TRATADO ELEMENTAL DE MATEMÁTICAS

ESCRITO DE ÓRDEN DE S.M.

ARA USO DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS

DEL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID

Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REINO

POR D. JOSÉ MARIANO VALLEJO,

ATEDRÁTICO *que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las Plazas dicho Seminario; y en la actualidad, Oficial Gefe de Seccion de la Secretaría de la bernacion de la Península, é individuo de varios establecimientos científicos.*

TERCERA EDICION

corregida y considerablemente aumentada.

TOMO I. PARTE PRIMERA

Que contiene la Aritmética y Álgebra.

BARCELONA.

Imprenta del Gobierno político superior
AÑO DE 1821.

TRATADO ELEMENTAL
DE MATEMÁTICAS

ESCRITO DE ÓRDEN DE S.M.

PARA USO DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS

DEL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID

Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REINO

POR D. JOSÉ MARIANO VALLEJO,

CATEDRÁTICO que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las Plazas en dicho Seminario; y en la actualidad, Oficial Gefe de Seccion de la Secretaría de la Gobernacion de la Península, é individuo de varios establecimientos científicos.

TERCERA EDICION

corregida y considerablemente aumentada.

TOMO I. PARTE PRIMERA

que contiene la Aritmética y Álgebra.

BARCELONA.

Imprenta del Gobierno político superior

AÑO DE 1821.

PRÓLOGO.

En la introduccion de mi memoria sobre la curvatura de las líneas, manifesté las dificultades que habia, en la época en que yo componia este tratado, de esponer en una obra los principios elementales de las Matemáticas, dando á conocer al mismo tiempo el plan bajo que me proponia escribir esta: y en los prólogos de las ediciones anteriores dí á conocer, que en la esposicion de la doctrina no habia seguido ningun sistema ni partido; que solo habia tenido en consideracion al principiante; que habia procurado suministrarle todos los auxilios posibles; y que la mayor parte de los tratados los habia espuesto con el órden que ménos dificultades habia presentado á mis discípulos.

En efecto, despues de haber hecho un largo y detenido estudio de todas las obras maestras de Matemáticas, tanto antiguas como modernas, me propuse reunir todos los principios fundamentales de la ciencia, con el fin de facilitar á nuestros jóvenes el cabal conocimiento de los escritos magistrales de los matemáticos: por cuyo motivo introduje y comprendí en esta obra muchas teorías importantes á que comunmente no se daba ningun lugar en los libros elementales, á pesar de su mucha trascendencia. Hice el mas profundo estudio de los autores modernos de Metafísica para penetrarme bien del método que debia seguir en su esposicion y composicion; y cuando ya tenia escritos los tratados en borrador, los distribuia entre mis discípulos para que los estudiasen; y al esplicármelos, pudiese yo deducir cuál era el medio que ménos dificultades les ofrecia. Y entre los diversos modos que puede haber de esponer una misma doc-

trina, preferí constantemente aquel que, presentando la ciencia en el grado de adelantamiento que tenia, conciliaba mejor la claridad, la sencillez, la facilidad en la ejecucion de las operaciones y la exactitud. *Para conseguir esto, puse el mayor esmero en tres puntos mui esenciales, cuales son: eleccion de doctrina, modo de esponerla, y estension que debia dar á cada ramo en particular: habiendo obtenido sobre dichos puntos unos resultados mui superiores á lo que pude prometerme.*

No citaré en comprobacion de esto, las observaciones que yo mismo he hecho en la academia militar de la ciudad de San Fernando en la isla de Leon (*), con motivo de haber sido nombrado cada seis meses por el gobierno, para examinar á los cadetes, en cuyo establecimiento se adoptó por testo inmediatamente que se publicó. Tampoco haré mencion de las que me han suministrado diferentes jóvenes de corta edad, de cuya enseñanza me encargué con el objeto de observar mas de cerca los efectos que esta misma obra producia en sus adelantamientos. Omitiré igualmente el manifestar la buena acogida que ha merecido á varios profesores, que esplican por ella en sus respectivas enseñanzas; y por último pasaré en silencio el voto de algunas personas que con solo su auxilio y sin necesidad de maestro, se han impuesto en todos los tratados que contiene: porque cuantos documentos pudiera presentar sobre cada uno de estos hechos, por auténticos que fuesen tal vez serian mirados por unos, como efectos de amor propio, ó de una vanidad reprensible, cuando quizá otros los reputarian por ilusiones de una imaginacion acalorada; por lo que me ceñiré únicamente á indicar lo que resulte de las obras que se han publicado en Europa despues de compuesta la mia: pues ellas son un testimonio nada sospechoso de que yo no me equivoqué ni en la eleccion de los medios, ni en la esposicion de la doctrina, ni en el órden y estension que debia dar á cada materia. Mas á pesar de esto, no insistiria sobre este punto, y me desentenderia de cualquier género de satisfaccion que pudiese resultarme, si no considerara como un interes general de toda la nacion, el hacer patente por todas partes, que el órden y método con que en el dia se tratan las ciencias por los escritores de Europa, es el mismo que hace mas de 30 años se halla felizmente puesto en práctica entre nosotros por mi catedrático D. Antonio de Varas y Portilla, segun lo tengo dicho en los prólogos de las ediciones anteriores.

(*) *Esta Academia se ha trasladado últimamente á Granada.*

Este benemérito profesor, dedicado siempre á la instruccion de la juventud española, reunió en sus lecciones públicas los principios de la verdadera Metafísica con las ciencias del cálculo y de la estension (*); y consiguió con su estraordinario celo é infatigable constancia plantear el órden propio que debe seguirse en la enseñanza de las Matemáticas, para facilitar sus progresos y aliviar las fatigas de los jóvenes en la penosa carrera. Este órden de idéas, este enlace y conexion de principios, es el que yo llamo y puedo llamar método mio, ya porque le descubro con todo el rigor y precision que le corresponde, ya por las aplicaciones que de él hago en todo lo que hasta aqui llevo publicado, ya tambien por haber unido mis taréas con las de aquel digno profesor, rectificándole en todas sus partes y dándole por último toda la generalidad de que es susceptible.

Pero el deséo por una parte de llevar mi obra al mas alto punto de perfeccion, y el de corresponder por otra á la confianza que mereci al gobierno en haberme encargado su composicion, me ha estimulado eficazmente á registrar con detencion las publicadas en Europa en estos últimos años, con el objeto de disfrutar cuanto de nuevo encontrase en ellas, para mejorar y enriquecer esta edicion. Al hacer este reconocimiento, me sorprendió el ver que los escritores de un mérito mui distinguido iban siguiendo en sus obras el mismo rumbo que

(*) *Considero de tanta importancia esta reunion de las Matemáticas con la Metafísica, que he juzgado oportuno perpetuarla en la viñeta de la portada, que simboliza al genio español en el acto de reunir estas dos ciencias representadas por dos matronas con sus correspondientes atributos.*

se halla delineado en la mia; y tambien advertí mui desde los principios, que no se desdeñaban de ocuparse de aquellos asuntos mas principales, que yo hice entrar por primera vez en la composicion de mis elementos.

Sea, pues, el que estos recomendables autores se hayan convencido por sí mismos de que el estado actual de las ciencias exigia esta importante inovacion, ó sea que de antemano hayan examinado mis escritos, lo cierto es, que no ha podido ménos de causarme una sorpresa agradable el ver que me he anticipado á presentar la doctrina en un estado de adelantamiento y perfeccion mayor de lo que en la actualidad se halla en Europa. Mi complacencia en esta parte subia de punto, á medida que iba descubriendo en las obras estrangeras el mismo método que tantos años hace está puesto en ejecucion por mi citado catedrático. Por lo cual, juzgo conveniente indicar que los escritores estrangeros van adoptando en sus obras el mismo órden de enseñanza, y el mismo sistema de doctrina que se deja ver en la mia.

Con este fin, observaré ante todas cosas que en tiempo del terrorismo en Francia, se escribiéron muchas obras sin mas objeto que el dar á conocer sus autores que eran personas útiles, y evitar por este medio la catástrofe que en aquella época les amenazaba: y para escribir en circunstancias tan críticas sin contradecir á nadie, fué preciso, como suele decirse, escribir á todos vientos, y sacrificar el órden y método al imperio de las circunstancias. De aquí provino el que se aboliesen las definiciones en los libros, y que se reputasen como claras y evidentes muchas proposiciones que no lo eran: y lisongeándose de este modo el amor propio de los lectores, se eludian las dificultades. Donde habia un barranco que saltar, un obstáculo que vencer, un defecto de la ciencia, porque no se hallase suficientemente adelantada, ó porque el autor no estuviese en disposicion de esplicarla como correspondia, echaba mano de un es claro, es evidente, se viene á los ojos, es fácil de conocer, *ó de otras espresiones equivalentes, con las cuales destumbraban al lector: y á veces les decian que eran claras y evidentes, no solo cosas que están mui léjos de serlo, sino tambien proposiciones dudosas y aun proposiciones falsas.*

Á esto, tambien pudo contribuir el que los primeros talentos, no se desdeñáron de tomar á su cargo la enseñanza de las ciencias. MM. Laplace y Lagrange esplicáron las Matemáticas; y como las personas que los oian, tenian ya los conocimientos necesarios para progresar en lo mas sublime y elevado de ellas, solo se detenian estos sábios á manifestar, por decirlo así, la filosofía de la misma ciencia, suponiendo conocidos los detalles. Los escritores que les sucediéron, sin tener en consideracion la diferencia que debe haber entre los libros que tratan de profundizar solo en la parte filosófica, y aquellos otros que se destinan á enseñar los mismos elementos, siguiéron las huellas de tan grandes hombres, y quisieron conservar un cierto aire de superioridad y elevacion, que es lo primero de que se debe desentender el que tome á su cargo dar direccion al talento humano en la carrera de las ciencias, cuando se propone por primera vez emprender su estudio. Por tanto, el mayor absurdo en que pueden incurrir los escritores de elementos, es el suponer que los principiantes saben ya lo mismo que van á aprender; pues esto no es dar á conocer las ciencias, sino es querer darse á conocer ellos: de ahí es, que estas obras, templadas por un tono tan poco conforme con la limitacion y pequeñez del hombre, cualquiera que sea su mérito consideradas como obras maestras de Matemáticas, no son á propósito en manera alguna para servir de obras elementales.

Por mi desgracia me tocó la suerte de manejar en mis primeros estudios una multitud considerable de esta clase de obras: en ellas encontré tanta falta de unidad en su plan, tanta incoherencia en su doctrina y tantos vacíos que llenar, que tuve que hacer por mi parte esfuerzos estraordinarios para formarme idéas exactas de las diversas materias que contenian. Convencido por mi propia esperiencia de los inconvenientes que ofrecian para la instruccion de los jóvenes los libros que andaban entónces en sus manos, me propuse desde luego evitarlos; y para proceder con la mayor exactitud, estudié con mucho cuidado y atencion las obras de Lock, Condillac, *Destutt-Tracy y otros autores célebres de Metafísica, á fin de penetrarme del verdadero método filosófico con que se deben escribir las obras elementales; y luego que me imbuí bien de tan útil y sábia doctrina, principié á escribir mi obra sin suponer que el principiante sabia mas que el que tenia cinco sentidos. Partiendo de este único conocimiento, y sin perder la ilacion de las idéas, procuré fijar la acepcion de cuantas palabras hubiese de usar, sin dejar hueco ni salto; porque de la significacion vaga de las palabras, resulta la mayor parte de las disputas, y nace tambien la confusion de las idéas, que en el concepto de* Boileau *es el origen de todos los males del mundo.*

Por fortuna he visto con particular gusto mio que va desapareciendo ya este desórden y confusion en las obras elementales publicadas en Europa (*) *despues de compuesta*

la mia: en ellas se sigue ya el sistema que yo adopté de fijar el sentido de las palabras por definiciones mas ó ménos exactas, segun el plan que cada uno se ha propuesto: y en algunas se halla una identidad tan abso-

(*) *Las que yo he podido consultar son las siguientes:*

Traité de Arithmétique, à l'usage d'éléves de tout âge: Par J. G. Garnier; ancien professeur à l'école polytechnique, et instituteur à Paris. Seconde édition. Paris 1808.

Elémens d' Algèbre à l'usage des aspirants à l'école polytechnique; par le même. Troisieme édition. Paris 1811.

Analyse id. Deuxième edition. Paris 1814.

Cours d' Algèbre, à l'usage des aspirants à l'école polytechnique, par E. D. Bois-Bertrand, ancien éléve de cette école, et directeur de l'école préparatoire-polytechnique. Paris 1810, 1811.

Traité élémentaire du calcul des inéquations, par N. F. Canard, professeur de Mathématiques trascendantes au Lycée de Moulins. Paris 1808.

Course of Matematics. By Charles Hutton Ll. D. F. R. S. Late professor of Mathematics in the royal military academy. London 1810.

De la manière d' étudier les Mathématiques; ouvrage destiné á servir de guide aux jeunes gens, á ceux surtout qui veulent approfondir cette science, ou qui aspirent à être admis à l'école normale ou á l'école imperiale polytechnique. Par P. H. Suzanne, docteur es-sciences, professeur de Mathématiques trascendantes au Lycée de Marseille, et de navigation aux écoles de marine, membre de la société d' émulation du département du Var, de l'académie de Lyon, et de celle de Marseille. Première partie. Préceptes généraux et Arithmétique; seconde édition, considérablement augmentée. Paris 1810.

De la manière d' étudier les Mathématiques id. Seconde partie, Algèbre. Paris 1810.

Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés, avec des Notes sur plusieurs points de la Théorie des équations algébriques; par J. L. Lagrange, de l'Institut des sciences, lettres et arts, et du Bureau des longitudes: membre du Sénat conservateur, et grand-officier de la légion d' honneur. Nouvelle édition, revue et augmentée par l'auteur. Paris 1808.

Introduction à la Philosophie des Mathématiques et technie de l'Algorithmie. Par Hoëné Wronski. Paris 1811.

Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange. Par le même. Paris 1812.

Philosophie de l'Infini, contenant des contre-réflexions sur la Méthaphisique du calcul infinitésimal. Par le même. Paris 1814.

Philosophie de la technie algorithmique. Première section, contenant la loy suprème et universelle des Mathématiques. Par le memê. Paris 1815.

Mélanges d' analyse algébrique et de géométrie; Par M. J. de Stainville, répétiteur-Adjoint à l'école royale polytechnique. Paris 1815.

Elémens d' Algèbre; par Mr. Bourdon, docteur és-sciences, professeur de Mathématiques au collége royal de Henry 4.° Paris 1817.

Traité d' Aritmétique á l'usage de éléves qui se destinent à l'école polytechnique, par A. A. L. Reynaud, examinateur temporaire des candidats de l'école polytechnique, et professeur agrégé au lycée imperial. Sixième edition. Paris 1811.

Traité d' Algèbre à l' usage des éléves qui se destinent à l'école royale polytechnique et des éléves de l' école speciale militaire. Par le même. Cinquieme edition. Paris 1821.

Elémens d' Arithmétique. Par C. J. A. Antoine, professeur de Mathématiques au collége royal de Nancy. Troisiéme édition. Nancy 1815.

Complément de la théorie des équations du premier degré, contenant de nouvelles formules pour resoudre ces équations, et une discusion générale et aussi nouvelle de tous les cas singuliers qu' elles peuvent présenter; suivi d' un traité des diferences et de l'interpolation des séries, formant un supplement aux premiers élémens d' Algèbre. Par P. Desnanot, censeur au collége royal de Nancy, correspondant de la société royale des sciences, arts et agriculture du département de la Haute-Vienne. Paris 1819.

Cours complet de Matématiques pures, par L. B. Francoeurt. Paris. 1809.

tuta, que parece imposible que sus autores no hayan visto ántes mi obra, ó hayan llegado á sus manos los cuadernos de apuntaciones de mis discípulos, ó de los del espresado profesor D. Antonio Varas. Pero la obra en que se ve una coincidencia mayor de idéas en cuanto á su método y el mio, es la de Mr. Suzanne, impresa en Paris año 1810 sobre el método de estudiar las Matemáticas; y paraque se vea con evidencia, observaré que en el tomo 1.° que trata del método de estudiar la Aritmética, se esplica en estos términos: »Cuando las ciencias han llegado á un alto grado de perfeccion, cuando todas las partes profundizadas por los genios mas vastos y penetrantes se han enriquecido con un gran número de verdades que han alejado sus límites, viene á ser su estudio mas largo y penoso, y sus progresos son por consiguiente mas lentos y difíciles. Entónces la memoria, obligada á retener una inmensidad de objetos, reclama sin cesar los socorros del razonamiento, y pide un método que clasifique estos objetos del modo mas propio para volver á encontrarlos cuando se han perdido de vista. Entónces importa dirigir sus pasos tanto mas rápidamente hácia el fin propuesto, cuanto mas estenso es el espacio que se debe correr, mas multiplicados los objetos que se deben observar, y que las investigaciones exigen mas sagacidad y mas términos de comparacion.

»El medio mas seguro de simplificar el estudio de la ciencia, era el de reducirla á un pequeño número de principios fundamentales, y esponerlos de modo que hagan realzar todos los desarrollos, ó todas las consecuencias de que sean susceptibles.

»Comparando los diversos métodos empleados hasta el dia, y sobre todo los resultados que me han dado mas de veinte años de esperiencia, me he convencido de que no habia método mas propio para aliviar la memoria y desenvolver las facultades del espíritu, que el que sabe conformarse con la generacion de las idéas.

»Este método, á pesar de su gran semejanza con el llamado método de los inventores, *no es de todo punto el mismo. Cuando se quiere uno sujetar al órden con que se han hecho los descubrimientos, es indispensable tener en consideracion todas las lentitudes del espíritu humano* (*), *retroceder muchas veces sobre lo que se ha hecho, para completarlo y preparar los materiales de las ciencias mucho tiempo ántes de ponerlos en obra, y de componer con ellos un todo regular. Por un método de esta naturaleza se hace por decirlo así, la historia del espíritu humano, al mismo tiempo que la de la ciencia. Se manifiesta, es verdad, el orígen real de nuestros conocimientos y el motivo de todo; pero como está uno obligado á una estrema lentitud, y á separar unas de otras verdades que tienen entre sí relaciones íntimas, resulta que la memoria se fatiga y el espíritu tiene mucho tra-*

(*) *En efecto, debe mirarse como un error de primer órden el asegurar que no hai cosa mejor que esponer la doctrina por el mismo método con que se ha inventado. Si esto fuese posible, queria decir que habiéndose consumido siete mil años para elevar la ciencia al estado de adelantamiento que en el dia tiene, se necesitará el mismo tiempo para comprenderla. Ademas, casi ninguna doctrina se puede esplicar en los elementos, del mismo modo que se inventó. En efecto, la teoría de los logaritmos se descubrió por el movimiento, y no se hallará tan solo una persona en el dia que diga se debe esplicar del mismo modo. La elevacion á potencias por el binomio de Neuton, no se sabe positivamente como se descubrió; pero no hai duda en que fué ó por induccion ó por el cálculo infinitesimal: y todos los Matemáticos modernos se han esforzado para dar una demostracion de tan interesante teorema por métodos diferentes, y puramente algebráicos. El cálculo infinitesimal se descubrió por dos métodos distintos, y en la actualidad no hai Matemático que trate de esplicarle por ninguno de ellos: y como se podria decir lo mismo de casi todos los demas ramos, se puede reputar como sofisma el tratar de sostener que se deben enseñar las ciencias por el método que siguiéron los inventores. Para ocurrir sin duda á este inconveniente, dicen, que el método de los inventores consiste en esplicar la doctrina sino del modo que efectivamente se descubrió, del modo que pudo descubrirse: y en este caso, es ya dar orígen á todo género de cavilaciones. Por todo lo cual, se debe inferir que el verdadero método, y el único que se puede seguir, si se deséa que los discípulos adquieran en el menor tiempo posible el mayor número de conocimientos exactos, al mismo tiempo que se aumenten sus facultades intelectuales, y se pongan en disposicion de hacer rápidos progresos por sí mismos, es el que Suzanne llama de la* generacion de las idéas, *que es el que yo he usado, hermanando siempre las Matemáticas con la sana Metafísica.*

bajo en percibir el encadenamiento de todas las partes.

»En el método en que se sigue simplemente la generacion de las idéas, basta disponer todos los materiales de nuestros conocimientos en el órden que les conviene; darles el lugar que deben ocupar en el edificio de la ciencia, y en dos palabras, unir todas las verdades entre sí por un vínculo natural y sensible, no del modo con que se han presentado realmente á los inventores, sino como las dispondria un espíritu vasto y profundo que teniéndolas todas á la vista, quisiese reformar la ciencia, despojarla de todo lo que la embaraza, y presentarla bajo el aspecto mas claro, mas sencillo y mas satisfactorio.

»Este último método puede pues reunir todas las ventajas del método de invencion sin tener la lentitud y los embarazos de este último; por lo que en mi concepto merece la preferencia sobre la mayor parte de los otros métodos. Bien sé que exige mas atencion, un trabajo mas constante y un espíritu ya acostumbrado á reflexionar; pero solo con estas condiciones es como se puede aprender la ciencia, fortificar el juicio, desenvolver la facultad de raciocinar, y llegar á ser capaces de encontrar la verdad.

»Limitarse á demostrar con la mayor concision posible los principios de las Matemáticas, sacrificar á este objeto la dependencia de las idéas, no hacer conocer el motivo de cada cosa, obligar á la memoria á cargarse de casi todos los detalles de las demostraciones, ocultar el hilo, que conduciendo el razonamiento, hubiera suplido á la mas inconstante de nuestras facultades, es privarse de una gran parte de las ventajas que se podrian sacar de este estudio, es fortificar en los jóvenes la tendencia á la irreflexion, ó al ménos es no procurar combatirla.

»Tales son las condiciones que me han hecho preferir el método de la generacion de las idéas, con tanta mas razon, cuanto eran una secuela de la esperiencia que yo habia adquirido en mis primeros estudios.

»Esta esperiencia me habia convencido de que se ahorrarian bastantes esfuerzos inútiles, que desaniman á la

mayor parte de los principiantes, si se les diesen los preceptos propios para quitarlos, y se les espusiesen los principios de la ciencia por un método que les hiciese conocer la razon de todo y aliviase las fatigas de la memoria, fortificando la facultad de raciocinar."

Por esta causa, en el capítulo primero trata de demostrar la necesidad de dar reglas sobre el método de estudiar: asunto de que estando yo convencidísimo, le aconsejo no solo en la introduccion de las obras que ya he citado, sino desde la primera edicion de mi Aritmética de niños.

En el capítulo 3.º manifiesta las cualidades necesarias que debe tener una obra elemental: y son en su concepto la exactitud, la claridad, la brevedad, la sencillez, la fecundidad y la elegancia.

»La exactitud (*dice*) consiste en la perfecta conformidad, ó la exacta dependencia de nuestros pensamientos, sea con un principio evidente é incontestable, sea en las nociones primeras del objeto que se considera.

»*Para comprender bien esta definicion, es necesario subir hasta la causa de la dependencia de las idéas.*

»*Los objetos esteriores ocasionan en nuestros sentidos, movimientos ó impresiones que nos advierten de la presencia de estos objetos.*

»*Estas impresiones, consideradas como trasmitidas por los sentidos, se han llamado* sensaciones; *consideradas como sirviendo para representarnos los objetos, y hacérnoslos distinguir, han recibido el nombre de* idéas ó de imágenes.

»*La simultaneidad de las impresiones da lugar á la de las idéas, une estas las unas á las otras, y nos suministra el medio de comparar entre sí estas sensaciones. De esta comparacion se deducen, entre las idéas primitivas,* relaciones ó juicios: *estas relaciones comparadas entre sí producen nuevas relaciones, cuya comparacion ha sido llamada* razonamiento, *y el nuevo juicio que es su resultado, ha tomado el nombre de* consecuencia.

»*La falta de exactitud proviene de que se supone entre dos idéas una idéa que no existe.*

»*En virtud de esto, una obra elemental estará dota-*

da de exactitud, cuando reine una dependencia íntima entre todas las partes del plan general, así como entre todos los detalles que componen el conjunto; cuando las divisiones nazcan naturalmente del asunto, y cada una conduzca claramente á las siguientes; cuando el objeto de la ciencia esté bien determinado, las nociones primeras sean consecuencias inmediatas de él, las demostraciones se deriven de las nociones primeras ó de principios incontestables; y las soluciones sean sacadas de la naturaleza de la cuestion y de las verdades ya demostradas: en fin, cuando nada esté fundado sobre suposiciones aventuradas, sobre proposiciones no demostradas, y que las palabras estén tomadas en su verdadera acepcion.

»*La* claridad *pide que las idéas estén distribuidas en un órden tal, que nazcan sin esfuerzos las unas de las otras, que las palabras empleadas para espresarlas tengan su significacion propia y estén colocadas lo mas simple y naturalmente que sea posible. En fin,* dependencia en las idéas, propiedad en las palabras y sencillez en las construcciones, son las fuentes de la claridad.

»La brevedad tiene por objeto no dar á cada cosa sino la estension necesaria á la claridad. *No se debe juzgar de ella por el número de las idéas, ni por el de las palabras; sino examinando si todo lo que se dice es necesario, y si no se podria suprimir nada sin perjudicar á la claridad ó al rigor.* Aquello es mas corto, que es mejor entendido y mas pronto retenido.

»*La idéa de sencillez lleva consigo las de* claridad, brevedad y facilidad.

»La fecundidad consiste en esponer las idéas y los principios en el órden de su generacion, de manera que hagan conocer por que medios se llega á la verdad, y á conducir de este modo al camino de los descubrimientos.

»*Para obtener esta importante cualidad, es necesario mirar la ciencia bajo el punto de vista mas simple, mas natural y mas estenso: es necesario que las primeras nociones sean claras y en el menor número posible; que las verdades se deduzcan sin trabajo de estas nociones y despues las unas de las otras: que á cualquier distancia que uno se halle del punto de partida, pueda siempre volver cómodamente sobre sus pasos, y correr con facilidad las diversas ramificaciones de la ciencia: es necesario sobre todo que se perciba sin cesar el órden que ha seguido el espíritu para formar esta cadena de verdades;* es necesario, *en una palabra,* sujetarse á la generacion de las idéas.

»*Si el gusto consiste en un cierto tacto que hace discernir lo que conviene mejor á cada cosa, y puede producir el mejor efecto, esta calidad debe pertenecer igualmente á las ciencias que á las letras. Hai en el arte de buscar ó de demostrar la verdad, una cierta eleccion de idéas mas ó ménos propias para hacer nacer la evidencia y dar realce á relaciones desconocidas. De aqui nace la* ELEGANCIA *que, como lo indica la* palabra ELIGERE, consiste en la eleccion juiciosa de los medios sencillos y agradables de llegar á la verdad.

»*Á la elegancia se opone la pesadez. Se cae en este defecto, siempre que se entra en detalles superfluos, cuando los medios empleados hacen la marcha larga y penosa, cuando el estilo está embarazado, sobrecargado de palabras inútiles, de frases mal construidas y oscuras....*"

Despues pasa á manifestar el modo de profundizar la obra que se ha elegido; esplica en lo que consiste la generacion de las idéas; dice algo acerca del modo de demostrar en general, que yo he indicado por primera vez, y despues pasa á manifestar las variaciones que la esperiencia le ha obligado á hacer; y como el método que adopta es el que me propuse desde luego en la composicion de mi obra, si se compara todo lo que dice Suzanne con lo que tengo dicho en la introduccion de mi memoria sobre la curvatura de las líneas, en la introduccion de esta obra y en todo el desempeño de ella, se advertirá la coincidencia de lo que yo espongo con las investigaciones de este sábio ideólogo-matemático.

Sin embargo, en una cosa nos diferenciamos Suzanne y yo; y es que él pone por separados los ejemplos, cuando yo los coloco á continuacion de las proposiciones generales, en las cuales deben hallarse contenidos como otros tantos casos particulares. El motivo que en mi con-

cepto pudo inducir á Suzanne á dicha separacion es el siguiente. Antes de su obra y de la mia, se acostumbraba en los libros elementales franceses el deducir la teoría general de ejemplos particulares; y sin duda Suzanne por huir de esta inexactitud, cayó en el inconveniente de hacer dicha separacion.

El fundamento que yo tuve, para usar del método que espongo, es la máxima del sapientísimo Laplace, que dice: »Preferid en la enseñanza los métodos generales, procurad presentarlos del modo mas simple, y veréis al mismo tiempo que son casi siempre los mas fáciles. *Tuve presente ademas otro consejo del mismo Laplace, á saber: que* no se abuse del método de induccion para la demostracion de las proposiciones; pues aunque el método de elevarse á las leyes generales por la consideracion de los casos particulares, es la fuente de casi todos los descubrimientos en la análisis y en la naturaleza, no se debe sin embargo generalizar demasiado pronto; porque sucede frecuentemente que una lei que se verifica en un gran número de casos, se ve desmentida en otros." *Conciliando estas importantes advertencias, procuré con el mayor cuidado no incurrir en el citado inconveniente que presentaban las obras francesas de aquel tiempo; y ahora veo que las modernas confirman en un todo el procedimiento que yo seguí. En efecto, Mr. Garnier establece como una condicion esencial, que* »las reglas fundamentales no deben estar diseminadas en ejemplos particulares, sino que es necesario presentarlas aisladamente, y enunciarlas con mucha precision y claridad, á fin de que ocupen poco lugar en la memoria del principiante, y que se conserven en ella sin alteracion." *Y aun el mismo Suzanne se esplica en estos términos:* »cuando las reglas se hallan diseminadas en ejemplos particulares, sucede frecuentemente que los jóvenes, despues de haber seguido todas las operaciones, tienen luego muchas dificultades para hacer otras por sí mismos."

Yo puse el mayor esmero en dar demostraciones rigorosas y exactas de todas las proposiciones fundamentales, procurando siempre reunir la generalidad á la claridad y brevedad: bien convencido de que si se suponen conocidas por el principiante proposiciones que

ignora, ó cuya verdad desconoce, todo lo que en ellas se funde le conducirá mas bien á la creencia de las cosas, que á la evidencia que de todas ellas debe adquirir. Este procedimiento mio le veo ahora confirmado con lo que dice Mr. Reynaud en la llana primera de su Álgebra impresa en este año de 1821. »He hecho (*dice*) todos mis esfuerzos para reunir la concision á la claridad, pero procurando dar á las demostraciones el grado de rigor de que son susceptibles, yo he evitado cuidadosamente estas discusiones metafísicas, que no tienden sino á dar una falsa direccion al espíritu de los discípulos, á retardar sus progresos y que podrian aun desalentarlos: estas discusiones que por la mayor parte no deben su orígen sino á las diferentes maneras de que un mismo objeto puede ser considerado." *Despues, para inculcar la necesidad de profundizar bien todas las proposiciones y convencerse de ellas por demostraciones exactas y rigurosas, dice:* »No se sabrian conocer demasiado bien los elementos de las Matemáticas; el que los desprecia arrebatado por el encanto de las partes mas elevadas, no vuelve á ellos jamas, y los numerosos obstáculos que encuentra, son producidos por la debilidad de sus primeros estudios."

