available information into a few values that helped the decision maker to complete this task. In this paper, we introduce a novel multi-criteria decision making methodology in the fuzzy context in which weights and experts' opinions (maybe translated by linguistic labels) are stated as triangular fuzzy numbers. To do that, we take advantage of a recently presented fuzzy binary relation whose properties are according to human intuition and we carry out an study of the main properties that an aggregation function (a mapping to sum up information) must satisfy in the fuzzy framework. The presented procedure makes a final decision based on parabolic fuzzy numbers (not triangular). In addition, we will show an illustrative example about how to apply these algebraic tools by proposing a new fuzzy Delphi methodology to reach consensus among experts.

Keywords: Multicriteria decision making, Aggregation function, Fuzzy number, Ranking of fuzzy numbers, Delphi methodology.

Introducción

Las Tecnologías de la Información y de la Comunicación y, en general, el avance de la Ciencia en su conjunto, nos plantean, cada día, desafíos de toda clase. Dichos desafíos son cada vez más globales e involucran cada vez a más personas (organizadas ya en equipos de trabajo multidisciplinar). Por ejemplo, los avances en Biomedicina nos obligan a realizar estudios cada vez más extensos de cara a probar la eficacia y los fiabilidad de los medicamentos o de los preparados experimentales que se proponen. Por desgracia, hemos sufrido muy recientemente el terrible golpe contra toda la humanidad que ha supuesto la aparición de la enfermedad conocida como *Covid-19* (enfermedad que aún seguimos sufriendo), pero el rápido desarrollo de vacunas para paliar sus efectos ha sido, sin duda, uno de los mayores logros científicos de toda la civilización en su conjunto. Este adelanto no hubiese sido posible sin la intervención de conjuntos muy amplios de científicos y técnicos que han trabajado de forma conjunta en pos de un mismo objetivo. Además, los tratamientos experimentales que se propusieron tuvieron que ser probados en decenas de miles de personas antes de ser aprobados por las respectivas agencias nacionales de cara a su administración al conjunto de la población. La creación de vacunas ha supuesto un reto desde muy diversos campos de estudio: por un lado, desde el punto de vista bioquímico, con el análisis del ADN del coronavirus y de sus mutaciones; por otro lado, desde el punto de vista tecnológico, pues se ha necesitado emplear todos los recursos tecnológicos conocidos hasta la fecha. No obstante, también ha sido un desafío logístico (por el traslado y conservación de las vacunas), informático (por la

enorme cantidad de datos que se han ido generando), periodístico y, por qué no decirlo, matemático y estadístico: en la tarea de proteger e informar a la población, se han tenido que emplear toda clase de técnicas estadísticas de recogida y análisis de datos, utilizando funciones para describir a toda clase de personas (con mayores o menores conocimientos previos) aspectos fundamentales de la evolución de la pandemia.

Hoy en día, cualquier avance científico requiere de un análisis exhaustivo de los datos experimentales. Sin embargo, los datos que se recogen van creciendo exponencialmente. Cada día hay millones de personas subiendo información a nube: fotos, videos, mensajes, páginas web, etc. Por así decirlo, lo extraño hoy día es no generar más y más datos en Internet: hacemos compras, visitamos páginas webs, buscamos información, leemos los periódicos, consultamos las cuentas bancarias, nos relacionamos con otras personas, etc. Aunque no lo parezca, cada vez que accedemos a Internet dejamos rastro de nuestra trayectoria y de nuestras acciones, información que las grandes compañías de telecomunicaciones almacenan en forma de datos. Y esos datos crecen y crecen sin parar y, por el momento, no se le ve un techo a todo este proceso. Sin embargo, los datos por sí solos no son útiles: comienzan a tener utilidad cuando se analizan y se extrae de ellos el conocimiento que albergan.

No hace mucho, el acceso a los datos estaba muy restringido y, además, cuando se podía acceder a los mismos, en la práctica, solo se podía tener acceso a unos pocos datos, quizá unas decenas o incluso unos cientos de ellos. Esto hacía que la información que albergaban los datos podía, en algunos casos, observarse a simple vista (por ejemplo, la incidencia de una cierta enfermedad podía ser claramente superior en unos lugares que en otros), podía extraerse haciendo operaciones aritméticas básicas (es el caso del cálculo del sueldo medio de todos los trabajadores de una empresa mediana) o, como mucho, podía conseguirse empleando aquellos ordenadores personales que comenzaron a ser comunes en los hogares a partir de los años 90 del siglo pasado. Sin embargo, todo eso ha cambiado radicalmente: los procesadores de los ordenadores no han evolucionado

tan rápido como para ser capaces de analizar la información que se recoge cada día a través de Internet, especialmente a través de redes sociales. Y, los datos en bruto, por sí solos, no sirven para nada: si son pocos, no son generalizables a la población y, si son muchos, el bosque no deja ver la información contenida en ellos.

Todo este proceso es esencial para la sociedad en la que vivimos. Nos damos cuenta de ello cada vez que miramos a nuestro alrededor: las administraciones nos controlan a través del conocimiento de nuestros datos, las empresas nos asedian con anuncios de productos cada vez más adaptados a nuestros gustos, nuestras amistades están al día de lo que hacemos y decimos a través de la información que publicamos en nuestras redes sociales. Nuestros datos son cada vez más valiosos: hay empresas que nos ofrecen productos “gratis” solo para acceder a nuestros datos, por ejemplo, aplicaciones para el móvil. Todo el mundo ha escuchado en alguna ocasión que los datos son, hoy día, el petróleo del siglo XXI. No obstante, la acumulación de datos es infructuosa si no se analizan convenientemente.

Este análisis requiere de técnicas estadísticas e informáticas cada vez más sutiles e intrincadas. Nace así la *Ciencia de Datos*, es decir, el conjunto de avances a los que se puede llegar a través del simple análisis de la información disponible (en verdad, el análisis que se desarrolla hoy en día no es nada “simple”). La Ciencia de Datos es, por así decirlo, la maravillosa conjunción entre las capacidades de la Estadística y la Probabilidad con la potencia de las tecnologías informáticas y de la Inteligencia Artificial. Se trata de dos campos científicos que se complementan a la perfección para conseguir progresos que nos dejan maravillados en cuanto oímos hablar de ellos: detección rápida de enfermedades a través de pruebas médicas cada vez más sencillas, determinación de canciones a través de unas pocas notas musicales, reconocimiento de objetos contenidos en una imagen a través de la detección de sus bordes ([37, 74]), reconocimiento de ballenas a través de fotografías tomadas por satélite ([41]), detección de armas portadas por personas en edificios públicos a través del análisis de videos de

pocos segundos ([22, 50]), etc.

Las técnicas que fueron propuestas originalmente para la gestión y el tratamiento del “*Big Data*” quedaron claramente sobrepasadas por el creciente volumen y la enorme complejidad de los datos que se han ido generando con el paso del tiempo, en especial en los últimos años con la aparición y el éxito de las redes sociales, y por la necesidad de extraer información cada vez más sutil de la tremenda maraña de los datos en bruto. Dichas técnicas han tenido que ser depuradas y mejoradas teniendo en cuenta, incluso, aspectos probabilísticos que anteriormente no habían sido considerados, algunos de los cuales serán comentados más adelante. En lo referente a estos nuevos procedimientos, cabe destacar el reconocimiento de patrones, que es uno de los campos de estudio fundamentales en el ámbito de la Inteligencia Artificial. En esta línea de investigación, la detección de bordes en el procesamiento de imágenes ha adquirido una gran importancia en esta disciplina científica, pues da pie a aplicaciones inimaginables hasta hace poco: por ejemplo, una persona invidente que disponga de cámara en su teléfono puede tener conocimiento de los objetos que tiene ante sí y que no puede ver a través de una aplicación informática que recoja una imagen, detecte los bordes de los objetos que pueden verse en la misma y los identifique tras su comparación contra los objetos contenidos en una base de datos adecuada.

En un sentido amplio, podemos afirmar que una de las principales tareas de la Inteligencia Artificial es la de tomar decisiones tras el reconocimiento de patrones en los datos de entrenamiento. Intervienen dos factores en este proceso a cual más importante: por un lado, el reconocimiento de situaciones conocidas que han sido analizadas muchas veces desde muchos puntos de vista (por ejemplo, identificar la silueta de un gato teniendo millones de fotos de gatos para entrenar esta capacidad); por otro lado, la toma de decisiones basada en la información de que se dispone, la cual, en muchos casos, no es concluyente en absoluto. Dada una imagen que no sea completamente nítida, por ejemplo, de lo que parece un animal, los sistemas más modernos están entrenados para ofrecer distintas

alternativas añadiendo, en muchos casos, un porcentaje que se interpreta con un nivel de acierto: ante un caso concreto, el sistema puede responder que el animal es un gato con una fiabilidad del 92 %, un lince con un 6 % o un ciervo con un 1 %. Ya no basta con tratar de identificar el objeto contenido en la imagen lo mejor posible, sino ofrecer distintas alternativas razonables ordenadas según un cierto índice probabilístico.

Aunque pueda parecer que los algoritmos desarrollados para llevar a cabo todos los procesos que hemos comentado deben ser enormemente complejos, en muchas ocasiones no es así. La base matemática que subyace a muchos de ellos es extraordinariamente simple, accesible a menudo incluso a estudiantes de Bachillerato. Por ejemplo, aunque la belleza de las fotografías en ocasiones nubla nuestro entendimiento, una imagen almacenada en un teléfono o en un ordenador puede compararse a una matriz de números reales, dispuestos en forma rectangular, de manera que en cada posición de la matriz se almacena una combinación de tres números reales (que indican el color almacenado en esa posición). Cada uno de los elementos de la matriz puede identificarse con un *pixel*, es decir, la mínima porción de pantalla que puede representar un color, y los tres números alojados en dicha posición indica su porcentaje en una escala de colores (por ejemplo, su contenido en rojo, azul y verde, o bien en cian, magenta y amarillo, por indicar algunas escalas bien conocidas). Esta estructura algebraica permite realizar con imágenes aquellos procedimientos que conocemos con números reales: podemos decidir si dos imágenes son iguales comparando si en cada punto de la matriz hay almacenados los mismos números reales, podemos modificar una imagen cambiando los números que representan sus colores, podemos mezclar dos imágenes con tal de superponer unos colores sobre otros, etc. En verdad, las matemáticas proporcionan una fundamentación teórica relativamente simple para algunos conceptos informáticos ampliamente utilizados como imágenes, videos o archivos de texto. Los caracteres de texto se almacenan como funciones vectoriales de tal forma que ampliar o reducir el tamaño del texto puede llevarse a cabo mediante una homotecia en el plano.

Las funciones reales de una o varias variables reales juegan un papel esencial tanto en Matemáticas como en Ciencia de Datos. Desde un punto de vista puramente algebraico, una *función de fusión* es una función $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, donde $[0, 1]$ es el intervalo cerrado de extremos 0 y 1, y $[0, 1]^n$ representa el producto cartesiano de n copias idénticas del intervalo $[0, 1]$, es decir, $[0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$. A lo largo de la Historia, este tipo de funciones ha permitido resolver infinidad de problemas mediante diversas técnicas matemáticas entre las que cabe destacar la integración y la derivación. Con la primera de ellas pueden calcularse áreas y volúmenes, los cuales son muy importantes en Ingeniería y Construcción. Con la segunda de ellas podemos optimizar funciones, es decir, encontrar valores óptimos que maximizan los beneficios o minimizan los costes de producción. Una simple de sus aplicaciones puede ahorrar millones de euros en materiales o transporte. Sin embargo, con relación a los contenidos de la presente memoria, cabe interpretar esta familia de funciones desde los siguientes dos puntos de vista.

- Desde un punto de vista estadístico, todas las medidas de centralización (también llamadas “de posición”) de una distribución de frecuencias (cuyos valores $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ estén contenidos en el intervalo $[0, 1]$) pueden interpretarse como una función de fusión que asocia a dicha distribución un único valor que, en cierta forma, trata de representarlos a todos. Ni que decir tiene que, en este ámbito, la media aritmética es el paradigma por antonomasia de medida de posición. Su funcionamiento es muy sencillo: dado un conjunto de datos, modelizamos una de sus características principales a través de la suma de todos los datos, dividida entre el número total de datos. En cierta forma, la media es el número real que mejor resume (o “fusiona”) en un único número la información contenida en varios de ellos. Evidentemente, un número no puede sustituir a millones de ellos. Pero, por así decirlo, la media aporta una información concreta del conjunto de números en su totalidad. Pero la media no es la única forma de resumir información: otras clases de medias (geométrica, armónica, ponde-

rada, etc.), la moda, la mediana y los percentiles siguen esta misma idea: proporcionan un único número real que informa (en el sentido de “extrae información”) de una determinada característica de la distribución en su conjunto.

- Desde el punto de vista informático, existen funciones de fusión que están teniendo un gran éxito cuando están siendo aplicadas a problemas concretos de la vida real, especialmente del ámbito tecnológico y computacional. Dichas funciones se obtienen imponiendo ciertas condiciones a las funciones de fusión genéricas. En el caso particular de la presente Memoria, estamos especialmente interesados en las denominadas “*funciones de agregación*”. Como su propio nombre indica, se trata de funciones de fusión que son especialmente respetuosas con dos aspectos esenciales del intervalo real $[0, 1]$: su orden y su frontera. Por un lado, este intervalo está totalmente ordenado a través de la relación binaria “*menor o igual*”, representada mediante el símbolo \leq . Este orden es una de las características más importantes no solo del intervalo $[0, 1]$, sino del conjunto formado por todos los números reales en general. Es prácticamente imposible entender los números reales si no se tiene una visualización ordenada de los mismos. Como comentaremos más adelante, hay muchas maneras de respetar el orden, pero la más sencilla es la siguiente: la función $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ es *creciente* (o, más bien, *no decreciente*) si $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \leq f(s_1, s_2, \dots, s_n)$ siempre que los números $t_1, t_2, \dots, t_n, s_1, s_2, \dots, s_n \in [0, 1]$ verifiquen $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ y $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$. Por otro lado, una segunda propiedad clave del intervalo $[0, 1]$ es su frontera, es decir, el conjunto de números que delimitan su contenido (en este caso, el conjunto $\{0, 1\}$). Por ello, a una función de agregación se le impone que mantenga la frontera en el siguiente sentido: $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ y $f(1, 1, \dots, 1) = 1$. Con estas dos sencillas condiciones se consiguen excelentes resultados, algunos de los cuales serán comentados en el Capítulo 2 acerca de la metodología empleada.

Atendiendo a las necesidades planteadas desde esta segunda concepción, se

han introducido multitud de ejemplos de funciones de agregación con objeto de fusionar la información existente, entre las que destacamos los operadores de ponderación (del inglés “*weighted aggregations*”) y los operadores de ponderación ordenados (del inglés “*ordered weighted aggregations*”, también conocidos como *OWA*). Sin embargo, la familia formada por todas las funciones de agregación no es suficientemente rica como para adaptarse, en todos los casos, a los requerimientos estadísticos y probabilísticos más elementales. Por ejemplo, la moda, a pesar de ser una de las medidas de centralización más conocidas y utilizadas, no es creciente (ni tampoco decreciente) en el sentido que comentamos en el párrafo anterior. Se necesitan, pues, funciones aún más generales que las funciones de agregación, lo que ha extendido su estudio a familias más amplias como son las pre-agregaciones y las funciones *penalty*, que dan lugar a nuevas clases de operadores. Además, en esta línea de investigación, no solo es importante estudiar nuevas propiedades de las funciones de agregación existentes y de sus posibles generalizaciones, sino que también se antoja esencial determinar nuevos ejemplos que puedan ser luego utilizados en contextos reales.

Uno de los ámbitos en los que más se utilizan las funciones de agregación es en el campo de las *redes neuronales convolucionales* (del inglés “*Convolutional Neural Networks*”). Las redes neuronales convolucionales (véase, por ejemplo, [17, 35, 76]) son un tipo de red neuronal diseñada para manejar datos donde la información local es relevante, como audio, video o imagen. Estas redes emplean capas secuenciales de forma sucesiva de dos tipos, atendiendo a su objetivo: por un lado, se determinan las características más importantes de un objeto de entrada que no ha sido procesado, resumiéndolas en un vector de características; por otro lado, se emplea ese vector para realizar la tarea concreta que se desea llevar a cabo, como puede ser regresión o clasificación. Cuando se trata de imágenes, este tipo de redes extraen primeramente sus características visuales más destacadas a través de capas de convolución, cuyos pequeños filtros resaltan ciertos valores que se almacenan como parámetros del modelo. Cada filtro hace destacar una característica visual potencial y, al convolucionarlos sobre

todas las zonas del objeto de entrada se produce una imagen especial que se interpreta como presencia o ausencia en las demás partes de la entrada. Estas imágenes concretas son concatenadas en una matriz de características que es la entrada que se proporciona a la siguiente capa. Dado que se utilizan muchos filtros distintos para procesar una misma imagen, la dimensión de la matriz de características crece muy rápidamente, lo que complica mucho la tarea del extractor de características, que desearía una menor dimensión. Las capas que involucran funciones de agregación resuelven este problema, descomponiendo la entrada en diferentes canales (o ventanas) y agrupando sus valores. Las funciones de agregación más utilizadas para esta tarea son el promedio y el máximo, aunque existen varias alternativas.

Las funciones de agregación también se utilizan con gran éxito en *redes neuronales recurrentes* (véase [9, 39]) y en *interfaces cerebro-computadora de imágenes motoras* (véase [38]).

Otro de los ámbitos científicos en el que las funciones de agregación son ampliamente utilizadas es el campo de la *toma de decisiones*. Las personas tomamos decisiones en cada momento de nuestra vida: decidimos si ir hacia un lado o hacia otro, o acostarnos, decidimos la actividad que realizamos y decidimos cómo la realizamos, decidimos expresar nuestros sentimientos o guardármolos para nosotros, decidimos la forma en la que nos relacionamos con otras personas o con el medio ambiente, decidimos la película que ver o la canción que escuchar, decidimos cada palabra que decimos o escribimos. Cada momento abre ante nosotros una amplia variedad de posibilidades y, entre todas ellas, seleccionamos una de ellas, que llevamos a cabo con toda naturalidad, sin darnos cuenta, sin reparar excesivamente en que, en realidad, cada acto supone una decisión. El ser humano no es muchas veces consciente de que toma decisiones a cada paso que da, porque necesita tomarlas y se acostumbra desde que nace a tomarlas.

Cuando tratamos de que las máquinas simulen el comportamiento humano, la toma de decisiones se revela como uno de los principales desafíos que hay que afrontar. Hay máquinas que realizan procesos repetitivos que son sencillos de

programar: por ejemplo, una envasadora envuelve un objeto en una fina capa de plástico, y termina su ejecución cuando ha gastado una cierta cantidad lineal de producto. La única decisión que debe adoptar la máquina es cuándo parar. Sin embargo, programar un coche que pueda conducir de forma autónoma desde una ciudad hasta otra es una tarea de complejidad máxima. El coche debe tomar multitud de decisiones en cada momento (velocidad, ángulo del volante con la horizontal, marcha en la que se circula), que dependerán de una amplia variedad de factores captados por los sensores que lleva incorporados: iluminación, meteorología, presencia de peatones, tráfico, etc. Todo el proceso debe comenzar por reconocer adecuadamente los límites de la carretera. Los humanos tomamos dichas decisiones de manera automática, casi sin darnos cuenta, pero el coche autónomo debe ser enseñado a actuar en cada momento. Y la decisión que tome puede afectar incluso a la vida de los pasajeros o de las personas que se encuentren a su alrededor. Y todo ello sin contar con las implicaciones éticas y legales que pueden acarrear sus decisiones.

A estas alturas, el lector ya puede imaginar la importancia de las funciones de agregación en la creación de máquinas tan complejas como el coche autónomo. Cada uno de sus sistemas (volante, marcha, temperatura del habitáculo, etc.) debe tomar una decisión en base a una serie de números reales, recogidos a través de sus sensores (temperatura, visibilidad, condiciones del asfalto, señales de la carretera, presencia de vehículos o personas delante o detrás, presencia de lluvia, etc.) Cada uno de estos números no es determinante por sí solo, sino que es la conjunción de todos ellos lo que lleva a la decisión a adoptar. Para ello, el sistema debe transformar una variedad de números reales en un único número real, que es el que finalmente permite decidir lo que se ha de hacer. Para llevar a cabo este proceso, los ingenieros han de implementar funciones de agregación en el corazón de los procesadores que llevan incorporadas las máquinas capaces de simular, con mayor o menor éxito, el comportamiento humano.

Cuando los datos de entrada son números reales, las posibles operaciones que se pueden realizar con ellos están bien definidas, y los resultados obtenidos

vuelven a ser números reales, que son sencillos de interpretar al compararse unos con otros. Sin embargo, existen contextos en los que los datos que se manejan no son tan absolutamente precisos como son los números reales. En dichos casos, por razones de muy diversa índole, existe un cierto grado de incertidumbre que suele complicar aún más la descripción de los procesos a realizar y la decisión a tomar. Existen diversos métodos, especialmente probabilísticos, capaces de simular esta incertidumbre. No obstante, en esta Memoria nos vamos a centrar en una metodología de actuación conocida como “*difusa*”.

Dentro de un universo X , un *conjunto* A no es sino una metodología para discernir unos elementos sobre otros: los elementos seleccionados están dentro del conjunto y los no seleccionados no pertenecen a dicho conjunto. Esto plantea una dicotomía muy simple: un elemento de X o bien está *dentro* del conjunto (lo cual puede modelizarse con un valor “1” asociado a dicho elemento), o bien está *fuera* de dicho conjunto (lo que se representa con un “0”). Así, un conjunto puede ser interpretado como una aplicación $A : X \rightarrow \{0, 1\}$ que a cada elemento de X le asocia un valor en el conjunto discreto $\{0, 1\}$. Todo lo anterior supone la existencia de un método infalible para decidir si un elemento pertenece o no a un conjunto A . Sin embargo, a veces es muy complicado determinar con precisión si un elemento pertenece, o no, a un conjunto. Por ejemplo, considérese el conjunto de personas que irán al menos cinco veces al cine el próximo año. ¿Está usted entre ellas? Unas personas responderán afirmativamente con gran determinación y sin lugar a dudas, y otras también lo harán, pero en sentido negativo. No obstante, hay personas que no saben en este momento si pertenecen o no a dicho conjunto. De estas personas, lo más que se puede decir es que pertenecen a dicho conjunto con un cierto nivel de probabilidad, nivel que se determina especialmente atendiendo al número de veces que fueron al cine en años anteriores o bien rebuscando en otros factores que pueden decantar la decisión (por ejemplo, ver el número de películas en las que participará nuestro actor favorito o nuestra actriz favorita el próximo año). Dicha probabilidad, concretada a través de un número real comprendido entre 0 y 1, es la propiedad

que mejor describe al elemento del conjunto. De esta forma, un *conjunto difuso en un universo* X (véase [88]) es una familia $\{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ donde cada par $(x, \mu_A(x))$ está formado por un elemento $x \in X$ y un *grado de pertenencia* $\mu_A(x) \in [0, 1]$ del elemento x al conjunto A . La función $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ que asocia a cada elemento del conjunto su grado de pertenencia al conjunto difuso A es usualmente representada por $A : X \rightarrow [0, 1]$ y, por extensión, se dice que la aplicación $A : X \rightarrow [0, 1]$ es un *conjunto difuso*. Obsérvese que el conjunto discreto $\{0, 1\}$ ha sido reemplazado por el intervalo cerrado $[0, 1]$, lo cual aporta toda una variedad de interpretaciones (una “escala de grises”) acerca de si un elemento pertenece al conjunto difuso A o no. Nunca se está completamente seguro de la pertenencia o no del elemento al conjunto salvo que la función de pertenencia tome el valor 0 o el valor 1, en cuyo caso sí existe seguridad sobre la pregunta planteada.

Una subfamilia muy especial de conjuntos difusos es la clase formada por los *números difusos*. Un número difuso es una abstracción al ambiente difuso del concepto de *número real*. Cuando utilizamos números reales, la precisión es absoluta: el número 3 significa el número 3 con absoluta precisión, y es fácil distinguirlo de cualquier otro número real. Sin embargo, el mundo en el que vivimos y nuestra forma de vivir está muy alejada de la precisión total. Solemos utilizar expresiones como “hoy hace mucho frío” o “luego voy”, las cuales conllevan inherentemente un cierto grado de ambigüedad (en el primer caso, respecto de la temperatura y, en el segundo, respecto del tiempo). Si no utilizásemos expresiones inciertas y tratásemos de expresarnos con total exactitud, incumpliríamos en cada momento nuestras propias promesas o viviríamos pendientes del tiempo y del espacio. La ambigüedad es una forma de expresar que el mundo real no es absolutamente preciso, sino todo lo contrario. Si pidiésemos a 100 personas que midiesen exactamente la longitud de la Gran Vía de Madrid, ¿cuántas de ellas proporcionarían la misma distancia medida al milímetro? Todo al contrario, posiblemente todas las mediciones serían diferentes. ¿No podemos hablar, pues, de la longitud de una calle de una ciudad? Sí, existe de manera exacta

dicha longitud, pero estamos muy lejos de poder calcularla de forma exacta con los aparatos de medida.

Desde un punto de vista formal, un *número difuso sobre el conjunto* \mathbb{R} (formado por todos los números reales) no es más que una función real de variable real $A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ cuya imagen está contenida en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y que satisface ciertas condiciones. Aunque su principal objetivo es el de generalizar la noción de número real, no existe un consenso universal sobre cuáles deben ser dichas condiciones, lo que da lugar a una amplia variedad de posibles nociones de número difuso (por ejemplo, véase [62, 63, 78, 79]). Evidentemente, cada una de estas posibles nociones tiene sus propias particularidades y, en general, dan lugar a entes matemáticos parecidos pero distintos. Ante la amplia variedad de artículos científicos que se están publicando actualmente y que utilizan la noción de número difuso, recientemente ha surgido el debate acerca de cuál debe ser la noción estándar de número difuso, de tal forma que podamos consultar diferentes estudios pero estemos seguros del aparataje matemático que se está empleando. No es una cuestión sencilla: aunque algunas propiedades pueden considerarse asentadas en la literatura reciente (como es el caso de la *convexidad difusa* o la *semicontinuidad superior*), otras generan una gran controversia debido a su posible interpretación física. La condición de *normalidad* significa, tal y como se concibe en esta Memoria, que el número difuso debe alcanzar el valor 1 en algún punto del espacio subyacente, como les ocurre a los números difusos *crisp*, que son los que extienden la noción de número real. Sin embargo, diversos autores consideran que, o bien es suficiente con que el valor supremo de dicha función sea 1 (sin necesidad de llegar a valer 1 en algún punto), o bien directamente aceptan que dicho supremo (o su máximo, si este es alcanzado) sea estrictamente menor que 1. Claramente, esta axiomática da lugar a conceptos no equivalentes, lo que justifica la controversia actual. Es más, hay trabajos que emplean subconjuntos ciertamente particulares de la gran familia de números difusos (véase, por ejemplo, [10, 78] sobre números difusos *finitos*). Entraremos en más detalle en esta cuestión en el segundo capítulo de esta Memoria.

La ambigüedad inherente que conllevan los números difusos puede ser interpretada desde muy diversos puntos de vista, siendo todos ellos complementarios y enriquecedores.

- Por un lado, los números difusos expresan con fidelidad la imposibilidad de acceder a números exactos en el mundo real cuando se trata de observar determinadas medidas o magnitudes. Todos los aparatos de medida tienen sus propias limitaciones, y obviar este hecho lleva a errores de planteamiento y de cálculo. Los números difusos son entidades apropiadas para expresar estas aproximaciones a los valores reales.
- Por otro lado, los números difusos suponen una herramienta excelente para expresar la subjetividad asociada al pensamiento humano. Si varias personas evalúan la calidad de un producto, posiblemente haya discrepancias en sus juicios de valor: unas dirán que es “muy bueno”, otras dirán que simplemente es “bueno”, e incluso para un mismo producto habrá gente que lo evalúe como de calidad “regular” o “mala”. Existe una cierta subjetividad en nuestras opiniones que es intrínseca al ser humano. Por ejemplo, si una persona debe ser condenada a una pena de prisión por sus actos, aun cuando nos basemos en las mismas leyes, ¿llegarán dos jueces distintos a imponer la misma temporalidad en la pena de cárcel? Es más, si un mismo profesor corrige un mismo examen, ¿llegará siempre a la misma calificación o esta puede depender del momento en el que se corrija? Otro ejemplo que no debemos dejar pasar por alto es la valoración del precio del metro cuadrado construido en los pisos que se encuentran en una gran ciudad: aunque le preguntemos a diferentes expertos inmobiliarios, su valor depende, en gran medida de la subjetividad de estas personas, quizá basada en sus experiencias personales.
- Finalmente, el carácter impreciso de los números difusos (o de los conjuntos difusos en general) puede ser una cualidad deseable desde el comienzo del estudio. Es razonable aceptar que una opinión personal pueda expre-

sarse a través de un conjunto finito de posibilidades que sirven para dar a conocer un juicio de valor. Por ejemplo, utilizando el intervalo $[0, 1]$ como escala, la opinión de un experto acerca de la calidad de un producto puede ser $\{0.86, 0.92, 0.94\}$. Este conjunto expresa una duda razonable sobre la calidad del producto, pero no es en absoluto ambigua, sino que está expresada de una forma muy concreta (véase [53, 64]).

Los procedimientos científicos más conocidos usualmente conllevan la utilización de datos expresados como números reales (por ejemplo, la regresión o la optimización de funciones). Cuando los datos de entrada no son exactos sino difusos, todo el proceso es mucho más complicado. De hecho, muchas de las técnicas que conocemos son imposibles de llevar a cabo con esta nueva clase de datos de entrada. Aunque la aritmética elemental con números difusos puede ser extendida al conjunto formado por todos los números difusos (véase [47, 56]), las excelentes propiedades que se verifican en \mathbb{R} no son siempre trasladables al conjunto mayor. Esto da lugar a una muy difícil interpretación en muchos casos. Por ejemplo, si A y B son dos números difusos triangulares y simétricos que alcanzan la condición de normalidad en 0, entonces los números difusos $A - B$ y $B - A$ no son solo equivalentes sino que son iguales. Es más, A y $-A$ coinciden, lo cual no puede ocurrir cuando se manejan números reales (salvo que se considere el número cero). Lo que sí es cierto es que si los números difusos A y B conllevan una cierta ambigüedad en cuanto a su valor concreto, su suma $A + B$ conlleva la suma de ambas ambigüedades de tal forma que, cuando se han operado varios números difusos, el margen de error puede ser ridículo (por ejemplo, si decimos que vamos a sacar un 7 en un examen con un margen de error de 20 puntos).

Otra de las enormes dificultades que plantea la utilización de números difusos es la ausencia de un orden canónico que pueda extender el orden usual de los números reales al conjunto de los números difusos sobre \mathbb{R} . Si bien existen muchos procedimientos que sirven para ordenar números difusos (véase la Sección 2.2), ninguno de ellos es universalmente aceptado debido a la siguiente

propiedad: sea cual sea el procedimiento elegido para ordenar números difusos (vistos como funciones), siempre se puede encontrar un ejemplo que contradice la intuición humana, es decir, pueden encontrarse dos números difusos A y B de tal forma que cualquier humano diría que $A < B$, pero el procedimiento seleccionado establece que $A > B$. De esta forma, si un humano tuviese que tomar una decisión, lo haría en base a que $A < B$, pero una máquina programada con tal metodología podría ejecutar la decisión contraria. Esto supone un grave riesgo a la hora de programar máquinas autónomas.

En 1976, Jain [44] presentó un primer acercamiento al problema de clasificación de números difusos, momento desde el cual se han introducido muchas metodologías de *ranking* (palabra anglosajona que la Real Academia Española define como “clasificación de mayor a menor, útil para establecer criterios de valoración”) desde distintos puntos de vista (véase, por ejemplo, [19, 47]). Dedicaremos la Sección 2.2 a mostrar algunos de estos métodos, si bien en [54] pueden consultarse con mayor detalle.

Elegir uno u otro método lleva a diferentes ordenaciones lo que, en distintos contextos, significa que la opción elegida es distinta, pues depende del método aplicado. Por ello, elegir un buen algoritmo de clasificación y ordenación es la primera decisión importante a tomar para obtener resultados razonables. En este contexto, utilizamos la palabra “razonable” para hacer mención a aquellos procesos que producen resultados acordes con la intuición humana, es decir, planteados a una gran cantidad de personas, el algoritmo actúa como lo haría la gran mayoría de ellos (si un conductor tiene que elegir entre atropellar a otra persona o no hacerlo, siempre elegirá lo segundo, por lo que un coche autónomo tiene que actuar exactamente de esta forma; cualquier otra decisión no es razonable). Sin embargo, describir el comportamiento humano no es sencillo. En 2001, Wang y Kerre [80] introdujeron una serie de propiedades que parecen sensatas para cualquier algoritmo de clasificación. Más tarde, Ban y Coroianu [14] reinterpretaron estas propiedades adaptándolas al caso de una relación binaria general, pues distinguieron, básicamente, dos amplios grupos de metodologías

de ordenación difusa:

- algoritmos que utilizan *índices de ordenación* (del inglés *ranking indices*), los cuales se fundamentan en la ordenación de números difusos a partir de números reales que son asociados unívocamente a cada número difuso;
- y algoritmos basado en relaciones binarias que no pueden ser reducidos a la ordenación de números reales asociados a números difusos.

Los índices de ordenación están basados en *defusificaciones* (traducción literal del término anglosajón *defuzzification*), que son metodologías que resaltan, en cada cantidad difusa, uno de sus aspectos más importantes (su centro de gravedad, su ambigüedad, su centroide, su valor esperado, etc.) A través de este proceso se consigue que cada número difusos lleve aparejado un único número real, y el proceso de ordenación de cantidades difusas queda reducido al simple proceso de ordenar su cantidades reales asociadas. Los índices de ordenación suelen ser muy sencillos de programar y las máquinas son muy eficientes a la hora de aplicarlos. Sin embargo, difícilmente son acordes en todos los casos con la intuición humana, y pueden producir resultados contraintuitivos. Además, los procesos de defusificación conllevan una importante pérdida de información contenida en el propio número difuso y que un número real no puede expresar en todos sus matices. Por ello, encontrar una relación binaria general en el conjunto formado por todos los números difusos que pueda generar ordenaciones coherentes con la intuición humana es uno de los problemas abiertos en este campo de mayor interés y aplicabilidad.

Con objeto de afrontar este problema, Roldán López de Hierro, Roldán y Herrera introdujeron en [68] un nuevo procedimiento de ordenación de números difusos con interesantes propiedades (ver también [65]): entre otros aspectos, está basado en una relación binaria que no puede ser reducida a un índice de ordenación, permite utilizar números difusos tan generales como se quiera, produce resultados, en la mayoría de los casos, acordes con la intuición humana

y verifica el mayor conjunto de propiedades algebraicas planteadas hasta la fecha. Sin embargo, en el artículo general, quedaron abiertos varios interrogantes. Aunque se describió cómo actúa esta metodología sobre números difusos triangulares, se antojaba de gran importancia explicar también cómo actúa sobre números difusos trapezoidales, que son los más generales que se suelen utilizar en las investigaciones científicas. Dicho problema fue abordado en [65]. Por otro lado, aunque esta metodología era parcialmente compatible con la suma de números difusos (en el sentido que describiremos más adelante), quedaba por explicar si dicha compatibilidad era lo suficientemente fuerte como para ser trasladada a sumandos arbitrarios (en el capítulo “Resultados Principales”, damos una respuesta definitiva a esta cuestión). Finalmente, está abierto aún al problema de modificar dicha relación para conseguir que sea transitiva al menos sobre un conjunto destacado de números difusos, con todas las implicaciones que ello conllevaría (por ejemplo, dicho método podría quedar reducido a un índice de ordenación).

Las problemáticas anteriormente comentadas sobre las diferentes metodologías de ordenación de números difusos se trasladan de forma inmediata al campo de la toma de decisiones. La *toma de decisiones multicriterio* es una metodología que permite seleccionar la alternativa más adecuada de entre varias opciones predeterminadas, evaluándolas en términos de varios (usualmente, muchos) criterios ([46]). Tradicionalmente, se han venido proponiendo métodos de clasificación convencionales (entiéndase, “reales”), en los que tanto los pesos de los criterios como las opiniones de los expertos se implementaban en forma de números reales. Con esta familia de números se han propuesto toda clase de algoritmos para seleccionar la mejor alternativa entre un conjunto finito de ellas. Como es lógico, estas metodologías están basadas en realizar diferentes operaciones aritméticas con números reales hasta obtener un número asociado a cada alternativa, cuya ordenación llevase a la selección de la opción óptima. No obstante, cuando los datos de entrada vienen dados por cantidades imprecisas e incluso los criterios que se emplean conllevan una cierta idea de ambigüedad, las

técnicas reales pueden no ser extrapolables a este contexto, o pueden producir resultados inesperados. Es por ello que es absolutamente necesaria la revisión de las técnicas desarrolladas hasta el momento, evaluando su validez en contextos difusos y analizando en detalle los resultados obtenidos. Aunque cada uno de estos algoritmos de toma de decisión apareció en un contexto particular (computacional, comercial, empresarial, etc.), su aplicabilidad y sus potenciales ventajas han sido estudiadas desde un punto de vista teórico y abstracto. Hoy en día se han planteado ya muchas metodologías de toma de decisiones multicriterio en el ambiente difuso y, en concreto, podemos afirmar que, para manejar la incertidumbre en términos lingüísticos, las técnicas difusas han demostrado ser más útiles que las técnicas basadas en números reales ([11, 28]).

Uno de los contextos en los que mejor se pone de manifiesto la importancia del método de ordenación que se emplee, especialmente cuando se manejan datos difusos, es el de la aplicación del método Delphi. El *método Delphi* es un proceso de consenso prospectivo que requiere la participación de un grupo de expertos que responden, de manera anónima y sin interactuar entre ellos, a una serie de cuestionarios sucesivos que contienen preguntas o afirmaciones previamente establecidas. Dicho método fue desarrollado por Dalkey y Helmer [31] y Rieger [61] en la década de 1950-1960 al comienzo de la Guerra Fría dentro del proyecto RAND para predecir el impacto de la tecnología en la guerra. El método Delphi de múltiples rondas es un procedimiento para consensuar las opiniones de los expertos sobre algunas afirmaciones o preguntas previamente establecidas. Estas opiniones (anónimas) son valoraciones o juicios personales (usualmente expresados en forma de números reales) junto con algunos comentarios en los que se proponen cambios, sugerencias, etc. La evolución del consenso del grupo puede mostrarse, entre otros, mediante dos características: un aumento de los porcentajes de acuerdo y una disminución en el número de comentarios realizados. Con este método, se alcanza el consenso cuando este porcentaje supera un determinado umbral previamente establecido y el número de comentarios disminuye por debajo de una cantidad (o incluso es nulo). En cada ronda, si no

se ha alcanzado este umbral, el moderador modifica el cuestionario en función de los comentarios que ha recogido, realiza un informe breve que envía a los expertos y comienza la siguiente ronda con los cambios sugeridos.

En líneas generales, el método Delphi consiste en examinar una cuestión o problema a través de una encuesta realizada en varias rondas atendiendo a una serie de características comunes.

1. El proceso puede ser dirigido por un moderador.
2. Se invita a un grupo anónimo de expertos a participar en el proceso que consta de distintas rondas de cuestionarios que reciben por correo electrónico, (actualmente se usan cuestionarios online cuyas respuestas se recogen a través de Internet) y a expresar sus opiniones (independientes) sobre los puntos del cuestionario (los expertos interactúan de forma anónima, no requiere que se conozcan en persona).
3. Se suelen utilizar encuestas iterativas (generalmente más de dos, hasta tres o cuatro rondas).
4. Los expertos dan su opinión sobre cada ítem de forma numérica o utilizando etiquetas, y hacen algunos comentarios para mejorar el enunciado del ítem desde sus respectivos puntos de vista.
5. Después de cada ronda, se envía a los expertos un informe con los resultados de la ronda anterior para que modifiquen sus opiniones, con el fin de aumentar el acuerdo colectivo, en base a este informe y a los comentarios realizados por otros expertos.
6. Este proceso se repite hasta que se alcanzan unas condiciones de consenso (o después de un número de rondas previamente fijado).

Aunque los métodos Delphi tradicionales han sido ampliamente aceptados como una herramienta eficaz y se han utilizado en una amplia gama de aplicaciones, los problemas de ambigüedad e incertidumbre en las opiniones de los exper-

tos siguen presentes. La medición del juicio humano se considera un fenómeno emocional, complejo, perceptivo, subjetivo y personal, que implica muchos ámbitos de la experiencia vital de ese sujeto. En general, las escalas de valoración clásicas (por ejemplo, escalas de Likert de cinco puntos) consideran intrínsecamente números exactos para medir el pensamiento humano. Sin embargo, debido a la complicada naturaleza e incertidumbre de un juicio humano, es muy difícil obtener un valor numérico preciso para evaluarlo.

El método Delphi difuso se desarrolló para superar este problema mediante la combinación de la teoría difusa y la metodología clásica [15, 21, 32, 43, 55, 77, 87]. En general, los métodos Delphi difusos suelen utilizar variables lingüísticas en el diseño de los cuestionarios para recoger las opiniones de los expertos y, después, contemplan un paso de defusificación, es decir, un paso en el que las etiquetas lingüísticas (o números difusos) se reducen a números reales. Como consecuencia, el proceso sufre una gran pérdida de información. La razón para considerar la defusificación no se basa en la dificultad de operar con números difusos (que es razonablemente fácil en algunos contextos) sino en el hecho de que no existe una metodología universalmente aceptada para ordenar números difusos. En este contexto, la utilización de una metodología para ordenar cantidades difusas ayuda a superar este inconveniente.

A modo de resumen, observamos que muchos de los problemas planteados a lo largo de la presente Introducción están íntimamente conectados, pues hacen uso de herramientas geométricas y algebraicas de naturaleza muy similar. Los procesos de toma de decisión necesitan, al menos en un paso concreto de sus aplicaciones, fusionar la información considerada. Entran en juego ahí las funciones de fusión, vistas como procedimientos prácticos para asignar un objeto representativo único, que contenga la mayor información posible, a partir de una muestra de objetos del mismo tipo. De esta manera, el valor obtenido es representativo de la n -tupla. Un tipo de funciones de fusión ampliamente conocidas y utilizadas en este ámbito es la familia formada por todas las *funciones de agregación*, que verifican un comportamiento monótono en cada argumento.

Sin embargo, la monotonía está basada en un orden del que no está provisto el conjunto formado por todos los números difusos, lo que complica en extremo la extensión de esta clase de funciones a ambientes no necesariamente reales. La metodología Delphi también requiere de un proceso de ordenación difuso cuando los resultados finales asociados a cada alternativa son expresados como números difusos.

Teniendo en cuenta los antecedentes que hemos introducido junto con sus correspondientes problemas abiertos, el principal objetivo de la presente Memoria es el de comenzar el estudio de algunos de los desafíos matemáticos y estadísticos que se han descrito hasta el momento. Para ello, hemos tratado los siguientes aspectos.

