



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Medidas de centralidad en grafos. Aplicación a ligas deportivas

Presentado por:
Gonzalo Gómez Romero

Curso académico 2021-2022

Medidas de centralidad en grafos. Aplicación a ligas deportivas

Gonzalo Gómez Romero

Gonzalo Gómez Romero *Medidas de centralidad en grafos. Aplicación a ligas deportivas.*
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2021-2022.

**Responsable de
tutorización**

María Victoria Velasco Collado
Análisis matemático

Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Índice general

Summary	IX
Introducción	XI
1 Grafos y centralidad	1
1.1 Conceptos básicos sobre grafos	1
1.2 Medidas de centralidad	3
1.2.1 Centralidad de grado	4
1.2.2 Centralidad de proximidad	5
1.2.3 Centralidad de intermediación	6
1.2.4 Centralidad del vector propio	7
1.2.5 Centralidad de Katz	9
1.2.6 Centralidad de PageRank	10
2 Ranking y balance competitivo en competiciones deportivas	11
2.1 Clasificando temporadas de una liga	11
2.1.1 Planteamiento matemático del balance competitivo	12
2.1.1.1 Particularidades de las ligas deportivas	12
2.1.1.2 Particularidades de los sectores empresariales	13
2.1.1.3 Sobre los índices de balance competitivo	14
2.1.2 Índice Distancia de Balance Competitivo (DCB)	17
2.1.3 Cuestiones previas sobre distancias y normas	19
2.1.4 Medidas normadas de balance competitivo	21
2.2 Clasificando equipos de una liga	28
2.2.1 Sistema de puntos	28
2.2.2 Clasificando por vectores propios	30
3 Teorema de Perron-Frobenius	33
3.1 Teorema de Perron	33
3.2 Teorema de Perron-Frobenius	38
3.2.1 Una demostración alternativa del Teorema de Perron-Frobenius	47
3.3 Teorema de Perron-Frobenius en espacios de Banach	50
3.4 Aplicaciones	50
Bibliografía	53

Summary

Starting off with some basic concepts of graph theory and spectral theory, we will focus our study in the application of mathematics to the problem of classification in competitive leagues. Given that this problem is not completely solved, we want to offer a new view on this subject, proving that we have really powerful tools to develop a satisfactory solution to it with really interesting and desirable properties.

This study will show the great applicability of functional analysis, giving an abstraction of a subject apparently not related to it, and obtaining new results helpful in the field of knowledge that we are working on.

In the first Chapter, we give some basic definitions and results, already known, about graph theory, so that we can define what centrality measures are, and giving the expressions of the most commonly used in order to apply them in the next chapter.

The second Chapter is dedicated to the main matter of this study: the classification of competitive leagues. It presents two main problems to solve. The first one is the problem of classification of different leagues or the same league along different seasons attending to its competitive balance which is a measure of concentration of wins, this is, how the victories are distributed among the teams participating in the competition. The second problem that is addressed in this chapter is the classification of the teams themselves in the league. This is answering these questions: who is the winner of the league? Who is next in the classification? Who is the last one? In other words, we are interested in giving a ranking method.

We will solve these two problems thanks to functional analysis. The first one will part from an article written by Ávila-Cano and Triguero ([38]), and we will develop new results applying norms and distances in the vector space \mathbb{R}^n . This will grant us with plenty of tools that can be used to give nice properties to the measures that we are looking for. We will define a new generalization of the competitive balance measures, calling them competitive balance normed measures and we will analyse and explain them in depth. The second one is a well known problem with plenty of literature related to it (view [12] as an example), so we are going to compile this literature and explain how we can apply graph theory to a competitive league, in order to obtain centrality measures of the graphs that explain the situations given in these leagues, so we can compare and conclude which centrality measure give us the best ranking possible. We will see that this measure is the eigenvector centrality, so an important result to apply this measure is the Perron-Frobenius Theorem, as it guarantees that this measure always finds a ranking of the teams, this is, we can always find a solution to the expression of the measure.

As the Perron-Frobenius becomes a fundamental result in our study, we dedicate the third and final chapter of this assignment to, firstly, give an overview of the history of the theorem, so we can understand in which context it appeared. Afterwards, we give the definition of

Summary

the Perron's Theorem, which can be considered as a first approximation of the result that we are willing to prove. After giving all the pre-requisites that we need from the theory of functional analysis, we finally give the demonstration of the Perron-Frobenius Theorem, and, in order to provide the reader with a wider view on this subject, we also give an alternative proof of the theorem, more based on a geometric approach to the problem.

In order to show the real importance of this result, we also enunciate the generalization of the theorem to Banach spaces, and we give some of the many applications that this fundamental result has in the field of scientific research.

Introducción

El objetivo de este Trabajo Fin de Grado es aplicar técnicas y conocimientos propios del Análisis Funcional y, en concreto, de la Teoría Espectral, a ciertos problemas de la vida real, por lo que el enfoque de esta Memoria tiene un determinado componente interdisciplinar. Como motivación e hilo conductor del trabajo, hemos elegido varios problemas del mundo deportivo, que resultan extrapolables al contexto empresarial, dando una visión matemática abstracta a cuestiones que ya han sido estudiadas desde otros campos como puede ser la economía.

La propuesta de Trabajo Fin de Grado, que en un primer momento se formalizó tenía como objetivo único el estudio de la centralidad del vector propio y, por tanto, del Teorema de Perron-Frobenius. Buscando alguna aplicación vistosa que sirviese de motivación llegamos al problema de la clasificación de equipos en una liga deportiva, en el que la centralidad del vector propio había sido una herramienta propuesta en multitud de trabajos, como por ejemplo [12], siendo referencia central en este enfoque el conocido artículo de J. P. Keener [18] (que dispone de 349 citas) si bien el primero de todos ellos, que hace uso del Teorema de Perrón Frobenius para clasificar equipos de fútbol, data de 1915 y se debe a E. Landau [21].

Ubicados por esta razón en los modelos matemáticos del contexto deportivo, descubrimos el problema del balance competitivo o equilibrio competitivo, sintiéndonos muy atraídos por él, puesto que desde el ámbito de la economía se hacía uso de los espacios métricos para la obtención de índices que permitiesen comparar ligas futbolísticas, quedando emplazados a analizar el uso que desde el mundo de la economía se le daba a los espacios métricos que son estructuras propias del Análisis Funcional. Según el Cambridge Business English Dictionary, el equilibrio competitivo es la situación en la que ninguna empresa de un grupo empresarial tiene una ventaja injusta sobre las demás. El equilibrio competitivo en el deporte es una medida de la paridad de una liga; esto es, de la igualdad, en cuanto a desempeño, entre los equipos participantes. Es un aspecto que interesa bastante a los promotores de las ligas deportivas, al entender que un mayor equilibrio competitivo mantiene a los aficionados del deporte en cuestión más comprometidos gracias a la incertidumbre que genera el hecho de que todos los participantes de la competición tengan un desempeño similar, pudiendo aspirar todos ellos a la victoria de la liga. Es justo por ello que el desequilibrio competitivo se asocia con una liga aburrida y predecible, lo que hace que los aficionados pierdan el interés en ella.

Todo ello nos condujo a vertebrar este Trabajo Fin de Grado en torno a las dos cuestiones siguientes:

- (i) Clasificar equipos, en función de su desempeño deportivo, dentro de una temporada de una liga.
- (ii) Conocidos los resultados de una serie temporadas de una liga, determinar en cuál de ellas el balance competitivo ha sido mayor.

Introducción

Abordar la primera cuestión nos condujo al estudio de la centralidad de valor propio, para adentrarnos en los contenidos de [18], mientras que la segunda cuestión nos introdujo en la teoría del balance competitivo, para profundizar en [38] y, a consecuencia de ello, poder abstraer la técnica allí usada para la construcción de índices de balance competitivo, vinculándola a los espacios normados y desarrollándola.

Para disponer de recursos y conceptos matemáticos básicos con los que abordar los objetivos descritos, dedicamos el Capítulo 1 de la presente Memoria a establecer la teoría básica de grafos y algunas medidas de centralidad. Seremos prácticos y evitaremos un análisis exhaustivo de las muchas medidas de centralidad que existen en la literatura en relación a los grafos, puesto que es la centralidad de vector propio y concretamente el papel que en ella desempeña el Teorema de Perron-Frobenius lo que verdaderamente nos interesa y al estudio de dicho resultado dedicamos el Capítulo 3 de este Trabajo Fin de Grado. Con ello damos cumplimiento a los objetivos iniciales propuestos.

En el Capítulo 2 se abordan los dos problemas centrales del trabajo: cómo comparar resultados de distintas temporadas de una misma liga deportiva, o de dos ligas distintas, para detectar aquella que está más equilibrada, así como el problema de clasificar a los equipos participantes dentro de una liga concreta.

Comienza el Capítulo 2 con el estudio del balance competitivo, a lo que se dedica la Sección 2.1. Para el estudio del balance competitivo se suelen emplear índices que provienen del mundo empresarial, como mostraremos en la Sección 2.1.1.3. Posteriormente, en la Sección 2.1.2, estableceremos el Índice Distancia de Balance Competitivo (DCB) propuesto en [38] que está expresamente diseñado para el ámbito deportivo, aunque también es aplicable al mundo empresarial ([3]). A continuación, en la Sección 2.1.4, y tras analizar en la Sección 2.1.3 las ventajas de las distancias asociadas a normas frente a las que no lo están, realizaremos una abstracción matemática del índice anterior (DCB) para definir lo que hemos denominado Medidas Normadas de Balance Competitivo, y que son originales de este trabajo.

En la Sección 2.2 se aborda la cuestión de la clasificación de equipos dentro de una liga de una temporada cuando ésta concluye. Tras analizar el sistema clásico de clasificación por puntos, pasaremos a considerar herramientas más potentes trasladando la cuestión al marco de los grafos para hacer uso de la centralidad de valor propio conforme a [18]. Comprobaremos de manera práctica que, de las distintas medidas de centralidad expuestas en el Capítulo 1, la centralidad del vector propio es la que más se ajusta a nuestros intereses. Alcanzaremos así el tercer y último objetivo establecido para este trabajo en la propuesta inicial.

Como ya se ha dicho, al teorema sobre el que descansan distintas medidas de centralidad, que es el Teorema de Perron-Frobenius, dedicamos del Capítulo 3 de esta Memoria. Allí se proporcionan diversas pruebas de este resultado, y se muestra una generalización del mismo al ámbito de los espacios de Banach. Se concluye el capítulo dando breves pinceladas sobre múltiples aplicaciones del resultado que nos ocupa a distintos campos de la ciencia, como puede ser la biología con modelos poblacionales o la estadística con las cadenas de Markov.

A modo de conclusión, destacamos cómo nociones y resultados clásicos del Análisis Funcional son de utilidad en terrenos aparentemente alejados, como la construcción de índices de balance competitivo o la construcción de métodos de que proporcionen un ranking deportivo.

1 Grafos y centralidad

Dedicaremos este primer capítulo a explicar de forma breve los conceptos y definiciones de teoría de grafos que necesitaremos para poder realizar un seguimiento autocontenido del trabajo. Primeramente, recopilaremos algunos aspectos de la teoría de grafos que son bien conocidos para, posteriormente, establecer qué son las medidas de centralidad sobre grafos y definir las más importantes.

1.1. Conceptos básicos sobre grafos

Los grafos son estructuras matemáticas muy útiles sobre las cuales existe una amplia teoría desarrollada y estudiada desde la mismísima época de Euler (con el famoso problema de los puentes de Königsberg como origen) y que se ha demostrado eficaz para resolver problemas en numerosos campos de la ciencia. Actualmente constituyen una herramienta fundamental para el estudio de las redes sociales y las interacciones entre páginas web ([12], [27]).

Empezamos dando la definición de grafo, siguiendo [39].

Definición 1.1. Un grafo es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se llaman **vértices o nodos**, y E es un conjunto cuyos elementos se llaman **aristas o ejes**:

- Si las aristas son pares no ordenados de vértices de V , entonces diremos que el grafo G es **no dirigido**. En este caso, denotamos las aristas por $e = \{u, v\}$, indicando que la arista e une los vértices u y v .
- Si las aristas son pares ordenados de vértices de V , entonces diremos que G es un grafo **dirigido o digrafo**. En este caso, denotamos las aristas por $e = (u, v)$, indicando que la arista e sale del vértice u y termina en el vértice v .

En nuestro estudio no tendremos en cuenta la posibilidad de que haya más de una arista entre dos vértices en un grafo no dirigido. Por tanto, todos los grafos no dirigidos pueden verse como grafos dirigidos en los que siempre que existe la arista $e_1 = (u, v)$, existe también la arista $e_2 = (v, u)$, para cualesquiera dos vértices $u, v \in V$. Entonces, tanto si el grafo es dirigido como no dirigido, podemos definir el concepto de grafo ponderado.

Definición 1.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido (o dirigido indistintamente). Diremos que G es un grafo ponderado si cada arista tiene asociado un valor de \mathbb{R} .

Alejándonos un poco de la definición formal, que ya damos por conocida, todos tenemos una idea gráfica de lo que es un grafo en el plano: un conjunto de vértices conectado por aristas, formando una especie de malla. Para el estudio de los grafos, es conveniente tener un concepto que nos ayude a “viajar” por esta malla, esto es, moverse entre los distintos vértices del grafo a través de las aristas.

Definición 1.3. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un **camino** se define como una sucesión de aristas (no necesariamente distintas) que van desde un vértice inicial v_0 , a un vértice final v_n de la siguiente forma:

$$e_1 = \{v_0, v_1\}, e_2 = \{v_1, v_2\}, \dots, e_n = \{v_{n-1}, v_n\}.$$

El número de aristas, n , recibe el nombre de **longitud del camino**. El camino puede ser orientado, si las aristas están orientadas, o no orientado en caso contrario.

Un grafo decimos que es **conexo** si para cualesquiera dos vértices existe un camino entre ellos. Un digrafo decimos que es **fuertemente conexo** cuando desde cualquier vértice se puede trazar un camino orientado hasta cualquier otro vértice. Por ejemplo, en el segundo grafo de la figura 1.1, el vértice 1 no se puede alcanzar desde ningún otro vértice, por lo tanto no es un grafo fuertemente conexo.

Siguiendo con la definición de conceptos, recordamos que existe una clara conexión entre los grafos y las matrices reales y cuadradas:

Definición 1.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La matriz de adyacencia de G es la matriz $A = (a_{ij})$ cuadrada de orden n , cuya entrada a_{ij} es 1 si existe la arista entre el vértice v_i y v_j , y 0 en caso contrario. Si el grafo es ponderado, los valores que tomará la entrada a_{ij} será el valor asociado a la arista $e = (v_i, v_j)$.

En las Figuras 1.1 y 1.2, se muestran algunos ejemplos sencillos de los distintos tipos de grafos con sus respectivas matrices de adyacencia.

Figura 1.1: Ejemplos de grafos

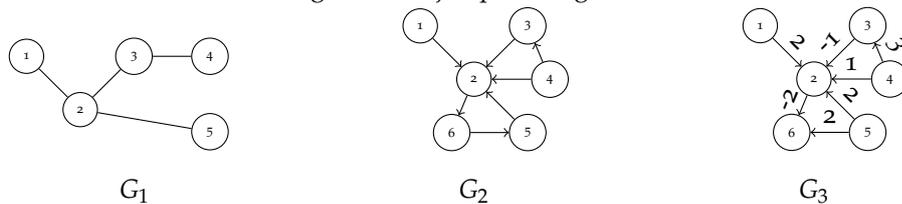


Figura 1.2: Matrices de adyacencia

$$M_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que los grafos dirigidos (y, por tanto, los no dirigidos) siempre se pueden ver como grafos ponderados, tomando cada arista con ponderación 1.

Definición 1.5. En grafos no dirigidos, llamaremos **grado de un vértice** (k_i) al número de aristas adyacentes y se puede calcular a partir de su matriz de adyacencia mediante la expresión:

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}.$$

En grafos dirigidos es conveniente distinguir entre las aristas que salen del vértice y las aristas que entran, definiéndose así dos grados distintos que se pueden obtener a partir de la matriz de adyacencia mediante las expresiones:

$$k_i^{in} = \sum_{i=1}^N a_{ij}$$

$$k_i^{out} = \sum_{i=1}^N a_{ji}.$$

Las aristas que salen y entran del mismo vértice se denominan bucles. Si un grafo no tiene bucles, entonces los elementos de la diagonal de la matriz de adyacencia serán cero ($a_{ii} = 0$). En grafos no ponderados (o ponderados con todas sus ponderaciones igual a uno) el número de aristas (L) se calcula sumando todos los elementos de la matriz de adyacencia obteniendo las siguientes expresiones:

$$2L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \quad \text{para grafos no dirigidos}$$

$$L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \quad \text{para grafos dirigidos.}$$

Esto ocurre simplemente porque en los grafos no dirigidos, al no haber distinción entre arista saliente o entrante, cada arista se cuenta dos veces por lo que el resultado hay que dividirlo entre dos.

1.2. Medidas de centralidad

En esta sección vamos a establecer diversas medidas de centralidad que son básicas en el estudio de grafos, y que son de gran relevancia a la hora de intentar decidir cuál o cuáles vértices son los más importantes de un grafo atendiendo a diversos criterios, que varían de unos contextos a otros, todos ellos válidos dentro del marco de estudio en el que se utilizan y para los que son útiles.

Una **medida de centralidad** de un determinado vértice en un grafo no es más que un valor numérico que se asigna a ese vértice teniendo en cuenta sus propiedades dentro del grafo ([27]). Los valores asignados suelen ser reales y positivos, aunque también se consideran otros.

Consideraremos brevemente las primeras medidas, que son más primitivas a la hora de captar la información que nos aporta el grafo, para posteriormente centrarnos en otras más sofisticadas que se basan en la centralidad del vector propio.

1.2.1. Centralidad de grado

Es, probablemente, la primera medida de centralidad que surge en la literatura sobre grafos y, quizás, la más intuitiva. Consiste en tomar el grado de los vértices.

Definición 1.6. Definimos la centralidad de grado del vértice un grafo no dirigido y no ponderado como el grado de dicho vértice:

$$C_i^{deg} = k_i.$$

esto es contar el número de aristas del grafo que involucran al vértice v_i .

Desarrollada en el contexto del estudio de las redes sociales ([27], [15]), se basa en la idea de que, en una red social (que puede ser estudiada como un grafo si suponemos que las personas son los vértices y las interacciones entre personas son las aristas), si una persona interactúa con muchas otras, dicha persona tendrá un papel más relevante en la red. Medidas como esta, que se pueden calcular simplemente conociendo cuántos vértices son adyacentes al que le calculamos el grado, se conocen como **medidas de centralidad local** ([35, pág. 83]).

A la hora de trasladar esta medida al contexto de los grafos dirigidos nos encontramos con el problema de que los vértices tienen un grado de salida y un grado de entrada. Hay dos posibles soluciones para esto que son:

Definición 1.7. Podemos definir la centralidad de grados de los vértices de un digrafo de una de las dos siguientes formas según [15]:

- La media entre los dos grados del vértice en cuestión:

$$C_i^{(deg,avg)} = \frac{k_i^{in} + k_i^{out}}{2}.$$

- Tomamos dos medidas de centralidad distintas, la centralidad de grado de entrada y la centralidad de grado de salida:

$$\begin{aligned} C_i^{(deg,out)} &= k_i^{out} \\ C_i^{(deg,in)} &= k_i^{in}. \end{aligned}$$

La primera solución, es decir, $C^{(deg,avg)}$ tiene la ventaja de que, cuando pasamos de tomar el grafo dirigido como un grafo no dirigido, la medida de la centralidad de grado coincide C^{deg} . En cambio, la segunda solución, esto es considerar $C^{(deg,out)}$ y $C^{(deg,in)}$, tiene sentido dentro del campo de estudio de las redes sociales ([35, pág. 83]).