Lo dicho basta paraque se forme idéa de los puntos que he tenido que conciliar, y del órden que se ha seguido en las obras elementales publicadas ántes y despues de la mia; ahora manifestaré la suerte que ha cabido á una gran parte de las teorías, y proposiciones nuevas que yo introduje en mi obra, á las que comunmente no se daba ningun lugar en los elementos de la ciencia. Mas por no dilatarme demasiado haré mencion únicamente de algunas que se comprenden en este tomo: entre ellas, es una, el haber presentado con la debida estension el modo de conocer si un número es divisible por otros varios: sobre cuyo punto seguí las investigaciones de Pascal, enunciando el problema con toda generalidad, y presentando su resolucion, en todos los casos, acompañada de la evidencia de las razones que aseguran el acierto en la práctica, al paso que ilustran al calculador. No le pareció á Suzanne que este fuese un asunto de poco momento, y por eso le tomó por objeto *digno de sus consideraciones; y aunque siguió distinto camino, da á conocer lo interesante que es el esplicarle con toda exactitud, como fácilmente lo notará el que se entere del apéndice primero que se halla al fin de este volúmen, en donde le presento en los mismos términos que le ha publicado dicho autor.*

Las desigualdades y desproporciones, *que á veces se presentan en los cálculos, sirviéron tambien de ejercicio á mis meditaciones; y traté de manifestar sus principales propiedades, llamando sobre este punto la atencion de los Matemáticos. Mis esfuerzos en esta parte, no han sido inútiles, puesto que en los libros que posteriormente se han escrito, se les ha dado un lugar que ántes no tenian. Pero el que mas se ha distinguido sobre esta materia, ha sido Mr. Canard, que de propio intento ha dado á luz un tratado completo que intitula de las* inecuaciones*: quien se detiene mui particularmente á esplicar las operaciones que se pueden ejecutar con ellas. Y aunque su método es diferente, pues para esplicarle tiene que considerar cantidades que él llama* pronegativas *y* metanegativas, *y hacer varias operaciones preparatorias, como son las que denomina* efectuaciones *etc., y por el mio se deduce todo clara y fácilmente con ménos aparato y rodéos, sin embargo esto acredita que me puse en el verdadero punto de vista, desde el cual solo puede descubrirse lo que se debe comprender en una obra dirigida á que la juventud forme una cabal idéa del estado en que se hallan las ciencias.*

En los libros que corrian con mas crédito, cuando yo escribia mi obra, se omitia la esplicacion de las tablas de logaritmos, bajo el especioso pretesto de que era inútil detenerse en ello, por hallarse en las mismas tablas; pero viendo yo que la esplicacion contenida en ellas envuelve idéas distintas de las que necesita el principiante, me tomé el trabajo de esplicarlas de un modo que estuviese á los alcances de todos. Esto mismo ha obligado despues á Mr. Bourdon á detenerse en el uso y aplicaciones de las espresadas tablas, y á manifestar la razon que para ello ha tenido, diciendo: »Se halla á la verdad en Callet, una instruccion preliminar sobre el modo de servirse de ellas: pero está de tal modo confundida con otras cuestiones mas difíciles, que los jóvenes tienen trabajo en discernirla, y se hallan frecuentemente embarazados para hacer las aplicaciones mas simples."

Hice aun mas; procuré poner todos los métodos nuevos que en mi entender debian comprenderse en unos elementos y que fuesen verdades importantes capaces de facilitar, ó la ejecucion de las operaciones, ó la inteligencia de las obras maestras. Así es, que habiendo observado que la regla de Neuton para abreviar la estraccion de la raiz cuadrada, era mui socorrida en la práctica, procuré demostrarla con todo rigor y exactitud, ya que este célebre Matemático omitió enteramente su demostracion. Esta regla se reduce á decir, que cuando se han sacado la mitad de los guarismos de la raiz ó la mitad y uno mas, se pueden sacar los otros, dividiendo el residuo por el duplo de lo hallado ántes. *Y demostré tambien cuando es suficiente haber obtenido la mitad de los guarismos por el método regular, para sacar despues los otros por la division.*

Mas en los libros modernos de Francia, impresos en Paris en estos últimos años, se pone y se demuestra otra regla ménos ventajosa, á saber, que cuando se hayan sacado las dos terceras partes de guarismos de la raiz mas uno, se podrán hallar los demas, dividiendo la resta por el duplo de la raiz hallada. *Aplicada esta regla al caso en que la raiz debiese tener seis guarismos, resulta que como las dos terceras partes de seis son cuatro, deberiamos hallar cinco guarismos por el método ordinario, y uno solo por la division; pero como un guarismo cualquiera siempre se halla por la division, resulta que en este caso no viene á haber abreviacion, cuando por la regla que yo pongo basta hallar los tres primeros por el método ordinario y los otros tres por la division. En el caso de tener que estraer raices mui considerables, como las que yo practico para determinar la relacion del diámetro á la circunferencia, pág. 141 del tomo de Geometría, en que se hallan con treinta y seis guarismos decimales, resulta que por mi regla basta encontrar diez y ocho guarismos por el método comun, y otros diez y ocho por la division, cuan-*

do por el método que ponen todavia en el dia los autores franceses, se necesitarian determinar veinte y cinco guarismos por el método comun, y solo once por la division: y atendiendo á lo complicada que es esta operacion, se advertirá cuanto mas ventajosa es la regla que yo demuestro. De manera, que en ninguno de los libros que corren en Francia en el dia, se da á conocer la citada regla de Neuton. En alguno que otro, se pone por regla en la raiz cuadrada, que en habiendo sacado mas de la mitad de los guarismos por el método ordinario, se pueden hallar los restantes por la division: *que es vaga y no tan exacta todavia como la nuestra.*

Acerca de la abreviacion de la raiz cúbica nada dijo Neuton; pero yo me ocupé de este asunto por considerar que no era ménos importante el simplificar los embarazosos cálculos en que suele empeñar esta operacion, y conseguí efectivamente presentarla con su exacta y rigurosa demostracion: sobre lo cual están exaustos los mas de los libros franceses, ó ponen la misma regla que en la raiz cuadrada, cuando mi obra ofrece en esta parte al calculador medios mucho mas ventajosos para aliviar sus fatigas.

Otro de los puntos que están demostrados en mi obra y que ahora se están haciendo los mayores esfuerzos en Francia para manifestarle como corresponde, es que la multiplicacion algebráica se hace sumando los esponentes aun en el caso de ser inconmensurables; y se elogia mucho la demostracion de Mr. Reynaud sobre este punto, cuando en mi obra se halla todo esto esplicado con mas exactitud y sencillez, tanto para la multiplicacion, como para la division, elevacion á potencias y estraccion de raices, no solo de las cantidades que tienen esponentes inconmensurables, sino tambien para el caso en que los esponentes de la potencia á que se han de elevar y de la raiz que se ha de estraer son tambien inconmensurables.

No obstante esto, debo advertir que en los libros últimamente publicados en Europa, se encuentran cosas mui dignas de insertarse en los tratados elementales para la mejor instruccion de la estudiosa juventud: y efectivamente me he aprovechado de cuanto útil y nuevo se contiene en ellos: por manera, que se puede asegurar que en la edicion que ahora hago de la Aritmética y Álgebra, se halla reunido todo lo que sobre estos dos ramos se ha adelantado en Europa, y que se encuentra esparcido en las diversas obras de su especie. Y si de algo me he desentendido, ha sido de lo que corresponde á otros tratados, como el de las ecuaciones numéricas, funciones, series etc. ó de algunos puntos que no presentan utilidad conocida: habiendo colocado en sus lugares respectivos otras muchas cosas que son el fruto de mis investigaciones particulares.

Debo advertir ademas, que á pesar de las fatigas que se toman los sabios para adelantar las ciencias exactas, quizá no estará mui distante la época en que tengan que mudar de direccion para conseguir este fin. El motivo que me asiste para pensar de este modo es el siguiente. Entre las obras nuevas publicadas con posterioridad á la mia, deben llamar la atencion las de Mr. Höené Wronski, por el lenguage tan enigmático de que usa. No tengo rubor en confesar que no le entiendo, porque los sabios del instituto de Paris MM. Legendre, Aragó, Lagrange y Lacroix *confiesan que este autor ha presentado sus fórmulas en términos ininteligibles. Sin embargo, como de sus fórmulas se deducen todas las que hasta ahora se han presentado con mayor generalidad por los mas célebres matemáticos, hai motivo suficiente para juzgar que si se llega á esponer su doctrina de modo que se pueda comprender, las Matemáticas van á mudar enteramente de aspecto.*

Para dar una idéa del lenguage de que usa este Autor, y presentar al mismo tiempo un bosquejo del objeto que se propone en sus obras, he puesto en el apéndice 8.º la traduccion de su Tableau architectonique des Mathématiques *que viene á ser una tabla sinóptica de esta ciencia segun él la concibe.*

Este autor dice repetidas veces en sus obras, que si no las entienden los sabios franceses, es porque ignoran la filosofía trascendental *que es mui conocida en Alemania. Y deseando yo penetrar los misterios de dicha filosofía, he encargado á diferentes sugetos con la mayor eficacia que no perdonen medio ni diligencia alguna á fin de proporcionarme todos los libros que puedan ser conducentes pa-*

ra ponerme en estado de profundizar arcanos tan recónditos, con la mira de divulgar entre nosotros los conocimientos útiles de las Matemáticas. Si llego á conseguirlo, haré que todos disfruten de este beneficio cuanto ántes, pero presentándole de un modo que se pueda comprender su contenido.

Por los libros franceses no debemos esperar ponernos al corriente de estos conocimientos; pues se ha suscitado ya una especie de guerra científica entre los sabios de aquella nacion y Mr. Wronski. Este moderno escritor hace poco aprecio de MM. Laplace, Lagrange *etc.; pone á sus obras varias objeciones, y hace ver que los resultados que estos matemáticos sacan con mas generalidad, no son sino casos particulares de sus fórmulas. En virtud de lo cual, es de esperar que de este choque entre los geómetras franceses y alemanes, resulte algo útil á las ciencias matemáticas. Por mi parte procuraré observar ambos partidos, y apropiar para nuestra nacion cuanto pueda ser útil y ventajoso.*

Llevado con esta mira del deséo de propagar los adelantamientos que se han hecho en tan importantes ciencias, he procurado tambien enriquecer esta edicion con diversas teorías, entre las cuales se halla el modo de resolver ecuaciones mui elevadas, por el método de las de 3.º y 4.º grado. Acerca de las que se resuelven por el método de las de 3.er grado, solo hai ligeras indicaciones en los libros publicados hasta el dia; pero en ninguna manera los detalles necesarios para comprender esta interesante materia; por lo cual, yo resuelvo ecuaciones de los grados 24, 36 y 48, poniendo todos los pormenores. Mas respecto de las ecuaciones que pueden resolverse por el método de las de 4.º grado, no he visto la menor indicacion en ningun autor: de manera que todo lo que espongo sobre este particular, es fruto de mis propias investigaciones: Y para que se perciba el método con claridad, le aplico á ecuaciones del grado 40 y del 64, deteniéndome en la de este lo necesario para que hasta con la simple vista material se vean los 64 valores de la incógnita que satisfacen á la ecuacion.

Por último, solo falta dar razon del modo con que está dispuesta esta obra, y de los sacrificios que me ha costado el llevar á efecto esta tercera edicion. En cuanto á lo primero, debo advertir que para acomodar su estudio á las miras de todos los que se dedican á las Matemáticas, he dispuesto que se coloquen entre corchetes { } todos aquellos puntos que no entran en los libros destinados á la enseñanza, dejando fuera las verdades y proposiciones fundamentales que forman el asunto de los cursos públicos. Pero el que quiera profundizar como corresponde en estas ciencias, debe continuar despues con el estudio de los puntos omitidos, añadiendo ademas el de las digresiones, notas y apéndices.

En cuanto á lo segundo, diré que no he desperdiciado momento ni diligencia en adquirir doctrina, y reunir materiales para perfeccionar mi obra; y si no hubiera sido por mi constante trabajo sobre este particular, no hubiera podido en manera alguna hacer las adiciones correspondientes; pues las obligaciones propias de mi actual empléo me ocupan casi todas las horas del dia: por lo que me he visto precisado á destinar hasta los ratos necesarios para mi propio reposo á la coordinacion de los materiales que ya tenia recogidos de antemano.

Otra de las circunstancias, que he procurado reunir en esta impresion, es el que salga correcta y que se pueda proporcionar á un precio cómodo. Y á pesar de que esta edicion contiene diez y ocho pliegos mas que la anterior y de lo que ha subido el valor de las impresiones, y del mayor gasto que ha originado el ser grabada la portada, para no omitir ninguna diligencia en favor del principiante, no alteraré su precio: porque opino con Mr. Francoeur, que el precio de las obras elementales se debe proporcionar al alcance de todas las fortunas.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO.

INTRODUCCION

En que se dan unos principios de Matefísica suficientes para entrar con utilidad en el estudio de las Matemáticas.

ARITMÉTICA.

PRINCIPIOS DE ÁLGEBRA.

SEGUNDA PARTE DEL ÁLGEBRA.

ALFABETO GRIEGO.

	Nombre.	*Figura.*	*Valor.*
1	Alfa	Α, α	*a*
2	Beta	Β, ϐ, β	*b*
3	Gamma	Γ, γ, ɼ	*g*
4	Delta	Δ, δ	*d*
5	Epsilon	Ε, ε	*e* breve
6	Dseta	Ζ, ϛ, ζ	*ds*
7	Eta	Η, η	*e* larga
8	Tzeta	Θ, θ, ϑ	*tz*
9	Iota	Ι, ι	*i*
10	Kapa	Κ, κ	*k*
11	Lambda	Λ, λ	*l*
12	Mu	Μ, μ	*m*
13	Nu	Ν, ν	*n*
14	Xî	Ξ, ξ	*x*, *cs*
15	Omícron	Ο, ο	o breve
16	Pi	Π, π, ϖ	*p*
17	Rho	Ρ, ϱ	*r*
18	Sigma	Σ, Ϲ, σ	*s*
19	Tau	Τ, τ	*t*
20	Upsilon	Υ, υ	*u*
21	Fi	Φ, φ	*f*
22	Xi	Χ, χ	*x*
23	Psi	Ψ, ψ	*ps*
24	Omega	Ω, ω	o larga

INTRODUCCION.

Desde nuestra primera edad se nos hace conocer que tenemos cinco sentidos, y por lo mismo partirémos de este principio para establecer cuanto necesitamos.

En primer lugar observarémos que damos el nombre de *cuerpo* á todo lo que es capaz de hacer impresion en nuestros sentidos. Las impresiones que los cuerpos hacen en nosotros se llaman *sensaciones*. Nuestras sensaciones, consideradas como representando los objetos, se llaman *idéas*; y la facultad por medio de la cual podemos retener aquellas sensaciones, cuando los objetos no están presentes, se llama *memoria*. Si el objeto ó cuerpo que causa en nosotros la sensacion es simple (*), la idéa se llama *simple*; y si compuesto, la idéa se llama *compuesta*. Ademas la idéa puede ser *singular* y *universal* ó *abstracta*; es singular ó individual cuando solamente conviene á un individuo, y es abstracta ó universal si conviene á muchos; de manera que para formar una idéa abstracta ó universal, no hai mas que advertir aquello que es comun á muchos objetos, y prescindir de lo demas en que se diferencian. Por ejemplo: saliendo al campo, se advierte que hai perales, manzanos, olmos, etc., y que todos estos objetos convienen en tener raices, tronco, ramas, hojas, etc., y por convenir todos en esto les damos una denominacion que á todos los comprende, que es *árbol*: con lo cual hemos formado una idéa abstracta, que al mismo tiempo es compuesta, porque en la idéa de árbol entran todas estas: raiz, tronco, ramas, etc.

Las idéas abstractas no existen sino en nuestro entendi-

(*) *Se dice que una cosa es simple cuando para darla á conocer no hai otro medio que presentarla al sentido á que pertenece; v. gr. la blancura, picante &c. que se han de presentar á la vista, gusto &c.*

miento; pues no puede haber un árbol sin que sea ó manzano, ó peral, ó etc. Al mirar la nieve, el papel, etc. advertimos que tienen de comun el color *blanco*; y si prescindimos de que este color se halla en la nieve, papel, etc. nos formarémos la idéa de *blancura* que es una idéa abstracta; pero simple, pues que únicamente representa una cosa sola.

La operacion por cuyo medio concebimos la blancura como separada de la nieve, papel, etc. en que se halla, se llama *abstraccion*; de manera que abstraccion *es una operacion del alma, por medio de la cual concebimos como separadas, cosas que realmente no lo están.*

Cuando se nos presentan muchos objetos á un mismo tiempo, nuestra alma para hacerse cargo de ellos, los va considerando cada uno separadamente, y esto lo hace por medio de la *atencion*; de manera que atencion *es una operacion del alma, por medio de la cual de muchos objetos que se nos presentan, elegimos uno para hacernos cargo de él, y ejecutando lo mismo con los demas venimos en conocimiento de todos ellos.*

Como la mayor parte de los objetos que se nos presentan son compuestos, no basta el que por medio de la atencion elijamos uno para considerarle separadamente, sino que necesitamos descomponerle en sus partes, para ver que relacion tienen entre sí y con el todo que forman, y esto se hace por medio de la *análisis*; de manera que análisis *es una operacion del alma, por medio de la cual descomponemos un todo en las partes de que consta, para ver que relacion tienen entre sí y con el mismo todo, y volverlas otra vez á juntar paraque compongan el mismo todo.*

Estas dos operaciones, á saber, atencion y análisis, las ejerceríamos, si, por ejemplo, tuviésemos que hacernos cargo de los muebles que habia en una sala; entónces por medio de la atencion elegiríamos uno de ellos tal como un *relox*, para hacernos cargo de él; y como esta máquina se compone de muchas piezas, por medio de la análisis la descompondríamos en las partes de que constaba, para ver que relacion tenian entre sí y con el total de la máquina: y luego reuniríamos todas estas partes para volver á formar el relox; haciendo lo mismo con todos los demas objetos, podríamos dar razon individual de los muebles que habia en dicha sala.

Segun hayamos analizado mas ó ménos los objetos, así serán mas ó ménos exactas nuestras idéas, y con relacion á esto hacen los lógicos varias divisiones de ellas; pero nosotros con un ejemplo manifestarémos los grados de análisis que se pueden hacer. Supongamos que de muchos sugetos que han estado en una casa, el uno de ellos solamente se acuerda de la calle en que está dicha casa: este habrá analizado mui poco, y la idéa que tiene de la casa en que estuvo se llama *obscura*; otro que no solamente se acordase de que la casa estaba en tal calle, sino que solamente dudase entre dos ó tres casas, habrá analizado mas, y la idéa que de la casa tiene la podrémos llamar *confusa*; otro que no solamente supiese esto, sino que entrando en la calle se iba derechamente á la casa sin preguntar á nadie, este habrá analizado mas, y la idéa que tiene de la casa la llamarémos *clara*; y otro que no solamente se entrase en la casa, sino que estando léjos de ella era capaz de dar las señas á otro, para que sin preguntar á nadie se dirija á dicha casa, este ya habrá analizado mas, y la idéa que tenga de la casa la podrémos llamar *distinta* ó *exacta*. De manera que siempre que nosotros seamos capaces de dar á conocer á otros aquello mismo que sabemos, entónces habrémos analizado lo suficiente, y esto es lo que debemos procurar en todas las idéas que adquiramos.

Si despues de haber examinado dos relojes, por ejemplo, prestamos nuestra atencion á un mismo tiempo á ambos, en este momento se dice que los *comparamos*; de manera que comparacion *es una operacion del alma, por medio de la cual prestamos nuestra atencion á un mismo tiempo á dos objetos.* De esta comparacion resultará que el uno será mayor, mejor, etc. que el otro; y este grado de mayoría, mejoría, etc. que el uno lleva al otro, se llama *relacion*; de manera que relacion *no es mas que el resultado de la comparacion de dos objetos.* La facultad por medio de la cual podemos comparar una cosa con otra se llama *razon.*

Cuando al comparar dos idéas hallamos que la una conviene ó no conviene á la otra, é interiormente nos convencemos de ello, la operacion por que lo hacemos se llama *juicio*; de manera que juicio *es una operacion del alma, por medio de la cual afirmamos ó negamos una cosa de otra.* Así, cuando al comparar la idéa que tenemos de la nieve con la de la blancura, advertimos que la blancura conviene á la nieve, é interiormente nos convencemos de que *la nieve es blanca,* entónces formamos lo que se llama *juicio.*

Si este juicio le espresamos por palabras se llama *proposicion;* de manera que proposicion *no es mas que un juicio espresado por palabras.* Así, cuando yo á otro le diga *la nieve es blanca,* esta es una proposicion. La proposicion consta de tres partes: de *sugeto, cópula* y *predicado* (*); en la anterior, la *nieve* es el sugeto, *es* la cópula, y *blanca* el predicado, que es lo que se afirma ó niega en el sugeto.

Cuando por la comparacion de dos idéas no podemos averiguar si convienen ó no, y necesitamos para esto compararlas con otra ú otras, entónces usamos del *raciocinio;* y cuando, para hacer comprender á otro este raciocinio le espresamos con proposiciones, se llama *razonamiento:* este razonamiento recibe el nombre de *demostracion* de la proposicion, en que se enuncia si convienen ó no dichas idéas. Á la tripla facultad de adquirir idéas, compararlas y raciocinar sobre ellas, se le llama *entendimiento;* y á la facultad por medio de la cual nos representamos todas las cosas bajo imágenes corporeas, de donde resulta que muchas veces combinamos idéas que reunidas no pueden existir, se llama *imaginacion:* por esta facultad es por la que podemos suponer que existió el *centauro*, que suponian los gentiles era mitad hombre y mitad caballo, y todos los otros objetos de la fábula.

Cuando se reconoce una verdad en varios casos particulares, y de aquí se pasa á generalizarla para todos los de la misma especie, se dice que se infiere por *induccion ó analogía.*

Las proposiciones pueden ser *evidentes, ciertas* y *probables.* Evidentes son aquellas en que solo por la consideracion de las idéas que entran en ellas, se conoce su verdad, esto es, que la una idéa está comprendida ó no lo está en la otra; á estas proposiciones se les da el nombre de *axiomas;* de manera que axioma *es una proposicion que no necesita de demostracion para convencer de que es verdadera,* como por ejemplo, *el todo es mayor que cada una de sus partes; cosas que son iguales á una tercera son iguales entre sí.* Nadie dudará de la verdad de estas proposiciones si tiene las idéas que comprenden; pero sino las tiene no advertirá su verdad, y me ha sucedido el que mis discípulos digan que no la perciben, por lo que yo he sido siempre de la opinion de Leibnitz, que queria que *hasta los axiomas se demostrasen;* esto es, que se esplicasen, paraque adquiridas las idéas que contienen, se vea que la una está contenida en la otra; por eso nosotros solo tomarémos por verdadero axioma este: *una cosa es igual á ella misma,* que está á los alcances de todos, y de él deducirémos los demas de que debemos hacer uso en lo sucesivo.

(*) *Se llama en general* sugeto *la cosa de que se habla ó trata en la proposicion;* predicado *la cosa que se afirma ó niega en el sugeto;* y cópula *el verbo que une ó separa el predicado con el sugeto.*

Esta proposicion y todas aquellas en que el sugeto es el mismo que el predicado se llaman *idénticas;* de manera que solo son evidentes para todo el mundo las proposiciones idénticas; y paraque haya evidencia en un razonamiento es indispensable el proceder de proposicion idéntica en proposicion idéntica.

De que una cosa sea igual con ella misma, resulta que en vez de la misma cosa podrémos tomar lo que equivalga á ella: ahora, cuando esta cosa se compone de otras, resulta que es igual al conjunto de las que la componen; pero las cosas componentes toman en este caso el nombre de *partes*, y la cosa compuesta el de *todo*, y por lo mismo tenemos este

2.° Axioma. *El todo es igual al conjunto de sus partes.*

Si es lo mismo *todo* que *conjunto de partes,* se deduce este

3.er Axioma. *Lo que hagamos con el todo quedará hecho con el conjunto de sus partes, y lo que hagamos con el conjunto de sus partes quedará hecho con el todo.*

Esta proposicion es de la mayor importancia, pues en ella estriban las mas de las demostraciones que se han de dar en lo sucesivo; porque en la práctica no pudiendo desde luego ejecutar lo que deseamos con el todo, lo ejecutamos con cada una de sus partes, y por medio de esta observacion nos convencemos de que lo que hemos practicado con cada una de las partes que componen el todo, queda ejecutado con el mismo todo.

Si del conjunto de estas partes quitamos una, dos, tres, cuatro, etc., lo que queda ya no equivaldrá al mismo todo, y por lo mismo *el todo será mayor que lo que ha quedado;*

pero en este caso podemos considerar al todo como compuesto de dos partes, una el conjunto que se le ha quitado, y la otra las que quedan; y por lo mismo tendrémos el

4.º Axioma. *El todo es mayor que cualquiera de sus partes.* El cual se puede enunciar al contrario diciendo que *La parte es menor que el todo.*

Tambien tenemos que si una cosa A es igual ó es la misma que otra cosa B, y sabemos que esta cosa B es igual ó equivale á otra cosa C, resulta que como en vez de una cosa podemos poner cualquiera otra que le equivalga, en vez de la cosa B de la primera proposicion, podrémos poner la cosa C que le es igual ó equivalente por la proposicion segunda, y tendrémos que la cosa A es igual ó equivalente tambien á la cosa C; de donde resulta este

5.º Axioma. *Cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.* Que nos quiere decir que siempre que haya dos ó mas cosas, tales como A y C, que sean iguales con otra B, inferimos inmediatamente que A es igual con C. Así es que como sabemos que un duro es lo mismo que dos medios duros, y que el mismo duro equivale tambien á cinco pesetas ordinarias, tenemos aquí dos cosas, á saber, *dos medios duros* y *cinco pesetas*, que son iguales con otra tercera cosa que se llama *peso duro*, y por lo mismo inferimos que *dos medios duros equivalen á cinco pesetas*; los lógicos anuncian este axioma de este modo: *cosas que convienen ó se identifican con una tercera, convienen ó se identifican entre sí.*

En este axioma consiste la fuerza del raciocinio; porque si tenemos dos idéas, como aquí la de dos *medios duros* y *cinco pesetas*, y queremos averiguar si estas dos idéas convienen ó no, como no vémos desde luego esta conveniencia ó disconveniencia, necesitamos elegir una idéa ó cosa media para ver si ambas convienen con ella ó no; en la eleccion de esta idéa media consiste la mayor ó menor felicidad de los ingenios para percibir desde luego el espíritu de la demostracion; y por eso les dirémos que la eleccion de la idéa media no suele ser arbitraria, pues solo se debe buscar una que sea idéntica con una de las que se comparan; y así, para hallar si convienen ó no estas dos idéas, hemos escogido por idéa ó por cosa media el peso duro, cuyo valor es idéntico con *dos medios duros*, y como el peso duro equivale á *cinco pesetas* tambien, inferimos inmediatamente que lo mismo es dos medios duros que cinco pesetas. Tambien se deduce este

6.º Axioma. *Si dos cosas son iguales y se hacen con ellas operaciones iguales, los resultados que se obtengan serán iguales.* Porque esto en realidad no es mas que hacer una misma cosa dos veces.

Proposiciones *ciertas* son aquellas que para convencernos de su verdad necesitamos compararlas con las evidentes ó axiomas, y hacer ver que están comprendidas en ellas. Á estas proposiciones las llamarémos nosotros *teoremas*; y al razonamiento por el cual se hace ver que dicha proposicion va conforme con las evidentes ó axiomas, le caracterizarémos con el nombre de *demostracion.* De manera que teorema *es una proposicion que necesita de demostracion para convencer de que es verdadera;* y demostracion del teorema *es aquel razonamiento seguido, en que se hace ver que la proposicion enunciada, ó la asercion que se hizo, de tal modo concuerda con los principios mas ciertos y evidentes, que no deja duda de su verdad.*

Seria mui importante el que se tuviesen reglas generales para demostrar, sobre lo cual no se ha hecho nada (*); pero con todo eso observarémos que para eso no hai mas que fundarse en el conjunto de idéas que entran en el sugeto de la proposicion; ver cual es la que mas relacion tiene con el predicado, y despues ver esta de que otras idéas se compone, y elegir la que mas relacion tenga con el predicado de la proposicion, y continuar del mismo modo hasta que se llegue á una idéa en que entre como componente la que formaba el predicado del teorema; y por lo mismo habiendo ido caminando por una sucesion de identidades, se infiere que la última conviene con la primera. Siguiendo estas reglas, y cotejándolas con las demostraciones que darémos en adelante, se llegará á adquirir de tal modo el giro de las demostraciones, que enunciando un teorema, se hallará uno en disposicion de dar la demostracion.

Esta demostracion de que acabamos de hablar se llama

(*) *Mr. Suzanne ha dado algunas idéas sobre este importante asunto en su obra sobre el modo de estudiar las Matemáticas, publicada despues de esta.*

directa ó *á priori*; porque fundándose en las idéas que entran en ella y en los principios establecidos ántes, se hace ver la verdad de que se trata; hai tambien otro género de demostracion que se llama *indirecta*, que solo hace patente la verdad, ó por medio de verificaciones, ó haciendo ver que de admitirse lo contrario se sigue un absurdo ó una cosa que se opone al comun sentir de los hombres; en el primer caso la demostracion se suele llamar *á posteriori*, y en el otro demostracion *ad absurdum*. Las primeras proposiciones no hai otro modo de demostrarlas que el *ad absurdum*. Cuando se empléa, se usa generalmente del método de *exhaucion*, que consiste en averiguar de cuantas maneras diferentes pueden tener relacion aquellas idéas, y demostrando que es un absurdo el suponer que se verifique en particular cada una hasta que quede una sola, se sigue que de este modo solo será verdadera.

Se conoce que hai absurdo cuando se cae en una contradiccion, y de aquí nace el que se haya elegido por *criterio* de la verdad el principio de contradiccion, cuando no se puede percibir la identidad de las dos idéas: este principio de contradiccion es que *una cosa no puede ser y no ser á un mismo tiempo*.

Proposiciones *probables* son aquellas que pueden ser verdaderas en unas ocasiones, y falsas en otras; de estas no tratarémos nosotros, sin embargo de que lo que espongamos servirá de medio para averiguar su misma probabilidad.

Segun las diferentes cosas que se enuncian en una proposicion, recibe esta diferentes nombres, como son: *definicion*, *problema*, *corolario*, *postulado*, *escolio* y *tema*.

Definicion *es una proposicion en que se da una idéa clara y distinta de la cosa que se quiere dar á entender*; como por ejemplo, todas las que hemos dado de la *atencion*, *análisis*, *abstraccion*, etc. Paraque una definicion sea buena se deben observar varias reglas; pero las principales son: el que la palabra que se define no entre en la definicion: que la definicion sea mas clara que el definido; y que sea lo mas corta posible. El mayor vicio que cometen los principiantes es el de introducir el definido en la definicion, y por lo mismo lo advertimos desde ahora paraque lo eviten.