- Por un lado, introducimos la noción de *función de agregación difusa* para el caso en el que los argumentos son números difusos triangulares con soporte común, acotado y no negativo. Dado que deseamos situarnos en un marco teórico lo más general posible, trabajamos con una relación binaria difusa cualquiera, si bien nuestro estudio está principalmente orientado a la aplicación de la metodología de ordenación introducida por Roldán López de Hierro, Roldán y Herrera en [68].
- Con objeto de llevar a cabo este estudio, hemos necesitado introducirnos en algunas de las cuestiones abiertas que se han planteado de cara a esta metodología de ordenación difusa. Con vistas a su aplicabilidad en contextos difusos determinados, en esta Memoria presentamos nuevas propiedades de dicha metodología de ordenación que tienen que ver, especialmente, con su compatibilidad con tanto con la suma como con el producto usual de números difusos.
- Aprovechando el estudio realizado, proponemos una metodología de toma de decisiones puramente difusa, en la que los datos de entrada (tanto las opiniones de los expertos como los criterios a emplear) vienen implementados a través de números difusos triangulares. De esta forma, no reducimos

el problema al caso real utilizando defusificaciones, sino que proponemos un procedimiento con operaciones y resultados propiamente difusos. En este contexto de incertidumbre, veremos que, después de realizar ciertas operaciones menores entre los juicios de los expertos y sus pesos correspondientes (basadas en funciones de agregación), es razonable aplicar la metodología de ordenación propuesta en [68] para clasificar las alternativas y conseguir seleccionar la mejor alternativa posible.

- Finalmente se introduce un nuevo método Delphi difuso. Por un lado, las opiniones subjetivas de los expertos se recogen como números difusos, lo que enriquece el enfoque. Por otro lado, dichas opiniones se recogen a través de una aplicación informática que es capaz de interpretar las opiniones de los expertos como números difusos. Por último, empleamos la metodología de ordenación antes comentada para determinar si la opinión difusa del experto es lo suficientemente favorable (comparándola con un número difuso fijo que indica *De acuerdo* o *Totalmente de acuerdo*). Para ilustrar la aplicabilidad del método, se realizó una validación transcultural de una escala. Entre otras, las principales ventajas del sistema propuesto son las siguientes: no necesita una etapa o proceso de defusificación de las respuestas de los expertos y puede considerar una amplia gama de números difusos, no solo triangulares o trapezoidales.

La presente Memoria está organizada de la siguiente manera.

- A lo largo de esta introducción hemos llevado a cabo una revisión de las diferentes problemáticas y problemas abiertos de investigación en los que nos hemos basado para realizar el actual estudio.
- Siguiendo el planteamiento de tesis anteriores, en el primer capítulo describimos los objetivos que nos han guiado en nuestro estudio, clasificados en tres grandes categorías, según si su finalidad es matemática y estadística, o si es computacional, o, por último, si están orientados a construir conocimiento de cara a la sociedad de la información y de la comunicación.

- En el segundo capítulo se plantean formalmente los conceptos matemáticos que sustentan la teoría de conjuntos difusos, con especial mención al concepto de número difuso. Describiremos las familias más usuales de números difusos, con especial atención a los números difusos triangulares y trapezoidales. Repasaremos también cómo esta familia de objetos matemáticos puede ser interpretada desde un punto de vista estadístico.
- El tercer capítulo recoge los principales resultados de la presente Memoria, basados en los dos artículos que sustentan sus contenidos. En especial, se introduce una nueva definición de función de agregación difusa la cual, junto con la metodología de ordenación propuesta en [68], permite presentar un nuevo método de toma de decisiones en el contexto difuso cuando se emplean varios criterios. Además, se presenta también una nueva metodología Delphi difusa para afrontar casos en los que los datos de entrada son números difusos.
- Esta Memoria incluye un capítulo (el cuarto) íntegramente dedicado a la descripción de la librería de R que hemos creado y hemos denominado *RankingTraFNs*, que es libremente accesible desde Internet. Con ella, cualquier investigador puede aplicar la metodología de ordenación difusa propuesta en [68] con un número arbitrario de números difusos trapezoidales. Este esfuerzo informático es la continuación de la librería *RankingTwoTraFNs*, en la que ya participó de manera decisiva el doctorando, que nos ha servido de inspiración para mejorar y extender su aplicabilidad a un contexto más general. Describiremos las funciones implementadas y pondremos ejemplos prácticos de su utilización, por ejemplo para la obtención de las figuras que se emplean en la parte final del tercer capítulo.
- Dedicamos el último capítulo a reflexionar sobre los resultados obtenidos en la presente Memoria, teniendo en mente analizar si se han cumplido los objetivos que se plantearon inicialmente. Además propondremos algunas cuestiones abiertas para continuar en esta línea de investigación en los próximos años.

- Esta Memoria concluye con la exposición de las referencias bibliográficas principales que se han tenido en cuenta para el desarrollo del presente trabajo, junto con el índice de tablas y figuras que se emplearán.

CAPÍTULO 1

Objetivos

La Introducción ha puesto de manifiesto que existen muchos problemas abiertos en el campo de la Computación que pueden y deben ser abordados desde el punto de vista matemático y estadístico. A fin de cuentas, las herramientas informáticas están basadas en amplísimas colecciones de datos que han de ser manipulados a través de operaciones elementales que se asemejan a las operaciones aritméticas básicas. Los grandes retos informáticos que hemos descrito en el capítulo anterior se pueden interpretar desde el punto de vista matemático en términos de funciones y relaciones binarias en conjuntos amplios, difíciles de manejar cuando estos no se reducen a números reales. Las matemáticas y la estadística disponen de las herramientas necesarias para afrontar estos desafíos, por lo que es necesario desarrollar una amplia investigación desde este lado de la ciencia que, a posteriori, pueda ser trasladada al campo computacional.

Teniendo en mente los antecedentes ya descritos, al comienzo de nuestra investigación nos planteamos conseguir los siguientes objetivos, interpretables desde el punto de vista matemático, estadístico, computacional y divulgativo.

- Revisar los antecedentes principales que se hayan publicado en la literatura científica acerca de las temáticas descritas en la Introducción, prestando especial interés por los problemas abiertos a los que podamos contribuir.

- Descargar y estudiar los principales artículos científicos (especialmente si son recientes o suponen un *estado del arte*) relacionados con las estructuras algebraicas en las que estamos interesados.
- Interpretar los números difusos dentro del campo de la estadística, descubriendo nuevas propiedades que sean acordes a las investigaciones recientes sobre Estadística y Probabilidad.
- Descubrir nuevas propiedades de la relación binaria difusa \preceq introducida por Roldán López de Hierro, Roldán y Herrera en [68]. Sería conveniente desentrañar cómo actúa esta relación entre números difusos lo más generales posible. En especial, sería interesante descubrir cómo funciona esta relación binaria difusa en presencia de operaciones aritméticas básicas entre números difusos, con especial atención a los números difusos triangulares y trapezoidales.
- Indagar acerca de la no transitividad de dicha relación binaria, lo que le confiere su carácter especial por el que no puede ser reducida a un índice de ordenación.
- Estudiar la posibilidad de encontrar familias notables de números difusos sobre las que dicha relación pueda verificar propiedades adicionales.
- Profundizar en la noción de *función de agregación*, poniendo de manifiesto sus principales propiedades y las características esenciales que hacen de este concepto tenga tanto éxito en el ámbito computacional.
- Estudiar la influencia del orden en la noción de función de agregación, e indagar en posibles extensiones de la monotonía en ambientes más generales.
- Presentar una definición de función de agregación, al menos en el contexto de los números difusos triangulares, que sea coherente con las investigaciones anteriores y que pueda proporcionar una base matemática sólida para investigaciones posteriores en esta línea de estudio.

-
- Buscar nuevas interpretaciones de las funciones de agregación como medidas de centralización que sirvan para extraer conocimiento de conjuntos de datos muy amplios, y estudiar sus principales propiedades.
 - En el campo de la Estadística, proponer nuevas medidas de centralización que puedan ser interpretadas como funciones de agregación, y estudiar sus principales propiedades.
 - Introducirnos en el campo de la toma de decisiones multicriterio, proponiendo una nueva metodología con herramientas propiamente difusas que pueda ser de utilidad en este campo.
 - Aprovechar las funciones de agregación difusas que se planteen para aglutinar la información difusa en una única cantidad difusa asociada a cada alternativa que, comparada con las demás cantidades puede llevar a una decisión final acorde con la intuición humana.
 - Comparar la metodología que propongamos con metodologías anteriores, especialmente si dichas metodologías están adaptadas a datos de entrada difusos, que no son nada usuales en la literatura actual. No obstante, también podemos comparar las conclusiones que obtengamos con las que pueden obtenerse a través de otras metodologías exclusivamente reales, para determinar si son más coherentes, o no, con la intuición humana.
 - Poner a prueba el algoritmo que definamos para la toma de decisiones en casos concretos en los que la intuición humana lleve, de forma clara, a una única alternativa razonable, y modificar, si es necesario, toda la concepción del algoritmo si, en algún caso, la decisión final no es acorde al razonamiento humano.
 - Estudiar la influencia de las opiniones de los expertos en la decisión final cuando estas son expresadas a través de números difusos. Determinar la estabilidad de la metodología propuesta, es decir, si pequeños cambios

en las opiniones de los expertos pueden provocar grandes cambios en la decisión final.

- Determinar propuestas de actuación para que los criterios que se elijan en la toma de decisiones sean lo más acertados posible, regulando sus pesos en todo el proceso cuando sea necesario.
- Estudiar la posibilidad de llegar a acuerdos mediante una metodología de trabajo de tipo Delphi cuando los datos de entrada (opiniones subjetivas y/o imprecisas de expertos) se implementan como números difusos triangulares.
- Proponer una nueva metodología Delphi para llegar a acuerdos entre expertos, a través de sucesivas rondas, empleando cantidades difusas para modelizar opiniones subjetivas, resumiendo la información a través de funciones de agregación difusas y ordenando los resultados finales a través de una relación binaria difusa como puede ser la introducida en [68], que goza de muy buenas propiedades.
- Poner un ejemplo concreto, lo más interesante posible, en el que se muestre claramente la forma de actuación del proceso Delphi que proponemos, mostrando los detalles que lo conforman y explicando los resultados obtenidos tras su ejecución.
- Desde el punto de vista computacional, nos proponemos ampliar la librería *RankingTwoTraFNs* de *R* que se desarrolló en [54] a un número arbitrario de números difusos triangulares o trapezoidales, de tal forma que cualquier investigador interesado en esta metodología pueda, descargando e instalando un simple paquete de *R*, tener acceso a toda la información necesaria para llevar a cabo investigaciones que involucren la mencionada relación binaria difusa.
- Esta librería debería ser capaz de dibujar el orden determinado entre los números difusos introducidos, de tal forma que, cuando haya una cantidad

amplia de números difusos, puedan observarse a grandes rasgos aquellos grupos de números difusos equivalentes y, sobretodo, los máximos y los mínimos absolutos, que corresponderán a las alternativas elegidas en el proceso de toma de decisión.

- Explicar una a una todas las funciones que definamos dentro de la librería, e implementar de una forma ágil diversas posibilidades para introducir números difusos (desde una base de datos o generándolos aleatoriamente).
- Elaborar una herramienta web que permita la recogida de datos difusos a través de Internet. Esta herramienta deberá ser capaz de capturar opiniones de expertos expresadas como números difusos triangulares o trapezoidales, de tal forma que dichos datos pasen, de forma automática, a una base de datos que pueda ser manejada con herramientas informáticas de software libre (como *R* o *LibreOffice*).
- Esta herramienta capturará la información de forma activa y visual, que sea lo más cómoda posible para la persona que introduce la información en el sistema web.
- Buscar problemas actuales de investigación en los que se empleen las herramientas algebraicas que hemos estudiado y en las que estamos interesados (funciones de agregación, órdenes parciales, relaciones binarias, números difusos, etc.), con objeto de analizar si las aportaciones que vayamos haciendo pueden ir aportando luz a algunas de las cuestiones ya planteadas.
- Elaborar un manuscrito en castellano que contribuyese, lo mejor posible, a divulgar las técnicas modernas que se emplean en la investigación de diversas nociones propias de la teoría de conjuntos y números difusos. Como puede apreciarse haciendo una búsqueda bibliográfica, la mayor parte de los contenidos dentro del campo de la investigación dedicado a la temática difusa que aquí se ha expuesto, la inmensa mayoría de los contenidos están escritos en inglés. Ello se debe a que el inglés ha sido desde hace muchos años el lenguaje impuesto para la divulgación científica, y prácticamente

todos los investigadores están obligados a publicar sus avances en dicho idioma. Ello aleja un poco al público en general de los contenidos teóricos que se desarrollan en esta disciplina, lo que le lleva a no manifestar interés por los mismos. Por ello, parece urgente poner en manos del público en general un tratado lo suficientemente simple como para que pueda ser comprendido por personas con unos conocimientos elementales en el campo de las matemáticas y de la estadística, pero también lo suficientemente profundo como para tratar temas de investigación actual, con aplicaciones reales en el aspecto computacional. Es por ello que decidimos escribir esta Memoria en castellano, partiendo de unos conocimientos previos muy básicos, y explicando cada uno de los argumentos con el mayor detalle posible.

- Proponer una notación clara y precisa para trabajar con conceptos matemáticos tan generales como sea posible en este campo de investigación. Dicha notación debe ser lo suficientemente flexible como para adaptarse a futuras investigaciones en este ámbito, y deberá unificar las notaciones empleadas anteriormente por otros autores.
- Divulgar los resultados que se vayan obteniendo en congresos nacionales e internacionales, participando en los mismos a través de comunicaciones orales y presentaciones presenciales siempre que se pueda y lo permitan las autoridades sanitarias.
- Participar en actividades científicas que acerquen al público en general la noción de número difuso, interpretado como una extensión natural del concepto de números real, junto con sus respectivas operaciones aritméticas básicas.
- Someter los resultados que vayamos obteniendo a la estricta revisión por pares de revistas internacionales con impacto, situadas lo mejor posible dentro de sus respectivas categorías del *Journal Citation Reports*, la cual es una herramienta de análisis de revistas actualmente publicada por *Clari-*

vate Analytics, lo que dará un mayor fundamento y una mayor consistencia a la tesis doctoral.

- Completar la formación del doctorando con cursos y actividades formativas relacionadas con su ámbito de trabajo, especialmente con *R* y *R-Studio*, pues proporcionan software libre a cualquier persona que desee introducirse en este lenguaje de programación.

CAPÍTULO 2

Metodología

En este capítulo introducimos los preliminares y la metodología que hemos desarrollado para llevar a cabo la investigación que se describe en la presente Memoria. Destacamos tres nociones sobre las que pivotará todo el estudio que mostraremos en el siguiente capítulo. Por un lado, el ingrediente esencial que se maneja en este estudio es el de *número difuso*. Los números difusos son abstracciones del concepto de número real a un ambiente en el que estos desean mostrar un cierto grado de incertidumbre sobre el valor concreto que toman. Como se ha comentado en la Introducción, esta propiedad los hace especialmente versátiles, pues son capaces de modelizar situaciones en las que no estamos absolutamente seguros del valor concreto que toma una cierta medida o cuando emitimos un juicio de valor subjetivo, basado en nuestra experiencia personal, pero sin fundamento matemático que lo sustente. Los números difusos no serían números si no existiese una forma de operar con ellos que, en cierta forma, extienda al cálculo real. El segundo concepto fundamental es el de *orden*. Realmente, los números difusos no están ordenados mediante un procedimiento universalmente aceptado. Solo existen aproximaciones que funcionan muy bien en la mayoría de los casos, pero que también tienen sus inconsistencias. La comparación de números difusos es un problema abierto con infinitud de aplicaciones en contextos prácticos. Finalmente, destacamos la noción de *función de agregación*, que

sirve para resumir mucha información en un único dato, lo cual, por supuesto, conlleva una enorme pérdida de información. No obstante, el conocimiento no se basa en la capacidad para recordar los datos en bruto, sino en indicar las características más esenciales contenidas en los mismos.

En lo sucesivo, denotaremos por \mathbb{R} al conjunto formado por todos los números reales. Entre estos números destaca, por su importancia en el ambiente difusos, el intervalo compacto (cerrado y acotado) real $[0, 1]$, al que denotaremos por \mathbb{I} . Sus elementos serán representados por letras griegas como α o β , mientras que nos referiremos a los números reales que utilicemos mediante letras en minúscula como t , s , r , a , b , etc.

2.1. Los números difusos

Como hemos comentado en la introducción, un conjunto X queda completamente determinado cuando somos capaces de decidir, sin ninguna duda, si un elemento x pertenece o no al conjunto. Por tanto, debe existir un criterio absolutamente claro que nos permita decir que un elemento x o bien sí pertenece al conjunto X o bien no pertenece a dicho conjunto. Si representamos con un 1 a la primera situación y con un 0 a la segunda, habremos asociado a cada elemento x de un universo más amplio una etiqueta (en forma de número entero) que determina si pertenece o no al conjunto. Dicha etiqueta está en el conjunto $\{0, 1\}$. Sin embargo, este procedimiento no es siempre posible. Por ejemplo, si consideramos al conjunto de personas que ganarán un premio de la lotería dentro de tres años, ¿está usted en ese conjunto? En este caso no es fácil discernir, a priori, si un elemento pertenece, o no, a dicho conjunto. Lo que sí se podría hacer, y esta es la esencia de la teoría de conjuntos difusos, es asociarle a cada elemento del conjunto un cierto *grado de pertenencia* que indique, de alguna forma, la proximidad de dicho elemento a pertenecer, o no, al conjunto.

Algebraicamente, la idea anterior se formaliza de la siguiente forma: un *conjunto difuso* A sobre un conjunto arbitrario X (no vacío) es cualquier función

$\mu_A : X \rightarrow \mathbb{I}$. Dado un elemento $x \in X$, el número $\mu_A(x) \in \mathbb{I}$ representa el grado de certeza que poseemos de que el elemento $x \in X$ pertenezca, o no, al conjunto difuso. Conocer un conjunto difuso implica conocer tanto el conjunto X como la *función de pertenencia* μ_A , por lo que, a veces, el conjunto difuso se denota como $A = \langle x, \mu_A(x) \rangle_{x \in X}$. No obstante, por simplificar la notación, diremos que el conjunto difuso A es, en sí mismo, una aplicación $A : X \rightarrow \mathbb{I}$ (no distinguiremos entre el conjunto difuso y su función de pertenencia).

Cuando un elemento $x_0 \in X$ posee un grado de pertenencia igual a 1, es decir, si $A(x_0) = 1$, estamos expresando que el elemento x_0 pertenece al conjunto A sin lugar a dudas. Por contra, si $A(x_0) = 0$, también estamos expresando certeza, pero dicha certeza es de que el elemento no pertenece al conjunto. En el último caso, cuando $x_0 \in (0, 1)$, se tiene únicamente una certeza parcial de que el elemento x_0 pertenece al conjunto, siendo dicha certeza mayor cuanto más cerca esté el grado de pertenencia de x_0 al valor 1.

2.1.1. El concepto de número difuso

Dentro de la familia de conjuntos difusos, hay una clase muy especial que es la formada por los *números difusos*. En general, los números difusos son conjuntos difusos que se utilizan para expresar incertidumbre sobre el valor concreto que toma una cierta cantidad (por ejemplo, el precio del metro cuadrado construido en el centro de una ciudad). Esta ambigüedad permite ver los números difusos como entidades probabilísticas que modelizan con gran éxito el lenguaje humano, que está lleno de imprecisiones. Por ejemplo, expresiones como “luego iré a tu casa” o “la cafetería está cerca de la facultad” no aclaran perfectamente el momento o el enclave geográfico al que se refieren, pero sirven para expresar dar una idea global de lo que se quiere decir.

Esta forma de expresar incertidumbre puede plasmarse, en la práctica, de muy diversas formas, lo que da lugar a diferentes posibilidades para definir la noción de “número difuso”. Algunas posibilidades pueden consultarse en [33, 34,

62, 63, 78, 79]. Nosotros, en lo que sigue, utilizaremos la siguiente definición por ser, posiblemente, la más extendida. Para distinguirlos de los conjuntos difusos, utilizaremos letras caligráficas para denotar a los números difusos.

Definición 2.1.1 (cf. [65, 67, 68, 69]) *Un número difuso sobre \mathbb{R} es cualquier conjunto difuso $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ con la propiedad de que, para cada $\alpha \in (0, 1]$, el conjunto $\mathcal{A}_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(t) \geq \alpha\}$ es un subintervalo cerrado y no vacío de \mathbb{R} .*

El conjunto \mathcal{A}_α se denomina conjunto de nivel α (o α -corte) de \mathcal{A} .

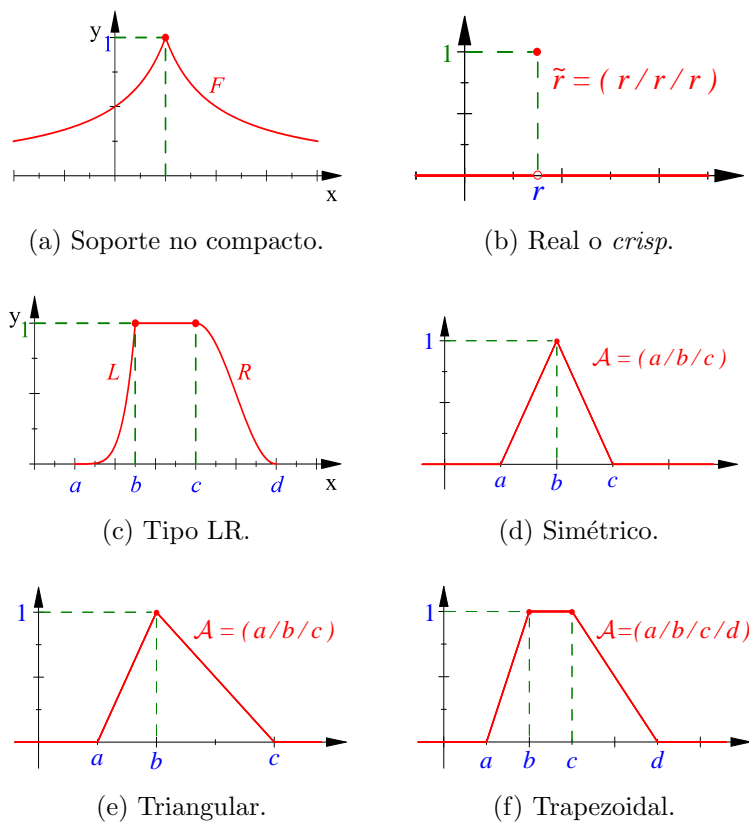


Figura 2.1: Ejemplos de diferentes clases de números difusos.

Es posible demostrar que los números difusos, vistos como funciones reales de variable real del tipo $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$, satisfacen las siguientes propiedades (que, a su vez, los caracterizan):

- **Normalidad:** existe un punto $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A}(t_0) = 1$;

- *Converidad difusa*: para cada $t, s \in \mathbb{R}$ y cada $\lambda \in [0, 1]$ se verifica que

$$\mathcal{A}(\lambda t + (1 - \lambda)s) \geq \min\{\mathcal{A}(t), \mathcal{A}(s)\};$$

- *Semicontinuidad superior*: para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t_0) < \varepsilon.$$

2.1.2. Primeras características de los números difusos

El *núcleo* de un número difuso \mathcal{A} es su 1-corte, es decir, el conjunto

$$\ker(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_1 = \{t \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(t) = 1\}.$$

Por la condición de normalidad, este conjunto nunca es vacío. De hecho, si $\alpha, \beta \in (0, 1]$ verifican que $\alpha \leq \beta$, es sencillo demostrar que:

$$\emptyset \neq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{A}_\alpha,$$

lo que significa que los α -cortes definen una cadena creciente de intervalos cerrados encajados $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in (0,1]}$. Muchos autores llaman *soporte* del número difuso \mathcal{A} al conjunto de números reales sobre los que \mathcal{A} toma valores estrictamente positivos, es decir,

$$\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(x) > 0\}.$$

Sin embargo, dado que los conjuntos de nivel de un número difuso son intervalos cerrados de \mathbb{R} , y el conjunto anterior, a pesar de ser un intervalo, pudiera no ser cerrado, nosotros preferimos llamar *soporte* del número difuso \mathcal{A} a la clausura en la topología euclídea de \mathbb{R} del conjunto anterior, es decir:

$$\text{sop}(\mathcal{A}) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(x) > 0\}} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} \mathcal{A}_\alpha}.$$

De esta forma, el soporte del número difuso también seguirá siendo un intervalo cerrado real y, si se denota por \mathcal{A}_0 , se cumplirá que:

$$\emptyset \neq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{A}_\alpha \subseteq \text{sop}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0 \quad \text{para cada } \alpha, \beta \in (0, 1] \text{ con } \alpha \leq \beta.$$

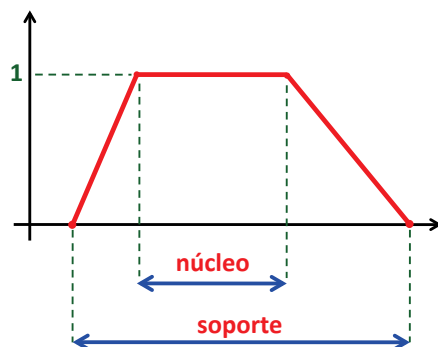


Figura 2.2: El núcleo y el soporte de un número difuso trapezoidal.

La Figura 2.2 representa el núcleo y el soporte de un número difuso trapezoidal.

Existen números difusos cuyo soporte no es acotado en \mathbb{R} (véase la Figura 2.3). Sin embargo, en lo que sigue, solo consideraremos números difusos de soporte acotado (como, para nosotros, el soporte es cerrado, da igual decir “acotado” que “compacto”).

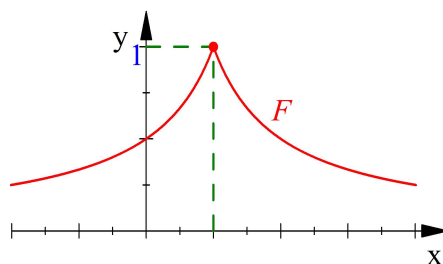


Figura 2.3: Un número difuso cuyo soporte no es compacto.

Definición 2.1.2 Denotaremos por \mathcal{F} al conjunto formado por todos los números difusos sobre \mathbb{R} de soporte compacto.

Dado que cada conjunto de nivel α es un intervalo cerrado y acotado de \mathbb{R} , denotaremos por \underline{a}_α y por \bar{a}_α a sus respectivos extremos inferior y superior, de manera que

$$\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \quad \text{para cada } \alpha \in \mathbb{I}.$$

Si $\alpha = 0$, los valores \underline{a}_0 y \bar{a}_0 denotan los extremos del soporte $\text{sop } \mathcal{A} = [\underline{a}_0, \bar{a}_0]$, mientras que si $\alpha = 1$, los valores \underline{a}_1 y \bar{a}_1 indican los extremos del núcleo

$\ker \mathcal{A} = [\underline{a}_1, \bar{a}_1]$. Las funciones $\underline{a}, \bar{a} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ caracterizan completamente cada número difuso, pues verifican las siguientes propiedades.

Lema 2.1.3 (Véase [40]) Un conjunto difuso $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ es un número difuso si, y solo si, existen dos funciones continuas a la izquierda $\underline{a}, \bar{a} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que \underline{a} es no decreciente, \bar{a} es no creciente y $\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$ para todo $\alpha \in \mathbb{I}$.

2.1.3. Algunas familias notables de números difusos

Desde el punto de vista práctico, la definición general de número difuso no es muy amigable, y suele ser complicada de manejar. Por ello, en los estudios científicos, es muy común que los números difusos que se empleen como datos de entrada y/o salida pertenezcan a subfamilias muy concretas del conjunto general de números difusos. En esta sección presentamos algunas de estas clases, que suelen tomar nombre teniendo en cuenta la forma geométrica de su representación gráfica.

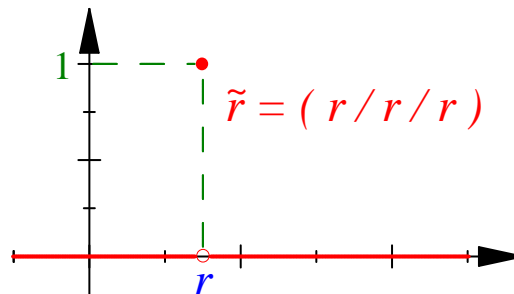


Figura 2.4: Número difuso *crisp*.

En primer lugar, mostramos cómo los números reales pueden ser vistos como números difusos. Dado un número real $r \in \mathbb{R}$, denotaremos por $\tilde{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ al número difuso cuya función de pertenencia viene dada por:

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = r, \\ 0, & \text{si } t \neq r. \end{cases}$$

Estos números difusos se conocen como *crisp* (véase la Figura 2.4). Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los números reales $\{r : r \in \mathbb{R}\}$ y el conjunto de todos los números difusos crisp $\{\tilde{r} : r \in \mathbb{R}\}$.

Desde un punto de vista más general, diremos que un número difuso \mathcal{A} es *trapezoidal (generalizado)* si existen cuatro números reales $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ordenados en la forma $a \leq b \leq c \leq d$, de manera que el número difuso \mathcal{A} viene dado por la siguiente función de pertenencia:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}, & \text{si } a < t < b, \\ 1, & \text{si } b \leq t \leq c, \\ \frac{d-t}{d-c}, & \text{si } c < t < d, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Los números reales a, b, c y d se denominan las *esquinas* del número difuso \mathcal{A} , el cual se denota como $\mathcal{A} = (a/b/c/d)$ debido a que estas cuatro esquinas determinan completamente el número trapezoidal y están ordenadas de menor a mayor. El nombre de esta clase de números difusos proviene del hecho de que, cuando $a < b < c < d$, la gráfica del número difuso $(a/b/c/d)$ adopta la forma de un trapecio de base mayor $[a, d]$, base menor $[b, c]$ y altura una unidad (véase la Figura 2.5.a).

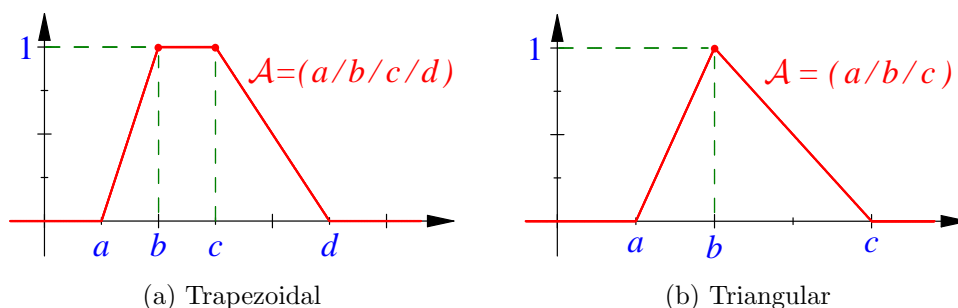


Figura 2.5: Número difuso trapezoidal (comparado con uno triangular).

Proposición 2.1.4 Dado cualquier $\alpha \in \mathbb{I}$, el α -corte del número difuso trapezoidal

$\mathcal{A} = (a/b/c/d)$ es:

$$\mathcal{A}_{[\alpha]} = [(1 - \alpha)a + \alpha b, (1 - \alpha)d + \alpha c].$$

El núcleo del número difuso trapezoidal $\mathcal{A} = (a/b/c/d)$ es $\ker \mathcal{A} = [b, c]$ (su base menor) mientras que su soporte es $\text{sop } \mathcal{A} = [a, d]$ (su base mayor). El número difuso trapezoidal $(a/b/c/d)$ modeliza una situación en la que deseamos expresar incertidumbre sobre una cantidad indeterminada de la que sabemos, con seguridad que está en el intervalo $[a, d]$ (su soporte) pero de la que tenemos fundadas sospechas de que, más concretamente, se mueve en el intervalo $[b, c]$ (su núcleo). La característica más importante de esta clase de números difusos es que, al adoptar una forma geométrica tan concreta pero, a la vez, tan general, es muy conveniente para modelizar la incertidumbre asociada a una cantidad difusa. Además, esta familia atrapa a familias mucho más simples, como son las siguientes:

Caso 2.1.5 $a = b = c = d \rightarrow$ número difuso crisp.

Caso 2.1.6 $a = b \leq c = d \rightarrow$ número difuso rectangular.

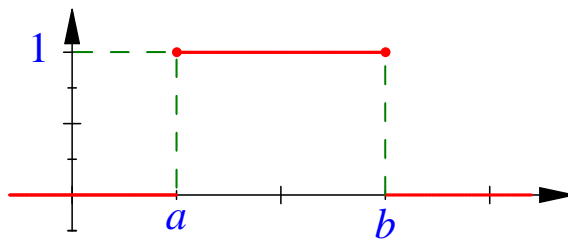


Figura 2.6: Número difuso rectangular.

Caso 2.1.7 $a \leq b = c \leq d \rightarrow$ número difuso triangular.

En las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8 mostramos diversas clases de números difusos trapezoidales (que contienen a las subfamilias ya introducidas).

El término “*generalizado*” proviene del hecho de que no solo se aceptan formas trapezoidales sino que, a veces, la función de pertenencia no es continua,

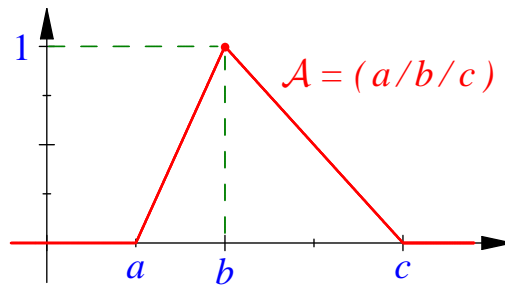


Figura 2.7: Número difuso triangular.

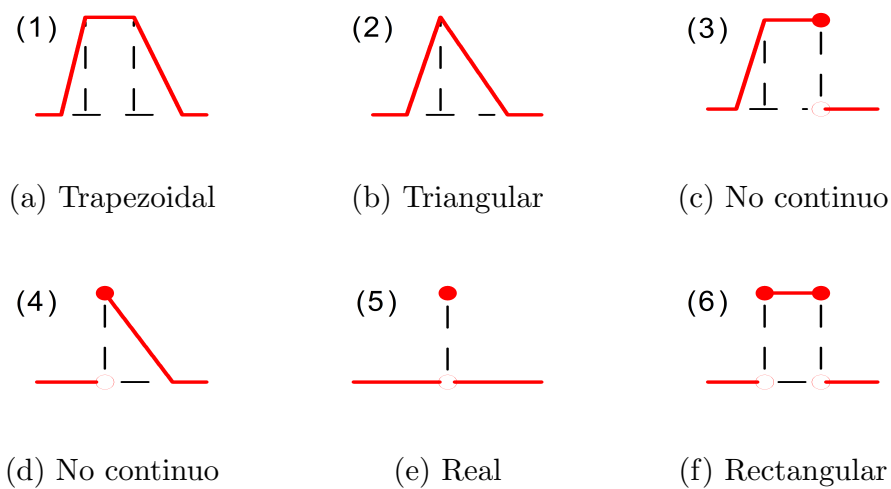


Figura 2.8: Distintas clases de números difusos trapezoidales (generalizados).

dando lugar a otra clase de figuras (véase la Figura 2.9). Obsérvese que, empleando la definición anterior, aceptamos que un número difuso triangular o trapezoidal pueda no ser continuo (de hecho, los números difusos crisp y rectangulares nunca son continuos).

Cuando el número difuso \mathcal{A} es triangular, se denota por $(a/b/c)$ (véase la Figura 2.7), y su función de pertenencia viene dada por:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}, & \text{si } a < t < b, \\ 1, & \text{si } t = b, \\ \frac{c-t}{c-b}, & \text{si } b < t < c, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

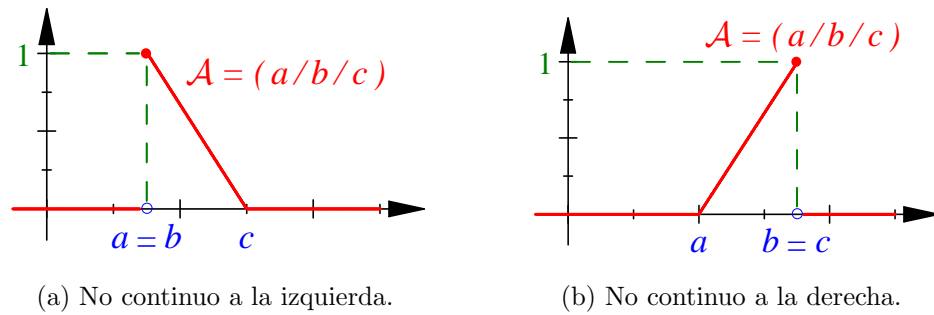


Figura 2.9: Números difusos triangulares no continuos.

Por su interés de cara al próximo capítulo, observamos que, dado cualquier $\alpha \in \mathbb{I}$, el α -corte del número difuso triangular $\mathcal{A} = (a/b/c)$ es $\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$, donde:

$$\underline{a}_\alpha = a + \alpha(b - a) = (1 - \alpha)a + \alpha b = b - (1 - \alpha)(b - a), \quad (2.1)$$

$$\bar{a}_\alpha = c - \alpha(c - b) = (1 - \alpha)c + \alpha b = b + (1 - \alpha)(c - b). \quad (2.2)$$

Un número difuso triangular $(a/b/c)$ es *simétrico* (véase la Figura 2.10.a) si el vértice b es el punto medio entre a y c , es decir, si $b = \frac{a+c}{2}$.

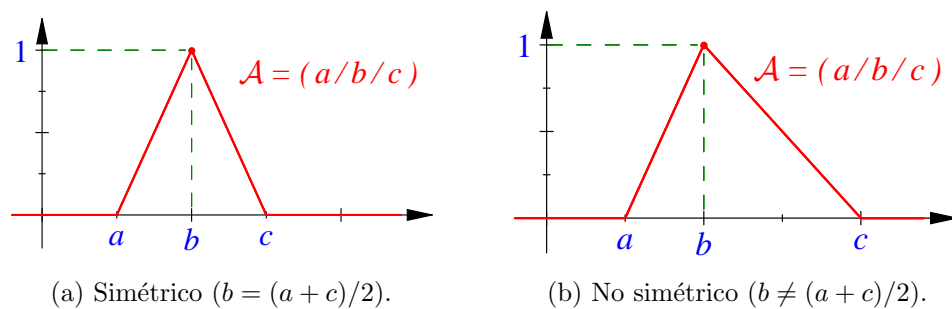


Figura 2.10: Ejemplos de números difusos triangulares (simétrico y no simétrico).

Para que un número difuso trapezoidal $(a/b/c/d)$ sea *simétrico* debe cumplirse que $a + d = b + c$, es decir, el punto medio de su soporte coincide con el punto medio de su núcleo.

Existen familias aún más generales de números difusos, como los números difusos de *tipo LR* [33] o los números difusos *finitos* [10]. No obstante, no las

presentamos aquí debido a que no las utilizaremos a lo largo de la presente Memoria. Remitimos a [73] al investigador interesado en esta clase de números.

2.1.4. Interpretación de la noción de número difuso a partir de conceptos estadísticos

Un número difuso es una generalización del concepto de número real *ordinario* en el sentido de que no se refiere a un único valor, sino a un conjunto de valores posibles, donde cada valor posible tiene su propio peso entre 0 y 1. Este peso se denomina función de pertenencia. Por lo tanto, cualquier número difuso puede considerarse una función cuyo dominio es un conjunto específico (normalmente el conjunto de números reales) y cuyo rango es el conjunto de números reales entre 0 y 1. A cada valor numérico del dominio se le asigna un *grado de pertenencia* específico, en el que el 0 representa el menor grado posible y el 1, el mayor.

Son muchas las situaciones reales en las que los números difusos representan el mundo físico de forma más realista que los números de un solo valor. Por ejemplo, supongamos que vamos conduciendo por una carretera donde el límite de velocidad es de 100 km/h . Aunque el conductor desee mantener una velocidad constante 100 km/h todo el tiempo, su velocidad variará en todo momento. Si representásemos gráficamente su velocidad instantánea durante un periodo de varios minutos y luego se trazase el resultado, en coordenadas rectangulares, se obtendrá una función que se parecerá a la función mostrada en la Figura 2.11.

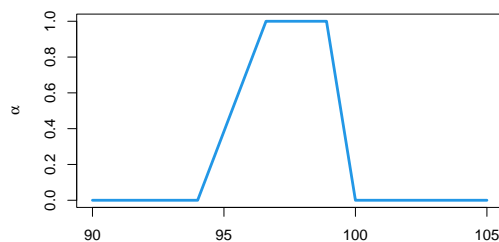


Figura 2.11: Número difuso trapezoidal.

La curva así obtenida, conocida como función de pertenencia, es convexa, pero no convexa en el sentido usual, sino convexa en el sentido difuso, es decir, si tomamos un punto dentro de un intervalo cerrado y acotado, la imagen de la función en ese punto siempre es mayor o igual que el mínimo entre las imágenes por la función de los extremos de ese intervalo. El líneas generales, su forma geométrica sigue la siguiente norma: el grado comienza en cero, se eleva hasta un máximo (que suele ser el uno), y luego vuelve a descender hasta cero a medida que aumenta la variable en su dominio. Sin embargo, algunos números difusos tienen funciones de pertenencia cóncavas en ciertos intervalos, irregulares, o incluso caóticas. Salvo lo que se ha comentado, no existe ninguna restricción en cuanto a la forma de la curva de pertenencia, siempre que cada valor del dominio se corresponda con uno, y solo un, grado del rango, y que el grado nunca sea inferior a 0 ni superior a 1.

Los números difusos se utilizan en muchas disciplinas, incluidas la estadística, la computación, la ingeniería, las ciencias experimentales, etc. El concepto de número difuso tiene en cuenta el hecho de que todos los fenómenos del universo físico tienen un grado de incertidumbre inherente. Por lo tanto, un punto crítico en la teoría de los números difusos (quizá el más importante desafío actual en este campo) es cómo obtener su función de pertenencia.

Para entender qué es un número difuso podríamos pensar en el siguiente método de construcción, en el cual intervienen diversos conceptos estadísticos. Supongamos que deseamos tomar una decisión basándonos en las puntuaciones numéricas que asignan un grupo de expertos encargados de evaluar un objeto o un evento. Esta situación es frecuente en muchos campos, como en las competiciones deportivas (por ejemplo, gimnasia, saltos desde trampolín, patinaje artístico, etc.) En estos casos, los miembros del comité de expertos suelen elegir entre una serie de números predefinidos para dar una calificación. A continuación, se establece la opinión colectiva del grupo mediante la agregación de las puntuaciones individuales de los miembros del grupo.