Como ejemplo sencillo, podemos pensar que el número de citas que un artículo científico recibe es su *centralidad de grados de aristas entrantes* ($C_i^{(deg,in)}$), el cual es ampliamente usado para determinar la importancia o el impacto de las publicaciones científicas.

Nótese que esta idea de centralidad de grados puede ser extendida fácilmente si, en lugar de contar las aristas inmediatamente adyacentes, contamos los que están a un vértice de distancia; es decir, si también contamos las aristas adyacentes a las directamente adyacentes.

De esta forma, podríamos hablar de la centralidad local de un vértice con conexiones directas de distancia uno, o con conexiones de distancia 2 y así sucesivamente ([35, pág. 83]).

1.2.2. Centralidad de proximidad

Otra forma en la que podemos pensar acerca de la centralidad consiste en plantear la siguiente pregunta: ¿cuál es el vértice desde el que se tarda menos en llegar a cualquier otro vértice? Es decir, en el contexto de las redes sociales, podríamos hablar de qué vértice es el idóneo para extender una información y que llegue lo antes posible a todos los demás vértices. Esta medida, y las siguientes que estudiaremos, son las que se conocen como **medidas de centralidad globales** ([35]).

Se define la **distancia entre los vértices** v_i y v_j como la longitud del camino más corto entre ellos, que vamos a denotar por d_{ij} .

Definición 1.8. Conforme a [34], para un grafo no dirigido, la distancia de proximidad se define como sigue:

$$C_i^{(clos)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^N d_{ij}}.$$

Podemos normalizar esta medida mediante $(N - 1)$ o mediante N ([5]):

$$C_i^{(clos,norm1)} = \frac{N - 1}{\sum_{j=1}^N d_{ij}},$$

$$C_i^{(clos,norm2)} = \frac{N}{\sum_{j=1}^N d_{ij}}.$$

Aunque para establecer clasificaciones entre los vértices de un grafo no es importante la normalización, sí que es conveniente normalizar para comparar grafos de distinto tamaño ([35]). En este caso, conviene observar que la primera normalización $(N - 1)$ tiene sentido, ya que la distancia de un vértice a sí mismo es cero, por lo que la máxima distancia que puede existir de un vértice a otro es $N - 1$. Sin embargo, en algunos contextos, puede ser útil usar la normalización mediante N .

Aquí estamos suponiendo que el grafo al que le aplicamos la medida es conexo, o fuertemente conexo si estamos hablando de un digrafo; ya que, si no fuera así, podría darse el caso de que no exista un camino entre dos vértices y por lo tanto la distancia entre ellos fuera infinita. Esta cuestión también se podría solucionar (como se hace en algunos textos ([10])) si, en lugar de tomar las expresiones anteriores, tomásemos la siguiente:

$$C_i^{(clos2)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{N - 1}{d_{ij}},$$

donde se asume que $\frac{1}{d_{ij}} = 0$ es cero si no hay un camino entre los vértices v_i y v_j .

Tal y como ocurre con la centralidad de grados, la centralidad de proximidad también admite dos versiones cuando estudiamos grafos dirigidos: la proximidad de entrada y la proximi-

dad de salida, ya que en los digrafos hay que tener en cuenta que las “distancias” no son simétricas¹.

1.2.3. Centralidad de intermediación

La idea fundamental de esta medida consiste en fijar nuestra atención en los vértices que están “en medio”, es decir, los que cuando se trazan los caminos más cortos entre distintos vértices, suelen caer como un vértice intermedio en el camino. Esto es, localizar cuándo se llega a una especie de *lugar de paso* de muchos caminos. Formalmente, esta medida se define como sigue:

Definición 1.9. Siguiendo [15], en un grafo de N vértices se define la centralidad de intermediación de un vértice como sigue, dependiendo de si el grafo es no dirigido o dirigido respectivamente:

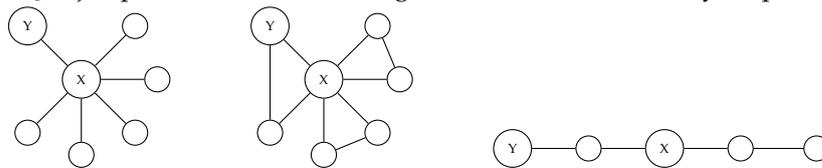
$$C_i^{(betw)} = \frac{2}{(N-1)(N-2)} \sum_{\substack{s,d=1 \\ s \neq d \neq i}}^N \frac{\sigma_{sd}(i)}{\sigma_{sd}},$$

$$C_i^{(betw)} = \frac{1}{(N-1)(N-2)} \sum_{\substack{s,d=1 \\ s \neq d \neq i}}^N \frac{\sigma_{sd}(i)}{\sigma_{sd}},$$

donde σ_{sd} representa el número de caminos más cortos desde el vértice de salida (s) al vértice de destino (d) y $\sigma_{sd}(i)$ es el número de esos caminos que incluyen el vértice i . En esta expresión también aparece la fracción de normalización, aunque no es necesaria. Si no existen caminos entre el vértice s y el d , entonces tendríamos que $\sigma_{sd} = 0$, por lo que tenemos que definir que en este caso $\frac{\sigma_{sd}(i)}{\sigma_{sd}} = 0$.

Ejemplo 1.1. En la Figura 1.1 podemos apreciar visualmente que el vértice X tiene mayor centralidad que el vértice Y según las distintas medidas estudiadas, lo que nos ayuda a hacernos una idea más intuitiva sobre en qué casos puede ser más conveniente el uso de cada una de ellas.

Figura 1.3: Ejemplos de centralidad de grado, de intermediación y de proximidad.



En el primer grafo obtenemos las siguientes medidas:

- **Centralidad de grado:** $C_X^{(deg)} = 6$, $C_Y^{(deg)} = 1$. Por tanto, X es más central que Y según este índice.
- **Centralidad de proximidad:** $C_X^{(clos)} = 6$, $C_Y^{(clos)} = 3.5$, por lo que X también es más central que Y según esta medida.

¹Por lo tanto no cumple con las propiedades de distancia.

- **Centralidad de intermediación:** $C_X^{(betw)} = 1$, $C_Y^{(betw)} = 0$. Teniendo en cuenta que la expresión que hemos usado para calcular esta medida es la normalizada, esto quiere decir que el vértice X tiene la máxima centralidad posible de intermediación, mientras que Y tiene la mínima. La interpretación es clara, X cae como vértice intermedio en todos los caminos más cortos entre vértices mientras que Y no cae como vértice intermedio en ninguno.

En el segundo grafo obtenemos:

- **Centralidad de grado:** $C_X^{(deg)} = 6$, $C_Y^{(deg)} = 2$. Por tanto, X es más central que Y según este índice.
- **Centralidad de proximidad:** $C_X^{(clos)} = 6$, $C_Y^{(clos)} = 4$, por lo que X también es más central que Y según esta medida.
- **Centralidad de intermediación:** $C_X^{(betw)} = 12/15$, $C_Y^{(betw)} = 0$. El vértice Y claramente no es un vértice de paso en caminos.

Finalmente, en el tercer grafo obtenemos:

- **Centralidad de grado:** $C_X^{(deg)} = 2$, $C_Y^{(deg)} = 1$. Por tanto, X también es más central que Y según este índice en este grafo.
- **Centralidad de proximidad:** $C_X^{(clos)} = 3$, $C_Y^{(clos)} = 25/12$, por lo que X también es más central que Y según esta medida en este grafo.
- **Centralidad de intermediación:** $C_X^{(betw)} = 4/15$, $C_Y^{(betw)} = 0$. Nuevamente, el vértice Y queda excluido en los caminos más cortos entre vértices ya que se encuentra en un "extremo" del grafo.

Las tres medidas que hemos explicado hasta ahora están definidas para grafos dirigidos y no dirigidos y, recientemente, han sido extendidas a grafos ponderados en [29].

1.2.4. Centralidad del vector propio

Hasta ahora hemos tratado con medidas que tienen en cuenta la posición relativa de un vértice en el grafo, pero ninguna medida tenía en cuenta la centralidad de los demás vértices.

Si intentamos definir la centralidad de un vértice teniendo en cuenta la centralidad de los vértices adyacentes, puede parecer que estamos entrando en una paradoja en la que no se puede definir ninguna medida, ya que todas ellas son recursivas e inter-dependientes, pero veamos qué ocurre si escribimos las ecuaciones que modelan esta situación.

Definición 1.10. En un grafo cualquiera, se define la centralidad del vector propio (de forma general) de un determinado vértice como un valor proporcional a la suma de las centralidades de los vértices adyacentes ([7]):

$$\lambda C_i^{(eig)} = \sum_{j=1}^N a_{ji} C_j^{(eig)}, \quad (1.1)$$

donde λ es la constante de proporcionalidad. Obsérvese que el término que hay dentro del sumando a_{ji} nos indica que la centralidad de un vértice viene determinada por la centralidad

de los vértices que son adyacentes y que tienen aristas incidentes en el vértice de estudio (v_i). Esta medida es especialmente buena para grafos ponderados, ya que tiene en cuenta los elementos de la matriz de adyacencia, siendo estos las ponderaciones de las aristas de dichos grafos.

Si nos fijamos, la expresión 1.1 no puede ser calculada de manera separada porque, como dijimos anteriormente, es una expresión recursiva en la que cada medida de centralidad depende de otras medidas y así sucesivamente. Pero observemos la siguiente identidad:

$$A^T \mathbf{C}^{(eig)} = \lambda \mathbf{C}^{(eig)}, \quad (1.2)$$

es la expresión matricial que engloba a todas las medidas de centralidad de los vértices de un cierto grafo. Además, el valor $\mathbf{C}^{(eig)}$ es el vector propio asociado al valor propio λ de la matriz A^T . Para comprobarlo, simplemente tenemos que observar que la componente i -ésima de multiplicar la matriz A^T por un vector v es:

$$(A^T v)_i = \sum_{j=1}^N a_{ji} v_j$$

que es la misma expresión que la obtenida en 1.1. El hecho de que $\mathbf{C}^{(eig)}$ sea el vector propio asociado al valor propio λ es consecuencia de dicha expresión matricial.

Pudiera darse el caso de que el valor $\mathbf{C}^{(eig)}$ no exista para una matriz arbitraria, pero cuando las componentes de la matriz A son no negativas, existe un resultado muy importante que nos ayuda con el problema, el Teorema de Perron-Frobenius. Este teorema nos asegura que, si la matriz es irreducible, existe una única solución de 1.2 en la que todas las componentes del vector $\mathbf{C}^{(eig)}$ son positivas y que, además, es el vector propio asociado al **valor propio dominante**, es decir, el mayor en módulo, $\lambda > 0$.

Recordemos que una matriz cuadrada de orden N se dice que es **irreducible** cuando alguna de las siguientes condiciones se verifica ([12]):

- No existe ninguna permutación (de filas y columnas) que transforme la matriz \mathbf{A} en una matriz del tipo:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline 0 & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right),$$

donde \mathbf{A}_{11} y \mathbf{A}_{22} son matrices cuadradas. En otras palabras, no existe matriz de permutación P tal que

$$P^T \mathbf{A} P = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline 0 & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right).$$

- Si \mathbf{A} es la matriz de adyacencia de un grafo, entonces la matriz es irreducible si, y sólo si, el grafo es fuertemente conexo.

Recordemos que en el Capítulo 3 de este trabajo se hace un estudio detallado de este resultado.

Existen otras medidas de centralidad que usan como base la centralidad del vector propio, y a continuación exponemos algunas de ellas.

1.2.5. Centralidad de Katz

Se trata de una variante de la centralidad de grado y de la centralidad del vector propio, en la que se usan las ideas de ambas medidas.

Definición 1.11. Se define la centralidad de Katz de cada vértice de un grafo, ya sea dirigido o no dirigido, mediante la expresión

$$C_i^{(katz)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N \alpha^k (A^k)_{ji}, \quad (1.3)$$

donde $\alpha < 1$ es un término de decaimiento de la influencia de los vértices del grafo en la centralidad del vértice de estudio.

Parece intuitivo pensar que cuanto más alejado esté un vértice, menor debe ser su influencia en la medida de la centralidad. Es por esto por lo que se introduce el término de decaimiento α . Vamos a explicar qué significa la expresión $(A^k)_{ji}$ con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1.2. Si tenemos un vértice de partida, j , y un vértice de llegada, i ; la expresión $(A^k)_{ji}$ lo que hace es tener en cuenta para el cálculo todos los caminos de longitud k que existen entre ambos vértices. Si fijamos $k = 3$, obtendríamos todos los caminos de longitud tres entre el vértice j y el i . De tal forma, la expresión desarrollada sería del siguiente tipo:

$$(A^3)_{ji} = \sum_r \sum_s a_{jr} a_{rs} a_{si}.$$

Recordemos que cuando entre el vértice r y el s no hay arista tenemos que $a_{rs} = 0$. Es por esto que en la medida de centralidad Katz 1.3 podemos sumar hasta infinito, aunque en realidad bastaría con realizar el sumatorio hasta la máxima longitud posible de los caminos.

Además, conforme se va ampliando la longitud del camino, el término α^k en la expresión 1.3 es cada vez menor (recordemos que $\alpha < 1$), lo que hace que la influencia de dichos caminos en la suma total sea cada vez más baja, justo como queríamos.

Si llamamos I a la matriz identidad de orden N , y $\mathbb{1}$ al vector de tamaño N con todas sus entradas uno, podemos hacer las siguientes transformaciones a la expresión 1.3:

$$C^{(katz)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha A^T)^k \mathbb{1} = \left((I - \alpha A^T)^{-1} - I \right) \mathbb{1},$$

que tras algunas cuentas queda:

$$C^{(katz)} = \alpha A^T (C^{(katz)} + \mathbb{1}),$$

expresión que, si nos fijamos, es muy similar a la obtenida para la centralidad del vector propio. De hecho, es la misma expresión pero sumando una unidad a cada centralidad obtenida por el método del vector propio.

Cabe destacar que el valor $\alpha < 1$ debe ser elegido de tal forma que la medida converja, pero observando la expresión 1.2 podemos deducir que el valor tiene que estar en el intervalo $(0, 1/\lambda)$, siendo λ el máximo valor propio (en módulo) de la matriz de adyacencia A .

1.2.6. Centralidad de PageRank

Esta es una medida ampliamente conocida, ya que es la que se usa, o al menos se usaba en sus orígenes, para clasificar a las páginas web en una búsqueda de Google, y que fue desarrollada por Sergei Brin y Lawrence Page.

Definición 1.12. Definimos la centralidad de PageRank de los vértices de un grafo como la expresión

$$C_i^{(pr)} = \alpha \sum_{j=1}^N a_{ji} \frac{C_j^{(pr)}}{k_j^{out}} + \frac{1-\alpha}{N}. \quad (1.4)$$

El término constante $\frac{1-\alpha}{N}$ se introduce para asegurar que la ecuación tiene una única solución no trivial para grafos dirigidos ([15]). Nótese que cuando un vértice no tiene aristas salientes $k_j^{out} = 0$, por lo que para arreglar este problema podemos tomar siempre en el denominador $\max(k_j^{out}, 1)$.

La idea es muy similar a la de la centralidad del vector propio, pero con una diferencia fundamental: cuando un vértice recibe un enlace de otro vértice importante, no se trata igual el caso de que ese vértice (el importante) tenga muchos otros enlaces o simplemente unos pocos. Se entiende que cuando un enlace importante tiene muchas conexiones con otros vértices, su contribución se “diluye” entre todos los vértices a los que enlaza y, por tanto debe ser penalizada.

Ahora podemos escribir la expresión en forma matricial del siguiente modo:

$$C^{(pr)} = \alpha A^T D^{-1} C^{(pr)} + \frac{1-\alpha}{N} \mathbf{1},$$

donde D es la matriz diagonal de orden N cuyos elementos son $D_{ii} = \max(k_j^{out}, 1)$.

Con esta medida concluimos nuestro breve repaso a las medidas de centralidad más notables sobre un grafo. Aunque existen más medidas de las que aquí se exponen, hacer un estudio exhaustivo de ellas no es el propósito de este trabajo. Para ver ejemplos de estas medidas remitimos a [15] y a la Sección 2.2 de este trabajo. En el siguiente capítulo nos centraremos en la utilidad de estas medidas, en concreto la del vector propio, aplicadas al marco de las competiciones deportivas, clasificando equipos de ligas competitivas.

2 Ranking y balance competitivo en competiciones deportivas

Como ya se ha comentado, los problemas que nos planteamos en este Trabajo Fin de Grado, que son los que dan cuerpo a este capítulo, son los dos siguientes:

- (I) Clasificar equipos, en función de su desempeño deportivo, dentro de una temporada de una liga
- (II) Conocidos los resultados de una serie temporadas de una liga, determinar en cuál de ellas el balance competitivo ha sido mayor.

Los conceptos de centralidad estudiados en el Capítulo 1 se aplicarán al problema (i). Sin embargo, vamos a dar comienzo Capítulo 2 abordando en primer lugar el problema (ii).

Elegimos este orden de presentación porque en la literatura sobre el balance competitivo que hemos manejado, el énfasis se pone en cómo asignar un valor que mida el equilibrio competitivo a una configuración de la liga que se da por conocida. De hecho, en toda la literatura consultada para la elaboración de este trabajo dedicada al estudio del balance competitivo, se presupone que el desempeño de los equipos de una liga se calcula mediante el clásico sistema de puntos, obteniendo así las distintas configuraciones cuyo balance competitivo se pretende comparar. Con ello, el énfasis del problema recae sobre la cuestión de que, conocidas las configuraciones de k temporadas de una liga ¿Cómo establecer un índice que mida si una liga está más equilibrada que otra?

Dedicamos el primer apartado del Capítulo 2, que es la Sección 2.1, a proponer fórmulas originales para medir el equilibrio competitivo, que abstraen otras existentes en la literatura. Finalmente, en la Sección 2.2 veremos que el sistema de puntos es, a juicio de algunos autores, una solución muy primitiva del problema (I) por lo que proponen trasladar la cuestión al ámbito de la teoría de grafos para aplicar la centralidad de valor propio estudiada en el Capítulo 1.

2.1. Clasificando temporadas de una liga

En el contexto de las competiciones deportivas o empresarial, son frecuentes con comentarios del tipo: “Este año la competición está muy equilibrada, cualquiera puede ganar el campeonato” o “Está claro que las empresas más pequeñas no tienen forma de superar a las grandes en este sector, porque está demasiado desequilibrado”. Pero, ¿a qué nos referimos cuando decimos “equilibrado”? ¿Hay alguna forma de asignar un valor numérico al equilibrio de una competición? Vamos a intentar ofrecer respuestas a estas preguntas.

A lo largo del trabajo realizaremos una revisión bibliográfica de algunos trabajos (la mayoría de ellos especializados en economía) para ver cómo aplican conceptos y fórmulas del balance

competitivo propias de los sectores empresariales al ámbito de las ligas deportivas. Tras describir algunos de los procedimientos que se siguen para obtener los llamados índices de balance competitivo, haremos una abstracción matemática de los mismos, para proporcionar nuevos coeficientes de medida y estudiar sus propiedades.

Justo en este punto es donde reside la interdisciplinariedad de este Trabajo Fin de Grado, en el que se muestran contenidos publicados de artículos publicados en revistas de economía y otras disciplinas para trasladarlos al ámbito de los espacios de Banach, y ver qué aportaciones se obtienen de hacer uso de métricas más perfectas. Con ello generalizaremos el método que se establece en [38] para la obtención del índice DCB (Distancia de Balance Competitivo) que allí se introduce, proporcionando una amplia gama de nuevos índices de balance competitivo y estudiando sus propiedades.