En la definicion no se viene á hacer otra cosa que enunciar el conjunto de idéas que se comprenden bajo aquella palabra ó cosa que se define; de donde se infiere que una palabra que espresa una idéa simple no se puede definir; así es que no se puede definir la *blancura*, sino lo mas decir que *es el color que tiene la nieve cuando cae, ó indicar otro objeto en que se halle.*

Cuando con el objeto de probar una proposicion, se enuncia en otros términos la conclusion que se ha de deducir, y se toma por definicion, se dice que se comete una *peticion de principio*, ó *un círculo vicioso*: lo que siempre se debe evitar, por ser el orígen principal de que se perpetuen los errores. (*)

Problema *es una proposicion en que se enuncia que por medio de ciertas cosas conocidas, debemos averiguar alguna otra desconocida*. Todas las proposiciones que son problemas llevan el distintivo de empezar por el infinitivo del verbo si se enuncian en general, y por el imperativo si se enuncian paraque otro halle lo que se pide. El problema consta de dos partes, de *resolucion* y *demostracion*; en la resolucion se dan las reglas que se deben practicar para hallar lo que se pretende; y en la demostracion se hace ver que practicando aquellas reglas, llegarémos á tener lo que se pedia. (**)

(*) *Aristóteles cometió un círculo vicioso al deducir que la tierra era el centro del universo; pues discurria de este modo: Todos los cuerpos se dirigen al centro del universo; pero la esperiencia acredita que todos ellos se encaminan hácia la tierra; luego la tierra es el centro del universo. Donde se ve que la primera proposicion supone lo mismo que se debe demostrar; pues todo lo que en esta parte hai que saber se reduce á examinar si por encaminarse los cuerpos hácia la tierra se dirigen ó no al centro del universo; y lo que en buenos términos vino á decir Aristóteles, es que el centro del universo es la tierra, porque todos los cuerpos se encaminan á ella, y esto se funda en que los cuerpos se encaminan á ella, porque se dirigen al centro del universo, esto es á la tierra.*

(**) *Los antiguos usaban mucho de la palabra* porisma *para espresar una clase de proposiciones de que se hace uso en las Matemáticas. Mr.* Wronski *despues de citar todas las definiciones que se han dado de dicha palabra, dice: «parece pues cierto que en el estado en que se hallan los documentos históricos relativos á la palabra porisma, no se podria determinar su significacion á* posteriori, *y que así no hai*

Corolario ó consecuencia *es una proposicion que se infiere de otra que se acaba de demostrar.*

Postulado *es un axioma enunciado en particular*, y por lo mismo todos conocen su verdad; por ejemplo: es un axioma, como hemos dicho ántes, que *en vez de una cosa cualquiera se puede sustituir ó tomar cualquiera otra que sea igual con ella;* pero cuando decimos: *en vez de un peso duro podemos tomar cinco pesetas ó veinte reales*, es un postulado, y no viene á ser mas que el axioma anterior contraido aquí al peso duro.

Escolio *es una proposicion en que se esplica ó advierte alguna cosa.*

Finalmente lema *es una proposicion que perteneciendo á otro asunto diferente de aquel de que se trata, se enuncia con el objeto de que sirva de ilustracion ó principio de lo mismo que se va á tratar.*

Hai proposiciones cuyo sugeto y predicado son tambien proposiciones, siendo una de ellas precedida de alguna de las partículas condicionales *si, cuando, con tal que*, etc., por cuya razon esta especie de proposiciones se llaman *proposiciones condicionales.* En ellas lo que se asegura como cierto ó como falso se llama *tésis*, y las suposiciones que se han de verificar paraque resulte lo que se pretende, ó la parte que va precedida de la partícula condicional, se llama *hipótesis.* Se debe advertir, que, hablando con todo rigor, no se asegura la tésis, ni que se verifique la hipótesis, sino la mutua dependencia que tienen entre sí. V. g. *Si suelto un libro se cae.* Aquí la hipótesis es *si suelto un libro*, y la tésis es *se cae;* donde se ve que ni afirmo que soltaré el libro, ni que se caerá, sino la consecuencia necesaria de su caida, si se ha verificado ántes el soltarle.

Cuando una proposicion es mui general exige muchas veces la claridad el que se enumeren los diferentes casos que comprende; y esta enumeracion se llama *division* de la proposicion enunciada. Las principales reglas que se deben tener presentes para que una division no sea viciosa, son: 1.ª que el conjunto de todas las partes que resulten de la division, equivalga al todo ó proposicion primitiva; 2.ª que no se haga la division en partes demasiado grandes ni demasiado pequeñas; y 3.ª que una parte no esté incluida en otra.

Ahora, si se reunen entre sí con cierta dependencia todas las proposiciones evidentes y ciertas que corresponden á un mismo asunto, este conjunto forma la *ciencia* de aquel asunto. Para llegar á conocer el orígen de la que va á formar por ahora el objeto de nuestras investigaciones, observarémos que al conjunto de todos los cuerpos que podemos concebir que hai, se le da el nombre de *naturaleza;* que como estos cuerpos se han de hallar en alguna parte, el parage comun donde se hallan todos los cuerpos que forman la naturaleza, se llama *espacio*; y que á este espacio junto con los cuerpos que en él están colocados, se le da el nombre de *firmamento* ó de *universo.* Interesa mucho el percibir la idéa del espacio, y por tanto observarémos que vemos todos los objetos terrestres, vemos la luna, el sol, las estrellas, etc.; pues el parage donde se hallan estos cuerpos, todo lo que se ve bajo el color azulado que se llama *cielo*, y lo que nosotros concebimos que hai debajo de la tierra donde nos hallamos, es lo que se llama *espacio.* El espacio no podemos concebir que tenga fin; esto es, que se acabe por algun parage; pues si suponemos esto, donde acabe él, habrá ó el espacio mismo ú otra cosa que por precision ha de ocupar una parte del espacio, luego si el espacio no tiene fin, ó nosotros no podemos concebir que le tenga, podrémos decir que es *infinito*, palabra con que denotamos que una cosa no tiene fin. (*)

mas que conjeturarla á priori. *Parece, pues, seguro (continúa) que la palabra porisma se aplicaba como la de* problema *á proposiciones que contenian el concepto de algun fin que alcanzar ó de algun objeto que obtener.... son problemas aquellas proposiciones cuyo objeto solo es posible, y porismas aquellas cuyos objetos son necesarios. Por ejemplo,* hacer pasar una circunferencia de círculo por tres puntos dados *es un problema, considerando esta proposicion ántes que se haya demostrado, que su objeto es posible, mientras que* determinar el centro de una circunferencia de círculo *es un porisma. Despues pone por nota que Mr. Eisenman profesor en la escuela de puentes y calzadas de Francia cree haber descubierto el verdadero carácter de los porismas.* ....

(*) *Pascal decia que* el espacio era una esfera infinita, cuyo centro se hallaba en todas partes y la circunferencia en ninguna. *Aunque esta definicion no se puede entender por ahora, no obstante, cuando se sepa lo que es esfera, se advertirá que esta definicion da una idéa mui elegante del espacio indefinido ó infinito.*

Por pocas que sean las idéas que hasta ahóra hayamos adquirido, siempre serán suficientes para conocer que hai una gran diversidad de cuerpos en la naturaleza, y que un hombre no podrá adquirir de ningun modo un conocimiento exacto de todos ellos. Por esta causa, de la ciencia de la naturaleza es necesario hacer ciertas divisiones, paraque unos se dediquen á una parte y otros á otra; y de este modo se puede tener entre muchos hombres el conocimiento mas exacto de ella que sea posible.

En primer lugar, á la parte de esta ciencia que se limita á describir las producciones de nuestro globo, para dividirlas, darles nombres y clasificarlas, pero sin mezclar las operaciones del arte con las de la naturaleza, se le da el nombre de *Historia Natural*. El primer resultado de esta ciencia es el dividir en tres grandes grupos ó porciones todos los cuerpos; porque entre ellos hai algunos que sin ninguna causa estraña se mueven hácia donde quieren, cuya circunstancia se llama tener *movimiento espontaneo*; y todos los cuerpos que le tienen se denominan con el nombre de *animales*. Hai otros cuerpos tales como las *plantas*, las *yerbas*, los *árboles*, que nacen, á cierta época florecen, despues echan fruto y luego se secan, y por esta particularidad de nacer y volver á desaparecer á cierto tiempo, se dice que tienen *vida*; pero que carecen del movimiento espontaneo: y todos ellos los caracterizarémos con el nombre de *vegetales*. Hai finalmente otros, como las *piedras* por ejemplo, que sin tener movimiento espontaneo carecen de esta diversidad de variaciones de los vegetales, y que siempre los vemos de un mismo modo; que no tienen tampoco la facultad de reproducirse como los animales y vegetales, y á estos se les caracteriza con el nombre de *minerales*. Por esta causa se dice que la naturaleza se divide en tres reinos, el *mineral*, el *vegetal* y el *animal*. La ciencia que trata del reino mineral se llama *Mineralogía*; la que del vegetal *Botánica*, y la que del animal *Zoología*. Despues se hacen otras subdivisiones de estas ciencias, de que por ahora no tratarémos, porque su conocimiento estriba en gran parte en el de otras que tratan de lo que hai de comun en todos los cuerpos, y que vamos á dar á conocer.

Para esto, observarémos que despues de seco un individuo del reino vegetal, y muerto uno del reino animal, queda

todavía una cosa que es comun con la del reino mineral, y que todavía es un cuerpo, por cuanto hace impresion en nuestros sentidos; y en este caso á los cuerpos privados ya de vida se les denomina con el nombre de *materia* ó de *sustancia*.

Tambien se suele usar de la voz cuerpo en el sentido algo restringido de la de *materia* ó de *sustancia*; y entónces se llaman *seres* de la naturaleza á todos los cuerpos, tengan ó no vida.

Todos los cuerpos, de cualquier reino que sean, despues de prescindir de que tengan vida los que son susceptibles de ello, nos ofrecen varias cosas que son constantes y uniformes, ya sea en su modo de existir, ya en su modo de obrar; de manera que de esto resulta en nuestro espíritu una idéa clara y distinta: cada una de aquellas cosas que observamos constantemente en ellos, decimos que es una *propiedad* suya, y la ciencia que tiene por objeto las propiedades de los cuerpos se conoce con el nombre de *Física*.

Entre las propiedades de los cuerpos, tomada esta voz en el sentido de materia ó de sustancia, hai algunas que son comunes á todos ellos, como la de ocupar un espacio que se llama ser *estenso*, y el espacio ocupado *estension*; la de no poder ocupar otro cuerpo el mismo espacio que él á un mismo tiempo, que se llama *impenetrabilidad*; la de serle indiferente el moverse ó estarse quieto, que se llama *inercia*, de donde resulta la de poderse mover que se llama *movilidad*, y la de poderse estar quieto que se llama *quiescibilidad*; y la de caerse sobre la tierra, luego que se levanta y se le abandona á sí mismo, que se llama *gravedad*.

Todas estas gozan de la propiedad de convenir no solo á todos los cuerpos, sino á la mas mínima de sus partes que se llaman *moléculas*. Hai otras que son particulares á cada cuerpo, como el tener tal color, tal sabor, el ser duros, blandos, ó que aunque convengan á todos los cuerpos en general, no convienen á sus moléculas, como el ser porosos, elásticos, etc. Por esta causa se divide la Física en *Física general* y *Física particular*; la primera trata de las propiedades generales de los cuerpos, y la segunda de las particulares.

En la Física particular se pueden considerar tantos ramos, como afecciones ó propiedades variables hai en los cuerpos: así es que se llama *Magnetología* á la ciencia que trata de las propiedades del iman; *Afinitología* á la que trata de las afinidades, ó de aquellas propiedades de los cuerpos, en virtud de las cuales sus moléculas se dirigen las unas á unirse con las otras; la *Pirología* trata de las propiedades de los cuerpos con relacion al calórico; la *Óptica* con relacion á la luz, y la *Electrología* con relacion al flúido eléctrico.

Todo cuerpo se puede hallar en tres estados diferentes: en su estado de *solidez*, que es cuando sus moléculas tienen sus partes tanta aderencia que con dificultad se separan, y agarrados por una parte se vienen con ella las demas; en su estado de *liquidez*, que es cuando despues de adquirido cierto grado de calor, tienen tan poca aderencia que se separan las unas de las otras sino se las contiene en vasijas; y finalmente, adquiriendo mayor grado de calor llegan á tener aun menor grado de adesion, de tal manera que si las vasijas donde están no se hallan tapadas ó comprimidas por otros cuerpos, se escapan; en esta forma son invisibles por lo regular, y se dice que están en estado *gaseoso* ó de *gases*, ó de *flúidos aeriformes*.

Cuando los cuerpos sólidos aparecen constantemente bajo ciertas formas particulares, se dice que están cristalizados, y la ciencia que trata de estos cristales se llama *Cristalografía*.

Cuando se hallan en el estado de líquidos, segun la mayor ó menor propiedad que tengan de unirse á ciertos tubos mui estrechos que se llaman *capilares*, resulta la ciencia que se puede llamar *Capilarología* ó *teoría de los tubos capilares*.

En este mismo estado se pueden introducir por los poros de otros cuerpos y mojarlos, lo que da orígen á la *Higrometría*, que enseña á conocer los grados de sequedad y de humedad de los cuerpos, y particularmente de la gran masa de aire que rodéa la tierra y que se llama *atmósfera*.

Finalmente, cuando se hallan en el estado de gases, el tratar de su teoría forma la *Gasología*.

Se da el nombre de *fenómeno* á cualquier hecho que nos presenta la naturaleza: y á todos los que se advierten en la atmósfera como los relámpagos, la lluvia, el granizo, la nieve, etc. se les llama *metéoros*, y la ciencia que trata de estos se llama *Meteorología*. Cuando se consideran en movimiento las partes de la atmósfera, resulta que ó se mueven en gran masa, ó solo son vibraciones de las moléculas de este flúido: en el primer caso dan orígen á la ciencia que llama *Anemología*, ó que trata de la teoría de los vientos; y en el segundo dan orígen al sonido, y la ciencia que trata de este se llama *Acústica*. Cuando se considera la atmósfera en estado de quietud ó de equilibrio, se origina la ciencia que se llama *Neumatología*, ó ciencia que trata de los fenómenos que tienen por causa el peso del aire, su compresibilidad y elasticidad.

En estos últimos tiempos se ha considerado ademas de la Física general y particular, la *Física analítica* ó la *Química*, que es *la ciencia que enseña á conocer la naturaleza de los cuerpos, los resultados de sus combinaciones, los diversos principios que entran en su composicion*, y en una palabra, *la accion que ejercen recíprocamente los unos sobre los otros*.

Para poder examinar bien todas estas propiedades, es necesario ante todas cosas conocer otra que no solo es comun á todos los cuerpos, sino que es tambien comun á nuestras mismas sensaciones é idéas. Esta es la de poder ser *mayor* ó *menor*, y á esta propiedad la caracterizamos con el nombre de *cantidad*; de manera que entendemos por cantidad *todo aquello que puede ser mayor ó menor, ó todo lo que es susceptible de aumento ó de diminucion*. Pues que la cantidad no depende de ninguna otra propiedad de los cuerpos, es sumamente adecuada para formar el objeto de una ciencia abstracta que se conoce con el nombre de *Matemáticas*; de manera que Matemáticas *son las ciencias que tratan de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad;* y siendo esta susceptible solo de aumento ó de diminucion, se sigue que *las Matemáticas solo podrán dar medios para espresar, componer y descomponer las cantidades*; y cuando se ejecuta alguna de estas operaciones se dice que se *calcula*. Como la idéa de la cantidad entra como parte en la composicion de todas las demas idéas, resulta que las verdades de las Matemáticas es indispensable que formen parte de todos los ramos de nuestros conocimientos, y sean en ellos de la mayor importancia. Por cuyo motivo no se puede dar un paso sin tropiezo en ninguna facultad, sino se tienen algunos conocimientos de esta ciencia.

De las Matemáticas se hace una division en *puras* y *mistas*; se llaman Matemáticas puras á las que *tratan de la cantidad con la mayor abstraccion*, esto es, solo en cuanto es susceptible de aumento ó de diminucion; y mistas *cuando se considera la cantidad en alguna de las propiedades de los cuerpos.*

La cantidad considerada con toda generalidad puede ser de dos modos, *discreta* ó *continua*: se llama discreta cuando sus partes no tienen entre sí ninguna trabazon ni enlace, y continua cuando se verifica lo contrario. Por ejemplo: un monton de pesos duros que hai sobre una mesa es una cantidad de pesos duros, porque dicho monton puede sufrir aumento poniendo mas duros, y puede sufrir diminucion quitando; ademas es una cantidad discreta, porque un peso duro no tiene ninguna trabazon con otro. Pero las partes de plata que componen el mismo peso duro están unidas entre sí, y como estas partes pudieran ser mas ó ménos, forman una cantidad que es continua. Por esta causa se puede decir que las Matemáticas puras no contienen sino dos tratados, á saber, el que tiene por objeto la cantidad continua que se llama *Geometría*, y el que tiene por objeto la discreta que se puede llamar *Aritmética universal*, y se divide en *Aritmética propiamente dicha, que trata de la cantidad en cuanto está representada por números, y en Álgebra que trata de la cantidad en general.*

Tambien se puede considerar que corresponde á las Matemáticas puras la ciencia que trata del movimiento y se llama *Dinámica*, si se prescinde de la causa que le origina; porque hai cierta analogía entre la estension y el movimiento; pero hasta ahora se ha considerado este tratado como propio de las mistas.

Los tratados de las Matemáticas mistas (que tambien se llaman tratados *Físico-matemáticos*, porque consideran la cantidad en las propiedades de los cuerpos que ha dado á conocer ya la Física) son tantos como propiedades hai en los cuerpos.

Aplicados todos los medios de cálculo á las propiedades de la Física general, resulta la ciencia que se llama *Mecánica*; pero como entre los cuerpos hai unos cuyas partes tienen tanto enlace las unas con las otras, que agarrándolos por una parte, esta trae consigo las demas, y cuerpos en que esto no se verifica; se da á los primeros el nombre de cuerpos *sólidos*, y á los segundos el de *flúidos*, y la Mecánica se divide en dos

partes: *Mecánica de los sólidos*, y *Mecánica de los flúidos*, entendiendo aun por flúidos no solo los que propiamente lo son, sino tambien los líquidos, pues para ambos es una misma la teoría. Cada una de estas se subdivide en otras dos: la primera en *Estática* que trata del equilibrio de los sólidos, y en *Dinámica* que considera su movimiento; la segunda en *Hidrostática* que trata del equilibrio de los flúidos, y en *Hidrodinámica* que trata de su movimiento, á la que se suele llamar tambien *Hidráulica*.

La gravedad que observamos á primera vista en los cuerpos terrestres, se verifica tambien en todos los del universo, de manera que los unos se dirigen hácia los otros; y á esta propiedad de que la gravedad no es sino un caso particular, se le da el nombre de *atraccion* ó *gravitacion*, y la aplicacion del cálculo para la investigacion de sus leyes constituye la ciencia que se conoce con el nombre de *Astronomía Física*.

Aplicado el cálculo á cada uno de los ramos de la Física particular, se originan otros tantos tratados Físico-matemáticos: y observarémos que mientras mas conocimientos de cálculo apliquemos, mas progresos harémos en dichos tratados; y se debe decir con bastante certeza que jamas se han hecho progresos en ellos, tratados puramente como Físicos, sino como Físico-matemáticos.

Han sido tantos los adelantamientos que las Matemáticas han hecho en la ciencia de la naturaleza, que matemáticamente se han llegado á descubrir los principios que entran en la composicion de los cuerpos. Neuton dijo que en la composicion del agua y del diamante entraba un cuerpo combustible: y en estos últimos tiempos lo primero que demostró Lavoisier, haciendo que la Química fuese una verdadera ciencia, fué esta verdad en el agua, y nuestro Feijó habiendo sido el primero que empezó á llamar la atencion de los sabios acerca del diamante, hizo que los Químicos le reputasen como carbon en un estado de pureza. Mas aplicando el cálculo aun á la teoría de la naturaleza, Biot y Aragó han dado á conocer que los Químicos se han equivocado en esto, y que debe entrar como principio en su composicion el agua.

Cuando los Químicos franceses analizáron el aire, encontráron que en cien partes de él, se contenian 27 de un gas que se llama *oxígeno* y 73 de otro que se llama *azóe*; y un amigo mio (*) aplicando el cálculo á lo mismo que ellos decian, dedujo que debia haber ménos de 24 partes de oxígeno; posteriormente otro sabio español (**) hizo análisis del aire, y encontró que solo se hallaban 21 á 22 partes de oxígeno, lo que despues comprobáron los franceses aunque sin decir á quien se debia esto.

Otros muchísimos hechos pudiera citar para dar á conocer la influencia que tienen las Matemáticas en las demas ciencias, ademas de la recomendacion que adquiriéron desde el tiempo de *Platon que no permitia que nadie entrase en su escuela sino estaba iniciado en ellas*; mas porque no se crea que hai alguna parcialidad mia por ser la ciencia á que mas me he dedicado, los omitiré, contentándome con los que dejo espuestos, que tienen todo el grado posible de fuerza, por cuanto lo confiesan los mismos que tenian un interes para decir lo contrario, si se dejasen llevar de lo que acostumbran hacer los que solo tienen conocimientos vulgares. (***)

Aun hai todavía una idéa mas abstracta que la de cantidad, y esta es la de *existencia*; pues paraque haya mayoría ó menoría es necesario que se tenga alguna cosa que sea mayor ó menor; y por consiguiente debe haber otra ciencia aun mas general que las Matemáticas, y que trate de manifestar la existencia de nosotros mismos, de los cuerpos que nos rodéan, y de los medios por los cuales nos cercioramos de ella, recurriendo para esto al exámen y naturaleza de nuestras operaciones y facultades intelectuales y morales. Á esta ciencia la llamáron los antiguos *Metafísica*, y la embrolláron en gran manera; porque los griegos, privados de observaciones anteriores que les fuesen conocidas, careciendo de medios fáciles de comunicacion con las otras partes del globo, y dotados de un carácter tan vivo como enérgico, cediéron á su impaciencia natural, y para abreviar procuráron mas bien el adivinar la naturaleza que el examinarla. *Bacon*, conociendo la importancia de esta ciencia, y viéndola tan desfigurada por los sueños ó pretensiones exageradas de los antiguos filósofos, por las locas disputas de las sectas, por los numerosos absurdos de los escolásticos, y por el perjudicial artificio de abusar de las palabras, trató de refundirla en la parte de su *instauratio magna ó gran renovacion*, á que él llama *Filosofía primera*. *Descártes*, poco tiempo despues de Bacon, escribió tambien absolutamente las mismas cosas que él con ménos aparato y ostentacion, ciñéndose á describir lo que habia pasado en su cabeza, y á dar cuenta de la marcha que habia seguido. Aunque estos dos genios sublimes no consiguiéron del todo lo que intentaban, hicieron mucho en desacreditar lo que ya existia, y segun dice un escritor de nota: *si no nos pagáron en buena moneda, hicieron bastante en manifestar que toda la que corria era falsa*. *Locke*, en su admirable *Ensayo del entendimiento humano*, es el primero que ha profundizado en esta ciencia; sin embargo dejó muchas cosas que desear. *Condillac* lo conoció, y trató de remediarlo como en efecto lo consiguió en gran parte, en su primera obra *sobre el origen de los conocimientos humanos*: y finalmente con los trabajos de *Bonnet*, *Cavanis*, *Lancelin*, *Maine-Viran*, y *Destutt-Tracy* que ha querido mudarle el nombre en *Ideologia*, ha llegado la Metafísica á un grado de perfeccion mayor de lo que se podia esperar.

Como la Metafísica tiene una influencia considerable en todas las demas ciencias, no puedo ménos de recomendar su estudio aun para los que estudian las Matemáticas, pues esta ciencia es la hija primera de la Metafísica; y aunque es rival de la misma Metafísica, porque se halla en un grado de perfeccion mucho mayor que ella, y su doctrina es tan exacta que sirve de guia al que la estudia, no obstante yo creo que es mucho mejor ponerse uno en estado de conducir la

---

(*) *D. Juan de Peñalver.*

(**) *D. Antonio Martí.*

(***) *Hé aquí sin embargo como se espresa nuestro sabio y elocuente Vargas en su escelente elogio hecho á nuestro rei D. Alfonso el Sabio, y premiado por la Academia Española en Junta de 15 de Octubre de 1782, en la página 116 de la coleccion de premios de dicha Academia.*

«Aquella ciencia (las Matemáticas) á quien todas las naturales »se subalternan, que forma el entendimiento, que enseña á discurrir, »á buscar la verdad y analizarla, á sacar consecuencias legítimas y »demostrarlas; aquella ciencia, delicias del hombre, bienhechora de »la sociedad, fecunda en descubrimientos no en voces, llena de rea»lidades no de precisiones; la que en dos siglos ha dado á la socie»dad mas frutos que en dos mil años el abultado escuadron de nues»tros quiméricos discursos, &c.»

ciencia, que no dejarse uno conducir siempre por ella.

No se sabria recomendar bastante el estudio de la verdadera Metafísica; pero no puedo ménos de advertir que su objeto es tan delicado, que sino está tratado por hombres verdaderamente sabios, se puede caer con mucha facilidad en el inconveniente de ocuparse de cuestiones inútiles, y que hagan mas bien dudar de lo que se trata de probar que de convencerse de ello.

Á la Metafísica le corresponde manifestar el órden que se debe seguir en la adquisicion de los conocimientos, y así como en esta introduccion he dado á conocer la parte de Metafísica que es indispensable para la inteligencia de las Matemáticas (*) diré algo acerca de esto, porque tal vez es el punto que *mas han tratado los autores, y que ménos han entendido.* (**)

Por lo cual observarémos que al órden que se sigue en la adquisicion de los conocimientos de una ciencia particular, ó de las diversas ciencias á que nos podemos aplicar, se llama *método.*

(*) *La necesidad que hai de dar ántes de las Matemáticas algunas idéas de Metafísica, la manifiesta Mr. Wronski en el siguiente pasage:* Un tribunal legislador (*dice*) establecido por la Filosofía trascendental, decidiria que las Matemáticas se parecen á un hermoso edificio que estuviese casi acabado y que no tuviese aun cimientos... Estos cimientos son los que nos hemos esforzado á hacer resbalar debajo del edificio de las Matemáticas; *que es cabalmente lo que yo me propuse hacer en esta introduccion ántes de ver las obras de Wronski.*

(**) *En comprobacion de esta proposicion que yo he sido el primero que me he atrevido á enunciar, citaré aquí lo que dice Mr. Develey en el prólogo de la segunda edicion de su Geometría, impresa en Paris año de* 1816. «*No diré si he seguido en esta obra la síntesis ó la análisis, porque aun no se piensa con uniformidad sobre el carácter distintivo de estos dos métodos, considerados bajo el punto de vista lógico; de modo que las disputas á que dan lugar, relativamente á la preferencia que el uno merece sobre el otro, no son propiamente sino disputas de palabra. Se hallará sin duda que yo tengo razon, si se compara lo que han dicho los diferentes autores que han escrito sobre este punto. Solo citaré un ejemplo: Mr. Lacroix en su ensayo sobre la enseñanza, intenta probar que el tratado de las sensaciones de Condillac, y la lógica de este autor, son obras sintéticas; cuando se sabe que Condillac desechaba absolutamente la síntesis, y aun negaba su existencia.*»

La circunstancia indispensable que se ha de verificar en todo método, es que se proceda siempre de lo conocido á lo desconocido. Pero en unas ocasiones se nos presenta conocido el todo, y tratamos de averiguar la naturaleza y relacion de sus partes: y en otras nos son mas conocidas las partes, y por medio de ellas tratamos de averiguar las propiedades del todo que componen, por esta causa se dice que en la adquisicion de nuestros conocimientos se pueden seguir dos métodos: uno de descomposicion que se llama *analítico*, y otro de composicion que se llama *sintético*; de donde se deduce que no se pueden aplicar indistintamente ambos métodos en toda clase de conocimientos; pues esto depende de que sean mas conocidos para nosotros ó el todo ó sus partes componentes.

Sin embargo, el que en general tiene mas aplicacion es el analítico, por proceder desde los objetos ó desde las sensaciones que nos causan, hasta la deduccion de los principios generales; pero la análisis queda incompleta si despues no retrocedemos de los principios generales hasta las mismas sensaciones; de manera que paraque el método analítico fuese completo, se deberia hacer la recomposicion; pero como en este caso seria demasiado largo, se omite por lo regular una parte de él.

Si se omite la segunda parte que es la *síntesis*, como el último resultado es el principio general, de cuya combinacion con otros resulta la verdad de lo que tratamos, no queda nuestro entendimiento mui satisfecho; pues aun le queda la duda de si resultará en efecto la verdad que indagaba, de la combinacion de estos principios que él ha descubierto; si se omite la descomposicion, y se parte de estos principios combinándolos hasta llegar á la verdad de que tratábamos, por este medio queda nuestro entendimiento mui convencido; pero no hemos averiguado nosotros porque debemos usar de estos principios y no de otros. Por esta causa se ha dicho que *el método analítico es el propio para inventar*, porque él descubre los principios de que se debe hacer uso; y *el sintético para enseñar* porque por él queda nuestro entendimiento mas convencido de la verdad de lo que aprende; y lo que principalmente se necesita es que los principiantes queden bien radicados en los principios que han de ser la base de todo lo que han de hacer y saber en lo sucesivo. No obstante, combinando convenientemente estos dos métodos, se puede usar en la enseñanza de un método alternado, que sin ser largo concilie la claridad y exactitud con el método de invencion.

Por esta causa, en estos elementos he usado en general del método analítico, pero ayudado muchas veces del sintético; porque aunque lo pudiera haber hecho todo analíticamente, esto seria en algunos casos por un esfuerzo del ingenio que perjudicaria al jóven que hubiese de estudiar, por oponerse á alguna de estas cuatro circunstancias: *claridad, sencillez, facilidad en las operaciones*, y la *exactitud* que manifesté en otro lugar (*) debia tener una obra elemental como la presente. Y así, he procurado conciliar estas cuatro máximas, y he seguido en todas ocasiones el órden que va mas conforme con ellas.

Pero como el analítico es un método general, que sirve para inventar en toda clase de ciencias, importa formar de él una justa idéa, y acostumbrarse á ponerle en práctica; por esta causa, despues de hecha una comparacion exacta de ambos métodos, contrayéndolos á unos mismos ejemplos en la aplicacion del Álgebra á la Geometría, pasamos á esponer la teoría de las secciones cónicas, y la resolucion de los triángulos esféricos que siempre se han tratado sintéticamente, por un método puramente analítico; y estoi seguro que de este modo, y leyendo mi memoria citada en que con el mismo fin espongo por ambos métodos la teoría que contiene, se llegará á tener unas justas idéas sobre este punto, mucho mas tratado que entendido.

Espuesta ya la parte de Metafísica indispensable para el estudio de las Matemáticas, y hechas las observaciones convenientes sobre el método que he preferido; solo falta manifestar el que debe observar el principiante para entender estos elementos. Esto me parece mui importante, por cuanto la mayor parte de los que no adelantan en esta ciencia es por usar de mal método en su estudio.

Nada hai mas fácil que el estudio de las Matemáticas si se procede con órden; pero nada mas dificil que él si se estudia sin él; porque en este caso es de todo punto im-

(*) *Pág.* 5 *de la introduccion de mi* Memoria sobre la Curvatura de las lineas, &c.

posible sacar ningun fruto. En efecto, todas las verdades de esta ciencia se suceden las unas á las otras sin interrupcion ninguna, lo que origina que la misma dificultad hai en pasar de la primera á la segunda, que de la cuarenta á la cuarenta y una, y de la ciento á la ciento y una.

El adquirir su conocimiento no cuesta mas trabajo que el subir una escalera, cuyos escalones son todos iguales; de donde resulta que el mismo esfuerzo se necesita para subir el último que el primero. Mas, así como la altura de los escalones se debe proporcionar á la de los sugetos que los han de subir, así es que en estos elementos se ha procurado que el que aprende no encuentre violento el tránsito de una proposicion á otra; y puede estar seguro de que el mismo trabajo que le haya costado pasar de lo que se llama *sensacion* á lo que se llama *idéa*, de lo que se llama *juicio* á lo que se llama *proposicion*, le costará el pasar de una verdad cualquiera de esta ciencia á su inmediata. Y si alguna vez encuentra violento el tránsito, será por no haber entendido algunas de las que anteceden; en cuyo caso para poder continuar es preciso procure ántes de pasar adelante, el llenar los huecos que dejó; porque sino, de ningun modo se puede continuar, así como no se puede llegar al octavo escalon de una escalera sin haber pasado sucesivamente por todos los inferiores. Y así, paraque no se quede ningun hueco, deberán usar los principiantes del método siguiente.