Las puntuaciones asignadas al mismo objeto suelen diferir de un miembro

a otro del comité como resultado de la subjetividad humana. Usualmente, la opinión colectiva del grupo suele expresarse como la simple media aritmética de las puntuaciones individuales. Aunque este método de agregación es sencillo, no permite distinguir entre diferentes grados de consenso cuando los expertos evalúan objetos diferentes. Por ejemplo, supongamos que dos objetos (por ejemplo, dos vinos) son evaluados por cinco expertos. Supongamos que el primer objeto recibe puntuaciones de 1, 3, 5, 7 y 9, mientras que el segundo objeto recibe puntuaciones de 5, 4, 6, 5 y 5. Aunque la puntuación media de ambos objetos es 5, los expertos alcanzan claramente un mayor grado de consenso en el segundo caso. La desviación estadística nos proporciona una mejor comprensión del consenso alcanzado. Si un estudio asume que los números difusos utilizados tiene formas triangulares, puede considerar que el centro es la media aritmética y que los márgenes (amplitudes de los lados) están determinados por desviaciones a la media de distintos sujetos (véase la Figura 2.12).

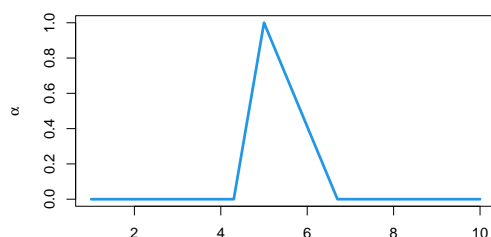


Figura 2.12: Número difuso triangular.

Dependiendo del tipo de función de pertenencia, se obtendrán diferentes tipos de conjuntos difusos. Estas pueden ser clasificarse en dos grupos: las formadas por líneas rectas a trozos son “*lineales*”, y las “*curvas*” se suelen llamar “*no lineales*”.

El carácter creciente de un número difuso antes de su núcleo, y decreciente después del mismo, nos permite interpretarlo como un par de funciones de distribución (véase la Figura 2.13). Esta forma de visualizar cada número difuso como un par de funciones de distribución nos permite también interpretar cada conjunto de nivel $\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$ como un intervalo al que pertenece el verdadero

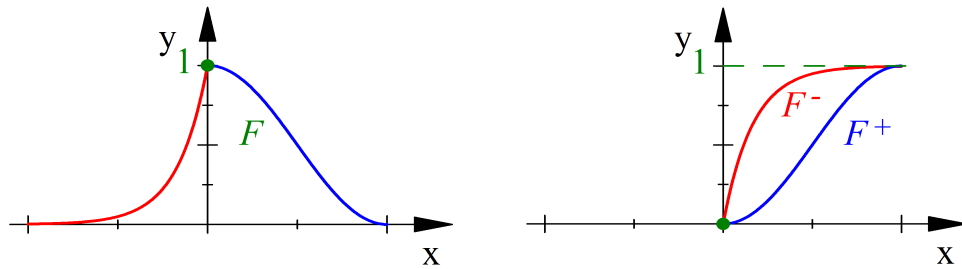


Figura 2.13: Numeros difusos no lineales cuyas funciones de pertenencia se obtiene a través de funciones de distribución.

valor de la cantidad incierta representada con seguridad $1 - \alpha$, es decir, como un *intervalo de confianza*. De esta forma, cada método de construcción de una cierta clase de intervalos de confianza (por ejemplo, para la media poblacional o para el cociente de varianzas poblacionales) puede ser interpretado como un cierto número difuso de tal forma que cuando calculamos el correspondiente intervalo de confianza (por ejemplo, al nivel $\alpha = 0.05$) obtenemos únicamente un conjunto de nivel del tipo $\mathcal{A}_{0.05}$. Esto es lo que ocurre en la Figura 2.14, donde observamos el número difuso de tipo *LR* que obtendríamos si representamos los extremos inferior y superior de cada intervalo de confianza para la media poblacional μ cuando la desviación típica poblacional es conocida ($\sigma = 6$) y se ha tomado una muestra de tamaño $n = 64$, la cual ha arrojado una media muestral de $\bar{x} = 35$.

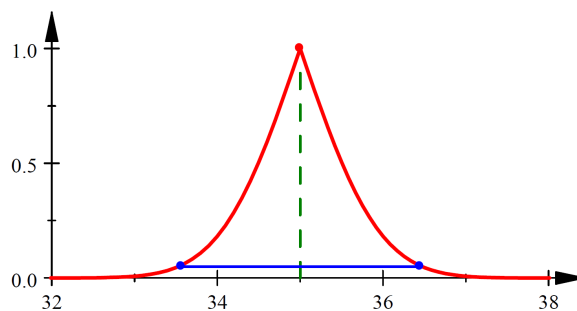


Figura 2.14: Número difuso de tipo LR obtenido al representar los intervalos dados mediante $IC(\mu) = \left[\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ variando $\alpha \in \mathbb{I}$.

En general, las funciones no lineales poseen expresiones algebraicas más com-

plicadas que las lineales, lo que aumenta el tiempo empleado en los cálculos. Por lo tanto, en la práctica, la mayoría de los estudios y metodologías que emplean números difusos utilizan funciones de pertenencia lineales. En general, la función de pertenencia de tipo trapezoidal se adapta bastante bien a los requerimientos de los estudios científicos, con la ventaja añadida de que es fácil definir, fácil de representar y simple de calcular, por lo que es muy útil. En general, el uso de una función más compleja no es sinónimo de una mayor precisión.

Finalmente, los números difusos también pueden ser empleados para modelizar situaciones en las que intervienen ciertas *etiquetas lingüísticas* que empleamos en nuestra vida cotidiana para expresar una idea sin necesidad de ofrecer una precisión total, sino un significado lo suficientemente ambiguo como para entendernos suficientemente. Es el caso de las expresiones “*casi*”, “*luego*”, “*más tarde*”, “*alrededor de*”, “*mediano*”, etc. Estas expresiones pueden traducirse en muchas ocasiones en números difusos con los que luego se puede operar aritméticamente. Por ejemplo, supongamos que queremos expresar el nivel de utilidad de una herramienta utilizando las siguientes etiquetas lingüísticas:

$$\{ \text{“baja”, “media”, “alta”, “excelente”} \}. \quad (2.3)$$

Este conjunto está totalmente ordenado, pero no nos permite operar aritméticamente (por ejemplo, para calcular una valoración media de una gran cantidad de clientes). Además, tiene el inconveniente de que, al expresar una opinión subjetiva, no está claro el límite entre dos etiquetas consecutivas. Este inconveniente desaparece cuando pasamos de una escala discreta a una escala continua. Sin entrar en muchos detalles, las etiquetas lingüísticas del conjunto (2.3) pueden expresarse como números difusos trapezoidales mediante las identificaciones que se muestran en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Equivalencias entre etiquetas lingüísticas y números triangulares.

Etiqueta lingüística	Número difuso trapezoidal
“ <i>baja</i> ”	(0/0/4/5)
“ <i>media</i> ”	(4/5/6/7)
“ <i>alta</i> ”	(6/7/8/9)
“ <i>excelente</i> ”	(8/9/10/10)

La Figura 2.15 muestra la representación gráfica de los números difusos considerados en la Tabla 2.1.

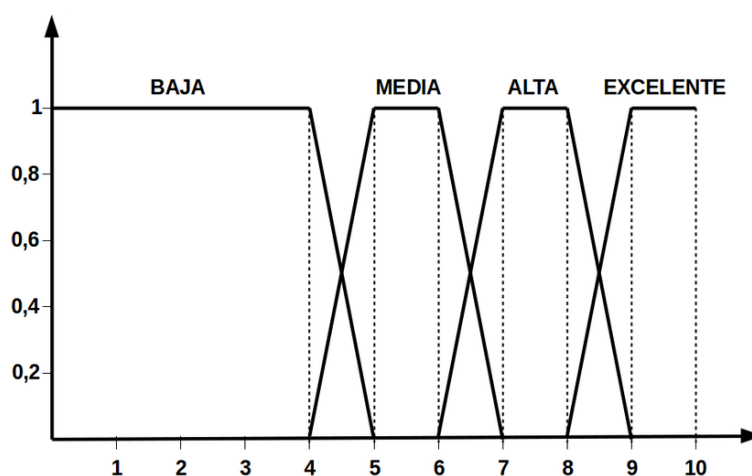


Figura 2.15: Números difusos trapezoidales que representan las etiquetas de la variable lingüística utilidad de una herramienta.

2.1.5. Operaciones con números difusos

Para que los números difusos puedan ser considerados auténticas extensiones de la noción de número real, es imprescindible poder definir entre ellos las cuatro operaciones aritméticas básicas que se emplean en \mathbb{R} . Por supuesto, dichas extensiones, cuando se aplican a números difusos crisp, deben obligatoriamente

coincidir con las operaciones aritméticas básicas de \mathbb{R} .

Las operaciones usuales entre funciones no sirven en el contexto difuso, pues sus imágenes pueden salirse del intervalo \mathbb{I} . Por ejemplo, si dos números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} verifican $\mathcal{A}(t_0) = \mathcal{B}(t_0) = 1$ en un mismo punto $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces su suma con funciones verifica $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(t_0) = 2 \notin \mathbb{I}$. Por consiguiente, la nueva forma de definir dichas operaciones no debe reducirse a las operaciones canónicas entre funciones.

El *principio de extensión de Zadeh* propone definir

$$(\mathcal{A} \diamond \mathcal{B})(t) = \sup(\text{mín}\{\mathcal{A}(s), \mathcal{B}(r)\} : s \diamond r = t) \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},$$

donde $\diamond \in \{+, -, *, /\}$ es una operación aritmética básica en \mathbb{R} . Este principio de implementa de forma más sencilla a través de la *aritmética intervalar* aplicada a los conjuntos de nivel de los números difusos que se desean operar, de tal manera que las operaciones aritméticas adoptan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}, \quad (\mathcal{A} + \mathcal{B})_\alpha &= [\underline{a}_\alpha + \underline{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha + \bar{b}_\alpha], & (2.4) \\ \underline{c}_\alpha &= \underline{a}_\alpha + \underline{b}_\alpha, \quad \bar{c}_\alpha = \bar{a}_\alpha + \bar{b}_\alpha; \\ \mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}, \quad (\mathcal{A} - \mathcal{B})_\alpha &= [\underline{a}_\alpha - \bar{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha - \underline{b}_\alpha], \\ \underline{c}_\alpha &= \underline{a}_\alpha - \bar{b}_\alpha, \quad \bar{c}_\alpha = \bar{a}_\alpha - \underline{b}_\alpha; \\ \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}, \quad (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})_\alpha &= [\text{mín } \Delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha, \text{máx } \Delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha], \\ &\text{donde } \Delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha = \{ \underline{a}_\alpha \underline{b}_\alpha, \underline{a}_\alpha \bar{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha \underline{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha \bar{b}_\alpha \}; \\ \mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{B}, \quad (\mathcal{A}/\mathcal{B})_\alpha &= [\text{mín } \Lambda_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha, \text{máx } \Lambda_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha], \\ &\text{donde } \Lambda_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^\alpha = \{ \underline{a}_\alpha/\underline{b}_\alpha, \underline{a}_\alpha/\bar{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha/\underline{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha/\bar{b}_\alpha \}. \end{aligned}$$

Obsérvese que la división \mathcal{A}/\mathcal{B} solo está bien definida cuando el número cero no pertenece al soporte de \mathcal{B} .

Cuando los números difusos son triangulares, la suma, la resta y la multiplicación por escalares positivos de esta clase de números difusos son muy sencillas de calcular, pues solo hay que actuar sumando, restando o multiplicando sobre

las esquinas (véase la Figura 2.16).

$$\begin{aligned}(a_1/b_1/c_1) + (a_2/b_2/c_2) &= (a_1 + a_2/b_1 + b_2/c_1 + c_2), \\ (a_1/b_1/c_1) - (a_2/b_2/c_2) &= (a_1 - c_2/b_1 - b_2/c_1 - a_2), \\ r \cdot (a/b/c) &= (r \cdot a / r \cdot b / r \cdot c) \quad (r > 0).\end{aligned}$$

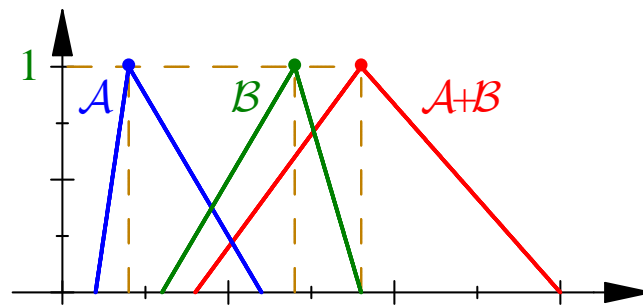


Figura 2.16: Representación gráfica de la suma de dos números difusos triangulares.

2.2. Metodologías de ranking con números difusos

Al igual que ocurre con las operaciones aritméticas básicas, que pueden extenderse de una forma natural desde el conjunto de los números reales hasta el conjunto de los números difusos, sería deseable poder generalizar también el orden canónico \leq de los números reales al conjunto superior. Sin embargo, ello es muy complicado si se quiere mantener la interpretación más común de dicho orden total en \mathbb{R} : si un número r está situado a la izquierda de otro número s en la recta real, entonces r es menos preferible que s en la ordenación que se establezca (estamos suponiendo que el proceso desarrollado está buscando el máximo). Trasladada esta propiedad al ámbito difuso, debe cumplirse que si la representación gráfica de un número difuso \mathcal{A} se sitúa a la izquierda de la de otro número difuso \mathcal{B} , entonces \mathcal{B} es preferible sobre \mathcal{A} . Por consiguiente, si \preceq es una relación binaria de orden en el conjunto \mathcal{F} , debería cumplir, al menos,

la siguiente propiedad:

- si $r, s \in \mathbb{R}$ y $r \leq s$, entonces $\tilde{r} \preceq \tilde{s}$,

o, más en general,

- si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ y la representación gráfica de \mathcal{A} está a la izquierda de la representación gráfica de \mathcal{B} , entonces $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.

Sin embargo, en el contexto difuso, esta cuestión no es tan obvia como en el ambiente real, pues los soportes y los núcleos de los números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} pueden entrelazarse de tal forma que, ante una misma representación gráfica de los números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} , vistos como funciones reales de variable real, unas personas pueden considerar que el número \mathcal{A} está situado globalmente más a la izquierda, mientras que otras personas pueden valorar lo contrario (véase la Figura 2.17).

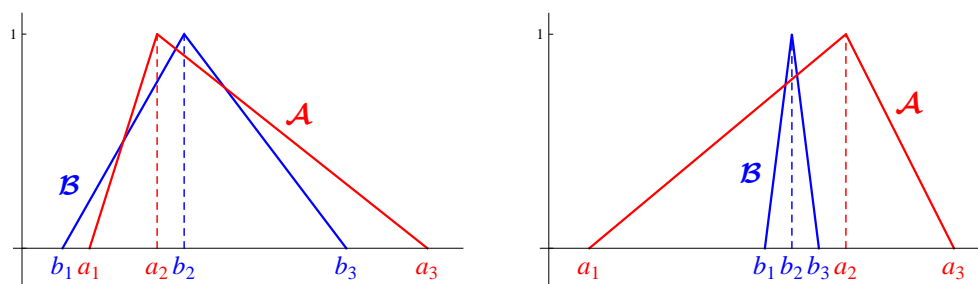


Figura 2.17: ¿Está el número difuso \mathcal{A} situado a la izquierda del número difuso \mathcal{B} ?

Es por ello que la tarea de ordenación de números difusos es mucho más complicada de lo que puede parecer a simple vista, y puede depender del punto de vista que se esté considerando en cada momento. Esta cuestión, con multitud de aplicaciones prácticas (como puede ser la toma de decisiones en el marco de trabajo difuso), ha sido, y sigue siendo, uno de los problemas abiertos más importantes de este campo de investigación.

A primera vista, pudiera pensarse que la extensión natural del orden real \leq al ámbito de las funciones reales de variable real pudiera ser un buen método de ordenación. La verdad es que, dados dos números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} , si establecemos

que $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ cuando $\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{B}(x)$ para cada número real $x \in \mathbb{R}$, entonces la relación binaria \leq que surge en \mathcal{F} es un orden parcial (reflexivo, antisimétrico y transitivo). Esta definición generaliza el concepto de *inclusión* entre conjuntos, y puede ser extrapolada con éxito a la teoría de conjuntos difusos. Sin embargo, esta explicación no es en absoluto adecuada en el contexto de los números difusos por dos motivos principales.

- Por un lado, el orden que se establezca debe generalizar al orden de los números reales. No es una cuestión de que la gráfica de un número difuso esté por debajo de la gráfica de otro número difuso (como se establece cuando $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, como se aprecia en la Figura 2.18), sino que el orden en \mathcal{F} debe tratar de indicar que, aun cuando sus gráficas estén entrelazadas, la posición relativa entre los dos números indica que \mathcal{A} está situado globalmente más a la izquierda de \mathcal{B} .

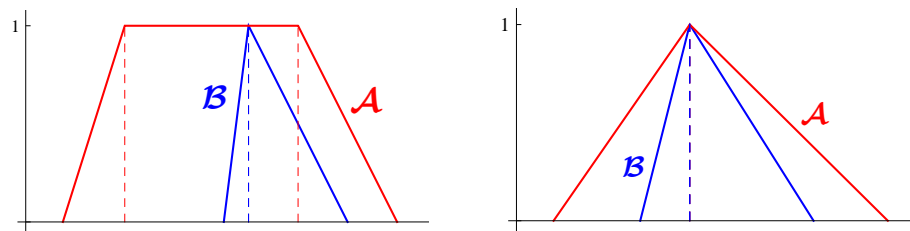


Figura 2.18: Diferentes situaciones en las que $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

- Por otro lado, esta definición no lleva a un orden *total*, es decir, un orden que permita comparar dos números difusos arbitrarios. Si, dados dos números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} , no puede establecerse o bien que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ o bien que $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$, entonces no podrá elegirse entre ellos dos, y el método que estemos tratando de llevar a cabo (por ejemplo, la toma de una decisión) no podrá ejecutarse satisfactoriamente.

Debido a su gran interés, este problema ha sido abordado desde hace más de medio siglo desde muy diversos puntos de vista, y nos parece conveniente citar los siguientes antecedentes. Entre 1976 y 1977, Jain [44, 45] sugirió emplear la

noción de *conjunto de maximización* para establecer un ranking entre números difusos. Como inconveniente, este procedimiento solo tenía en cuenta los lados derechos de las funciones de pertenencia de los números difusos considerados. Poco después, Bass y Kwakernaak [16], y Dubois y Prade [33] sugirieron metodologías parecidas con conjuntos de maximización, pero Baldwin y Guild [13] pusieron de manifiesto en 1979 las carencias de los dos métodos anteriores. En 1980, Adamo [8] utilizó los conjuntos de nivel de un número difuso para establecer una regla de preferencia de un número sobre otro, lo que motivó a Chang [23] en 1981 a introducir la noción de *función de preferencia* de una alternativa sobre otra. Después, Yager [84, 85] introdujo cuatro procedimientos diferentes para este mismo fin. Los algoritmos de clasificación propuestos hasta 1985 fueron revisados por Bortolan y Degani en [18]. Después, Chen y Hwang [25] pusieron de manifiesto algunas relaciones contraintuitivas que pueden surgir al aplicar los métodos propuestos. Numerosas técnicas de ordenación han sido propuestas posteriormente, entre la que cabe destacar las introducidas por Chen [24], Choobineh [29], Cheng [27], Wang [82], Abbasbandy y Hajjari [7], y Asady [12].

Haciendo un repaso de las técnicas introducidas, Ban y Coroianu en [14] establecieron que, en general, las técnicas de ordenación de números difusos pueden agruparse en tres categorías principales.

- **Procedimientos de defusificación:** la idea principal es asignar un número real a cada número difuso y establecer que los números difusos quedan ordenados según el orden euclídeo entre sus números reales asociados.
- **Metodologías de referencia:** estos procedimientos establecen una cantidad difusa como punto de referencia y, después, compara dicha cantidad con el resto de números difusos que se deseen ordenar. Serán estas comparaciones las que determinen el orden final.
- **Algoritmos basados en relaciones difusas:** estos métodos consideran una relación binaria cualquiera \preceq en el conjunto \mathcal{F} formado por todos

los números difusos. De esta manera, la relación binaria debe llevar a ordenaciones lo más coherentes posible (principalmente cuando se utilizan relaciones binarias que verifiquen ciertas propiedades) que, al no estar basadas en un número real, no pueden ser reducidas a ninguna de las metodologías anteriores.

2.2.1. Índices de ordenación (o de clasificación)

Como se comentó en la Introducción, a lo largo de la presente Memoria empleamos el barbarismo “*defusificación*” para referirnos a cualquier procedimiento que asocie un número real a cualquier cantidad difusa. Esta palabra, traducción literal del término anglosajón “*defuzzification*”, sirve para hacer mención a aplicaciones $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ que asocien un único número real $P(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}$ a cada número difuso $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$. De esta forma, la metodología de ordenación basada en este tipo de aplicaciones es tan simple como lo siguiente: para cada par de número difusos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$, se define

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{A} \leq_P \mathcal{B} \quad \text{si} \quad P(\mathcal{A}) \leq P(\mathcal{B}), \\ \bullet \mathcal{A} <_P \mathcal{B} \quad \text{si} \quad P(\mathcal{A}) < P(\mathcal{B}), \\ \bullet \mathcal{A} \sim_P \mathcal{B} \quad \text{si} \quad P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}). \end{array} \right.$$

En todos los casos, la relación \leq_P es reflexiva y transitiva en \mathcal{F} , por lo que a la aplicación P también se la denomina *índice de ordenación* (del inglés, “*ranking index*”). Sin embargo, la condición que define la equivalencia \sim_P pone de manifiesto que dicha relación binaria puede no ser antisimétrica, ya que es posible que dos números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} sean distintos pero equivalentes, es decir, $\mathcal{A} \sim_P \mathcal{B}$, lo cual ocurre cuando $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})$. Por ejemplo, es usual que los índices de ordenación establezcan la equivalencia entre números difusos triangulares y simétricos centrados en el mismo número real. Esto significa que estos procedimientos de ranking no podrán establecer diferencias significativas entre los números del conjunto $\{(a - \delta / a / a + \delta) : a \in \mathbb{R}, \delta > 0\}$, lo que habrá de ser tenido en cuenta a la hora de tomar decisiones.

Los índices de clasificación son muy eficientes desde el punto de vista computacional ya que el ordenador puede realizar todas las operaciones aritméticas involucradas en el cálculo del valor real $P(\mathcal{A})$ de una forma rápida y eficaz. Por su interés, listamos a continuación algunas de las metodologías para ordenar números difusos que están basadas en índices de ordenación, con objeto, principalmente, de que las personas interesadas en este tema puedan dirigirse a los artículos correspondientes directamente. No obstante, en [54, 73] el lector podrá encontrar más información sobre dichas metodologías accediendo a textos en castellano.

- Método del punto central (Cheng [27], Wang y Lee [81], Chu y Tsao [30], Abbasbandy y Hajjari [7]).
- Método de la distancia de signo (Abbasbandy y Asady [5]).
- Método de la magnitud (Abbasbandy y Hajjari [6]).
- Principio de descomposición y distancia (Yao y Wu [86]).
- Método del coeficiente de variación (Lee y Li [51]).
- Método del centroide (Chu y Tsao [30]).
- Método de Chen (Chen [24]).

La mayor objeción a los métodos anteriores, en palabras de Freeling [36], es la siguiente: *“al reducir el conjunto de nuestro análisis a un solo número, estamos perdiendo gran parte de la información que hemos mantenido a lo largo de los cálculos”*. Es más, hay que aceptar que la mayoría de métodos proporcionan, en algunos casos, resultados contra-intuitivos y no acordes a la intuición humana (véase [2, 3, 4, 5, 18, 26, 57, 86]), lo que provoca que no haya una metodología universalmente aceptada.

Además de los anteriores, es interesante también conocer las siguientes defusificaciones, asociadas a una *función reductora*, que no es más que una función

creciente $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$ (véase Ban y Coroianu [14]). Dicho tipo de función es *regular* si, adicionalmente, satisface que $\int_0^1 f(r)dr = \frac{1}{2}$. Dada una función reductora f y un número difuso $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, se define:

- el *valor de \mathcal{A} (con respecto a f)* como:

$$\text{Val}_f(\mathcal{A}) = \int_0^1 f(\alpha) (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha) d\alpha;$$

- la *ambigüedad de \mathcal{A} con respecto a f* como:

$$\text{Amb}_f(\mathcal{A}) = \int_0^1 f(\alpha) (\bar{a}_\alpha - \underline{a}_\alpha) d\alpha;$$

- la *inespecificidad de \mathcal{A}* como:

$$w(\mathcal{A}) = \int_0^1 (\bar{a}_\alpha - \underline{a}_\alpha) d\alpha;$$

- el *valor esperado de \mathcal{A}* como:

$$EV(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(\alpha) (\underline{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha) d\alpha.$$

2.2.2. Metodologías basadas en una relación binaria difusa

En general, una relación binaria \preceq establecida en el conjunto \mathcal{F} formado por todos los números difusos no tiene por qué ser reducible a un índice de ordenación. Ello se consigue, especialmente, cuando la preferencia de un número sobre otro solo puede determinarse a través del conocimiento previo de las dos cantidades difusas, es decir, no basta con establecer una referencia en una de ellas. Cuando se trabaja con esta clase de metodologías de ranking, es usual emplear la siguiente notación:

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \quad \text{si} \quad \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ y } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A};$$

$$\mathcal{A} \succeq \mathcal{B} \quad \text{si} \quad \mathcal{B} \preceq \mathcal{A};$$

$$\mathcal{A} \not\preceq \mathcal{B} \quad \text{si} \quad \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ es falso};$$

$$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \quad \text{si} \quad \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ es cierto y } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A} \text{ es falso.}$$

Es de destacar el hecho de que la notación $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ no significa que “ $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ es cierto pero $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ ”, sino que se trata de una relación binaria un poco más intrincada. Obsérvese que si la relación binaria \preceq es transitiva y total, entonces la relación \sim es una relación de equivalencia en \mathcal{F} .

Una de las mayores ventajas de esta notación es que permite comprender rápidamente las posibles situaciones de ordenación entre números difusos. Por ejemplo, es posible que, siguiendo una metodología, dos números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} no sean comparables (lo cual no es comprensible en el ambiente real), e incluso, aun siendo comparables, se tenga que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ y que $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ sin que \mathcal{A} y \mathcal{B} sean iguales (ya que la relación binaria no tiene por qué ser antisimétrica).

Empleando esta notación, Wang y Kerre describieron en [80] una serie de propiedades que sería conveniente que verificase cualquier metodología de ordenación de números difusos (al menos, aquellas que fuesen más razonables). Por ejemplo, ellos consideraron que, cuando se aplica método de ranking a un par de números difusos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$, una, y solo una, de las siguientes posibilidades debe ser verdadera (lo cual viene a decir que la relación binaria es total):

$$\mathcal{A} \succ \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \sim \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \succ \mathcal{A}.$$

Entre las diferentes propiedades que propusieron (que pueden ser también consultadas en [14, 54]), destacamos las siguientes, que están relacionadas con propiedades que estudiaremos en el siguiente capítulo.

A6. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A} + \mathcal{C}$ y $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ elementos de \mathcal{F} . Si $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$ por un método de ordenación M en $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$, entonces $\mathcal{A} + \mathcal{C} \succeq \mathcal{B} + \mathcal{C}$ por M en $\{\mathcal{A} + \mathcal{C}, \mathcal{B} + \mathcal{C}\}$.

Este axioma nos indica que la suma de números difusos es compatible con la relación binaria \succeq definida por el método M . Otro axioma similar es el siguiente:

A6’. Si $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$ por M en $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$, entonces $\mathcal{A} + \mathcal{C} \succ \mathcal{B} + \mathcal{C}$ por M en $\{\mathcal{A} + \mathcal{C}, \mathcal{B} + \mathcal{C}\}$ cuando $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Además, si $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ en $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$, entonces $\mathcal{A} + \mathcal{C} \sim \mathcal{B} + \mathcal{C}$ en $\{\mathcal{A} + \mathcal{C}, \mathcal{B} + \mathcal{C}\}$.

A7. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{AC}$ y \mathcal{BC} elementos de \mathcal{F} y $\mathcal{C} \succeq \tilde{0}$. Si $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$ por M en $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$, entonces $\mathcal{AC} \succeq \mathcal{BC}$ por M en $\{\mathcal{AC}, \mathcal{BC}\}$.

Como puede observarse, las anteriores no son sino propiedades de compatibilidad entre la relación binaria \preceq generada por una metodología de ordenación M en \mathcal{F} y las operaciones usuales con números difusos. Ban y Coroianu [14] reformularon las propiedades de Wang y Kerre para una relación binaria difusa \preceq definida en un subconjunto \mathcal{S} de \mathcal{F} de la siguiente manera.

(A₅) Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A} + \mathcal{C}, \mathcal{B} + \mathcal{C} \in \mathcal{S}$ son tales que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} + \mathcal{C} \preceq \mathcal{B} + \mathcal{C}$.

(A'₅) Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A} + \mathcal{C}, \mathcal{B} + \mathcal{C} \in \mathcal{S}$ son tales que $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} + \mathcal{C} \prec \mathcal{B} + \mathcal{C}$.

(A₆) Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ son tales que $\lambda\mathcal{A}, \lambda\mathcal{B} \in \mathcal{S}$, de $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ se deduce $\lambda\mathcal{A} \preceq \lambda\mathcal{B}$ si $\lambda \geq 0$, y $\lambda\mathcal{B} \preceq \lambda\mathcal{A}$ si $\lambda \leq 0$.

2.3. Una metodología propiamente difusa de ordenación de números difusos

Ante el gran interés por el problema de ordenación en el conjunto de los números difusos, Roldán López de Hierro, Roldán y Herrera introdujeron en [68] un nuevo procedimiento de ranking, que describimos a continuación. Para comprenderlo, se parte de la relación de orden de Kulisch y Miranker [49] entre intervalos compactos reales, según la cual $[a, b] \leq [c, d]$ cuando $a \leq c$ y $b \leq d$. De esta forma, asociados a cada dos números difusos arbitrarios \mathcal{A} y \mathcal{B} podemos considerar los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \{ \alpha \in \mathbb{I} : \mathcal{A}_\alpha \leq \mathcal{B}_\alpha \} \quad \text{y} \quad \mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}} = \{ \alpha \in \mathbb{I} : \mathcal{B}_\alpha \leq \mathcal{A}_\alpha \}.$$

En cierta forma, estos conjuntos miden la probabilidad de que un número difuso sea preferible por encima del otro. En la siguiente definición, μ denota la medida euclídea de subconjuntos de \mathbb{R} (que actúa, sobre intervalos compactos, como $\mu([a, b]) = b - a$).

Definición 2.3.1 (Roldán López de Hierro et al. [68], Definición 4) Dados $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$, escribiremos:

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \geq \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) & \text{y} & \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) > 0, & o \\ \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0 & \text{y} & \underline{a}_0 + \underline{a}_1 + \bar{a}_1 + \bar{a}_0 \leq \underline{b}_0 + \underline{b}_1 + \bar{b}_1 + \bar{b}_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

La principal ventaja de esta relación binaria difusa en el conjunto \mathcal{F} es que produce ordenaciones muy acordes a la intuición humana ya que satisface un gran conjunto de propiedades algebraicas, que listamos a continuación.

- (A₁) (Reflexividad) $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$.
- (A₂) Para cada $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$, de $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ se deduce $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.
- (A₃) (Transitividad) Para cada $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}_{\text{rec}}$, de $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$ se deduce $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$ (aquí \mathcal{F}_{rec} denota el conjunto de los números difusos rectangulares).
- (A₄) Para cada $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}_{4c}$, de $\text{sup sop } \mathcal{A} \leq \text{inf sop } \mathcal{B}$ se deduce $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ (de hecho, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$).
- (A'₄) Para cada $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$, de $\text{sup sop } \mathcal{A} < \text{inf sop } \mathcal{B}$ se deduce $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.
- (A₅) Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}$ son tales que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} + \mathcal{C} \preceq \mathcal{B} + \mathcal{C}$.
- (B₅) Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}$ son tales que $\mathcal{A} + \mathcal{C} \preceq \mathcal{B} + \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.
- (A'₅) Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}$ son tales que $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} + \mathcal{C} \prec \mathcal{B} + \mathcal{C}$.
- (B'₅) Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}$ son tales que $\mathcal{A} + \mathcal{C} \prec \mathcal{B} + \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.
- (A₆) Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, de $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ se sigue $\lambda\mathcal{A} \preceq \lambda\mathcal{B}$ si $\lambda \geq 0$, y $\lambda\mathcal{B} \preceq \lambda\mathcal{A}$ si $\lambda \leq 0$.
- (B₆) Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, de $\lambda\mathcal{A} \preceq \lambda\mathcal{B}$ se sigue $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ si $\lambda > 0$, y $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ si $\lambda < 0$.

- (A'_6) Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, de $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ se sigue $\lambda\mathcal{A} \prec \lambda\mathcal{B}$ si $\lambda > 0$, y $\lambda\mathcal{B} \prec \lambda\mathcal{A}$ si $\lambda < 0$.
- (B'_6) Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, de $\lambda\mathcal{A} \prec \lambda\mathcal{B}$ se sigue $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ si $\lambda > 0$, y $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ si $\lambda < 0$.
- (B_7) $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ si, y solo si, $-\mathcal{B} \preceq -\mathcal{A}$.
- (B'_7) $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ si, y solo si, $-\mathcal{B} \prec -\mathcal{A}$.
- (B_8) Para cada $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}_{4c}$, de $\sup(\ker \mathcal{A}) \leq \inf(\text{sop } \mathcal{B})$ se deduce $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ (de hecho, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$). Aquí \mathcal{F}_{4c} simboliza el conjunto de los números difusos que son continuos, como funciones, en las cuatro esquinas $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \bar{a}_1$ y \bar{a}_0 .
- (B'_8) Para cada $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$, de $\sup(\ker \mathcal{A}) < \inf(\text{sop } \mathcal{B})$ se deduce $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.
- (B_9) Para cada $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}_{4c}$, de $\sup(\text{sop } \mathcal{A}) \leq \inf(\ker \mathcal{B})$ se deduce $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ (de hecho, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$).
- (B'_9) Para cada $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$, de $\sup(\text{sop } \mathcal{A}) \leq \inf(\ker \mathcal{B})$ se deduce $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Además, esta metodología puede ser aplicada a cualquier pareja de números difusos (especialmente de soporte compacto), sin necesidad de que sean triangulares o trapezoidales. No obstante, cuando los números son triangulares o trapezoidales, su cómputo es realmente sencillo (véase [54]).

2.4. Funciones de agregación

En el ambiente computacional, las funciones de agregación se utilizan para fusionar información, es decir, para resumir la información proporcionada por una lista de n números en un único número real. Matemáticamente, ello se lleva a cabo de la siguiente forma.

Dado un conjunto no vacío X y un número natural $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, denotemos por $X^n = X \times X \times \dots \times X$ al producto cartesiano de n copias idénticas de X .

En lo que sigue, (X, \preceq, m, M) representará un conjunto parcialmente ordenado (X, \preceq) en el que existe un mínimo absoluto m y un máximo absoluto M , es decir, existen $m, M \in X$ tales que $m \preceq x \preceq M$ para cada $x \in X$. El ejemplo más interesante de este tipo de conjuntos (especialmente en el ámbito de la computación) es $(\mathbb{I}, \leq, 0, 1)$, donde \leq denota el orden usual de números reales.

Definición 2.4.1 *Una función de agregación en un conjunto parcialmente ordenado y acotado (X, \preceq, m, M) es una aplicación $F : X^n \rightarrow X$ que es \preceq -no decreciente en cada uno de sus argumentos y que verifica las siguientes condiciones de frontera:*

$$F(m, m, \dots, m) = m \quad \text{y} \quad A(M, M, \dots, M) = M. \quad (2.6)$$

El número natural n es el número de argumentos de la función de agregación F . Si consideramos el conjunto $(\mathbb{I}, \leq, 0, 1)$, una función de agregación sobre \mathbb{I} es una función $F : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ no decreciente en cada argumento que, adicionalmente, verifica las siguientes propiedades: $F(0, 0, \dots, 0) = 0$ y $F(1, 1, \dots, 1) = 1$. Ejemplos de funciones de agregación sobre \mathbb{I} son la *media* $F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$, el mínimo, el máximo y el producto.

La condición de *no decrecimiento en cada argumento* en el conjunto (X, \preceq) puede describirse de la siguiente forma:

- si $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in X$ verifican que

$$x_1 \preceq y_1, x_2 \preceq y_2, \dots, x_n \preceq y_n,$$

$$\text{entonces } F(x_1, x_2, \dots, x_n) \preceq F(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Esta definición tiene sentido sin necesidad de que el conjunto esté parcialmente ordenado, es decir, siempre que \preceq sea cualquier relación binaria en X (no hace falta que sea reflexiva ni antisimétrica ni transitiva). No obstante, la relación binaria \preceq condiciona totalmente que una función F pueda ser monótona no decreciente. Por ello, dado que esta condición es muy estricta, recientemente se ha comenzado a buscar condiciones de monotonía más débiles en el campo

de las *funciones de fusión* del tipo $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, entre las que destacamos las siguientes nociones.

- Inspirado por la función moda (que es una función de fusión, pero que no es una función no decreciente en cada argumento), Wilkin y Beliakov [83] introdujeron la noción de *monotonía débil* como sigue. Una función $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ se dice *débilmente monótona creciente* (respectivamente, *débilmente monótona decreciente*) si se verifica la siguiente desigualdad

$$F(x_1 + h, \dots, x_n + h) \geq F(x_1, \dots, x_n)$$

(respectivamente, $F(x_1 + h, \dots, x_n + h) \leq F(x_1, \dots, x_n)$)

para cada $x_1, \dots, x_n, h \in [0, 1]$ tales que $x_i + h \leq 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Una función F se dice *débilmente monótona* cuando es débilmente monótona creciente o débilmente monótona decreciente.

- A continuación, Bustince *et al.* [20] extendieron esta noción a la monotonicidad direccional. Sea $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector real no nulo ($\mathbf{r} \neq (0, 0, \dots, 0)$). Una función de fusión $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ se dice *\mathbf{r} -creciente* (respectivamente, *\mathbf{r} -decreciente*) si para cada $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ y cada número positivo $c > 0$ tal que $\mathbf{x} + c\mathbf{r} \in [0, 1]^n$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$F(\mathbf{x} + c\mathbf{r}) \geq F(\mathbf{x}) \quad (\text{respectivamente, } F(\mathbf{x} + c\mathbf{r}) \leq F(\mathbf{x})).$$

Una función F que sea *\mathbf{r} -creciente* o *\mathbf{r} -decreciente* también se dice una *función direccionalmente monótona*.

- El avance más reciente en esta dirección se recoge en el trabajo de los autores Roldán López de Hierro *et al.* publicado en [72], que introduce el concepto de *monotonía a lo largo de curvas*. Para describir esta propiedad, utilizaremos la siguiente nomenclatura. Restrinjámonos al conjunto de *curvas* $\alpha : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $\alpha(0) = (0, 0, \dots, 0)$, donde el dominio I_α es un intervalo del tipo $[0, \infty)$, $[0, \theta]$ o $[0, \theta)$ (para algún $\theta \in (0, \infty)$).

Dada una curva $\alpha : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ y una función de fusión $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, diremos que F es α -*creciente* si

$$F(\mathbf{x} + \alpha(t)) \geq F(\mathbf{x}) \quad \text{para cada } \mathbf{x} \in [0, 1]^n \text{ y cada } t \in I_\alpha \setminus \{0\}$$

$$\text{tal que } \mathbf{x} + \alpha(s) \in [0, 1]^n \text{ para cada } s \in (0, t].$$

Análogamente, F es α -*decreciente* si

$$F(\mathbf{x} + \alpha(t)) \leq F(\mathbf{x})$$

para cada $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ y cada $t \in I_\alpha \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{x} + \alpha(s) \in [0, 1]^n$ para cada $s \in (0, t]$. Igualmente, F es α -*monótona* si F es α -creciente o α -decreciente, y F es α -*constante* si F es, al mismo tiempo, α -creciente y α -decreciente.

Hasta el momento, los mayores avances en este sentido se habían producido en el campo de las funciones de fusión de varias variables reales en el intervalo $[0, 1]$. Sin embargo, hasta la fecha, no se habían descrito condiciones de monotonía en conjuntos de números difusos (como introduciremos en el próximo capítulo) debido, especialmente, a la ausencia de un orden parcial universalmente aceptado en dicho conjunto.

CAPÍTULO 3

Resultados principales

Los desafíos comentados en la Introducción son muchos y muy variados, razón principal por la que nos introdujimos en este campo de investigación tan particular. Tal y como hemos mostrado en el segundo capítulo, las herramientas matemáticas y estadísticas que se emplean para abordarlos, a pesar de no ser elementales, tampoco requieren de una excesiva profundidad teórica. La teoría elemental de funciones reales de varias variables reales es suficiente para tratar de desarrollar soluciones eficaces a los problemas planteados, y el álgebra asociada a las relaciones binarias tiene mucho que decir en este marco teórico.

El objetivo principal del presente capítulo es el de mostrar los resultados obtenidos en la investigación desarrollada respecto de los objetivos iniciales que nos planteamos. En el mismo proponemos avances en las principales líneas de investigación que se han comentado hasta el momento.

- En primer lugar, proponemos y desarrollamos una noción consistente de función de agregación en el ambiente difuso, utilizando, como primera aproximación al problema, números difusos triangulares de soporte acotado y no negativo.
- En segundo lugar, presentamos nuevas propiedades de la relación binaria difusa \preceq introducida en [68] que nos ayudarán a comprenderla mejor y a

estudiar su relación con las funciones de agregación difusas.

- A continuación, analizamos también la compatibilidad de la suma y el producto de números difusos triangulares con la relación binaria difusa \preceq .
- Seguidamente, haciendo uso de las funciones de agregación difusas y de la relación binaria difusa \preceq a modo de ordenación, presentamos una nueva metodología para la toma de decisiones basada en múltiples criterios en el caso particular de que los datos de entrada (opiniones de expertos y pesos de los diferentes criterios) sean números difuso triangulares de los que se han empleado para definir las funciones de agregación.
- Además, utilizando las herramientas algebraicas antes mencionadas, introducimos una nueva metodología Delphi para la búsqueda de consenso cuando las opiniones de los expertos están implementadas como números difusos triangulares (o trapezoidales), comparando las mismas con un umbral también difuso a través de la relación binaria difusa \preceq , la cual permite determinar el porcentaje de acuerdo entre los participantes.
- Finalmente, ilustramos la aplicabilidad de la nueva metodología Delphi propiamente difusa para el caso particular de la validación transcultural de una nueva versión española del cuestionario “*Calidad del proceso de morir en los cuidados de larga duración*” (“*Quality-of-dying in Long Term-Care*”, véase [59]). Se propusieron once ítems para la versión española y participaron trece expertos de diferentes especialidades (ocho enfermeras, tres psicólogos y dos médicos).

Aunque no coincide al pie de la letra, este capítulo está básicamente organizado en secciones según los aspectos que acabamos de mencionar, y sus contenidos están basados en los avances científicos propuestos en los artículos de los que es coautor el doctorando (véase [70, 71]).