2.1.1. Planteamiento matemático del balance competitivo

Sin entrar en demasiada concreción, podemos decir que evaluar el estado final de una cierta competición consiste en ver cómo de *iguales* han estado todos los participantes de la misma. Se entiende que, cuanto más lo estén, más *equilibrada* ha estado la competición. Con ello, el **equilibrio competitivo**, tanto en el ámbito deportivo como el empresarial, se podría definir como el *grado de control ejercido por ciertos participantes sobre otros en un campeonato o sector*.

Tenemos la necesidad de hacer cuantificable dicho equilibrio ya que, de momento, se trata de un concepto plenamente subjetivo, pero antes, es necesario conocer ciertos aspectos relevantes sobre el funcionamiento de las ligas deportivas y del mundo empresarial.

2.1.1.1. Particularidades de las ligas deportivas

El primer aspecto importante es que no todos los deportes tienen la misma estructura, ni el mismo método de puntuación. Por ejemplo, hay deportes donde se puede empatar (fútbol, ajedrez) y deportes donde no (tenis, fórmula 1). Es más, dentro de un mismo deporte puede haber ocasiones o incluso lugares en los que se empleen formas de puntuar y de organizar los partidos completamente distintas.

Lo siguiente que cabe destacar es que en un sistema de liga en el que se juegan partidos por emparejamientos, no puede darse que un equipo gane todos los partidos de la liga, por lo que no puede darse la situación de monopolio (un equipo concentra todas las victorias). Esto es así simplemente porque un equipo no juega todos los partidos de la liga.

Ejemplo 2.1. *En una liga de un determinado deporte, en la que participan 3 equipos (A,B,C), cada uno de los cuales se enfrenta a los otros dos una sola vez los emparejamientos tendrían que ser del siguiente modo:*

Partido	Equipo 1	Equipo 2
1	A	B
2	A	C
3	B	C

A la vista está que ninguno de los tres equipos puede aspirar a ganar los 3 partidos de la liga, por lo que ningún equipo puede acumular todas las victorias de la liga. De hecho, si en este deporte no se permite el empate, entonces habrá al menos otro equipo que gane un partido.

Otra particularidad a tener en cuenta es que, generalmente, para calcular la posición de los equipos dentro de la liga, se recurre a un sistema de puntuación que asigna al hecho de ganar o perder (o empatar) cierto valor, y que no hay que confundir con la puntuación obtenida dentro de los partidos en sí. Por ejemplo, en la liga española de fútbol se asignan 3 puntos si se gana un partido, 1 punto si se empata y 0 si se pierde, y la suma de estos puntos es la que determina la posición del equipo dentro de la liga; aunque, en caso de empate con esta puntuación, sí que se recurre a la cantidad de goles anotados, cantidad de goles recibidos, etc. Dedicaremos la siguiente sección de este trabajo a estos sistemas de clasificación de equipos dentro de ligas.

También conviene saber que, aunque hay deportes que se juegan de forma individual, por parejas o en equipos, generalmente nos referiremos siempre a todos como equipos para seguir una nomenclatura común.

2.1.1.2. Particularidades de los sectores empresariales

Entre las empresas no hay ligas de competición como sí ocurre en el deporte, por lo que la forma que tenemos de relacionar una empresa con otra es fijándonos en lo que se llama el “sector empresarial”, que no es más que el ámbito o conjunto de ámbitos a los que se dedica la empresa. De esta forma, un sector empresarial puede comprender ramas tan amplias y diversas como “la tecnología”, o ámbitos tan concretos y precisos como la investigación y desarrollo de tratamientos para una cierta enfermedad como, por ejemplo, el Alzheimer.

Cuando ya nos hemos centrado en un sector empresarial concreto, el siguiente paso será ver cómo podemos ordenar a las empresas dentro de ese sector. Para ello usaremos lo que se conoce como “la cuota de mercado”. Esto es la cantidad porcentual, del total posible, a la que una cierta empresa suministra sus productos o servicios. Por ejemplo, si nos encontramos en un sector empresarial en el que hay 1000 consumidores, y 3 empresas (A,B,C), una posible situación del sector, atendiendo a la cuota del mercado, podría ser la siguiente:

Empresas	A	B	C
Consumidores	500	300	200
Cuota(%)	50	30	20

Una forma de hacer cuantificable (esto es, de medir) este equilibrio consiste en establecer índices que tengan en cuenta, una vez acabada la competición, la distribución final de las victorias, las derrotas y de los empates, en el caso de que los haya, así como la de los puntos anotados, en el caso de las ligas deportivas; o bien, que midan la distribución de la cuota de mercado de un cierto sector empresarial en el marco de la economía. Por tanto, al haber infinidad de formas posibles de tomar los datos y de tratarlos, hay muchos índices que podrían considerarse válidos como medidas del equilibrio competitivo de una cierta competición.

A pesar de ello, podría decirse que, en buena medida, los distintos índices de balance competitivo que son más conocidos en la literatura proporcionan ordenaciones similares. Con ello, no nos referimos al valor concreto que dos índices distintos pudiesen asignar a una misma liga (de hecho uno pudiera asignar valores entre el 1 y el 10, y otro entre el 1 y el 100, por ejemplo) sino al hecho de que al comparar los resultados de una liga en dos temporadas distintas, ambos índices clasifican de la misma manera.

2.1.1.3. Sobre los índices de balance competitivo

La acepción de **índice** proporcionada por la Real Academia Española que más se adecúa a nuestro contexto es la siguiente: “Expresión numérica de la relación entre dos cantidades”. Está claro que es una definición muy vaga y que apenas da información sobre qué es exactamente un índice de balance competitivo, pero como primera aproximación vemos que el concepto descansa sobre una relación entre dos cantidades. Esto, para nosotros, significará la razón entre una cantidad inherente a la situación concreta que estamos estudiando y la situación de menor equilibrio competitivo (que ya debemos haber identificado previamente).

Cabe poner de manifiesto que el índice que construiremos más adelante, y en el que estamos interesados, medirá el equilibrio de una liga o de un sector empresarial de manera global, vista como una situación final y determinada, no susceptible cambios. Es decir, dada una configuración de liga ya finalizada, con los resultados de todos los partidos disputados, o bien dada una cuota de mercado en un momento concreto, nuestro índice devolverá un valor numérico que nos indicará el grado de equilibrio que existe en esa configuración de liga o sector empresarial en su conjunto. Por tanto, el índice no dice cómo de igualado está un cierto equipo o empresa con respecto a otra, sino que valora la situación conjunta de todo el sector (o de la liga) y le asigna un valor global atendiendo a la información de la que se dispone.

Según lo expuesto anteriormente, observamos que el equilibrio competitivo es una medida relacionada con la desigualdad y concentración (de victorias, de puntos, de cuota de mercado, etc.) y, es por esto, que para establecer un índice hay dos situaciones que conviene tener en cuenta:

1. El **máximo equilibrio competitivo**. Es decir, la situación de máxima igualdad entre todos los equipos de una competición, o la máxima igualdad en cuanto a reparto de la cuota de mercado entre las empresas de un cierto sector.
2. El **mínimo equilibrio competitivo**. Es decir, la situación de mayor desigualdad dentro de una competición. Ésta puede ser el monopolio, si hablamos de empresas en un cierto sector (una sola empresa controla toda la cuota de mercado del sector); pero si tratamos con equipos de una competición deportiva, normalmente no se puede dar la situación de monopolio ya que un solo equipo no puede ganar todos los partidos (porque no participa en todos los partidos), aunque sí que podría ganar todos los partidos en los que él participa.

Conocer estas dos configuraciones da pie a poder estandarizar el índice, definiéndolo en el intervalo unidad para poder manejar la información que aporta de una forma entendible y fácil, cumpliendo así con una de las propiedades que buscábamos.

Hay autores ([38]) que señalan la conveniencia de que un índice de balance competitivo verifique ciertas **propiedades de cardinalidad** que, a grandes rasgos, son las siguientes:

- (I) Los valores obtenidos con el índice deben tener un significado.
- (II) Las diferencias entre los valores también deben tener un significado que sea fácil de interpretar.

Por todo ello se considera conveniente que un índice de balance competitivo tome valores en el intervalo unidad $[0, 1]$, alcanzando tanto el valor 0 como el 1, para que sus valores se puedan interpretar como puntos porcentuales y sus diferencias, por tanto, también.

La mayoría de índices de balance competitivo propuestos a lo largo de los años están definidos en el espacio de cuotas de puntos obtenidos en el caso de que hablemos del ámbito deportivo, o en el espacio de cuotas de mercado en el caso de hablar del ámbito empresarial. Los elementos de estos espacios; suponiendo que en una liga hay n equipos, o en un cierto sector empresarial hay n empresas; son vectores del tipo:

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n), \quad \text{donde } s_i \in [0, 1] \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n s_i = 1.$$

Cada vector representa una configuración de la liga o configuración del sector.

Ejemplo 2.2. *Supongamos una liga competitiva donde es posible ganar, empatar y perder. Consideremos el sistema de puntuación $\{3, 1, 0\}$ que es el que se adopta por ejemplo en la liga futbolística en Italia y en Francia. Supongamos que, en una liga de cuatro equipos, A, B, C, D , los resultados son*

$$\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}, \mathbf{BC}, \mathbf{BD}, \mathbf{CD},$$

donde la negrita denota el equipo ganador (el empate consiste en la ausencia de negrita en ambos equipos). Con ello la cantidad de puntos obtenidos vendría dada por

$$A := 3 + 3 + 0; \quad B := 0 + 0 + 1; \quad C := 0 + 3 + 0; \quad D := 3 + 3 + 1,$$

por lo que el total de puntos sería $6 + 1 + 3 + 7 = 17$. En consecuencia, el vector que determina esta configuración estaría dado por

$$\left(\frac{6}{17}, \frac{1}{17}, \frac{3}{17}, \frac{7}{17} \right).$$

Ejemplo 2.3. *En una liga deportiva de tres equipos, el vector $\mathbf{s} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$ indica que tanto el primer como el segundo equipo han obtenido un 25% de todos los puntos posibles y el tercer equipo ha obtenido el 50% restante¹. Si estuviésemos hablando de tres empresas en lugar de tres equipos, querría decir que la primera y la segunda empresa suministran sus productos o servicios a un 25% del total de consumidores del sector cada una, mientras que la tercera empresa los suministraría al 50% restante.*

Como podemos observar, el último elemento del vector siempre queda determinado por todos los anteriores. Esto lleva a muchos autores a considerar el espacio X^{n-1} siendo n el número de equipos o de empresas. Nuestro espacio tendría por tanto $n - 1$ grados de libertad, y nuestro índice sería una función $f : X^{n-1} \rightarrow [0, 1]$. Nosotros, en la Subsección 2.1.4, que constituye nuestra aportación original a este estudio, trabajaremos con funciones $f : S_{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, 1]$, donde $S_{\mathbb{R}^n}$ es el simplex del espacio euclídeo \mathbb{R}^n .

Conviene poner de manifiesto que si $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función estrictamente monótona, entonces $g \circ f : X^{n-1} \rightarrow [0, 1]$ define un nuevo índice que si bien asigna valores distintos

¹Nótese que aquí no estamos hablando de puntos anotados en los partidos, sino de un sistema que asigna a cada equipo una cierta puntuación en función de si gana o pierde (o empató, si eso es posible), como ya advertimos en la sección 2.1.1.3.

a los asignados por f , clasifica exactamente igual los valores de X^{n-1} en el sentido de que si uno de los índices (pongamos f) distingue un determinado elemento de X^{n-1} como más equilibrado que otro, el otro índice (es decir, $g \circ f$) lo hará exactamente igual.

Desde ese punto de vista, la composición de f con funciones del tipo $g(x) = kx$, siendo $k \leq 1$, o bien como $g(x) = \sqrt{x}$, o $g(x) = \frac{1x}{1+x}$, $g(x) = \frac{e^x-1}{e}$, $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}$, por citar sólo algunos ejemplos entre muchos otros que pudiésemos considerar, nos permite obtener un nuevo índice de balance competitivo, $g \circ f$, que clasifica igual que g .

A continuación, mostramos algunos de los índices más usados para medir el balance competitivo en competiciones deportivas, aunque existen muchos más (véase [24]).

- **Índice Gini.** Es una medida de la desigualdad que se apoya en la curva de Lorenz, de la que ya se había hecho uso en 1905 por para estudiar la desigualdad de la población en relación a la salud. El coeficiente de Gini se calcula como el área de la región acotada determinada por la línea de igualdad perfecta (representada por la recta $f(x) = x$) y la curva de Lorenz (que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$) El coeficiente de Gini viene

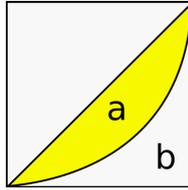


Figura 2.1: Representación índice Gini. (Wikipedia)

dado por la expresión $a/(a + b)$ y, como se aprecia en el gráfico, a menor índice de Gini, menor desigualdad. En [1] se comprueba que las propiedades de este coeficiente son comparables con las del cuadrado del coeficiente de variaciones.

- **Índice de entropía generalizada:** Se define como

$$GE(\gamma) = \left(\frac{1}{n(\gamma^2 - \gamma)} \right) \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{p^*} \right)^\gamma - 1 \right],$$

donde $p^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$. Para el caso $\gamma = 2$, que es el que se usa con más frecuencia, dicho índice queda como sigue:

$$GE(2) = \left(\frac{n}{2} \right) \left[\sum_{i=1}^n (s_i)^2 - \frac{1}{n} \right].$$

El índice $GE(2)$ no es más que un múltiplo escalar de otro índice de balance competitivo, introducido por A. Larsen, A. J. Fenn y E. L. Spencer en [22] que es el siguiente:

$$dHHI := \left[\sum_{i=1}^n (s_i)^2 - \frac{1}{n} \right].$$

- **Índice de equilibrio competitivo Herfindahl-Hirschman (HHICB):** Este es el índice dado por

$$HHI := \sum_{i=1}^n (s_i)^2$$

(véase [11]), que a su vez es modificado en [23] y [33] para considerar el índice

$$HHICB := \frac{HHI}{1/n}.$$

- **Índice de equilibrio competitivo de Herfindahl: de (HRCB).** Se construye a partir del índice de Herfindahl-Hirschman del siguiente modo ([31]):

$$HRCB = \frac{HHI - HHI_{min}}{HHI_{max} - HHI_{min}},$$

donde HHI_{max} y HHI_{min} son los máximos y mínimos valores que toma HHI respectivamente. Los autores J. P. Gayant y AAA. Le Pape demuestran en [13] que $HRCB = CBR$, donde CBR representa el siguiente índice:

- **Índice de varianza generalizada:** introducido en [32] y conocido también como ratio de balance competitivo, se define como

$$CBR = \frac{\sigma^2(\mathbf{s}) - \sigma_{min}^2(\mathbf{s})}{\sigma_{max}^2(\mathbf{s}) - \sigma_{min}^2(\mathbf{s})},$$

donde $\sigma_{min}^2(\mathbf{s})$ y $\sigma_{max}^2(\mathbf{s})$ denotan la mínima y máxima varianza de las configuraciones respectivamente. En el caso particular de que $\sigma_{min}^2(\mathbf{s}) = 0$, este índice no es más que el índice de dispersión estandarizada definido por W. A. Kelly en [19].

La conveniencia de usar índices de balance competitivo que se ajusten a una “métrica” en el sentido matemático de la palabra, ya se anunciaba en los años ochenta por autores como K. Binmore ([6]). En [38], se profundiza en este hecho siguiendo ideas de [36], y se propone un índice, denominado **distancia de balance competitivo (DCB)**, que sí responde a una métrica y además está normalizado, esto es, que toma valores en el intervalo $[0, 1]$. A este índice dedicamos el siguiente apartado, para posteriormente abstraerlo, en la Subsección 2.1.4, haciendo un estudio matemático de la situación que arroje luz sobre estas construcciones. Esto último es la aportación original de este Trabajo Fin de Grado a la cuestión de los índices de balance competitivo.

2.1.2. Índice Distancia de Balance Competitivo (DCB)

Este índice fue introducido en [38] para estudiar el balance competitivo en competiciones deportivas. La construcción de un índice de balance competitivo para clasificar ligas deportivas (o situaciones empresariales) requiere dos fases, conforme a los planteamientos de muchos autores (véase [38] a título de ejemplo):

- En una primera etapa, se asignan configuraciones de una liga, en la que participan n equipos, a vectores $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ de \mathbb{R}^n de coordenadas no negativas y tales que $\sum s_i = 1$, mediante el sistema de puntos (por lo general el $\{3, 1, 0\}$). El conjunto de tales puntos se denota en [38] por X^{n-1} .

2 Ranking y balance competitivo en competiciones deportivas

- En una segunda etapa, se establece una función de medida del balance que asigna a cada configuración $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ un valor del intervalo $[0, 1]$.

Conforme a lo dicho en la sección 2.1.1.3, un índice de balance competitivo debe considerar dos aspectos:

1. El balance competitivo máximo (depende del número concreto de partidos de la competición).
2. El balance competitivo mínimo (da una medida de la máxima desigualdad posible en la liga entre unos equipos y otros). Por lo general no consiste en la situación de monopolio, que no siempre puede llegar a darse (salvo que se midan aspectos determinados por ejemplo identificar al ganador de todas las ligas), como se hace por ejemplo en J. Considine y L. Gallager ([9]).

El balance competitivo máximo, es decir, la máxima igualdad entre equipos o empresas, se identifica en el llamado **baricentro** en X^{n-1} . Esta es la configuración del espacio X^{n-1} a la que se desea asignar el menor valor del índice (DCB), y es la siguiente:

$$\mathbf{s}^{\min} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \in X^{n-1}$$

Esto significa que todos los equipos han anotado el mismo porcentaje de puntos del total, o que todas las empresas poseen el mismo porcentaje de la cuota de mercado.

Ahora, para buscar la configuración de mínimo equilibrio competitivo tenemos que ser cautelosos. En el caso de las empresas en un cierto sector, es fácil ver que la configuración de menor equilibrio (mayor desigualdad) es el monopolio; es decir, una única empresa controla todo el mercado del sector:

$$\mathbf{s}^{\max} = (1, 0, \dots, 0) \in X^{n-1}.$$

Sin embargo, en el caso de una liga deportiva esta situación no es posible como ya hemos comentado anteriormente, pero siempre habrá una configuración, \mathbf{s}^{\max} , que genere el mínimo equilibrio competitivo. Dicha configuración, que fue calculada en [38] recibe el nombre de **Distribución en cascada truncada**, y es aquella tal que en una competición con n equipos, siendo $k < n$, se cumple que:

- Los k mejores equipos ganan todos sus partidos contra los equipos que están por debajo de ellos en la clasificación y;
- Los $(n - k)$ peores equipos empatan todos sus partidos contra los equipos que están por debajo de ellos en la clasificación. Como un empate recibe menos puntos que una victoria, de este modo se minimiza el número de puntos obtenidos por los últimos equipos de la clasificación.

La propuesta de índice de balance competitivo que se hace en [38], se recoge a continuación.

Definición 2.1. El índice de la distancia al equilibrio competitivo, $DCB(\mathbf{s})$, asignado a cada configuración del espacio X^{n-1}

$$DCB(\mathbf{s}) := \frac{D(\mathbf{s})}{D(\mathbf{s}^{\max})},$$

donde $D(\mathbf{s}) := d(\mathbf{s}, \mathbf{s}^{\min})$ y $D_{\max} = D(\mathbf{s}^{\max}) = d(\mathbf{s}^{\min}, \mathbf{s}^{\max})$, siendo d la distancia euclídea.

Nótese que $DCB(\mathbf{s})$ no es otra cosa que la normalización de $D(\mathbf{s})$.