Deberán estudiar esta obra párrafo por párrafo, procurando percibir bien las idéas que en cada uno se contienen; lo que conocerán si despues de leidos tres ó cuatro veces, sin mirar el libro ven ellos que el órden con que se suceden las idéas en su entendimiento es el mismo que el que tienen en el libro; pero de ningun modo se ha de creer que esto lo tienen conseguido aprendiendo de memoria las palabras, sino lo que se ha de procurar es conservar en la memoria la sucesion de las idéas; y cuando se necesite espresarlas, cada uno usará de las palabras que juzgue mas convenientes y adecuadas.

Ahora, en los párrafos en que estén contenidas las reglas para ejecutar alguna operacion, no le hace que despues de entendidas dichas reglas se encomienden á la memoria, por lo cual se presentan con letra bastardilla; despues deben leer bien los ejemplos en que dichas reglas están contraidas, ejecutando en un papel ó pizarra todas las operaciones que se van espresando; despues, sin mirar al libro han de procurar aplicar por sí dichas reglas generales, que ya han aprendido, á los mismos ejemplos en que están contraidas, para comparar despues su operacion con la que tienen en el libro, y corregir las equivocaciones que hayan padecido; y esto lo deben ejecutar tantas veces como se necesite, paraque hallen por sí mismos el resultado de la operacion del libro; luego, deben contraer las reglas á los demas ejemplos, y comparar su resultado con el que encuentren en el libro: y en caso de no encontrar el mismo, deben comparar su operacion con la del libro para advertir donde está la equivocacion, enmendarla y volverla á ejecutar las veces que se necesite, hasta que lleguen á sacar el mismo resultado. Y despues de conseguido, pueden estar seguros de que saben aquella operacion tan bien como cualquiera otro.

Esta prerogativa que tienen las Matemáticas, no la tiene ninguna otra ciencia; pues en ninguna de ellas se puede lisongear el discípulo de saber lo que ha estudiado con tanta exactitud como el profesor que le ha dirigido. Esto anima mucho al discípulo, y por lo mismo ha de poner todo su conato en percibir el espíritu de la ciencia, procurando que cuanto ántes se corra el velo que tiene el entendimiento de todo principiante; pues en este caso ya no les costará ningun trabajo el continuar.

ADVERTENCIA.

Cuando se encuentre un número dentro de un paréntesis, da á entender que la operacion que se necesita practicar para hallar el resultado que se busca, está esplicada en el párrafo que tiene dicho número. Lo cual sirve paraque si á alguno se le ha olvidado como se practica alguna operacion auxiliar de aquella en que se halla, sepa adonde debe recurrir para volverla á aprender. Cuando sea necesario poner alguna cita en medio de un cálculo se pondrá ademas § dentro del paréntesis para mayor claridad.

TRATADO ELEMENTAL

DE ARITMÉTICA.

Nociones preliminares, numeracion, division y subdivision de las unidades de pesos y medidas.

1 La palabra *Aritmética* se deriva de la palabra griega *aritmos* que significa *número*; y por esto hemos dicho en la introduccion que por Aritmética se entiende *la ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad en cuanto está espresada por números.*

2 La idéa de número se presenta á nuestro entendimiento desde que consideramos á un mismo tiempo uno y muchos objetos ó individuos de una misma especie, como cuando se ve un hombre y muchos hombres, un niño y muchos niños, un árbol y muchos árboles, &c.; porque en este caso concebimos lo que es *unidad y pluralidad ó muchedumbre*. Si despues comparamos la pluralidad con la unidad, lo que resulta de esta comparacion se llama *número*; de manera que número *es el resultado de la comparacion de la pluralidad ó muchedumbre con la unidad, ó el que espresa la reunion de muchos individuos ó unidades* (*).

3 Importa mucho adquirir una idéa exacta del número; y por tanto advertirémos que si sobre una mesa tenemos un monton de pesos duros, este monton forma entónces una cantidad, porque puede ser mayor ó menor; pero si queremos averiguar cuantos hai, elegirémos un peso duro para que sirva de término de comparacion, y luego que respondamos *tantos*, entónces ya el resultado de esta comparacion es lo que se llama *número*; si hai muchos pesos duros, para evitar el que por cualquier motivo de distraccion se nos olvide los que llevamos contados, y no tener que empezar de nuevo, luego que se ha llegado á tener un

(*) *Tambien se puede decir*, *que* número es una pluralidad determinada.

número regular de ellos (*), se ponen en columna y se van formando columnas como aquella; y despues contando los montones, se viene en conocimiento del número total de pesos duros que hai.

En este segundo caso sirve de unidad el número de pesos duros que contenia la columna; de manera que por *unidad* en general debemos entender *una cantidad que se elige, las mas veces á arbitrio, para que sirva de término de comparacion respecto de todas las cantidades de su especie.*

4 Como las Matemáticas solo pueden hacer (Introd.) con las cantidades tres cosas, á saber: *espresarlas*, *componerlas* y *descomponerlas*, tampoco puede la Aritmética ejecutar otra cosa con los números, y así, lo primero que vamos á manifestar es el modo de espresar los números, cuya operacion se llama *numeracion.* La numeracion se puede considerar bajo dos aspectos: ó como *hablada* ó como *escrita*; y como la primera debe preceder á la segunda, ante todas cosas debemos aprender los nombres con que se determinan las unidades que hai en cada conjunto. El espresar los números con nombres es una operacion indispensable; pues aunque la naturaleza no nos presenta sino individuos ó unidades, si tuviésemos que dar razon de los hombres ó árboles que habíamos visto en algun parage, y lo ejecutásemos diciendo que los hombres ó árboles que habíamos visto, eran: *uno, uno, uno*, &c., no lo podríamos hacer sin confusion nuestra y del que lo oyese, por ser mui difícil, y aun imposible, conservar en la memoria las veces que está repetida la palabra *uno*; y así, el entendimiento se ve precisado á caracterizar con palabras á cada una de estas colecciones de unidades.

5 Si á cada coleccion de unidades se le diese un nombre particular, no bastaria la vida del hombre sino para aprender mui pocos números; y así hai un admirable artificio, aunque sumamente sencillo, por medio del cual se espresan con mui pocas palabras todos los números de que podemos necesitar.

6 Para manifestarlo, observarémos en primer lugar que cualquier objeto es en sí *uno*, porque la naturaleza presenta la consideracion de la unidad en cada individuo: despues cuando se quiere espresar el agregado de *uno y uno* se usa de la palabra *dos*, y por tanto *dos* equivale á uno y uno; para espresar el conjunto de *dos y uno* se usa de la palabra *tres*; para el de *tres y uno* de la palabra *cuatro*; *cuatro y uno* se espresa con la palabra *cinco*; *cinco y uno* con la palabra *seis*; *seis y uno* con la palabra *siete*; *siete y uno* con la palabra *ocho*; *ocho y uno* con la palabra *nueve*; *nueve y uno* con la palabra *diez.*

(*) *En el comercio estos montones suelen ser de* veinte ó veinticinco. *No lo decimos en el testo porque aun no se han esplicado las idéas que están unidas á estas palabras.*

7 Para contar de aquí en adelante, se toma esta coleccion de diez unidades por una nueva unidad, que se llama *unidad de decena*, y se van repitiendo las palabras anteriores diciendo: *diez y uno*, *diez y dos*, &c.; pero á causa de una irregularidad de nuestra lengua, en vez de *diez y uno*, se dice *once*, en vez de *diez y dos* se dice *doce*, en vez de *diez y tres* se dice *trece*, en vez de *diez y cuatro* se dice *catorce*, en vez de *diez y cinco* se dice *quince*; luego se sigue ya regularmente diciendo *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho*, *diez y nueve*; y para espresar *diez y diez* se usa de la palabra *veinte*, que es lo mismo que *dos dieces ó decenas* (*); despues se sigue contando veinte y uno, veinte y dos, &c. que tambien se dice *veintiuno*, *veintidos*, *veintitres*, *veinticuatro*, *veinticinco*, *veintiseis*, *veintisiete*, *veintiocho*, *veintinueve*; y para espresar *veintidiez* ó *tres dieces ó decenas*, se usa de la palabra *tres* modificada y se dice *treinta*: continuando despues *treinta y uno*, *treinta y dos*, *treinta y tres.... treinta y nueve*; luego, para espresar *cuatro dieces ó decenas*, *cinco dieces ó decenas*, &c. se modifican las palabras *cuatro*, *cinco* &c. con la terminacion *enta*; y se sigue contando *cuarenta*, *cuarenta y uno*, *cuarenta y dos*, *cuarenta y tres.... cuarenta y nueve*; *cincuenta*, *cincuenta y uno*, *cincuenta y dos.... cincuenta y nueve*; *sesenta*, *sesenta y uno*, *sesenta y dos.... sesenta y nueve*; *setenta*, *setenta y uno*, *setenta y dos.... setenta y nueve*; *ochenta*, *ochenta y uno*, *ochenta y dos.... ochenta y nueve*; *noventa*, *noventa y uno*, *noventa y dos..... noventa y nueve*; de modo que solo con las diez palabras primeras modificadas y combinadas entre sí, se pueden espresar hasta *noventa y nueve unidades*, ó nueve decenas y nueve unidades.

8 Si á noventa y nueve se le añade una unidad, se convierte en *noventa y diez*, ó *nueve dieces y otro diez mas*, que son *diez dieces*; este conjunto de *diez dieces ó decenas de unidades* se espresa con la palabra *ciento*: y se vuelve á tomar por unidad, que se llama *unidad de centena*, y se continúa diciendo: *ciento y uno*, *ciento y dos*, *ciento y tres.... ciento y diez*, *ciento y once.... ciento y veinte*, *ciento veintiuno.... ciento y treinta.... ciento y cincuenta.... ciento y noventa*, *ciento noventa y uno.... ciento noventa y nueve*, *ciento y ciento*, *ó doscientos.... doscientos cincuenta..... doscientos noventa y nueve*, *trescientos..... cuatrocientos.... quinientos..... seiscientos..... setecientos..... ochocientos..... novecientos.... novecientos noventa y nueve*; despues, para espresar *novecientos noventa y nueve y uno mas*, que componen *diez cientos*, se usa de la palabra *mil*, y se vuelve á tomar este conjunto por unidad que se llama *unidad de millar.* Luego se continúa *mil y uno*, *mil y dos..... mil*

(*) *En vez de veinte se deberia usar de la palabra* duenta *para que guardase analogía con las demas*; *y luego seguir* duenta y uno, duenta y dos *&c.*

y cincuenta..... mil y ciento..... mil y doscientos..... mil novecientos..... mil y mil ó dos mil, dos mil y uno.... dos mil y ciento.... dos mil novecientos.... tres mil.... cuatro mil.... diez mil.... veinte mil.... cien mil.... doscientos mil..... trescientos mil..... novecientos mil; y para espresar el conjunto *de diez cientos de miles ó mil miles* se usa de la palabra *millon ó cuento*, el cual conjunto se vuelve á tomar por unidad y se llama *unidad de millon* ó de *cuento*, y se sigue contando: *millon y uno, millon y dos.... millon y ciento.... millon y mil.... millon y diez mil.... millon y cien mil..... millon y novecientos mil..... dos millones..... tres millones..... diez millones..... cien millones..... mil millones..... diez mil millones..... cien mil millones.... millon de millones ó billon* (*). Despues se continúa contando del mismo modo hasta que se tiene un *millon de billones*, á que se llama *trillon*; á un *millon de trillones*, *cuadrillon*; y así se continúa en adelante, diciendo *quillon*, *sestillon*, &c.; de manera que solo con las trece palabras *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*, *ciento*, *mil* y *millon*, se pueden espresar todos los números de que puede necesitar el hombre (**).

Esc. Como, dado un número cualquiera, por ejemplo de hombres ó árboles, se puede concebir que se le añade otro hombre ú otro árbol, y esta agregacion formará un número mayor, resulta que, como esto lo podemos repetir las veces que se quiera, *por grande que se suponga un número, podemos siempre concebir otro mayor*, suponiendo que se le agreguen una, dos, diez, veinte, ciento, mil &c. unidades.

9 La numeracion escrita consiste en espresar todos estos números con pocos signos; á cada conjunto de signos por cuyo medio se puede conseguir esto se llama *sistema*, y cada nacion ha tenido uno diferente. En efecto, los griegos tuvieron dos métodos para esto: el primero consistia en la combinacion de solo seis letras mayúsculas que eran las iniciales de las palabras *uno*, *cinco*, *diez*, *ciento*, *mil* y *diez mil*. Este les era mui engorroso y le abandonáron, eligiendo otro que consistia en dividir las letras de su alfabeto en unidades, decenas y centenas, poniendo un acento debajo de ellas cuando se queria que espresasen millares.

(*) *En vez de billon se deberia usar de la palabra* dillon *para que guardase analogía con las demas.*

(**) *En efecto, con dichas palabras se pueden espresar todos los números comprendidos hasta el que se escribiese con un número de guarismos espresado por las unidades que hai en el número* seis millones y seis; *y hasta ahora el mayor número que ha ocurrido escribir solo se compone de ciento cuarenta y un guarismos, que es la relacion mas aproximada del diámetro á la circunferencia, que se halla en la obra de Vega intitulada* Thesaurus Logarithmorum completus &c., impreso en Leipsick en 1794.

10 Los romanos tuvieron un sistema mui parecido al primero de los griegos, usando de las siete letras I, V, X, L, C, D, M, y del cual se dan bastantes luces en la primera educacion. El método de los hebréos era semejante al segundo de los griegos; y tambien usáron de otro análogo los árabes, hasta que abrazáron el que ellos mismos confiesan tomáron de la India. Este sistema es el mas perfecto de todos cuantos se han inventado y pueden inventarse (*); por cuyo motivo los

(*) *La primera parte de esta proposicion no necesita demostracion, pues basta el que se halle adoptado en todas las naciones civilizadas; pero queriendo Buffon y otros hacer que se variase el sistema, y se eligiese el que constase de doce cifras, manifesté en una memoria que remití á la academia de ciencias naturales y artes de Barcelona, de que tengo el honor de ser individuo, que esto no estaba fundado en razon, por cuanto el actual procede en sus modificaciones de diez en diez, así como proceden las palabras de la numeracion hablada; y de aquí resulta la facilidad con que en él se puede escribir todo número bajo el dictado de otro; lo que no se podria ejecutar en ningun otro sistema sin practicar ántes operaciones dificultosas, á ménos que no se variase el lenguage, lo que no es fácil.*

En dicha memoria hice ver que la significacion de las trece palabras de que usamos en la numeracion hablada, sacada de las lenguas antiguas, era la siguiente: la de uno *llevaba la idéa de aquella causa particular que hacia que este objeto no fuese otro diferente de él; la de* dos *llevaba en su orígen la idéa de* division ó apartamiento, *la de aquello que está separado de otra cosa y no hace parte de ella; la de* tres *lleva la idéa de* interposicion, la de una cosa que está entre otras dos, *es decir*, en medio de ellas; *la* cuatro *lleva la idéa de* cuadrado, *esto es*, de una figura de tres lados mas uno; *la* cinco *llevaba la idéa de* reunion, *de* monton *de cosas, esto es, de un cúmulo ó conjunto de ellas, como el número de dedos de la mano; la* seis *lleva la idéa de* dejar á un lado, poner aparte; *la* siete *lleva la idéa de* abundancia, muchedumbre, muchos; *la* ocho *lleva la de* tiempo fijo, prescrito, dia de fiesta; *la* nueve *lleva la de* nuevo, *de* reciente *ó de* último; *la* diez *llevaba la idea del* número de dedos de las manos. *La significacion de esta palabra, y la de las* cinco y seis *manifiesta que los hombres contáron al principio por los dedos de las manos; la* ciento *lleva la idéa de* muchedumbre, de gran número, *la* mil *la de* plenitud, complemento ó inumerabilidad; *y la* millon *la de muchos miles. La significacion de estas tres últimas palabras manifiesta que se usáron al principio en el mismo sentido que las nuestras* muchos, varios, &c.; *y que se fuéron determinando al paso que se multiplicaban las necesidades de los hombres.*

árabes le introdujeron en España, donde le aprendió Gerberto, que despues fue Papa con el nombre de Silvestre II, y le divulgó por toda la Europa.

11 Este sistema consta solo de diez figuras ó caractéres que se llaman *cifras* ó *guarismos*; y por consiguiente dirémos que nuestro sistema de numeracion es el *arte de espresar con solo diez caractéres todos los números posibles*.

Estos caractéres son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0;

el primero espresa *uno*, esto es, la palabra *uno* está representada por el primer guarismo 1; la palabra *dos* por el 2; la *tres* por el 3; la *cuatro* por el 4; la *cinco* por el 5; la *seis* por el 6; la *siete* por el 7; la *ocho* por el 8; la *nueve* por el 9; y finalmente la cifra 0, que se llama *cero*, es el símbolo de la nada, y solo designa en cualquier parage donde se halle, que no hai nada de lo que debia haber donde ella está.

12 El artificio con que por medio de estas diez cifras se pueden espresar todos los números posibles, estriba en considerar en ellos, ademas del valor *propio* que se les acaba de fijar, otro valor *relativo* al lugar que ocupan contando de derecha á izquierda. Así, un guarismo cualquiera, tal como el 3, espresará siempre *tres* cosas; pero si está en el primer lugar contando de derecha á izquierda, serán tres unidades las que esprese; si está en el segundo, tres decenas; si en el tercero, tres centenas; si en el cuarto, tres millares &c.

13 De manera que *el primer lugar, contando siempre de derecha á izquierda, está destinado para colocar en él las unidades sencillas; el segundo para las decenas; el tercero para las centenas; el cuarto para los millares; el quinto para las decenas de millar; el sesto para las centenas de millar; el séptimo para los millones; el octavo para las decenas de millon; el noveno para las centenas de millon; el décimo para los millares de millon; el undécimo para las decenas de millar de millon; el duodécimo para las centenas de millar de millon; el décimotercero para los millones de millones ó billones; el décimocuarto para las decenas de billon; el décimoquinto para las centenas de billon; el décimosesto para los millares de billon; el decimoséptimo para las decenas de millar de billon; el décimoctavo para las centenas de millar de billon; el décimonono para los trillones; los cinco lugares siguientes para las decenas, centenas, millares, decenas de millar, centenas de millar de trillon; el vigésimoquinto para los cuadrillones, y así de seis en seis lugares para los quillones, sestillones &c. Y el cero sirve únicamente para ocupar un lugar, si en un número falta alguna de las unidades de especie inferior.*

14 Para hacer esto mas claro, nos valdrémos de este ejemplo: supongamos que se nos dén, ó que nos propongamos los diez guarismos de que acabamos de hablar, combinados en esta forma: 4638517092. Inmediatamente advertimos que el 2, ocupando el primer lugar de derecha á izquierda, espresa *dos unidades*; el 9 que ocupa el segundo, *nueve decenas ó noventa unidades*; el 0 que ocupa el tercero, espresa *ninguna centena*, y quiere decir que en el número propuesto no hai *ninguna centena*; el 7 que ocupa el cuarto, espresa *siete millares ó siete mil unidades*; el 1 que ocupa el quinto, espresa *una decena de millar ó diez mil unidades*; el 5 que ocupa el sesto, espresa *cinco centenas de millar ó quinientas mil unidades*; el 8 que ocupa el séptimo, espresa *ocho millones*; el 3 que ocupa el octavo, espresa *tres decenas de millones ó treinta millones*; el seis que ocupa el noveno, espresa *seis centenas de millones ó seiscientos millones*; y finalmente, el 4 que ocupa el décimo, espresa *cuatro millares de millon ó cuatro mil millones*; y así se procederia si hubiese mas guarismos.

15 Para hacerlo aun mas palpable, pondrémos aquí un número en que al lado de cada guarismo esté escrita la especie de unidades que espresa, como aquí se presenta:

&c.	&c.
9	decenas de trillon ó de tricuento.
0	trillones ó tricuentos.
3	centenas de millar de billon ó de bicuento.
5	decenas de millar de billon ó de bicuento.
8	millares de billon ó de bicuento.
6	centenas de billon ó de bicuento.
1	decenas de billon ó de bicuento.
2	billones ó bicuentos.
2	centenas de millar de millon ó de cuento.
7	decenas de millar de millon ó de cuento.
5	millares de millon ó de cuento.
8	centenas de millon ó de cuento.
3	decenas de millon ó de cuento.
7	millones ó cuentos.
2	centenas de millar.
6	decenas de millar.
9	millares.
3	centenas.
3	decenas.
5	unidades.

Esc. Conviene que los principiantes encomienden á la memoria el órden con que se suceden estas especies de unidades, tanto de derecha á izquierda, como de izquierda á derecha: teniendo presente que en las que se suceden de derecha á izquierda va siendo cada unidad diez veces mayor que la del guarismo que tiene á su derecha, ó es *décupla* de ella; y que cada unidad de las que tiene un guarismo es *diez veces me-*

nor ó subdécupla respecto de las que espresa el guarismo que tiene á su izquierda.

16 Entendido esto, ya no puede haber dificultad en escribir los números que otro cualquiera nos dicte; pues para esto no hai mas que *colocar sucesivamente los guarismos que espresan el número de unidades de cada órden, los unos al lado de los otros, empezando por la izquierda, y tener presente la sucesion de estos órdenes de unidades para no omitir ninguno, ocupando con ceros los lugares de los órdenes de unidades que pueden faltar; y teniendo presente que no se puede escribir un número parte al fin de un renglon y la parte restante á principio del siguiente, como se hace con las palabras*; porque esto alteraria el valor relativo de cada parte de dicho número.

17 Hemos dicho que se ha de empezar á escribir por la izquierda, porque la unidad de especie superior es la que está mas hácia este lado; y como al enunciar los números se empieza siempre en nuestra lengua por la unidad de especie superior, se debe principiar á escribir por la izquierda, segun se acostumbra en nuestro modo de escribir.

18 Y así, si me propongo escribir el número *treinta y seis mil cuatrocientos y dos*, lo ejecutaré del modo siguiente. Como la primera palabra que tengo que escribir es *treinta*, ó lo que es lo mismo tres decenas, el primer guarismo que deberé poner es el 3, porque este representa siempre tres cosas; pero como aquí han de ser decenas, concibo inmediatamente que para que el 3 ocupe el lugar de las decenas, que es el segundo de derecha á izquierda, despues del 3 debe haber otro guarismo, y que este debe ser el que esprese las unidades; por consiguiente sigo á ver en el número que se me ha propuesto lo que dice despues de la palabra *treinta*, y advierto que es la palabra *seis*; de donde infiero que el guarismo que debo poner despues del 3 es el 6, y tendré 36: con lo cual están ya escritas las dos primeras palabras *treinta y seis*. Despues sigue la palabra *mil*, la cual nos dice que estos treinta y seis son millares, y por consiguiente si el último guarismo 6 ha de espresar millares, es forzoso que ocupe el cuarto lugar, contando de derecha á izquierda; luego debe haber despues del 6 tres guarismos mas, y el primero que debe seguir es el que esprese las centenas que contenga el número propuesto: por lo que veré lo que dice despues de la palabra *mil*, y hallo que continúa *cuatrocientos*; luego despues del 6 debo poner un 4, que es el que espresa las centenas que hai, y tendré 364; despues del 4 que debe espresar centenas, se ha de colocar el guarismo que esprese las decenas que hai en el número propuesto; y como este no contiene ninguna decena, porque despues de cuatrocientos dice *dos*, debo colocar el o que es el que espresa que no hai ninguna unidad del órden correspondiente al lugar que ocupa, y aqui espresará que no hai decenas, de modo que tendré ya 3640. Y como todavía falta un guarismo, porque este o para que esté en el lugar de las decenas debe ocupar el segundo lugar, voi á ver lo que sigue en el número propuesto: hallo que dice *dos*, y por consiguiente pondré 2 despues de o, y tendré 36402 que espresará el número que me propuse.

19 Con igual facilidad se escribirian los números aunque fuesen mas complicados; y así, si me propusiese escribir el número *cuatro mil quinientos noventa y tres millones, doscientos diez y seis mil*, lo primero pondria un 4 para escribir la primera palabra *cuatro*; como dice despues que estos cuatro han de ser millares, veo que despues del 4 debe haber lo ménos otros tres guarismos, y que le debe seguir inmediatamente el que esprese las centenas, y como despues de cuatro mil dice *quinientos*, pondré 5 que espresa las centenas que hai, y tengo 45. Dice despues *noventa*, por lo cual pongo despues del 5 un 9 que espresa las nueve decenas que significa el noventa, y tendré 459; y colocando luego el 3 que espresa la palabra *tres* que sigue á la *noventa*, tengo 4593. Hasta ahora solo hai escrito *cuatro mil quinientos noventa y tres*, que si fuesen unidades sencillas no habrá ya mas que hacer; pero como dice despues *millones*, y los millones deben estar en el séptimo lugar, despues del 3 advierto que debe haber seis guarismos, y que el primero que debe seguir es el que espresa las centenas de millar, que como aquí dice doscientos pondré el 2, y tendré 45932; como luego deben seguir las decenas de millar y aquí hai una, pondré 1 y será 459321; y poniendo ahora un 6, que es el que espresa los millares que hai, tendré 4593216; que como han de ser millares, faltan todavía otros tres guarismos, porque el 6 para espresar millares debe hallarse en el cuarto lugar; y como despues en el número propuesto no dice mas, es señal de que no hai unidades de la especie inferior á los millares, y por lo mismo aquellos tres lugares que faltan se ocuparán con tres ceros, y tendré 4593216000 que espresa el número propuesto.

20 Como importa mucho el que los principiantes se adiestren en escribir los números, les pondrémos aun aquí algunos ejemplos.

1.° El número *doscientos setenta* se escribe 270.

2.° El número *dos mil treinta y nueve* se escribe 2039.

3.° El número *ochenta mil quinientos y siete* se escribe 80507.

4.° El número *cuatrocientos mil y trescientos* se escribe 400300.

5.° El número *quince millones dos mil y treinta* se escribe 15002030.

6.° El número *veinte millones* se escribe 20000000.

21 Para leer un número cuando está escrito, no hai mas que observar el lugar que ocupa cada guarismo, y la especie de unidades que le corresponde; y espresar cada guarismo con la palabra correspondiente, bien sea modificada con la terminacion *enta* si espresa decenas, ó bien añadiendo despues la palabra que esprese la especie de unidades. Pero cuando el número es mui complicado, no se ve á primera vista la especie de unidades que corresponde á cada guarismo, por cuyo motivo se

divide en porciones de seis en seis guarismos, empezando por la derecha; en la primera separacion se pone un 1, *bien por la parte de arriba, bien por la parte de abajo; en la segunda un* 2; *en la tercera un* 3; *&c.: despues se divide cada porcion de seis guarismos en dos de á tres con una coma; y se empieza leyendo por la izquierda, pronunciando siempre* mil *donde se encuentre una coma, y donde se halle un* 1, *un* 2, *un* 3, *&c.* millon, billon, trillon, *&c., y luego al fin se pronuncia unidades.*

Ejecutando esto con el número:

$$357926900502931784403 58$$

tendré:

$$35{,}792_3\,690{,}050_2\,293{,}178_1\,440{,}358.$$

Que se lee: *treinta y cinco mil setecientos noventa y dos trillones, seiscientos noventa mil y cincuenta billones, doscientos noventa y tres mil ciento setenta y ocho millones, cuatrocientos cuarenta mil trescientas cincuenta y ocho unidades.*

22 Aunque este sistema está adoptado en todas las naciones civilizadas, debemos advertir que los franceses no usan las palabras *billon, trillon*, &c. en el mismo sentido que nosotros y los ingleses; pues llaman *billon* á lo que nosotros y los ingleses llamamos *millar de millon; trillon* á lo que nosotros y los ingleses *billon; cuadrillon* á nuestro *millar de billon*, y así en adelante.

De todo esto resulta que *si á un número cualquiera se le pone á su derecha un cero, queda hecho diez veces mayor*; porque su último guarismo que ántes espresaba unidades, ahora espresará decenas, que son diez veces mayores que unidades; las decenas, centenas, &c. del primitivo se habrán hecho tambien diez veces mayores; luego habiéndose hecho cada parte diez veces mayor, lo habrá quedado el todo. Del mismo modo demostraríamos que *añadiendo dos ceros queda hecho el número cien veces mayor, y que añadiendo un número cualquiera de ceros queda hecho tantas veces mayor como espresa la unidad seguida de tantos ceros como se añadiéron al número.*

{ 23 Los sistemas de numeracion que han tenido alguna fama son el *binario* ó de dos caractéres, que inventó Leibnitz con el fin de esplicar un enigma del emperador Fohi de los chinos; y le publicó en las memorias de la academia de ciencias de Paris, año de 1703; el *tetráctico* ó de cuatro caractéres, que se dice haber sido inventado por los pitagóricos; y el de doce caractéres que Buffon y d'Alémbert prefieren al nuestro. Á todo sistema se le suele dar, cuando se habla de él en general, el nombre de *escala aritmética*, y al número que espresa los guarismos de que se compone la escala se le llama *raiz de la escala*; así la raiz de nuestro sistema es 10, y por esto se le llama sistema *décuplo*. En mi

memoria citada (nota del § 10) dí métodos generales para reducir un número cualquiera de un sistema á otro, y para dar aquí alguna idea manifestaré como se escriben los números en el sistema *binario*. Este solo consta de dos carácteres, á saber, 1 y 0; y con ellos se pueden espresar todos los números en el supuesto de que el carácter 1 signifique en el segundo lugar dos veces mas que en el primero; en el tercero dos veces mas que en el segundo; y en un lugar cualquiera dos veces mas que en el anterior á su derecha; así es, que para escribir uno se pone solo 1; para dos 10; para tres 11; para cuatro 100; para cinco 101; para seis 110; para siete 111; para ocho 1000; para nueve 1001; para diez 1010; para once 1011; para doce 1100; para trece 1101; para catorce 1110; para quince 1111; para diez y seis 10000, y así en adelante. }

24 En todo lo que llevamos espuesto hasta aquí, hemos prescindido de la especie de unidades que espresa cada número; pero como en muchas ocasiones se determina, nos vemos precisados á dividir el número en dos clases, á saber, en *abstracto* y *concreto*; abstracto es aquel que no determina la especie de unidades, como todos los que hasta ahora hemos nombrado: *cinco, seis*, &c., ó cuando se dice *cinco veces, seis veces*, &c.; y el concreto es el que espresa la especie de unidades, como *cinco hombres, seis manzanas*, &c.

25 Ahora, los números abstractos, como no se refieren á ninguna unidad, ó se refieren á la unidad abstracta, se dice que son todos de una misma especie; pero como los concretos pueden referirse cada uno á diferente unidad, los dividirémos en *homogeneos* y *heterogeneos*; y decimos de dos ó mas números que son homogeneos cuando se *refieren á una misma unidad*; y heterogeneos cuando *se refieren á diferentes unidades*; v. g. *cinco hombres* y *sesenta hombres* son números homogeneos; *cinco hombres* y *sesenta manzanas* son números heterogeneos. De un número solo no se puede decir si es homogeneo ó heterogeneo, porque esta es una cualidad relativa, que resulta de compararle con otro.