3.1. Funciones de agregación extendidas sobre números difusos triangulares

La noción de *función de agregación* se ha utilizado en distintos contextos como una forma de resumir la información que contiene una muestra. En este sentido, es natural considerar el problema de establecer funciones de agregación en el conjunto \mathcal{F} de todos los números difusos. En este caso, surgen dos dificultades: en primer lugar, el conjunto \mathcal{F} no está acotado (téngase en cuenta que contiene a la familia de todos los números reales) y, por lo tanto, no podemos establecer condiciones de contorno como se indica en (2.6); pero, principalmente, el conjunto \mathcal{F} no está naturalmente dotado de un orden parcial \preceq para el que podamos considerar funciones no decrecientes. Se pueden valorar muchos procesos de ordenación en el conjunto \mathcal{F} , denominados *métodos de ranking*, pero ninguno de ellos ha logrado convencer a la comunidad científica sobre su interés y aplicabilidad, especialmente porque, en muchos casos, no están de acuerdo con la intuición humana cuando se aplican a casos prácticos concretos. Además, todas las metodologías de ordenación no se pueden aplicar en todo el conjunto \mathcal{F} a la vez: por ejemplo, si definimos (véase [65])

$$(a/b/c) \leq_c (\alpha/\beta/\gamma) \quad \text{si} \quad a \leq \alpha, \quad b \leq \beta \quad \text{y} \quad c \leq \gamma, \quad (3.1)$$

entonces \leq_c es un orden parcial (reflexivo, antisimétrico y transitivo) en el conjunto \mathcal{T} de los números difusos triangulares. Sin embargo, debemos tener en cuenta los siguientes hechos:

- por un lado, un número difuso arbitrario no se caracteriza normalmente por tres esquinas, por lo que no podemos comparar dos números difusos arbitrarios a través de la relación binaria \leq_c (por ejemplo, los números difusos trapezoidales o poligonales se caracterizan por tener más de tres esquinas, y los números difusos de tipo LR e incluso los llamados *números difusos finitos* [10] o *contables* [67] no tienen esquinas);

- por otro lado, si dos números difusos son triangulares, hay casos en los que no son comparables por la relación binaria \leq_c (por ejemplo, si $\mathcal{A} = (1/5/9)$ y $\mathcal{B} = (2/4/12)$, entonces ambas comparaciones $\mathcal{A} \leq_c \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \leq_c \mathcal{A}$ son falsas).

Este es un problema importante en la toma de decisiones porque si toda la información asociada a dos alternativas A_1 y A_2 se resume en dos números difusos triangulares \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 , pero no son comparables a través de la metodología de ranking \leq_c , entonces no podremos elegir la mejor alternativa, es decir, no podremos tomar una decisión. Por consiguiente, en la toma de decisiones, necesitamos manejar relaciones binarias *totales* que establezcan órdenes *totales*, es decir, de tal forma que cualesquiera dos números difusos sean comparables.

Teniendo en cuenta el contexto de la toma de decisiones multicriterio, parece una buena idea representar las opiniones de los expertos, que conllevan una importante componente subjetiva, mediante números imprecisos que, en el caso que abordaremos, puedan modelizarse mediante números difusos (triangulares). Aunque podemos manejar números negativos, es habitual que, sin pérdida de generalidad, las opiniones de los expertos y los pesos difusos se representen mediante números difusos no negativos. Esta es la razón por la que solo consideraremos números difusos cuyos soportes sean acotados y estén incluidos en la parte no negativa de la recta real.

Para superar las dificultades mencionadas anteriormente, en esta Memoria presentamos un primer enfoque al problema de considerar las funciones de agregación en un subconjunto de números difusos, prestando especial atención al conjunto de todos los números difusos triangulares no negativos (el cual es un subconjunto de gran utilidad en la mayoría de ejemplos prácticos) y la relación binaria difusa \preceq introducida en la Definición 2.3.1. De hecho, para manejar un conjunto acotado por una relación binaria \preceq (no necesariamente un conjunto parcialmente ordenado), parece natural restringir nuestro estudio al conjunto de todos los números difusos triangulares cuyos soportes están incluidos en un subconjunto compacto y no negativo de la recta real. Para hacer eso, fijamos la

siguiente notación.

En general, diremos que un número difuso \mathcal{A} es *no negativo* si $\mathcal{A}(t) = 0$ para cualquier $t < 0$. En particular, un número difuso triangular $(a/b/c)$ es no negativo si $0 \leq a$. Dado un número positivo $N > 0$, denotamos por \mathcal{T}_N el conjunto de todos los números difusos triangulares cuyos soportes están incluidos en el intervalo $[0, N]$, esto es,

$$\mathcal{T}_N = \{ (a/b/c) \in \mathcal{T} : 0 \leq a \leq b \leq c \leq N \}.$$

Cualquier número real $r \in [0, N]$ puede verse como el número difuso trapezoidal $\tilde{r} = (r/r/r) \in \mathcal{T}_N$ (véase la figura 2.1.b). En este sentido, $\tilde{0}$ y \tilde{N} son los extremos inferior y superior, respectivamente, de \mathcal{T}_N con respecto a las relaciones binarias \leq_c y \preceq , esto es, para cualquier $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_N$ tenemos que $\tilde{0} \leq_c \mathcal{A} \leq_c \tilde{N}$ y también $\tilde{0} \preceq \mathcal{A} \preceq \tilde{N}$. En particular, todos los números difusos en \mathcal{T}_N son no negativos.

Si $\mathcal{A} = (a/b/c)$ es un número difuso triangular para el cual se verifica $a = b$ o $b = c$, la función de pertenencia de \mathcal{A} no es continua en tal punto (véase las Figuras 2.1.b y 3.1).

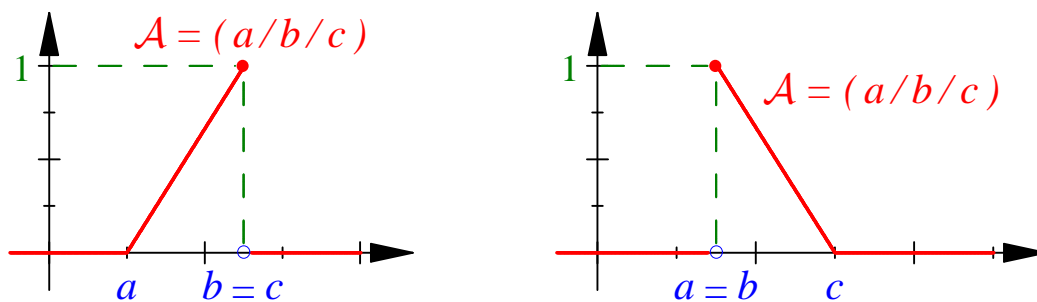


Figura 3.1: Dos clases de números difusos triangulares no continuos (véase también la representación de un número real en la Figura 2.1.b).

En este caso, la función \underline{a} (o la función \bar{a} , respectivamente) es constante, y los cálculos que realizaremos son más sencillos. Por lo tanto, en los resultados principales, solo consideraremos el caso general $a < b < c$ en el que la representación gráfica de la función de pertenencia recuerda a un verdadero triángulo cuya base es el intervalo $[a, c]$ y cuyo vértice se sitúa en el punto de coordenadas

$(b, 1)$. En este caso, cuando $a < b < c$, diremos que el número difuso $(a/b/c)$ es un número difuso triangular *propio* (véase la Figura 2.1.a).

3.2. Algunas nuevas propiedades de la relación binaria \preccurlyeq sobre el conjunto de los números difusos triangulares

La relación binaria difusa \preccurlyeq que describimos en la Definición 2.3.1 fue introducida en [68] y, posteriormente, analizada en [65] para el caso de números difusos trapezoidales. Sin embargo, en el caso de números difusos triangulares, se comporta de una forma especial. En este apartado presentamos algunas propiedades nuevas de dicha relación binaria difusa cuando consideramos el conjunto de números difusos triangulares. Incluimos aquí estas propiedades porque serán de interés para nuestro estudio posterior. Un resultado clave en este sentido es el siguiente.

Teorema 3.2.1 Si $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3)$ y $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3)$ son dos números difusos triangulares tales que $a_2 < b_2$, entonces $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) > 0$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la función $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ definida, para cualquier $\alpha \in \mathbb{I}$, por:

$$f(\alpha) = (b_2 - a_2) - (1 - \alpha) [(a_3 - a_2) + (b_2 - b_1)].$$

Claramente, f es continua y verifica $f(1) = b_2 - a_2 > 0$. Por lo tanto, existe $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ tal que $f(\alpha) > 0$ para cualquier $\alpha \in [1 - \varepsilon_0, 1]$. De esta forma:

$$\begin{aligned} 0 < f(\alpha) &= (b_2 - a_2) - (1 - \alpha) [(a_3 - a_2) + (b_2 - b_1)] \\ &\Leftrightarrow a_2 + (1 - \alpha)(a_3 - a_2) < b_2 - (1 - \alpha)(b_2 - b_1). \end{aligned}$$

Utilizando (2.1) y (2.2), se deduce que, para cualquier $\alpha \in [1 - \varepsilon_0, 1]$,

$$\bar{a}_\alpha = a_2 + (1 - \alpha)(a_3 - a_2) < b_2 - (1 - \alpha)(b_2 - b_1) = \underline{b}_\alpha.$$

Por lo tanto, $\underline{a}_\alpha \leq \bar{a}_\alpha < \underline{b}_\alpha$ y $\bar{a}_\alpha < \underline{b}_\alpha \leq \bar{b}_\alpha$ para cualquier $\alpha \in [1 - \varepsilon_0, 1]$. En consecuencia, $[1 - \varepsilon_0, 1] \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ y $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}) \geq \mu([1 - \varepsilon_0, 1]) = \varepsilon_0 > 0$. ■

Los siguientes resultados son consecuencias directas del resultado anterior.

Corolario 3.2.2 Si $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3)$ y $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3)$ son dos números difusos triangulares tales que $a_2 \neq b_2$, entonces $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}) > 0$ o $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}) > 0$.

DEMOSTRACIÓN: Dado que a_2 y b_2 son distintos, solo pueden ocurrir dos casos: o bien $a_2 < b_2$ o bien $b_2 < a_2$. En el primer caso, el Teorema 3.2.1 garantiza que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}) > 0$. Y si ocurriese que $b_2 < a_2$, entonces el mismo resultado probaría que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}) > 0$. ■

Veamos ahora cómo la posición relativa de dos vértices consecutivos de los números difusos triangulares puede determinar directamente su ordenación mediante la relación binaria difusa \preceq .

Lema 3.2.3 Sean $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3)$ y $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3)$ dos números difusos triangulares.

- (a) Si $a_1 \leq b_1$ y $a_2 < b_2$, entonces $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ (y, en particular, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$).
- (b) Si $a_2 < b_2$ y $a_3 \leq b_3$, entonces $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ (y, en particular, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$).

DEMOSTRACIÓN: (a) Por un lado, el Teorema 3.2.1 garantiza que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}) > 0$. Por otro lado, para cualquier $\alpha \in (0, 1]$,

$$\underline{a}_\alpha = (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2 \leq (1 - \alpha)b_1 + \alpha a_2 < (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2 = \underline{b}_\alpha.$$

Por lo tanto $\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}} \subseteq \{0\}$ y $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}) = 0$. Como consecuencia, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ya que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}) > 0$ y $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}) = 0$.

(b) Se deduce del hecho de que, para cualquier $\alpha \in (0, 1]$, $\bar{a}_\alpha = \alpha a_2 + (1 - \alpha)a_3 < \alpha b_2 + (1 - \alpha)a_3 \leq \alpha b_2 + (1 - \alpha)b_3 = \bar{b}_\alpha$. ■

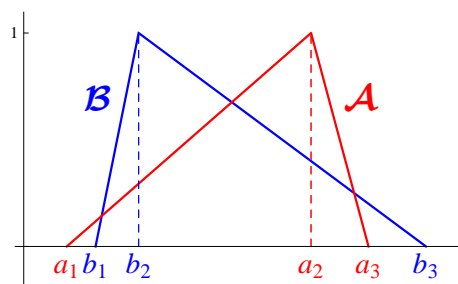


Figura 3.2: Aunque $a_1 < b_1$ y $a_3 < b_3$, se verifica que $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$.

Observemos que no podemos deducir que $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ a partir del hecho de que $a_1 < b_1$ y $a_3 < b_3$ (véase la Figura 3.2).

Teorema 3.2.4 Sean $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3)$ y $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3)$ dos números difusos triangulares. Si existen $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, tales que $a_i = b_i$ y $a_j = b_j$, entonces $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ si, y solo si, $a_k \leq b_k$, donde $\{k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$. En tal caso, $\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \mathbb{I}$ y, además, $\mathcal{A} \leq_c \mathcal{B}$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos separadamente los casos $\{i, j\} = \{1, 2\}$, $\{i, j\} = \{2, 3\}$ y $\{i, j\} = \{1, 3\}$.

- Si $\{i, j\} = \{1, 2\}$, entonces $\underline{a}_\alpha = (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2 = (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2 = \underline{b}_\alpha$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{I}$. Como $\bar{a}_1 = a_2 = b_2 = \bar{b}_1$, se pueden dar dos posibilidades:
 - ▷ $a_3 \leq b_3$, que es equivalente a $\bar{a}_\alpha \leq \bar{b}_\alpha$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{I}$, que también es equivalente a $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$;
 - ▷ $a_3 > b_3$, que es equivalente a $\bar{a}_\alpha > \bar{b}_\alpha$ para cualquier $\alpha \in [0, 1)$, que también es equivalente, en este caso, a $\mathcal{A} \not\preceq \mathcal{B}$.

Entonces, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ si, y solo si, $a_3 \leq b_3$.

- Si $\{i, j\} = \{2, 3\}$, podemos repetir los argumentos anteriores cambiando \underline{a}_α por \bar{a}_α .
- Supongamos que $a_1 = b_1$ y $a_3 = b_3$.

- ▷ Si $a_2 \leq b_2$ entonces $\underline{a}_\alpha \leq \underline{b}_\alpha$ y $\bar{a}_\alpha \leq \bar{b}_\alpha$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{I}$, lo que significa que $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \mathbb{I}$ y $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$;
- ▷ Si $a_2 > b_2$ entonces $\underline{a}_\alpha > \underline{b}_\alpha$ y $\bar{a}_\alpha > \bar{b}_\alpha$ para cualquier $\alpha \in [0, 1)$, por lo que $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \{0\}$, $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \mathbb{I}$ y $\mathcal{A} \not\preceq \mathcal{B}$.

En cualquier caso, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ si, y solo si, el tercer vértice de \mathcal{A} es menor o igual que el tercer vértice de \mathcal{B} . ■

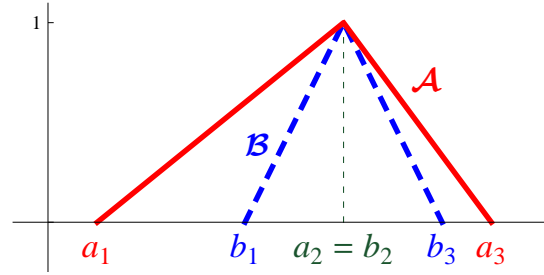
Analizamos ahora qué ocurre cuando $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ e $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ son conjuntos de medida nula, y cómo influye ello en la ordenación entre los dos números difusos.

Teorema 3.2.5 Si $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3)$ y $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3)$ son dos números difusos triangulares tales que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0$, entonces $a_2 = b_2$ (esto es, \mathcal{A} y \mathcal{B} tienen el mismo núcleo). En tal caso, $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{1\}$. Además, si $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, entonces $a_1 + a_3 \leq b_1 + b_3$ y uno, y solo uno, de los siguientes casos es válido:

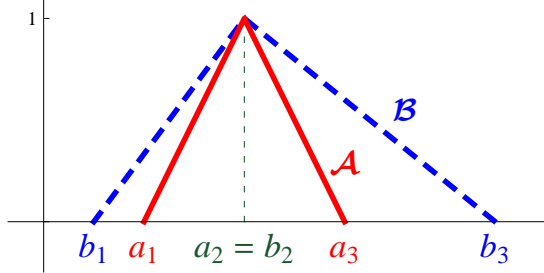
- (a) $a_1 < b_1 \leq a_2 = b_2 \leq b_3 < a_3$.
- (b) $b_1 < a_1 \leq a_2 = b_2 \leq a_3 < b_3$.

La representación gráfica conjunta de las funciones de pertenencia de los números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} en los casos (a) y (b) del teorema anterior (véase la Figura 3.3) nos permite observar que la gráfica de uno de los números difusos involucrados se sitúa por debajo de la gráfica del otro número difuso. Matemáticamente, $\mathcal{A}(t) \leq \mathcal{B}(t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$ o viceversa. En estos casos, diremos que \mathcal{B} *está estrictamente debajo de* \mathcal{A} , en el caso (a), o que \mathcal{A} *está estrictamente debajo de* \mathcal{B} en el caso (b). Observe que sus respectivos núcleos deben ser iguales ($a_2 = b_2$).

DEMOSTRACIÓN: El Teorema 3.2.1 garantiza que si $a_2 < b_2$, entonces $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) > 0$, y si $b_2 < a_2$, entonces $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) > 0$. Como $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0$, entonces necesariamente $a_2 = b_2$. En tal caso, $\underline{a}_1 = \bar{a}_1 = a_2 = b_2 = \bar{b}_1 = \underline{b}_1$, por lo



(a) \mathcal{B} está situado estrictamente bajo \mathcal{A} ($a_1 < b_1 \leq a_2 = b_2 \leq b_3 < a_3$).



(b) \mathcal{A} está situado estrictamente bajo \mathcal{B} ($b_1 < a_1 \leq a_2 = b_2 \leq a_3 < b_3$).

Figura 3.3: Dos posibilidades en las que $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ y uno de ellos está estrictamente situado por debajo del otro.

que $\{1\} \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \cap \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Así, como $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ e $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ son dos subintervalos cerrados de \mathbb{I} (véase [65]) y $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0$, se deduce que $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{1\}$ (si existiese un número $t_0 \in [0, 1)$ tal que o bien $t_0 \in \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ o bien $t_0 \in \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, entonces el intervalo $[t_0, 1]$ no se reduciría a un punto y estaría contenido o bien en $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ o bien en $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, lo que implicaría que dicho conjunto no sería de medida nula).

A continuación, supongamos que $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$. Como $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0$, la definición (2.5) garantiza que $a_1 + a_3 \leq b_1 + b_3$. En este caso, vamos a demostrar que $a_1 \neq b_1$. Para probarlo, supongamos, por contradicción, que $a_1 = b_1$. Si esto ocurriese, se tendría que $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$, y el Teorema 3.2.4 implicaría que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}) = 1$, lo cual es falso. Por consiguiente, $a_1 \neq b_1$. Razonando de la misma forma se llega a que $a_3 \neq b_3$. Distinguimos ahora dos casos.

- Supongamos que $a_1 < b_1$. Vamos a demostrar, por contradicción, que $a_3 > b_3$. Si suponemos que $a_3 < b_3$, entonces tendríamos que $a_1 < b_1$,

$a_2 = b_2$ y $a_3 < b_3$. En tal caso, $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \mathbb{I}$ y $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = 1$, lo cual contradice el hecho de que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = 0$. Por consiguiente, debe ocurrir que $a_3 > b_3$.

- Supongamos que $a_1 > b_1$. Vamos a demostrar, por contradicción, que $a_3 < b_3$. Para probarlo, supongamos que $a_3 > b_3$. En este caso se tendría que $a_1 > b_1$, $a_2 = b_2$ y $a_3 > b_3$. De aquí se deduce fácilmente que $\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \mathbb{I}$, por lo que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = 1$, lo cual contradice que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0$. Por consiguiente, debe ocurrir que, en este caso, $a_3 < b_3$.

Teniendo en cuenta lo anterior, solo hay dos posiciones relativas posibles entre las esquinas de los números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} : o bien $a_1 < b_1$ (en cuyo caso $a_1 < b_1 \leq a_2 = b_2 \leq b_3 < a_3$) o bien $a_1 > b_1$ (en cuyo caso $b_1 < a_1 \leq a_2 = b_2 \leq a_3 < b_3$). ■

3.3. Funciones no decrecientes sobre números difusos. Funciones de agregación difusa

Una de las propiedades más importantes en muchos resultados matemáticos y en aplicaciones en general es el carácter no decreciente de las funciones involucradas. Cualquier definición posible de *función no decreciente* debe hacer uso de una relación binaria en el conjunto subyacente que, en la mayoría de los casos, es un orden parcial total, como ocurre con el orden \leq en el intervalo \mathbb{I} . Inicialmente, como primer enfoque, se pueden considerar dos definiciones posibles en el entorno de todo el conjunto \mathcal{F} de todos los números difusos (se pueden plantear nociones similares en cualquier subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$). Dada una relación binaria arbitraria \preceq en \mathcal{F} , una función $F : \mathcal{F}^n \rightarrow \mathcal{F}$ es:

(ND1) *no decreciente* (en todos los argumentos a la vez) *con respecto a la relación binaria \preceq sobre \mathcal{F}* si

$$F(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) \preceq F(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n)$$

para cualesquiera $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n \in \mathcal{F}$ tales que $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{B}_i$ cualquiera que sea $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;

(ND_2) no decreciente en el i_0 -ésimo argumento con respecto a la relación binaria \preceq en \mathcal{F} si

$$F(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{i_0-1}, \mathcal{A}, \mathcal{C}_{i_0+1}, \dots, \mathcal{C}_n) \preceq F(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{i_0-1}, \mathcal{B}, \mathcal{C}_{i_0+1}, \dots, \mathcal{C}_n)$$

para cualquier $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_{i_0-1}, \mathcal{C}_{i_0+1}, \dots, \mathcal{C}_n \in \mathcal{F}$ tales que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.

A primera vista, parece que ambas definiciones son equivalentes porque estamos acostumbrados a manejar órdenes parciales. Sin embargo, esa afirmación es falsa: depende directamente de la relación binaria.

- Si \preceq es reflexiva, una función no decreciente (en el sentido ND_1) es no decreciente en cada argumento (en el sentido ND_2).
- Si \preceq es transitiva, una función no decreciente en cada argumento (en el sentido ND_2) también es no decreciente de manera conjunta (en el sentido ND_1).

Además, es claro que una misma función F podría ser no decreciente con respecto a una relación binaria \preceq_1 pero no serlo con respecto a otra relación binaria distinta \preceq_2 .

En esta línea de argumentación, nuestra intuición también puede engañarnos en el siguiente sentido: es natural creer que la media aritmética dada, para cualesquiera números difusos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{F}$, por:

$$F_{\text{media}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) = \frac{1}{n} (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_n), \quad (3.2)$$

es una función no decreciente. Sin embargo, dicha propiedad nuevamente depende de la relación binaria \preceq que se utilice. Esta propiedad se cumple trivialmente, por ejemplo, si consideramos la relación binaria \leq_c dada en (3.1) aunque, en este caso, solo puede considerarse en el conjunto \mathcal{T} de todos los números difusos

triangulares (pero no todo el conjunto \mathcal{F}). La relación binaria total \preceq se comporta de manera sorprendente en este contexto: es tan compleja que la media difusa es no decreciente con respecto a la relación \preceq en cada argumento ya que:

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} + \mathcal{C} \preceq \mathcal{B} + \mathcal{C}$$

para cualesquiera $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}$, pero no es conjuntamente creciente pues:

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}, \quad \mathcal{C} \preceq \mathcal{D} \quad \not\Rightarrow \quad \mathcal{A} + \mathcal{C} \preceq \mathcal{B} + \mathcal{D}$$

incluso cuando los números difusos \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , y \mathcal{D} son triangulares. Un ejemplo de este comportamiento es el siguiente.

Ejemplo 3.3.1 *Consideremos los números difusos triangulares:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (0.11/0.27/0.43), & \mathcal{B} &= (0.2/0.3/0.31), \\ \mathcal{C} &= (0.03/0.63/0.7) & \text{y} & \quad \mathcal{D} = (0.49/0.55/0.82) \end{aligned}$$

(véase la Figura 3.4). Entonces $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = 0.2 > 0 = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}})$, por lo que $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. De manera similar, $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}) = 0.6 > 0.148 \approx \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{D},\mathcal{C}})$, por lo que $\mathcal{C} \prec \mathcal{D}$.

Como $\mathcal{A} + \mathcal{C} = (0.14/0.9/1.13)$ y $\mathcal{B} + \mathcal{D} = (0.69/0.85/1.13)$, es fácil comprobar que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A}+\mathcal{C},\mathcal{B}+\mathcal{D}}) = 0 < 0.083 \approx \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B}+\mathcal{D},\mathcal{A}+\mathcal{C}})$. Por lo tanto, $\mathcal{A} + \mathcal{C} \succ \mathcal{B} + \mathcal{D}$.

Esta forma de actuar está estrechamente relacionada con el hecho de que \preceq no es transitiva ni en \mathcal{F} ni en \mathcal{T} (una discusión completa sobre esta propiedad se puede encontrar en [68]).

Estas consideraciones nos hacen intuir que, en ciertos contextos, el carácter no decreciente de las funciones involucradas puede ser una propiedad demasiado restrictiva. Este problema ya ha surgido en varios estudios matemáticos, principalmente en el contexto de las funciones de agregación. Por ejemplo, la función *moda de un conjunto de valores reales* no es ni decreciente ni creciente, como se

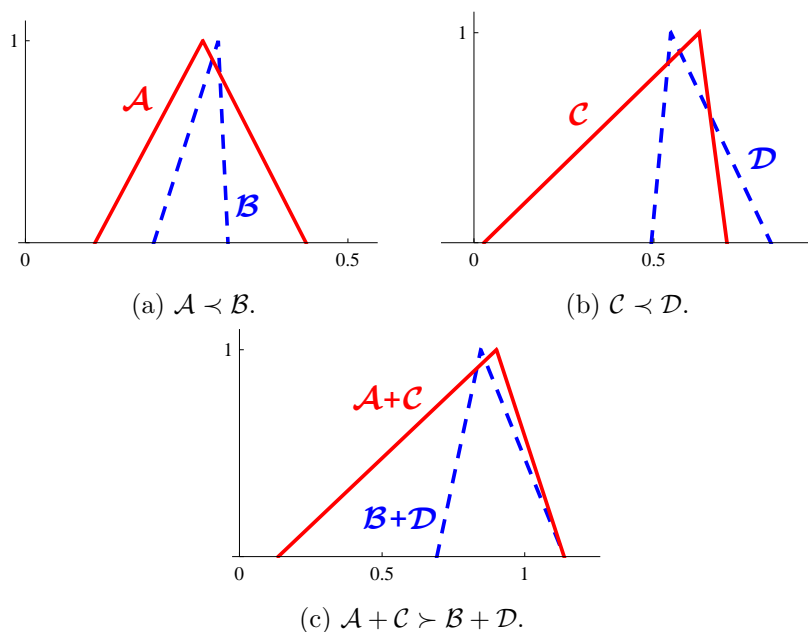


Figura 3.4: Representación gráfica de los números difusos triangulares del Ejemplo 3.3.1.

muestra a continuación:

- $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{1, 1, 2, 3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{1, 2, 3, 3\}$,
 $x_i \leq y_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$,
 siendo $\text{moda}(X) = 1 < 3 = \text{moda}(Y)$;
- $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{1, 1, 4, 4, 4\}$,
 $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} = \{1, 1, 4, 5, 6\}$,
 $x_i \leq y_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 siendo $\text{moda}(X) = 4 > 1 = \text{moda}(Y)$.

Sin embargo, la función *moda* es muy importante en muchos contextos no solo estadísticos, sino de la vida cotidiana. Teniendo en cuenta la necesidad de desarrollar aspectos teóricos para las funciones de agregación, incluida la función *moda*, Wilkin y Beliakov [83] introdujeron la noción de *monotonía débil* como se mostró en la Sección 2.4 del Capítulo 2. Después de la introducción de esta definición, Bustince *et al.* [20] extendieron esta noción a la de *monotonía*

direccional y, más tarde, Roldán López de Hierro *et al.* presentaron en [72] el concepto de *monotonía a lo largo de una curva*.

Las funciones de agregación también deben satisfacer dos condiciones de contorno utilizando los elementos mínimo y máximo absolutos del conjunto ordenado acotado. Sin embargo, el conjunto \mathcal{F} no está acotado con respecto a cualquier relación binaria razonable que extienda el orden parcial habitual \leq de los números reales (recordemos que $\mathbb{R} \subset \mathcal{F}$). En este sentido, es apropiado considerar un subconjunto acotado $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ lo más general posible. Para nuestros propósitos, en el contexto del estudio actual, solo necesitaremos manejar la monotonía y la monotonía débil en el conjunto \mathcal{T}_N formado por los números difusos triangulares cuyo soporte está contenido en un intervalo compacto $[0, N]$. La noción que se presente debe ser lo suficientemente general como para representar la ambigüedad que podemos encontrar en muchas aplicaciones y en muchos estudios empíricos. En este caso, las definiciones correspondientes que consideramos más razonables son las siguientes. Obsérvese que en ellas no suponemos que la relación binaria \preceq sea un orden parcial.

Definición 3.3.2 *Dados $n \in \mathbb{N}$, $N > 0$ y una relación binaria \preceq en \mathcal{T}_N , una función de agregación difusa en \mathcal{T}_N con respecto a \preceq es una función $F : \mathcal{T}_N^n \rightarrow \mathcal{T}_N$ que verifica las siguientes condiciones:*

- a) $F(\tilde{0}, \tilde{0}, \dots, \tilde{0}) = \tilde{0}$.
- b) $F(\tilde{N}, \tilde{N}, \dots, \tilde{N}) = \tilde{N}$.
- c) $F(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) \preceq F(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n)$ para cualesquiera $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n \in \mathcal{T}_N$ tales que $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{B}_i$ cualquiera que sea $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definición 3.3.3 *Dados $n \in \mathbb{N}$, $N > 0$ y una relación binaria \preceq en \mathcal{T}_N , una función de agregación w-difusa en \mathcal{T}_N con respecto a \preceq es una función $F : \mathcal{T}_N^n \rightarrow \mathcal{T}_N$ que verifica las siguientes condiciones:*

- a) $F(\tilde{0}, \tilde{0}, \dots, \tilde{0}) = \tilde{0}$.

- b) $F(\tilde{N}, \tilde{N}, \dots, \tilde{N}) = \tilde{N}$.
- c) Existe $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_n) \in \mathcal{T}_N^n$, $\mathcal{Z} \neq (\tilde{0}, \tilde{0}, \dots, \tilde{0})$, tal que F es \preceq -no decreciente en la dirección de \mathcal{Z} , es decir, si $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{T}_N$ y $\lambda > 0$ son tales que $\mathcal{A}_1 + \lambda\mathcal{Z}_1, \mathcal{A}_2 + \lambda\mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{A}_n + \lambda\mathcal{Z}_n \in \mathcal{T}_N$, entonces $F(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) \preceq F(\mathcal{A}_1 + \lambda\mathcal{Z}_1, \mathcal{A}_2 + \lambda\mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{A}_n + \lambda\mathcal{Z}_n)$.

Obsérvese que no se imponen las condiciones $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_i + \mathcal{Z}$ para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ en la definición de función de agregación w -difusa en \mathcal{T}_N con respecto a \preceq .

Observación 3.3.4 La letra “ w ” en “ w -difusa” está inspirada en la palabra “weak”, “débil” en español. Sin embargo, preferimos no usar el término “función de agregación difusa débil” porque generaría confusión entre muchos matemáticos: es habitual usar “débil” para generalizaciones, de tal manera que si un objeto satisface alguna propiedad, entonces necesariamente también verifica la propiedad débil correspondiente, lo cual no ocurre en el caso anterior.

Ejemplo 3.3.5 La función de agregación difusa media $F_{\text{media}} : \mathcal{T}_N^n \rightarrow \mathcal{T}_N$, dada en (3.2), es una función de agregación w -difusa en \mathcal{T}_N con respecto a \preceq (en cualquier dirección $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_n)$, donde cada \mathcal{Z}_i es un número difuso triangular no negativo), aunque no es una función de agregación difusa en \mathcal{T}_N con respecto a \preceq (como mostramos en el Ejemplo 3.3.1). Obsérvese que, en la práctica,

$$F_{\text{media}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \mid \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \mid \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i \right)$$

para cualesquiera $\{\mathcal{A}_i = (a_i/b_i/c_i)\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}_N$.

Observación 3.3.6 Para nosotros, el problema de encontrar funciones de agregación no triviales en (\mathcal{T}_N, \preceq) es un problema abierto por el momento. Los únicos ejemplos que hemos encontrado son las proyecciones $\{\pi_i : \mathcal{T}_N^n \rightarrow \mathcal{T}_N\}_{i=1}^n$ dadas por $\pi_i(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Incluso las combinaciones convexas de proyecciones no son necesariamente nuevas funciones de agregación difusa en este sentido.

3.4. Relaciones binarias difusas que preservan el producto de números difusos triangulares no negativos

Aunque la suma y la diferencia de dos números difusos triangulares es otro número difuso triangular, en general, el producto de dos números difusos triangulares no es otro número difuso triangular. Li [52] utilizó el término *parabólico* para describir el producto de dos números difusos triangulares (este autor representaba el producto como $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ aunque nosotros preferimos una notación más simple \mathcal{AB}). Es especialmente sencillo cuando los números difusos triangulares no son negativos.

Proposición 3.4.1 (Véase [52], Teorema, p. 96) Si $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3)$ y $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3)$ son dos números difusos triangulares propios y no negativos, su producto \mathcal{AB} está dado por la siguiente función de pertenencia:

$$(\mathcal{AB})(t) = \begin{cases} \frac{-\delta_2 + \sqrt{\delta_2^2 + 4\delta_1(t - \delta_3)}}{2\delta_1}, & \text{si } \delta_3 \leq t \leq \bar{d}, \\ \frac{\Delta_2 - \sqrt{\Delta_2^2 - 4\Delta_1(\Delta_3 - t)}}{2\Delta_1}, & \text{si } \bar{d} \leq t \leq \Delta_3, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (3.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (a_2 - a_1)(b_2 - b_1), & \delta_2 &= a_1(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1), \\ \delta_3 &= a_1b_1, & \bar{d} &= a_2b_2, & \Delta_3 &= a_3b_3, \\ \Delta_1 &= (a_3 - a_2)(b_3 - b_2), & \Delta_2 &= a_3(b_3 - b_2) + b_3(a_3 - a_2). \end{aligned}$$

Entonces $\delta_3 < \bar{d} < \Delta_3$ y

$$\lim_{t \rightarrow \bar{d}^-} (\mathcal{AB})(t) = \lim_{t \rightarrow \bar{d}^+} (\mathcal{AB})(t) = 1.$$

La función de pertenencia del producto \mathcal{AB} es continua en \mathbb{R} , de clase C^∞ en $\mathbb{R} \setminus \{\delta_3, \bar{d}, \Delta_3\}$, estrictamente creciente y cóncava en el intervalo (a_1b_1, a_2b_2) y estrictamente decreciente y convexa en el intervalo (a_2b_2, a_3b_3) . El conjunto de nivel

α del número difuso \mathcal{AB} es:

$$\begin{aligned} \mathcal{AB}_\alpha &= [a_1 b_1 + \alpha (a_1 (b_2 - b_1) + b_1 (a_2 - a_1)) + \alpha^2 (a_2 - a_1) (b_2 - b_1), \\ &\quad a_3 b_3 - \alpha (a_3 (b_3 - b_2) + b_3 (a_3 - a_2)) + \alpha^2 (a_3 - a_2) (b_3 - b_2)] \quad (3.4) \\ &= [\delta_3 + \delta_2 \alpha + \delta_1 \alpha^2, \Delta_3 - \Delta_2 \alpha + \Delta_1 \alpha^2]. \end{aligned}$$

Además, el núcleo de \mathcal{AB} es el conjunto $\{a_2 b_2\}$ (formado por un único punto) y su soporte es el intervalo $[a_1 b_1, a_3 b_3]$.

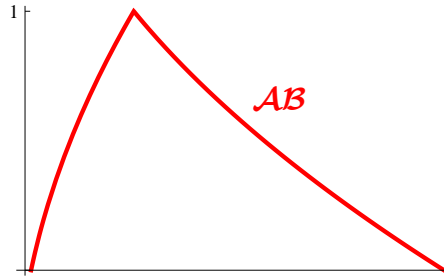


Figura 3.5: Ejemplo de la representación gráfica de un número difuso parabólico.

Li observó que los números reales $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \bar{d}, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ determinan completamente el producto \mathcal{AB} , por lo que decidió representar \mathcal{AB} mediante

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3 / \bar{d} / \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3).$$

Observemos que el resultado previo es válido cuando \mathcal{A} y \mathcal{B} son, de hecho, números difusos triangulares propios, es decir, cuando $a_1 < a_2 < a_3$ y $b_1 < b_2 < b_3$, ya que, si suponemos que $\mathcal{A} = (r/r/r)$, entonces $\delta_1 = \Delta_1 = 0$, por lo que la expresión (3.3) carecería de sentido (en este caso, cuando \mathcal{A} es un número real, el producto \mathcal{AB} es un número difuso triangular, pero no es parabólico).

DEMOSTRACIÓN: Como \mathcal{A} y \mathcal{B} son no negativos, entonces $a_1 \geq 0$ y $b_1 \geq 0$, por lo que $0 \leq \underline{a}_\alpha \leq \bar{a}_\alpha$ y $0 \leq \underline{b}_\alpha \leq \bar{b}_\alpha$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{I}$. Como los números involucrados son no negativos, $0 \leq \underline{a}_\alpha \underline{b}_\alpha \leq \underline{a}_\alpha \bar{b}_\alpha \leq \bar{a}_\alpha \bar{b}_\alpha$ y $0 \leq \underline{a}_\alpha \underline{b}_\alpha \leq \bar{a}_\alpha \underline{b}_\alpha \leq \bar{a}_\alpha \bar{b}_\alpha$. Entonces, por (2.4),

$$\begin{aligned} (\mathcal{AB})_\alpha &= [\text{mín} \{ \underline{a}_\alpha \underline{b}_\alpha, \underline{a}_\alpha \bar{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha \underline{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha \bar{b}_\alpha \}, \text{máx} \{ \underline{a}_\alpha \underline{b}_\alpha, \underline{a}_\alpha \bar{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha \underline{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha \bar{b}_\alpha \}] \\ &= [\underline{a}_\alpha \underline{b}_\alpha, \bar{a}_\alpha \bar{b}_\alpha]. \end{aligned}$$

Como consecuencia, según (2.1) y (2.2),

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{A}\mathcal{B}}_\alpha &= \underline{a}_\alpha \underline{b}_\alpha = (a_1 + \alpha(a_2 - a_1))(b_1 + \alpha(b_2 - b_1)) \\ &= a_1 b_1 + \alpha(a_1(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1)) + \alpha^2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \\ &= \delta_3 + \delta_2 \alpha + \delta_1 \alpha^2.\end{aligned}$$

Consideremos la función $f(\alpha) = \underline{\mathcal{A}\mathcal{B}}_\alpha = \delta_3 + \delta_2 \alpha + \delta_1 \alpha^2$ definida en \mathbb{I} . Como $f'(\alpha) = \delta_2 + 2\delta_1 \alpha \geq 2\delta_1 \alpha > 0$ para cualquier $\alpha \in (0, 1]$, la función f es una biyección estrictamente creciente de \mathbb{I} en el intervalo $[\delta_3, \delta_3 + \delta_2 + \delta_1]$, siendo

$$\begin{aligned}\delta_3 + \delta_2 + \delta_1 &= a_1 b_1 + a_1(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1) + (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \\ &= a_2 b_2 = \bar{d}.\end{aligned}$$

Como f es una biyección de $[0, 1]$ en $[\delta_3, \bar{d}] = [a_1 b_1, a_2 b_2]$, para cada $t \in [a_1 b_1, a_2 b_2]$, la ecuación $\underline{\mathcal{A}\mathcal{B}}_\alpha = f(\alpha) = t$ tiene una única solución, que es

$$(\underline{\mathcal{A}\mathcal{B}})(t) = \alpha = \frac{-\delta_2 + \sqrt{\delta_2^2 - 4\delta_1(\delta_3 - t)}}{2\delta_1} = \frac{-\delta_2 + \sqrt{\delta_2^2 + 4\delta_1(t - \delta_3)}}{2\delta_1},$$

que justifica la primera parte de (3.3). Un argumento similar muestra que $\overline{\mathcal{A}\mathcal{B}}_\alpha = \Delta_3 - \Delta_2 \alpha + \Delta_1 \alpha^2$, lo que nos lleva a la segunda parte de (3.3). Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-\delta_2 + \sqrt{\delta_2^2 + 4\delta_1(t - \delta_3)}}{2\delta_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{\delta_2^2 + 4\delta_1(t - \delta_3)}} > 0$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{-\delta_2 + \sqrt{\delta_2^2 + 4\delta_1(t - \delta_3)}}{2\delta_1} \right) = \frac{-2\delta_1}{(\delta_2^2 + 4\delta_1(t - \delta_3))^{3/2}} < 0$$

para cualquier $t \in (\delta_3, \bar{d}]$, la función $t \mapsto (\underline{\mathcal{A}\mathcal{B}})(t)$ es continua en $(-\infty, \bar{d}]$ y es estrictamente creciente y cóncava en $(a_1 b_1, a_2 b_2)$. De igual forma puede demostrarse que es continua en $[\bar{d}, +\infty)$ y es estrictamente decreciente y convexa en $(a_2 b_2, a_3 b_3)$. ■

El resultado anterior significa que si \mathcal{A} y \mathcal{B} son números difusos triangulares propios y no negativos, su producto $\mathcal{A}\mathcal{B}$ no es un número difuso triangular sino

un número difuso *parabólico* (en el sentido de que sus α -cortes están dados por funciones cuadráticas). Por consiguiente, la función:

$$F_{\text{producto}} : \mathcal{T}_N \times \mathcal{T}_N \rightarrow \mathcal{F}, \quad F(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{A}\mathcal{B}$$

no puede ser una función de agregación difusa en \mathcal{T}_N con respecto a \preceq ya que:

1. su imagen no está incluida en \mathcal{T}_N ;
2. el soporte de $\mathcal{A}\mathcal{B}$, que está incluido en $[0, N^2]$, puede no estar incluido en el intervalo $[0, N]$ (salvo que $N \leq 1$); y
3. no puede ser considerada como no decreciente con respecto a la relación binaria total \preceq .

En el Ejemplo 3.4.3 mostraremos números difusos triangulares \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} y \mathcal{D} tales que $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ y $\mathcal{C} \preceq \mathcal{D}$ (en realidad, $\mathcal{C} = \mathcal{D}$) pero $\mathcal{A}\mathcal{C} \not\preceq \mathcal{B}\mathcal{D}$. Sin embargo, el siguiente resultado describe un tipo de no decrecimiento de la función F_{producto} : en la mayoría de los casos, si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{T}_N$ verifican $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A}\mathcal{C} \preceq \mathcal{B}\mathcal{C}$.

Teorema 3.4.2 Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{T}_N$ y $\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{N'}$ tres números difusos triangulares propios y no negativos tales que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.