Puesto que la distancia que se propone en [38] es la euclídea, resulta que:

$$D(\mathbf{s}) = d(\mathbf{s}, \mathbf{s}^{min}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2 - \frac{1}{n}}.$$

$$D_{max} = d(\mathbf{s}^{max}, \mathbf{s}^{min}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i^{max} - s_i^{min})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i^{max})^2 - \frac{1}{n}}.$$

En consecuencia, como se establece en [38], Proposición 1 y Corolario 1,

$$DCB(\mathbf{s}) := \frac{D(\mathbf{s})}{D_{max}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2 - \frac{1}{n}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i^{max})^2 - \frac{1}{n}}} \in [0, 1].$$

Que $DCB(\mathbf{s}) \in [0, 1]$, significa que el índice DCB cumple la propiedad de cardinalidad, lo que permite cuantificar las diferencias entre distintos valores, puesto que los valores 0 y 1 se alcanzan. Con ello el índice DCB permite medir distancias relativas entre ligas o sectores, y representa la razón con respecto al mínimo equilibrio competitivo.

En la Sección 2.1.4 abstraeremos el índice DCB mediante la noción de medida normada de balance competitivo para obtener nuevos índices de balance competitivo y analizar sus propiedades.

2.1.3. Cuestiones previas sobre distancias y normas

En la construcción del índice de balance competitivo DCB , hemos establecido la distancia entre cada elemento $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ que representa la configuración de una liga dada con el elemento \mathbf{s}^{min} que representa la configuración más equilibrada de la liga entre todas las posibles. Pero observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Si considerásemos la distancia trivial (que se define como $d(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}) = 0$ si $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}}$, mientras que $d(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}) = 1$, si $\mathbf{s} \neq \tilde{\mathbf{s}}$), es cierto que obtendríamos un índice de balance competitivo definiendo $D_d(\mathbf{s}) = d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$, para cada configuración \mathbf{s} de una liga, pero dicho índice no daría ninguna medida satisfactoria, puesto que, con arreglo al mismo, todas las ligas (salvo a la \mathbf{s}_0) estarían igual de equilibradas.

Es por ello que debemos considerar distancias especialmente buenas. Puesto que lo normal es considerar $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ como un elemento de \mathbb{R}^n y dicho conjunto es un espacio vectorial, es claro que de todas las distancias que podamos considerar son especialmente adecuadas las que están asociadas a una norma pues son las únicas compatibles con la estructura vectorial del espacio. En consecuencia, debemos optar por aquellas distancias que derivan o están asociadas a una norma.

Definición 2.2. Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ o \mathbb{C}). Una **norma** es una aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, que verifica las siguientes propiedades:

- (i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, para cada $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para cada $x, y \in X$.

La propiedad (iii) se conoce como propiedad triangular de la norma.

2 Ranking y balance competitivo en competiciones deportivas

Nótese que de la condición (ii) se deduce que $\|0\| = 0$, por lo que obtendríamos una definición equivalente si reemplazamos la condición (i) por esta otra:

$$\|x\| = 0 \iff x = 0.$$

Asimismo, de las condiciones (iii) y (ii) se obtiene que, para cada $x \in X$,

$$0 = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|,$$

de donde $\|x\| \geq 0$. Por tanto es innecesario imponer esta condición en la definición de norma (como se hace en muchos textos) dado que las propiedades (ii) y (iii) anteriores la garantizan.

Como es bien conocido, cada norma en un espacio vectorial X tiene asociada la siguiente distancia:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ para cada } x, y \in X.$$

Recordemos que una distancia, d , sobre un conjunto X es una aplicación

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

que verifica las siguientes propiedades, para cada $x, y, z \in X$:

- (a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (b) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

De las propiedades anteriores se deduce que $d(x, y) \geq 0$, para cada $x, y \in X$, por lo que tampoco se demanda esta propiedad en la definición de distancia. De hecho, de la propiedad (c) se deduce que $d(0, y) \leq d(0, x) + d(x, y)$, por lo que

$$d(0, y) - d(0, x) \leq d(x, y)$$

y análogamente, $d(0, x) \leq d(0, y) + d(y, x)$, de donde

$$d(0, x) - d(0, y) \leq d(y, x) = d(x, y),$$

y de ahí que

$$0 \leq |d(0, x) - d(0, y)| \leq d(x, y), \text{ para cada } x, y \in X.$$

Observemos que la definición de distancia no requiere de estructura vectorial alguna sobre el conjunto X en el que se define, a diferencia de lo que sucede en la definición de norma. En el caso particular de tengamos una distancia, d , definida sobre un espacio vectorial, X , podemos saber si dicha distancia es, o no, la distancia asociada a una norma estudiando las propiedades siguientes:

Proposición 2.1. *Sea $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una distancia definida sobre un espacio vectorial X sobre el cuerpo base \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ o \mathbb{C}). Entonces d es la distancia asociada a una norma si, y solo si, d verifica las dos propiedades siguientes:*

$$\begin{aligned} d(\alpha x, \alpha y) &= |\alpha| d(x, y), \quad (x, y \in X; \alpha \in \mathbb{K}) \quad (\text{positividad homogénea}), \\ d(x + z, y + z) &= d(x, y), \quad (x, y, z \in X) \quad (\text{aditividad}), \end{aligned}$$

en cuyo caso d es la distancia asociada a la norma dada por

$$\|x\| := d(x, 0), \quad (x \in X).$$

Demostración. Que las distancias provenientes a las normas son positivamente homogéneas y aditivas es trivial puesto que

$$\begin{aligned} d(\alpha x, \alpha y) &: = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x - y\| = |\alpha| d(x, y) \\ d(x + z, y + z) &: = \|x + z - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y), \end{aligned}$$

para cada $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Recíprocamente, si $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una distancia sobre un espacio vectorial X que es positivamente homogénea y aditiva, entonces $\|x\| := d(x, 0)$, para cada $x \in X$, define una norma en X puesto que:

- (i) Si $\|x\| = 0$ entonces $d(x, 0) = 0$ y, por ser d distancia, $x = 0$.
- (ii) $\|\alpha x\| = d(\alpha x, 0) = d(\alpha x, \alpha 0)$ y, por ser d positivamente homogénea,

$$d(\alpha x, \alpha 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \|x\|,$$

de donde $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

- (iii) $\|x + y\| = d(x + y, 0) = d(x + y, y - y)$, y por la aditividad de d , tenemos que

$$d(x + y, y - y) = d(x, -y).$$

Por la propiedad triangular,

$$d(x, -y) \leq d(x, 0) + d(0, -y),$$

y, por ser d positivamente homogénea, $d(0, -y) = d(0, y)$, de donde

$$d(x, 0) + d(0, -y) = d(x, 0) + d(0, y) = d(x, 0) + d(y, 0) = \|y\| + \|x\|,$$

y así $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Una vez aclarada la conveniencia de considerar medidas de balance competitivo asociadas a distancias derivadas de una norma, procedemos al estudio de las mismas en la siguiente sección.

2.1.4. Medidas normadas de balance competitivo

En la siguiente definición, damos nombre a las medidas anteriormente propuestas, es decir, aquellas que provienen de normas.

Definición 2.3. Una **medida normada de balance competitivo** en \mathbb{R}^n es una aplicación de la forma

$$D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}) := \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|, \quad \text{para cada } \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma en \mathbb{R}^n y $\mathbf{s}_0 = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$.

Cuando no haya duda sobre la norma en cuestión escribiremos simplemente $D(\mathbf{s})$ en lugar de $D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s})$.

Proposición 2.2. Sea $D_{\|\cdot\|}$ una medida normada de balance competitivo en \mathbb{R}^n y sea $k > 0$. Entonces,

$$kD_{\|\cdot\|} = D_{k\|\cdot\|}.$$

Demostración. La aplicación $kD_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}) := k\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|$, para cada $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ es la medida normada de balance competitivo asociada a la norma $\|\cdot\| := k\|\cdot\|$.

$$kD_{\|\cdot\|} = k\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| = \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| = D_{\|\cdot\|}.$$

□

Esto significa que todos los resultados que vamos a exponer a continuación para medidas normadas de balance competitivo se siguen verificando si reemplazamos $D_{\|\cdot\|}$ por $kD_{\|\cdot\|}$, para cualquier $k > 0$. En consecuencia, para ligas en las que dos o más configuraciones sean posibles, tenemos lo siguiente:

Corolario 2.1. La normalización $\widehat{D}_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}) := \frac{D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s})}{D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}^{\max})}$ de una medida normada de balance competitivo, $D_{\|\cdot\|}$, es otra medida normada de balance competitivo.

De hecho $\widehat{D}_{\|\cdot\|} = D_{\|\cdot\|}$ siendo $\|\cdot\| := \frac{1}{k}\|\cdot\|$, para $k = D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}^{\max})$.

El considerar índices de balance competitivo asociado a una norma tiene propiedades adicionales y sus ventajas. Por ejemplo:

Proposición 2.3. Sea $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un índice de balance competitivo respecto de una norma, $\|\cdot\|$, en \mathbb{R}^n . Entonces, dadas dos ligas (representadas por vectores $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ y $\tilde{\mathbf{s}} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_1) \in \mathbb{R}^n$ con $\sum s_i = \sum \tilde{s}_i = 1$) condición necesaria para que sea $D(\mathbf{s}) < D(\tilde{\mathbf{s}})$ (esto es que \mathbf{s} esté más equilibrada que $\tilde{\mathbf{s}}$) es que

$$\|\mathbf{s}\| - \|\mathbf{s}_0\| \leq D(\tilde{\mathbf{s}}) \leq \|\tilde{\mathbf{s}}\| + \|\mathbf{s}_0\|.$$

En particular, si $\|\mathbf{s}\| > \|\tilde{\mathbf{s}}\| + 2\|\mathbf{s}_0\|$ no hay posibilidad de que \mathbf{s} sea una liga más equilibrada que $\tilde{\mathbf{s}}$

Demostración. Observemos que si $D(\mathbf{s}) < D(\tilde{\mathbf{s}})$, entonces

$$\|\mathbf{s}\| \leq \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| + \|\mathbf{s}_0\| = D(\mathbf{s}) + \|\mathbf{s}_0\| < D(\tilde{\mathbf{s}}) + \|\mathbf{s}_0\|,$$

y el resto es claro, pues $D(\tilde{\mathbf{s}}) \leq \|\tilde{\mathbf{s}}\| + \|\mathbf{s}_0\|$ gracias a la desigualdad triangular. □

Las normas más clásicas de en \mathbb{R}^n son las que se relacionan a continuación, siendo $\mathbf{s} := (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$:

(I) La norma euclídea, $\|\cdot\|_2$, que se define como

$$\|\mathbf{s}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |s_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta norma es el caso $p = 2$ de la familia de normas que se describen a continuación.

(II) Para cada $p \geq 1$, definimos la norma p -ésima como $\|\cdot\|_p$, donde

$$\|\mathbf{s}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |s_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cuando $p = 1$, tenemos la norma

$$\|\mathbf{s}\|_1 = \sum_{i=1}^n |s_i|.$$

(III) La norma del máximo, $\|\cdot\|_{\max}$ que se define como

$$\|\mathbf{s}\|_{\max} := \max\{|s_1|, \dots, |s_n|\}.$$

Es fácil construir nuevas normas puesto que, por ejemplo, la suma de dos normas da lugar a una nueva norma (resultado que se extiende a un cualquier número finito de normas).

Como es bien conocido ([4, Teorema 8.7]) todas las normas de \mathbb{R}^n son equivalentes. Que dos normas, $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$, sean equivalentes se traduce en que existen constantes positivas k_1 y k_2 tales que

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &\leq k_1 |||\cdot||| \\ |||\cdot||| &\leq k_2 \|\cdot\|. \end{aligned}$$

Esto se puede interpretar como sigue: dos normas son equivalentes cuando para cada sucesión \mathbf{s}_n de \mathbb{R}^n , entonces \mathbf{s}_n converge a \mathbf{s} respecto de una de las normas si, y sólo si, lo hace respecto de la otra. Esto es que las sucesiones convergentes son las mismas. En términos de índices de balance competitivo, este teorema se reformula como sigue:

Teorema 2.1. Sean $D_{\|\cdot\|}$ y $D_{|||\cdot|||}$ dos medidas normadas de balance competitivo, sea \mathbf{s}_n una sucesión de \mathbb{R}^n y sea $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_n) \rightarrow D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s})$, cuando $n \rightarrow \infty$ si, y sólo si, $D_{|||\cdot|||}(\mathbf{s}_n) \rightarrow D_{|||\cdot|||}(\mathbf{s})$.

Por tanto, el comportamiento límite de dos medidas de balance competitivo es el mismo.

Sin embargo, en la vida real no se dará el caso de comparar infinitas ligas, por lo que al considerar un número finito de ellas puede darse el caso de que dos medidas normadas de balance competitivo clasifiquen de manera distinta. En breve pondremos ejemplos que lo corroboren tras caracterizar cuándo dos normas dan lugar a índices que clasifican de la misma manera.

Nuestro interés reside en el comportamiento de las medidas normadas que toman valores en el siguiente conjunto.

Definición 2.4. Definimos el **simplex** de \mathbb{R}^n como el conjunto

$$S_{\mathbb{R}^n} := \{\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n s_i = 1, \text{ siendo } s_i \geq 0, \text{ para } i = 1, \dots, n\}.$$

En el siguiente resultado caracterizamos cuándo dos medidas normadas de balance competitivo clasifican igual.

Proposición 2.4. Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas sobre \mathbb{R}^n y sean $D_{\|\cdot\|}$ y $D_{|||\cdot|||}$ las medidas de balance competitivo asociadas. Entonces $D_{\|\cdot\|}$ y $D_{|||\cdot|||}$ clasifican igual sobre los elementos del simplex de \mathbb{R}^n si, y sólo si ,

$$(\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|)(|||\mathbf{u}\||| - |||\mathbf{v}\|||) \geq 0, \tag{2.5}$$

2 Ranking y balance competitivo en competiciones deportivas

para cada $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B_0$, donde

$$B_0 := \{\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{n} \leq w_i \leq 1 - \frac{1}{n}, \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ y } \sum w_i = 0\}.$$

Demostración. Puesto que para cada elemento $\mathbf{u} \in S_{\mathbb{R}^n}$ se tiene que $\mathbf{u} := \mathbf{s} - \mathbf{s}_0 \in B_0$, el resultado se deduce de observar que las expresiones entre paréntesis de la desigualdad 2.5 tienen el mismo signo cuando \mathbf{u} está igual clasificado con respecto a \mathbf{v} para ambas normas. \square

Ejemplo 2.5. En \mathbb{R}^2 las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ clasifican igual. De hecho, si $\mathbf{u} = (t, -t)$ y $\mathbf{v} = (s, -s)$, entonces

$$(\|\mathbf{u}\|_1 - \|\mathbf{v}\|_1)(\|\mathbf{u}\|_2 - \|\mathbf{v}\|_2) = 2\sqrt{2}(|t| - |s|)^2 \geq 0.$$

Nótese que el simplex de \mathbb{R}^n , además de ser un conjunto convexo (por ser la envolvente convexa de los vectores de la base canónica) es también un conjunto compacto de \mathbb{R}^n , como se prueba a continuación.

Recordamos que un subconjunto de \mathbb{R}^n es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado [17]. Nótese que es indiferente la norma que consideremos en \mathbb{R}^n puesto que al ser todas ellas equivalentes, las sucesiones convergentes respecto de cualesquiera dos normas son las mismas (lo que hace que los subconjuntos cerrados respecto de una y otra norma coincidan) y los subconjuntos acotados también.

Proposición 2.5. El conjunto $S_{\mathbb{R}^n}$ es un compacto de \mathbb{R}^n (respecto de cualquier norma que se considere).

Demostración. Es claro que $S_{\mathbb{R}^n}$ es un conjunto cerrado, puesto que si \mathbf{s}_n es una sucesión de elementos de $S_{\mathbb{R}^n}$ siendo que $\mathbf{s}_n \rightarrow \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$, en particular, por el teorema de la equivalencia de normas ([4]) dicha convergencia ha de darse igualmente en la norma $\|\cdot\|_1$. Esto es que

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}\|_1 \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Pero es inmediato comprobar que $\tilde{\mathbf{s}} = (s_1, \dots, s_n) \in S_{\mathbb{R}^n}$ si, y sólo si, todas sus coordenadas son no negativas y $\|\tilde{\mathbf{s}}\|_1 = 1$. En consecuencia,

$$0 \leq |1 - \|\mathbf{s}\|_1| = \|\|\mathbf{s}_n\|_1 - \|\mathbf{s}\|_1\| \leq \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}\|_1 \rightarrow 0,$$

lo que nos permite afirmar que $\|\mathbf{s}\|_1 = 1$. Como la convergencia $\mathbf{s}_n \rightarrow \mathbf{s}$ ha de darse coordenada a coordenada (por ser $\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}\|_1 \rightarrow 0$) y todas las coordenadas de cualquier \mathbf{s}_n son no negativas, deducimos que las de \mathbf{s} (que son límite de las de \mathbf{s}_n) también han de serlo, lo que prueba que $\mathbf{s} \in S_{\mathbb{R}^n}$ y, con ello, la cerrabilidad de $S_{\mathbb{R}^n}$. La acotación es obvia. De hecho si $\|\cdot\|$ es una norma de \mathbb{R}^n y $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in S_{\mathbb{R}^n}$ entonces $\sum_{i=1}^n s_i = 1$ y en consecuencia

$$\|\mathbf{s}\| = \left\| \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{e}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|s_i \mathbf{e}_i\| = \sum_{i=1}^n s_i \|\mathbf{e}_i\| \leq \max\{\|\mathbf{e}_1\|, \dots, \|\mathbf{e}_n\|\},$$

luego $S_{\mathbb{R}^n}$ es un conjunto acotado, como queríamos demostrar. \square

Recordemos que, por el Teorema de Weierstrass ([26]), si $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua y K es un compacto de \mathbb{R}^n entonces han de existir $\mathbf{s}_{\max}, \mathbf{s}_{\min} \in K$ tales que

$$D(\mathbf{s}_{\min}) \leq D(\mathbf{s}) \leq D(\mathbf{s}_{\max}), \text{ para cada } \mathbf{s} \in K.$$

Proposición 2.6. Sea $D_{\|\cdot\|}(\cdot)$ una medida normada de balance competitivo en \mathbb{R}^n . Entonces,

- (i) $D_{\|\cdot\|} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.
- (ii) $0 = D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_0) \leq D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s})$, para cualquier $\mathbf{s} \in S_{\mathbb{R}^n}$.
- (iii) Existe $\mathbf{s}_{\max} \in S_{\mathbb{R}^n}$ tal que

$$D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_{\max}) \geq D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}), \text{ para cualquier } \mathbf{s} \in S_{\mathbb{R}^n}.$$

Demostración. La función $D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}) := \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|$ es la composición de dos funciones continuas: la función de traslación $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s} - \mathbf{s}_0$, y la norma. Por tanto dicha función es continua lo que prueba la afirmación (i). La afirmación (ii) es obvia y (iii) es consecuencia de (i). De hecho, $D_{\|\cdot\|}(S_{\mathbb{R}^n})$ ha de ser un compacto de \mathbb{R} , por ser $S_{\mathbb{R}^n}$ un conjunto compacto como ya se ha probado en la proposición anterior (véase la proposición 2.5) y el resto de la prueba se deduce sin dificultad. \square

Ahondando más sobre el valor máximo que una medida normada de balance competitivo alcanza sobre el simplex de \mathbb{R}^n , se tiene lo siguiente:

Proposición 2.7. Sea $D_{\|\cdot\|}$ una medida normada de balance competitivo en \mathbb{R}^n . Sea $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Sea

$$M := \max\{D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_1), \dots, D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_n)\}.$$

Entonces, para cada $\mathbf{s} \in S_{\mathbb{R}^n}$ se tiene que

$$0 \leq D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}) \leq M.$$

Además, si $\|e_i\| = 1$, para cada $i = 1, \dots, n$, entonces $0 \leq M \leq 2$.