El número, con relacion á los guarismos que tiene, se divide en *simple* ó *dígito*, y en *compuesto*; se llama simple ó dígito cuando solo consta de un guarismo, y compuesto, cuando de mas.

Se dice que un número es *par* cuando se puede descomponer en dos partes iguales, como son el 2, el 4, el 6, el 8, el 10, el 12, &c.; y que es *impar* cuando no se puede descomponer en dos partes iguales, como son el 1, el 3, el 5, &c.

{ Los antiguos daban ademas otras denominaciones, y así llamaban *páriter par* al número que se podia descomponer en dos partes pares como el 8, el 12, &c.; *páriter impar* á aquel cuyas dos partes iguales estaban representadas por un número impar, como son el 6, el 10; &c. }

Hasta ahora solo hemos considerado números en que la unidad está contenida exactamente; pero si en vez de comparar la pluralidad ó muchedumbre con la unidad, comparásemos la unidad con la muchedumbre, ó una muchedumbre con otra muchedumbre mayor, entónces resulta otra clase de números, que se llaman *números quebrados*, ó simplemente *quebrados*. Por ejemplo: cuando veo cuatro árboles, y quiero comparar un árbol con los cuatro, advertiré que este árbol no equivale ninguna vez á cuatro árboles, sino que solo es una parte de aquellas que la cantidad con que comparo tiene cuatro, y así digo que *un árbol es la cuarta parte de una vez cuatro árboles*. Si quisiera comparar tres árboles con cuatro, hallaria que no equivalian á ninguna vez cuatro árboles, sino que solo eran *tres cuartas partes de cuatro árboles*. A estos números *una cuarta parte* ó *un cuarto*, *tres cuartas partes* ó *tres cuartos*, se les da el nombre de *quebrados*, porque no espresan unidades, sino partes de la unidad á que se refieren.

Y pues que ya hemos dado á conocer estos números, harémos otra division del número en *entero*, *quebrado*, *misto*, *fraccionario*, y *quebrado de quebrado*. Entero es aquel que se compone exactamente de unidades, como todos los que hemos considerado hasta aquí; quebrado el que espresa partes de la unidad, como *tres cuartos*, *dos quintos*, &c.; misto es el que se compone de entero y quebrado como *cuatro y medio*; fraccionario es aquel en que contando por partes de la unidad se llega á tener una unidad ó mas de una unidad; como *cuatro cuartos*, *siete cuartos*; y por último quebrado de quebrado es aquel que espresa partes de partes de la unidad, como *los dos tercios de un medio*, *los tres cuartos de dos quintos*, &c. A los números fraccionarios se les llama tambien *quebrados impropios*.

Esc. Algunos sostienen que el 1 no es número, porque no es una coleccion de unidades; pero como la verdadera idéa de número es que sea el resultado de la comparacion de una cantidad con la unidad, puede resultar de esta comparacion que la cantidad que se compara sea igual con la misma unidad; y así no se puede poner en duda el que 1 sea un número como cualquiera otro.

26 Así como todas las naciones han seguido un método particular para espresar los números, tambien han tenido diferente sistema en la division de las unidades que sirven en los usos comunes para medir y pesar; y así como luego que se descubrió el sistema décuplo, le recibiéron en todas las naciones civilizadas, así tambien resultó que luego que se conociéron las ventajas que resultarian á la sociedad de la uniformidad de pesos y medidas, en todas las naciones se trató de efectuarla: á este efecto se reuniéron en Paris el año de 1798 sabios de todas las naciones (*); y en efecto eligiéron un sistema mui filosó-

(*) *La nuestra comisionó para esto á D. Agustin Pedralles, y á D. Gabriel Ciscar; y este último publicó una memoria en castellano, esplicando el sistema que se habia elegido.*

fico; mas que en virtud de serlo tanto se debia esperar que jamas tuviese efecto, como al fin se ha verificado; porque el querer que el vulgo mude de lenguage, y en vez de aquel corto número de palabras que conoce reciba otras, todas en griego, era una cosa imposible; sin embargo la reunion de los sabios nombrados para esta comision ha traido muchas ventajas á las ciencias y á la sociedad. Nuestro Gobierno conoció esta imposibilidad mui desde los principios; y por esto lo que hizo fué tratar de uniformar los pesos y medidas en todo el reino, cosa que no se ha conseguido por espacio de muchos siglos, que se ha estado mandando establecer (*).

27 Por esta causa debemos conocer todas las divisiones y subdivisiones de nuestros pesos y medidas, lo que manifestarémos ateniéndonos á la pragmática de 26 de Enero de 1801.

Lo primero que observarémos es que hai cuatro clases de medidas; á saber: medidas longitudinales ó de intervalos; medidas de superficie ó agrarias; medidas de capacidad para los granos y demas cosas secas; y medidas de capacidad para los líquidos.

28 La raiz de todas las medidas longitudinales, y á la que se refieren tambien las otras, es el *pié*; se divide en 16 dedos, y el dedo en mitad, cuarta, ochava, y diez y seisava parte: tambien se divide en 12 pulgadas, y la pulgada en 12 lineas.

La *vara* y la *legua* tambien son medidas longitudinales; la vara, que es aquel liston de madera con que los mercaderes miden el paño, lienzo, &c. se compone de tres pies, y la legua que sirve para medir distancias grandes, como las que hai entre los pueblos, ciudades, &c. se compone de 20000 pies, que es el camino que se anda regularmente en una hora.

En dicha pragmática mandó el Rei que todas estas medidas se llamasen *medidas españolas*, y que se eligiesen para patrones las que estu-

(*) *Examinando las causas que podian haber retardado el poner en ejecucion esta sábia providencia desde el tiempo del rei D. Alonso el sabio, que está sin obedecer, aunque mandada tantas veces observar en el Fuero Real y en varias Córtes; hallé que una providencia que los mismos pueblos pedian, no pudo dejarse de poner en práctica, sino por la ignorancia de los pueblos que ocasionó el no haberlo podido poner en ejecucion. Enterado á fondo del buen estado en que se hallaba este asunto, y debiendo como buen ciudadano contribuir con mis cortas luces para que se verifiquen tan sábias intenciones; quise proporcionar á los pueblos la instruccion necesaria para entender y poner espedita la uniformidad de las pesas y medidas cuando se llegue á mandar; y este fué uno de los principales motivos que tuve para la publicacion de mi Aritmética de niños.*

viesen en uso mas generalmente; por esto se adoptó para que sirviese de norma la vara que se conservaba en el archivo de la ciudad de Búrgos, que ahora se llama *vara española*, y se divide como ántes en mitad, cuarta, media cuarta ú ochava, y media ochava.

29 La primera de las medidas agrarias es el *estadal cuadrado*, que es un cuadro de cuatro varas ó 12 pies de largo y otro tanto de ancho, que componen 16 varas cuadradas ó 144 pies cuadrados. Despues sigue la *aranzada*, que se compone de 20 estadales en cuadro ó 400 estadales cuadrados; y luego la *fanega de tierra* que se compone de 24 estadales en cuadro, ó 576 estadales cuadrados. La fanega de tierra se divide en 12 celemines, y el celemin en 4 cuartillos.

30 Para los granos, la sal y demas cosas secas, que se comprenden bajo la denominacion general de *áridos*, la unidad de especie superior es el *cahiz* que se compone de 12 fanegas, y la fanega de 12 celemines. En el comercio no hai medida en que quepa el cahiz ni tampoco la fanega, porque serian mui grandes y no se podrian manejar; y así, las medidas que hai son la media fanega, que es la que se conservaba en el archivo de la ciudad de Ávila; la cuartilla que es la mitad de la media fanega ó la cuarta parte de la fanega; el celemin ó almud que es la dozava parte de la fanega; el medio celemin que es la mitad del celemin; el cuartillo que es la mitad del medio celemin, ó la cuarta parte del celemin; el medio cuartillo que es la octava parte del celemin; el ochavo que es la cuarta parte del cuartillo, ó diez y seisava parte del celemin; el medio ochavo que es la treinta y dozava parte del celemin; y el ochavillo que es la sesenta y cuatroava parte del celemin.

31 Para los líquidos, escepto el aceite, se usa de la *cántara* ó *arroba*, cuyo patron es el que se conservaba en el archivo de la ciudad de Toledo; se divide en dos medias cántaras; la media cántara en dos cuartillas; la cuartilla en dos azumbres; la azumbre en dos medias azumbres; la media azumbre en dos cuartillos; el cuartillo en dos medios cuartillos; el medio cuartillo en dos copas; de modo que la cántara se compone de 32 cuartillos. El *moyo* se compone de 16 cántaras.

Esceptuamos el aceite, porque sus medidas están arregladas al peso; y así se usa de la arroba, media arroba, cuartilla ó cuarto de arroba, media cuartilla ó medio cuarto de arroba, libra, media libra, cuarteron ó cuarta parte de la libra, que tambien se llama panilla, y de la media panilla.

32 Para las cosas que se venden al peso se usa de las pesas del marco que se custodiaba en el archivo del Consejo de Castilla. La unidad de especie superior es el *quintal*, que se compone de 4 *arrobas*; la arroba de 25 *libras*; la libra de 16 *onzas*; la onza de 16 *adarmes*; el adarme de tres *tomines*, y el tomin de 12 *granos*. La libra se divide en dos medias libras, en cuatro cuarterones y en ocho medios cuarterones; la onza en dos medias onzas, en cuatro cuartas, y en ocho ochavas ó dracmas.

33 Tambien importa mucho conocer la lei que se sigue en la division y subdivision de la moneda; y por eso pondrémos aquí la que se halla establecida entre nosotros. La de especie superior es el *doblon*, que tiene 4 *pesos*, el peso 15 *reales*, y el real 34 *maravedíses*. De todas estas unidades no hai monedas: el doblon, el peso, y el ducado que vale 11 reales, son monedas imaginárias; porque no hai en la actualidad ninguna pieza de oro ni de plata que las represente, y solo sirven en los tratos de comercio.

De las demas, sí hai monedas y de mayor valor. Las monedas se hacen de oro, de plata y de cobre; la mayor de oro es el *doblon de á ocho*, que es una onza de oro y vale ocho *escudos de oro* ó 320 reales; despues sigue el *doblon de á cuatro escudos de oro*, que es media onza de oro y vale 160 reales; luego sigue el *doblon de oro*, que vale dos escudos de oro ú 80 reales; despues sigue el *escudo de oro* que vale 40 reales, y el *medio escudo*, *escudito* ó *veinten* que vale 20 reales. La mayor de plata es el *peso duro*, que es una onza de plata y vale 20 reales; el *medio duro* que vale 10 reales; la *peseta columnaria* ó *mejicana* que vale 5 reales; la *media peseta columnaria* ó *real de plata mejicano* que vale dos reales y medio; y el *real columnario* que vale diez cuartos y medio. Tambien hai otra peseta que es la *ordinaria* ó *provincial* y vale 4 reales; la *media peseta* ó *real de plata provincial* 2 reales, y el real sencillo ó de *vellon* equivale á ocho cuartos y medio de la moneda de cobre. La moneda mayor de cobre en la actualidad vale 2 *cuartos* ú ocho maravedíses; la que sigue un cuarto, que vale 4 maravedíses; y la otra un *ochavo*, que vale 2 maravedíses; el maravedí, aunque hai moneda que le representa, no corre en el comercio regularmente.

34 El tiempo se divide de este modo: el *siglo* se compone de 100 *años*; el año de 12 *meses* ó de 365 *dias* y algo mas; el dia de 24 *horas*; la hora de 60 *minutos primeros*; el minuto primero de 60 *minutos segundos*; el minuto segundo de 60 *minutos terceros*, &c.

De la operacion de sumar ó de la adicion.

35 Como la cantidad solo es susceptible de aumento ó de diminucion, y todo número es cantidad, resulta que con los números no se podrán ejecutar en realidad sino dos operaciones, á saber: operaciones de aumentar, y operaciones de disminuir; pero segun los diferentes modos que hai de aumentar ó de disminuir, resultan seis, que son las de *sumar*, *restar*, *multiplicar*, *dividir*, *elevar á potencias* y *estraer raices*. Sumar es *juntar ó reunir en un solo número el valor de dos ó mas homogeneos*: la operacion por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *adicion*; los números que se dan para sumar, *sumandos*; y lo que resulta de la operacion, *suma*. Los sumandos han de ser homogeneos, porque no se pueden reunir hombres, por ejemplo con caballos; pues un número cualquiera de caballos no aumentará el número de los hombres, ni el de los hombres aumentará el de los caballos.

Se indica esta operacion poniendo este signo + entre los sumandos, el cual se lee *mas*; así, la espresion $3+2$ se lee *tres mas dos*, y para indicar que despues de hecha esta suma resulta 5, se pone el signo = que se lee *igual*; de manera que la espresion $3+2=5$, se lee *tres mas dos igual ó es igual á cinco.*

36 Para poder sumar, lo primero que se debe saber es lo que componen juntos, de dos en dos, los números dígitos ó de un solo guarismo; en lo cual no habrá dificultad; porque sabiendo ya la numeracion hablada, se añadirá al uno de ellos una unidad, y se verá que número resulta; despues se volverá á añadir otra unidad, y se verá el número que resulta; y así se continuará hasta haber añadido tantas unidades como habia en el segundo número dígito. Para no equivocarse, convendrá al principio que á cada unidad que se vaya añadiendo, se vaya abriendo un dedo, teniendo las manos cerradas; y cuando se tengan ya tantos dedos abiertos como unidades tenia el número que se queria añadir, dirémos que el número en que nos hayamos parado será el verdadero. Este es un método seguro, y que ninguno que sepa la numeracion hablada dejará de comprender; el cual aunque algo largo, se deberá practicar al principio hasta que ya se sepan hacer todas estas sumas de repente; mas con el fin de suministrar á los principiantes todos los auxilios posibles, pondrémos aquí una tabla donde están todas estas sumas, con el objeto de que la verifiquen por medio de sus dedos, y despues la aprendan de memoria.

Tabla para sumar.

1 y 1 son 2	2 y 2 son 4	3 y 3 son 6
1 y 2. . . 3	2 y 3. . . 5	3 y 4. . . 7
1 y 3. . . 4	2 y 4. . . 6	3 y 5. . . 8
1 y 4. . . 5	2 y 5. . . 7	3 y 6. . . 9
1 y 5. . . 6	2 y 6. . . 8	3 y 7. . . 10
1 y 6. . . 7	2 y 7. . . 9	3 y 8. . . 11
1 y 7. . . 8	2 y 8. . . 10	3 y 9. . . 12
1 y 8. . . 9	2 y 9. . . 11	
1 y 9. . . 10		
4 y 4 son 8	5 y 5 son 10	6 y 6. . . 12
4 y 5. . . 9	5 y 6. . . 11	6 y 7. . . 13
4 y 6. . . 10	5 y 7. . . 12	6 y 8. . . 14
4 y 7. . . 11	5 y 8. . . 13	6 y 9. . . 15
4 y 8. . . 12	5 y 9. . . 14	
4 y 9. . . 13		
7 y 7 son 14	8 y 8 son 16	
7 y 8. . . 15	8 y 9. . . 17	
7 y 9. . . 16	9 y 9. . . 18	

37 Por el mismo procedimiento podrémos añadir un número dígito cualquiera á otro compuesto; y así, si quiero añadir á 25 el número 3, diré: 25 mas 1 son 26, 26 mas 1 son 27, 27 mas 1 son 28; y como ya he añadido tres veces la unidad, resulta que el 28 es la suma del 25 con el 3. Ahora, si al 25 quisiera añadir 7, diria: 25 y 1 son 26, 26 y 1 son 27, 27 y 1 son 28, 28 y 1 son 29, 29 y 1 son 30, 30 y 1 son 31, 31 y 1 son 32; y como he añadido siete veces la unidad ó siete unidades al 25, resulta que 32 es la suma de 25 y de 7. En la práctica se irán abriendo ó cerrando los dedos á cada unidad que se añada para tener un medio sencillo de conocer las veces que se ha añadido la unidad, que serán tantas como dedos abiertos hai si las manos estaban cerradas, ó como dedos cerrados si estaban abiertas.

Como es mui útil el saber hacer las sumas de un número compuesto de dos guarismos y de un dígito, pondrémos aquí algunos otros ejemplos para que los principiantes los sumen por sí mismos, y se propongan otros. Así, sumando 15 con 4 resulta 19; 13 y 8 son 21; 27 y 9 son 36; 45 y 5 son 50; 48 y 9 son 57; 52 y 9 son 61; 63 y 8 son 71; 75 y 2 son 77; 83 y 8 son 91; 95 y 9 son 104.

38 Entendido esto, pasemos á manifestar las reglas generales que se deben observar para sumar; y con el fin de ejecutarlo con la mayor claridad, enunciarémos esta operacion en el siguiente

PROBLEMA: *Sumar números enteros.*

Resolucion. Colóquense todos los sumandos, ó números que se dan para sumar, los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, &c; tírese despues una raya, y empiécese á sumar por la columna de las unidades, que es la que está mas á la derecha, y súmense todas las unidades de los sumandos: esta suma se compondrá ó de unidades solas, ó de decenas solas, ó de decenas y unidades: si se compone solo de unidades, se ponen estas debajo de la raya; pero de modo que se correspondan con las unidades de los sumandos: si se compone solo de decenas, se pondrá o debajo de las unidades de los sumandos, y las decenas se guardarán para sumarlas con las de la columna siguiente: si hai decenas y unidades, se colocan las unidades debajo de la columna de las unidades, y se guardan las decenas para sumarlas con las de la columna inmediata. Despues se pasa á sumar la columna de las decenas, teniendo cuidado de sumar con el primer guarismo las decenas que resultáron de la suma de las unidades; esta suma de decenas se compondrá ó de decenas solamente, ó solo de centenas, ó de centenas y decenas: cuando solo contiene decenas, se ponen debajo de la columna de las decenas: si tiene solamente centenas, se pone o debajo de la columna de las decenas, y se guardan las centenas que resulten para sumarlas con las que haya en la columna inmediata de la izquierda: si contiene centenas y decenas, se colocan las decenas debajo de la columna de las decenas, y las centenas se guardan para sumarlas con las de la columna de la izquierda. Luego se pasa á sumar las centenas, teniendo cuidado de añadir al primer guarismo las que se llevaban de la suma de las decenas: y si en la suma de las centenas hai millares, se guardan para sumarlos con los de la columna inmediata; y así se continúa hasta llegar á la última columna de la izquierda, de cuya suma si resulta alguna ó algunas unidades de especie superior, se ponen á la izquierda del guarismo que se coloca debajo de la última columna.

Ejemplo: supongamos que se me dan para sumar los números 432, 287, 43 y 572. Lo primero que ejecuto es poner los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, &c.; despues tiro una raya en esta forma:

Empiezo á sumar por la columna de las unidades, y digo: 2 unidades y 7 unidades son 9 unidades, 9 unidades y 3 unidades son 12 unidades, 12 unidades y 2 unidades son 14 unidades; en 14 unidades hai una decena y 4 unidades, coloco las 4 unidades debajo de la columna de las unidades, y guardo la decena para sumarla con las de la columna siguiente, en la cual digo: 3 decenas y una decena que llevaba de la suma de las unidades son 4 decenas, 4 decenas y 8 decenas son 12 decenas, 12 decenas y 4 decenas son 16 decenas, 16 decenas y 7 decenas son 23 decenas; en 23 decenas hai 3 decenas y 2 centenas, por lo cual pongo un 3 debajo de la columna de las decenas, y guardo las 2 centenas para sumarlas con las de la columna inmediata, diciendo: 4 centenas y 2 centenas que llevaba son 6 centenas, 6 centenas y 2 centenas son 8 centenas, 8 centenas y 5 centenas son 13 centenas; en 13 centenas hai 3 centenas y 1 millar, pongo el 3 debajo de las centenas de los sumandos, y guardo el millar para sumarle con los millares de la columna inmediata; pero como no los hai, coloco el 1 al lado izquierdo del 3, y tengo que la suma de los cuatro números propuestos es *mil trescientos treinta y cuatro.*

$$\begin{array}{r} 432 \\ 287 \\ 43 \\ 572 \\ \hline 1334 \end{array}$$

39 *Esc.* Al sumar cada columna no se necesita ir repitiendo si son unidades, decenas, &c. Antes lo hemos hecho para entender bien la operacion; pero en la práctica, que lo que se requiere es mucha prontitud, se suman los guarismos de cada columna como si espresasen unidades: y despues de colocar, debajo de la columna que se suma, las unidades sencillas que resulten, se llevan para sumar con los guarismos de la columna inmediata de la izquierda, tantas unidades como decenas resultáron en la suma de la columna anterior; por ejemplo: si me diesen para sumar los números 47259, 20503, 49, 625 y 15903, los pondria los unos debajo de los otros, como he dicho ántes, en esta forma:

Y despues de tirada la raya diria: 9 y 3 son 12, y 9 son 21, y 5 son 26, y 3 son 29; coloco el 9 debajo de dicha columna y reservo 2 para la inmediata, en la cual digo: 5 y 2 que llevaba son 7, y 0 son 7, y 4 son 11, y 2 son 13; pongo el 3 debajo de dicha columna y reservo el 1 para la inmediata, en la cual digo: 2 y 1 que llevo son 3, y 5 son 8, y 6 son 14, y 9 son 23; pongo el 3 y llevo 2 para la columna siguiente, en la que digo: 7 y 2 que llevo son 9, y 5 son 14; pongo el 4 y llevo 1 para la columna inmediata, en que digo: 4 y 1 que llevaba son 5, y 2 son 7, y 1 son 8, que pongo debajo; y tengo en *ochenta y cuatro mil trescientos treinta y nueve* la suma de los cinco números propuestos.

$$\begin{array}{r} 47259 \\ 20503 \\ 49 \\ 625 \\ 15903 \\ \hline 84339 \end{array}$$

40 Hasta ahora solo hemos manifestado las reglas y las hemos aplicado á dos ejemplos; pero esto no basta: es necesario saber que practicando estas reglas, el resultado que hallamos es el verdadero, esto es, nos falta aun dar la demostracion del problema; y lo hemos ejecutado así, porque como aquí hai que aprender cuatro cosas, á saber, *el lenguage, las reglas que se deben seguir, adquirir su práctica, y la demostracion de las mismas reglas*; si lo hubiéramos puesto todo junto, los principiantes no podrian aprender estas cuatro cosas á un tiempo; y porque por otra parte no perciben la fuerza, ni la necesidad de la demostracion, sino despues de saber ejecutar lo que se les pedia; y así, ahora que ya saben las reglas y su práctica conviene que les demos la razon de todo lo que han hecho, lo que vamos á ejecutar en la siguiente

Demostracion. Lo primero que hemos dicho es que *se coloquen los sumandos los unos debajo de los otros*, &c.: esto no es esencial, es solo por comodidad, y pudiéramos ejecutar la suma poniendo los sumandos en cualquiera otra parte. Despues hemos dicho que *se tire una raya*: el objeto de esta raya es la claridad, esto es el separar los sumandos de la suma que se ha de poner debajo; porque sin ella se podria tomar la suma por un sumando. Todo lo demas está reducido á *sumar todas las unidades, todas las decenas, todas las centenas, y en general todas las partes de que se componen los sumandos*; y como al mismo tiempo que lo hemos ido haciendo, hemos ido reuniendo la suma de unidades con la de las decenas, con la de las centenas, &c. pues á la suma de estas le agregábamos las que nos resultaban de la suma de las unidades de la columna anterior, resulta que en el número que tenemos debajo de la raya están contenidas las sumas de todas las partes de los propuestos; y como (Introd. ax. 3.°) lo que se hace con todas las partes queda ejecutado con los todos: resulta que en el número que hemos obtenido están contenidos todos los sumandos; y como se llama *suma* al número que espresa el valor de los sumandos, resulta que este espresará la suma de los números propuestos, que era lo que nos proponíamos hallar (*).

41 Cuando se proponen muchos números para sumar, se hacen primero sumas parciales de á seis ó de á ocho sumandos, y despues se suman todas las sumas parciales. Mas hai operaciones en que entra la suma como auxiliar, y en que no se pueden hacer con sencillez estas sumas parciales; y por eso cuando yo me he hallado en una circunstancia de estas, he puesto debajo del guarismo de cada columna el número de unidades que conservo para la inmediata, en esta forma. Supongo que se me den para sumar los números que están aquí ya colocados, y diré: 4 y 8 son 12, y 2 son 14, y 6 son 20, y 6 son 26, y 6 son 32, y 3 son 35, y 7 son 42, y 2 son 44, y 8 son 52, y 7 son 59, y 4 son 63, y 3 son 66, y 8 son 74; pongo el 4, y debajo de él las 7 decenas que conservo para la columna siguiente, en la cual digo: 7 que llevaba y 8 son 15, y 9 son 24, y 7 son 31, y 8 son 39, y 8 son 47, y 7 son 54, y 9 son 63, y 8 son 71, y 8 son 79, y 9 son 88, y 7 son 95, y 8 son 103, y 9 son 112, y 5 son 117; pongo el 7 y debajo de él el 11, y continúo la operacion como aquí se ve.

De este modo, aunque uno se distraiga en el discurso de la operacion, no necesita volver á empezar de nuevo para saber las que llevaba de la columna anterior, ni ejecutar la suma de las dos columnas anteriores, que de otro modo es indispensable; con lo cual se ejecutan las operaciones con cierta tranquilidad y sin aquella intension de ánimo que tanto molesta.

54984
76698
85772
43886
3786
243576
193893
4987
87682
998
7677
53084
2893
75658
935574
0010117

42 Entendido ya el modo de practicar esta operacion, solo nos falta el que manifestemos bajo que aspectos se presentan en la sociedad las cuestiones que conducen á ejecutarla; y cuantos sean estos aspectos, tantos son los usos que se dice que tiene.

Las cuestiones que en la sociedad conducen á la operacion de sumar son todas aquellas, en que se trata de averiguar cuanto componen juntas muchas cosas de una misma especie; y así, si se nos dijese que averiguásemos la renta que juntaba un sugeto que por su empléo tenia 45249 reales anuales; que una dehesa le producia 79250 reales; que las casas le daban 27200 reales; las demas haciendas 8527 reales, y los rebaños de ganado 15208 reales, advertiríamos que esto se debia ejecutar por la operacion de sumar; por consiguiente colocaríamos los sumandos, y ejecutaríamos la operacion como hemos dicho (38), y sacaríamos que la renta del sugeto era 175435 reales (*).

(*) *Para abreviar usarémos en lo sucesivo de estas letras* L. Q. D. H. *para indicar la última frase de la demostracion de un problema, y son las iniciales de esta*: lo que debia hallar ó hacer.

De la operacion de restar ó de la sustraccion.

43 Vamos á tratar de la primera operacion de disminuir, que es la de *restar*; y se dice que restar es *averiguar la diferencia que hai entre dos números homogeneos*: la operacion por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *sustraccion*; el número de que se ha de restar *minuendo*; el que se resta *sustraendo*; y lo que resulta de la operacion *resta*, *esceso* ó *diferencia*. (**). El minuendo y sustraendo deben ser homogeneos, porque un número cualquiera de caballos, por ejemplo, no podria disminuir en nada otro número cualquiera de hombres que tuviésemos, ni al contrario.

Es mui importante conocer cuando se nos propone una cuestion que oficios hace cada número; y así, observarémos que cuando se enuncia que se debe ejecutar una operacion de restar, el número que lleve antepuesta la preposicion *de* es el minuendo, y el otro el sustraendo.

Tambien se usa de un signo particular para indicar que un número se debe restar de otro; este signo es el — que se lee *ménos*; y para indicar la resta se pone el minuendo, luego el signo —, despues el sustraendo, y para indicar el resultado de la operacion se pone el signo $=$; así, la espresion $5-3=2$, quiere decir que despues de quitar 3 unidades del 5 quedan 2, y se lee *cinco ménos tres igual ó es igual á dos*.

44 Entendido esto, para proceder con claridad reunirémos todas las reglas de esta operacion en el siguiente

(*) *Si alguno necesitase aun de mas ejemplos podrá consultar mi Aritmética de niños; en la cual como no se pone la demostracion de las operaciones, es necesario que contenga muchos ejemplos con todos los detalles indispensables para los niños, y por consiguiente para cualquiera que los necesite.*

(**) *Estas tres palabras aunque espresan el resultado de la operacion de restar, no son absolutamente sinónimas, sino que cada una responde á un modo particular de proponer la cuestion que conduce á dicha operacion. Cuando se pregunta ¿que diferencia hai entre* 5 *y* 3? *al responder* 2, *tenemos que este* 2 *espresa verdaderamente una diferencia; porque de ese modo se satisface á la pregunta. Cuando se dice un mercader tenia* 5 *piezas de paño, ha vendido* 3, *y se deséa saber las que le quedan, la respuesta* 2 *espresa precisamente una* resta. *Cuando se dice un sugeto tiene de renta* 5 *duros diarios, gasta tres cada dia, se deséa saber en cuanto superan las rentas al gasto; la respuesta* 2 *espresa verdaderamente un esceso.*

PROBLEMA: *Restar números enteros.*

Resol. Colóquese el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, &c.; tírese despues una raya debajo del sustraendo; véase la diferencia que hai entre las unidades del sustraendo y las del minuendo: ó lo que es lo mismo, véase las unidades que faltan á las del sustraendo para que tenga las mismas que el minuendo, y las que le falten se ponen debajo de la raya en la columna de las unidades; ejecútese lo mismo con las decenas, centenas, millares, &c. y el número que salga debajo de la raya será la resta.

Ejemplo: si me dijesen que restase de 8579 el número 3275, advertiria que el número que lleva antepuesta la preposicion *de* es el 8579: por consiguiente este es el minuendo; y por lo mismo colocaré el sustraendo 3275 debajo de él, como aquí se ve:

8579
3275
————
5304

Despues de tirada la raya diré: de 5 unidades á 9 unidades ¿cuantas van? esto es, averiguaré cuantas unidades faltan al 5 para convertirse en 9; lo cual es fácil, pues teniendo presente la tabla de la operacion de sumar, advertiré desde luego que faltan 4 unidades, ó si esto se me olvida iré añadiendo sucesivamente la unidad al 5 hasta que se convierta en 9, y veré que le tengo que añadir cuatro veces dicha unidad; por lo que digo que le faltan 4 unidades, y coloco este guarismo 4 debajo de la raya en la columna de las unidades; paso despues á las decenas y digo: de 7 decenas á 7 decenas ¿cuantas van? y como á 7 decenas no le falta ninguna decena para convertirse en 7 decenas, digo que van 0 decenas, y pongo este guarismo debajo de la raya en la columna de las decenas; paso ahora á las centenas y digo: de 2 centenas á 5 centenas ¿cuantas van? y como á 2 centenas le faltan 3 centenas para convertirse en 5 centenas, coloco el 3 debajo de las centenas, paso inmediatamente á los millares y digo: de 3 millares á 8 millares ¿cuantos van? y como á 3 millares le faltan 5 millares para convertirse en 8 millares, colocaré debajo de los millares el guarismo 5, y tendré que la diferencia entre los dos números propuestos es 5304.

Dem. El colocar el sustraendo debajo del minuendo es por comodidad; el tirar la raya es para que no se confunda el sustraendo con la resta; ahora, las demas reglas se reducen á que por ellas encontramos la diferencia entre las unidades de los dos números propuestos, la de las decenas, la de las centenas, &c., esto es, que hallamos la diferencia que tienen todas las partes de los números propuestos; y como todas estas diferencias las hemos ido colocando unas al lado de otras en sus lugares correspondientes, resulta que en el número que está debajo de la raya se hallan todas las diferencias que hai entre todas las partes de los nú-

meros dados; y como todas las diferencias de las partes equivalen á la diferencia de los todos (Introd. ax. 3.º); se sigue que dicho número espresará la resta entre los propuestos. L. Q. D. H.