1. Si \mathcal{A} está estrictamente bajo \mathcal{B} o viceversa (los casos (a) y (b) del Teorema 3.2.5), entonces $\mathcal{A}\mathcal{C} \preceq \mathcal{B}\mathcal{C}$ si, y solo si, $a_1c_1 + a_3c_3 \leq b_1c_1 + b_3c_3$.
2. En cualquier otro caso, $\mathcal{A}\mathcal{C} \preceq \mathcal{B}\mathcal{C}$.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, demostremos que $\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{A}\mathcal{C}, \mathcal{B}\mathcal{C}}$. Sea $\alpha \in \mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ un valor arbitrario. Por (2.1) y (2.2),

$$0 \leq a_1 + \alpha(a_2 - a_1) = \underline{a}_\alpha \leq \underline{b}_\alpha = b_1 + \alpha(b_2 - b_1), \quad (3.5)$$

$$0 \leq a_3 - \alpha(a_3 - a_2) \leq \bar{a}_\alpha \leq \bar{b}_\alpha = a_3 - \alpha(a_3 - a_2). \quad (3.6)$$

Como \mathcal{C} es no negativo:

$$0 \leq c_1 = \underline{c}_0 \leq \underline{c}_\alpha = c_1 + \alpha (c_2 - c_1), \quad (3.7)$$

$$0 \leq c_2 = \bar{c}_0 \leq \bar{c}_\alpha = c_3 - \alpha (c_3 - c_2). \quad (3.8)$$

Multiplicando (3.5) y (3.7),

$$[a_1 + \alpha (a_2 - a_1)] [c_1 + \alpha (c_2 - c_1)] \leq [b_1 + \alpha (b_2 - b_1)] [c_1 + \alpha (c_2 - c_1)],$$

lo cual es equivalente a:

$$\begin{aligned} & a_1 c_1 + \alpha (a_1 (c_2 - c_1) + c_1 (a_2 - a_1)) + \alpha^2 (a_2 - a_1) (c_2 - c_1) \\ & \leq b_1 c_1 + \alpha (b_1 (c_2 - c_1) + c_1 (b_2 - b_1)) + \alpha^2 (b_2 - b_1) (c_2 - c_1). \end{aligned}$$

Recordando (3.4), esta desigualdad significa que $\underline{\mathcal{AC}}_\alpha \leq \underline{\mathcal{BC}}_\alpha$. De manera similar, multiplicando (3.6) y (3.8), resulta que:

$$[a_3 - \alpha (a_3 - a_2)] [c_3 - \alpha (c_3 - c_2)] \leq [b_3 - \alpha (b_3 - b_2)] [c_3 - \alpha (c_3 - c_2)],$$

que es equivalente a:

$$\begin{aligned} & a_3 c_3 - \alpha [a_3 (c_3 - c_2) + c_3 (a_3 - a_2)] + \alpha^2 (a_3 - a_2) (c_3 - c_2) \\ & \leq b_3 c_3 - \alpha [b_3 (c_3 - c_2) + c_3 (b_3 - b_2)] + \alpha^2 (b_3 - b_2) (c_3 - c_2). \end{aligned}$$

De nuevo, (3.4) implica que $\overline{\mathcal{AC}}_\alpha \leq \overline{\mathcal{BC}}_\alpha$, lo cual demuestra que $\alpha \in \mathbb{I}_{\mathcal{AC}, \mathcal{BC}}$. Esto concluye que $\mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{AC}, \mathcal{BC}}$.

A continuación, veamos que $\mathbb{I}_{\mathcal{AC}, \mathcal{BC}} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \setminus \{0\}$. En efecto, sea $\alpha \in \mathbb{I}_{\mathcal{AC}, \mathcal{BC}} \setminus \{0\}$, es decir, $\underline{\mathcal{AC}}_\alpha \leq \underline{\mathcal{BC}}_\alpha$ y $\overline{\mathcal{AC}}_\alpha \leq \overline{\mathcal{BC}}_\alpha$. Teniendo en cuenta que $c_2 - c_1 > 0$ y $\alpha > 0$, deducimos que

$$0 \leq c_1 < c_1 + \alpha (c_2 - c_1) = \underline{c}_\alpha \leq \bar{c}_\alpha = c_3 - \alpha (c_3 - c_2).$$

Como consecuencia,

$$c_1 + \alpha (c_2 - c_1) > 0 \quad \text{y} \quad c_3 - \alpha (c_3 - c_2) > 0.$$

Utilizando (3.4),

$$\begin{aligned} a_1c_1 + \alpha(a_1(c_2 - c_1) + c_1(a_2 - a_1)) + \alpha^2(a_2 - a_1)(c_2 - c_1) &= \underline{\mathcal{AC}}_\alpha \\ &\leq \underline{\mathcal{BC}}_\alpha = b_1c_1 + \alpha(b_1(c_2 - c_1) + c_1(b_2 - b_1)) + \alpha^2(b_2 - b_1)(c_2 - c_1). \end{aligned}$$

Reorganizando los términos involucrados, obtenemos que:

$$[a_1 + \alpha(a_2 - a_1)][c_1 + \alpha(c_2 - c_1)] \leq [b_1 + \alpha(b_2 - b_1)][c_1 + \alpha(c_2 - c_1)],$$

y como $c_1 + \alpha(c_2 - c_1) > 0$, concluimos que:

$$\underline{a}_\alpha = a_1 + \alpha(a_2 - a_1) \leq b_1 + \alpha(b_2 - b_1) = \bar{b}_\alpha.$$

Con argumentos análogos demostraríamos que $\bar{a}_\alpha \leq \bar{b}_\alpha$, por lo que $\alpha \in \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \setminus \{0\}$.

Uniendo las inclusiones

$$\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{AC},\mathcal{BC}} \quad \text{y} \quad \mathbb{I}_{\mathcal{AC},\mathcal{BC}} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \setminus \{0\}$$

concluimos que $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \setminus \{0\} = \mathbb{I}_{\mathcal{AC},\mathcal{BC}} \setminus \{0\}$. Como un único punto no modifica la medida euclídea de un subconjunto de números reales, hemos demostrado que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{AC},\mathcal{BC}})$. Intercambiando los papeles de \mathcal{A} y \mathcal{B} , también tenemos que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{BC},\mathcal{AC}})$.

A continuación, supongamos que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. Si $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0$, el Teorema 3.2.5 garantiza que $a_2 = b_2$, $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{1\}$ y \mathcal{A} está estrictamente bajo \mathcal{B} o viceversa, lo cual corresponde a los casos (a) y (b) en dicho teorema. Por lo tanto, $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{AC},\mathcal{BC}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = 0$ y $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{BC},\mathcal{AC}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 0$ y $\{1\} \subseteq \mathbb{I}_{\mathcal{AC},\mathcal{BC}} \cap \mathbb{I}_{\mathcal{BC},\mathcal{AC}}$ ya que el núcleo común de \mathcal{AC} y \mathcal{BC} es $\{a_2c_2\} = \{b_2c_2\}$. Como:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{AC}}_0 &= a_1c_1, \quad \underline{\mathcal{AC}}_1 = \overline{\mathcal{AC}}_1 = a_2c_2, \quad \overline{\mathcal{AC}}_0 = a_3c_3, \\ \underline{\mathcal{BC}}_0 &= b_1c_1, \quad \underline{\mathcal{BC}}_1 = \overline{\mathcal{BC}}_1 = b_2c_2, \quad \overline{\mathcal{BC}}_0 = b_3c_3, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{AC} \preceq \mathcal{BC} &\Leftrightarrow \underline{\mathcal{AC}}_0 + \underline{\mathcal{AC}}_1 + \overline{\mathcal{AC}}_1 + \overline{\mathcal{AC}}_0 \leq \underline{\mathcal{BC}}_0 + \underline{\mathcal{BC}}_1 + \overline{\mathcal{BC}}_1 + \overline{\mathcal{BC}}_0 \\ &\Leftrightarrow a_1c_1 + 2a_2c_2 + a_3c_3 \leq b_1c_1 + 2b_2c_2 + b_3c_3 \\ &\Leftrightarrow a_1c_1 + a_3c_3 \leq b_1c_1 + b_3c_3. \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) > 0$ o $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) > 0$. Como $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, entonces $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \geq \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}})$ por lo que, en ambos casos $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) > 0$. Como consecuencia, $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{AC},\mathcal{BC}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) > 0$ y también $\mu(\mathbb{I}_{\mathcal{AC},\mathcal{BC}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \geq \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = \mu(\mathbb{I}_{\mathcal{BC},\mathcal{AC}})$. Por lo tanto $\mathcal{AC} \preceq \mathcal{BC}$. ■

El primer apartado en el resultado anterior significa que es posible que ocurra que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ y, al mismo tiempo, $\mathcal{AC} \not\preceq \mathcal{BC}$. Esto solo puede ocurrir cuando un número difuso se coloca estrictamente debajo del otro, con un núcleo común, verificándose que $a_1 + a_3 \leq b_1 + b_3$ aunque $a_1c_1 + a_3c_3 > b_1c_1 + b_3c_3$, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4.3 Consideremos los números difusos triangulares (propios y no negativos):

$$\mathcal{A} = (0,345/0,5/0,65), \quad \mathcal{B} = (0,4/0,5/0,6) \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = (0,5/0,75/1).$$

Entonces $\mathbb{I}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \mathbb{I}_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{1\}$, \mathcal{B} está estrictamente bajo \mathcal{A} (véase la Figura 3.6), y sus esquinas llevan a que $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. También $\tilde{0} \prec \mathcal{C}$. Sus productos son, utilizando la notación de Li:

$$\begin{aligned} \mathcal{AC} &= \left(\frac{31}{800}, \frac{131}{800}, \frac{69}{400} \middle/ \frac{3}{8} \middle/ \frac{3}{80}, \frac{5}{16}, \frac{13}{20} \right) \quad \text{y} \\ \mathcal{BC} &= \left(\frac{1}{40}, \frac{3}{20}, \frac{1}{5} \middle/ \frac{3}{8} \middle/ \frac{1}{40}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5} \right). \end{aligned}$$

Entonces $\mathbb{I}_{\mathcal{AC},\mathcal{BC}} = \mathbb{I}_{\mathcal{BC},\mathcal{AC}} = \{1\}$, \mathcal{BC} está estrictamente bajo \mathcal{AC} y

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{AC}}_0 + \overline{\mathcal{AC}}_0 + \overline{\mathcal{AC}}_1 + \underline{\mathcal{AC}}_1 &= \frac{69}{400} + 2 \frac{3}{8} + \frac{13}{20} = \frac{629}{400} = 1.5725, \\ \underline{\mathcal{BC}}_0 + \overline{\mathcal{BC}}_0 + \overline{\mathcal{BC}}_1 + \underline{\mathcal{BC}}_1 &= \frac{1}{5} + 2 \frac{3}{8} + \frac{3}{5} = \frac{31}{20} = 1.55. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\mathcal{BC} \prec \mathcal{AC}$, lo que significa que $\mathcal{AC} \not\preceq \mathcal{BC}$.

Teniendo en cuenta el Teorema 3.2.5, solo hay dos posibilidades en las que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ y $\mathcal{AC} \not\preceq \mathcal{BC}$.

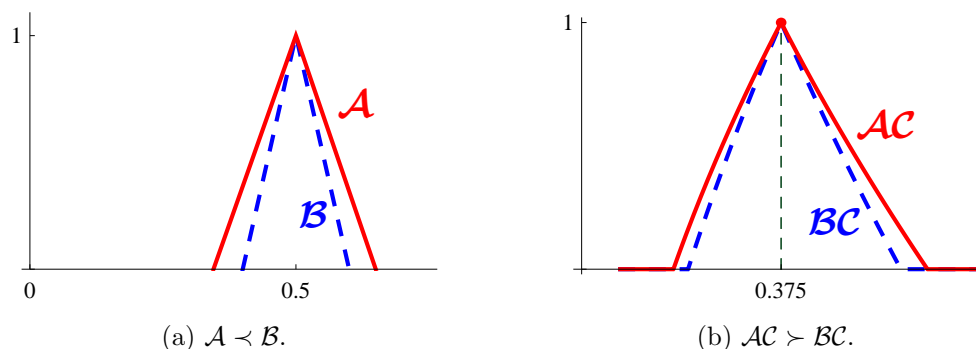


Figura 3.6: Representación gráfica de los números difusos del Ejemplo 3.4.3 (\mathcal{A} y \mathcal{B} son triangulares; \mathcal{AC} y \mathcal{BC} , parabólicos).

- Si $a_1 < b_1 \leq a_2 = b_2 \leq b_3 < a_3$, entonces

$$\begin{aligned} a_1 c_1 + a_3 c_3 \leq b_1 c_1 + b_3 c_3 &\Leftrightarrow (a_3 - b_3) c_3 \leq (b_1 - a_1) c_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{a_3 - b_3}{b_1 - a_1} \leq \frac{c_1}{c_3} \Leftrightarrow \left| \frac{b_3 - a_3}{b_1 - a_1} \right| \leq \frac{c_1}{c_3}. \end{aligned}$$

Obsérvese que si $c_1 = 0$, este caso es imposible.

- Si $b_1 < a_1 \leq a_2 = b_2 \leq a_3 < b_3$, entonces

$$\begin{aligned} a_1 c_1 + a_3 c_3 \leq b_1 c_1 + b_3 c_3 &\Leftrightarrow (a_1 - b_1) c_1 \leq (b_3 - a_3) c_3 \\ &\Leftrightarrow \frac{c_1}{c_3} \leq \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1} \Leftrightarrow \frac{c_1}{c_3} \leq \left| \frac{b_3 - a_3}{b_1 - a_1} \right|. \end{aligned}$$

Obsérvese que si $c_1 = 0$, este caso se verificaría siempre.

Como consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.4.4 Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{T}_N$ y $\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{N'}$ tres números difusos propios y no negativos tales que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.

- Si \mathcal{A} está estrictamente debajo de \mathcal{B} o viceversa (casos (a) y (b) en el Teorema 3.2.5), entonces $\mathcal{AC} \preceq \mathcal{BC}$ si, y solo si,

$$\begin{cases} \left| \frac{b_3 - a_3}{b_1 - a_1} \right| \leq \frac{c_1}{c_3}, & \text{si } a_1 < b_1, \\ \frac{c_1}{c_3} \leq \left| \frac{b_3 - a_3}{b_1 - a_1} \right|, & \text{si } a_1 > b_1. \end{cases}$$

- En cualquier otro caso, $\mathcal{AC} \preceq \mathcal{BC}$.

Una interpretación gráfica de las diferencias involucradas en los cocientes del Corolario 3.4.4 nos lleva a considerar los segmentos horizontales marcados en la Figura 3.7.

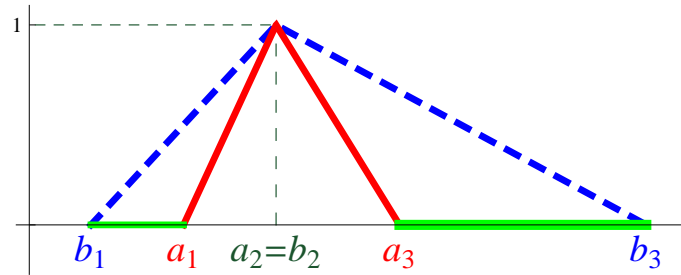


Figura 3.7: Representación gráfica de las diferencias consideradas en el Corolario 3.4.4.

3.5. Toma de decisiones multicriterio a partir de información difusa y considerando un ranking difuso

El problema de la toma de decisiones multicriterio ha sido considerado por muchos autores a lo largo de los últimos años. Es habitual plantear el problema de la siguiente manera (utilizamos una ligera modificación de las notaciones y de los algoritmos introducidos en Li [52]).

Consideremos el problema de clasificar m alternativas, denotadas por A_1, A_2, \dots, A_m de la “peor” a la “mejor” de ellas. A un comité de n expertos (o jueces), representados por E_1, E_2, \dots, E_n , se les pregunta sobre los ℓ criterios de decisión C_1, C_2, \dots, C_ℓ . Sea $\mathcal{A}_{ij}^k = (\alpha_{ij}^k / b_{ij}^k / c_{ij}^k)$ un número difuso triangular propio y positivo que represente la valoración difusa asignada a alternativa A_i por el experto E_k para el criterio C_j (donde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ y $k \in \{1, 2, \dots, n\}$). De la misma manera, sea $\mathcal{B}_j^k = (\alpha_j^k / \beta_j^k / \gamma_j^k)$ el peso difuso dado

por el experto E_k respecto del criterio C_j , es decir, un número difuso triangular positivo que describe la importancia relativa del criterio C_j con respecto al objetivo general para el experto E_k . Supongamos que $\mathcal{A}_{ij}^k \in \mathcal{T}_N$ y $\mathcal{B}_j^k \in \mathcal{T}_{N'}$ donde $N, N' > 0$ son valores suficientemente grandes.

En las siguientes líneas, describimos el algoritmo general para llevar a cabo la toma de decisiones grupales en este contexto, describiendo sus pasos.

- **Paso 1.** Agregar las valoraciones difusas dados por todos los expertos a cada alternativa A_i siguiendo cada criterio C_j mediante una función de agregación w-difusa F_1 :

$$\mathcal{A}_{ij} = F_1(\mathcal{A}_{ij}^1, \mathcal{A}_{ij}^2, \dots, \mathcal{A}_{ij}^n).$$

- **Paso 2.** De manera similar, agregar las ponderaciones difusas dadas por todos los expertos a cada criterio C_j mediante otra función de agregación w-difusa F_2 :

$$\mathcal{B}_j = F_2(\mathcal{B}_j^1, \mathcal{B}_j^2, \dots, \mathcal{B}_j^n).$$

- **Paso 3.** Agregar cada valoración difusa con sus respectivos pesos difusos agregados mediante la multiplicación de números difusos (según la forma de multiplicar que más interese al investigador, ya sea \cdot , \odot ó \otimes , véase [52]).

$$\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{A}_{ij} \mathcal{B}_j.$$

- **Paso 4.** Asociar a cada alternativa A_i su valoración difusa global considerando una nueva agregación w-difusa F_3 de información:

$$\mathcal{D}_i = F_3(\mathcal{C}_{i1}, \mathcal{C}_{i2}, \dots, \mathcal{C}_{i\ell}).$$

- **Paso 5.** Ordenar los números difusos $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$ obtenidos en el paso anterior utilizando la relación binaria \preceq (introducida en la Definición 2.3.1). Si existiese $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ es tal que $\mathcal{D}_i \prec \mathcal{D}_{i_0}$ para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, entonces elegiríamos A_{i_0} como la mejor alternativa.

Los pasos previos 1 y 2 son especialmente simples cuando elegimos la función de agregación media F_{media} . En este caso,

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathcal{A}_{ij}^k = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{ij}^k / \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_{ij}^k / \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \right) \quad \text{y}$$

$$\mathcal{B}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathcal{B}_j^k = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_j^k / \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \beta_j^k / \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma_j^k \right).$$

Obsérvese que si las m alternativas A_1, A_2, \dots, A_m están ordenadas de “peor” a “mejor”, las opiniones favorables de los expertos deben expresarse como números difusos triangulares positivos cuyos soportes deben ser mayores que los soportes correspondientes a las opiniones desfavorables. En tal caso, la mejor alternativa procede de los números difusos $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$ que se clasifican u ordenan por la relación binaria \preceq como el máximo. Si las m alternativas A_1, A_2, \dots, A_m se ordenan de “mejor” a “peor”, el procedimiento es el contrario: debemos buscar un mínimo.

Li [52] introdujo un proceso similar al que hemos descrito. Sin embargo, en los pasos finales, este autor consideró la media

$$\bar{\mathcal{D}} = \frac{1}{n} \odot (\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_m)$$

y las diferencias $\{\mathcal{D}_i \ominus \bar{\mathcal{D}}\}_{i=1}^m$, cuyas funciones de pertenencia no son triangulares sino parabólicas. Posteriormente, el procedimiento concluyó utilizando un índice de clasificación (en concreto, una relación de preferencia), por lo que la información difusa se redujo a números reales.

Desde nuestro punto de vista, es mejor clasificar los números difusos $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$ mediante una relación binaria difusa genuina, por lo que hemos propuesto utilizar la relación binaria difusa \preceq . En tal caso, evitamos la pérdida de información que conlleva descender al plano de los números reales.

Para ilustrar la metodología explicada, Li describió un ejemplo en el que dos jueces J_1 y J_2 (nuestros expertos E_1 y E_2) consideraron dos alternativas A_1 y A_2 valorando tres criterios, C_1, C_2 y C_3 , y sus correspondientes pesos W_1, W_2 y W_3 . Se utilizaron los datos difusos que aparecen en las Tablas 3.1, 3.2 y 3.3.

Tabla 3.1: Valoraciones difusas de alternativas y criterios según el experto E_1 .

Alternativas	Criterios		
	C_1	C_2	C_3
A_1	$\mathcal{A}_{11}^1 = (1/3/5)$	$\mathcal{A}_{12}^1 = (4/4/6)$	$\mathcal{A}_{13}^1 = (3/6/7)$
A_2	$\mathcal{A}_{21}^1 = (2/5/6)$	$\mathcal{A}_{22}^1 = (5/7/8)$	$\mathcal{A}_{23}^1 = (1/2/4)$

Tabla 3.2: Valoraciones difusas de alternativas y criterios según el experto E_2 .

Alternativas	Criterios		
	C_1	C_2	C_3
A_1	$\mathcal{A}_{11}^2 = (5/6/6)$	$\mathcal{A}_{12}^2 = (2/5/6)$	$\mathcal{A}_{13}^2 = (5/8/9)$
A_2	$\mathcal{A}_{21}^2 = (1/2/2)$	$\mathcal{A}_{22}^2 = (1/10/12)$	$\mathcal{A}_{23}^2 = (3/7/9)$

Tabla 3.3: Pesos difusos atribuidos a cada criterio por cada experto.

Criterios	Expertos	
	E_1	E_2
C_1	$\mathcal{B}_1^1 = (0.2/0.3/0.5)$	$\mathcal{B}_1^2 = (0.3/0.5/0.5)$
C_2	$\mathcal{B}_2^1 = (0.3/0.6/0.7)$	$\mathcal{B}_2^2 = (0.2/0.3/0.4)$
C_3	$\mathcal{B}_3^1 = (0.1/0.1/0.2)$	$\mathcal{B}_3^2 = (0.1/0.2/0.3)$

Obsérvese que $\mathcal{A}_{ij}^k \in \mathcal{T}_{12}$ y que $\mathcal{B}_j^k \in \mathcal{T}_1$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ y $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, por lo que podemos tomar $N = 12$ y $N' = 1$ en el Teorema 3.4.2. De hecho, tanto las valoraciones difusas como los pesos difusos son estrictamente positivos ya que $\text{sop}(\mathcal{A}_{ij}^k) \subseteq [1, 12]$ y $\text{sop}(\mathcal{B}_j^k) \subseteq [0.1, 0.7]$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, cada $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ y cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Después de algunos pasos, Li resumió la información difusa mediante dos números difusos parabólicos, denotados por 1.625_{QF} y 1.967_{QF} , cuyas funciones de pertenencia correspondientes resultaron, aproximadamente, las siguientes

(véase la Figura 3.8, donde 1.625_{QF} se representa en color rojo y 1.967_{QF} , en color azul).

$$1.625_{QF}(x) \approx \begin{cases} -1.70444 + 2.22222\sqrt{0.021289 + 0.9x}, & \text{si } 0.63 \leq x \leq 1.625, \\ 5.1087 - 4.34783\sqrt{0.147825 + 0.46x}, & \text{si } 1.625 < x \leq 2.68, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso;} \end{cases}$$

$$1.967_{QF}(x) \approx \begin{cases} -0.996765 + 0.980392\sqrt{0.136079 + 2.04x}, & \text{si } 0.44 \leq x \leq 1.967, \\ 4.5206 - 3.74532\sqrt{-0.166511 + 0.534x}, & \text{si } 1.967 < x \leq 3.04, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

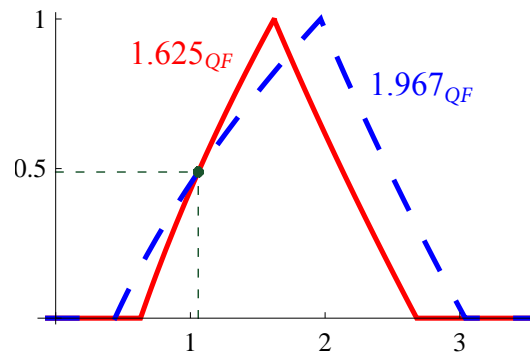


Figura 3.8: Representación gráfica de los números difusos parabólicos 1.625_{QF} (en color rojo) y 1.967_{QF} (en color azul).

El punto en el que los lados izquierdos de los números difusos 1.625_{QF} y 1.967_{QF} se cortan, es aproximadamente, $(1.0584, 0.4885)$, pero sus lados derechos no tienen ningún punto en común. La Figura 3.8 muestra que $\mathbb{I}_{1.625_{QF}, 1.967_{QF}} \approx [0.4885, 1]$ aunque $\mathbb{I}_{1.967_{QF}, 1.625_{QF}} = \emptyset$. Por consiguiente $1.625_{QF} \prec 1.967_{QF}$. Dado que 1.625_{QF} corresponde a la alternativa A_1 y 1.967_{QF} corresponde a A_2 , concluimos que la alternativa A_2 es la que debe elegirse.

Desde nuestro punto de vista, una metodología de toma de decisiones multicriterio es mejor cuando produce decisiones de acuerdo con la intuición humana. Por lo tanto, es muy importante verificar que una nueva propuesta cumpla las propiedades más razonables posibles. En esta línea, presentamos la siguiente propiedad que garantiza que cuando todos los expertos acuerden que una alternativa A_{i_0} es la mejor, entonces el procedimiento confirma que su número difuso correspondiente \mathcal{D}_{i_0} es el mayor. Para expresar que una opción es mejor, usamos la siguiente notación: dados $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3), \mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3) \in \mathcal{T}$, escribiremos $\mathcal{A} <_c \mathcal{B}$ cuando cada esquina de \mathcal{A} es estrictamente menor que la esquina correspondiente de \mathcal{B} , es decir, $a_i < b_i$ para cualquier $i \in \{1, 2, 3\}$. Observe que $\tilde{0} <_c \mathcal{A}$ solo significa que la esquina menor de \mathcal{A} es mayor que 0 (y, entonces, todas las esquinas de \mathcal{A} son positivas). Usando esta notación, el experto E_k prefiere la alternativa A_{i_2} en lugar de la alternativa A_{i_1} bajo todos los criterios C_j cuando $\mathcal{A}_{i_1j}^k <_c \mathcal{A}_{i_2j}^k$ para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. Este es el caso del siguiente resultado, en el que asumimos que las funciones de agregación w-difusas involucradas F_1, F_2 and F_3 en los pasos 1, 2 y 4, respectivamente, son la media difusa correspondiente.

Teorema 3.5.1 Bajo el marco general del problema de toma de decisiones multicriterio en el contexto difuso explicado al principio de esta sección, supongamos que cada evaluación difusa \mathcal{A}_{ij}^k y cada peso difuso \mathcal{B}_j^k es un número difuso triangular propio en \mathcal{T}_1 verificando $\tilde{0} <_c \mathcal{A}_{ij}^k$ y $\tilde{0} <_c \mathcal{B}_j^k$. Si existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que

$$\mathcal{A}_{ij}^k <_c \mathcal{A}_{i_0j}^k$$

para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, cualquier $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ y cualquier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$\mathcal{D}_i < \mathcal{D}_{i_0} \quad \text{para cualquier } i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}.$$

La propiedad anterior garantiza que si todos los expertos prefieren una alternativa particular bajo todos los criterios, entonces la metodología propuesta seleccionará dicha alternativa como la mejor. Obsérvese que la dificultad para

probar esta afirmación radica en el hecho de que los números difusos $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^m$ no son triangulares sino sumas de números difusos parabólicos, lo que determina una familia muy amplia de números difusos curvos bastante generales.

DEMOSTRACIÓN: Para fijar la notación, supongamos que $\mathcal{A}_{ij}^k = (a_{ij}^k/b_{ij}^k/c_{ij}^k)$, $\mathcal{B}_j^k = (\alpha_j^k/\beta_j^k/\gamma_j^k) \in \mathcal{T}_1$ son números difusos triangulares tales que $0 < a_{ij}^k < b_{ij}^k < c_{ij}^k \leq 1$ y que $0 < \alpha_j^k < \beta_j^k < \gamma_j^k \leq 1$. Sean

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathcal{A}_{ij}^k \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathcal{B}_j^k.$$

Como $\mathcal{A}_{ij}^k, \mathcal{B}_j^k \in \mathcal{T}_1$, entonces $\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{B}_j \in \mathcal{T}_1$. Claramente estos números verifican $\tilde{0} <_c \mathcal{A}_{ij}$ y $\tilde{0} <_c \mathcal{B}_j$ para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. Denotemos $\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{A}_{ij}\mathcal{B}_j$. Entonces \mathcal{C}_{ij} es un número difuso parabólico cuyo soporte está incluido en \mathbb{I} (ya que $\text{sop}(\mathcal{A}_{ij}), \text{sop}(\mathcal{B}_j) \subseteq \mathbb{I}$). Para probar que, para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$,

$$\frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \mathcal{A}_{ij}\mathcal{B}_j = \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \mathcal{C}_{ij} = \mathcal{D}_i \prec \mathcal{D}_{i_0} = \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \mathcal{C}_{i_0j} = \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \mathcal{A}_{i_0j}\mathcal{B}_j,$$

vamos a comprobar que

$$\mathcal{A}_{i_1}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_{i_2}\mathcal{B}_2 + \dots + \mathcal{A}_{i_\ell}\mathcal{B}_\ell \prec \mathcal{A}_{i_{01}}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_{i_{02}}\mathcal{B}_2 + \dots + \mathcal{A}_{i_{0\ell}}\mathcal{B}_\ell.$$

Para hacerlo, notemos $\mathcal{A}_{ij} = (a_{ij}/b_{ij}/c_{ij})$, $\mathcal{B}_j = (\alpha_j/\beta_j/\gamma_j) \in \mathcal{T}_1$. Como $\mathcal{A}_{ij}^k <_c \mathcal{A}_{i_0j}^k$, entonces

$$a_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{ij}^k < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{i_0j}^k = a_{i_0j},$$

por lo que $a_{ij} < a_{i_0j}$, $b_{ij} < b_{i_0j}$ y $c_{ij} < c_{i_0j}$, esto es, $\mathcal{A}_{ij} <_c \mathcal{A}_{i_0j}$ para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$ y cualquier $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. Además, $0 < \alpha_j < \beta_j < \gamma_j$.

Como en la demostración de la Proposición 3.4.1, observemos que $(\mathcal{A}_{ij}\mathcal{B}_j)_\alpha = \left[\underline{\mathcal{A}_{ij}}_\alpha \underline{\mathcal{B}_j}_\alpha, \overline{\mathcal{A}_{ij}}_\alpha \overline{\mathcal{B}_j}_\alpha \right]$. Por lo tanto, para cualquier $\alpha \in \mathbb{I}$ y cualquier

$i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, deducimos que:

$$\begin{aligned}
\ell \mathcal{D}_{i\alpha} &= \frac{\mathcal{A}_{i1}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_{i2}\mathcal{B}_2 + \dots + \mathcal{A}_{i\ell}\mathcal{B}_\ell}{\alpha} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\mathcal{A}_{ij}\mathcal{B}_j}{\alpha} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\mathcal{A}_{ij}}{\alpha} \frac{\mathcal{B}_j}{\alpha} \\
&= \sum_{j=1}^{\ell} [(1-\alpha)a_{ij} + \alpha b_{ij}] \cdot [(1-\alpha)\alpha_j + \alpha\beta_j] \\
&< \sum_{j=1}^{\ell} [(1-\alpha)a_{i_0j} + \alpha b_{i_0j}] \cdot [(1-\alpha)\alpha_j + \alpha\beta_j] \\
&= \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\mathcal{A}_{i_0j}}{\alpha} \frac{\mathcal{B}_j}{\alpha} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\mathcal{A}_{i_0j}\mathcal{B}_j}{\alpha} = \frac{\mathcal{A}_{i_01}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_{i_02}\mathcal{B}_2 + \dots + \mathcal{A}_{i_0\ell}\mathcal{B}_\ell}{\alpha} \\
&= \ell \mathcal{D}_{i_0\alpha}.
\end{aligned}$$

De forma similar puede probarse que $\overline{\ell \mathcal{D}_{i\alpha}} < \overline{\ell \mathcal{D}_{i_0\alpha}}$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{I}$ y cualquier $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$. Por consiguiente, $\ell \mathcal{D}_i \prec \ell \mathcal{D}_{i_0}$ y, multiplicando por $1/\ell$, concluimos que $\mathcal{D}_i \prec \mathcal{D}_{i_0}$ para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$. ■

Observación 3.5.2 Como acabamos de comentar, los números difusos $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$ no son triangulares sino sumas (de hecho, medias aritméticas) de números difusos parabólicos. Sin embargo, dado que asumimos que $\mathcal{A}_{ij}^k, \mathcal{B}_j^k \in \mathcal{T}_1$, deducimos que los soportes de los números difusos decisivos $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$ también están incluidos en el intervalo \mathbb{I} , lo cual es una propiedad muy importante desde el punto de vista computacional.

Los argumentos que acabamos de emplear en la demostración anterior también prueban la misma propiedad con respecto a la peor alternativa.

Corolario 3.5.3 Bajo el marco general del problema de toma de decisiones multicriterio en el contexto difuso explicado al principio de esta sección, suponga que cada evaluación difusa \mathcal{A}_{ij}^k y cada peso difuso \mathcal{B}_j^k es un número propio difuso en \mathcal{T}_1 verificando $\tilde{0} <_c \mathcal{A}_{ij}^k$ y $\tilde{0} <_c \mathcal{B}_j^k$. Si existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que

$$\mathcal{A}_{i_0j}^k <_c \mathcal{A}_{ij}^k$$

para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, cualquier $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ y cualquier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$\mathcal{D}_{i_0} \prec \mathcal{D}_i \quad \text{para cualquier } i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}.$$

Finalmente, al unir los dos últimos resultados, podemos enunciar la siguiente consecuencia más general.

Corolario 3.5.4 Bajo el marco general del problema de toma de decisiones multicriterio en el contexto difuso explicado al principio de esta sección, suponga que cada evaluación \mathcal{A}_{ij}^k y \mathcal{B}_j^k es un número propio difuso en \mathcal{T}_1 verificando $\tilde{0} <_c \mathcal{A}_{ij}^k, \mathcal{B}_j^k$. Si existe $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que

$$\mathcal{A}_{i_1j}^k <_c \mathcal{A}_{ij}^k <_c \mathcal{A}_{i_2j}^k$$

para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, cualquier $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ y cualquier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$\mathcal{D}_{i_1} \prec \mathcal{D}_i \prec \mathcal{D}_{i_2} \quad \text{para cualquier } i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_1, i_2\}.$$

3.6. Una nueva metodología Delphi difusa

En esta sección describimos una nueva metodología Delphi difusa para resolver problemas en los que se necesite un consenso entre muchos expertos respecto a uno o varios ítems (véase [70]). Nuestro enfoque asume que las opiniones de los expertos vienen dadas por números difusos y, por lo tanto, generaliza otras metodologías basadas en números reales y/o etiquetas lingüísticas. Además permite a los expertos expresar sus opiniones utilizando un rango de ambigüedad que aporta una valiosa información. Antes de explicar los principales pasos para una correcta implementación de la metodología Delphi difusa propuesta, vamos a describir una herramienta informática, desarrollada en colaboración con profesionales del sistema sanitario, para facilitar la recogida de datos y una aplicación rápida y segura del método difuso.

3.6.1. Una aplicación informática para recoger las opiniones de los expertos como números difusos trapezoidales

Partiendo de la escala visual analógica (abreviadamente, EVA), en estudios sanitarios, podemos recoger datos de tipo trapezoidal como sigue. Los encuestados seleccionan un punto de valoración representativo en un intervalo acotado e indican puntos de valoración más altos o más bajos dependiendo de la ambigüedad relativa de su juicio (véase la Figura 3.9).



Figura 3.9: Ejemplo de una respuesta difusa recogida en un formulario escrito utilizando una escala visual analógica.

En este caso, el intervalo global es el mayor soporte que puede considerarse para cualquier número difuso del estudio, es decir, $[0, 10]$, y corresponde a una línea de 10 centímetros en el cuestionario impreso. Este formato de respuesta libre nos permite recoger números difusos triangulares sin entrenamiento. Sin embargo, el método impreso tiene el inconveniente de que es necesario utilizar una regla para medir manualmente los valores que definen el número difuso y guardarlos manualmente antes de aplicar el método Delphi difuso.

Teniendo en mente este inconveniente, hemos desarrollado una aplicación informática para recoger los datos difusos. En la primera etapa de la aplicación, consideramos las marcas verde/azul/roja indicadas en la barra para recoger las opiniones en términos de números difusos triangulares. Los encuestados seleccionan un punto de valoración representativo mediante la marca azul en una barra que representa el intervalo acotado $[0, 10]$ e indican puntos de valoración más altos o más bajos con las marcas verdes y rojas, respectivamente (véase la Figura 3.10). Una vez terminada la encuesta, los datos difusos se exportan a un archivo con extensión *.xlsx* (que puede importarse fácilmente en *R-Studio* [90]

para los cálculos posteriores).

Figura 3.10: Programa que recoge, de forma visual y a través de Internet, valoraciones en forma de números difusos triangulares (versión inicial).

La segunda etapa de la implementación considera números difusos trapezoidales, es decir, del tipo $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$, para las respuestas. En este caso, se indicó a los encuestados que seleccionaran un intervalo de valoración representativo utilizando dos marcas azules dentro de una barra delimitada y que luego movieran las marcas verdes y rojas para indicar las puntuaciones inferior y superior, respectivamente (véase la Figura 3.11). Las marcas verdes y rojas generan dos números, a_1 y a_4 , que corresponden al soporte $[a_1, a_4]$ del número difuso trapezoidal, y el intervalo definido por las marcas azules corresponden al núcleo $[a_2, a_3]$ de dicho número.

Computer application for collecting trapezoidal fuzzy numbers

To choose the corners of each trapezoidal number Item X (a,b,c,d)

Figura 3.11: Programa que recoge, de forma visual y a través de Internet, valoraciones en forma de números difusos trapezoidales (versión desarrollada).

Con esta aplicación informática, la ambigüedad del juicio puede trasladarse fácil y automáticamente a un formato cuantitativo basado en números difusos trapezoidales que se recogen y se almacenan para aplicar el método Delphi difuso que introducimos a continuación.

3.6.2. Descripción de la nueva metodología Delphi difusa

En esta subsección describimos los pasos que seguiremos para llevar a cabo el nuevo método Delphi difuso y el marco en el que se puede desarrollar. Sin pérdida de generalidad y con objeto de facilitar su comprensión, supondremos que las opiniones de los expertos se recogieron en forma de números difusos trapezoidales (de hecho, la aplicación informática fue diseñada para recoger las cuatro esquinas de dichos números). A pesar de ello, la metodología implementada en la ecuación (2.5) puede aplicarse incluso si las opiniones de los expertos están implementadas a través de números difusos con formas más complicadas, lo que significa que el siguiente procedimiento puede aplicarse a una amplia variedad de números difusos recogidos por un cuestionario difuso apropiado.

En las siguientes líneas, describimos el nuevo enfoque Delphi difuso que proponemos.

Paso 1: Crear una versión inicial del cuestionario describiendo los ítems lo más claramente posible. Al mismo tiempo, establecer los elementos necesarios para identificar el consenso. Por ejemplo, en la investigación que describiremos en la siguiente sección, teniendo en mente el soporte máximo $[0, 10]$ para expresar una opinión, hemos elegido el número difuso triangular $\mathcal{C} = (8/9/10)$ para indicar “*De acuerdo*” o “*Totalmente de acuerdo*” (otros investigadores podrían utilizar cualquier otro umbral). Para llegar al consenso sobre el i -ésimo ítem, será necesario que se cumplan dos condiciones:

- 1) que exista, al menos, un 80 % de acuerdo sobre el ítem entre los expertos, es decir, que al menos el 80 % de las opiniones de los expertos

$\mathcal{A}_i^1, \mathcal{A}_i^2, \dots, \mathcal{A}_i^n$ sobre el i -ésimo ítem verifique $\mathcal{C} \preceq \mathcal{A}_i^k$ (esto significa que la opinión del experto es muy favorable al ítem propuesto);

- 2) que no haya comentarios de expertos (si hay al menos un comentario, entendemos que el ítem puede ser mejorado).

Paso 2: Crear un grupo de personas expertas en el tema que acepten participar en el estudio.

Paso 3: Enviar el cuestionario por correo electrónico y recoger las respuestas que miden el nivel de acuerdo de cada uno de los expertos con los ítems propuestos. En este paso, se invitó a los expertos a responder mediante un cuestionario online basado en una escala de valoración difusa. Dicho cuestionario fue recogido a través de Internet e involucraba respuestas expresadas como números difusos trapezoidales, tal y como se ha explicado en el apartado anterior.

Paso 4: Una vez recibidas las opiniones de los expertos y los comentarios correspondientes, el siguiente paso es calcular la proporción de acuerdo p_i entre los expertos sobre el ítem i -ésimo ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$). Dicha proporción (expresada como porcentaje) fue calculada como el cociente entre el número de opiniones de expertos para las que $\mathcal{C} \preceq \mathcal{A}_i^k$ (de 1 a n) dividido por número n de expertos, y multiplicada por 100. A continuación, se calcula el número N_i de comentarios realizados por el conjunto de expertos.

Paso 5: Si se alcanza el consenso para el ítem i -ésimo utilizando los criterios previamente establecidos en el primer paso, entonces dicho elemento no se planteará de nuevo a los expertos en la siguiente ronda. Por el contrario, si el consenso no se alcanza en algunos puntos (tal vez porque el porcentaje p_i no es lo suficientemente grande o tal vez porque todavía existan algunos comentarios), el moderador modificará los ítems en los que no hay consenso siguiendo los comentarios de los expertos, y elaborará un informe para dar a conocer a todos los expertos las opiniones de los demás. Este nuevo

cuestionario y el informe se presentarán a los expertos, y volveremos al Paso 3.

Paso 6: El procedimiento se detendrá después de realizar este proceso iterativo multi-ronda (a menudo son necesarias más de dos rondas, hasta tres o cuatro como mucho) cuando se alcance el consenso en cada ítem o después de un número de rondas previamente establecido.

3.7. Resultados de un caso real de validación transcultural de una escala

En esta sección mostramos cómo hemos llevado a cabo un proceso Delphi difuso como el que hemos expuesto en la sección anterior para el caso de la validación transcultural de una escala. Explicamos en qué se ha basado la experimentación.