Demostración. Es claro que $\mathbf{s}_0 = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in S_{\mathbb{R}^n}$ siendo $D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_0) = 0$. Asimismo, para cualquier $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in S_{\mathbb{R}^n}$ resulta que $\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{e}_i$, siendo $\mathbf{s}_0 = \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{s}_0$, de donde

$$\begin{aligned} D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}) &= \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| = \left\| \left(\sum_{i=1}^n s_i \mathbf{e}_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n s_i \mathbf{s}_0 \right) \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n s_i (\mathbf{e}_i - \mathbf{s}_0) \right\| \leq \\ &\sum_{i=1}^n s_i D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_i) \leq \sum_{i=1}^n s_i M = M, \end{aligned}$$

por lo que $0 \leq D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}) \leq M$.

Finalmente, si fuese $\|e_i\| = 1$, para cada $i = 1, \dots, n$, entonces,

$$0 \leq \|\mathbf{s}_0\| = \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \right\| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{e}_i\| = 1,$$

2 *Ranking y balance competitivo en competiciones deportivas*

de donde, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$0 \leq |1 - \|\mathbf{s}_0\|| = \|\|\mathbf{e}_i\| - \|\mathbf{s}_0\|\| = D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_i) \leq \|\mathbf{e}_i\| + \|\mathbf{s}_0\| \leq 2.$$

y así $0 \leq D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}) \leq M$, para cada $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. \square

Corolario 2.2. Sea $D_{\|\cdot\|}$ una medida normada de balance competitivo en \mathbb{R}^n . Sea $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Sea

$$\tilde{M} := \max\{\|\mathbf{e}_1\|, \dots, \|\mathbf{e}_n\|\}.$$

Entonces

$$0 \leq D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}) \leq 2\tilde{M}, \text{ para cada } \mathbf{s} \in S_{\mathbb{R}^n}.$$

Demostración. Puesto que

$$\|\mathbf{s}_0\| = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \mathbf{e}_i \right\| \leq \tilde{M} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = \tilde{M},$$

se sigue que

$$D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_i) := \|\mathbf{e}_i - \mathbf{s}_0\| \leq 2\tilde{M}.$$

Por tanto, si $M := \max\{D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_1), \dots, D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_n)\}$ entonces $M \leq 2\tilde{M}$, y el resultado se obtiene de la proposición anterior. \square

En relación con el Corolario 2.2, las normas $\|\cdot\|_p$, para $p \geq 1$, al igual que $\|\cdot\|_{\max}$ verifican que $\|\mathbf{e}_i\| = 1$, para cada $i = 1, \dots, n$. Además, para cualesquiera de ellas,

$$D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_1) = \dots = D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_n).$$

Esta última cadena de igualdades pudiera no darse para otras normas de \mathbb{R}^n . Es fácil construir ejemplos de ello teniendo en cuenta que si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un operador lineal y biyectivo $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^n , entonces

$$\|\|\mathbf{s}\|\| := \|F(\mathbf{s})\|, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n,$$

define una nueva norma en \mathbb{R}^n .

La Proposición 2.7 nos muestra que en un análisis de balance competitivo en el que se admita el monopolio, esto es la configuración $(1, 0, \dots, 0)$, conseguimos un índice de balance competitivo que tome valores en el intervalo $[0, 1]$ simplemente normalizando cualquier medida normada, $D_{\|\cdot\|}$, de balance competitivo en \mathbb{R}^n definiendo

$$\hat{D}_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}) = \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|}{M},$$

donde $M := \max\{D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_1), \dots, D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_n)\}$. Conforme a la Proposición 2.2, se tiene que

$$\hat{D}_{\|\cdot\|} = \frac{1}{M} D_{\|\cdot\|} = D_{\frac{1}{M}\|\cdot\|},$$

por lo que $\hat{D}_{\|\cdot\|}$ no es más que la medida normada de balance competitivo asociada a la

norma $\frac{1}{M} \|\cdot\|$.

Cuando no pueda darse el monopolio, sabemos que si el conjunto de valores admisibles para la configuración de una liga es un subconjunto cerrado (y por tanto compacto) del simplex, cosa que ocurre en particular cuando dicho subconjunto es finito, entonces cualquier medida normada de balance competitivo $D_{\|\cdot\|}$ en \mathbb{R}^n es también normalizable, (si bien la constante M de normalización será otra).

Una de las ventajas de los índices de balance competitivo derivados de una medida normada en relación a otros, es la siguiente propiedad que involucra la estructura algebraica de \mathbb{R}^n (lo que distingue a las normas dentro de las distancias dentro de un espacio vectorial es la capacidad de relacionar la estructura algebraica con la métrica).

Como se sabe, una combinación lineal convexa de n elementos (s_1, \dots, s_n) es una combinación del siguiente tipo:

$$\sum_{i=1}^n t_i s_i \quad \text{donde} \quad (t_1, \dots, t_n) \in S_{\mathbb{R}^n}.$$

Proposición 2.8. *Sea $D_{\|\cdot\|}$ una medida normada de balance competitivo en \mathbb{R}^n . Entonces, para cada combinación lineal convexa se verifica que*

$$D_{\|\cdot\|} \left(\sum_{i=1}^n t_i s_i \right) \leq \sum_{i=1}^n t_i D_{\|\cdot\|}(s_i).$$

Demostración. Si $\mathbf{s} = (t_1, \dots, t_n) \in S_{\mathbb{R}^n}$ resulta que $\mathbf{s}_0 = \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{s}_0$, por lo que $\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{e}_i$, siendo $\mathbf{s}_0 = \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{s}_0$, de donde

$$D_{\|\cdot\|} \left(\sum_{i=1}^n t_i s_i \right) = \left\| \sum_{i=1}^n t_i s_i - \mathbf{s}_0 \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n t_i (s_i - \mathbf{s}_0) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |t_i| \|s_i - \mathbf{s}_0\| = \sum_{i=1}^n t_i D_{\|\cdot\|}(s_i).$$

lo que prueba el resultado. □

Para el caso de combinaciones convexas de dos elementos tenemos lo siguiente:

Corolario 2.3. *Sea $D_{\|\cdot\|}$ una medida normada de balance competitivo en \mathbb{R}^n . Entonces, para cada $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathbb{R}^n$ y cada $t \in [0, 1]$ se tiene que*

$$\left| t D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_1) - (1-t) D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_2) \right| \leq D_{\|\cdot\|}(t\mathbf{s}_1 + (1-t)\mathbf{s}_2) \leq t D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_1) + (1-t) D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_2) \leq D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_2).$$

En particular,

$$\frac{1}{2} \left| D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_1) - D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_2) \right| \leq D_{\|\cdot\|} \left(\frac{\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_1) + D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_2) \right). \quad (2.6)$$

Demostración. Que $D_{\|\cdot\|}(t\mathbf{s}_1 + (1-t)\mathbf{s}_2) \geq \left| t D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_1) - (1-t) D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_2) \right|$ se deduce del hecho

de que

$$\|t\mathbf{s}_1 + (1-t)\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_0\| = \|t(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0) + (1-t)(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_0)\| \geq t\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0\| + (1-t)\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_0\|.$$

Que $D_{\|\cdot\|}(t\mathbf{s}_1 + (1-t)\mathbf{s}_2) \leq tD_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_1) + (1-t)D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_2) \leq D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}_2)$ ya está probado y el resto es obvio. \square

Corolario 2.4. Dada una medida normada de balance competitivo $D_{\|\cdot\|}$, si s_1 es una liga más equilibrada que s_2 , esto es que $D_{\|\cdot\|}(s_1) \leq D_{\|\cdot\|}(s_2)$, entonces $\frac{s_1+s_2}{2}$ es una liga más equilibrada que s_2 .

Siguiendo con este tipo de ideas, podemos probar resultados como el siguiente.

Corolario 2.5. Sea $D_{\|\cdot\|}$ una medida normada de balance competitivo en \mathbb{R}^n . Si $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in S_{\mathbb{R}^n}$ se verifica que

$$D_{\|\cdot\|}(\mathbf{s}) \leq \sum_{i=1}^n s_i D_{\|\cdot\|}(\mathbf{e}_i).$$

Demostración. Tómese en la proposición anterior $\mathbf{s}_i = \mathbf{e}_i$, y si tenemos $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in S_{\mathbb{R}^n}$ entonces $\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{e}_i$, es una combinación lineal convexa de $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. \square

La introducción de estos nuevos índices de balance competitivo abren todo un abanico de posibilidades de análisis de situaciones concretas, máxime cuando estos índices se combinan con diversas formas de asignar a los resultados de una liga de n equipos un vector de \mathbb{R}^n . En la siguiente sección trataremos este tema.

2.2. Clasificando equipos de una liga

Una vez hemos visto cómo se clasifican las ligas, otra pregunta que cabría formular sería: “¿Cómo clasificamos a los equipos dentro de una liga?” Es decir, ¿cómo sabemos cuál es el “mejor equipo” de una cierta competición? Este tema es el que discutiremos en esta sección, explicando en primer lugar el sistema más ampliamente usado en las competiciones de fútbol europeas, y pasando posteriormente a una visión más abstracta y matemática del problema gracias a la teoría de grafos.

El sistema de puntos que proponemos a continuación es el que se utiliza de forma habitual en los índices de balance competitivo que hemos usado en la sección anterior.

2.2.1. Sistema de puntos

Como dijimos anteriormente (en la sección 2.1.1.1) la liga española de fútbol (y la gran mayoría de ligas europeas) usan un sistema que asigna tres puntos al equipo vencedor de un encuentro, un punto a cada equipo en caso de que se empate, y cero puntos cuando pierde un encuentro. De este modo se suman los puntos y se obtiene una clasificación, pero ¿es este el mejor método de clasificación? ¿Qué ventajas y qué inconvenientes tiene?

El sistema anteriormente descrito se conoce como sistema $\{3, 1, 0\}$, y es uno de los más extendidos a la hora de clasificar equipos de fútbol dentro de una liga. Es fácilmente generalizable a un sistema $\{p_w, p_t, p_l\}$, donde cada uno de los términos denota los puntos

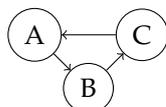
obtenidos cuando se gana, empata o pierde un partido respectivamente, dando cada elección de p_w, p_t, p_l ordenaciones potencialmente distintas ([2]) pero, en cualquier caso, existe una clara limitación: ¿qué pasaría si dos o más equipos empatan en puntos? A este problema se le pueden dar múltiples soluciones.

La primera de ellas podría ser tomar los enfrentamientos directos entre estos equipos y decidir conforme al resultado. Es decir, si un equipo ha ganado al otro más veces de las que ha perdido, sería coherente que quedase por encima en la clasificación. Si cada equipo jugase contra los demás un número par de veces podría ocurrir que ambos equipos ganen y pierdan el mismo número de veces, o incluso cuando juegan un número impar de veces entre ellos podríamos plantearnos qué pasaría si empatasen. Para solucionar estos casos, simplemente tendríamos que recurrir a otro criterio de nuestra elección. El siguiente ejemplo muestra la problemática.

Ejemplo 2.6. Supongamos que tres equipos (A,B,C) quedan empatados a puntos por el sistema $\{3, 1, 0\}$. Ahora supongamos que cada equipo ha jugado contra los otros dos una vez (una vez contra cada uno, es decir, dos partidos por equipo) y se ha obtenido el siguiente resultado:

El equipo A ha ganado al B.
El equipo B ha ganado al C.
El equipo C ha ganado al A.

Si elegimos el criterio anteriormente descrito para desempatar, tendríamos que situar al equipo A por encima del B, al equipo B por encima del C, pero el C tendría que estar por encima del A, lo cual sería imposible. La situación queda descrita por el siguiente grafo, donde la flecha entre cada vértice va desde el equipo ganador hacia el equipo perdedor:



Como vemos, se ha creado un ciclo, por lo que no podemos ordenar a estos equipos según el criterio propuesto. A esta situación se la conoce popularmente como **el círculo de la muerte** ([28]).

Existen otros criterios para determinar el desempate, como pueden ser: tomar la diferencia entre goles marcados y goles recibidos, y situar como mejor equipo al que tiene esta diferencia más favorable; uno más sencillo también pueden ser situar por encima en la clasificación al equipo que más victorias tenga, o al que menos haya empatado o incluso simplemente al equipo que más goles haya marcado.

Está claro que también podemos usar todos estos criterios de manera encadenada, pero tanto el orden en el que se usan, como qué criterios se usan es algo completamente subjetivo pero que, a su vez, tiene bastante relevancia, ya que un cambio en los criterios usados o en su orden, pueden alterar la clasificación de la liga significativamente.

Todos estos criterios son perfectamente válidos y, dependiendo del contexto, puede ser que algunos más convenientes que otros. Pero nosotros estamos interesados en profundizar en la idea matemática de la ordenación de equipos dentro de las ligas, por lo que nos disponemos a utilizar la teoría de las medidas de centralidad de grafos para dar respuesta a este problema.

2.2.2. Clasificando por vectores propios

Gracias a las medidas de centralidad de grafos, podemos ofrecer una respuesta distinta, y más matemática que el sistema de puntos (como el $\{3, 1, 0\}$ o similares) al problema de ordenar los equipos de una liga. Como se ha dicho, el uso del vector propio para la clasificaciones deportivas se usa desde el año 1915 ([21]). Nosotros usaremos un ejemplo de [12] que será muy ilustrativo sobre el uso y la motivación del método empleado.

Nos centraremos en este caso en la liga de baloncesto profesional de Estados Unidos, la NBA. Debido a las grandes distancias que separan a las ciudades, en Estados Unidos la forma de emparejar a los equipos de las competiciones es algo peculiar. Concretamente, en la NBA hay 29 equipos que están organizados en dos conferencias, y cada una de éstas está subdividida en dos divisiones: la Conferencia Este (subdividida en División Atlántico y División Central), la Conferencia Oeste (subdividida en División Medio Oeste y División Pacífico). Cada equipo juega 82 partidos, pero no juega el mismo número de partidos contra todos los demás equipos, sino que juega más partidos contra los equipos de la conferencia a la que pertenece.

Actualmente en la NBA se utiliza un sistema que tan solo tiene en cuenta el número de victorias y derrotas para clasificar a los equipos, estableciendo el criterio de los enfrentamientos directos como método de desempate, así como otros criterios más específicos en caso de que sean necesarios para seguir desempatando como, por ejemplo, el mayor porcentaje de victorias contra equipos de la misma división, o mayor cantidad de puntos anotados.

Profundizando más en la clasificación de equipos y dado que en la NBA se juegan más partidos contra los equipos de la conferencia propia, ¿no sería injusto que en una conferencia un equipo acumule muchas victorias porque el resto de equipos tuvieran un nivel inferior, mientras que en la otra conferencia nadie acumulara tantas victorias al haber mucha más igualdad entre todos los equipos? Dicho de otra forma, podría haber una conferencia “débil” en la que fuera fácil acumular victorias, y otra “fuerte” en la que fuera más complicado, por lo que podríamos concluir que el sistema de simplemente tomar el porcentaje de victorias es “injusto”.

Si trasladamos el problema anterior al lenguaje de grafos, nos damos cuenta de que es muy similar al planteado en la centralidad del vector propio. En lugar de tener en cuenta únicamente las victorias, queremos tener en cuenta la importancia del equipo contra el que se consiguen las victorias; similarmente, no queremos únicamente tener en cuenta los vértices adyacentes, sino también la centralidad (o importancia) de dichos vértices.

Si en una competición hay n equipos (E_1, \dots, E_n) , y registramos los resultados de la competición en una matriz (A) cuyas entradas (a_{ij}) son las victorias del equipo E_i sobre el equipo E_j del siguiente modo:

$$a_{ij} = \frac{\text{n}^\circ \text{ victorias del equipo } E_i \text{ sobre el equipo } E_j}{\text{n}^\circ \text{ partidos de } E_i}.$$

Esta matriz A puede ser interpretada como la matriz de adyacencia de un digrafo ponderado, pudiendo aplicarle entonces la teoría de grafos y, más particularmente, pudiendo hallar el vector que define la centralidad del vector propio. Dicho vector nos ofrecería una clasificación

de vértices, que trasladándolo a la liga de baloncesto sería una clasificación de los equipos dentro de la liga.

Ejemplo 2.7. Imaginemos que en una liga de baloncesto de 6 equipos, en la que cada equipo juega 21 partidos obtenemos la siguiente distribución de victorias:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Total
E_1	-	3/21	0/21	0/21	1/21	2/21	6/21
E_2	3/21	-	2/21	2/21	2/21	1/21	10/21
E_3	6/21	4/21	-	2/21	1/21	1/21	14/21
E_4	3/21	1/21	1/21	-	2/21	2/21	9/21
E_5	2/21	1/21	2/21	4/21	-	2/21	11/21
E_6	1/21	2/21	2/21	4/21	4/21	-	13/21

Una primera clasificación de los equipos se podría dar atendiendo únicamente a su número de victorias, por lo que obtendríamos la siguiente ordenación de la liga: $E_3, E_6, E_5, E_2, E_4, E_1$. Está claro que la tabla anterior nos define la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{21} & \frac{2}{21} & \frac{2}{21} & \frac{1}{21} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{21} & 0 & \frac{2}{21} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & 0 & \frac{2}{21} & \frac{2}{21} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{4}{21} & 0 & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{2}{21} & \frac{4}{21} & \frac{4}{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz puede ser interpretada como la matriz de adyacencia de un digrafo ponderado a la cual podemos aplicar las medidas de centralidad vistas anteriormente para ver qué ocurre y poder extraer conclusiones:

- **Centralidad de grado.** Como se trata de un digrafo, tomaremos la segunda definición de esta medida, dando como resultado el siguiente vector con la medida de cada uno de los vértices:

$$C_{out}^{(deg)} = (3, 5, 5, 5, 5, 5) \quad C_{in}^{(deg)} = (5, 5, 4, 4, 5, 5).$$

Observamos que esta medida no es demasiado útil en nuestro caso, ya que simplemente nos informa de a cuántos equipos han ganado cada uno al menos una vez.

- **Centralidad de proximidad.** Como se trata de un grafo fuertemente conexo, ya que todos los equipos han jugado entre sí, la distancia del camino más corto entre dos cualesquiera de cada uno de ellos siempre será 1. Entonces obtenemos:

$$C^{(clos)} = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

Esta medida tampoco parece especialmente útil para nuestro propósito, ya que la única conclusión que podríamos extraer es que E_1 parece más débil que el resto, pero los demás no estarían

ordenados.

- **Centralidad de intermediación.** Calculando según la expresión dada en la sección 1.2.3 obtenemos el siguiente vector:

$$C^{(betw)} = \left(0, \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Tampoco ofrece una clasificación satisfactoria de los equipos, puesto que ni siquiera consigue ordenarlos.

- **Centralidad del vector propio.** Calculando los vectores y valores propios de la matriz de estudio (que se puede hacer con cualquier software de cálculo numérico) obtenemos que el vector propio asociado al valor propio de módulo mayor es: $(0.509, 0.746, 0.928, 0.690, 0.840, 1)$. Por lo que

$$C^{(eig)} = (0.509, 0.746, 0.928, 0.690, 0.840, 1),$$

y la clasificación que nos da esta medida sería: $E_6, E_3, E_5, E_2, E_4, E_1$. Como podemos apreciar, es muy similar a la primera clasificación que dimos, únicamente cambian de posición los equipos 3 y 6. Esto se debe a que, si nos fijamos, el equipo 3 tiene seis de sus victorias acumuladas contra el equipo 1, siendo este equipo el último en la clasificación según prácticamente cualquier medida que tomemos; mientras que el equipo 6 tiene sus victorias más repartidas, y contra equipos no tan “débiles”.

El ejemplo anterior nos deja bastante claro que, a la hora de clasificar equipos dentro de una liga deportiva, es muy conveniente la medida de centralidad del vector propio y, por extensión, todas las que de ella puedan derivar; dando una ordenación más que satisfactoria desde el punto de vista deportivo aunque, por supuesto, no se trata de la ordenación definitiva ni la única posible, quedando siempre al criterio de cada persona la elección de un método u otro.