45 En el ejemplo anterior hemos ido nombrando al hallar cada diferencia parcial la especie de unidades que espresaba cada guarismo, porque así lo exigia la claridad; pero despues de entendido el modo de ejecutar la operacion y sus fundamentos, se consideran todos los guarismos, al ejecutar la operacion, como si solo espresasen unidades. Por ejemplo: si me propusiesen que hallase la diferencia que hai entre los números 625867 y 324705, los colocaria como he dicho ántes (44) y aquí se ve:

625867
324705
————
301162

Y despues de tirada la raya diré: de 5 á 7 ¿cuantas van? y como á 5 le faltan 2 para convertirse en 7, pongo este guarismo 2 debajo de la raya en la columna de las unidades; paso á la columna inmediata y digo: de 0 á 6 ¿cuantas van? y como á 0 le faltan 6 para convertirse en 6, pongo este guarismo; paso á la otra columna y digo: de 7 á 8 cuantas van? advierto que son 1, y pongo debajo este guarismo; paso á la otra columna y digo: de 4 á 5 ¿cuantas van? advierto que son 1, y pongo este guarismo debajo; paso á la otra columna y digo: de 2 á 2 ¿cuantas van? y como no va ninguna pongo 0 debajo, y luego digo por último: de 3 á 6 ¿cuantas van? advierto que son 3; pongo este guarismo debajo y encuentro que la diferencia es 301162.

46 Con el objeto de no dar saltos que sean violentos para los principiantes, hemos repetido en cada columna de los ejemplos anteriores la pregunta *¿cuantas van?*; pero conviene omitirla con el fin de abreviar. Así, en la práctica solo se espresan las palabras que son indispensables, como en este ejemplo: si de 286187 quiero restar 153064, colocaré los números y tiraré la raya como aquí se presenta:

286187
153064
————
133123

Y diré: de 4 á 7 van 3; de 6 á 8 van 2; de 0 á 1 va 1; de 3 á 6 van 3; de 5 á 8 van 3; y de 1 á 2 va 1; y colocando cada uno de estos guarismos debajo de sus correspondientes, hallo que la resta es 133123.

47 Todos los ejemplos que hemos resuelto hasta aquí han sido escogidos con el fin de que en ellos se practicasen las reglas sin dificultad ninguna; pero suele suceder que aunque el minuendo sea mayor que el sustraendo, como debe verificarse para poderse ejecutar la resta, no obstante alguno ó algunos de los guarismos del sustraendo sea mayor que su correspondiente en el minuendo; en cuyo caso, para poder ejecutar esta resta parcial se toma una unidad del guarismo inmediato de la izquierda: y como vale 10 respecto de aquel que está á su derecha, se añaden estas 10 á las unidades que habia en dicho lugar: de esta suma siempre se podrá restar el guarismo que le corresponde, y se pondrá la resta debajo; luego, es menester llevar en cuenta aquella uni-

dad que se tomó y rebajarla del guarismo del minuendo; pero es mas análogo con el modo de proceder en las demas operaciones, el añadir esta unidad al guarismo del sustraendo, dejar el del minuendo conforme era, y hallar la diferencia.

Para hacer esto palpable con un ejemplo, nos propondrémos hallar la diferencia entre los números 45296 y 31578, que colocaré como he dicho (44) y aquí se ve:

45296
31578
13718

Y despues de tirada la raya diré: de 8 á 6 no puede ser, es decir que al 8 no le faltan ningunas unidades para convertirse en 6, ó que no puedo quitar 8 al que no tiene mas de 6: por lo mismo tomo una unidad del guarismo inmediato que es 9, y como vale 10 respecto de las del 6, las sumo y tengo 16, de cuya suma ya puedo restar el 8 y digo: de 8 á 16 van 8, que pongo debajo, ahora podria considerar el 9 como 8, por haberle quitado una unidad, y decir de 7 á 8 va 1; pero es mejor acostumbrarse á añadir dicha unidad al guarismo del sustraendo; y así diré: 7 y 1 que llevo son 8, de 8 á 9 va 1 que coloco debajo; paso á la columna inmediata y digo: de 5 á 2 no puede ser, tomaré una unidad del guarismo inmediato, y hallaré que de 5 á 12 van 7, que pongo debajo y llevo 1; 1 y 1 que llevo son 2, de 2 á 5 van 3, que pongo y no llevo nada; de 3 á 4 va 1, que pongo debajo; y resulta que la diferencia es 13718.

48 Tambien suele ocurrir el que haya ceros en el minuendo, y en este caso para encontrar la resta *se considera el primer cero de la derecha como* 10, *y todos los demas como* 9, *teniendo cuidado de considerar con una unidad ménos al primer guarismo significativo que se encuentre*; por ejemplo: si de 16037000 quisiese restar 4572695, los colocaria como he dicho (44) y aquí se ve:

16037000
4572695
11464305

Y despues de tirada la raya diria: de 5 á 10 van 5, que pongo; de 9 á 9 no va nada, y pongo 0; de 6 á 9 van 3; de 2 á 6 (porque siendo el 7 el primer guarismo significativo se debe considerar como con una unidad ménos, esto es, como 6) van 4; de 7 á 3 no puede ser, y así debo tomar una unidad del guarismo inmediato; pero como este es 0, es preciso irla á tomar al que sigue despues del 0, que es el 6, y como una unidad del 6 vale 100 respecto de las del 3, dejo con el pensamiento 90 ó 9 decenas en el lugar del cero, y tomo 10 unidades para añadirlas al 3 y poder restar de ellas las 7, y digo: de 7 á 13 van 6; ahora considerando el 0 como 9 diré: de 5 á 9 van 4; sigo despues: de 4 á 5, porque quité una unidad al 6, va 1; y como aun queda en el minuendo un guarismo que no tiene correspondiente en el sustraendo, le coloco debajo.

La razon de este procedimiento es que valiendo cada unidad del 7 del minuendo, 1000 unidades sencillas, si se toma una de ellas, quedará este guarismo en 6; y concibiendo que se dejan de las 1000 tomadas, 900 ó 9 centenas en el cero mas próximo al 7, 90 ó 9 decenas en el cero que sigue, y las 10 unidades restantes en el otro cero, resulta la regla.

Tambien pudiera haber considerado cada o como lo que es y añadir una unidad al guarismo del sustraendo, y entónces hubiera dicho: de 5 á 10 van 5, y llevo 1; 9 y 1 que llevo son 10, de 10 á 10 no va nada, y de 10 llevo 1; 6 y 1 que llevo son 7, de 7 á 10 van 3, y de 10 llevo 1; 2 y 1 que llevo son 3, de 3 á 7 van 4 y no llevo nada; de 7 á 13 van 6, y llevo 1; 5 y 1 que llevo son 6, de 6 á 10 van 4, y de 10 llevo 1; 4 y 1 que llevo son 5, de 5 á 6 va 1; y de nada á 1 va 1; con lo cual veo que me sale la misma resta que por el método anterior. Así, los principiantes elegirán el método que les parezca mas fácil; pero deben tener entendido que el segundo es el mas conforme con las operaciones que se han de ejecutar en lo sucesivo.

Esc. La razon de porque resulta la misma diferencia, ya se rebaje la unidad al guarismo del minuendo, ya se añada al del sustraendo, es que de este segundo modo el guarismo del minuendo tiene una unidad mas, y el del sustraendo otra; y como la diferencia que haya entre dichos guarismos no ha de provenir de lo que tengan de comun, debe resultar la misma.

49 De esta operacion se usa siempre que se trata de averiguar la diferencia entre dos números, ó de saber cuanto le falta á un número para que sea igual con otro. Así, si yo tratase de averiguar lo que ahorraba un sugeto que tenia de renta anualmente 56298 reales, y cuyo gasto era solo de 38179 reales, advertiria que lo que ahorraba estaba representado por la diferencia entre estos dos números; pues el ahorro era el sobrante de la renta sobre el gasto; y ejecutando la resta por el método que se acaba de esponer, hallaria que ahorraba 18119 reales.

Prueba de la operacion de sumar y de la de restar.

50 Ya hemos dado las reglas para sumar y restar, y hemos manifestado en la demostracion de los problemas, de que formaban la resolucion, que siguiéndolas se deberá obtener el resultado que deseábamos: pero como, á causa de nuestra limitacion, puede suceder que en la práctica de dichas reglas cometamos algun error, debemos manifestar por que medios se puede averiguar, lo cual se llama *probar una operacion*; de manera que prueba de una operacion es *aquella otra operacion por medio de la cual nos cerciorarnos de que la primera está bien ejecutada.* En general la operacion que debe servir de prueba de otra debe ser su opuesta, porque es mui raro el que se compensen los errores; y por esta causa la operacion de sumar se prueba restando, y la de restar sumando en esta forma:

Si quisiera averiguar si la operacion ejecutada (39) estaba bien hecha, empezaria á sumar por la columna de especie superior, esto es, por la izquierda, y diria: 4 y 2 son 6, y 1 son 7, este 7 le restaria del 8 que tiene debajo, con lo que me queda 1 que pongo debajo del 8; despues paso á la columna inmediata y digo: 7 y 5 son 12, este 12 le resto del 4 que está debajo, junto con el 1 que está debajo del 8, y que espresa 10 respecto del 4, de manera que diré: de 12 á 14 van 2, que pongo debajo del 4, y borro el 1 anterior ó pongo debajo de él un o en la forma que allí se ve; paso despues á la columna inmediata y digo: 2 y 5 son 7, y 6 son 13, y 9 son 22, y resto este 22 del 3 que tiene debajo, junto con las dos decenas que hai debajo del 4, diciendo: de 22 á 23 va 1, que pongo debajo del 3, y borro el 2 ó pongo un o debajo de él, porque no me ha quedado resta de las decenas: paso á la otra columna y digo: 5 y 4 son 9, y 2 son 11, que resto del 3, junto con el 1 anterior, esto es, de 13, diciendo: de 11 á 13 van 2, que pongo, y borro el 1 anterior ó pongo un o debajo; paso por último á la otra columna y digo: 9 y 3 son 12, y 9 son 21, y 5 son 26, y 3 son 29, y restando este 29 del 9 que está debajo, junto con las dos decenas que hai debajo del anterior, esto es, de 29, me resulta o que pongo debajo del 9, y borro el 2 anterior ó pongo debajo de él un o, y como de ejecutar todo esto no nos queda por último ninguna resta, es señal de haber practicado bien la operacion.

47259
20503
49
625
15903
84339
~~12120~~
0000

En efecto; por este procedimiento lo que hemos hecho ha sido quitar de la suma total: 1.º la suma de todas las decenas de millar de los sumandos, despues la de los millares, luego la de las centenas, luego la de las decenas, y finalmente la de las unidades; lo cual equivale á haber quitado de la suma total la suma de todas las partes de los sumandos; luego hemos quitado (Introd. ax. 3.º) la suma ó el valor de todos ellos; y como en la suma total no debia haber ni mas ni ménos que el valor de todos los sumandos, resulta que la resta debe ser igual con cero; pues si no lo fuese, en la suma hallada ántes habria mas ó ménos que el valor de todos los sumandos, y estaria por consiguiente mal ejecutada la operacion.

51 *Esc.* Hemos dicho en esta operacion que al restar en la segunda columna el 12 del 14, despues de puesto el 2 que sale por resta, se pueden ejecutar dos cosas: ó borrar el 1 que está debajo del 8, ó poner un o debajo de él. Hemos hecho lo primero por conformarnos con lo que dicen todos los autores de Aritmética; pero esto en casos complicados tendria sus inconvenientes, y por eso es mejor poner el o ó la resta que quede, debajo del 1, que sirve en todas ocasiones, como manifestarémos.

Supongamos que se quiera averiguar si la operacion ejecutada (41)

está bien hecha; para esto, colocarémos los sumandos y la suma 935574 por el mismo órden que allí están y aquí se presenta:

Empiezo á sumar por la izquierda y digo: 2 y 1 son 3, de 3 á 9 van 6, que pongo debajo del 9; paso despues á la siguiente columna, y la suma 57 la resto del 3, junto con el 6 que está debajo del 9, esto es, de 63, diciendo: de 57 á 63 van 6, que pongo debajo del 3, y o debajo del 6 anterior, porque no me ha quedado ninguna unidad en el lugar de las decenas; ó tambien pudiera hacer esta resta diciendo: de 7 á 13 van 6 que pongo, y de 13 llevo 1; 1 y 5 del 57 son 6, de 6 á 6 del 63 no va nada, y por consiguiente pongo o debajo del primer 6; paso á la columna inmediata, y su suma 55 la resto del 5, junto con el 6 anterior diciendo: de 55 á 65 van 10, pongo el o debajo del 5, y el 1 debajo del 6 anterior en la forma que allí se ve (aquí es donde no tiene lugar la regla de los demas autores). Paso á la columna inmediata, y su suma 94 la resto del 5, junto con el o y el 1 que hai en las columnas anteriores, esto es, de 105, diciendo: ó bien de una vez de 94 á 105 van 11, y pongo 1 debajo del 5, el otro 1 debajo del o, y un o por la parte inferior del 1 que está debajo del 6; ó hago la resta diciendo: de 4 á 5 va 1, que pongo debajo del 5, de 9 á 10 va 1 que pongo debajo del o, de 10 llevo 1, y de 1 á 1 que está debajo del 6, no va nada y pongo o; paso á la otra columna, y su suma 110 la resto del 7 con los dos unos anteriores, esto es, de 117 y digo: de 110 á 117 van 7 que pongo debajo del 7, y o debajo de los unos anteriores, porque de 117 llevo 11, y de 11 á 11 no va nada; paso finalmente á la última columna, y su suma 74 la resto del 4 que está debajo, junto con el 7 anterior, esto es, de 74, y como de 74 á 74 no va nada, pongo o debajo del 4, y o tambien debajo del 7, porque de 74 llevo 7, que restado del 7 que está ántes da tambien cero; y como todos los guarismos inferiores son cero, se sigue que la operacion está bien ejecutada.

54984
76698
85772
43886
3786
243576
193893
4987
87682
998
7677
53084
2893
75658
935574
660170
01100
00

Tambien se pudiera haber probado esta operacion restando sucesivamente de la suma total cada sumando; pero como esto seria mucho mas complicado que la misma operacion, en la práctica jamas se prueba la adicion, pues es mas fácil ejecutarla otra vez.

52 La operacion de restar se prueba *sumando el sustraendo con la resta, y si la suma es igual con el minuendo es prueba de que la operacion está bien hecha, sino no lo estará*; v. g. si quisiera averiguar si la operacion (48) estaba bien ejecutada, no haria mas que tirar una raya debajo de la resta, y sumar, como se ve en la página siguiente el sustraendo 4572695 con la resta 11464305.

Y saco la suma 16037000 que es igual con el minuendo; por lo que digo que la operacion estaba bien practicada. Esta prueba es tanto mas espedita cuanto que no se necesita tampoco tirar ninguna raya; porque se puede ir sumando el sustraendo con la resta, y viendo al mismo tiempo si van saliendo los guarismos del minuendo.

$$\begin{array}{r} 16037000 \\ 4572695 \\ \hline 11464305 \\ \hline 16037000 \end{array}$$

El fundamento de esta prueba es, que como la resta es lo que falta al sustraendo para ser igual con el minuendo, si esto que falta al sustraendo se lo añadimos, nos vendrá el minuendo. Tambien pudiéramos ejecutar esta prueba, quitando la resta del minuendo, y si nos venia por esceso el sustraendo seria prueba de estar bien ejecutada la operacion: lo cual se funda en que componiéndose el minuendo del sustraendo y de la resta, si le quitamos esta, nos debe venir el sustraendo.

De la multiplicacion ó de la operacion de multiplicar.

53 Vamos ahora á tratar de la segunda operacion de aumentar que es la de *multiplicar*. Esta es un caso particular de la de sumar, que es cuando todos los sumandos son iguales: así la suma indicada $4+4+4=12$, da á conocer que si tuviésemos un medio de tomar de un golpe tres veces el sumando 4, tendríamos inmediatamente la suma. Para hallar esto con mucha mas brevedad que por la suma, cuando el sumando que se repite es complicado y se ha de sumar un gran número de veces, se ha inventado la *multiplicacion*; y así se dice que multiplicar es *tomar un número tantas veces como unidades tiene otro.* La operacion por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *multiplicacion*; el número que se ha de tomar cierto número de veces se llama *multiplicando*; aquel que con sus unidades espresa las veces que se ha de tomar el multiplicando, se llama *multiplicador*, y lo que resulta de la operacion se llama *producto*; al multiplicando y multiplicador juntos se les da el nombre de *factores* del producto.

La operacion de multiplicar se indica escribiendo el multiplicando, despues un punto ó este signo $\times$, y luego el multiplicador; de modo que para indicar que se ha de multiplicar el 4 por el 3, lo harémos así: 4.3 ó 4×3, y para indicar el resultado se usa tambien del signo $=$; de manera que $4.3=12$ ó $4\times3=12$, espresa que el producto de multiplicar 4 por 3 es 12, y se lee: 4 *multiplicado por* 3 *igual ó es igual á* 12 (*).

(*) *Mr. Reynaud empléa el . para cuando el producto de los factores se supone efectuado, y el* $\times$ *para cuando la operacion ha de quedar indicada. Así, por* 2.5 *representa el número* 10, *producto ya efectuado, y por* 2×5 *el producto sin efectuar.*

Ocurre con mucha frecuencia el hacer oficios de multiplicando ó de multiplicador, sumas ó restas indicadas; y en este caso se encierran en un paréntesis de este modo: $(3+1)\times(5-2)=12$; lo que quiere decir que la suma de 3 con 1 que es 4, se debe multiplicar por lo que queda de restar 2 de 5 que es 3; y por eso hemos puesto el producto 12. Es mui esencial saber hacer uso de los paréntesis, y por eso advertirémos que el signo de multiplicar solo estiende sus facultades tanto á derecha como á izquierda, hasta que encuentre un signo $+$ ó un signo $-$ que no esté dentro de paréntesis.

54 Aquí esplicarémos esta operacion, refiriéndonos á números abstractos; pero es necesario advertir que por la naturaleza de la multiplicacion, hace oficios de multiplicando el que servia de sumando, de multiplicador el número que espresa las veces que se habia de sumar el multiplicando; y de producto el que allí era la suma; y como la suma debe ser de la misma especie que los sumandos, resulta que el producto debe ser de la misma especie que el multiplicando; y el multiplicador debe ser un número abstracto, que solo espresa las veces que se ha de tomar ó sumar el multiplicando. En algunas cuestiones conviene distinguir al multiplicando y al multiplicador; mas en el producto no influye el que se truequen los oficios del multiplicando y multiplicador como vamos á manifestar en el siguiente

55 TEOREMA. *El producto no se altera aun cuando se tome por multiplicando al multiplicador y al contrario*; ó lo que es lo mismo: *el órden de los factores no altera el producto.*

Esplicacion. Supongamos, por ejemplo, que se me pida el producto de multiplicar 4 por 3: voi á demostrar que el producto será el mismo ya multiplique el 4 por el 3, ó ya multiplique el 3 por el 4.

Dem. Pues que la multiplicacion es una suma abreviada, tendré que sumando tres veces el 4 hallaré el producto que busco; pero si descompongo á cada sumando 4 en las cuatro unidades de que consta, deberé sacar el mismo resultado de sumar estas unidades que de sumar los tres 4 á que equivalen; por lo mismo indicando y ejecutando la operacion como aquí se presenta:

$$\begin{array}{c} 4=1+1+1+1 \\ 4=1+1+1+1 \\ 4=1+1+1+1 \\ \hline 12=3+3+3+3 \end{array}$$

observo que el conjunto de unidades que están á la derecha del signo de igualdad, equivalen á los tres 4 que están en columna; pero estas mismas unidades sumadas equivalen á los cuatro 3 que hai debajo de la raya; luego (Introd. ax. 5.º) los tres 4 de la columna equivalen á los cuatro 3 de debajo de la raya; luego si tres 4 equivalen á cuatro 3, será tres veces un 4 igual cuatro veces un 3, y por lo mismo tres veces 4 es igual á cuatro veces 3 ó $3\times4=4\times3$.

Ó de otro modo: el conjunto de unidades en que están descompuestos los tres 4 es el mismo, ya se considere en filas que vayan de izquierda á derecha, ya en filas de arriba abajo; pero si se considera en filas de izquierda á derecha hai tres filas de á cuatro unidades, y si se considera en filas de arriba abajo hai cuatro filas de á tres unidades; luego tres veces una fila de cuatro unidades equivalen á cuatro veces una fila de tres; luego tres veces cuatro unidades es igual á cuatro veces tres unidades; luego tres veces cuatro igual cuatro veces tres, ó lo que es lo mismo $3\times4=4\times3$.

Y como podríamos aplicar este raciocinio á cualesquiera otros factores (pues siempre se descompondria el multiplicando en las unidades de que constase, y se pondria por sumando tantas veces como unidades tuviese el multiplicador) resulta en general que el órden de los factores no altera el producto, que era lo que debia demostrar (*).

Esc. Si se ejecuta la operacion se verá que los tres 4 sumados valen 12, y que los cuatro 3 sumados valen tambien 12, lo cual servirá para comprobar la operacion, mas no para demostrar la proposicion; pues la verdad de esta no depende del valor de los números que entran en la operacion.

Cor. De aquí se deduce que cuando se tengan indicadas muchas multiplicaciones, no importa nada la colocacion de los factores; y así, si yo quiero multiplicar el producto 12, de 4 multiplicado por 3, por 2, podré poner $4\times3\times2$, ó $3\times4\times2$, ó $2\times3\times4$, ó $2\times4\times3$. En efecto cuando indico $4\times3\times2$, doi á entender que el producto de los dos primeros, le debo multiplicar por 2; y como el producto de estos dos primeros no se altera, ya se coloquen 4×3 ó 3×4, resulta la primera transformacion $3\times4\times2$; ahora, en estas dos transformaciones con $4\times3\times2$ y $3\times4\times2$, quiero indicar que el producto de los dos primeros le debo multiplicar por 2; y como puedo cambiar los oficios de multiplicando y multiplicador, podré tomar al 2 por multiplicando, y al producto indicado 4×3 ó 3×4 que hace oficios de multiplicando, por multiplicador, y por lo mismo tendré: $2\times4\times3$ y $2\times3\times4$; y como lo mismo se aplicaria cuando hubiese mas factores, queda deducida la proposicion.

56 Entendido esto, para poder ejecutar una multiplicacion, es indispensable saber los productos que resultan de multiplicar entre sí un número dígito por otro dígito; sabida ya la operacion de sumar no puede

(*) *En adelante espresarémos esta frase por la cual debe concluir todo teorema con las letras* L. Q. D. D. *iniciales de* lo que debia demostrar.

costar esto trabajo; pues si me propusiese multiplicar como ántes el 4 por el 3, diria 4 y 4 son 8, y 4 son 12, y como ya he reunido tres cuatros, diré que 12 es el producto pedido. Mas como conviene acostumbrarse á encontrar de una vez el producto, pondrémos aquí una tabla en que estén contenidos todos ellos; la cual, despues de verificada por los principiantes, la deberán encomendar á la memoria.

Tabla de los productos de los números dígitos.

1 por 1 . es. 1	2 por 2 . son 4	3 por 3 . son 9
1 por 2 . . . 2	2 por 3 . . . 6	3 por 4. . . 12
1 por 3 . . . 3	2 por 4 . . . 8	3 por 5. . . 15
1 por 4 . . . 4	2 por 5. . . 10	3 por 6. . . 18
1 por 5 . . . 5	2 por 6. . . 12	3 por 7. . . 21
1 por 6 . . . 6	2 por 7. . . 14	3 por 8. . . 24
1 por 7 . . . 7	2 por 8. . . 16	3 por 9. . . 27
1 por 8 . . . 8	2 por 9. . . 18	
1 por 9 . . . 9		
4 por 4 son 16	5 por 5. son 25	6 por 6 son 36
4 por 5. . . 20	5 por 6. . . 30	6 por 7. . . 42
4 por 6. . . 24	5 por 7. . . 35	6 por 8. . . 48
4 por 7. . . 28	5 por 8. . . 40	6 por 9. . . 54
4 por 8. . . 32	5 por 9 . . 45	
4 por 9. . . 36		
7 por 7 son 49	8 por 8 son 64	9 por 9 son 81
7 por 8. . . 56	8 por 9. . . 72	
7 por 9. . . 63		

10 por 10 son. 100
10 por 100. 1000
10 por 1000. 10000
10 por 10000 100000
10 por 100000. 1000000

57 Aunque la tabla que acabamos de poner es mui á propósito para aprender estos productos, no obstante vamos á poner otra en donde se hallan, que merece llamar nuestra atencion, tanto por lo ingeniosa que es, y porque á semejanza de ella se necesitan formar otras en lo sucesivo, como para conservar el nombre de Pitágoras su inventor, y del cual ha recibido el nombre de

Tabla Pitagórica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La formacion de esta tabla es la siguiente: primero se escriben los nueve números dígitos por su órden, empezando de izquierda á derecha y separándolos con una raya de arriba abajo; despues se pone debajo una raya, se suma cada guarismo consigo mismo, y se pone la suma debajo de esta raya entre las dos que van de arriba abajo que comprendian al que se sumó. Despues se tira debajo de estas sumas otra raya, y se suma cada número de esta segunda fila que va de izquierda á derecha con el de la primera, y la suma se pone debajo en la columna correspondiente. Luego, se suma cada número de esta fila con el correspondiente de la primera, y así se continúa: de manera que todo el artificio de esta tabla consiste en sumar consigo mismo los números de la primera fila, y despues en sumar los números de la última fila formada con los de la primera.

Sirve esta tabla para hallar el producto de dos números dígitos cualesquiera; para lo cual *se busca uno de los factores en la primera fila, que va de izquierda á derecha, y el otro en la primera que va de arriba abajo; se ve el número que hai en la casilla en que se encuentran las dos filas que principian en las casillas donde están los factores, y este será el producto.* Así, si quiero averiguar el producto de 4 multiplicado por 3, buscaré el 4 en la 1.ª columna que va de izquierda á derecha, y el 3 en la 1.ª que va de arriba abajo, y veré que número hai en la casilla en que se encuentran; y como es el 12, digo que 12 es el producto de 4 por 3; ó de otro modo, veré en que casilla se encuentran la que de arriba abajo empieza por el 4, y la fila que de izquierda á derecha empieza por el 3: y como en esta casilla hallo 12, digo del mismo modo que ántes que 12 es el producto de 4 por 3. El producto de 7 por 6 es 42; el de 9 por 4 es 36, &c.

Cuya práctica se funda en que el número de cada casilla se compone de tantas veces el correspondiente de la superior, como unidades tiene el que está á su izquierda en la primera columna, esto es en la que va de arriba abajo.

58 Ahora, los casos que pueden ocurrir en la multiplicacion son tres: *multiplicar un número dígito por otro dígito; un compuesto por un dígito, ó un dígito por un compuesto* (que es lo mismo, porque nada importa (55) el cambiar los oficios de los factores); *y un compuesto por otro compuesto.*

Para multiplicar un número dígito por otro dígito no se necesita mas regla que saber la tabla de memoria: para multiplicar un número compuesto por un dígito ó un dígito por un compuesto, reunirémos las reglas en el siguiente

59 PROBLEMA. *Multiplicar un número compuesto por un dígito, ó un dígito por un compuesto.*

Res. Colóquese el dígito debajo de las unidades del compuesto: tírese una raya por la parte inferior, y empiécese á multiplicar por la derecha, esto es, por las unidades de inferior especie; y así, lo primero que se debe hacer es multiplicar el guarismo que espresa las unidades del multiplicando, que es el compuesto, por el multiplicador que es el dígito; si en este producto hai solo unidades, se colocan debajo de las unidades de los factores; si contiene solo decenas, se pone o en el lugar de las unidades, y se guardan las decenas para añadirlas al producto de las decenas de la columna inmediata; y si contiene decenas y unidades, se ponen las unidades debajo de las unidades de los factores, y se guardan las decenas para añadirlas al producto de las decenas de la columna inmediata.

Despues, se multiplican las decenas del multiplicando por el mismo multiplicador; á su producto se añaden las que se llevaban del producto de las unidades, y se colocan las decenas que resulten debajo de las decenas, guardando las centenas, si las hai, para añadirlas al producto de las centenas de la columna inmediata. Luego, se multiplican por el mismo multiplicador las centenas del multiplicando, á cuyo producto se añaden las que se llevaban del producto de las decenas, y así se continúa hasta que no haya mas guarismos en el multiplicando.

Ej. Supongamos que se quiere multiplicar el número 356 por 4 ó 4 por 356; como al ejecutar esta operacion no importa nada el que se tome por multiplicando al multiplicador, y al contrario, siempre se toma por multiplicador el mas sencillo, que aquí es el número dígito 4, y así le colocaré debajo del 356, como acabamos de decir, en esta forma:

$$\begin{array}{r} 356 \\ 4 \\ \hline 1424 \end{array}$$

Tiro debajo una raya, y empiezo á multiplicar por las unidades del multiplicando, diciendo: 6 por 4 son 24; y como en 24 hai 2 decenas y 4 unidades, coloco el 4 debajo de las unidades de los factores, y guardo las 2 decenas para añadirlas al producto de las decenas, y digo: 5 por 4 son 20, y 2 que llevaba son 22; y como en 22 que son decenas, hai dos centenas y dos decenas, pongo las 2 decenas debajo de las de los factores, y guardo las 2 centenas para añadirlas al producto de la columna siguiente, en la cual digo: 3 por 4 son 12, y 2 que llevaba son 14 que son centenas, porque el multiplicando 3 espresaba centenas, y como en 14 centenas hai un millar y 4 centenas, coloco las 4 centenas debajo de las de los factores, y guardo el 1 millar para añadirle al producto de la columna siguiente; pero como ya no hai mas guarismos en el multiplicando, no se puede ejecutar otra multiplicacion; y así este 1 millar le coloco hácia la izquierda del 4 en el producto, y saco que 356 multiplicado por 4 da 1424.

Dem. La colocacion de los factores no es esencial, solo se ejecuta por comodidad; la raya se tira para separar el multiplicador, del producto que se ha de colocar debajo: todas las demas reglas están reducidas á multiplicar las unidades, las decenas, centenas, &c. esto es, todas las partes del multiplicando por el multiplicador; y como al mismo tiempo vamos reuniendo el producto de las unidades con el de las decenas, porque añadimos á este las decenas que llevábamos del producto anterior, y estas dos con el de las centenas, &c. nos resulta al fin que en el número que tenemos debajo de la raya, se halla el producto de todas las partes del multiplicando por el multiplicador; luego en virtud del 2.º axioma (Introd.) tenemos el producto de todo el multiplicando por el multiplicador. L. Q. D. H.

60 En la práctica no se necesita ir diciendo la especie de unidades que espresa cada producto particular: en el ejemplo anterior se han puesto todas las palabras, porque como es el primero, es preciso comprender bien lo que se hace; pero en la práctica no se necesitan mas palabras que las que se ven en el ejemplo siguiente: supongamos que quiera multiplicar 28974 por 7: colocaré los números como he dicho (59) y aquí se ve:

$$\begin{array}{r} 28974 \\ 7 \\ \hline 202818 \end{array}$$

Y despues de tirada la raya diré: 4 por 7 son 28, pongo el 8 y llevo 2; 7 por 7 son 49, y 2 que llevaba son 51, pongo 1 y llevo 5; 9 por 7 son 63, y 5 que llevaba son 68, pongo 8 y llevo 6; 8 por 7 son 56, y 6 que llevaba son 62, pongo 2 y llevo 6; 2 por 7 son 14, y 6 que llevaba son 20, por 0 y llevo 2; que como no hai mas guarismos en el multiplicando, pongo 2 á la izquierda del 0, y tengo en 202818 el producto de 28974 por 7.