Cada vez son más los autores que afirman que son necesarias intervenciones estructuradas para mejorar la práctica asistencial en el final de la vida. Para la implementación de programas de cuidados paliativos en centros de larga estancia (como las residencia de mayores), se necesitan cuestionarios y medidas que permitan evaluar las condiciones y la calidad del proceso de fin de la vida. Estos instrumentos se basan en la percepción de los profesionales y familiares de este proceso. Sin embargo, existen pocos instrumentos que evalúen la calidad del proceso de fin de vida en España. En esta Memoria vamos a utilizar la nueva metodología Delphi difusa que hemos propuesto en la sección anterior para realizar una validación transcultural de una nueva versión española del cuestionario “*Calidad del proceso de morir en los cuidados de larga duración*” (“*Quality-of-dying in Long Term-Care*”, QoD-LTC) [59], que es una de las escalas más utilizadas para evaluar la calidad de la muerte en los cuidados de larga duración.

Cuando se utiliza una herramienta en una cultura diferente, es importante ir más allá de la mera traducción directa, con el fin de garantizar la validez y fiabilidad de lo que pretende medir y reducir el riesgo de introducir sesgos en el estudio ([75]). El hecho de que una escala esté validada en un ámbito concreto no significa que sea automáticamente válida en otro momento, cultura o contexto ([1]). Esto es especialmente necesario en las escalas que estamos considerando ya que intervienen una serie de relaciones entre los deseos de la persona moribunda, la capacidad de los demás para satisfacer sus expectativas y el grado de control social que se ejerce sobre este proceso, todo ello, muy dependiente de la cultura y del contexto ([48]). Por lo tanto, es preciso adaptar al contexto español cualquier instrumento que se decida emplear para evaluar un proceso, como es el caso del *QoD-LTC* ([58]).

Para poder utilizar un cuestionario validado en otro idioma y otro país culturalmente diferente de aquel donde originalmente fue validado, el primer paso es realizar una adaptación cultural y, posteriormente, una validación ([60, 75]). El proceso de traducción se acompaña del proceso de adaptación cultural que, generalmente, es validado por un comité de expertos. El hecho de realizar un proceso de traducción de manera simple, sin una adaptación cultural, puede desencadenar interpretaciones erróneas como resultado de las diferencias del lenguaje y culturas. Por lo que este proceso puede considerarse tan importante como el proceso de validación ([1, 60]).

Para la versión española de esta escala se propusieron once ítems ($m = 11$). En esta sección se resume la nueva metodología Delphi difusa en términos de la evolución del consenso y la estabilidad del proceso a través de las tres rondas realizadas mediante los porcentajes de acuerdo y el número de comentarios (también incluimos la media de las respuestas).

En primer lugar se formó un grupo heterogéneo de trece expertos (ocho enfermeras, tres psicólogos y dos médicos); así se fijó $n = 13$. La edad media del grupo fue de 43 años con una experiencia profesional media de 10.8 años.

La versión inicial del cuestionario se presentó a los 13 expertos y, utili-

zando la herramienta informática desarrollada, recogimos sus opiniones sobre los 11 ítems propuestos en términos de números difusos trapezoidales. Por ejemplo, la Figura 3.12 representa las opiniones de los 13 expertos $\{\mathcal{A}_1^k = (a_1^k/b_1^k/c_1^k/d_1^k)\}_{k=1}^{k=13}$ recogidos para el Ítem 1 en color azul, y en color rojo, se representa el número difuso utilizado para la comparación, $\mathcal{C} = (8/9/10)$. Podemos observar que, aunque están claras las posiciones relativas entre algunos números difusos trapezoidales, \mathcal{A}_1^k , y \mathcal{C} , hay otros casos en los que incluso investigadores expertos en clasificación difusa podrían presentar algunas dudas sobre qué número difuso es mayor o menor. Claramente, es necesario aplicar la relación binaria \preceq para decidir si $\mathcal{A}_1^k \preceq \mathcal{C}$ o viceversa. Dichas comparaciones pueden observarse en la Figura 3.13a. Esta figura es un diagrama de flechas con las opiniones de los 13 expertos representadas como círculos azules (denotados por E_1, E_2, \dots, E_{13}) y la comparación con el número difuso \mathcal{C} , el cual se representa en color rojo. Hemos utilizado el siguiente criterio: cada flecha señala el mayor número difuso indicado por la relación binaria difusa \preceq ; es decir si $\mathcal{C} \prec \mathcal{A}_1^k$, el programa R dibuja la flecha $\mathcal{C} \rightarrow E_k$; y si $\mathcal{A}_1^k \approx \mathcal{C}$, dibuja $E_k \leftrightarrow \mathcal{C}$.

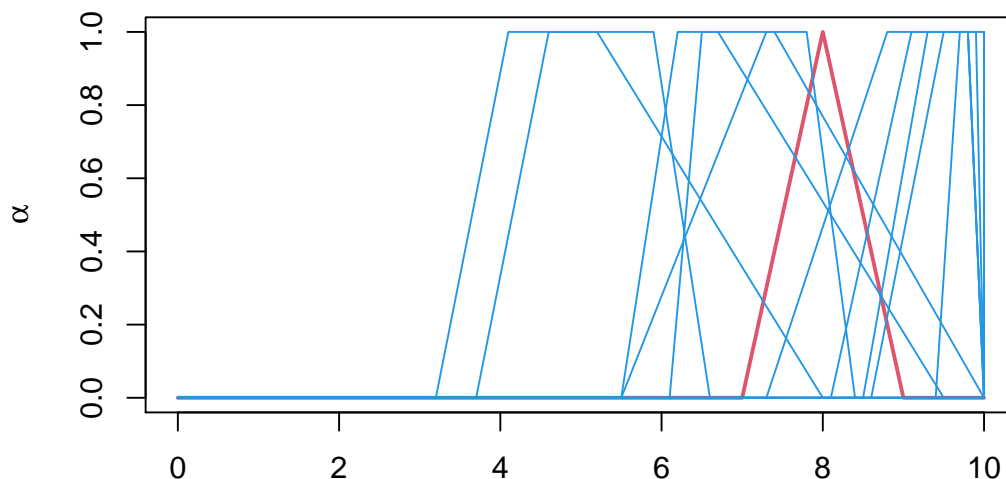


Figura 3.12: Datos basados en la escala de valoración difusa de los 13 expertos sobre el Ítem 1 en azul y el número difuso de comparación, \mathcal{C} , en rojo.

Como podemos ver, en la primera ronda, ocho opiniones eran mayores que

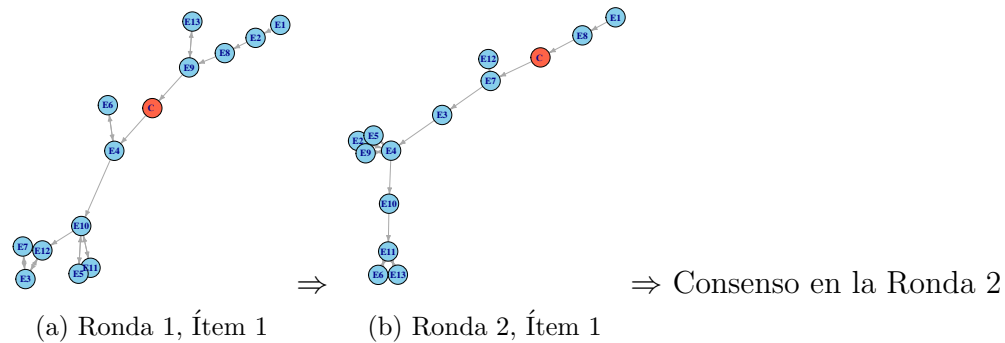


Figura 3.13: Datos difusos correspondientes a las 13 opiniones de expertos (en color azul) ordenados para cada ronda para el Ítem 1, mostrando la evolución del consenso al comparar con el número difuso \mathcal{C} (en color rojo).

\mathcal{C} de acuerdo a la relación binaria difusa \preceq , y cinco de ellas eran menores que \mathcal{C} . Como consecuencia, el porcentaje de acuerdo de la traducción al español del Ítem 1 del cuestionario QOD-LTC fue $8/13 = 61.5\%$, lo que fue claramente insuficiente para alcanzar el consenso. Además, en la primera ronda se recogieron cuatro comentarios de los expertos para el Ítem 1, lo que confirma que no se alcanzó el consenso. Estos datos se pueden encontrar en la tercera línea de la Tabla 3.4, asociada al Ítem 1, donde podemos observar que el porcentaje de acuerdo fue de 61.5% , y el número N de comentarios fue cuatro.

Teniendo en cuenta las sugerencias de los expertos, el moderador modificó el Ítem 1 del cuestionario y lo sometió a los expertos en la segunda ronda. Los expertos tuvieron acceso a las opiniones de otros expertos y expresaron su opinión sobre la nueva versión del ítem 1. En la segunda ronda, como podemos ver en la Figura 3.14, 11 opiniones fueron mayores que \mathcal{C} teniendo en cuenta la relación binaria difusa \preceq , y solo 2 de ellas fueron inferiores a \mathcal{C} . Como resultado, el porcentaje de acuerdo para punto 1 en la segunda ronda fue de $11/13 = 84.6\%$, que fue mayor que 80% . Como no hubo comentarios, consideramos que, en la segunda ronda, se alcanzó el consenso para el Ítem 1. En consecuencia, el Ítem 1 no se incluyó en la tercera ronda del cuestionario. La información correspondiente también se puede encontrar en la tercera línea de la Tabla 3.4, asociada al Ítem 1, en las columnas que se dedican a la segunda ronda.

Este proceso se llevó a cabo para cada uno de los 11 ítems considerados en el cuestionario. Para no ser repetitivos, resumimos los resultados obtenidos para cada ítem de la siguiente manera. La Figura 3.14 representa los datos difusos correspondientes a las 13 opiniones de los expertos (en color azul), clasificadas para cada ronda y cada ítem. En esta clasificación, el número difuso de comparación \mathcal{C} se ha representado en rojo.

La Tabla 3.4 resume los resultados de las sucesivas rondas del método Delphi difuso propuesto. Para cada ronda, las cuatro primeras columnas dan cuatro valores (R_I, R_{C1}, R_{C2}, R_S) correspondientes a las esquinas del número difuso trapezoidal que representa la media de las 13 opiniones de los expertos; la siguiente columna muestra el porcentaje de acuerdo calculado (%); la última columna es el número de comentarios realizados correspondientes a cada ítem, que se denota por N . La Figura 3.14, nos permite comprobar fácilmente el porcentaje de acuerdo obtenido. Podemos interpretar la sexta línea de la Tabla 3.4 (correspondiente al Ítem 4) como sigue. En la primera ronda, el porcentaje de acuerdo entre los expertos fue de 46.2%, y se recogieron ocho comentarios. Como no se alcanzó el consenso, fue necesario realizar una segunda ronda. En esta ronda el porcentaje de acuerdo entre los expertos fue de alrededor de 76.9%, y se recogieron tres comentarios. En consecuencia, una nueva ronda fue necesaria. Por último, en la tercera ronda, el porcentaje de acuerdo fue de 84.6% con ningún comentario. El consenso sobre el Ítem 4 se alcanzó después de tres rondas. Estos datos se han representado en la Figura 3.14, apartados (g)-(i). Es interesante observar que, en el caso del Ítem 3, hubo un 100% de acuerdo con la traducción propuesta. Sin embargo, este ítem se incluyó en la segunda ronda porque se recogió un comentario que podía mejorar la propuesta presentada.

Por último, destacamos que el consenso en todos los ítems se alcanzó después de tres rondas.

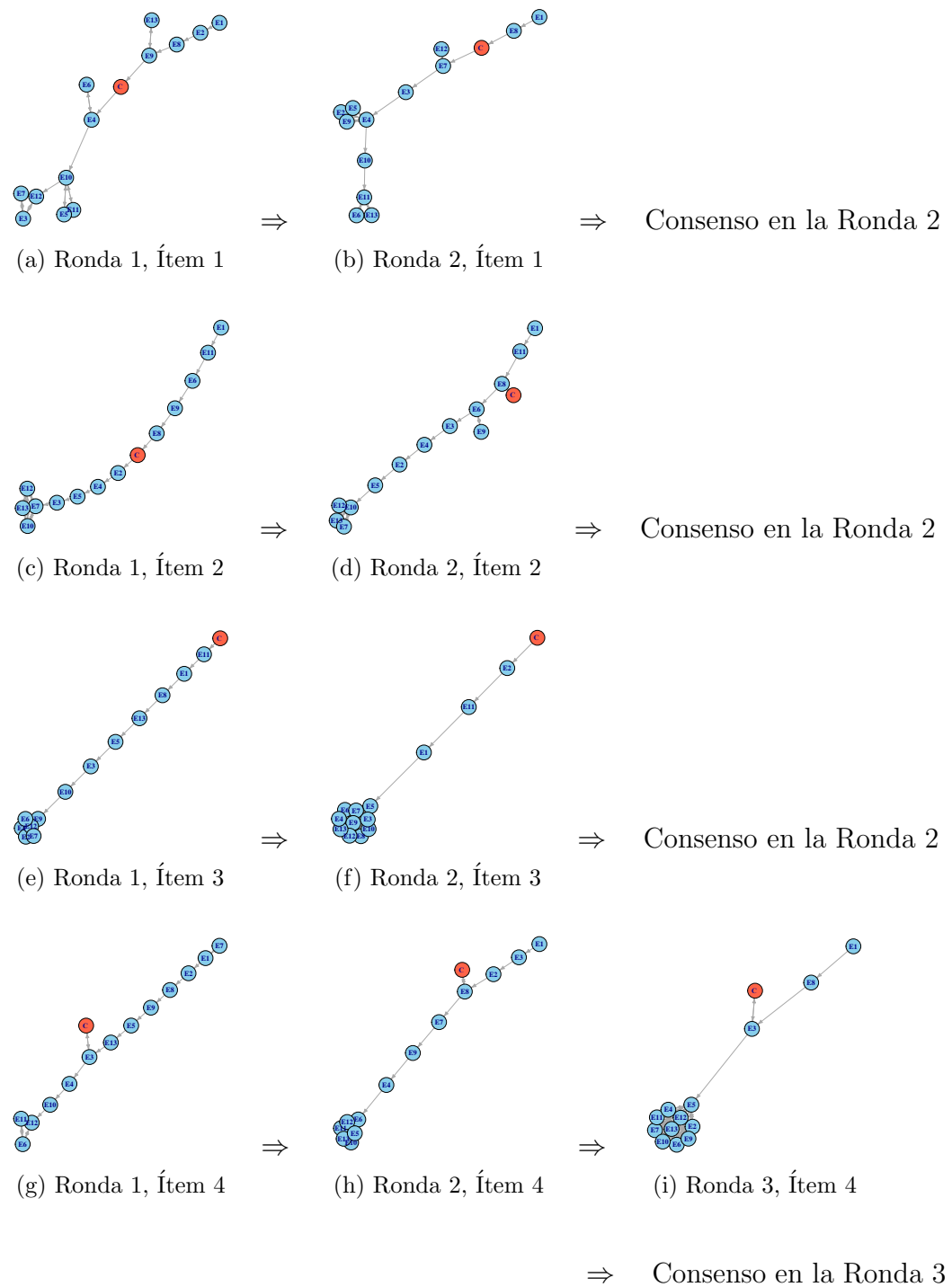
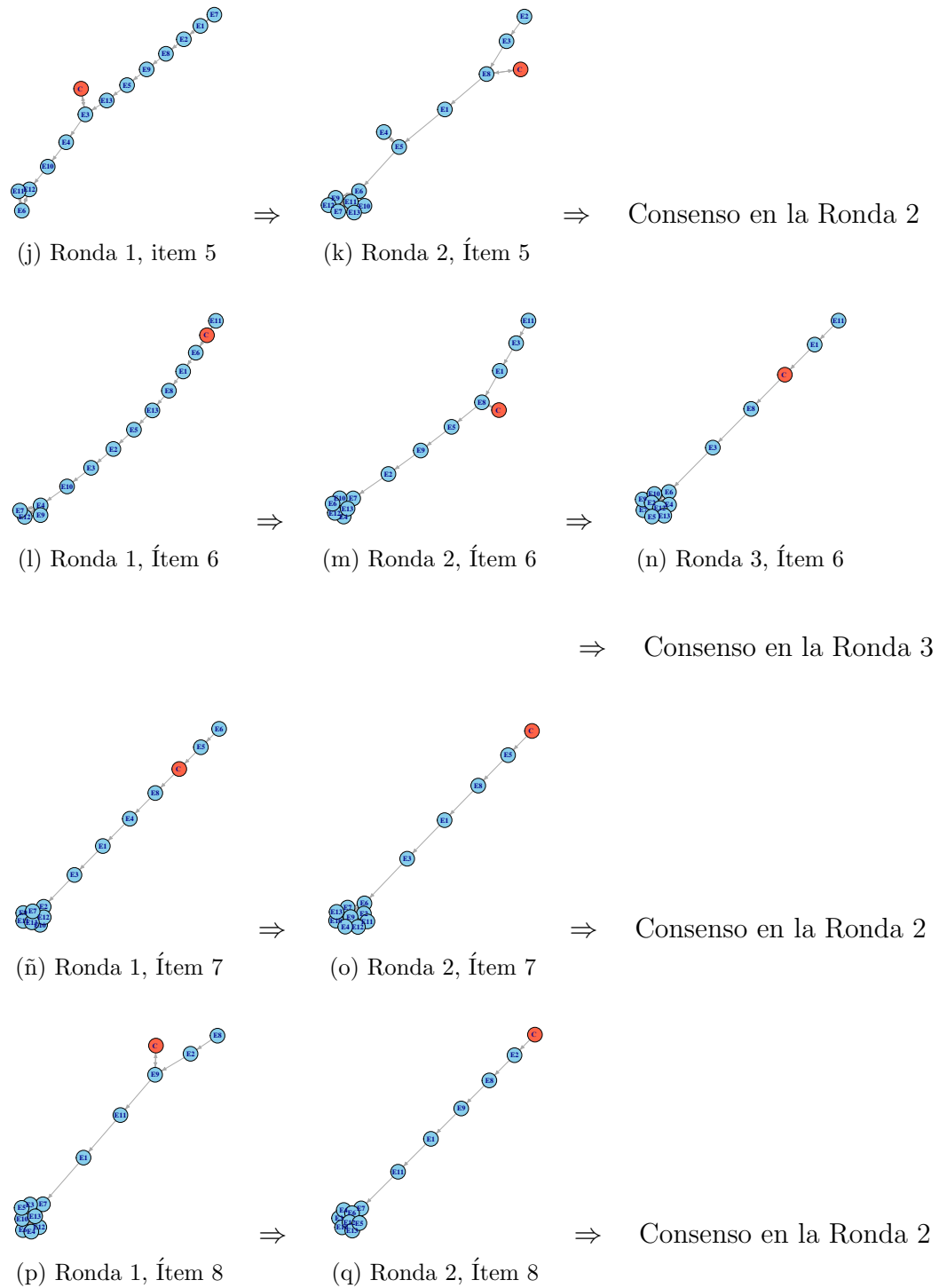


Figura 3.14: Datos difusos correspondientes a las 13 opiniones de los expertos para cada ronda y cada ítem (en azul), y el número difuso de comparación \mathcal{C} (en rojo).

Figura 3.14: *Continuación.*

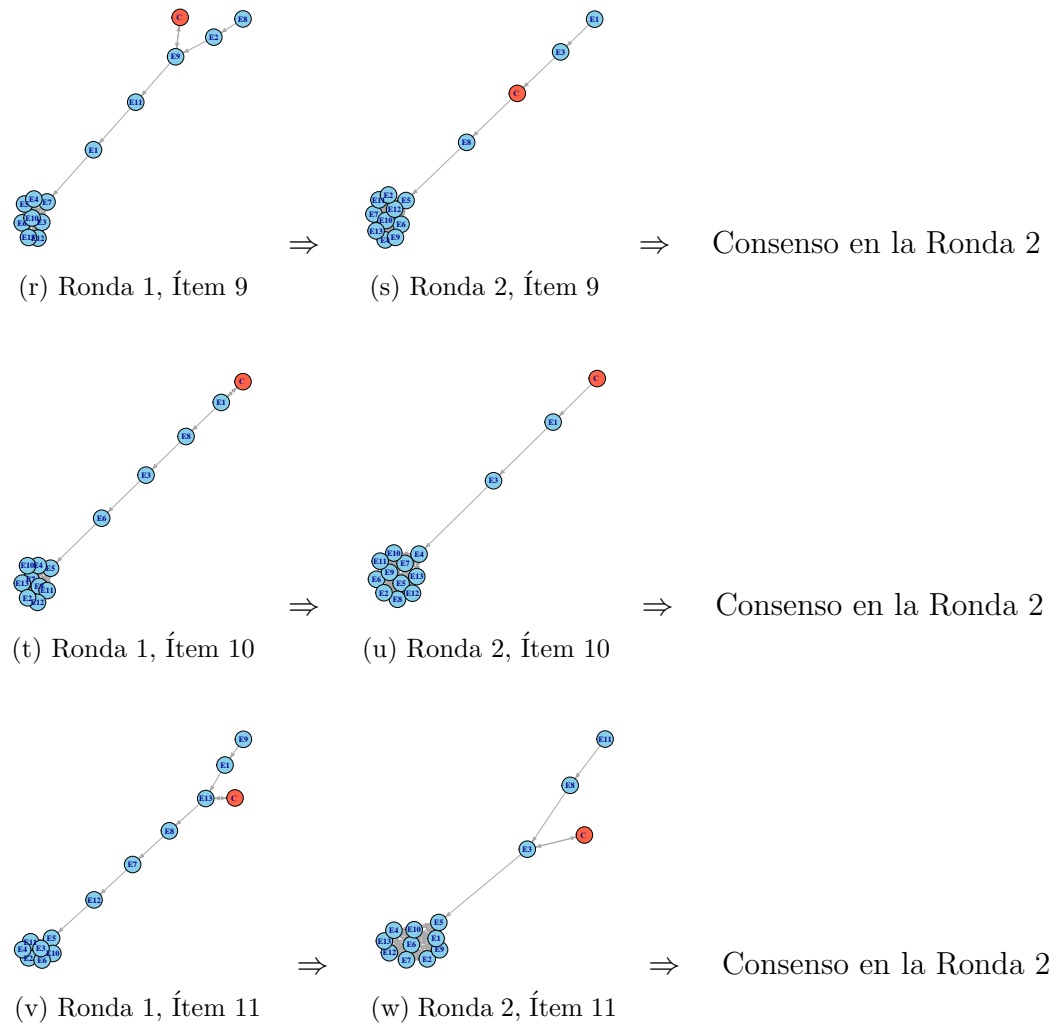
Figura 3.14: *Continuación.*

Tabla 3.4: Resultados de las rondas del método Delphi difuso destacando, en color gris, las razones por las que un ítem debe incluirse en la siguiente ronda.

	Ronda 1				Ronda 2				Ronda 3									
	R_I	R_{C1}	R_{C2}	R_S	%	N	R_I	R_{C1}	R_{C2}	R_S	%	N	R_I	R_{C1}	R_{C2}	R_S	%	N
Ítem 1	7.4	8.2	8.8	9.4	61.5	4	8.0	9.1	9.5	9.5	84.6	0	-	-	-	-	-	-
Ítem 2	7.2	8.0	8.8	9.8	61.5	4	7.7	8.5	9.3	9.6	84.6	0	-	-	-	-	-	-
Ítem 3	8.8	9.4	9.6	10.0	100.0	1	9.3	9.6	9.8	10.0	100.0	0	-	-	-	-	-	-
Ítem 4	7.4	8.1	8.8	9.4	46.2	8	8.2	8.7	9.1	9.6	76.9	3	9.1	9.4	9.5	9.5	84.6	0
Ítem 5	7.2	8.0	8.8	9.9	46.2	2	8.8	9.3	9.6	9.7	84.6	0	-	-	-	-	-	-
Ítem 6	8.7	9.4	9.5	10.0	92.3	3	8.4	9.0	9.2	9.4	76.9	0	9.0	9.5	9.7	9.9	84.6	0
Ítem 7	7.3	8.2	8.8	9.4	84.6	4	9.2	9.6	9.9	10.0	100.0	0	-	-	-	-	-	-
Ítem 8	7.2	8.0	8.8	9.9	84.6	4	8.9	9.3	9.6	9.9	100.0	0	-	-	-	-	-	-
Ítem 9	8.7	9.4	9.5	10.0	84.6	6	9.1	9.4	9.6	9.7	84.6	0	-	-	-	-	-	-
Ítem 10	7.4	8.2	8.8	9.4	100.0	1	9.5	9.7	9.9	9.9	100.0	0	-	-	-	-	-	-
Ítem 11	7.2	8.0	8.8	9.9	84.6	3	9.1	9.4	9.6	9.7	84.6	0	-	-	-	-	-	-

3.7.1. Discusión

Los resultados de la aplicación del método Delphi difuso propuesto muestran un cambio en las opiniones de los expertos hacia el consenso y la estabilidad. Para todos los puntos, se observó un aumento en el porcentaje de acuerdo tras cada una de las tres sucesivas rondas. El mayor porcentaje de desacuerdo en la ronda 1 correspondió al Ítem 4, lo que demuestra que al tener en cuenta los comentarios de los expertos, estas opiniones pueden modificarse considerablemente. El número de comentarios disminuyó en cada ronda. Esta reducción apoya la evolución hacia el consenso.

El método propuesto, que sigue la metodología original para el caso de respuestas difusas, se muestra como una forma eficaz de medir el consenso de un grupo. Las principales características de la nueva metodología Delphi difusa propuesta son las herramientas de las que hace uso:

- 1) una nueva herramienta informática que permite recoger las opiniones de los expertos, evitando cualquier tipo de imprecisión a la hora de medir los valores trazados en un papel, y
- 2) una relación binaria difusa \approx que contiene la complejidad difusa necesaria para decidir si la opinión del experto (implementada como un número difuso triangular) es lo suficientemente favorable al ítem propuesto.

Esta metodología se distingue, principalmente, de otros métodos Delphi introducidos anteriormente en el hecho de que su uso no implica ningún tipo de defusificación en ninguna etapa del proceso. Para nosotros, es muy importante que las opiniones de los expertos se expresen en términos de números difusos porque estos juicios necesitan involucrar un cierto nivel de ambigüedad que no se puede modelar utilizando números reales y/o etiquetas lingüísticas. Por lo tanto, si aplicamos cualquier tipo de defusificación a las opiniones de los expertos en cualquier paso del proceso, sufriremos una gran pérdida de información que hará que el uso de elementos difusos parezca injustificado a lo largo del proceso.

Aunque muchos investigadores han intentado desarrollar metodologías Delphi difusas, pocos de ellos han diseñado métodos sin una etapa de defusificación, y no hemos encontrado en la literatura ningún método que pueda aplicarse a todo el conjunto de números difusos.

3.7.2. Conclusiones de la metodología propuesta y de su aplicación

El método multi-ronda Delphi es un procedimiento que se ha utilizado ampliamente y con gran éxito para consensuar las opiniones de un cierto grupo de expertos respecto de una cuestión concreta. El método Delphi difuso propuesto es la versión modificada y mejorada de la técnica Delphi clásica. En esta Memoria, el método propuesto extiende al método Delphi clásico por incorporar datos difusos en las opiniones de los expertos y en el método de ordenación que conlleva. La evolución del consenso se muestra en términos de aumento de los porcentajes de acuerdo y en la disminución del número de comentarios realizados.

Resumiendo, hemos presentado un novedoso método Delphi difuso que supera algunas de las deficiencias que suelen aparecer en este contexto. Por un lado, hemos asumido que las opiniones de los expertos pueden ser recogidas como números difusos, que son más apropiados para modelizar el complejo juicio humano sobre cada ítem del cuestionario. Por otro lado, hemos desarrollado una herramienta informática para recoger fácilmente las respuestas difusas de los expertos. Este sistema de información, por el momento, se reduce a la recogida de los números difusos trapezoidales pero, en un trabajo futuro, tenemos previsto desarrollar una herramienta informática que sea capaz de recoger cualquier tipo de número difuso. Al comparar las respuestas difusas de los expertos con un cierto nivel de acuerdo difuso (implementado como un número difuso concreto), el moderador puede determinar si existe un porcentaje suficiente de expertos que están de acuerdo con la afirmación dada en cada ítem del cuestionario. Si

no se alcanza ese porcentaje mínimo, el moderador puede iniciar una nueva ronda tras modificar el cuestionario en función de los comentarios de los expertos. Algunas ventajas de la metodología Delphi difusa propuesta son las siguientes.

- Es sencillo de aplicar y puede emplearse sin pérdida de información (es decir, sin un paso de defusificación).
- Puede aplicarse a una amplia gama de números difusos, no solo trapezoidales (ya que la relación binaria que utiliza así lo permite).
- La aplicación informática desarrollada para recoger los datos difusos ahorra tiempo y costes en el manejo de los cuestionarios difusos.

Se utilizó como ejemplo real una adaptación transcultural de una escala para ilustrar este nuevo enfoque. Muchos procesos sanitarios que pueden necesitar un consenso son susceptibles de aplicar la metodología introducida. Es necesario seguir investigando en este campo de estudio para completar el desarrollo de nuevos productos, servicios y técnicas para las cuales también pueden ser necesario considerar una metodología Delphi difusa.

CAPÍTULO 4

La librería *RankingTraFNs* implementada en *R*

Una de las tareas que tuvimos que afrontar a lo largo del desarrollo de la presente Memoria fue la de generar un código informático que fuese capaz de ordenar de forma automática, siguiendo la metodología propuesta por Roldán *et al.* en [68], una cantidad arbitraria (pero finita) de números difusos trapezoidales. Dicho software fue desarrollado por el doctorando, que es graduado en Ingeniería Informática por la Universidad de Granada. Para esta tarea se eligió el programa *R* debido a que es recurso de software libre y que está al alcance, a través de Internet, de cualquier persona que disponga de un ordenador.

Una de las principales ventajas de *R* es que no necesita cargar desde el principio mucha información en la memoria del ordenador, sino que parte de una cantidad mínima de recursos iniciales y, dependiendo de la tarea que se vaya a realizar con él, se cargan en la memoria unos paquetes conocidos como *librerías*, que contienen estrictamente la información necesaria para realizar la tarea que se desea llevar a cabo. Por ejemplo, de entrada, *R* no sabe derivar ni integrar funciones pero, cargando las librerías adecuadas, adquiere esta habilidad. Debido a esta versatilidad y a su carácter libre, *R* es un programa de gran éxito en el panorama internacional y, por ello, es ampliamente utilizado durante el desa-

rollo de estudios científicos de alto nivel. Además, muchas personas se dedican a generar nuevas librerías para la adquisición de nuevas funcionalidades, que ponen a disposición del público en general a través de repositorios adecuados, lo que hace que *R* sea cada vez más potente y atractivo.

En el caso que nos ocupa, la librería *RankingTraFNs* que presentamos en este capítulo es la continuación natural de la librería *RankingTwoTraFNs* que desarrolló el doctorando junto con D. Antonio Márquez Montávez con objeto de la tesis doctoral del segundo, que puede consultarse en [54]. El paquete *RankingTwoTraFNs* permitía introducir dos números difusos trapezoidales \mathcal{A} y \mathcal{B} junto con sus respectivas etiquetas (por ejemplo, “*A*” y “*B*”), y el programa devolvía la representación gráfica de dichos números difusos trapezoidales junto con su ordenación según la metodología descrita en [68], que podía ser de tres formas diferentes: “ $A \prec B$ ”, “ $A \succ B$ ” o bien “ $A \sim B$ ”. Este paquete estaba muy limitado por dos factores: solo podía comparar dos números difusos trapezoidales (pero no tres o más) y, además, dichos números debían ser introducidos manualmente a través de sus cuatro esquinas y de sus etiquetas correspondientes. En el caso de la librería que describimos a continuación, hemos superado estas limitaciones de la siguiente forma:

- por un lado, la librería *RankingTraFNs* permite la comparación de una cantidad arbitraria, pero finita, de números difusos trapezoidales (por ejemplo, es usual trabajar con 10 números difusos trapezoidales);
- por otro lado, hemos permitido al usuario introducir los números difusos que se quieren comparar de tres formas diferentes:
 - ▶ *introducción manual*: el usuario introduce la cantidad n de números difusos trapezoidales que desea comparar y, a continuación, debe introducir manualmente cada una de las cuatro esquinas de esos números difusos junto con sus respectivas etiquetas lingüísticas;
 - ▶ *generación aleatoria*: el usuario indica dos valores N y n , y el programa genera n números difusos trapezoidales cuyas esquinas se distribuyen

uniformemente en el intervalo real $[0, N]$;

- ▶ *introducción mediante un fichero .xlsx*: esta opción se utiliza cuando el usuario dispone de un fichero con extensión *.xlsx* que dispone de n filas y cinco columnas, de manera que cada fila contiene la información de un número difuso concreto, es decir, sus cuatro esquinas (ordenadas de menor a mayor) y su etiqueta lingüística.

Las etiquetas son muy importantes cuando se trabaja con una cantidad elevada de números difusos que representan una cierta información concreta. Por ejemplo, si trabajamos con cuatro números difusos, podemos etiquetarlos como “*A*”, “*B*”, “*C*” y “*D*”, y el programa podría producir la ordenación “ $B \prec D \prec A \prec C$ ”. Por el contrario, si trabajamos con 10 números difusos, quizá sea más cómodo etiquetarlos como “*A1*”, “*A2*”, “*A3*”, ..., “*A10*”, de manera que el programa podría producir la ordenación “ $A7 \prec A3 \prec A8 \prec \dots \prec A1$ ”. Finalmente, si el programa contiene datos de magnitudes asociadas a objetos concretos (por ejemplo, las estaturas de tres niños), entonces las etiquetas podrían ser “*Sofía*”, “*Pablo*” y “*Helena*”, de tal manera que el resultado de la ordenación podría ser “ $Pablo \prec Sofía \sim Helena$ ”.

La librería que se describe a continuación ha sido empleada para llevar a cabo las ordenaciones y realizar las representaciones gráficas de los números difusos empleados en los ejemplos de los capítulos anteriores. Es de destacar que la librería *RankingTraFNs* ha sido desarrollada con objeto de dar a conocer la metodología de ordenación difusa introducida en [68] a cualquier persona interesada en ella, independientemente de su campo de estudio o de la razón por la que pueda estar interesada en la misma.

4.1. Instalación de la librería *RankingTraFNs*

Para poder utilizar la librería que hemos desarrollado, es necesario instalar, en el orden que se indica, el siguiente software.

- 1) Instalar el programa *R* [89] descargando los archivos necesarios desde la siguiente página web:

<https://www.r-project.org/>

- 2) Por comodidad, sugerimos instalar el programa *R-Studio* [90] (que también proporciona versiones gratuitas) desde la siguiente página web:

<https://www.rstudio.com/>

- 3) Para un correcto funcionamiento de la librería *RankingTraFNs*, conviene tener instaladas previamente en *R* las siguientes librerías, creadas por otros autores: “*tidyverse*”, “*igraph*”, “*readxl*”, “*dplyr*” y “*FuzzyNumbers*”. Las cuatro primeras pueden descargarse desde el repositorio CRAN de Internet, y la última requiere la descarga a un directorio local del archivo “*FuzzyNumbers_0.4-6.tar.gz*” desde [91], y su posterior instalación. Ello puede hacerse, dentro también del programa *R-Studio*, empleando las siguientes instrucciones.

```
1  install.packages("tidyverse")
2  install.packages("igraph")
3  install.packages("readxl")
4  install.packages("dplyr")
5  install.packages("C:/FuzzyNumbers_0.4-6.tar.gz",
6    repos = NULL, type = "source")
```

- 4) Descargar el archivo correspondiente a la librería *RankingTraFNs* desde el siguiente enlace de *github* personal del doctorando:

<https://github.com/msmaldonado/Tesis-Doctoral>

Colocarlo en un directorio local (por ejemplo, *C:*) y, dentro también del programa *R-Studio*, ejecutar el siguiente comando para instalarla:

```
1 install.packages("C:/RankingTraFNs_0.1.0.tar.gz",  
2   repos = NULL, type = "source")
```

La interfaz gráfica de *R-Studio* permite la instalación de librerías mediante un procedimiento muy intuitivo, simplemente utilizando la opción “*Instalar paquetes desde archivos*” del menú “*Paquetes*”. En la Figura 4.1 mostramos cómo se podría instalar la librería *RankingTraFNs* desde un directorio local en el que se hubiese descargado el archivo correspondiente.

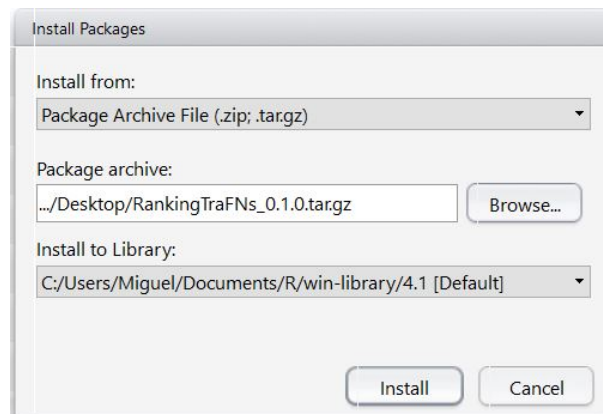


Figura 4.1: Instalación de la librería *RankingTraFNs* desde un archivo local.

Conviene recordar que, aunque la instalación de las anteriores librerías solo debe realizarse una vez, antes de poder utilizarlas hay que cargarlas en la memoria del ordenador. Ello puede hacerse mediante las instrucciones:

```
1 library(tidyverse)  
2 library(igraph)  
3 library(readxl)  
4 library(dplyr)  
5 library(FuzzyNumbers)  
6 library(RankingTraFNs)
```

De esta forma, ya estaremos listos para utilizar, dentro de *R-Studio*, las funcionalidades que aporta la librería *RankingTraFNs*, las cuales son descritas

en la siguiente sección.

4.2. Resultados que producirá la librería *RankingTraFNs*

Para poder comprender las funciones que contiene la librería, es necesario conocer primero qué es lo que podemos esperar de ella, es decir, cuáles serán los resultados finales que deseamos obtener. El objetivo principal es claro: ordenar una cantidad arbitraria (pero finita) de números difusos trapezoidales según la metodología propuesta en [68], y generar una representación gráfica sencilla en la que se pueda observar a simple vista dicha ordenación. En concreto, supongamos que deseamos ordenar de menor a mayor los n números difusos trapezoidales $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$, con etiquetas asociadas $A(1), A(2), \dots, A(n)$, y representar dicha ordenación de una forma lo más sencilla posible. De forma natural, surgen las siguientes dificultades.

Por un lado, podemos considerar el problema de disponer de una cantidad alta de números difusos trapezoidales. Si solo tuviésemos una cantidad pequeña de números difusos (por ejemplo, $n = 2$ o $n = 3$), posiblemente la representación gráfica de sus funciones de pertenencia en la recta real sería el mejor método para comprender la ordenación que se obtiene. No obstante, cuando n toma un tamaño superior a 10, si las funciones de pertenencia adoptan posiciones muy intrincadas (léase, “enrevesadas entre sí”), dicha representación gráfica no sería concluyente, y podría dar lugar a malentendidos (algo similar a lo que ocurre en la Figura 3.12). Por ello, hemos preferido utilizar una representación gráfica alternativa en la que los números difusos sea representados como vértices de un grafo, de tal manera que el grafo contendrá una flecha desde el nodo $A(i)$ apuntando hacia nodo $A(j)$ cuando se cumpla que $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$. Es decir, representaremos una flecha “ $\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$ ” cuando $\mathcal{A}_i \prec \mathcal{A}_j$, y la flecha será bidireccional “ $\mathcal{A}_i \longleftrightarrow \mathcal{A}_j$ ” cuando $\mathcal{A}_i \sim \mathcal{A}_j$. Los nodos representarán a los

números difusos mediante pequeños círculos azules que contendrán las etiquetas que representarán a esos números difusos.

En la Figura 4.2 podemos observar el tipo de representaciones gráficas que se obtienen con la librería *RankingTwoTraFNs* (donde se representan las funciones de pertenencia de, como mucho, dos números difusos trapezoidales) y con la librería *RankingTraFNs* (donde se representa un grafo con nodos a modo de números difusos). En el apartado (a) se obtiene $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ al comparar los números difusos $\mathcal{A} = (2/5/8/13)$ y $\mathcal{B} = (1/6/7/5)$, y en el apartado (b) se representa la ordenación de cinco números difusos que comentaremos más adelante.

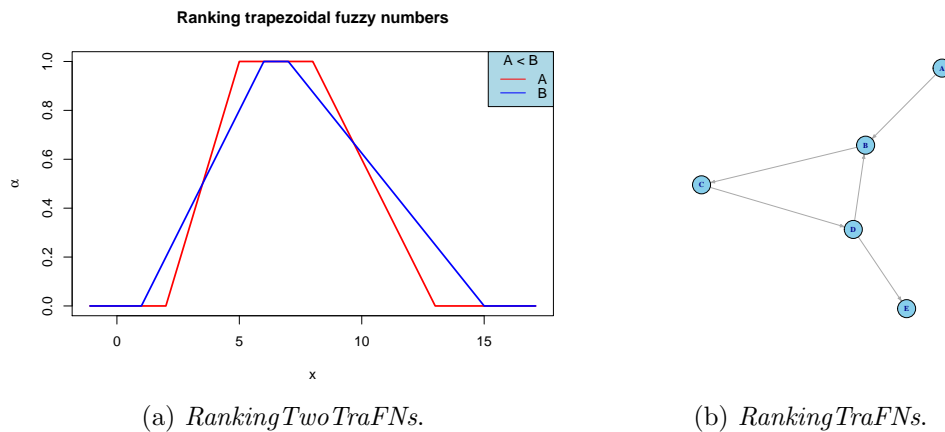


Figura 4.2: Representaciones gráficas obtenidas con las librerías (a) *RankingTwoTraFNs*; y (b) *RankingTraFNs*.

Este gráfico se construirá a través de una *matriz de adyacencia*, es decir, una matriz cuadrada de orden n que únicamente contendrá ceros y unos utilizando el siguiente criterio: el elemento (i, j) -ésimo de la matriz de adyacencia tomará el valor 1 si el i -ésimo número difuso es menor o igual que el j -ésimo, es decir, si $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$. De esta forma, los unos representarán las flechas que se han de dibujar en el gráfico de unos nodos a otros, y los ceros no tendrán una representación en el gráfico. Por ejemplo, supongamos que cuatro números difusos trapezoidales \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} y \mathcal{D} , con etiquetas asociadas A , B , C y D , verifican $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{D}$.

Entonces su matriz de adyacencia será la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Es sencillo dibujar en *R* un grafo como el que deseamos con el comando *graph.adjacency*, indicando simplemente la matriz de adyacencia que conecta unos nodos con otros. No obstante, si tratamos de representar el grafo asociado a la matriz anterior, observaremos que contiene flechas que, en sí mismas, no aportan información, como puede observarse en la Figura 4.3, (a).