Nuestro propósito era demostrar la utilidad de la centralidad del vector propio y, por extensión, del Teorema de Perron-Frobenius, en el contexto de la ordenación de los equipos en las competiciones deportivas, y es justo lo que acabamos de poner de manifiesto. Si bien estos métodos más complejos de clasificación llevan implícitos el cálculo de vectores propios (a diferencia de los sistemas de clasificación por puntos) es igualmente cierto que las posibilidades técnicas para paliar este problema son muy potentes e interesantes, como ejemplo remitimos a [14]. No deja de sorprendernos que un resultado de inicios del siglo 20 haya sido clave para desarrollos de motores de búsqueda como el Page Rank usado por Google. En el siguiente capítulo vamos a estudiar en mayor detalle el Teorema de Perron-Frobenius, con la intención de que Trabajo Fin de Grado quede lo más completo y autocontenido posible.

3 Teorema de Perron-Frobenius

En el capítulo anterior se ha puesto de manifiesto la utilidad y versatilidad que tiene el Teorema de Perron-Frobenius. En nuestro caso particular, hemos visto que es muy útil a la hora de clasificar los vértices de un grafo y, por tanto, a la hora de clasificar equipos deportivos dentro de una liga, dando así una medida de la calidad de cada equipo en comparación con el resto de equipos. Es por esto que dedicaremos este último capítulo del trabajo a hablar un poco en la historia de este teorema, dando alguna de sus posibles demostraciones y ofreciendo una lista de sus múltiples aplicaciones más allá de las ya citadas anteriormente.

Lo primero que conviene aclarar de este teorema es el porqué de su nombre. El alemán Oskar Perron (1880-1975) fue un matemático que destacó por la variedad de áreas a las que dedicó sus investigaciones: Análisis, Ecuaciones Diferenciales, Álgebra, Geometría, Teoría de Números, etc. Fue autor de algunos textos que a posteriori se convirtieron en clásicos. Entre sus resultados más destacados se encuentra el tema que nos ocupa: la versión para matrices positivas¹ del teorema. Por otro lado, Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), también alemán, fue uno de los más destacados integrantes de la escuela de Berlín. Fue un matemático más “puro”, sin acercarse en ningún momento a la matemática aplicada, destacando sus aportaciones a Teoría de Grupos. En la última etapa de su vida generalizó el resultado obtenido por Perron a las matrices no negativas².

3.1. Teorema de Perron

Como hemos dicho anteriormente, una primera versión del teorema fue dada por Perron para matrices estrictamente positivas. La prueba que aquí ofrecemos del teorema se ha obtenido de ([8]).

En lo que sigue, llamaremos **pareja propia** de una matriz real y cuadrada A , a la dupla (r, v) , siendo r un valor propio de la matriz, y v un vector propio asociado. Decimos que una pareja propia es positiva cuando tanto el valor propio como todas las componentes del vector propio son números positivos. El teorema de Perron establece lo siguiente.

Teorema 3.1. *Si $A = (a_{ij})$ es una matriz real de orden $n \times n$ con entradas estrictamente positivas $a_{ij} > 0$, entonces:*

- (I) *A tiene un valor propio positivo r que es igual al radio espectral de A ,*
- (II) *r es simple,*
- (III) *r tiene un único vector propio positivo v ,*
- (IV) *Una estimación de r viene dada por las desigualdades:*

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq r \leq \max_i \sum_j a_{ij}.$$

¹Llamamos matrices positivas a aquellas que tienen todas sus entradas que cero.

²Llamamos matrices no negativas a aquellas cuyos términos son no negativos, es decir, mayores o iguales que cero.

Para proceder a la demostración estableceremos una serie de resultados que, al ser puestos en común, constituirán la prueba del teorema. De ahora en adelante $A = (a_{ij})$ va a denotar a una matriz real de orden $n \times n$ con valores estrictamente positivos (a_{ij}) .

Lema 3.1. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz real de orden $n \times n$ con entradas estrictamente positivas $a_{ij} > 0$, entonces A tiene una pareja propia (r, v) positiva.

Demostración. Definimos la función $f : V \rightarrow V$ como:

$$f(v) = \frac{Av}{\|Av\|}$$

donde

$$V = \left\{ v \in \mathbb{R}^N : \|v\| \leq 1, v_i \geq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n, \text{ y } \sum_j v_j \geq 1 \right\}$$

y $\|v\|$ denota la norma del máximo de $v \in \mathbb{R}^N$. Entonces, como el conjunto V no contiene al vector cero y $Av > 0$ para cualquier $v \in V$, se tiene que f es continua y V es compacto y convexo, ya que V es cerrado y acotado (luego compacto) y la concavidad es trivial. Además $f(V) \subseteq V$ ya que la norma del máximo de v en V está dominada por la suma de sus componentes $\sum_j v_j$.

Según el Teorema del punto fijo de Brouwer, una función continua que va desde un subconjunto K convexo y compacto de un espacio euclídeo en sí mismo, tiene un punto fijo en K . Entonces,

$$\exists v \in V \text{ tal que } f(v) = v.$$

Ninguna componente de v puede ser cero, ya que cualquier matriz positiva multiplicada por un vector no negativo con, al menos, un valor positivo dará como resultado un vector estrictamente positivo (simplemente por la forma en la que se multiplican vectores y matrices).

Entonces, v es un valor propio positivo de A y su valor propio asociado r también será positivo. □

Lema 3.2. En las condiciones del lema anterior, si r es el valor propio positivo asociado al vector propio v , entonces r no tiene ningún otro vector propio asociado.

Demostración. Razonemos por contrarrecíproco. Suponemos que existe otro vector propio positivo x asociado a r . Asumamos que x y v son independientes.

Sea

$$t = \min \left\{ \frac{v_i}{x_i} \mid x_i > 0 \right\}.$$

Sea m el natural que hace que $v_m/x_m = t$. Sea $y = v - tx$, entonces y es un vector propio de A asociado al valor propio r . Es claro que $y_m = 0$ y que $y_i \geq 0$ para todo i . Como x y v son linealmente independientes, $y \neq 0$. Entonces $(Ay)_m > 0$.

Por otro lado, $(Ay)_m = ry_m = 0$ lo cual es una contradicción con lo dicho anteriormente, por tanto, v es el único vector propio de r . □

Lema 3.3. El vector v obtenido en el Lema 3.1 es el único vector propio positivo de A .

Demostración. Volvemos a razonar por contrarrecíproco. Suponemos que existe un vector propio positivo x (independiente de v) asociado al valor propio λ . Es claro que $\lambda > 0$.

En virtud del Lema 3.2, $r \neq \lambda$. Sin perder generalidad asumamos que $\lambda > r$.

Supongamos que:

$$t = \min_i \frac{v_i}{x_i} = \frac{v_m}{x_m}.$$

Sea $y = v - tx$, entonces como ocurría en el anterior lema, $y_m = 0$, siendo $y_i \geq 0$ para todo i , $y \neq 0$. Se sigue entonces que $Ay = rv - \lambda tx$ es un vector positivo.

Pero $rv_m = rtx_m \leq \lambda tx_m$, lo que contradice que $rv_m - \lambda tx_m > 0$. \square

En resumen, lo que nos dicen los lemas demostrados hasta ahora es que existe una única pareja propia positiva (r, v) para la matriz A .

Lema 3.4. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz real de orden $n \times n$ con valores estrictamente positivos $a_{ij} > 0$ entonces, no hay valor propio negativo λ para A tal que $|\lambda| = r$, donde (r, v) es la pareja propia positiva de A obtenida en el Lema 3.1.

Demostración. Supongamos que lo que dice el lema no es cierto. Entonces, existiría una pareja propia $(-r, x)$ tal que $Ax = -rx$. Entonces (r^2, x) sería una pareja propia de A^2 . Por otro lado, (r^2, v) también sería una pareja propia de A^2 . Por tanto, habría dos vectores propios distintos asociados con r^2 . Como A^2 es una matriz positiva, esto contradice el Lema 3.2 y por tanto el lema queda demostrado. \square

Lema 3.5. Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}^+$. Entonces $\forall \epsilon > 0, \exists n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ tales que:

$$0 \leq n_1 a - m_1 b < \epsilon \quad (3.7)$$

$$-\epsilon < n_2 a - m_2 b \leq 0 \quad (3.8)$$

Demostración. Las desigualdades 3.7 y 3.8 son equivalentes a las siguientes:

$$0 \leq n_1 \frac{a}{b} - m_1 < \frac{\epsilon}{b} \quad (3.9)$$

$$\frac{-\epsilon}{b} < n_2 \frac{a}{b} - m_2 \leq 0 \quad (3.10)$$

Según el Teorema de aproximación de Dirichlet, para cualquier $x \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{Z}^+$, existe $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$|Mx - [Mx]| = Mx - [Mx] < \frac{1}{N},$$

donde $[\cdot]$ denota a la función parte entera, es decir, $[x]$ con $x \in \mathbb{R}$ devuelve el máximo número entero no superior a x .

Entonces, si tomamos $x = a/b, N = [b/\epsilon] + 1$, tenemos que $n_1 = M$, y $m_1 = [Ma/b]$ satisfacen 3.9.

3 Teorema de Perron-Frobenius

Ahora, sea $\delta = Mx - \lfloor Mx \rfloor$. Si $\delta = 0$, se tiene que $n_2 = M$, $m_2 = \lfloor Ma/b \rfloor$ satisfacen 3.10. Si $\delta > 0$, entonces:

$$1 - \delta = \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \delta < \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor (Mx - \lfloor Mx \rfloor) < 1$$

por lo que $n_2 = \lfloor 1/\delta \rfloor M$, $m_2 = \lfloor 1/\delta \rfloor \lfloor Ma/b \rfloor + 1$ satisface 3.10. \square

Lema 3.6. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz real de orden $n \times n$ con valores estrictamente positivos $a_{ij} > 0$, no existe un valor propio complejo z de A tal que $|z| = r$.

Demostración. Supongamos por el contrario que existiese una pareja propia (z, x) tal que $Ax = zx$, donde $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y $|z| = r$.

Sea $z = re^{i\theta}$, $\theta \neq 2\pi$. Es imposible que $\Re(x_j) = 0$ para todo j , ya que esto significaría que $\Re((Ax)_j) = 0$ para todo j . Sin embargo, es claro que $\Re(zx_j) \neq 0$ cuando $\Im(x_j) \neq 0$.

Entonces, existen algunos x_j tales que $\Re(x_j) > 0$ (si no, podemos tomar $-x$). Supongamos que:

$$t = \min \left\{ \frac{v_i}{\Re(x_i)} \mid \Re(x_i) > 0 \right\}$$

y t se alcanza con $i = m$. Sea $y = v - tx$, entonces $\Re(y_i) \geq 0$ para todo i . O bien $\Im(y_i) = 0$ o existe algún n tal que $\Re(y_n) > 0$. Ya que si $\Re(y_i) = 0$ para todo i , entonces sea m el índice del elemento con parte imaginaria distinta de cero. Para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$(A^k y)_m = (A^k v)_m - (A^k tx)_m = r^k (v_m - e^{ik\theta} tx_m)$$

Si $\Im(y) > 0$, entonces, según el Lema 3.5, existen $s, k \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$0 \leq 2s\pi - k\theta < \arg(x_m).$$

Se sigue que $\Re(v_m - e^{ik\theta} tx_m) < 0$, lo cual es una contradicción. El caso para $\Im(y_m) < 0$ es similar. Si $\Im(y_m) = 0$, entonces existe algún p tal que $\Re(y_p) > 0$. Sea $t' > t$, $y' = v - t'x$. Se requiere que $t' - t$ sea suficientemente pequeño para que Ay' siga siendo un vector positivo. Se sigue que, para cualquier $k \geq 1$,

$$r^k (v_m - e^{ik\theta} tx_m) = (A^k y)_m > 0.$$

Pero según el Lema 3.5, para cualquier $\epsilon > 0$ existen s, k tales que $|k\theta - 2s\pi| < \epsilon$.

Entonces $v_m - e^{ik\theta} t' x_m < 0$. Esto vuelve a ser una contradicción, por lo que la pareja propia (z, x) no existe. \square

Los resultados que hemos demostrado ahora nos dicen que si (r, v) es la única pareja propia positiva de A , entonces r es igual al radio espectral de A , ya que si (s, w) fuera otra pareja propia correspondiendo a un valor propio con valor absoluto máximo, se puede demostrar que $(|s|, |w|)$ es una pareja propia con vector propio positivo, y los lemas anteriores nos dirían que $r = s$.

Lema 3.7. La matriz D de orden $n \times n$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

tiene como valor propio n simple y como valor propio 0 con multiplicidad algebraica $n - 1$. Además el vector propio asociado con n es positivo.

Demostración. Ya que

$$D(1, \dots, 1)^T = n(1, \dots, 1)^T,$$

n es un valor propio de D .

Similarmente, los vectores

$$(1, -1, 0, \dots, 0)^T, (1, 0, -1, 0, \dots, 0)^T, \dots, (1, 0, \dots, -1)^T$$

son $n - 1$ vectores propios de D asociados con el valor propio cero. Entonces el cero es un valor propio con multiplicidad $n - 1$.

Ya que una matriz $n \times n$ tiene sólo n valores propios, resulta que ya los hemos encontrado todos. Entonces, el valor propio de mayor valor absoluto de D es positivo y simple, su valor propio correspondiente es positivo. \square

Teorema 3.2. Sea A una matriz positiva cualquiera. Entonces, A tiene un valor propio positivo y maximal, r , en el sentido de que cualquier otro valor satisface $|\lambda| < r$ dicho valor propio posee un único vector propio v asociado. Además, esta única pareja propia, (r, v) , puede ser encontrada siguiendo la curva maximal $(r(t), v(t))$ de la familia de matrices

$$H(t) = D + t(A - D), \quad 0 \leq t \leq 1$$

donde D es la matriz de orden $n \times n$ definida en el Lema 3.7.

Demostración. La primera parte de la afirmación del teorema se sigue de los lemas previos.

Denotaremos a la pareja propia de la matriz D por $r_1(0) = n$ y $v_1(0) = (1, \dots, 1)^T$.

Todas las matrices de la familia $H(t)$, donde $0 \leq t \leq 1$ son matrices positivas.

Examinamos ahora las curvas propias $C_i(t) = (r_i(t), v_i(t))$ donde $r_i(t)$ es un valor propio concreto de $H(t)$, y $v_i(t)$ es su valor propio asociado. La curva $C_i(t)$ que empieza en $r_1(0)$, $v_1(0)$ no va a intersectar a ninguna otra curva propia en ningún instante t , y $r_1(t)$ continúa siendo el valor propio más grande, por lo que la pareja (r, v) de la matriz A puede ser hallada siguiendo la curva de la pareja maximal $C_1(t)$. \square

Teorema 3.3. Un valor estimado de r puede ser hallado mediante la expresión:

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq r \leq \max_i \sum_j a_{ij}.$$

Demostración. Supongamos que

$$\begin{aligned} v_m &= \min v_i \\ v_M &= \max v_i, \end{aligned}$$

3 Teorema de Perron-Frobenius

entonces

$$rv_m = (Av)_m \geq v_m \sum_i a_{mi} \geq v_m \min_i \sum_j a_{ij}$$
$$rv_M = (Av)_M \leq v_M \sum_i a_{Mi} \leq v_M \min_i \sum_j a_{ij}.$$

Por lo tanto

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq r \leq \max_i \sum_j a_{ij}.$$

□

Este resultado concluye la demostración del Teorema de Perron, también conocido como Teorema de Perron-Frobenius para matrices positivas.

3.2. Teorema de Perron-Frobenius

La gran utilidad de este teorema ha hecho que a lo largo de los años se hallan desarrollado múltiples métodos para demostrarlo. La mayoría de estas pruebas provienen de pequeñas modificaciones en las demostraciones del Teorema de Perron como veremos más adelante. La información que aquí aportamos ha sido extraída principalmente de [25].

Como se sabe (véase [25], págs. 617-619), el radio espectral cumple $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$ donde $\|\cdot\|$ denota a cualquier norma de álgebra que consideremos en el álgebra de las matrices complejas de orden $n \times n$.

A continuación establecemos el resultado principal de esta sección. Demos, en primer lugar, el enunciado preciso del teorema recordando que dada una matriz cuadrada y real, A , se define su **radio espectral**, $\rho(A)$, como el módulo del mayor de sus valores propios.

Teorema 3.4 (Teorema de Perron-Frobenius). *Si $A = (a_{ij})$ es una matriz real de orden $n \times n$ con valores no negativos $a_{ij} \geq 0$, y además A es irreducible entonces:*

- (I) *A tiene un valor propio positivo r que es igual al radio espectral de A ,*
- (II) *r es simple,*
- (III) *A tiene un único vector propio positivo v asociado a r .*

La demostración de este resultado se puede obtener siguiendo esencialmente los mismos pasos que los efectuados para su versión más sencilla (el Teorema de Perron) dada en el apartado anterior, pero teniendo en cuenta las siguientes observaciones.

Lo primero vamos a ver es qué podemos asegurar si debilitamos únicamente la hipótesis de positividad de la matriz A .

Diremos que dos matrices A y B de orden $n \times n$ son tales que $A > B$ si $A - B > 0$, es decir, si $A - B$ es una matriz con todas sus entradas estrictamente positivas.

Teorema 3.5. *Sea A una matriz real de orden $n \times n$ con valores no negativos. Entonces se verifica lo siguiente:*

- (I) A tiene un valor propio r que es igual al radio espectral de A (pudiendo ser $r = 0$).
- (II) A tiene un vector propio v no negativo asociado a r .

Conforme a [25], para dar la demostración del teorema necesitaremos el siguiente resultado previo:

Lema 3.8. Sea A una matriz real o compleja de orden $n \times n$ y denotemos por $|A|$ a la matriz cuyos valores son $|a_{ij}|$, y sea B una matriz real de orden $n \times n$. Supongamos que $|A| \leq B$ entonces:

$$\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B).$$

Demostración. La desigualdad triangular nos asegura que $|A^k| \leq |A|^k$ para todo entero positivo k . Además, $|A| \leq B$ implica que $|A^k| \leq B^k$. Este hecho junto con la igualdad $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_{\infty}^{1/k}$ vista anteriormente, nos permite hacer el siguiente razonamiento:

$$\|A^k\|_{\infty} = \||A^k|\|_{\infty} \leq \||A|^k\|_{\infty} \leq \|B^k\|_{\infty},$$

por lo que $\|A^k\|_{\infty}^{1/k} \leq \||A|^k\|_{\infty}^{1/k} \leq \|B^k\|_{\infty}^{1/k}$, de donde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_{\infty}^{1/k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \||A|^k\|_{\infty}^{1/k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\|_{\infty}^{1/k},$$

lo que permite concluir $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$ como se quería probar. □

Ahora ya estamos en disposición de proporcionar la demostración del Teorema 3.5.

Demostración (Teorema 3.5). Consideremos la sucesión de matrices positivas dada por

$$A_k = A + (1/k)D > 0,$$

para $k \in \mathbb{N}$ donde D es la matriz de unos descrita en el Lema 3.7.

Sean $r_k > 0$ y $v_k > 0$ el valor propio y el vector propio de Perron respectivamente (que nos proporciona el Teorema Perron, donde se da el vector normalizado, siendo el valor propio asociado $r = \rho(A)$) para cada matriz A_k . Observemos que $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un conjunto acotado porque está contenido en la esfera unidad de \mathbb{R}^n . El teorema de Bolzano-Weierstrass asegura que toda sucesión acotada en \mathbb{R}^n tiene una subsucesión convergente $\{v_{k_i}\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow z$, donde $z \geq 0$ con $z \neq 0$ (ya que $p_{k_i} > 0$ con $\|p_{k_i}\|_1 = 1$).