61 Antes de pasar al tercer caso, harémos algunas observaciones que aclararán mucho su procedimiento. En primer lugar, *cuando uno de los factores sea igual con la unidad, el producto será igual con el otro factor*; porque si la unidad es el multiplicador, quiere decir que solo es sumando una vez el multiplicando, y en este caso no habiendo mas

de un sumando, la suma que aquí es el producto será igual con él. Si la unidad hiciese oficios de multiplicando, de colocarle por sumando tantas veces como unidades hai en el multiplicador, resultará una suma con tantas unidades como el multiplicador. Si uno de los factores es cero, el producto será tambien cero; porque de tomar un número ninguna vez, ó de tomar muchas veces nada, resultará siempre nada.

62 Ahora, atendiendo al sistema de numeracion, advertimos que á un número se le hace diez veces mayor (22) de lo que era, ó equivale á diez veces él mismo, solo con añadirle un cero; luego para multiplicar un número cualquiera por 10 basta añadirle un cero; por la misma razon se tendrá un número multiplicado por 100 cuando se le añadan dos ceros; y en general resulta del sistema de numeracion que *para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, no hai mas que añadir á dicho número tantos ceros como habia despues de la unidad.*

63 De aquí se sigue que la multiplicacion de un número cualquiera por otro que se componga de un guarismo solo significativo y de ceros, se reduce á la de por uno dígito; pues en este caso se multiplica el número compuesto por el guarismo significativo, y al producto se le añadirán tantos ceros como habia despues del guarismo significativo en el multiplicador.

En efecto; si tengo que multiplicar 728 por 300, indicaré la operacion de este modo: 728×300;
pero el 300 es lo mismo que 3×100 por la observacion anterior, luego poniendo en vez de 300 este valor, la espresion de arriba será:

$$728 \times 3 \times 100;$$

pero aquí tengo indicado que el producto de 728 por 3 que es 2184, le debo multiplicar por 100; y como para multiplicar por 100 basta solo añadir dos ceros, resulta que si al 2184 le añadimos dos ceros, tendrémos que 218400 es el producto de 728 por 300.

64 Comprendido esto, tenemos ya lo suficiente para entender los fundamentos de la resolucion del tercer caso, que darémos en el siguiente

PROBLEMA. *Multiplicar un número compuesto por otro compuesto.*

Res. Tómese por multiplicador el que tenga ménos guarismos, y póngase debajo del multiplicando que es el otro número, de modo que se correspondan en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, &c.; tírese una raya, multiplíquese todo el multiplicando por el primer guarismo de la derecha del multiplicador (60), cuyo producto se pondrá debajo de la raya, de modo que caigan las unidades, decenas, &c. debajo de las unidades, decenas, &c. de los factores; multiplíquese despues todo el multiplicando por el segundo guarismo del multiplicador, contando siempre de derecha á izquierda, y colóquese este producto un lugar mas hácia la izquierda, de modo que el último guarismo de la derecha de este segundo producto parcial (*), esté debajo del segundo guarismo del primer producto. Luego, multiplíquese todo el multiplicando por el guarismo siguiente del multiplicador, y colóquese este producto parcial debajo del antecedente, corriéndole tambien un lugar hácia la izquierda; y continúese de este modo hasta que no haya mas guarismos en el multiplicador. Despues se tirará debajo de estos productos parciales otra raya, y se sumarán todos ellos poniendo la suma debajo de dicha raya; con lo cual queda ejecutada la multiplicacion, espresando la suma el producto total.

Ej. Supongamos que hai que multiplicar 9658 por 734; tomaré por multiplicador el 734, porque es el menor, y le colocaré debajo del multiplicando 9658, en esta forma:

$$\begin{array}{r} 9658 \\ 734 \\ \hline 38632 \\ 28974 \\ 67606 \\ \hline 7088972 \end{array}$$

Y despues de tirada la raya, empezaré multiplicando el 9658 por 4, que es el primer guarismo del multiplicador, diciendo: 8 por 4 son 32, pongo 2 y llevo 3; 5 por 4 son 20, y 3 que llevaba son 23, pongo 3 y llevo 2; 6 por 4 son 24, y 2 que llevaba son 26, pongo el 6 y llevo 2; 9 por 4 son 36, y 2 que llevaba son 38, pongo 8 y llevo 3; que como no hai mas guarismos coloco el 3 á la izquierda del 8. Paso ahora á multiplicar todo el multiplicando 9658 por el segundo guarismo del multiplicador, que es el 3, y digo: 8 por 3 son 24, pongo el 4 debajo del segundo guarismo del primer producto parcial 38632, que es el 3 (porque he dicho que se debe correr un lugar mas hácia la izquierda cada producto parcial) y de 24 llevo 2; 5 por 3 son 15, y 2 que llevaba son 17, pongo el 7 y llevo 1; 6 por 3 son 18, y 1 que llevaba son 19, pongo el 9 y llevo 1; 9 por 3 son 27, y 1 que llevaba son 28, pongo el 8 y llevo 2; que como no hai mas guarismos en el multiplicando, le coloco á la izquierda del 8. Paso despues á multiplicar todo el multiplicando por el tercer guarismo del multiplicador, que es el 7, y digo: 8 por 7 son 56, pongo el 6 debajo del 7, segundo guarismo del producto parcial antecedente, y llevo 5; 5 por 7 son 35, y 5 que llevaba son 40, pongo 0 y llevo 4; 6 por 7 son 42, y 4 que llevaba son 46, pongo el 6 y llevo 4; 9 por 7 son 63, y 4 que llevaba son 67, pongo el 7 y llevo 6, que coloco á la izquierda del 7, por no haber mas guarismos en el multiplicando. Tiro una raya, porque ya no hai mas guarismos en el multiplicador, y sumo todos estos productos parciales, diciendo: 2 es 2 que pongo debajo de la raya en la misma columna; 3 y 4 son 7, que pongo debajo; 6 y 7 son 13, y 6 son 19, pongo el 9 y llevo 1; 8 y 1 que llevaba son 9, y 9 son 18, pongo el 8 y llevo 1; 3 y 1 que llevaba son 4, y 8 son 12, y 6 son 18, pongo el 8 y llevo 1; 2 y 1 que llevaba son 3, y 7 son 10, pongo el 0 y llevo 1; 6 y 1 que llevaba son 7, que pongo debajo, y tengo en la suma 7088972 el producto total de los dos números propuestos.

(*) *A cada producto que resulta de multiplicar el multiplicando por un guarismo del multiplicador, se le llama producto* parcial, *porque proviene de multiplicar por una parte; de manera que siempre que de aquí en adelante usemos de la voz* parcial, *será con el objeto de manifestar que aquella operacion ó resultado á que se aplique, se ha ejecutado en parte.*

Dem. El tomar por multiplicador el que tenga ménos guarismos, es porque de este modo hai ménos productos parciales que poner, y resulta mas sencilla la operacion sin que se altere el producto (55). La colocacion de los factores es por comodidad; el tirar la raya es para separar el multiplicador del producto de multiplicar el multiplicando por las unidades del multiplicador; todas las demas reglas están reducidas á multiplicar todo el multiplicando por las unidades del multiplicador; despues todo el multiplicando por las decenas del multiplicador, y hemos de colocar este producto debajo del guarismo de las decenas del anterior, porque de multiplicar por decenas (63) debe resultar al fin un cero, y los guarismos significativos deben empezar desde las decenas en adelante, y por consiguiente se deben colocar debajo de las decenas del primer producto parcial para poder ejecutar despues la suma; despues hemos multiplicado por las centenas, y así sucesivamente hasta haber multiplicado por todos los guarismos ó partes del multiplicador; pero todos estos productos de haber multiplicado el multiplicando por las partes del multiplicador, los hemos sumado, y reunido por consiguiente en un solo número, que es el que sale debajo de la raya; luego (Introd. ax. 3.º) este número que contiene la suma de los productos del multiplicando por todas las partes del multiplicador, contendrá el producto de todo el multiplicando por todo el multiplicador. L. Q. D. H.

{ 65 Hemos prometido en la introduccion que combinaríamos la análisis con la síntesis para conciliar la claridad, la sencillez, la exactitud, y la facilidad en las operaciones, con el método de invencion; y así vamos á resolver este caso analíticamente.

{ Supongamos que tengo que multiplicar el número 8658 por el 734; por lo que indicarémos el producto de esta manera 9658×734; pero en virtud del sistema de numeracion, tenemos que el multiplicador se compone de 7 centenas, 3 decenas y 4 unidades, luego le podrémos poner bajo esta forma 700+30+4; y por lo mismo la operacion que tenemos arriba indicada se convertirá en 9658×(700+30+4).

{ Ahora, quedará hecha esta multiplicacion, si multiplicamos el multiplicando por cada parte del multiplicador; luego será:

$$9658\times(700+30+4)=9658\times700+9658\times30+9658\times4;$$

que efectuando la multiplicacion, teniendo presente lo advertido (63) se convierte en 6760600+289740+38632;

y para ejecutar esta suma colocarémos los sumandos como se ha dicho (38), y tendrémos: pero como los ceros últimos no hacen al caso, podrémos concebir que no están, y entónces quedará la colocacion de los productos parciales como ántes (64), y podrémos deducir por consiguiente la regla espuesta en la resolucion del poblema sintéticamente.

386 3 2
2897 4(0
67606(0 0
70889 7 2

{ Con esto se advertirá bien claramente la escelencia de uno y de otro método, y se echará de ver la ventaja del analítico; sin embargo, si le hubiéramos usado en la resolucion de los problemas anteriores, los principiantes en la práctica querrian hacer el mismo raciocinio, lo que los detendria sobremanera; y sino le hacian, no quedarian satisfechos, porque al fin las reglas que se dan generalmente se han deducido de un ejemplo particular; y aunque el argumento de analogía tiene mucha fuerza, no obstante no tiene tanta como aquel que directamente llega desde las reglas generales á convencer de que se conseguirá el objeto en general. Por esta causa seguirémos siempre con nuestro método alternado, de manera que resulte la mayor utilidad y brevedad posible al principiante, que es para quien escribimos; pues, atendiendo al número de cosas que tenemos necesidad de saber; no podemos ver sin un particular sentimiento el que los autores quieran sostener sus caprichos ú opiniones en perjuicio de los principiantes, cuyo tiempo de estudio jamas se economizará lo suficiente. }

66 Por esta misma razon vamos á manifestar todos los casos de abreviacion de que es susceptible esta operacion.

Ya hemos dicho que cuando el multiplicador consta de un solo guarismo significativo y de ceros, queda hecha la multiplicacion con multiplicar por dicho guarismo y añadir despues los ceros; ahora vamos á probar que en general, *cuando uno cualquiera de los factores ó ambos terminan en ceros, se abrevia mucho la operacion, multiplicando solo por los guarismos significativos y añadiendo al producto tantos ceros como hai al fin en ambos factores juntos.*

En efecto, si tengo que multiplicar 5800 por 37, será en virtud de lo espuesto (§ 63) $5800 \times 37 = 58 \times 100 \times 37 =$ (§ 55) $58 \times 37 \times 100$; luego si multiplico el 58 por 37, y añado al producto dos ceros (62), tendré en 214600 el producto de estos tres factores ó de los dos primitivos.

Del mismo modo si fuese 43500 multiplicado por 230, tendria

$43500.230 = 435.100.23.10 = 435.23.100.10 = 435.23.1000 = 10005000$

Luego multiplicando el 435 por el 23, y despues por 1000, lo que se consigue añadiendo tres ceros, tendrémos efectuada la operacion y manifestada la regla de la abreviacion.

En la práctica se ejecuta la colocacion y operacion como se presenta en la página siguiente. (*A*), (*B*).

(*A*)	(*B*)	(*C*)
43500	5800	742000
230	37	3500
1305	406	3710
870	174	2226
10005000	214600	2597000000

Del mismo modo si tuviese que multiplicar 742000 por 3500, lo ejecutaria como se ve en (*C*).

Tambien se abrevia esta operacion cuando los ceros se hallan entre los guarismos significativos del multiplicador; en cuyo caso *se multiplica el multiplicando por los guarismos significativos que hai en el multiplicador hasta llegar á los ceros; en llegando á los ceros, no se multiplica por ellos, porque el producto de un número cualquiera por* o *siempre es* o, *y así se pasa á multiplicar por los demas guarismos significativos; pero teniendo cuidado de correr el primer producto hácia la izquierda tantos lugares mas uno, cuantos ceros hai*; es decir, que si hai un cero se debe colocar el primer producto dos lugares; si dos ceros, tres lugares, &c. mas hácia la izquierda.

Por ejemplo: si tuviese que multiplicar 2576924 por 1000503, colocaria los factores de esta forma:

2576924
1000503
7730772
12884620
2576924
2578220192772

Multiplicaria todo el multiplicando por 3, que es el primer guarismo de la derecha del multiplicador lo que da el producto parcial 7730772; como despues del 3 hai un o en el multiplicador, paso á multiplicar por el primer guarismo significativo que encuentro que es el 5, y coloco este producto de modo que su último guarismo o caiga debajo del segundo 7 del producto parcial antecedente, esto es, corriéndole dos lugares hácia la izquierda, porque solo hai un cero. Como despues vuelvo á encontrar ceros, paso á multiplicar por el guarismo significativo que hai despues de ellos que es el 1, coloco el producto cuatro lugares mas hácia la izquierda respecto del producto parcial antecedente; porque aquí hai tres ceros; sumo despues estos productos, y saco que el número 2576924 multiplicado por 1000503 da 2578220192772 por producto.

La razon de esta práctica es, que como de multiplicar por cero resultaria cero, que no influye nada en la suma, se omite esta operacion; y como al multiplicar por cada cero se debia correr el producto un lugar hácia la izquierda respecto del anterior, el producto del primer guarismo significativo no solo se deberá correr un lugar, que por sí le correspondia, sino tantos mas cuantos ceros hai.

{ Cuando se tiene que multiplicar por 11, se puede ejecutar inmediatamente poniendo el último guarismo; despues se suma este con el anterior, y la suma si se puede espresar con un número dígito se pone; sino, se ponen las unidades y se guarda la decena para añadirla á la suma del penúltimo con su anterior, y así se continúa. Así, si quiero multiplicar 7890356 por 11, diré: 6 es 6, que pondré en un lugar separado, y luego diré: 6 y 5 son 11, pongo el 1 á la izquierda del 6, y llevo 1 para añadir á la suma siguiente; continúo; 5 y 3 son 8, y 1 que llevaba son 9 que pongo á la izquierda; luego, 3 y 0 son 3 que pongo y sigo: 0 y 9 son 9 que pongo tambien siempre á la izquierda del último; 9 y 8 son 17, pongo el 7 y guardo el 1, y digo: 8 y 7 son 15, y 1 son 16, pongo el 6 y guardo el 1, diciendo: 7 que es el último guarismo y 1 que llevaba son 8, que pongo á la izquierda y saco el producto 86793916. La razon de esta práctica es que al hacer la multiplicacion, los productos parciales serian iguales con el multiplicando, y quedarian colocados como aquí se ve:

$$\begin{array}{r} 7890356 \\ 11 \\ \hline 7890356 \\ 7890356 \\ \hline 86793916 \end{array}$$

{ De modo que está reducido á sumar los guarismos como dice la regla. Del mismo modo hallaríamos las reglas para cuando el multiplicador fuese 111, y 1111, &c.

{ En la sociedad ocurre con bastante frecuencia el tener que contar por docenas, de manera que se llegan á tener en la memoria las unidades que componen hasta 9 docenas; pero por si acaso algunos no tienen esta costumbre dirémos que:

1 docena ó 1 vez 12 son	12 unidades.
2	24
3	36
4	48
5	60
6	72
7	84
8	96
9	108

{ Con lo cual tendrémos que si el multiplicador fuese 12, podríamos hallar el producto como si fuese número dígito; porque si tuviéremos que multiplicar 587 por 12 diríamos como se ve en (*A*): 7 por 12 son 84, pondríamos el 4 y guardaríamos las 8 decenas para añadirlas al producto siguiente: diciendo: 8 por 12 son 96, y 8 que llevaba son 104, pondria el 4 y reservaria las 10 decenas; despues diria 5 por 12 son 60, y 10 que llevaba son 70, que pongo, y tengo ejecutada la operacion como si el multiplicador fuese un número dígito.

$$\begin{array}{r} (A) \\ 587 \\ 12 \\ \hline 7044 \end{array}$$

{ Cuando el multiplicador tiene solo dos guarismos significativos, y el uno es la unidad, se indica la operacion y solo se multiplica por el guarismo que no es la unidad, cuidando poner este producto debajo del multiplicando corriéndole un lugar hácia la izquierda, si el 1 se halla en

el lugar de las unidades, ó hácia la derecha si en el de las decenas, en esta forma:

$$\begin{array}{r} 435\times71 \\ 3045 \\ \hline 30885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 435\times17 \\ 3045 \\ \hline 7395 \end{array}$$

{ Donde se ve que la abreviacion solo consiste en ahorrarse el escribir una vez el multiplicando.

{ Cuando ambos factores son mui crecidos se abrevia la operacion de este modo: se forma del multiplicando una tabla análoga á la pitagórica, esto es, se pone aparte el multiplicando, y á su izquierda un 1, separándole con una raya que vaya de arriba abajo; despues se suma consigo mismo dicho multiplicando, y esta suma se pone debajo, colocando enfrente y á la izquierda de la raya un 2; despues se suma esta columna con el mismo multiplicando poniendo un 3 á su izquierda, y luego esta que resulte tambien con el mismo multiplicando poniendo un 4 á su izquierda, y así se continúa hasta haber formado nueve de estas columnas; despues, para hacer la multiplicacion, no se hace mas que sacar de esta tabla el número que está enfrente del guarismo que está á la izquierda de la raya, igual con el primero del multiplicador; despues se busca el del segundo guarismo, y se coloca un lugar mas hácia la izquierda (y si hubiese ceros se correrá tantos lugares mas uno como ceros hai) y así se continúa hasta que no haya mas guarismos en el multiplicador; en cuyo caso se suman todos estos productos, y queda hecha la operacion.

{ *Ejemplo.* Si tuviese que multiplicar 3875693209037 por 4690740315 3 formaria una tabla del primero 3875693209037 como aquí se presenta:

1	3875693209037
2	7751386418074
3	11627079627111
4	15502772836148
5	19378466045185
6	23254159254222
7	27129852463259
8	31005545672296
9	34881238881333

$$\begin{array}{r} 3875693209037 \\ 469074031 53 \\ \hline 11627079627111 \\ 19378466045185 \\ 3875693209037 \\ 11627079627111 \\ 15502772836148 \\ 27129852463259 \\ 34881238881333 \\ 23254159254222 \\ 15502772836148 \\ \hline 18179870385364286189366 1 \end{array}$$

Despues, coloco los números para hacer la multiplicacion; y como el primer guarismo del multiplicador es el 3, veo en la tabla que número hai enfrente del 3, y le coloco debajo de la raya de modo que se corresponda con las unidades; despues veo cual es el que está en la tabla enfrente del 5, segundo guarismo del multiplicador, y le coloco debajo del anterior, corriéndole un lugar hácia la izquierda; y así continúo hasta que no haya mas guarismos en el multiplicador, en cuyo caso sumo todos estos productos parciales, y tengo ejecutada la operacion con mucho descanso, sin tener aquella intension de espíritu que es necesaria para conservar en multiplicaciones largas las unidades que se llevan; y sin temor de tener que volver á empezar de nuevo la multiplicacion parcial, si uno se distrajo por alguna casualidad. }

67 Las cuestiones que conducen á la operacion de multiplicar se presentan bajo tres aspectos diferentes, que se llaman usos de esta operacion: 1.º *cuando se quiere hacer á un número un cierto número de veces mayor*; 2.º *cuando, conocido el valor de una unidad, se quiere averiguar el de muchas*; y 3.º *cuando se quieren reducir unidades de especie superior á unidades de especie inferior.*

Para hacer á un número un cierto número de veces mayor, *se le multiplica por aquel que espresa con sus unidades las veces que se le quiere hacer mayor*: v. g. si al 586 le quiero hacer 47 veces mayor, multiplicaré el 586 por 47, y tendré que el producto 27542 es un número 47 veces mayor que el 586. Cuando el número de veces que se quiere hacer mayor un número, es pequeño, no se dice claramente en el lenguage vulgar; y así se debe advertir que estas palabras *tomar el duplo de un número*, *el triplo*, *el cuádruplo*, *el quíntuplo*, &c. ó *duplicar*, *triplicar*, *cuadruplicar*, *quintuplicar*, &c. equivalen á multiplicar dicho número por 2, por 3, por 4, por 5, &c. Tambien se dice *céntuplo* de un número ó *centuplicar* un número, cuando se le multiplica por 100.

Cuando se conoce el valor de una unidad y se quiere averiguar el de muchas: *se multiplica el valor de la unidad por el número de ellas.*

Por ejemplo: si quiero averiguar lo que valen 891290 varas de paño á 50 reales la vara, multiplicaré el número de varas 891290 por el valor de una de ellas que es 50 reales, y hallaré que valen 44564500 reales.

La razon de esta práctica es, que por cada unidad que haya se debe tomar una vez su valor; luego se deberá tomar tantas veces el valor de una, como unidades hai.

Para reducir unidades de especie superior á unidades de especie inferior, *se multiplica el número de unidades de especie superior, por aquel número que con sus unidades espresa las unidades de especie inferior de que se compone la mayor.*

1.er ejemplo. Quiero saber cuantos pies tienen 8 varas; como la vara es la unidad de especie superior y se compone de 3 pies, multiplicaré el número 8 de varas por 3, y tendré en el producto 24 los pies que hai en 8 varas.

2.º ej. Quiero averiguar cuantos maravedíses hai en 83 doblones; para esto multiplicaré el 83 por 2040 maravedíses que tiene un doblon, y sacaré que son 169320 maravedíses; pero como no es fácil conservar en la memoria las unidades de especie inferior de que se com-

pone otra superior cuando hai otras unidades intermedias, y lo que se conserva con facilidad es el órden con que se suceden las unidades, es mas cómodo irlas reduciendo sin interrupcion; y así, en el ejemplo propuesto veré primero cuantos pesos hai en los 83 doblones; despues los pesos que saque, veré los reales que componen, y luego este número de reales veré los maravedíses que tienen en esta forma:

Primero multiplico los 83 doblones por 4, que son los pesos que tiene un doblon, y saco que en 83 doblones hai 332 pesos; multiplico despues estos 332 pesos por 15, que son los reales que tiene un peso, y saco que los 83 doblones ó los 332 pesos tienen 4980 reales; luego multiplico este número de reales por 34, que son los maravedíses que tiene un real, y saco que los 83 doblones contienen 169320 maravedíses.

83 doblones
4
332 pesos
15
1660
332
4980 reales
34
1992
1494
169320 maravedíses.

3.er ej. Quiero averiguar cuanto importan 87 quintales de seda á 12 reales la onza. Aquí primero tengo que ver las onzas que hai en 87 quintales, y luego multiplicar el número de onzas por 12 reales que es su valor; lo que haré del modo siguiente:

Multiplico los 87 quintales por 4, que son las arrobas que hai en el quintal, y saco 348 arrobas; multiplico despues estas arrobas por 25, que son las libras de que se compone la arroba, y saco 8700 libras; multiplico despues este número de libras por 16, que son las onzas de que se compone la libra, y saco que los 87 quintales tienen 139200 onzas; y multiplicando ahora este número de onzas por 12 reales, valor de la onza, tendré 1670400 reales, que será el valor de los 87 quintales de seda á 12 reales la onza.

87 quintales.
4
348 arrobas.
25
1740
696
8700 libras.
16
522
87
139200 onzas.
12
2784
1392
1670400 reales.

4.º ej. Si quisiera saber cuantos cuartillos habia en 63 cahices de trigo, primero multiplicaria por 12 y sacaria 756 fanegas; este número de fanegas le multiplicaria por 12 y sacaria 9072 celemines; y multiplicando esto por 4 sacaria 36288 cuartillos, que serán los que habrá en los 63 cahices.

De la operacion de dividir ó de la division.

68 Vamos ahora á tratar de la segunda operacion de disminuir que se origina de la resta, cuando intentamos averiguar cuantas veces se puede restar el sustraendo del minuendo; y como tantas veces como se

pueda restar, de tantas veces se compondrá el minuendo, ó tantas veces estará contenido el sustraendo en el minuendo, queda reducida entónces esta operacion de restar á la de *dividir*; y se dice que dividir *es averiguar cuantas veces un número contiene á otro*. La operacion por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *division*; el número que ha de contener, ó lo que es lo mismo, el que se ha de dividir, se llama *dividendo*; el que ha de estar contenido, ó aquel por quien se ha de partir, se llama *divisor*; y lo que resulta *cociente*; al dividendo y divisor juntos se les da el nombre de *términos de la division*.

Así, si quisiese averiguar cuantas veces podia restar el 4 del 12, diria: $12-4=8$, y ya le tengo restado una vez; ahora le restaria del 8, diciendo: $8-4=4$, y lo tengo ejecutado dos veces; y finalmente volviéndole á restar de esta segunda resta 4, tendria $4-4=0$; con lo que veo que le he podido restar tres veces, y que está contenido por consiguiente el 4 en el 12 tres veces.

De aquí se deduce que como el dividendo hace oficios de minuendo, y el divisor de sustraendo, los dos términos de la division deben ser homogeneos (43); y el cociente que espresa las veces que se puede restar el uno del otro, será por precision un número abstracto.

69 De esto mismo se deduce tambien que se puede dar orígen á la division, considerando que hai que repartir un cierto número de cosas entre un cierto número de personas; en este caso, el método mas sencillo que hai para ejecutarlo, es ver en abstracto cuantas veces el número que espresa las personas, se puede restar del número que espresa las cosas; pues por cada vez que se pueda restar le tocará á cada persona una cosa, en cuyo caso el cociente es de la misma especie que el dividendo; y el divisor, al ejecutar la operacion, se considera como un número abstracto.

Tambien pudiéramos haber dado orígen á la division de su inversa la multiplicacion, diciendo que *dividir es buscar un número que multiplicado por el divisor dé el dividendo; ó que es una operacion por medio de la cual, dado un producto y uno de los factores, venimos en conocimiento del otro factor.*

Para indicar que un número se ha de dividir por otro, se pone el dividendo, debajo un raya, y luego el divisor; ó se pone el dividendo, despues dos puntos, y luego el divisor. Así, si me propongo indicar la division de 12 por 4, lo ejecutaré en esta forma $\frac{12}{4}$, ó $12:4$ que se lee: 12 *dividido por* 4; y para indicar el resultado usarémos del signo $=$, que es el que sirve para dar á conocer el resultado de toda operacion indicada; de manera que como el 4 está contenido tres veces en el 12, diré: $\frac{12}{4}=3$, ó $12:4=3$.

70 Tres casos pueden ocurrir en la division, á saber: *dividir un número dígito por otro dígito; dividir un número compuesto por un dígito, y dividir un compuesto por otro compuesto.*

Para dividir un número dígito por otro dígito, y aun uno compuesto solo de dos guarismos por uno dígito, que sea mayor que el guarismo de especie superior del compuesto, no hai mas que saber los productos que resultan de multiplicar entre sí los números dígitos; porque considerando al dividendo como un producto, no hai mas que averiguar por que número se necesita multiplicar el divisor paraque el producto sea igual al dividendo, ó el producto inmediatamente inferior á él; y si de repente no ocurre se va multiplicando mentalmente el divisor por los números dígitos, hasta que se llegue á tener en el producto el dividendo, ó el producto inmediatamente inferior al dividendo; y aquel número por que se haya multiplicado el divisor, será el cociente.

1.er ejemplo. Quiero saber cuantas veces el 8 contiene al 2, ó cuanto vale ocho dividido por 2; sino veo desde luego por que número debo multiplicar el 2 paraque produzca 8, empezaré multiplicando mentalmente el 2 por todos los números dígitos hasta que encuentre por producto el 8, ó el inferior que mas se le acerque, y así diré: 2 por 1 es 2, y como 2 no es igual con 8, sigo: 2 por 2 son 4, que como 4 no es tampoco igual con 8, continúo diciendo: 2 por 3 son 6, que como no es igual con 8, sigo: 2 por 4 son 8, y como este producto 8 es igual con el dividendo que se me dió, y para hallar este producto he multiplicado el divisor 2 por 4, digo que el cociente de dividir 8 por 2 es 4.

2.º ej. Si quisiera averiguar cual era el cociente de dividir 9 por 4, diria, si desde luego no advertia cual era: 4 por 1 es 4, que como 4 no es igual con 9, sigo: 4 por 2 son 8, que como tampoco es igual con 9, continúo: 4 por 3 son 12, y como 12 es mayor que 9, advierto que no cabe un número exacto de veces el 4 en el 9; y siendo el producto próximo inferior al 9 el 8, digo que cabe dos veces y algo mas. Lo que el cociente debe ser mayor que el número que le corresponde, se indica de este modo: *al lado del cociente se pone la diferencia que hai entre el dividendo y el producto que resulta de multiplicar el divisor por el cociente, debajo se pone una raya, y debajo de la raya el divisor*. Así, como aquí la diferencia entre el producto 8 y el dividendo 9 es 1, y el divisor es 4, el verdadero cociente se indica $2\frac{1}{4}$, y se lee: *dos y un cuarto*. Para leer todas estas espresiones, *se lee el número que está encima de la raya, que es la resta que queda de haber quitado del dividendo el producto del divisor, inmediato inferior, con los nombres numerales absolutos, y el que está debajo de la raya con los nombres numerales partitivos, sino llega á* 10, *ó con los absolutos, si llega ó pasa de diez; pero se añade despues de todo la partícula* avos; y así la espresion $2\frac{5}{16}$ se lee: *dos y cinco diez y seisavos*.

3.er ej. Si quisiese dividir 56 por 7, y no viese desde luego cuantas veces estaba el 7 contenido en 56, ó por que número debia multiplicar el 7 paraque resultase el 56, empezaria diciendo mentalmente: 7 por 1 es 7, veo que le falta mucho para ser igual con 56, por lo que advierto que no tengo necesidad de multiplicar por 2, por 3, ni aun por 4; y así paso á ver si multiplicándole por 5 produce el 56: y como 7 por 5 son 35, y al 35 le falta mucho para el 56, no multiplicaré por 6, sino que pasaré á multiplicar por 7, y tendré que 7 por 7 son 49; que como no es igual con 56, paso á multiplicar por 8, y tengo que 7 por 8 son 56; y como 56 es el dividendo, digo que el 7 está contenido 8 veces en 56.