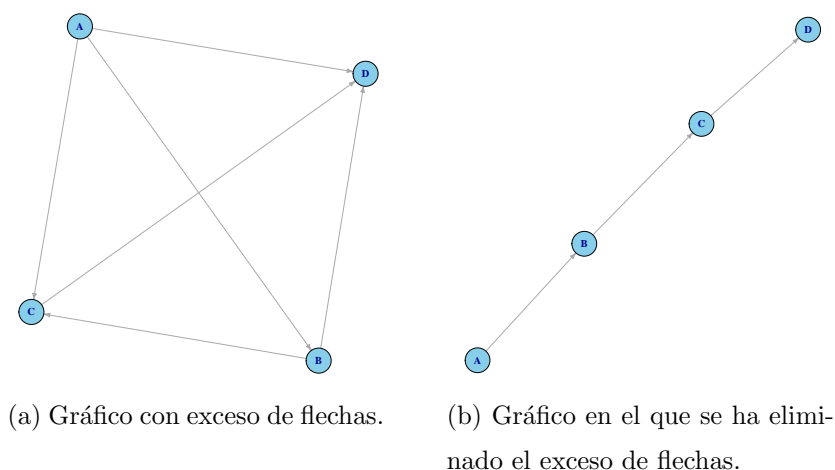


Figura 4.3: Los dos gráficos representan la misma información.

En realidad, la información anterior debería ser representada simplemente por la cadena “ $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ ” (véase la Figura 4.3, (b)), entendiendo que si “ $A \rightarrow B$ ” y “ $B \rightarrow C$ ”, no es necesario dibujar la flecha “ $A \rightarrow C$ ”. Esto no significa que la relación binaria \preceq sea transitiva (que no lo es), sino que establecemos este criterio para simplificar la representación gráfica. Por ello, hará falta una función (que llamaremos *CleanMatrixAd*) que, a partir de la matriz de adyacencia dada en (4.1), elimine los unos innecesarios de cara a la representación gráfica, produciendo la siguiente matriz con el objeto de ser

finalmente representada en la forma la cadena “ $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ ”:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en mente los resultados que esperamos conseguir en el proceso de ordenación, describimos a continuación las funciones que se han definido para alcanzar estos objetivos.

4.3. Funciones auxiliares implementadas en la librería *RankingTraFNs*

Al cargar la librería *RankingTraFNs*, el programa *R* aprende a ejecutar automáticamente diversas funciones que permitirán la ordenación y la representación gráfica de n números difusos trapezoidales. En esta sección describimos dichas funciones. No obstante, debemos aclarar que algunas de ellas ya fueron creadas para ser incluidas en la librería *RankingTwoTraFNs*. Por ello, con objeto de incluir en este capítulo únicamente los contenidos nuevos correspondientes a la presente Memoria, las funciones que ya se describieron en [54] se incluyen, por completitud, en el Apéndice de la página 139. No obstante, el lector puede encontrar en dicho Apéndice la programación concreta de las siguientes funciones.

- *LeftInterval*(a, b)
- *RightInterval*(a, b)
- *Intersection*(i_1, i_2)
- *Interval*(FN_a, FN_b)

- *LengthInterval(i)*
- *Decision(FNa, FNb)*
- *Ranking2TraFN(FNa, FNb, TextoA, TextoB)*

A continuación describimos las nuevas funciones, y comentamos cómo podrían utilizarse. El nuevo paquete está compuesto por las siguientes funciones:

- *generateFuzzy,*
- *generateLabel,*
- *tidyCorners,*
- *generateMatrixAdjacency,*
- *SortMatrixAd,*
- *RecoverMatrixAdja,*
- *RecoverVectorLabel,*
- *CleanMatrixAd,*
- *testit,*
- *menu.*

Al ser un paquete, cada función tiene asociado su *R Document* (fichero de extensión *.Rd*) con la documentación de la función creada a partir de *Roxygen*.

(✕) La función *generateFuzzy()* permite generar aleatoriamente una cantidad finita n de números difusos trapezoidales en el rango $[0, N]$ (donde los números n y N deben ser introducidos por el usuario). La función generará un vector con los números que representan las esquinas de los números difusos trapezoidales generados aleatoriamente. Finalmente devolverá una

matriz $n \times 4$, siendo n la cantidad de números difusos que haya solicitado generar el usuario, en la que cada fila contendrá las cuatro esquinas del número difuso. Esta función es ideal cuando el investigador únicamente desea hacer pruebas acerca del funcionamiento de la metodología de ordenación, sin prestar demasiada atención a los valores concretos de las esquinas de los números difusos involucrados.

```
1  generateFuzzy<- function(){
2      cat(paste("Insert the quantity of trapezoidal
3              fuzzy numbers to carry out the ranking : "))
4      quantityNumbers<-scan(n=1)
5      cat(paste("Insert the range of random numbers :
6              "))
7      quantityRandom<-scan(n=1)
8      vec <- sample(1:quantityRandom, quantityNumbers*
9                  4, replace = TRUE)
10     y<-matrix(vec,length(vec)/4,4)
11     for(i in 1:dim(y)[1]){
12         if(is.unsorted(y[i,])){
13             y[i,]<-y[i,][order(y[i,])]
14         }
15     }
16     return(y)
17 }
```

- (⊗) La función *generateLabel()* sirve para asociarle, de forma automática, una etiqueta a cada número difuso generado. Tengamos en cuenta que la ordenación final se realizará con las etiquetas que se hayan determinado y, cuando los números difusos han sido generados aleatoriamente en un número muy grande, se necesita un procedimiento que les ponga un nombre concreto en forma de etiqueta. Esta función recibe como parámetro un valor numérico que representa el tamaño del vector generado de números

difusos. De este modo se solicitará al usuario que introduzca tantas etiquetas como indique ese valor numérico y serán almacenadas en un vector de etiquetas.

```
1  generateLabel<- function(quantityNumbers){
2    VectorLabel = NULL
3    for(i in 1:quantityNumbers){
4      cat(paste("Insert the label of this fuzzy number
5              : ", i))
6      VectorLabel= c(VectorLabel,scan(,what =
7                    character(),1))
8    }
9    return(VectorLabel)
10 }
```

- (⊗) La función *tidyCorners(oneMatrix)* ordena de menor a mayor los valores de cada fila de la matriz recibida como parámetro. Se utilizan las funciones de *R* “*unsorted*” y “*order*” de la librería “*dplyr*”, con la que analizaremos, utilizando un bucle “*for*”, si cada fila está ordenada numéricamente de menor a mayor y, en caso contrario, el algoritmo procede a ordenarla. De esta forma obtendremos ordenada la matriz pasada por parámetro. Esta función se utiliza para asegurarse de que las esquinas de los números difusos están ordenadas de menor a mayor antes de aplicar afrontar las siguientes etapas.

```
1  tidyCorners<- function(oneMatrix){
2    for(i in 1: dim(oneMatrix)[1]){
3      if(is.unsorted(oneMatrix[i,]) ){
4        oneMatrix[i,]<-oneMatrix[i,][order(oneMatrix[i
5              ,])]
6      }
7    }
8    return(oneMatrix)
9  }
```

```
8 }

```

- (✕) La función *GenerateMatrixAdjacency(matrixFuzzy)* devolverá una matriz de adyacencia de tamaño $n \times n$, siendo n la cantidad de números difusos trapezoidales introducidos (es decir, el número de filas de la matriz obtenida con *generateFuzzy()* o bien introducida manualmente). Los elementos de esta matriz vienen dados por el siguiente criterio: el elemento (i, j) -ésimo toma el valor 1 si el i -ésimo número difuso es menor o igual que el j -ésimo (es decir, si $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$ cuando los números que se pretenden ordenar son $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$), y toma el valor 0 en caso contrario. Para determinar estos valores se emplea la función *Decision(FNa, FNb)* comentada en el Apéndice (véase la página 142), que devuelve un 1 si el número difuso *FNa* es menor o igual que el número difuso *FNb* (es decir, si se cumple la relación $FNa \preceq FNb$), o un 0 en caso contrario. De esta forma podemos comparar fácilmente todas las posibles parejas de números difusos que se pueden formar. Obsérvese que la diagonal principal de esta matriz está íntegramente formada por unos ya que la relación binaria difusa \preceq es reflexiva (es decir, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}$ sea cual sea el número difuso \mathcal{A}).

```
1  GenerateMatrixAdjacency <- function(matrixFuzzy ) {
2    matrizAdj <- matrix(nrow = dim(matrixFuzzy)[1],
3                        ncol = dim(matrixFuzzy)[1])#dimension nxn of
4                        quantity inicial matrix
5    for (i in 1:dim(matrixFuzzy)[1]){
6      for(j in 1:dim(matrixFuzzy)[1]){
7        if(i== j){ #compare the same number
8          matrizAdj[i,j] = 1
9        }else{
10         matrizAdj[i,j] = Decision(matrixFuzzy[i,],
11                                   matrixFuzzy[j,]) # the complete colum that is
12                                   the vector of the number
13       }
14     }
15   }

```

```
10     }  
11     }  
12     return(matrizAdj)  
13 }
```

- (✕) La función *SortMatrixAd(matrixFuzzy, v_or_label)* toma como argumentos una matriz (que debe ser la matriz de adyacencia generada por la función anterior) y un vector de etiquetas, que representa las etiquetas correspondientes a los números difusos que se compararon para obtener la matriz de adyacencia del primer argumento. Obsérvese que las etiquetas deben estar ordenadas en el mismo orden que se tomó para generar la matriz de adyacencia. Esta función devolverá unos argumentos similares a los introducidos, es decir, una matriz de adyacencia y un vector de etiquetas, con la condición de que la matriz estará ordenada (atendiendo a los unos que contenga) y el vector de etiquetas se habrá reordenado atendiendo al mismo criterio que se haya empleado para reordenar la matriz de adyacencia.

Para la implementación de esta función, en primer lugar, generamos un vector que contiene, en la posición i -ésima, la cantidad de unos que contiene la fila i -ésima de la matriz de adyacencia original. La idea es recorrer el vector n veces, buscando en cada iteración la fila que contiene el mayor número de unos, y colocándola en la primera posición. Así, en el primer bucle, se intercambia la primera fila con la fila que contenga el mayor número de unos, y después se repite el proceso con las filas siguientes dejando ya fija la primera. Estos cambios deben hacerse en el mismo orden en el vector de etiquetas. Tras cada iteración, la matriz de adyacencia debe generarse de nuevo pues los elementos de las columnas pueden cambiar dependiendo del orden de las filas. Para mejorar la eficiencia de este código, se ha tenido la precaución de que, si el máximo de unos coincide en varias filas, se almacenarán sus posiciones y sus etiquetas con objeto de intercambiar varias filas a la vez sin tener que realizar de nuevo la iteración completa.

Ante esta última situación (cuando varias filas tengan la misma cantidad de unos), se ha decidido que el intercambio sea en el mismo orden en el que es encontrado ese “máximo de unos”. Por ejemplo, si en cierta iteración el máximo está en las filas 3 y 6, se intercambia primero la fila 3 y, a continuación, se intercambia la fila 6. Es un criterio que afecta, como veremos más adelante, al dibujo del grafo, ya que ante esta situación es probable que se esté produciendo lo que hemos llamado un “ciclo” (es decir, un conjunto de números difusos que son dos a dos equivalentes, aunque sean diferentes). En este sentido se ha determinado que ese ciclo se dibuje siempre atendiendo a la posición que ocupaban los números difusos en la matriz original. Aunque no se ha hecho, hubiese sido también razonable establecer un algoritmo que, ante repeticiones de varias filas con la misma cantidad de unos, estas filas fuesen almacenadas en un vector del que, a posteriori, se irían tomando sus correspondientes valores de forma aleatoria, de manera que el dibujo representaría estos números mediante un bucle con posiciones aleatorias.

```
1  SortMatrixAd <- function(matrixFuzzy, v_or_label){
2    mymatrix <- GenerateMatrixAdjacency(matrixFuzzy)
3    for(i in 1:(dim(mymatrix)[1] - 1) ){
4      vectorOnes <- rowSums(mymatrix)
5      maximo <- 0
6      vectorCoinci <- c(0)
7      for(j in i:length(vectorOnes)){
8        if(maximo < vectorOnes[j]){ # more ones more
9          small
10         maximo <- vectorOnes[j]
11         posicionG <- j
12         numRepet = 1
13         vectorCoinci <- vectorCoinci[-(1:length(
14           vectorCoinci))]
15         vectorCoinci <- c(j)
```

```

14   }else if(maximo == vectorOnes[j]){
15     vectorCoinci <- c(vectorCoinci, j)
16   }
17
18   }
19   if (length(vectorCoinci) == 1){
20     saveNUM = matrixFuzzy[posicionG,]
21     saveETI = v_or_label[posicionG]
22     matrixFuzzy[posicionG,] <- matrixFuzzy [i,]
23     matrixFuzzy [i,] = saveNUM
24
25     v_or_label[posicionG] <- v_or_label[i]
26     v_or_label [i] = saveETI
27   }else{ # there are coincidences
28     saveNUM = matrixFuzzy[posicionG,]
29     saveETI = v_or_label[posicionG]
30     matrixFuzzy[posicionG,] <- matrixFuzzy [i,]
31     matrixFuzzy [i,] = saveNUM
32
33     v_or_label[posicionG] <- v_or_label [i]
34     v_or_label [i] = saveETI
35   }
36
37   mymatriz <-GenerateMatrixAdjacency(matrixFuzzy)
38   }
39   #return(mymatriz)
40   return(c(mymatriz, v_or_label))
41   }
42 }

```

(✕) La función *RecoverMatrixAdja(vector, dimension)* toma como argumentos un valor entero d (dimensión) y un vector que contiene d^2 números y d

etiquetas, y devuelve dichos números en forma de matriz de dimensión $d \times d$. Esta función está pensada para ser utilizada tras la función *SortMatrixAd*, ya que esta última devuelve la dupla como un vector, y no como una matriz, por lo que es necesario reconstruir la matriz adecuada con los d^2 valores del vector. Es importante utilizar la función “*as.numeric*” ya que los valores que tenemos en el vector serán considerados alfanuméricos (*string*), y las siguientes fases del algoritmo requieren de una matriz cuadrada con valores numéricos para seguir operando con ellos.

```

1 RecoverMatrixAdja <- function(vector, dimension){
2   matrixR <- matrix(nrow = dimension, ncol =
3     dimension)
4   for (i in 1:dimension){
5     for(j in 1:dimension){
6       matrixR[j,i] =as.numeric(vector[dimension*(i-1)+
7         j ])
8     }
9   }
10  return(matrixR)
11 }
```

(✕) La función *RecoverVectorLabel(vector, dimension)* es una función análoga a la anterior que se empleará para obtener las etiquetas del vector. Recordemos que la dupla que devuelve la función *SortMatrixAd(matrixFuzzy, v_or_label)* lleva en sus primeras posiciones los valores de la matriz, y en sus últimas posiciones, las etiquetas. Estas etiquetas deben ser rescatadas en el orden correcto.

```

1 RecoverVectorLabel <- function(vector, dimension){
2   VectorLabelRec <- 1:dimension
3   for(i in 1:dimension){
4     VectorLabelRec[i] <- vector[dimension*
5     dimension + i]
```

```
5     }
6     return(VectorLabelRec)
7 }
```

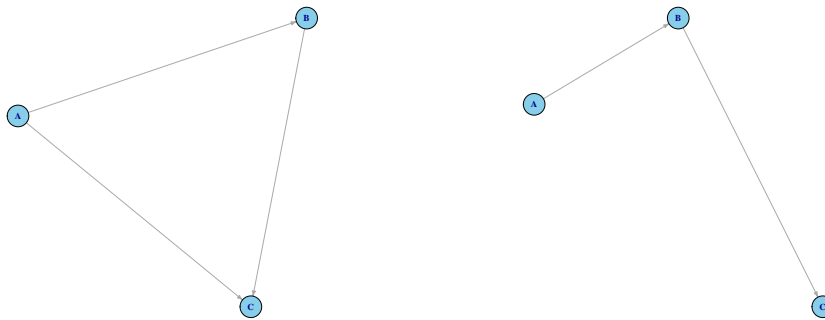
- (⊗) La función *CleanMatrixAd(matrixAd)* toma como argumento una matriz de adyacencia y devuelve una nueva matriz pero preparada ya para ser representada gráficamente, en la que se han eliminado las flechas que no aportan información, tal y como se comentó en la sección anterior. Su labor es esencial de cara a que el gráfico sea lo más sencillo posible, y aporte una gran cantidad de información con la menor cantidad de objetos posible.

```
1 CleanMatrixAd <- function(matrixAd){
2   vectorOnes <- rowSums(matrixAd)
3   counter <-1
4   while(counter <= dim(matrixAd)[1]-1){
5     if(vectorOnes[counter]> vectorOnes[counter +1]){
6       for(i in counter:dim(matrixAd)[1] ){
7         if(i >= counter +2){
8           matrixAd[counter ,i]=0
9         }
10        }
11       counter <- counter +1
12     }
13     else if(vectorOnes[counter]== vectorOnes[counter
14             +1]){
15       Repeated <-2
16       for(j in counter:dim(matrixAd)){
17         if(j >= counter +2){
18           if(vectorOnes[counter] == vectorOnes[j]){
19             Repeated<-Repeated +1
20           }
21         }
22       }#for
```

```
22     for(i in counter:dim(matrixAd)[1] ){ #move on
        cols
23     for(j in 0: Repeated-1){ #rows of cycles
24     if(i >= counter + Repeated && j == 0){ #first
        cycle
25     if (i > counter + Repeated){
26     matrixAd[j+ counter ,i]=0
27     }
28     }
29     else if(i >= counter + Repeated){
30     matrixAd[j+counter ,i]=0
31     }
32     }
33     }
34     counter <- counter + Repeated
35     }
36     }#while
37     return(matrixAd)
38 }
```

Como se ha comentado, esta función elimina de la matriz de adyacencia los lados innecesarios en la forma que puede observarse en la Figura 4.4: en la parte izquierda podemos observar los nodos A , B y C , estando todos interconectados de alguna forma, mientras que en la figura de la derecha se han eliminado los lados innecesarios, dando lugar a un gráfico mucho más intuitivo, pues se observa con claridad la ordenación $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C}$.

La programación y la ejecución de la función *CleanMatrixAd* puede tener dos posibles casos dependiendo de la matriz de adyacencia (la cual se recuerda que debe estar ya ordenada en función de su cantidad de unos). El primer caso ocurrirá cuando la fila siguiente a la que estamos considerando contenga menos unos que la fila actual. En este caso, bastará con quitar todos los unos que



(a) Grafo de tres elementos interconectados.

(b) Grafo de tres elementos sin lados redundantes.

Figura 4.4: Importancia de eliminar los lados redundantes.

aparezcan en dicha fila a partir de dos columnas más a la posición de nuestra fila. No obstante, también podría ocurrir lo siguiente. Imaginemos que el número de unos en la fila actual coincide con el número de unos de la fila siguiente. En este caso, se está produciendo un *ciclo*, es decir, una situación en la que varios números difusos, por ejemplo tres de ellos, verifican la relación $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{A}$. Para estos casos lo primero que haremos será detectar cuántas filas tienen la misma cantidad de unos que la actual y, a continuación, respetaremos la submatriz $r \times r$, siendo r la cantidad de filas que repiten el mismo número de unos. Todas las demás columnas de las filas correspondientes tendrán el valor 0. El único valor que será respetado será en la última fila de coincidencias (i) el valor de la columna $i + 1$. Veamos un ejemplo. Consideremos cinco números difusos \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} y \mathcal{E} , representados mediante las etiquetas A , B , C , D y E , que generan la siguiente matriz de adyacencia:

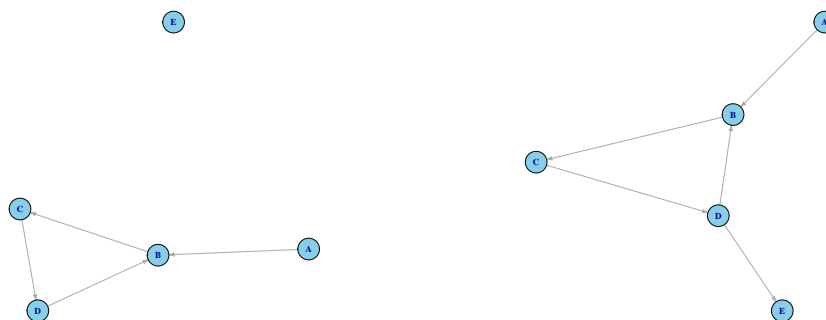
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente el número difuso \mathcal{A} será el menor, y el número \mathcal{E} el mayor, pero los números \mathcal{B} , \mathcal{C} y \mathcal{D} no tienen orden estricto entre ellos, sino que se produce un ciclo de la forma $\mathcal{B} \prec \mathcal{C} \prec \mathcal{D} \prec \mathcal{B}$. Si nos situamos en la fila 1, estaríamos ante la primera situación, y solo tendríamos que borrar los unos que aparecen a partir de la columna 3. Para el caso de las filas 2, 3 y 4, dado que contienen el mismo número de unos (3), debemos mantener inalterada la submatriz generada por las filas y las columnas 2, 3 y 4, y definiremos como ceros las posiciones que estén más allá de la cuarta columna (en este caso, haremos ceros en las filas 2, 3 y 4 de la quinta columna). Finalmente la última fila no necesitaría ningún retoque. Si ejecutamos este proceso tal cual, obtendríamos la siguiente matriz de adyacencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz da lugar a un problema: según la misma, el número difuso \mathcal{E} no está relacionado con ninguno de los otros números difusos, lo cual es imposible ya que la relación binaria \preceq verifica la propiedad de que, dados dos números difusos arbitrarios \mathcal{A} y \mathcal{B} , siempre se cumple que o bien $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, o bien $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$, o bien $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$. Si nos quedásemos con esta matriz de adyacencia, el gráfico correspondiente mostraría al vértice de etiqueta E sin conexión con otros nodos, tal y como se observa en la Figura 4.5, (a).

La programación de la función *CleanMatrixAd* tiene en cuenta esta situación, la cual se ha solucionado respetando la posición de la columna +1 de la última fila en la que coincidieron el mismo número de unos a la vez, de tal forma que ese último nodo será conectado con el siguiente. En verdad, cualquier nodo del ciclo podría haber sido conectado con el siguiente, por lo que hemos programado que sea el último de los que coincidieron en número de unos. Así, se representará la



(a) Hay un nodo sin relacionar. (b) Todos los nodos están relacionados.

Figura 4.5: Grafo de cinco nodos.

siguiente matriz de adyacencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que da lugar a la representación gráfica que podemos observar en la Figura 4.5, (b).

4.4. La función principal `menu()`

Las funciones que se han descrito hasta ahora son solo funciones auxiliares de la función principal, a la que invocaremos mediante el comando:

```
1 > menu()
```

Este comando ejecuta la función principal que nos servirá para introducir la información de los números difusos trapezoidales que se desean ordenar y

obtener la ordenación correspondiente, junto con el gráfico asociado. Esta función será la encargada de lanzar automáticamente las funciones anteriormente descritas dependiendo de la situación elegida por el usuario, asegurándose de minimizar el número de errores en ejecución por fallo de mal uso del usuario, así como facilitando el uso del paquete.

A continuación, mostramos el código con el que se ha definido la función `menu()`, y después comentaremos cómo usarlo.

```
1  menu <- function(){
2    if (!require('tidyverse')){
3      stop("Please, install library 'tidyverse' before
4         continuing.")
5    }
6    #install.packages("tidyverse")
7    library(tidyverse)
8    library(igraph)
9    library(FuzzyNumbers)
10   library(readxl)
11   library(dplyr)
12   cat(paste("Welcome the program,\nPress 1: If you
13      want to generate a number of random fuzzy numbers
14      \n"))
15   cat(paste("Press 2: If you want to manually enter
16      the fuzzy numbers\n"))
17   cat(paste("Press 3: If you want introduce a file .
18      xlsx (for example Prueba.xlsx)\n"))
19   Option<-scan(n=1)
20   if(Option == 1){
21     #Random Number
22     WorkMatrix <<- tidyCorners(generateFuzzy()) #is
23     global
24
25     VectorLabel <- generateLabel(dim(WorkMatrix)[1])
```

```
20     rownames(WorkMatrix)<-VectorLabel
21     cat(paste("The Fuzzy Numbers expressed by rows are\
      n"))
22     print(WorkMatrix)
23     testit(4)
24     Result <-SortMatrixAd(WorkMatrix, VectorLabel)
25     matrixRec <- RecoverMatrixAdja(Result, dim(
      WorkMatrix)[1])
26     LabelRec <- RecoverVectorLabel(Result, dim(
      WorkMatrix)[1])
27
28     cleanResult <- CleanMatrixAd(matrixRec)
29     colnames(cleanResult)<-LabelRec
30
31     MatrixDraw<- graph.adjacency(cleanResult, mode="
      directed", diag = FALSE) #make the graph
32     plot(MatrixDraw,vertex.label.font=2,vertex.label.
      cex=.8,
33           vertex.color=c("skyblue","tomato")[1+(
      LabelRec=="M")],edge.arrow.size=.4) #Draw
      the graph
34
35   }
36
37   if(Option == 2){
38     cat(paste("Insert the quantity of trapezoidal
      fuzzy numbers to carry out the ranking"))
39     amountNum<-scan(n=1)
40     # if a positive number has been loaded
41     if(amountNum>0){
42       # Initializing the vectors for parameters as
      null
43       a=NULL
```

```

44     b=NULL
45     c=NULL
46     d=NULL
47     VectorLabel = NULL
48
49     cat(paste("\nPlease, insert each fuzzy number
              through its corners (a,b,c,d) and a label (
              text)\n"))
50     cat(paste("\n(recall b=c if it is triangular)\n"
              ))
51     cat(paste("\n(make sure a<=b<=c<=d)\n"))
52
53     # caption of the corners of the fuzzy numbers
54     for(i in 1:amountNum){
55         cat(paste("\nCorners of the trapezoidal fuzzy
                  number",i,"are :\n"))
56         num=scan(nmax =4)
57         # We check that corners are correctly ordered
           as real numbers
58         if(num[1]<= num[2] && num[2]<= num[3] && num
           [3] <= num[4]){
59             a=c(a,num[1])#contain all a of fuzzy number
60             b=c(b,num[2])
61             c=c(c,num[3])
62             d=c(d,num[4])
63             # caption of labels
64             cat(paste("Insert the label of this fuzzy
                       number\n"))
65             VectorLabel= c(VectorLabel ,scan(,what =
                       character(),1))
66
67         }else{#there are some incorrect fuzzy number
68             cat(paste("Failure: corners are incorrectly

```

```
        ordered. END.))
69     return(0)
70   }
71
72   }
73 }
74 else{
75   cat(paste("Failure: incorrect quantity of fuzzy
              numbers. END.))
76   return(0)
77
78 }
79 WorkMatrix <- cbind(a, b, c, d)
80 rownames(WorkMatrix)<-VectorLabel
81 cat(paste("The Fuzzy Numbers expressed by rows are\
              n"))
82 print(WorkMatrix)
83 testit(4)
84
85 Result <-SortMatrixAd(WorkMatrix, VectorLabel)
86 matrixRec <- RecoverMatrixAdja(Result, dim(
              WorkMatrix)[1])
87 LabelRec <- RecoverVectorLabel(Result, dim(
              WorkMatrix)[1])
88
89 cleanResult <- CleanMatrixAd(matrixRec)
90 colnames(cleanResult)<-LabelRec
91
92 MatrixDraw<- graph.adjacency(cleanResult, mode="
              directed", diag = FALSE) #make the graph
93 plot(MatrixDraw,vertex.label.font=2,vertex.label.
              cex=.8,
94       vertex.color=c("skyblue", "tomato")[1+(
```

```
        LabelRec=="M")],edge.arrow.size=.4) #Draw
        the graph
95     }
96
97     if(Option == 3){
98         cat(paste("Remember each col represent corner of
          fuzzy numbers and the fifth col is the label\n"
          ))
99         cat(paste("Enter the name of file .xlsx"))
100        name <- scan(,what = character(),1)
101        fileN <- read_excel(name, sheet = 1, col_names =
          FALSE)
102        WorkMatrix <- matrix(nrow = dim(fileN)[1], ncol =
          4) #always have 4 col
103        VectorLabel <- c(0)
104        VectorLabel <- 1:dim(fileN)[1] #row dimension
105        for (i in 1:dim(fileN)[1]){
106            for(j in 1:dim(fileN)[2] ){
107                if(j== 5){#if there are laber, they are in col
          five
108                    VectorLabel[i] = fileN[i,j]
109                }else{
110                    WorkMatrix[i,j] = as.numeric(fileN[i,j])
111                }
112                #if is decimal number we use parse_double
          ("1,5", locale = locale(decimal_mark = ","))
113            }
114        }
115
116        rownames(WorkMatrix)<-VectorLabel
117        cat(paste("The Fuzzy Numbers expressed by rows are
          \n"))
```



```
118     print(WorkMatrix)
119     testit(4)
120
121     Result <- SortMatrixAd(WorkMatrix, VectorLabel)
122     matrixRec <- RecoverMatrixAdja(Result, dim(
123         WorkMatrix)[1])
124     LabelRec <- RecoverVectorLabel(Result, dim(
125         WorkMatrix)[1])
126
127     cleanResult <- CleanMatrixAd(matrixRec)
128     colnames(cleanResult) <- LabelRec
129
130     MatrixDraw <- graph.adjacency(cleanResult, mode="
131         directed", diag = FALSE) #make the graph
132     plot(MatrixDraw, vertex.label.font=2, vertex.label.
133         cex=.8,
134         vertex.color=c("skyblue", "tomato")[1+(
135             LabelRec=="M")], edge.arrow.size=.4) #Draw
136         the graph
137 }
138 }
```

Al ejecutar la función `menu()` se nos despliega un pequeño interfaz de texto pidiéndonos que indiquemos la forma en la que se introducirán los datos correspondientes a los números difusos que se desean ordenar.

```
1 > menu()
2 Welcome the program,
3 Press 1: If you want to generate a number of random
4         fuzzy numbers
5 Press 2: If you want to manually enter the fuzzy
```

```
numbers
5 Press 3: If you want to introduce a file .xlsx (for
   example Prueba.xlsx)
```

Habr  tres posibilidades, como comentamos a continuaci3n.

4.4.1. Generaci3n de números difusos trapezoidales aleatorios en un cierto rango

Si elegimos la primera opci3n que nos ofrece la funci3n `menu()`, el programa nos preguntará por la cantidad n de números difusos trapezoidales que deseamos generar y por el número N que representará el rango $[0, N]$ en el que se generarán dichos números difusos. Se ha programado que las etiquetas asociadas a estos números difusos serán los correspondientes números naturales según el orden en el que fueron generados. La etiqueta “3” corresponderá al tercer número difuso que se genere. Pudiera haberse programado que las etiquetas fuesen letras mayúsculas de nuestro alfabeto, pero ello contaría con una limitaci3n en el número de posibles etiquetas, además de que dificultaría la comprensi3n de los resultados a personas que no estuviesen familiarizadas con el orden de nuestro alfabeto.

Por el momento, solo se ha programado una distribuci3n uniforme utilizando valores enteros dentro del rango indicado. En pr3ximas versiones de la librería ofreceremos la posibilidad de que los v rtices se distribuyan atendiendo a distribuciones notables de probabilidad.

Esta opci3n es ideal si queremos probar el funcionamiento del paquete, observando los resultados que produce, y no queremos preocuparnos por introducir los datos cada vez que se ejecuta el programa, o bien si queremos trabajar con un número elevado de números difusos (elegidos al azar).

En la Secci3n 4.5 mostraremos c3mo emplear esta opci3n, generando 4 números difusos trapezoidales ($n = 4$) cuyos soportes est3n contenidos en el rango

$[0, 15]$ ($N = 15$).

4.4.2. Introducción manual de números difusos trapezoidales

Si elegimos la segunda opción, el programa nos preguntará cuántos números difusos trapezoidales deseamos comparar, y, a continuación, nos preguntará ordenadamente tanto por las cuatro esquinas de cada uno de ellos como por la etiqueta (en forma de texto) que deseamos asociarle a cada número difuso. Esta opción debe utilizarse cuando se desean comparar pocos números difusos cuyas esquinas son conocidas, y no queremos complicarnos generando un fichero *.xlsx* adecuado para cargarlos todos a la vez.

4.4.3. Introducción de datos mediante un archivo con extensión *.xlsx*

La última opción ofrece la posibilidad de cargar los datos desde un archivo con formato *.xlsx* distribuido en n filas (tantas como números difusos se quieran ordenar) y cinco columnas. Las primeras cuatro columnas serán numéricas, y contendrán las cuatro esquinas de los números difusos introducidos por filas (se entiende que dichas esquinas ya estarán ordenadas de menor a mayor). La última columna será de tipo carácter y contendrá las etiquetas asociadas a los números difusos, como se aprecia en la Figura 4.6.

Esta opción es ideal cuando se está manejando una gran cantidad de datos, cuyas esquinas son conocidas. De esta forma, se podrá ejecutar el programa de una forma cómoda en días diferentes, y se podrán añadir o quitar números difusos con facilidad, sin necesidad de volverlos a escribir en cada momento.

	A	B	C	D	E
1	5	11	11	12	A
2	8	8,5	11,6	15	B
3	0	10	15,3	20	C
4	1	2	3	4	D
5	18	19	19,5	22	E
6	28	29	29	35	F
7	28	29	29	35	G
8	20	30	37,8	40	H
9	38	39	39	42	I
10					

Figura 4.6: Datos importados desde un archivo con extensión `.xlsx`.

4.4.4. Ejecución de la rutina `menu()`

Tras introducir los datos mediante alguno de los tres procedimientos anteriores, el programa `menu()` trabajará de una forma común: generará la correspondiente matriz de adyacencia, ordenará los números difusos y presentará la información por pantalla. Antes de ello, el programa llamará a una función que hemos denominado `testit(time)`, que permitirá hacer un `sleep` al programa para que el usuario pueda observar, durante unos segundos, la información que ha introducido (por si hay alguna incorrección).

```

1  testit <- function(x){ #sleep program
2    p1 <- proc.time()
3    Sys.sleep(x)
4    proc.time() - p1 # The cpu usage should be
      negligible
5  }
```

Esta función es ideal para el caso de haber generado los datos aleatoriamente, donde el usuario no sabe a priori los números que va a usar, así como para el segundo caso, pues el usuario podrá revisar la información introducida.

Tras mostrar la matriz con las esquinas y las etiquetas, se genera la matriz de adyacencia y se ordenan los números difusos. Una vez ordenada la matriz de adyacencia, de cara a la representación del correspondiente grafo, se eliminarán

los unos que no sean útiles con la función *CleanMatrixAd*. Como resultado final, se representa gráficamente el grafo con los comandos *graph.adjacency* y *plot*.

Finalmente, teniendo en cuenta las necesidades del método Delphi en el que se establece un número difuso concreto como umbral con el que comparar para ver si se ha llegado al consenso, hemos programado que, si la etiqueta introducida asociada al número difuso es exactamente “*M*”, su nodo correspondiente se dibujará en color rojo, de forma que resaltará entre los demás y nos servirá para comparar los restantes nodos con este nodo resaltado en color rojo.

4.5. Ejemplos de utilización de la librería *RankingTraFNs*

Comenzamos cargando la librería *RankingTraFNs* tal y como se describió anteriormente. Una vez cargado el paquete, basta lanzar la función *menu()*. Vamos a elegir el modo 1, al que le vamos a solicitar que genere 4 números difusos ($n = 4$), cuyos soportes estén contenidos en el rango $[0, 15]$ ($N = 15$). Indicamos las etiquetas siguiendo el orden usual del alfabeto latino (*A*, *B*, *C* y *D*). El programa funcionaría de la siguiente forma.

```
1 > menu()
2 Welcome the program,
3 Press 1: If you want to generate a number of random
   fuzzy numbers
4 Press 2: If you want to manually enter the fuzzy
   numbers
5 Press 3: If you want to introduce a file .xlsx (for
   example Prueba.xlsx)
6 1: 1
7 Read 1 item
8 Insert the quantity of trapezoidal fuzzy numbers to
   carry out the ranking
```

```

9  1: 4
10 Read 1 item
11 Insert the range of random numbers
12 1: 15
13 Read 1 item
14 Insert the label of this fuzzy number 1
15 1: A
16 Read 1 item
17 Insert the label of this fuzzy number 2
18 1: B
19 Read 1 item
20 Insert the label of this fuzzy number 3
21 1: C
22 Read 1 item
23 Insert the label of this fuzzy number 4
24 1: D
25 Read 1 item
26 The Fuzzy Numbers expressed by rows are
27 [,1] [,2] [,3] [,4]
28 A    2    5   10   11
29 B    3    8   10   11
30 C    5    6   13   15
31 D    3    7   11   12

```

Gracias a la función *testit* podemos mostrar la matriz con las cuatro esquinas de los números difusos trapezoidales. Finalmente el programa generará un gráfico con el orden correcto entre los números difusos generados aleatoriamente, como se aprecia en la Figura 4.7.

Veamos ahora un ejemplo en el que los datos son cargados desde un fichero externo. Además, a uno de los números le vamos a poner la etiqueta “*M*”, simulando que estamos trabajando con el método Delphi, y este número va a representar el umbral que se ha establecido para alcanzar el consenso en la

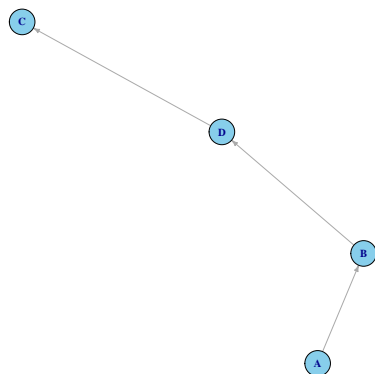


Figura 4.7: Representación gráfica de números difusos generados aleatoriamente.

correspondiente etapa del método. Suponemos que los datos están previamente almacenados en el archivo *Prueba.xlsx* tal y como se aprecia en la Figura 4.8.

	A	B	C	D	E
1	5	11	11	12	A
2	8	8,5	11,6	15	B
3	0	10	15,3	20	C
4	1	2	3	4	D
5	18	19	19,5	22	E
6	28	29	29	35	F
7	28	29	29	35	G
8	20	30	37,8	40	H
9	38	39	39	42	M

Figura 4.8: Ejemplo de datos introducidos desde un fichero *Prueba.xlsx*.

Describimos los resultados que aportaría una posible ejecución de este modo.

```

1 > menu()
2 Welcome the program,
3 Press 1: If you want to generate a number of random
   fuzzy numbers
4 Press 2: If you want to manually enter the fuzzy
   numbers

```

```
5 Press 3: If you want introduce a file .xlsx (for
   example Prueba.xlsx)
6 1: 3
7 Read 1 item
8 Remember each col represent corner of fuzzy numbers and
   the fifth col is the label
9 Enter the name of file .xlsx
10 1: Prueba.xlsx
11 Read 1 item
12 The Fuzzy Numbers expressed by rows are
13 [,1] [,2] [,3] [,4]
14 A    5 11.0 11.0 12
15 B    8  8.5 11.6 15
16 C    0 10.0 15.3 20
17 D    1  2.0  3.0  4
18 E   18 19.0 19.5 22
19 F   28 29.0 29.0 35
20 G   28 29.0 29.0 35
21 H   20 30.0 37.8 40
22 M   38 39.0 39.0 42
```

Tras ello, el programa nos devuelve el gráfico que se muestra en la Figura 4.9.

4.6. Aplicación informática para recogida de datos

Como hemos podido observar en los ejemplos anteriores, la tercera opción (introducción de datos mediante un archivo *.xlsx*) será posiblemente la más útil pues permite introducir los datos rápidamente y permite modificarlos a posteriori, incluso añadiendo o quitando valores. Teniendo en cuenta esta opción, nos

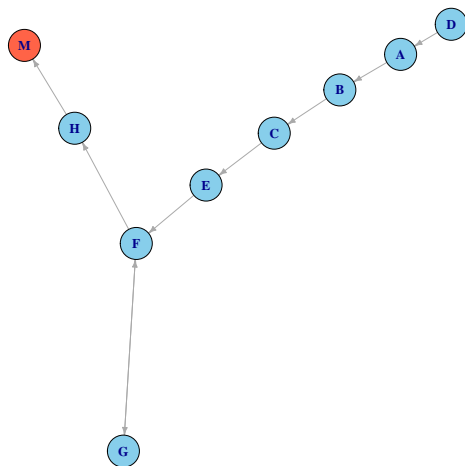


Figura 4.9: Representación gráfica de los datos introducidos desde un fichero *Prueba.xlsx*.

ha parecido interesante desarrollar una aplicación online en la que los expertos puedan introducir, de forma telemática, sus respectivas opiniones (en forma de números difusos trapezoidales) respecto de los ítems planteados en el cuestionario, de tal forma que se genere al final un archivo *.xlsx* que pueda ser empleado con posterioridad para la comparación de diversas opiniones. Para realizar esta tarea, hemos implementado una aplicación (en lenguaje *html* junto a *javascript*) que se puede hospedar en un servidor web, con la interfaz que se muestra en la Figura 4.10.

Como puede observarse, la aplicación solicita al usuario la introducción, mediante un procedimiento gráfico, de las esquinas de los números difusos que representarán sus respectivas opiniones respecto de los ítems del cuestionario. Para cada ítem aparece un *slider* con cuatro cuadrados (de diferentes colores) sobre el mismo, que se pueden mover de izquierda a derecha, y que representan las cuatro esquinas del número difuso trapezoidal. De esta forma, la introducción de los datos es muy intuitiva y se lleva a cabo de una forma completamente

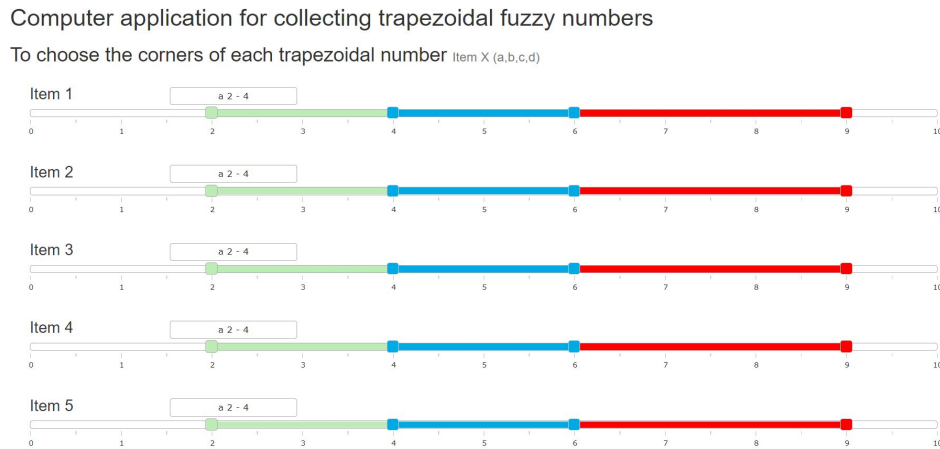


Figura 4.10: Interfaz de la aplicación para la introducción de datos desde Internet.

visual.