Dado que

$$A_1 > A_2 > \dots > A,$$

el resultado obtenido en el Lema 3.8 garantiza que

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r,$$

por lo que $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona de números positivos que está inferiormente acotada por r .

En consecuencia, existe $r^* \geq r$ tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = r^*$$

3 Teorema de Perron-Frobenius

En particular, $\lim_{i \rightarrow \infty} r_{k_i} = r^* \geq r$.

Pero al ser $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$ tenemos que $\lim_{i \rightarrow \infty} A_{k_i} = A$, de este modo:

$$Az = \lim_{i \rightarrow \infty} A_{k_i} v_{k_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} r_{k_i} v_{k_i} = r^* z$$

Puesto que el límite de los factores existe. Esto implica que

$$r^* \in \sigma(A)^3 \Rightarrow r^* \geq r.$$

Consecuentemente, $r^* = r$ y $Az = rz$ con $z \geq 0$ y $z \neq 0$, como queríamos demostrar. \square

Acabamos de ver que el teorema de Perron se puede generalizar a matrices no negativas, pero perdemos la positividad tanto del vector como del valor propio de Perron y, además, no podemos asegurar que el valor propio sea simple. Es decir, hemos perdido algunas de las propiedades más interesantes que obtuvimos con el teorema para matrices estrictamente positivas: la ausencia de ceros en los valores y vectores propios. La siguiente observación que vamos a realizar está orientada hacia la solución de este inconveniente.

Como podemos ver, en el enunciado del Teorema de Perron-Frobenius (Teorema 3.4), hay una hipótesis distinta a la del Teorema de Perron 3.1.

Gracias al trabajo de Frobenius, conocemos una condición adicional que le podemos exigir a la matriz del teorema de Perron para obtener las mismas consecuencias que obtuvimos para matrices estrictamente positivas: que la matriz sea irreducible. Es decir, para poder relajar la hipótesis de positividad de la matriz A y obtener la misma tesis que el Teorema de Perron, hemos tenido que añadir la hipótesis adicional de que la matriz sea irreducible. Aunque ya se dijo en la sección 1.2.4 lo que era una matriz irreducible, lo volvemos a recordar para una mayor comodidad del lector. Una matriz cuadrada de orden N se dice que es **irreducible** cuando ocurre alguna de las siguientes condiciones ([12]):

- No existe ninguna permutación (de filas y columnas) que transforme la matriz A en una matriz del tipo:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline 0 & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right),$$

donde \mathbf{A}_{11} y \mathbf{A}_{22} son matrices cuadradas. En otras palabras, no existe matriz de permutación P tal que

$$P^T \mathbf{A} P = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline 0 & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right).$$

- Si A es la matriz de adyacencia de un grafo, entonces la matriz es irreducible si, y sólo si, el grafo es fuertemente conexo.

Concretamente, nos será útil la segunda condición para probar el teorema.

La condición de irreducibilidad no es algo trivial y, de hecho, es algo bastante difícil de observar a simple vista. Como ejemplo sencillo podemos tomar las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

³Estamos denotando por $\sigma(A)$ al espectro de la matriz A .

Para la matriz de la izquierda (\mathbf{A}) no es cierto el resultado de Perron, mientras que para la de la derecha ($\tilde{\mathbf{A}}$) sí que lo es. Sin embargo, si usamos la última caracterización que hemos dado de matriz irreducible es bastante fácil de ver, ya que simplemente tenemos que observar los grafos asociados:

Figura 3.1: Grafos asociados a las matrices de 3.11



Como vemos, el primer grafo no es fuertemente conexo porque no se puede llegar desde el vértice 1 al 2, mientras que el segundo sí que lo es. Por ello, la primera matriz es reducible mientras que la segunda es irreducible. También podemos calcular la matriz de permutación que asegura la irreducibilidad de la primera matriz:

$$P^T \mathbf{A} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como ya hemos dicho, no es tarea fácil distinguir las matrices irreducibles de las que no lo son, y he ahí la genialidad de Frobenius, que fue capaz de distinguir las matrices a las que se podía generalizar el teorema de Perron de las que no dando una caracterización general para todas ellas.

Ahora simplemente necesitamos algún resultado que nos relacione las matrices irreducibles con las matrices estrictamente positivas y de esta forma poder aplicar el teorema de Perron. De eso se encarga el siguiente lema:

Lema 3.9. Si A es una matriz real de orden $n \times n$ con valores no negativos e irreducible, entonces $(I + A)^{n-1} > 0$; donde I es la matriz identidad de orden n .

Demostración. Sea $a_{ij}^{(k)}$ la entrada ij -ésima de la matriz A^k , y observemos que

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}} a_{ih_1} a_{h_1 h_2} \cdots a_{h_{k-1} j} > 0$$

si, y sólo si, existe un conjunto de índices h_1, h_2, \dots, h_{k-1} tales que

$$a_{ih_1} > 0 \quad \text{y} \quad a_{h_1 h_2} > 0 \quad \text{y} \quad \dots \quad \text{y} \quad a_{h_{k-1} j} > 0.$$

En otras palabras, hay algún camino de longitud k , que va siguiendo los vértices

$$N_i \rightarrow N_{h_1} \rightarrow N_{h_2} \rightarrow \cdots \rightarrow N_j$$

del grafo asociado a A , llegando desde el vértice N_i al N_j si, y sólo si, $a_{ij}^{(k)} > 0$.

La irreducibilidad de A asegura que el grafo es fuertemente conexo, así que para cada pareja de vértices (N_i, N_j) existe un camino de longitud k , con $k < n$ que lleva del vértice N_i al N_j . Esto significa que para cada posición (i, j) existe algún $0 \leq k \leq n - 1$ tal que $a_{ij}^{(k)} > 0$, y esto

garantiza que para cada par de vértices i y j , se cumple que:

$$\left[(I + A)^{n-1} \right]_{ij} = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k \right]_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{ij}^{(k)} > 0.$$

□

Una vez que tenemos el resultado anterior, ya estamos más cerca de poder demostrar el Teorema de Perron-Frobenius, es decir, de demostrar las propiedades que nos faltaban por obtener sin añadir la hipótesis de irreducibilidad en el Teorema 3.5. Sin embargo, antes de eso vamos a introducir un concepto que nos va a simplificar todavía más dicha demostración.

Retomando conocimientos estudiados en el Grado, recordamos que dos matrices cuadradas A, B , se dicen **semejantes** si existe una matriz invertible P , tal que $A = P^{-1}BP$. Una matriz cuadrada A se dice **diagonalizable** cuando es semejante a una matriz diagonal. De la teoría de matrices tenemos el siguiente resultado que no demostraremos ([25], pág. 517):

Lema 3.10. *Una matriz A de dimensión $n \times n$ con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ es diagonalizable si, y sólo si, existen matrices $\{G_1, \dots, G_n\}$ tales que*

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_k G_k.$$

A las matrices G_i se les denomina **proyectores espectrales** de la matriz A .

Entonces, gracias a este resultado, si tenemos una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ podemos definir fácilmente qué significaría aplicar dicha función a una matriz diagonalizable, A , del siguiente modo:

Definición 3.1. Sea P una matriz invertible y sea $A = P^{-1}DP$, donde D es la matriz diagonal tal que tiene los valores propios de A agrupados por repetición:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k I \end{pmatrix}$$

siendo I la matriz identidad de orden la *mult alg* (λ_i) .

Si existe la función f para cada $\lambda_i \in \sigma(A)$ entonces

$$f(A) := P^{-1}f(D)P = P \begin{pmatrix} f(\lambda_1)I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2)I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_k)I \end{pmatrix} P = f(\lambda_1)G_1 + \dots + f(\lambda_k)G_k.$$

Del mismo modo podemos definir la aplicación de una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a una matriz no diagonalizable, aunque para ello tenemos que recurrir a la forma de Jordan de la matriz ([25], págs. 588-590). Siguiendo lo que hicimos para matrices diagonalizables, si tenemos una matriz no diagonalizable, A , podemos expresarla en su forma de Jordan $A = PJP^{-1}$ y la forma natural de aplicar la función sería $f(A) = Pf(J)P^{-1}$. Sin embargo, si no tenemos

cuidado con esta definición nos pueden surgir algunos problemas.

Primero tenemos que especificar qué queremos decir cuando escribimos $f(J)$, ya que esto no está tan claro como $f(D)$ cuando D es diagonal. Además, una vez solventado ese problema, tenemos que asegurarnos de que la expresión $Pf(J)P^{-1}$ es una matriz únicamente definida. Esto tampoco está claro, ya que la matriz de transformación P no es única, de modo que si se usasen matrices de transformación distintas, podría ocurrir que $f(A)$ fuera distinta.

Veamos primero si tiene sentido la expresión $f(J)$. Asumamos en todo lo que sigue que $A = PJP^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, donde $J = \text{diag}(J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_s))$ es la forma de Jordan de A , en la que cada $J(\lambda_j)$ es una matriz diagonal por bloques, conteniendo uno o más bloques de Jordan. Esto quiere decir:

$$J(\lambda_j) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_j) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{t_j}(\lambda_j) \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad J_*(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix},$$

Donde J_* representa a cualquier J_k con $k = 1, \dots, t_j$. Queremos definir $f(J)$ para que sea

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(J(\lambda_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J(\lambda_s)) \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad f(J(\lambda_j)) = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & f(J_*(\lambda_j)) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Esto nos obliga a definir $f(J_*(\lambda_j))$. Para evitar que la notación se siga complicando, notaremos

por $J_* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ a cualquier bloque de Jordan genérico. Supongamos ahora que

nuestra función f tiene un desarrollo en serie de Taylor centrado en λ dado por:

$$f(z) = f(\lambda) + f'(\lambda)(z - \lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(z - \lambda)^2 + \cdots \quad \text{para} \quad |z - \lambda| < r.$$

Esto sugeriría definir $f(J_*)$ del siguiente modo:

$$f(J_*) = f(\lambda)I + f'(\lambda)(J_* - \lambda I) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(J_* - \lambda I)^2 + \cdots.$$

Pero como $N = J_* - \lambda I$ es nilpotente de índice k , esta serie simplemente es la suma finita

$$f(J_*) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(\lambda)}{i!} N^i,$$

y esto nos hace ver que solamente tenemos que imponer que existan $f(\lambda), f'(\lambda), \dots, f^{(k-1)}(\lambda)$.

3 Teorema de Perron-Frobenius

Además,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, N^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que ya podemos definir qué significa $f(J_*)$ de una manera simple y precisa.

Definición 3.2. Para un bloque de Jordan J_* con valor propio λ , y para una función $f(z)$ tal que $f(\lambda), f'(\lambda), \dots, f^{(k-1)}(\lambda)$ existen, $f(J_*)$ está definida del siguiente modo:

$$f(J_*) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & f(\lambda) & f'(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ & & & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Cada forma de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & J_* & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

es una matriz compuesta por uno o varios bloques de Jordan J_* , entonces la definición anterior nos permite definir

$$f(J) = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & f(J_*) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

siempre que comprobemos que existen las derivadas necesarias de f en los correspondientes valores propios. Todo lo expuesto anteriormente se recoge en la siguiente definición.

Recordemos que el índice de un valor propio es el índice de la matriz $(A - \lambda I)$, o lo que es lo mismo, el menor natural k tal que $\text{rango}((A - \lambda I)^k) = \text{rango}((A - \lambda I)^{k+1})$

Definición 3.3. Para una matriz compleja A de orden $n \times n$ con $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ y sea $k_i = \text{índice}(\lambda_i)$.

- (i) Una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que está definida (o que existe) sobre A cuando $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \dots, f^{(k_i-1)}(\lambda_i)$ existe para cada $\lambda_i \in \sigma(A)$.

(II) Supongamos que $A = PJP^{-1}$, donde $J = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & J_\star & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ está en forma de Jordan,

con los J_\star representando los bloques de Jordan que correspondan. Si f existe sobre A , entonces el valor de f en A se define:

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = P \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & f(J_\star) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (3.12)$$

donde los $f(J_\star)$ son los bloques de la Definición 3.2.

Aún nos queda explicar por qué la expresión 3.12 genera una matriz únicamente definida. El siguiente argumento, a parte de lograr ese propósito, también nos proporcionará una expresión alternativa para $f(A)$ que no involucra ni la forma de Jordan, J , ni la matriz de transformación P .

Empezamos particionando la matriz J en sus s bloques de Jordan, y también particionamos P y P^{-1} convenientemente:

$$P = (P_1 | \dots | P_s), \quad J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_s) \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_s \end{pmatrix}.$$

Ahora, definimos $G_i = P_i Q_i$, entonces se puede demostrar que dichos G_i son los proyectores espectrales de la matriz A que definimos en el Lema 3.10, en caso de que esta matriz sea diagonalizable y, en caso de que no lo sea, es el proyector al subespacio (no diagonalizable) asociado a cada valor propio λ_i .

Ahora consideremos

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = P \begin{pmatrix} f(J(\lambda_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J(\lambda_s)) \end{pmatrix} P^{-1} = \sum_{i=1}^s P_i f(J(\lambda_i)) Q_i. \quad (3.13)$$

Dado que $f(J(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & f(J_\star(\lambda_i)) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$, donde los $J_\star(\lambda_i)$ son los bloques de Jordan

asociados con λ_i , entonces si $k_i = \text{índice}(\lambda_i)$, tenemos que

$$f(J(\lambda_i)) = f(\lambda_i)I + f'(\lambda_i)L_i + \frac{f''(\lambda_i)}{2!}L_i^2 + \dots + \frac{f^{(k_i-1)}(\lambda_i)}{(k_i-1)!}L_i^{k_i-1},$$

donde $L_i = J(\lambda_i) - \lambda_i I$, y entonces, la expresión 3.13 se convierte en

$$f(A) = \sum_{i=1}^s P_i f(J(\lambda_i)) Q_i = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_i)}{j!} P_i L_i^j Q_i.$$

3 Teorema de Perron-Frobenius

Los términos $P_i L_i^j Q_i$ se pueden simplificar si nos damos cuenta de que

$$P^{-1}P = I \text{ implica que } Q_i P_j = \begin{cases} I & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \text{ de donde } P^{-1}G_i = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_s \end{pmatrix} P_i Q_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Lo que a su vez nos conduce a

$$(A - \lambda_i I)^j G_i = P \begin{pmatrix} (J(\lambda_1) - \lambda_i I)^j & & & \\ & \ddots & & \\ & & L_i^j & \\ & & & \ddots \\ & & & & (J(\lambda_s) - \lambda_i I)^j \end{pmatrix} P^{-1}G_i = P_i L_i^j Q_i.$$

Entonces la expresión 3.2 se puede escribir de la siguiente forma:

$$f(A) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_i)}{j!} (A - \lambda_i I)^j G_i, \quad (3.14)$$

y esta expresión es independiente de qué semejanza, P , se utilice para reducir de la matriz A a J . Por lo que ya tenemos lo que queríamos y, finalmente, podemos proceder a hacer la demostración del Teorema de Perron-Frobenius.

Demostración (Teorema de Perron-Frobenius). Del Teorema 3.5 ya conocemos que A tiene el valor propio $r = \rho(A) \in \sigma(A)$. Tenemos que probar que dicho valor es simple.

Sea $B = (I + A)^{n-1} > 0$ la matriz del Lema 3.9. No es difícil probar que $\lambda \in \sigma(A)$ si, y sólo si, $(1 + \lambda)^{n-1} \in \sigma(B)$ y la multiplicidad algebraica de λ es igual que la de $(1 + \lambda)^{n-1}$ ([25], págs. 601-603). Consecuentemente, si $\mu = \rho(B)$ entonces:

$$\mu = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |(1 + \lambda)|^{n-1} = \left\{ \max_{\lambda \in \sigma(A)} |(1 + \lambda)| \right\}^{n-1} = (1 + r)^{n-1}$$

ya que, cuando un disco del tipo $|z| \leq \rho$ es trasladado una unidad a la derecha, el punto de módulo máximo en el disco resultante $|z + 1| \leq \rho$ es $z = 1 + \rho$ (es evidente si se dibuja en el plano). Entonces, la multiplicidad algebraica de r es igual a 1 ya que, de otro modo, la multiplicidad de μ sería mayor que 1, lo que es imposible porque $B > 0$.

Para ver que A tiene un vector propio positivo asociado a r , recordamos del Teorema 3.5 que, al ser A una matriz no negativa, entonces r tiene un vector propio no negativo asociado x . Gracias a la expresión 3.14, es fácil ver que, si (λ, x) es una pareja propia de A , entonces $(f(\lambda), x)$ es una pareja propia para $f(A)$; entonces, que (r, x) sea una pareja propia de A implica que (μ, x) es una pareja propia para B .

Ahora, para ver que el vector propio x es positivo, observamos que, si (λ, y) es una pareja propia de la matriz A tal que $y \geq 0$ y $x > 0$ es el vector de Perron de A^T , entonces $x^T y > 0$,

por lo que

$$\rho(A)x^T = x^T A \Rightarrow \rho(A)x^T y = x^T A y = \lambda x^T y \Rightarrow \rho(A) = \lambda.$$

Es decir, no existen otros vectores propios positivos de A que no sean el vector propio de Perron y sus múltiplos positivos. Por lo que efectivamente $x > 0$.

Finalmente $r > 0$, ya que si no fuera así, tendríamos que $Ax = 0$, lo cual es imposible ya que $A > 0$ y $x > 0$, lo que fuerza a que el producto sea un vector estrictamente positivo. \square

Dada la relevancia del teorema que nos ocupa, esbozamos una nueva prueba del resultado en la siguiente sección.

3.2.1. Una demostración alternativa del Teorema de Perron-Frobenius

Con el fin de mostrar la gran variedad de argumentos que existen de afrontar la demostración del resultado anterior, daremos en esta sección una prueba alternativa, a modo ilustrativo, abordando el problema desde una perspectiva algo más geométrica, siguiendo [30].

Como hicimos con la primera prueba del teorema, comenzaremos probando su versión más débil, es decir, empezaremos demostrando el Teorema de Perron 3.1.

Primero demostraremos que, en las hipótesis del teorema, existe un único valor propio de módulo máximo. Para ello probaremos el siguiente resultado previo:

Lema 3.11. *Si r es un valor propio de módulo máximo de una matriz cuadrada $n \times n$, entonces $r > 0$ y existe un vector $x > 0$ tal que $Ax = rx$.*

Demostración. Tomamos $r \in \sigma(A)$ tal que $r = \rho(A)$, y un vector propio asociado v . Si tomamos la identidad $Av = rv$, en coordenadas sería:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j = rv_i \quad i = 1, \dots, n$$

Tomando módulos y aplicando la desigualdad triangular obtenemos

$$|r||v_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}|v_j|,$$

aquí es donde hemos usado que los coeficientes de A son no negativos.

Ahora distinguimos dos casos según si las desigualdades son estrictas $|r||v_i| < \sum_{j=1}^n a_{ij}|v_j|$ para todas las coordenadas i ; o si existe alguna coordenada en la que se da la igualdad $|r||v_i| = \sum_{j=1}^n a_{ij}|v_j|$.

Veamos que el primer caso no se puede dar. Definimos el siguiente vector:

$$V = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_d| \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$$

3 Teorema de Perron-Frobenius

Si se cumple que todo son desigualdades estrictas, tendríamos que $AV > |r|V$. Entonces tiene que existir $\epsilon > 0$ tal que $AV \geq (|r| + \epsilon)V$. El radio espectral de la matriz $B = \frac{1}{|r| + \epsilon}A$ cumple

$$\rho(B) = \frac{1}{|r| + \epsilon} \rho(A) = \frac{|r|}{|r| + \epsilon} < 1.$$

En el razonamiento anterior hemos usado que r tiene módulo el radio espectral de la matriz A . Por tanto, deducimos que $B^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por otro lado vemos que $BV \geq V$, y como B preserva el orden, deducimos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\dots B^{n+1}V \geq B^n V \geq \dots \geq B^2 V \geq BV \geq V.$$

En particular se cumple que $B^n V \geq V$ para cada $n \geq 1$. Tomando límites en esta expresión y usando la continuidad del producto de matrices llegamos a que $0 \cdot V = 0 \geq V$. Entonces $V = 0$, lo cual contradice su definición y $v \neq 0$.

Por tanto, lo que debe darse es que haya al menos una coordenada en la expresión 3.2.1 que sea una igualdad. Para simplificar la notación podemos suponer que la coordenada en la que se da la igualdad es la primera. Entonces se cumple que

$$|r||v_1| = \sum_{j=1}^n a_{1j}|v_j|,$$

como alguna coordenada v_j es no nula y estamos en la hipótesis del Teorema de Perron, entonces tiene que ocurrir que

$$|r||v_1| = \sum_{j=1}^n a_{1j}|v_j| > 0.$$

Entonces podemos asegurar que $r \neq 0$ y $v_1 \neq 0$. Es un resultado conocido que dados r números complejos si $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ con $\alpha_1 \neq 0$, son equivalentes:

(I) $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_r| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r|.$

(II) Para cada $i = 2, \dots, r$ existe $\mu_i \in \mathbb{R}$, con $\mu_i \geq 0$ tal que $\alpha_i = \mu_i \alpha_1$.

Usando dicho resultado, concluimos que existirán números $\mu_j \geq 0$, $j = 2, \dots, n$ tales que

$$a_{1j}v_j = \mu_j a_{11}v_1.$$

Por lo que hemos obtenido la identidad $v = cw$ con $c = v_1$ y

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu_2 a_{11}}{a_{12}} \\ \vdots \\ \frac{\mu_d a_{11}}{a_{1d}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$$

y se cumple que $Aw > 0$. Además del hecho de que $w \in \ker(A - rI)$ se deduce que

$$rw = Aw > 0.$$

Como $w_1 = 1$ deducimos de esta igualdad que $r > 0$. Y, por último, del hecho de que $w = \frac{1}{r}Aw$ llegamos a que $w > 0$. \square

Ahora tenemos que comprobar que r es simple, es decir, que su multiplicidad algebraica es uno. Para ello, demostraremos primero que tiene multiplicidad geométrica uno; es decir,

$$\dim(\ker(A - rI)) = 1.$$

Como w es estrictamente positivo, para cualquier $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ podemos encontrar un $\delta \in \mathbb{R}$ de forma que $w - \delta v \geq 0$ y alguna coordenada de este vector sea nula.

Vamos a probar que si $Av = rv$, entonces, $w - \delta v = 0$; es decir, v y w son linealmente dependientes. Razonamos por reducción al absurdo, si $w - \delta v \geq 0$ con $w - \delta v \neq 0$, entonces como A tiene valores no negativos se cumple que

$$A(w - \delta v) > 0.$$

En otras palabras, llegamos a la desigualdad $r(w - \delta v) = A(w - \delta v) > 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que alguna coordenada de $w - \delta v$ sea nula.

Ahora que ya tenemos probado que el espacio propio tiene dimensión uno, tomamos la matriz traspuesta de A , con matriz traspuesta A^T . Esta matriz evidentemente también cumple con la hipótesis del Teorema de Perron, y por lo tanto, es aplicable el Lema 3.11. Como ambas matrices tienen los mismos valores propios, r es el valor propio de módulo máximo para las dos. Supongamos que $w^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $w^* > 0$ tal que $A^T w^* = r w^*$.

Nótese que el hiperplano

$$V = \{x \in \mathbb{R}^{n \times n} : x \perp w^*\}$$

es invariante para A ; es decir, $A(V) \subseteq V$. Probaremos que los subespacios V y $W = \ker(A - rI) = \{cw : c \in \mathbb{R}\}$ cumplen

$$V \cap W = \{0\}.$$

En caso contrario, w estaría contenido en V , lo cual es un absurdo debido a que w y w^* no pueden ser perpendiculares al tener los dos todas sus coordenadas todas positivas ($\langle w, w^* \rangle > 0$). Hacemos la suma directa $V \oplus W$, con dimensión $\dim(W) + \dim(V) = 1 + d - 1 = d$. Deducimos que $\mathbb{R}^{n \times n} = V \oplus W$ y entonces r es simple también en sentido algebraico, es decir, tiene multiplicidad algebraica uno, como queríamos demostrar.

Esto concluiría la demostración para el Teorema de Perron, y para probar el Teorema de Perron-Frobenius simplemente tenemos que hacer algunas modificaciones al mismo razonamiento que acabamos de hacer.

Bajo las hipótesis del Teorema de Perron-Frobenius 3.4, observamos que

$$Av = rv \Rightarrow A^v v = r^v v.$$

Entonces los valores propios de la matriz A^v son $\lambda_1^{nv} = r^{nv}, \lambda_2^{nv}, \dots, \lambda_r^{nv}$, de manera que r^{nv} tiene módulo máximo como valor propio de A^{nv} . Por otro lado, A^{nv} cumple con las hipótesis del Teorema de Perron-Frobenius y los argumentos para A se adaptan a dicha potencia v .

Exactamente el mismo razonamiento se usa para probar que

$$\dim(\ker(A - rI)) = 1.$$

Las mismas ideas utilizadas en el Teorema de Perron, las podemos aplicar para demostrar el Teorema de Perron-Frobenius con los cambios que acabamos de explicar. No las detallaremos aquí para evitar redundancias y ajustarnos a los requisitos de extensión del Trabajo de Fin de Grado.

3.3. Teorema de Perron-Frobenius en espacios de Banach

En 1948, los matemáticos Mark Krein y Mark Rutman demostraron una generalización del Teorema de Perron-Frobenius a espacios de Banach infinito-dimensionales ([16]). Esta generalización viene motivada por la utilidad del teorema a la hora de estudiar las propiedades de los operadores lineales. Por ello, el lenguaje empleado en su enunciado es algo distinto, ya que se hace referencia a operadores lineales en lugar de a matrices cuadradas, pero sabemos que ambas cosas son, en esencia, lo mismo.

Teorema 3.6. *(Teorema de Perron-Frobenius en espacios de Banach. Teorema de Krein-Rutman) Sea A un operador lineal compacto sobre un espacio de Banach ordenado E .*

- (I) *Supongamos que $A(C) \subseteq C$, donde C es un cono cerrado en E . Si $\rho(A) > 0$, entonces existe un vector distinto del cero $x \in C$ tal que $Ax = \rho(A)x$. Es decir, $r = \rho(A)$ es un valor propio de la matriz A con vector propio asociado x .*
- (II) *Asumamos que existe un vector x no negativo, un natural p y un número real λ tal que $A^p x \geq \lambda x$. Entonces A tiene un vector propio positivo asociado con un valor propio al menos igual a λ .*

Aunque no vamos a entrar en la prueba de este resultado por las razones ya expuestas, sí que es conveniente recordar que un operador lineal compacto se puede definir entre dos espacios vectoriales normados $T : X \rightarrow Y$, y es un operador lineal tal que lleva subconjuntos acotados de X en subconjuntos relativamente compactos de Y . También recordamos que un cono C se define en un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado F , y es un subconjunto que cumple con la propiedad de que si $x \in C$, y α es un escalar positivo de F , entonces el producto $\alpha x \in C$.

3.4. Aplicaciones

Aunque ya hemos dado una buena motivación sobre la utilidad del Teorema de Perron-Frobenius en el Capítulo 2 de este trabajo (concretamente en la Sección 1.2.4), nos disponemos a concluir este capítulo, y con él esta Memoria, haciendo referencia a algunas utilidades más del teorema que nos ocupa para dar una visión más completa sobre la extensa aplicabilidad del mismo.

Método numérico de tres puntos. Se trata de la aproximación numérica a un problema como el que ocurre con la ecuación de conducción del calor.

$$u_t = \alpha u_{xx} \quad a < x < b,$$

sujeta a las condiciones de contorno siguientes: $u(x, 0) = f(x)$, $u(a, t) = 0 = u(b, t)$. Toda la notación está puede consultarse en [20], así que nos limitaremos a decir que u_t y u_x se refieren a las derivadas temporales y espaciales de u respectivamente, siendo u_{xx} su segunda derivada espacial.

Si dividimos el intervalo del espacio $[a, b]$ en n subintervalos iguales, llegamos a un conocido modelo numérico:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + h[u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j]$$

con $u_0^j = 0 = u_n^j$ para todo j . Entonces la evolución a lo largo del tiempo de la temperatura del nodo i en el tiempo j (u_i^j) viene modelada por:

$$\begin{pmatrix} u_1^{j+1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2h & h & 0 & \cdots & 0 \\ h & 1-2h & h & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & h \\ 0 & \cdots & 0 & h & 1-2h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^j \\ \vdots \\ u_{n-1}^j \end{pmatrix},$$

donde $h = \alpha \delta t / \delta x^2$ con dato inicial $u^0 = [f(x_1), \dots, f(x_{n-1})]^T$. A la matriz de la expresión anterior la denominaremos A . Las temperaturas en tiempo j vendrán dadas por la expresión $u^j = A^j u^0$.

Si asumimos que $h < 0.5$, la matriz A es no negativa y podemos aplicar el Teorema de Perron-Frobenius para concluir que existe un valor propio de módulo máximo λ no negativo, asociado a un vector propio no negativo v . Entonces sabemos que la expresión $\lambda v = Av$ es estable; y tras algunos razonamientos sencillos, llegamos a que el modelo converge.

Un modelo poblacional. Dividimos a la población en n grupos según la edad. Sea x_i^j el número de individuos en el i -ésimo grupo, tomando el dato en tiempo j . Si dejamos avanzar el tiempo, en el instante $j+1$ habrá algunos individuos que habrán avanzado de un grupo al siguiente, dando como resultado el modelo:

$$\begin{pmatrix} x_1^{j+1} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_{n-1}^j \end{pmatrix}$$

donde la primera fila de $A = (a_{ij})$ representa la contribución de cada grupo a la reproducción.

El Teorema de Perron-Frobenius asegura la existencia de un valor propio de módulo máximo, y este valor nos da el comportamiento del modelo. Si es mayor que uno, la población crece

indefinidamente, si es menor que uno la población se extingue, y si es igual a uno, puede oscilar, llegar a extinguirse o crecer asintóticamente, dependiendo de la forma de Jordan de A .

Cadenas de Markov. Después de una serie de experimentos, un sistema cae en uno de n posibles estados s_1, \dots, s_n . Supongamos que siempre conocemos la probabilidad de acabar en el estado s_j empezando desde el estado s_i , a la que llamaremos p_{ij} . Cada una de las filas de la "matriz de transición" $P = (p_{ij}) \geq 0$ suman uno, ya que sabemos que el sistema tiene que acabar sí o sí en alguno de los n estados. Podemos aplicar el Teorema de Perron-Frobenius a la matriz P , obteniendo el valor propio $\lambda \geq 0$ asociado al vector propio $v \geq 0$. Si normalizamos dicho vector para que su mayor valor sea uno y $v_i = 1$,

$$\lambda = \sum_{j=1}^n p_{ij}v_j \leq \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

Pero en realidad $\lambda = 1$, ya que $Pv^0 = v^0$ donde $v^0 = (1, 1, \dots, 1)^T$.

Si $P > 0$ el Teorema de Perron asegura que $\lambda = 1$ es simple y, por tanto, se corresponde con el vector v^0 . Es más,

$$P^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$$

debe tener rango uno, y actúa como la identidad sobre v^0 . Entonces, para algún vector $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T \leq 0$,

$$P^\infty = v^0 p^T = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

donde $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Cada p_i es la probabilidad de que el sistema quede en el estado s_i cuando tomamos el límite. Nótese que p_i es independiente del estado inicial.

Las cadenas de Markov son una herramienta extensamente estudiada y con amplias posibilidades de aplicación a distintas materias, siendo en cualquier caso el Teorema de Perron-Frobenius esencial a la hora de extraer conclusiones en su aplicación.

Otras aplicaciones. Además de las ya comentadas, el teorema también es utilizado en el estudio de equilibrios generales de mercados competitivos, en modelos económicos como el de Leontiev, en topología de dimensión baja (Teorema de Thurston de clasificación de difeomorfismos de superficies), en epidemiología (umbral de Kermack-McKendrick), en el análisis de las redes de transporte ([37]), en mecánica estadística, en análisis iterativo de matrices y en muchos otros campos.

Bibliografía

- [1] Abou-Moustafa, K. T., and Ferrie, F. P. Modified divergences for Gaussian densities. In *Joint IAPR International Workshops on Statistical Techniques in Pattern Recognition (SPR) and Structural and Syntactic Pattern Recognition (SSPR)* (2012), Springer, pp. 426–436. [Citado en pág. 16]
- [2] Avila-Cano, A., and Triguero Ruiz, F. The distribution of soccer leagues scores that generates the minimum of competitive balance: Truncated-Cascade Distribution. 2018. [Citado en pág. 29]
- [3] Avila-Cano, A., and Triguero Ruiz, F. The equivalent share of a dominant firm: an approach based on distances. *Applied Economics Letters* 28, 17 (2020), 1521–1525. [Citado en pág. XII]
- [4] Bachman, G., and Narici, L. *Functional analysis*. Courier Corporation, 2000. [Citado en págs. 23 and 24]
- [5] Beauchamp, M. A. An improved index of centrality. *Banks in Insurance Report* 10 (1965). [Citado en pág. 5]
- [6] Binmore, K. *The Foundations of Topological Analysis: A Straightforward Introduction: Book 2 Topological Ideas*. Cambridge University Press, 1981. [Citado en pág. 17]
- [7] Bonacich, P. Power and centrality: A family of measures. *American Journal of Sociology* 92 (1987). [Citado en pág. 7]
- [8] Cheng, Y., Carson, T., and Elgindi, M. B. M. A Note on the Proof of the Perron-Frobenius Theorem. *Applied Mathematics* 03 (2012), 1697–1701. [Citado en pág. 33]
- [9] Considine, J., and Gallagher, L. Competitive balance in a quasi-double knockout tournament. *Applied Economics* 50 (2018), 2048–2055. [Citado en pág. 18]
- [10] Dekker, A. Conceptual distance in social network analysis. *Journal of social structure* 6 (2005), 31. [Citado en pág. 5]
- [11] Depken, C. A. Free-agency and the competitiveness of major league baseball. *Review of Industrial Organization* vol. 14 14 (1999). [Citado en pág. 17]
- [12] Gallardo, P. F. El secreto de Google y el álgebra lineal. *Boletín Sociedad Española de Matemática Aplicada* 30 (2004), 115–141. [Citado en págs. IX, XI, 1, 8, 30, and 40]
- [13] Gayant, J.-P., and Le Pape, N. *The metrics of competitive imbalance*. 2015, pp. 104–130. [Citado en pág. 17]
- [14] Golub, G. H., and Van der Vorst, H. A. Eigenvalue computation in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 123 (2000), 35–65. [Citado en pág. 32]
- [15] Gómez, S. Centrality in networks: Finding the most important nodes. In *Business and Consumer Analytics: New Ideas*. Springer International Publishing, 2019, pp. 401–433. [Citado en págs. 4, 6, and 10]
- [16] Intissar, A. Elementary Proof of a generalization of the Perron-Frobenius theorem in an ordered Banach space, 2019. [Citado en pág. 50]
- [17] Jameson, G. Topology and normed spaces. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 19 (1975). [Citado en pág. 24]
- [18] Keener, J. P. The Perron-Frobenius theorem and the ranking of football teams. *SIAM review* 35 (1993), 80–93. [Citado en págs. XI and XII]
- [19] Kelly, W. A. A Generalized Interpretation of the Herfindahl Index. *Southern Economic Journal* 1981-jul vol. 48 iss. 1 48 (1981). [Citado en pág. 17]

Bibliografía

- [20] Lanczos, C. Boundary value problems and orthogonal expansions. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 1966-jul vol. 14 iss. 4 14 (1966). [Citado en pág. 51]
- [21] Landau, E. G. H. *Über preisverteilung bei spielturnieren*. Teubner, 1914. [Citado en págs. XI and 30]
- [22] Larsen, A.; Fenn, A. J. S. E. L. The impact of free agency and the salary cap on competitive balance in the national football league. *Journal of Sports Economics* 2006-nov vol. 7 iss. 4 7 (2006). [Citado en pág. 16]
- [23] Lenten, L. J. A. Unbalanced schedules and the estimation of competitive balance in the scottish premier league. *Scottish Journal of Political Economy* 2008-sep vol. 55 iss. 4 55 (2008). [Citado en pág. 17]
- [24] Manasis, V., Aygerinou, V., Ntzoufras, I., and Reade, J. J. Quantification of competitive balance in european football: Development of specially designed indices. *IMA Journal of Management Mathematics* 24 (2013), 363–375. [Citado en pág. 16]
- [25] Meyer, C. D. Matrix analysis and applied linear algebra. Capítulos 7 y 8. [Citado en págs. 38, 39, 42, and 46]
- [26] Nachbar, J. Continuity and compactness. <https://cpb-us-w2.wpmucdn.com/sites.wustl.edu/dist/3/2139/files/2019/09/contcompact.pdf>, 2016. Accedida: 25/06/2022. [Citado en pág. 25]
- [27] Newman, M. *Networks*. Oxford University Press, 2010. [Citado en págs. 1, 3, and 4]
- [28] OPEN COMMUNITY FACILITY OF BERKELEY. UC Berkeley Quiz Bowl: How To Make Schedules. <https://www.ocf.berkeley.edu/~quizbowl/schedules.html>. Accedida: 10/06/2022. [Citado en pág. 29]
- [29] Opsahl, T., Agneessens, F., and Skvoretz, J. Node centrality in weighted networks: Generalizing degree and shortest paths. *Social networks* 32 (2010), 245–251. [Citado en pág. 7]
- [30] ORTEGA RÍOS, R. Apuntes para Modelos Matemáticos I. <https://www.ugr.es/~rortega/PDFs/TPF.pdf>. Accedida: 10/06/2022. [Citado en pág. 47]
- [31] Owen, P. D., Ryan, M., and Weatherston, C. R. Measuring Competitive Balance in Professional Team Sports Using the Herfindahl-Hirschman Index. *Review of Industrial Organization* 31 (2007), 289–302. [Citado en pág. 17]
- [32] pascal Gayant, J., and Pape, N. L. How to account for changes in the size of Sports Leagues? The Iso Competitive Balance Curves. *Economics Bulletin* 32 (2012), 1715–1723. [Citado en pág. 17]
- [33] Pawlowski, T.; Breuer, C. H. A. Top clubs' performance and the competitive situation in european domestic football competitions. *Journal of Sports Economics* 2010-apr 13 vol. 11 iss. 2 11 (2010). [Citado en pág. 17]
- [34] Sabidussi, G. The centrality index of a graph. *Psychometrika* 31, 4 (1966), 581–603. [Citado en pág. 5]
- [35] Scott, J. P., and Carrington, P. J. *The SAGE Handbook of Social Network Analysis*. Sage Publications Ltd., 2011. [Citado en págs. 4 and 5]
- [36] Stevens, S. S. On the theory of scales of measurement. *Science* 1946-jun 07 vol. 103 iss. 2684 103 (1946). [Citado en pág. 17]
- [37] Stoilova, S., and Stoev, V. An application of the graph theory which examines the metro networks. *Transport Problems* 10, 2 (2017), 35–48. [Citado en pág. 52]
- [38] Triguero Ruiz, F. y Avila-Cano, A. The distance to competitive balance: a cardinal measure. *Applied Economics* 51, 7 (2018), 698–710. [Citado en págs. IX, XII, 12, 14, 17, 18, and 19]
- [39] Vieites Rodríguez, A., Ladra González, M., Aguado Martín, F., Gago Couso, F., Vidal Martín, C., and Pérez Vega, G. *Teoría de grafos. Ejercicios y problemas resueltos*. Ediciones Paraninfo, SA, 2014. [Citado en pág. 1]