A continuación se muestra el código *html* de la página web de la aplicación. Como podemos observar, este código implementa *jquery* para poder poner botones en cada *slider*, y conseguir así el efecto óptico de tener cuatro puntos simbolizando las cuatro esquinas del número difuso trapezoidal.

```

1 <!DOCTYPE html>
2 <html>
3 <head>
4 <script data-require="jquery*" data-semver="2.1.1" src
   = "https://cdnjs.cloudflare.com/ajax/libs/jquery
   /2.1.1/jquery.min.js"></script>
5 <link data-require="jqueryui*" data-semver="1.10.0"
   rel="stylesheet" href="https://cdnjs.cloudflare.com/
   ajax/libs/jqueryui/1.10.0/css/smoothness/jquery-ui
   -1.10.0.custom.min.css" />
6 <link data-require="bootstrap*" data-semver="3.2.0"
   rel="stylesheet" href="https://maxcdn.bootstrapcdn.
   com/bootstrap/3.2.0/css/bootstrap.css" />
7 <script data-require="bootstrap*" data-semver="3.2.0"
   src="https://maxcdn.bootstrapcdn.com/bootstrap

```

```
    /3.2.0/js/bootstrap.js"></script>
8 <script data-require="jqueryui*" data-semver="1.10.0"
    src="https://cdnjs.cloudflare.com/ajax/libs/jqueryui
    /1.10.0/jquery-ui.js"></script>
9 <link rel="stylesheet" href="style.css" />
10 <script src="slider.js"></script>
11 <script src="script.js"></script>
12 </head>
13 <body>
14 <h1>Computer application for collecting trapezoidal
    fuzzy numbers</h1>
15 <h2>To choose the corners of each trapezoidal number <
    small>Item X (a,b,c,d)</small></h2>
16 <div class="col-xs-12">
17 <div class="col-xs-12">
18 <h3>Item 1</h3>
19 <div class="slider sleep" id="slider1"></div>
20 </div>
21 <div class="col-xs-12">
22 <h3>Item 2</h3>
23 <div class="slider sleep" id="slider2"></div>
24 </div>
25 <div class="col-xs-12">
26 <h3>Item 3</h3>
27 <div class="slider sleep" id="slider3"></div>
28 </div>
29 <div class="col-xs-12">
30 <h3>Item 4</h3>
31 <div class="slider sleep" id="slider4"></div>
32 </div>
33 <div class="col-xs-12">
34 <h3>Item 5</h3>
35 <div class="slider sleep" id="slider5"></div>
```

```
36 </div>
37 <div class="col-xs-12">
38 <h3>Item 6</h3>
39 <div class="slider sleep" id="slider6"></div>
40 </div>
41 <div class="col-xs-12">
42 <h3>Item 7</h3>
43 <div class="slider sleep" id="slider7"></div>
44 </div>
45 </div>
46 </body>
47 </html>
```

A decir verdad, esta aplicación se encuentra aún en fase de desarrollo, pues al tratar de implementar el código anterior en un dominio web hay que establecer ciertos requisitos de seguridad con objeto de evitar la pérdida de datos, así como un mal uso por parte de usuarios que pueda provocar la caída del servidor. Por ello, esta tarea constituirá una posible ampliación al proyecto de tesis actual. Actualmente, la solución más viable es la de establecer una página principal que requiera de autenticación y, seguidamente, el usuario podrá generar tantos archivos de tipo *.xlsx* como desee. Para generar los datos, el usuario debe desplazar el slider a la posición que más se ajuste a su propia opinión respecto de item del cuestionario, como podemos observar en la Figura 4.11.

Computer application for collecting trapezoidal fuzzy numbers

To choose the corners of each trapezoidal number Item X (a,b,c,d)



Figura 4.11: Diferentes números difusos trapezoidales introducidos por Internet desde la aplicación.

A continuación, abriremos una suite ofimática (en nuestro caso hemos utilizado *Microsoft Excel*) y, tras situarnos en la ventana “*Datos*”, seleccionaremos la opción para obtener datos externos “*Desde web*”, tal y como se aprecia en la Figura 4.12.

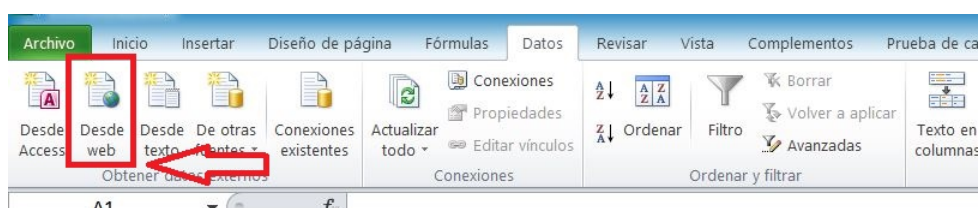


Figura 4.12: Selección de datos “*Desde web*” en *Microsoft Excel*.

Una vez ahí, aparecerá un submenú donde solo tendremos que poner la dirección web, y conseguiremos exportar los datos como podemos observar en la Figura 4.13.

Computer application for colleting trapezoidal fuzzy numbers				
To choose the corners of each trapezoidal number Item X (a,b,c,d)				
Item 1	1,36	2,74	4,31	6,45
Item 2	3	4	7	8
Item 3	0,57	2,94	4	7,2
Item 4	3	4	5,5	6,5
Item 5	0,3	2	5	9
Item 6	2	3	3,5	5
Item 7	1,5	2	3	5

Figura 4.13: Datos en *Excel* recogidos desde Internet.

Finalmente basta con que el usuario envíe al moderador del proceso Delphi los archivos generados, de tal forma que este pueda recabar la información correspondiente a cada uno de los expertos que participan en el proceso, juntarla en sucesivos archivos (uno para cada ítem del cuestionario) y analizarla mediante la aplicación de la función `menu()` que proporciona la librería *RankingTraFNs* o bien desde *R* o bien desde *R-Studio*.

CAPÍTULO 5

Conclusiones

A la vista de los objetivos planteados en el primer capítulo y de los resultados mostrados en el tercero, es conveniente finalizar la presente Memoria haciendo recapitulación de los logros alcanzados, de los propósitos que no se han llegado a cumplir, de las conclusiones que puede extraerse del presente estudio y de las líneas de investigación que se abren ante nosotros para ser desarrolladas en un futuro cercano.

Comenzamos analizando el grado de consecución de algunos de los objetivos que nos planteamos al inicio de la investigación.

- ✓ Al comienzo, se realizó un estudio inicial y una revisión bibliográfica en profundidad de aquellos artículos científicos relacionados con los temas de investigación en los que estábamos interesados, prestando especial atención a aquellas contribuciones que pueden considerarse “estados del arte”. Muchos de dichos trabajos (pero no todos) están recogidos en la bibliografía incluida en la presente Memoria.
- ✓ Hemos puesto de manifiesto nuevas propiedades de la relación binaria difusa \preceq introducida por Roldán López de Hierro, Roldán y Herrera en [68]. Especialmente, hemos descubierto algunas relaciones de interés entre la misma y algunas estructuras algebraicas esenciales, como pueden ser la

suma y el producto de números difusos triangulares.

- ✓ Se ha introducido una noción de *función de agregación* entre números difusos triangulares con soporte acotado y no negativo. Dicho concepto depende directamente de una relación binaria arbitraria, la cual sirve para establecer una condición de monotonía. No obstante, se ha planteado una discusión sobre diferentes posibilidades para establecer el significado de una función no decreciente entre números difusos triangulares.
- ✓ Hemos propuesto una nueva metodología de actuación para la toma de decisiones en el contexto difuso basadas en múltiples criterios. En concreto, tanto las opiniones de los expertos como los pesos de los diferentes criterios se han implementado como números difusos triangulares, y se ha empleado la noción de función de agregación difusa para agrupar la información cuando ha sido necesario.
- ✓ Se ha utilizado una subfamilia de números difusos muy particular (de tipo parabólico) para representar la valoración final de cada una de las diferentes alternativas del proceso de toma de decisiones, las cuales han sido ordenadas de cara a seleccionar la mejor alternativa.
- ✓ Hemos demostrado que el proceso anterior verifica una propiedad de robustez muy importante: si todos los expertos coinciden en que una alternativa es mejor que las demás, el proceso siempre lleva a la selección de dicha alternativa, aun cuando las opiniones sean expresadas empleando un cierto grado de incertidumbre.
- ✓ Se ha propuesto también un nuevo método Delphi para la consecución de acuerdos entre expertos cuando estos expresan sus opiniones en forma de números difusos triangulares.
- ✓ Se ha desarrollado una herramienta informática para la recogida telemática de información en forma de números difusos trapezoidales. Dicha herramienta es visual y muy intuitiva.

-
- ✓ Se ha implementado una nueva librería en *R*, denominada *RankingTFNs*, que mejora a la librería anterior en muchos aspectos: por ejemplo, permite ordenar una cantidad finita de números difusos trapezoidales, introducidos de diversas formas, y representa gráficamente la ordenación obtenida, lo que aporta información visual rápida al investigador.
 - ✓ Finalmente, mediante la redacción de la presente Memoria, hemos elaborado un texto en castellano que permite al público en general acceder a algunas de las metodologías más modernas que se emplean en la investigación actual en el campo de la teoría de conjuntos y números difusos.

No queremos dejar pasar la ocasión para destacar algunas de las características del método Delphi difuso que se ha propuesto. Como el lector puede comprobar, se ha desarrollado un enfoque teórico y metodológico sencillo que permite diversas aplicaciones en un gran número de áreas. Dicho método puede emplearse sin un paso de defusificación, es decir, sin reducir los datos a números reales y sin perder la información que contienen los números difusos. Además, se ha considerado una amplia gama de números difusos para recoger los juicios de los expertos. Una de las ventajas de esta nueva metodología consiste en el hecho de que estas opiniones se implementan como números difusos, lo que enriquece las diferentes formas de expresar una opinión (tal vez subjetiva y basada en la experiencia personal vivida con anterioridad). Además, estas valoraciones se recolectan a través de una aplicación informática que es capaz de recoger e interpretar las opiniones de los expertos como números difusos trapezoidales. Para afrontar la dificultad asociada a la ordenación de números difusos, se ha propuesto emplear una metodología de ordenación difusa introducida muy recientemente, la cual permite determinar si la opinión difusa del experto respecto de la cuestión planteada es lo suficientemente favorable (comparando con un número difuso fijado a priori que se interpreta como “*De acuerdo*” o “*Totalmente de acuerdo*”).

En el caso tradicional, los estudios Delphi previos suelen considerar un cierto nivel de acuerdo previamente fijado (por ejemplo, más del 80 % de concordancia).

cia en una escala Likert de 5 puntos para los dos valores más altos, “*deseable*” y “*altamente deseable*”) como un *consenso* [42]. En esta investigación, hemos propuesto un método que trata de ampliar esta idea al contexto difuso: el moderador establece un número difuso particular para indicar “*De acuerdo*” (o “*Totalmente de acuerdo*”), y será esa persona quien comparará la opinión de cada experto con este umbral difuso utilizando el método de ordenación difusa que se considere más oportuno. A continuación, el cálculo del porcentaje de la cantidad de opiniones de los expertos que son mayores o iguales que este umbral determina si se ha alcanzado o no el nivel suficiente de consenso. Además, alcanzar un grado adecuado de consenso también puede requerir que los expertos no necesiten hacer ningún comentario sobre la solución propuesta al problema planteado (lo que se interpreta como la imposibilidad de mejorar la propuesta concreta a la que se haya llegado).

Para ser justos, debemos también comentar algunas de las expectativas iniciales que no se han alcanzado. Entre ellas, no hemos tenido tiempo de indagar acerca de la no transitividad de la relación binaria difusa introducida en [68]. Esperábamos poder comprenderla en profundidad de tal manera que fuésemos capaces de modificarla ligeramente hasta alcanzar una nueva relación binaria difusa que sí fuese transitiva y que pudiese ser empleada a modo de orden parcial. Por otro lado, seguimos trabajando en el ámbito de las funciones de agregación difusas y de su interpretación en términos de medidas de centralización en distribuciones de probabilidad.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos y la forma en la que se han obtenido, consideramos que se ha abierto ante nosotros todo un campo de investigación con multitud de problemas abiertos que deberemos afrontar en los próximos años. Entre ellos, destacamos algunos por su interés desde nuestro punto de vista.

- ¿Cómo se pueden llevar a cabo los procedimientos introducidos si los datos de entrada no son ni triangulares ni trapezoidales? ¿Qué modificaciones podrían proponerse?

-
- ▶ Es más, si los datos de entrada son conjuntos difusos, ¿cómo podrían aproximarse éstos por números difusos de una cierta clase con objeto de poder aplicar las técnicas introducidas?
 - ▶ ¿Cómo pudieran definirse funciones de agregación difusas en contextos aún más generales?
 - ▶ ¿Qué relaciones binarias difusas podrían emplearse para establecer una condición de monotonía adecuada sobre dichas funciones de agregación?
 - ▶ ¿Qué nuevas propiedades de utilidad verifica la relación binaria difusa \preceq ? ¿En qué contextos pueden emplearse? ¿Son estas propiedades acordes con la intuición humana?
 - ▶ ¿Qué aplicaciones prácticas pueden desarrollarse empleando los contenidos teóricos que se han presentado?
 - ▶ ¿Qué nuevas propiedades verifica la familia de números difusos parabólicos obtenida como productos de números difusos triangulares propios? ¿En qué contextos aparece y cómo puede ser utilizada de manera natural?

A. Funciones implementadas en la librería *RankingTwoTraFNs*

Con la ayuda del doctorando, las siguientes funciones fueron creadas para su inclusión en la librería *RankingTwoTraFNs* de cara a la tesis doctoral de D. Antonio Márquez Montávez (véase [54]). Se incluyen a continuación con objeto de que la presente Memoria sea lo más autocontenida posible.

Supongamos que deseamos ordenar dos números difusos trapezoidales $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4)$ y $\mathcal{B} = (b_1/b_2/b_3/b_4)$ de los que conocemos sus respectivas cuatro esquinas. Identificaremos dichos números difusos como vectores en \mathbb{R} descritos como $FNa = c(a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $FNb = c(b_1, b_2, b_3, b_4)$. Describimos a continuación las siguientes funciones.

(✂) La función $LeftInterval(a, b)$ toma como argumentos dos vectores $a = c(a_1, a_2)$ y $b = c(b_1, b_2)$ que representan las dos esquinas inferiores de cada uno de los números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} , a saber, a_1, a_2, b_1 y b_2 , y devuelve el subintervalo compacto (cerrado y acotado) $I \subseteq \mathbb{I}$ formado por todos aquellos valores α tales que $\underline{a}_\alpha \leq \underline{b}_\alpha$. Dicho intervalo viene descrito como un vector $c(\alpha, \beta)$, donde α y β son los extremos de dicho intervalo. Si dicho intervalo es vacío, devuelve el vector $c(-1, -1)$ (en lo que sigue, utilizamos el número -1 para indicar si hay algún error).

```
1 LeftInterval= function(a, b){
2   a1<-a[1]
```

```

3     a2<-a[2]
4     b1<-b[1]
5     b2<-b[2]
6     if(a1<= b1 && a2 <= b2){
7         return(c(0,1))
8     } else if(b1<a1 && b2<a2){
9         return(c(-1,-1))
10    } else if(a1<=b1 && b1<=b2 && b2<= a2){
11        y1<-abs(a1-b1)/(abs(a1-b1) + abs(a2-b2))
12        return(c(0,y1))
13    } else if(b1<=a1 && a1 <= a2 && a2<= b2){
14        y1<-abs(a1-b1)/(abs(a1-b1) + abs(a2-b2))
15        return(c(y1,1))
16    } else{# some paremeter is wrong
17        cat(paste("Something's wrong:
18            Failure in function -LeftInterval-."))
19    }
20 }

```

(⊠) La función *RightInterval*(a, b) toma como argumentos dos vectores $a = c(a_3, a_4)$ y $b = c(b_3, b_4)$ que representan las dos esquinas superiores de cada uno de los números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} , a saber, a_3, a_4, b_3 y b_4 , y devuelve el subintervalo $I \subseteq \mathbb{I}$ formado por todos aquellos valores α tales que $\bar{a}_\alpha \leq \bar{b}_\alpha$. Dicho intervalo viene descrito como un vector $c(\alpha, \beta)$, donde α y β son los extremos de dicho intervalo. Si dicho intervalo es vacío, devuelve el vector $c(-1, -1)$.

```

1 RightInterval= function(a,b){
2     a3<-a[1]
3     a4<-a[2]
4     b3<-b[1]
5     b4<-b[2]

```

```

6     if(a3<= b3 && a4 <= b4){
7         return(c(0,1))
8     } else if(b3<a3 && b4<a4){
9         return(c(-1,-1))
10    } else if(a3<=b3 && b3<=b4 && b4<= a4){
11        y2<-abs(a4-b4)/(abs(a3-b3) + abs(a4-b4))
12        return(c(y2,1))
13    } else if(b3<=a3 && a3 <= a4 && a4<= b4){
14        y2<-abs(a4-b4)/(abs(a3-b3) + abs(a4-b4))
15        return(c(0,y2))
16    } else{# some parameter is wrong
17        cat(paste("Something's wrong:
18            Failure in function -RightInterval-."))
19    }
20 }

```

(⊗) La función $Intersection(i_1, i_2)$ toma como argumentos dos intervalos compactos i_1 e i_2 (descritos como vectores $c(i_{j1}, i_{j2})$) y determina su intersección $i_1 \cap i_2$ (también descrita como un vector $c(\alpha, \beta)$). Si dicho intervalo es vacío, devuelve el vector $c(-1, -1)$.

```

1 Intersection= function(i1,i2){
2     alfa1<-i1[1]
3     beta1<-i1[2]
4     alfa2<-i2[1]
5     beta2<-i2[2]
6     if(alfa1 == -1 || alfa2 == -1){
7         return(c(-1,-1))
8     }
9     else {
10        if(max(alfa1, alfa2)<= min(beta1, beta2)){
11            return(c(max(alfa1, alfa2),min(beta1, beta2)))

```



```

12     } else{
13         return(c(-1,-1))
14     }
15 }
16 }

```

- (⊗) La función $Interval(FNa, FNb)$ toma como argumentos dos números difusos trapezoidales $FNa = c(a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $FNb = c(b_1, b_2, b_3, b_4)$ y devuelve el intervalo $\mathbb{I}_{A,B}$ visto como un vector $c(\alpha, \beta)$. Si dicho intervalo es vacío, devuelve el vector $c(-1, -1)$.

```

1 Interval= function(FNa, FNb){
2     return(Intersection(
3         LeftInterval(c(FNa[1], FNa[2]), c(FNb[1], FNb[2])),
4         RightInterval(c(FNa[3], FNa[4]), c(FNb[3], FNb[4]))
5     ))
6 }

```

- (⊗) La función $LengthInterval(i)$ toma un intervalo compacto i (visto como un vector $c(\alpha, \beta)$) y devuelve su longitud $\beta - \alpha$ (que es un número real). Si el intervalo es vacío, devuelve -1 .

```

1 LengthInterval= function(i){
2     if(i[1]==-1 )
3         return(0)
4     else
5         return(i[2]-i[1])
6 }

```

- (✕) La función $Decision(FNa, FNb)$ toma como argumentos dos números difusos trapezoidales $FNa = c(a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $FNb = c(b_1, b_2, b_3, b_4)$ y devuelve $TRUE$, si $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, y $FALSE$, si la ordenación $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ es falsa.

```

1 Decision= function(FNa, FNb){
2   lengthAB<- LengthInterval(Interval(FNa, FNb))
3   lengthBA<- LengthInterval(Interval(FNb, FNa))
4   if(lengthAB>0 && lengthAB>=lengthBA)
5     return(TRUE)
6   else if(lengthAB==0&&lengthBA==0&&(sum(FNa)<=sum(FNb
7     )))
8     return(TRUE)
9   else
10    return(FALSE)
}
```

- (✕) La función $Ranking2TraFN(FNa, FNb, TextoA, TextoB)$ toma como argumentos dos números difusos trapezoidales $FNa = c(a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $FNb = c(b_1, b_2, b_3, b_4)$ y las respectivas etiquetas $TextoA$ y $TextoB$ con las que deseamos nombrarlos, y devuelve la siguiente cadena de caracteres:

$$\begin{cases} TextoA \sim TextoB, & \text{si } \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ y } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A} \text{ son ciertas a la vez,} \\ TextoA < TextoB, & \text{si } \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ es cierta y } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A} \text{ es falsa,} \\ TextoA > TextoB, & \text{si } \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ es falsa y } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A} \text{ es cierta.} \end{cases}$$

Obsérvese que esta función nos solicita las etiquetas lingüísticas con las que denotaremos a los números difusos. Es usual llamar “A” a primer número difuso y “B” al segundo. De esta forma, la función nos ofrecerá una de las tres siguientes salidas: “ $A < B$ ”, “ $A \sim B$ ” o “ $A > B$ ”. No obstante, cuando se trabaja con más de dos números difusos, es usual emplear otras etiquetas. En este caso, si escribimos otras etiquetas lingüísticas, podríamos obtener salidas como “ $C < D$ ”, “ $A1 \sim B2$ ” o “ $FN1 > FN2$ ”. Dependerá del texto que introduzcamos en los argumentos.

```
1 Ranking2FN = function(FNa, FNb, texta, textb){
2   AlessB<- Decision(FNa, FNb)
3   BlessA<- Decision(FNb, FNa)
4   if(AlessB == TRUE && BlessA == TRUE)
5     return(paste(texta, "~", textb))
6   else if(AlessB == TRUE && BlessA == FALSE)
7     return(paste(texta, "<", textb))
8   else if(AlessB == FALSE && BlessA == TRUE)
9     return(paste(texta, ">", textb))
10  else
11    cat(paste("Something's wrong:
12           Failure in function -Ranking2FN-."))
13 }
```

Índice de Figuras

2.1. Ejemplos de diferentes clases de números difusos.	12
2.2. El núcleo y el soporte de un número difuso trapezoidal.	14
2.3. Un número difuso cuyo soporte no es compacto.	14
2.4. Número difuso <i>crisp</i>	15
2.5. Número difuso trapezoidal (comparado con uno triangular).	16
2.6. Número difuso rectangular.	17
2.7. Número difuso triangular.	18
2.8. Distintas clases de números difusos trapezoidales (generalizados). . .	18
2.9. Números difusos triangulares no continuos.	19
2.10. Ejemplos de números difusos triangulares (simétrico y no simétrico).	19
2.11. Número difuso trapezoidal.	20
2.12. Número difuso triangular.	22
2.13. Numeros difusos no lineales cuyas funciones de pertenencia se obtiene a través de funciones de distribución.	23
2.14. Número difuso de tipo LR obtenido al representar los intervalos dados mediante $IC(\mu) = \left[\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ variando $\alpha \in \mathbb{I}$	23
2.15. Números difusos trapezoidales que representan las etiquetas de la va- riable lingüística utilidad de una herramienta.	25

2.16. Representación gráfica de la suma de dos números difusos triangulares.	27
2.17. ¿Está el número difuso \mathcal{A} situado a la izquierda del número difuso \mathcal{B} ?	28
2.18. Diferentes situaciones en las que $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.	29
3.1. Dos clases de números difusos triangulares no continuos (véase también la representación de un número real en la Figura 2.1.b).	45
3.2. Aunque $a_1 < b_1$ y $a_3 < b_3$, se verifica que $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$.	48
3.3. Dos posibilidades en las que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ y uno de ellos está estrictamente situado por debajo del otro.	50
3.4. Representación gráfica de los números difusos triangulares del Ejemplo 3.3.1.	54
3.5. Ejemplo de la representación gráfica de un número difuso parabólico.	58
3.6. Representación gráfica de los números difusos del Ejemplo 3.4.3 (\mathcal{A} y \mathcal{B} son triangulares; \mathcal{AC} y \mathcal{BC} , parabólicos).	64
3.7. Representación gráfica de las diferencias consideradas en el Corolario 3.4.4.	65
3.8. Representación gráfica de los números difusos parabólicos 1.625_{QF} (en color rojo) y 1.967_{QF} (en color azul).	69
3.9. Ejemplo de una respuesta difusa recogida en un formulario escrito utilizando una escala visual analógica.	74
3.10. Programa que recoge, de forma visual y a través de Internet, valoraciones en forma de números difusos triangulares (versión inicial).	75
3.11. Programa que recoge, de forma visual y a través de Internet, valoraciones en forma de números difusos trapezoidales (versión desarrollada).	75
3.12. Datos basados en la escala de valoración difusa de los 13 expertos sobre el Ítem 1 en azul y el número difuso de comparación, \mathcal{C} , en rojo.	80

3.13. Datos difusos correspondientes a las 13 opiniones de expertos (en color azul) ordenados para cada ronda para el Ítem 1, mostrando la evolución del consenso al comparar con el número difuso \mathcal{C} (en color rojo).	81
3.14. Datos difusos correspondientes a las 13 opiniones de los expertos para cada ronda y cada ítem (en azul), y el número difuso de comparación \mathcal{C} (en rojo).	83
3.14. <i>Continuación.</i>	84
3.14. <i>Continuación.</i>	85
4.1. Instalación de la librería <i>RankingTraFNs</i> desde un archivo local. . .	95
4.2. Representaciones gráficas obtenidas con las librerías (a) <i>RankingTwoTraFNs</i> ; y (b) <i>RankingTraFNs</i>	97
4.3. Los dos gráficos representan la misma información.	98
4.4. Importancia de eliminar los lados redundantes.	110
4.5. Grafo de cinco nodos.	112
4.6. Datos importados desde un archivo con extension <i>.xlsx</i>	121
4.7. Representación gráfica de números difusos generados aleatoriamente.	124
4.8. Ejemplo de datos introducidos desde un fichero <i>Prueba.xlsx</i>	124
4.9. Representación gráfica de los datos introducidos desde un fichero <i>Prueba.xlsx</i>	126
4.10. Interfaz de la aplicación para la introducción de datos desde Internet.	127
4.11. Diferentes números difusos trapezoidales introducidos por Internet desde la aplicación.	130
4.12. Selección de datos “Desde web” en <i>Microsoft Excel</i>	130
4.13. Datos en <i>Excel</i> recogidos desde Internet.	131

Índice de Tablas

2.1. Equivalencias entre etiquetas lingüísticas y números triangulares. . .	25
3.1. Valoraciones difusas de alternativas y criterios según el experto E_1 . .	68
3.2. Valoraciones difusas de alternativas y criterios según el experto E_2 . .	68
3.3. Pesos difusos atribuidos a cada criterio por cada experto.	68
3.4. Resultados de las rondas del método Delphi difuso destacando, en color gris, las razones por las que un ítem debe incluirse en la siguiente ronda.	86

Bibliografía

- [1] W.A. Abbas, M. Ramadan, A.Y. Faid, A.M. Abdellah, A. Ouf, N. Moustafa, N.K. Allam. *Cross-cultural adaptation of research instruments: language, setting, time and statistical considerations*. BMC Med. Res. Methodol. **10** (13) (2018).
- [2] S. Abbasbandy, M. Amirfakhrian. *A new approach to universal approximation of fuzzy functions on a discrete set of points*. Appl. Math. Model. **30** (2006), 1525-1534.
- [3] S. Abbasbandy, M. Amirfakhrian. *The nearest trapezoidal form of a generalized left right fuzzy number*. Int. J. Approx. Reason. **43** (2006), 166-178.
- [4] S. Abbasbandy, B. Asady. *Note on A new approach for defuzzification*. Fuzzy Sets Syst. **128** (2002), 131-132.
- [5] S. Abbasbandy, B. Asady. *Ranking of fuzzy numbers by sign distance*. Inform. Sci. **176** (2006), 2405-2416.
- [6] S. Abbasbandy, T. Hajjari. *A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers*. Comput. Math. Appl. **57** (3) (2009), 413-419.
- [7] S. Abbasbandy, T. Hajjari. *An improvement on centroid point method for ranking of fuzzy numbers*. J. Sci. I.A.U. **78** (2011), 109-119.
- [8] M. Adamo. *Fuzzy decision trees*. Fuzzy Sets Syst. **128** (2002) 131-132.

-
- [9] O. AlDhafer, I. Ahmad, S. Mahmood. *An end-to-end deep learning system for requirements classification using recurrent neural networks*. Information and Software Technology **147** (2022), art. no. 106877.
- [10] G. Alfonso, A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán. *A fuzzy regression model based on finite fuzzy numbers and its application to real-world financial data*. J. Comput. Appl. Math. **318** (2017), 47-58.
- [11] S. Alonso, F.J. Cabrerizo, F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma. *Group decision making with incomplete fuzzy linguistic preference relations*. Int. J. Intell. Syst. **24** (2009), 201-222.
- [12] B. Asady. *The revised method of ranking LR fuzzy number based on deviation degree*. Expert Syst. Appl. **37** (2010), 5056-5060.
- [13] J.F. Baldwin, N.C.F. Guild. *Comparison of fuzzy numbers on the same decision space*. Fuzzy Sets Syst. **2** (1979), 213-233.
- [14] A.I. Ban, L. Coroianu. *Simplifying the search for effective ranking of fuzzy numbers*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **23** (2) (2015), 327-339.
- [15] M. Banno, Y. Tsujimoto, Y. Kataoka. *Reporting quality of the Delphi technique in reporting guidelines: A protocol for a systematic analysis of the EQUATOR Network Library*. BMJ Open. **9** (2019), 1-4.
- [16] S. Bass, H. Kwakernaak. *Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets*. Automatica **13** (1977), 47-58.
- [17] J.L. Borade, M.A. Lakshmi. *Multi-class object detection system using hybrid convolutional neural network architecture*. Multimedia Tools and Applications, 2022.
- [18] G. Bortolan, R. Degani. *A review of some methods for ranking fuzzy numbers*. Fuzzy Sets Syst. **15** (1985), 1-19.
- [19] J.J. Buckley, L.J. Jowers. *Monte Carlo methods in fuzzy optimization*. Studies in Fuzziness and Soft Computing **222** (2008), Springer.

-
- [20] H. Bustince, J. Fernández, A. Kolesárová, R. Mesiar. *Directional monotonicity of fusion functions*. Eur. J. Oper. Res. **244** (1) (2015) 300-308.
- [21] M. Byrne, J. Sharry, O. Meade, K.L. Lavoie, S.L. Bacon. *An international Delphi consensus study to identify priorities for methodological research in behavioural trials: A study protocol*. HRB Open Res. **21** (2020), 1-13.
- [22] A. Castillo, S. Tabik, F. Pérez, R. Olmos, F. Herrera. *Brightness guided preprocessing for automatic cold steel weapon detection in surveillance videos with deep learning*. Neurocomputing **330** (2019), 151-161.
- [23] W.K. Chang. *Ranking of fuzzy utilities with triangular membership functions*. In: International Conference on Policy Analysis and Information Systems, Tamkang University, ROC, 1981, 163-171.
- [24] S. Chen. *Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set*. Fuzzy Sets Syst. **17** (1985), 113-129.
- [25] S.J. Chen, C.L. Hwang. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [26] L.-H. Chen, H.-W. Lu. *An approximate approach for ranking fuzzy numbers based on left and right dominance*. Comput. Math. Appl. **41** (12) (2001), 1589-1602.
- [27] C.H. Cheng. *A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method*. Fuzzy Sets Syst. **95** (1998), 307-317.
- [28] K-P. Chiao. *The multi-criteria group decision making methodology using type 2 fuzzy linguistic judgments*. Appl. Soft Comput. **49** (2016) 189-211.
- [29] F. Choobineh, H. Li. *An index for ordering fuzzy numbers*. Fuzzy Sets Syst. **54** (1993), 287-294.
- [30] T.C. Chu, C.T. Tsao. *Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point*. Comput. Math. Appl. **43** (1-2) (2002), 111-117.

-
- [31] N. Dalkey, O. Helmer. *An experimental application of the Delphi method to the use of experts*. Mgmt. Sci. **9** (3) (1963), 458-467.
- [32] R. Dapari, H. Ismail, R. Ismail, N.H. Ismail. *Application of fuzzy Delphi in the selection of COPD risk factors among steel industry workers*. Tanaffos **16** (2017), 46-52.
- [33] D. Dubois, H. Prade. *Operations on fuzzy numbers*. Int. J. Syst. Sci. **9** (3) (1978), 613-626.
- [34] D. Dubois, H. Prade. *Fuzzy Sets and System: Theory and Application*. Academic Press, New York, 1980.
- [35] M. Elkano, H. Bustince, A. Paplinski. *A Preliminary Approach to Semi-supervised Learning in Convolutional Neural Networks Applying "Sleep-Wake Cycles"*. Lecture Notes in Computer Science, 10637 LNCS (2017), 466-474.
- [36] A.N.S. Freeling. *Fuzzy sets and decision analysis*. IEEE Trans. Syst. Man Cybernet. **10** (1980), 341-354.
- [37] J.I. Forcén, M. Pagola, E. Barrenechea, H. Bustince. *Aggregation of deep features for image retrieval based on object detection*. Lecture Notes in Computer Science, 11867 LNCS (2019), 553-564.
- [38] J. Fumanal-Idocin, C. Vidaurre, M. Gómez, A. Urio, H. Bustince, M. Papco, G.P. Dimuro. *Optimizing a Weighted Moderate Deviation for Motor Imagery Brain Computer Interfaces*. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, July, 2021.
- [39] X. Geng, X. He, L. Xu, J. Yu. *Graph correlated attention recurrent neural network for multivariate time series forecasting*. Information Sciences **606** (2022), 126-142.
- [40] R. Goetschel, W. Voxman. *Elementary calculus*. Fuzzy Sets Syst. **18** (1986), 31-43.

-
- [41] E. Guirado, S. Tabik, M.L. Rivas, D. Alcaraz-Segura, F. Herrera. *Whale counting in satellite and aerial images with deep learning*. Scientific Reports **9** (1) (2019), art. no. 14259.
- [42] A. Heiko. *Consensus measurement in Delphi studies Review and implications for future quality assurance*. Technological Forecasting and Social Change **79** (8) (2012), 1525-1536.
- [43] C.Y. Huang, J.J. Huang, Y.N. Chang, Y.C. Lin. *A fuzzy-mop-based competence set expansion method for technology roadmap definitions*. Mathematics **9** (2021), 1-24.
- [44] R. Jain. *Decision-making in the presence of fuzzy variables*. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **6** (1976), 698-703.
- [45] R. Jain. *A procedure for multi-aspect decision making using fuzzy sets*. Int. J. Syst. Sci. **8** (1977), 1-7.
- [46] M. Kılıc, I. Kaya. *Investment project evaluation by a decision making methodology based on type-2 fuzzy sets*. Appl. Soft Comput. **27** (2015) 399-410.
- [47] G.J. Klir, B. Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic*. Prentice Hall, 1995.
- [48] P. Krishnan. *Concept analysis of good death in long term care residents*. Int. J. Palliat. Nurs. **23** (1) (2017), 29-34.
- [49] U.W. Kulisch, W.L. Miranker. *Computer arithmetic*. Academic Press, New York, 1982.
- [50] A. Lamas, S. Tabik, A.C. Montes, F. Pérez-Hernández, J. García, R. Olmos, F. Herrera. *Human pose estimation for mitigating false negatives in weapon detection in video-surveillance*. Neurocomputing, 2022 (in press).
- [51] E.S. Lee, R.L. Li. *Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events*. Comput. Math. Appl. **15** (1988), 887-896.

-
- [52] R.-J. Li. *Fuzzy method in group decision making*. Comput. Math. Appl. **38** (1999) 91-101.
- [53] H. Liao, X. Gou, Z. Xu, X.-J. Zeng, F. Herrera. *Hesitancy degree-based correlation measures for hesitant fuzzy linguistic term sets and their applications in multiple criteria decision making*. Inform. Sci. **508** (2020), 275-292.
- [54] A. Márquez-Montávez. *Análisis de una metodología de ranking difuso utilizando números difusos trapezoidales con aplicaciones en Estadística*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, julio de 2020. <http://hdl.handle.net/10481/66170>
- [55] A.T. Mengistu, R. Panizzolo. *Indicators and framework for measuring industrial sustainability in italian footwear small and medium enterprises*. Sustainability **13** (2021), 1-20.
- [56] M. Mizumoto, J. Tanaka, *Some properties of fuzzy numbers*, in: M.M. Gupta et al. (Eds.), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications* 153-164, North-Holland, NewYork (1979).
- [57] M. Modarres, S. Sadi-Nezhad. *Ranking fuzzy numbers by preference ratio*. Fuzzy Sets Syst. **118** (3) (2001), 429-436.
- [58] J.C. Munn, S. Zimmerman, L.C. Hanson, C.S. Williams, P.D. Sloane, E.C. Clipp, J.A. Tulskey, K.E. Steinhauser. *Measuring the quality of dying in long-term care*. J. Am. Geriatr. Soc. **55** (9) (2007), 1371-1379.
- [59] D. Puente-Fernández, R. Jimeno-Uclés, E. Mota-Romero, C. Roldán, K. Froggatt, R. Montoya-Juárez. *Cultural adaptation and validation of the Quality of Dying in Long-Term Care Scale (QoD-LTC) for Spanish nursing homes*. Int. J. Environ. Res. Public Health **18** (2021), 5287.
- [60] J.M. Ramada-Rodilla, C. Serra-Pujadas, G.L. Delclós-Clanchet. *Adaptación cultural y validación de cuestionarios de salud: Revisión y recomendaciones metodológicas*. Salud Publica Mexico **55** (1) (2013), 57-66.

-
- [61] W.G. Rieger. *Directions in Delphi developments: dissertations and their quality*. Technol. Forecast. Soc. Chang. **29** (1986), 195-204.
- [62] S.E. Rodabaugh. *Categorical foundations of variable-basis fuzzy topology*. Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory (U. Hohle and S. E. Rodabaugh, eds.), The Handbooks of Fuzzy Sets Series, vol. 3, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 273-388, 1999.
- [63] S.E. Rodabaugh. *Fuzzy real lines and dual real lines as poslat topological, uniform, and metric ordered semirings with unity*. Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory (U. Hohle and S. E. Rodabaugh, eds.), The Handbooks of Fuzzy Sets Series, vol. 3, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 607-631, 1999.
- [64] R.M. Rodríguez , L. Martínez , F. Herrera. *Hesitant fuzzy linguistic terms sets for decision making*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **20** (2012), 109-119.
- [65] A.F. Roldán López de Hierro, A. Márquez-Montávez, C. Roldán. *A novel fuzzy methodology applied for ranking trapezoidal fuzzy numbers and new properties*. Int. J. Comput. Math. **97** (1-2) (2020), 358-386.
- [66] A.F. Roldán López de Hierro, J. Martínez-Moreno, C. Roldán. *On interrelationships between fuzzy metric structures*. Iran. J. Fuzzy Syst. **10** (2) (2013), 133-150.
- [67] A.F. Roldán López de Hierro, J. Martínez-Moreno, C. Roldán. *Some applications of the study of the image of a fuzzy number: Countable fuzzy numbers, operations, regression and a specificity-type ordering*. Fuzzy Sets Syst. **257** (2014), 204-216.
- [68] A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán, F. Herrera. *On a new methodology for ranking fuzzy numbers and its application to real economic data*. Fuzzy Sets Syst. **353** (2018), 86-110.

-
- [69] A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán López de Hierro, J. Martínez-Moreno, C. Aguilar Peña. *Estimation of a fuzzy regression model using fuzzy distances*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **24** (2016), 344-359.
- [70] A.F. Roldán López de Hierro, M. Sánchez, D. Puente-Fernández, R. Montoya-Juárez, C. Roldán. *A fuzzy Delphi consensus methodology based on a fuzzy ranking*. Mathematics **2021**, 9, 2323.
- [71] A.F. Roldán López de Hierro, M. Sánchez, C. Roldán. *Multi-criteria decision making involving uncertain information via fuzzy ranking and fuzzy aggregation functions*. J. Comput. Appl. Math. **404** (2022), 113138.
- [72] A.F. Roldán López de Hierro, M. Sesma-Sara, J. Špirková, J. Lafuente, A. Pradera, R. Mesiar, H. Bustince. *Curve-based monotonicity: a generalization of directional monotonicity*. Int. J. General Syst. **48** (5) (2019), 523-553.
- [73] M. Sánchez-Maldonado. *Ranking de números difusos*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Granada, junio de 2017.
- [74] M. Sesma-Sara, H. Bustince, E. Barrenechea, J. Lafuente, A. Kolsesárová, R. Mesiar R. *Edge detection based on ordered directionally monotone functions*. Adv. Intell. Syst. Comput. **643** (2018), 301-307.
- [75] V.D. Sousa, W. Rojjanasrirat. *Translation, adaptation and validation of instruments or scales for use in cross-cultural health care research: A clear and user-friendly guideline*. J. Eval. Clin. Pract. **17** (2) (2011), 268-274.
- [76] M. Sun, M. Gao, N. Liu. *Research on Intrusion Detection Based on Convolutional Neural Network*. Lecture Notes in Electrical Engineering, 854 LNEE (2022), 473-480.
- [77] H.C. Tsai, A.S. Lee, H.N. Lee, C.N. Chen, Y.C. Liu. *An application of the fuzzy Delphi method and fuzzy AHP on the discussion of training indicators for the regional competition, Taiwan national skills competition, in the trade of joinery*. Sustainability **12** (2020), 1-19.

-
- [78] J. Vicente Riera, J. Torrens. *Aggregation of subjective evaluations based on discrete fuzzy numbers*. Fuzzy Sets Syst. **191** (2012), 21-40.
- [79] W. Voxman. *Canonical representations of discrete fuzzy numbers*. Fuzzy Sets Syst. **118** (2001), 457-466.
- [80] X. Wang, E.E. Kerre. *Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I)*. Fuzzy Sets Syst. **118** (3) (2001), 375-385.
- [81] Y.-J. Wang, H.-S. Lee. *The revised method of ranking fuzzy numbers with an area between the centroid and original points*. Comput. Math. Appl. **55** (9) (2008), 2033-2042.
- [82] Z.X. Wang, Y.J. Liu, Z.P. Fan, B. Feng. *Ranking L-R fuzzy numbers based on deviation degree*. Inform. Sci. **176** (2009), 2070-2077.
- [83] T. Wilkin, G. Beliakov. *Weakly monotonic averaging functions*. Int. J. Intell. Syst. **30** (2) (2015) 144-169.
- [84] R.R. Yager. *On choosing between fuzzy subsets*. Kybernetes **9** (1980), 151-154.
- [85] R.R. Yager. *A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval*. Inform. Sciences **24** (1981), 143-161.
- [86] J.S. Yao, K. Wu. *Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance*. Fuzzy Sets Syst. **116** (2000), 275-288.
- [87] A.F.M. Yusoff, A. Hashim, N. Muhamad, W.N.W. Hamat. *Application of fuzzy Delphi technique to identify the elements for designing and developing the e-PBM PI-Poli module*. Asian J. Univ. Educ. **17** (2021), 292-304.
- [88] L.A. Zadeh. *Fuzzy sets*. Inf. Control **8** (1965), 338-353.

Enlaces Web

- [89] *The R Project for Statistical Computing*: <https://www.r-project.org/>

- [90] *R-Studio*: <https://rstudio.com/>
- [91] M. Gagolewski, J. Caha. *FuzzyNumbers: Tools to deal with fuzzy numbers*.
<https://cran.r-project.org/web/packages/FuzzyNumbers/>