4.º ej. Si tuviese que dividir 78 por 9, como no tengo que tantear para ver si le contiene una, dos, tres, ni aun cuatro veces, porque el 78 se ve inmediatamente que es bastante grande con relacion al 9, veré si le contiene 5 veces; pero 9 por 5 son 45, que es menor que el 78; y así paso á multiplicar por 6, y digo: 9 por 6 son 54, que como es mucho menor que el 78, sigo: 9 por 8 son 72, que como es menor que 78, continúo: 9 por 9 son 81, y como 81 es mayor que el 78, noto que el producto inmediatamente inferior al 78 es 72, y que así el cociente es 8; y la diferencia 6 entre 72, producto del divisor por el cociente, y 78 que es el dividendo, la pondré como dije en el ejemplo segundo, y tendré que el cociente verdadero es $8\frac{6}{9}$, que se lee: *ocho y seis novenos.*

71 Para el segundo caso reunirémos las reglas en el siguiente

PROBLEMA. *Dividir un número compuesto por un dígito.*

Res. Colóquese el divisor á la derecha del dividendo, de modo que se correspondan en un mismo reglon; tírese entre los dos una raya de arriba abajo, y otra debajo del divisor. Hecho esto, se toma el guarismo de especie superior del dividendo, que es el que está mas hácia la izquierda; se ve cuantas veces en este guarismo está contenido el divisor, y se pone este cociente debajo de la raya que está por la parte inferior del divisor; si el primer guarismo del dividendo es menor que el divisor, no se puede contener este en aquel, y por lo mismo se debe tomar otro guarismo mas del dividendo; y paraque se sepa los que se han tomado se pone una coma, y se ve cuantas veces en aquel número de dos guarismos se contiene el divisor, conforme se ha dicho (70), poniendo por cociente lo que resulte. Despues se multiplica este cociente por el divisor, y se coloca el producto debajo del guarismo, ó de los dos guarismos que se separáron con la coma en el dividendo, se tira debajo una raya y se resta este producto del guarismo ó guarismos separados. Al lado de esta resta, ó al lado de o sino quedó ninguna, se baja el guarismo siguiente, y se ve cuantas veces en este segundo dividendo parcial está contenido el divisor, el número que resulte se pone en el cociente, á la derecha del guarismo hallado ántes; se multiplica este segundo cociente parcial por el divisor, se coloca el producto debajo del segundo dividendo parcial, se tira una raya y se resta. Al lado de la

resta se baja el siguiente guarismo, y así se continúa hasta que no queden mas guarismos que bajar en el dividendo, apuntando con una coma el guarismo que se baja para no equivocarse. Si al fin quedase alguna resta se pone á la derecha del cociente con una raya y el divisor debajo.

Ejemplo. Si tuviese que dividir 735 por 5 pondria el divisor á la derecha del dividendo, separándolos con una raya tirada de arriba abajo, y tiraria otra raya debajo del divisor en esta forma:

```
7,3,5 | 5
5     |----
—     | 147
2 3
2 0
———
0 3 5
  3 5
———
  0 0
```

Empiezo la operacion separando con la coma el primer guarismo de la izquierda del dividendo, que es el 7, y digo; el 5 en el 7 ¿cuantas veces está contenido? veo que es una vez, por lo que pongo 1 debajo de la raya del divisor; multiplico este primer cociente parcial 1 por el divisor 5, y digo: 1 por 5 es 5, que pongo debajo del dividendo parcial 7; tiro una raya y resto el 5 de 7 diciendo: de 5 á 7 van 2, que coloco debajo de la raya. Al lado de este 2 bajo el guarismo siguiente del dividendo, que es 3, le apunto arriba y digo: el 5 en 23 ¿cuantas veces está contenido? hallo que son 4, y pongo este segundo cociente parcial hácia la derecha del primero, le multiplico por el divisor 5, diciendo: 4 por 5 son 20, que pongo debajo del segundo dividendo parcial 23, y resto diciendo: de o á 3 van 3, de 2 á 2 va o; bajo al lado de la resta 3 el guarismo siguiente y digo: 5 en 35 ¿cuantas veces está contenido? veo que son 7, pongo este guarismo en el cociente á la derecha del 4, y le multiplico por el divisor 5, diciendo: 7 por 5 son 35 que pongo debajo del tercer dividendo parcial y le resto de él diciendo: de 5 á 5 no va nada, de 3 á 3 no va nada; ¡y como no hai mas guarismos que bajar, digo que el cociente de dividir 735 por 5 es 147.

Dem. La colocacion de los dos términos es por comodidad, y algunos colocan el divisor á la izquierda del dividendo, y la primera raya se pone para que no se confunda el divisor con el dividendo, ni el cociente con las restas que van quedando del dividendo; y la segunda raya para que no se confunda el cociente con el divisor.

Ahora, para hacer ver la exactitud de lo demas de la regla, nos contraerémos al ejemplo anterior; por el cual vemos que hemos dividido primero 7 centenas por 5, ó hemos visto 7 centenas entre 5 á como les toca, y hemos hallado que es 1; pero como el 7 espresa centenas, este cociente es 1 centena (69), y debe hallarse en el tercer lugar del cociente, empezando de derecha á izquierda, ó lo que es lo mismo, despues del 1 debe haber en el cociente otros dos guarismos; en las 7 centenas, no solo habia lo necesario para que tocase á 1 centena, sino que habia algo mas, y por esto hemos multiplicado el cociente por el divisor y le hemos restado de lo que nos servia de dividendo: á su lado hemos bajado el guarismo inmediato 3, y vemos que estas 23 son decenas, y hemos continuado diciendo: el 5 en 23 ¿cuantas veces está contenido? ó 23 decenas entre 5 ¿á como les toca? hemos hallado que es á 4, y como estas deben ser decenas (69), las coloco en el cociente á la derecha del 1 que habia de espresar centenas; ahora, para ver si despues de tocarles á 4 decenas quedan aun algunas decenas, se multiplica este segundo cociente parcial por el divisor, y se resta del segundo dividendo parcial 23; la resta 3 que resulta espresa 3 decenas, que junto con las 5 unidades que se bajan, son 35 unidades, que entre 5 les toca á 7 unidades, que pongo á la derecha del 4 que espresaba decenas; y como he visto cuanto cabe el divisor en todas las partes del dividendo, y tengo reunidos en un solo número todos los cocientes parciales, resulta por lo dicho (Introd. ax. 3.º) que este es el cociente total. L. Q. D. H.

72 Al ejecutar esta operacion se debe tener presente: 1.º que no se puede poner de una vez en el cociente nada mas que 9; 2.º que cuando se baja un guarismo, y en él, junto con la resta si la hai, no cabe el divisor, se debe poner 0 en el cociente; 3.º que todo número cabe en sí mismo una vez, ó lo que es lo mismo, que si se tiene que dividir un número por sí mismo, el cociente es 1; 4.º que todo número dividido por la unidad da por cociente el mismo número; y 5.º que 0 dividido por cualquier número siempre da 0 por cociente.

Para hacer uso de estas advertencias, supongamos que quiera dividir 420723 por 7; colocaré el dividendo y el divisor segun he dicho, en esta forma:

```
42,0,7,2,3 | 7
42         |--------
—          | 60103 2/7
00 0 7
     7
   ———
   0 2 3
     2 1
   ———
     0 2
```

Como en el primer guarismo de la izquierda, que es 4, no se contiene ninguna vez el divisor 7, necesito tomar los dos guarismos primeros y separarlos con la coma; despues digo: 7 en 42 ¿cuantas veces? veo que son 6, y pongo 6 en el cociente; multiplico el 6 por el divisor 7, y pongo el producto 42 debajo del dividendo parcial 42, tiro la raya y resto. Al lado de la resta 00 bajo el guarismo siguiente que es 0; y como el 0 no contiene ninguna vez al 7 ni á ningun otro número, pongo 0 en el cociente á la derecha del 6, y bajo el guarismo siguiente que es 7, y digo: el 7 ¿cuantas veces está contenido en 7? veo que una vez, y pongo 1 en el cociente; le multiplico por el divisor, y pongo el producto 7 que saco debajo del dividendo parcial 7, y resto. Al lado de la resta 0 bajo el guarismo siguiente 2, y digo: el 7 en 2 ¿cuantas veces? advierto que no cabe ninguna vez; pongo 0 en el cociente, bajo el guarismo siguiente 3, veo que en 23 cabe tres veces el 7, pongo 3 en el cociente, le multiplico por el divisor 7, y el producto 21 le coloco debajo del 23, y resto. Como ya no hai mas guarismos en el dividendo, pongo la resta 2 á la derecha del cociente

con la raya y el divisor debajo, segun he dicho (69) y aquí se ve; y digo que el cociente de dividir 420723 por 7 es *sesenta mil ciento y tres unidades y dos séptimos*.

Cuando se ha adquirido ya cierta destreza; se ejecuta la operacion con mucha espedicion, escribiendo directamente el cociente por el siguiente método; supongamos que quiera dividir 45685 por 6, diré: la 6.ª parte de 4, guarismo de especie superior, no puede ser; la 6.ª parte de 45 es 7, que será el primer guarismo ó de especie superior del cociente, y como despues de tomada la 6.ª parte del 45 quedan 3, las reuniré consideradas como decenas al guarismo siguiente y diré: la 6.ª parte de 36 es 6, dejando 0 por resta, y 6 será el segundo guarismo del cociente; despues diré: la 6.ª parte de 8 es 1 y me quedan 2, que reunidas con el último guarismo dan 25; la 6.ª parte de 25 es 4, y queda 1 por resta; de donde infiero que el cociente es $7614\frac{1}{6}$.

73 Las reglas para el tercer caso las reunirémos en el siguiente

PROBLEMA. *Dividir un número compuesto por otro compuesto.*

Res. Colóquese el divisor á la derecha del dividendo separándolos con una raya, y póngase otra debajo del divisor, segun se ha dicho en el caso anterior; tómense á la izquierda del dividendo tantos guarismos como se necesiten para que el divisor esté contenido alguna vez en dicho número de guarismos, separándolos de los demas con una coma; el mayor número de guarismos que se puede tomar es uno mas de los que tiene el divisor, y el menor son tantos como tiene el divisor; de modo que se separarán á la izquierda tantos guarismos como hai en el divisor, y si en este número que queda separado con la coma, no cabe el divisor, se tomará otro mas. Separados ya estos guarismos, se ve cuantas veces el primer guarismo de la izquierda del divisor está contenido en el primero del dividendo, ó en los dos primeros si se tomó para el primer dividendo parcial un guarismo mas de los que tenia el divisor; y el número de veces que está contenido se pone en el cociente; se multiplica este cociente por todo el divisor, y el producto se coloca debajo del dividendo parcial, se tira una raya y se resta de él. Al lado de la resta se baja el guarismo siguiente, teniendo cuidado de apuntarle con la coma en el dividendo, y se ve cuantas veces el primer guarismo del divisor está contenido en el primero ó dos primeros del dividendo; se pone este guarismo en el cociente á la derecha del primer cociente parcial, se multiplica por el divisor, se tira la raya y se resta; al lado de la resta se baja el guarismo siguiente, y así se procede hasta que no haya mas guarismos que bajar; y si al fin queda alguna resta, se pone á la derecha del cociente con una raya y el divisor debajo.

1.er ejemplo. Si quiero dividir 775 por 31, colocaré el divisor 31 á la derecha del dividendo 775, separándolos con una raya, en esta forma: Y despues de haber tirado otra debajo del divisor, separo á la izquierda del dividendo dos guarismos, y veo cuantas veces está contenido en el primero que es 7, el primero del divisor que es 3; hallo que son dos veces, y pongo este guarismo 2 en el cociente; ahora debo multiplicar este cociente 2 por todo el divisor 31, y así diré: 2 por 1 es 2, que como he de colocar el producto debajo del dividendo parcial 77, pongo este 2 debajo del 7 y digo: 2 por 3 son 6 que coloco debajo del otro 7; tiro la raya y resto diciendo: de 2 á 7 van 5, que pongo; de 6 á 7 va 1 que tambien pongo. Al lado de la resta 15 bajo el guarismo siguiente que es 5; y como ahora tengo por segundo dividendo parcial un número que tiene un guarismo mas que el divisor, averiguaré cuantas veces en los dos primeros guarismos de este dividendo está contenido el primero del divisor, y así diré: el 3 en 15 ¿cuantas veces está contenido? hallo que son 5, le pongo en el cociente á la derecha del 2, y le multiplico por todo el divisor diciendo: 5 por 1 es 5, que pongo debajo del último guarismo del dividendo parcial, 5 por 3 son 15, que pongo debajo de los demas guarismos de dicho dividendo; tiro la raya y resto diciendo: de 5 á 5 no va nada, de 5 á 5 no va nada, de 1 á 1 tampoco va nada; y como no hai mas guarismos que bajar, digo que el cociente de dividir 775 por 31 es 25.

```
7 7,5 | 31
6 2   | ——
————  | 25
1 5 5
1 5 5
—————
0 0 0
```

2.º *Ej.* Si quiero averiguar cuantas veces cabe el 523 en 388066, colocaré los números como aquí se presenta:

Separaré cuatro guarismos en el dividendo y diré: 5 en 38 ¿cuantas veces? son 7, que pongo en el cociente; multiplico el 523 por 7, diciendo: 3 por 7 son 21, pongo 1 debajo del 0 del dividendo parcial, y de 21 llevo 2; 2 por 7 son 14, y 2 que llevaba son 16, pongo el 6 y llevo 1; 5 por 7 son 35, y 1 que llevaba son 36, que pongo debajo del 38; tiro una raya y resto. Al lado de la resta 219 bajo el 6, hallo que el 5 se contiene cuatro veces en 21, pongo 4 en el cociente: multiplico este cociente 4 por el divisor 523, y el producto 2092 le coloco debajo del dividendo parcial 2196, y ejecuto la resta. Al lado de la resta 104 bajo el guarismo siguiente 6, veo que el 5 está dos veces contenido en el 10, pongo 2 en el cociente, multiplico por el divisor y resto el producto del dividendo parcial 1046; y como no queda resta, ni hai mas guarismos que bajar, infiero que el cociente de dividir 388066 por 523 es 742.

```
3 8 8 0,6,6 | 5 2 3
3 6 6 1     | —————
———————     | 7 4 2
0 2 1 9 6
  2 0 9 2
  ———————
  0 1 0 4 6
    1 0 4 6
    ———————
    0 0 0 0
```

Dem. La colocacion de los términos y las rayas se hace por comodidad como ya hemos dicho (71). Despues tomamos á la izquierda del

dividendo tantos guarismos como se necesitan paraque esté contenido el divisor, y hallamos, contrayéndonos al segundo ejemplo, que se necesitan cuatro guarismos, y que en ellos está contenido el divisor siete veces ò que 3880 entre 523 que es el divisor, les toca á 7; pero como el 3880 espresaba centenas, resulta (69) que estas 7 serán centenas. Hago la multiplicacion y resta, para saber si ademas de tocarles á 7 centenas queda aun algo que repartir, como sucede en efecto, pues quedan 219 que son centenas; y bajando el guarismo 6 de las decenas, he visto cuantas veces cabe el 523 en las 2196 decenas, ó cuantas decenas les toca repartiendo 2196 entre 523, y hallo 4, que como son decenas, las coloco á la derecha del 7 que espresaba centenas; hago la multiplicacion y resto con el mismo objeto que ántes, y veo cuantas veces en la resta junto con el último guarismo 6, está contenido el divisor 523, ó á cuanto les toca repartiendo 1046 unidades entre 523, hallo que es á 2, que pongo á la derecha del 4 para espresar unidades; hago la multiplicacion y resta para ver si quedan aun algunas unidades por repartir, veo que no; y como todos los cocientes que me han resultado de dividir todas las partes del dividendo por el divisor, los tengo reunidos en un solo número, resulta (Introd. ax. 3.º) que este es el cociente total, que era L. Q. D. H.

Si quisiera dividir 1736952 por 834, ejecutaria la operacion en esta forma:

```
(A) 1 7 3 6,9,5,2 | 834           (B) 7 5 9 0,8,5,2 | 6053
    1 6 6 8       | ————              6 0 5 3       | ————
    ———————       | 2082 564/834      ———————       | 1254 390/6053
    0 0 6 8 9 5                       1 5 3 7 8
        6 6 7 2                       1 2 1 0 6
        ———————                       —————————
        0 2 2 3 2                     0 3 2 7 2 5
          1 6 6 8                       3 0 2 6 5
          ———————                       —————————
          0 5 6 4                       0 2 4 6 0 2
                                          2 4 2 1 2
                                          —————————
                                          0 0 3 9 0
```

Y como al fin me queda por resta 564, pondré este número al lado del cociente con la raya y el divisor debajo, y diré que el cociente de esta division es *dos mil ochenta y dos*, y *quinientos sesenta y cuatro ochocientos treinta y cuatroavos.*

Si me propongo dividir 7590852 por 6053, ejecutaré la operacion como se ve en (*B*), y saco el cociente $1254\frac{390}{6053}$.

74 Los ejemplos resueltos hasta aquí se han elegido de modo que no haya que hacer ningun tantéo; pero suele ocurrir que en el cociente

no se debe poner siempre el número que resulta de dividir el primero ó dos primeros guarismos del dividendo por el primero del divisor, sino que muchas veces se necesita hacer algun tantéo para averiguar las unidades que se le deben poner de ménos; lo cual detiene mucho á los principiantes, y hace que mui pocas personas sepan ejecutar una division, cuando apénas se hallará una que no sepa practicar hasta una multiplicacion.

Aunque esta no es gran dificultad, no obstante cuesta mucho trabajo á los principiantes el vencerla, cuando á un tiempo se les esplica el modo de ejecutar la division, y el de hallar el verdadero cociente; pero como nos hemos propuesto el suministrarles todos los auxilios posibles, hemos presentado ántes las reglas generales y se han aplicado á ejemplos, que no presentando ninguna dificultad por parte de los cocientes, manifiestan claramente la aplicacion de las reglas generales de la division.

Estos tantéos ocurren en general cuando el segundo guarismo del divisor es 5 ó mayor que 5, ó siempre que es mayor que el primero.

Pero el principiante no debe quedarse parado aunque se encuentre con un divisor de esta especie; pues lo que debe hacer inmediatamente es poner en el cociente el número de veces que el primer guarismo del divisor está contenido en el primero ó dos primeros del dividendo, ejecutar la multiplicacion, y si este producto no es mayor que el dividendo parcial, es prueba de que el cociente no es mayor que el que le corresponde; si es mayor dicho producto, el guarismo puesto en el cociente es mayor que lo que debe, y se le quitará lo ménos una unidad; en caso de no ser el producto del divisor por el cociente hallado mayor que el dividendo parcial, lo que es prueba de no haber puesto un cociente mayor que el verdadero, se ejecuta la resta; y si esta es menor que el divisor, es prueba de que el cociente no es menor que el verdadero; si es igual ó mayor que dicho divisor, es prueba de que el cociente puesto es menor que el correspondiente, y se le debe añadir una unidad lo ménos. Sabiendo ya por las dos observaciones anteriores que un cociente no es mayor ni menor que el verdadero, pueden estar los principiantes seguros de que el cociente puesto es el que buscaban. Ahora bien, como he dicho (72) que lo mas que se puede poner de una vez al cociente es 9, y por otra parte lo ménos que se le puede poner es 0, solo hai diez diferentes cocientes parciales que poder poner, y así el número mayor de tentativas que se podrian hacer serian nueve; mas por la naturaleza de la operacion en ningun caso pueden ocurrir mas de cuatro tentativas; luego no hai motivo para que un principiante se pare al ejecutar una de estas operaciones; pues aun en el caso de no saber las veces que el primer guarismo del divisor está contenido en el primero ó dos primeros del dividendo, no tiene motivo para detenerse; porque debe poner en este caso un guarismo cualquiera, y averiguando despues si es mayor ó menor que el verdadero, le quitará ó añadirá unidades hasta que llegue

á uno que no sea ni mayor ni menor que lo que debe ser, el cual será el verdadero. Este método parecerá algo largo, pero es seguro, no está espuesto á equivocaciones, y un principiante, sin auxilio de nadie ejecutará por medio de él operaciones que son sumamente dificultosas, y aun imposibles para los que deséan aprenderlo todo de una vez; y así se pondrán tan diestros en poco tiempo, que no necesitarán hacer ninguna tentativa.

152,5,6	59
~~177~~	~~3~~
118	2~~6~~
0345	5~~9~~
~~354~~	8 $\frac{34}{59}$
295	
0506	
~~531~~	
472	
034	

Con la mira de que se ejerciten en estas tentativas les pondrémos aquí un ejemplo, y sea el de dividir 15256 por 59: colocaré el divisor á la derecha del dividendo, y tiraré las rayas como se ha dicho (71), y aquí se ve.

Lo primero que advierto es que necesito tomar tres guarismos en el dividendo, para que esté contenido alguna vez el divisor; los separo, y digo: 5 primer guarismo del divisor, ¿cuantas veces cabe en 15, dos primeros guarismos del dividendo? hallo que son tres veces, y pongo 3 en el cociente; multiplico el divisor 59 por este cociente 3, y coloco el producto 177 debajo del dividendo parcial 152; y como veo que este producto es mayor que el dividendo, infiero que he puesto en el cociente mas de lo que correspondia; y así le quitaré una unidad al 3 y pondré 2, por consiguiente borraré el 3, é igualmente el producto 177; y colocaré el 2 debajo del tres borrado; multiplicaré el 59 por dicho cociente 2, el producto 118 le colocaré debajo del 177 borrado, y como es menor que el dividendo parcial 152, digo que 2 es el cociente que buscaba; porque en este caso, como sé que el cociente debe ser menor que 3, y entre el 3 y el cociente 2 que he puesto, no hai ningun otro guarismo intermedio, estoi seguro de que el cociente no ha de ser mayor que 2, pues que lo estoi de que es menor que 3. Despues debo tirar debajo una raya y restar, lo que me da la resta 34, la cual siendo menor que el divisor comprueba que no he puesto de ménos en el cociente. Al lado de dicha resta bajo el guarismo siguiente 5, hallo que el primer guarismo 5 del divisor está contenido 6 veces en los dos primeros del segundo dividendo parcial 345; pongo 6 en el cociente á la derecha del 2, cociente parcial anterior, y ejecuto la multiplicacion colocando el producto 354 debajo del 345; y como es mayor que él, infiero que el cociente ha de ser menor que 6, por lo que le borraré, borraré tambien el producto 354, y pondré 5 al cociente; hago la multiplicacion de este cociente 5 por el divisor 59, colocando el producto debajo del producto anterior rayado; y como este producto 295 es menor que el dividendo parcial correspondiente, digo que 5 es el cociente que buscaba, pues como ha de ser menor que 6 no puedo recelar que sea mayor que 5; y así, ejecuto la resta, á su lado bajo el guarismo siguiente 6 y digo: 5 primer guarismo del divisor, ¿cuantas veces está contenido en 50, primeros dos guarismos del dividendo parcial 506? advierto que son 10 veces; pero como (72) no puedo jamas poner mas de 9, pondré este guarismo en el cociente, y hago la multiplicacion; mas como el producto 531 es mayor que el tercer dividendo parcial 506, borro el 9 y dicho producto tambien, pongo 8 en el cociente, le multiplico por el divisor, y resto el producto 472 de 506; y como no hai mas guarismos que bajar, pongo la resta al lado del cociente en la forma dicha ántes; y escribiendo ahora todos los guarismos en un mismo renglon, como me hubieran resultado sino hubiera querido manifestar los raciocinios que debe hacer el principiante, tendré que el cociente de dividir 15256 por 59 es $258\frac{34}{59}$ (*).

75 Entendido ya el método para encontrar el verdadero cociente de un modo que sea independiente del talento del calculador, que es la circunstancia mas esencial que debe tener; porque los métodos siempre se deben poner á los alcances de los de menor talento, ó á lo ménos á los de aquellos que tengan un talento regular; vamos ahora á manifestar los medios que hai para reducir todas estas tentativas á una sola. Con cuyo objeto observarémos que cuando el segundo guarismo del divisor es 9 ú 8 es cuando ocurre el mayor número de tantéos, y en este caso *se saca siempre el verdadero cociente, considerando al primer guarismo del divisor como que tiene una unidad mas*. Es tan útil esta regla, que se presentarán mui pocas ocasiones en que no se verifique, y si ocurre algun caso, solo habrá un tantéo que hacer, y le corresponderá una unidad mas al cociente que por ella se saque. Cuando el segundo guarismo sea 7, *se podrá añadir una ó dos unidades al cociente sacado por esta regla, y pocas veces ocurrirá hacer mas de un tantéo.* Tambien es igualmente segura esta regla: *véase si en la resta que queda de dividir el primero ó dos primeros guarismos del dividendo por el primero del divisor, junta con el guarismo siguiente del dividendo, cabe el segundo del divisor el mismo número de veces que el primero en el primero ó dos primeros del dividendo; y si cabe, se podrá asegurar que el cociente hallado es el verdadero, sino no lo será*; ó de este modo: *multiplíquense mentalmente los dos primeros guarismos del divisor por el cociente, y si el producto es menor que los dos ó tres primeros guarismos del dividendo, se podrá tener seguridad de que no se le ha puesto demas, que es lo que se acostumbra ejecutar.*

Para hacer uso de estas observaciones, supongamos que quiera di-

(*) *En mi Aritmética de niños se presentan aun otros ejemplos de esta especie.*

vidir 173256 por 293; para lo cual colocaré los términos conforme he dicho y aquí se ve:

```
1 7 3 2,5,6 | 293
1 4 6 5     |--------
-------     | 591 93/293
0 2 6 7 5
  2 6 3 7
  -------
  0 0 3 8 6
      2 9 3
      -----
      0 9 3
```

Y habiendo separado los cuatro guarismos que necesito en el dividendo, como el segundo guarismo del divisor es 9, en vez de decir 2 en 17 ¿cuantas veces? añadiré una unidad al 2 y diré: 3 en 17 ¿cuantas veces? veo que son 5, y las pongo en el cociente; multiplico, y como el producto 1465 no es mayor que el dividendo parcial, estoi seguro de que no le he puesto á mas; resto, y como me quedan 267 que es menor que el divisor 293, tambien estoi seguro de que no le he puesto á ménos; luego sino le he puesto demas ni de ménos, es señal de que le he puesto lo que le correspondia. Al hacer la segunda division parcial, digo tambien: 3 en 26 ¿cuantas veces? veo que sale 8 veces y que sobran 2 unidades; pero como solo le falta una para caber 9 veces, y por otra parte no era en efecto 3 el primer guarismo del divisor sino 2, y el tercero del dividendo es 7, puedo sospechar que les cabe á 9, y las pongo; hago la multiplicacion, y como el producto 2637 no es mayor que el segundo dividendo parcial 2675, infiero que no le he puesto demas; ejecuto la resta, y como lo que resulta es menor que el divisor, infiero que tampoco le he puesto de ménos, lo cual en este caso se preveía desde luego, porque en el cociente nunca se puede poner (72) mas de 9; continúo despues y veo que les toca á una unidad y que queda por resta 93.

76 Cuando ya se ha adquirido la costumbre de ejecutar divisiones por los métodos espuestos, es necesario tratar de abreviar la operacion; lo que se ejecuta haciendo la resta al mismo tiempo que se practica la multiplicacion del divisor por el cociente parcial. Por ejemplo: si quiero dividir 49539 por 35, colocaré el dividendo y el divisor como he dicho (71), y aquí se ve:

```
4 9,5,3,9 | 35
1 4 5     |--------
0 0 5 3   | 1415 14/35
    1 8 9
    0 1 4
```

Separaré dos guarismos con la coma en el dividendo, y diré: 3 en 4 ¿cuantas veces? cabe una vez, y por consiguiente pongo 1 en el cociente; multiplico ahora el divisor 35 por el primer cociente parcial 1, y en vez de colocar este producto debajo del dividendo parcial 49 para restar despues, voi ejecutando la resta al mismo tiempo que formo el producto en esta forma: 5 por 1 es 5, de 5 á 9 van 4, pongo este 4 que es la resta debajo del 9, y digo: de 9 no llevo nada; 3 por 1 es 3, de tres á 4 va 1, que pongo debajo del 4, y tengo la resta 14. Al lado de esta resta bajo el guarismo siguiente que es el 5, y digo: 3 en 14 cabe cuatro veces, pongo 4 en el cociente, y paso á ejecutar la multiplicacion, teniendo cuidado de restar al mismo tiempo, diciendo: 5 por 4 son 20, de 20 á 25 van 5, que pongo debajo del 5 del segundo dividendo parcial, y de 25 llevo 2; 3 por 4 son 12, y dos que llevaba son 14, de 14 á 14 no va nada, pongo 0 debajo del 4, y de 14 llevo 1; de 1 á 1 no va nada, y pongo otro 0 debajo del 1. Bajo el guarismo siguiente 3 al lado de la resta 5, y continúo la division diciendo: 3 en 5 cabe una vez, pongo 1 en el cociente y multiplico: 5 por 1 es 5, de 5 á 13 van 8 que pongo debajo del 3, y de 13 llevo 1; 3 por 1 es 3, y 1 que llevaba son 4, de 4 á 5 va 1, que pongo debajo del 5. Al lado de la resta 18 bajo el 9, y digo: 3 en 18 cabe 6 veces; pero como el 5 que es el segundo guarismo del divisor no cabe seis veces en 9 (75) que es el otro del dividendo, le pondré á 5 y diré: 5 por 5 son 25, de 25 á 29 van 4, que pongo debajo del 9, y de 29 llevo 2; 3 por 5 son 15, y 2 que llevaba son 17, de 17 á 18 va 1 que pongo debajo del 8, y de 18 llevo 1; de 1 á 1 no va nada, pongo 0 debajo del 1; y como no hai mas guarismos que bajar pongo la resta á la derecha del cociente, y tengo que el cociente es $1415\frac{14}{35}$.

Si observamos el procedimiento que hemos seguido en este ejemplo, echarémos de ver que en el segundo cociente parcial el producto 20 de 5 por 4 le hemos restado de 25; en el tercer cociente parcial el 5 producto de 5 por 1 le hemos restado de 13; y en el último el producto 25 de 5por 5 le hemos restado de 29; para tener una regla fija que nos dé á conocer en todos los casos que cantidad se ha de tomar por minuendo dirémos que no hai mas que ver cual es el guarismo correspondiente de que se debe restar el producto; si de él no se puede restar dicho producto, se toman tantas decenas del guarismo inmediato como se necesiten para que se pueda ejecutar dicha resta, teniendo cuidado de llevar en cuenta estas decenas para añadirlas despues al producto del guarismo siguiente, y así se continúa.

Cuando se ejecuta abreviadamente la division se conoce si en el cociente se ha puesto lo que corresponde del mismo modo que ántes: *es señal de haber puesto demas si al fin no se puede restar, por llevar mas unidades de las que hai en el último guarismo*, y para esto se hace ántes la multiplicacion mental del cociente por el segundo guarismo del divisor; y *se conocerá si se le ha puesto de ménos, si la resta es igual ó mayor que el divisor.*

Para que los principiantes se adiestren en esta operacion que es sin disputa la mas difícil de toda la Aritmética, y aun la mas penosa de todas las Matemáticas, pondrémos aquí varios ejemplos.

1.º Quiero dividir 375271 por 583; colocaré el divisor al lado del dividendo del modo que aquí se ve:

```
3 7 5 2,7,1 | 583
0 2 5 4 7   |--------
  0 2 1 5 1 | 643 402/583
    0 4 0 2
```

Separaré cuatro guarismos con la coma; y como el segundo guarismo del divisor es 8, consideraré al primero que es 5 como si fuera 6 (75), y diré: 6 en 37 está contenido seis veces, pongo

6 en el cociente, y paso á ejecutar la multiplicacion y resta á un mismo tiempo del modo siguiente: 3 por 6 son 18, de 18 á 22 (porque el último guarismo es 2, y para poder restar de dos unidades diez y ocho unidades, necesito dos decenas) van 4, que pongo debajo del 2, y de 22 llevo 2; 8 por 6 son 48, y 2 que llevaba son 50 á 55 van 5 que pongo, y de 55 llevo 5; 5 por 6 son 30, y 5 que llevaba son 35, de 35 á 37 van 2, que pongo, y de 37 llevo 3; de 3 á 3 no va nada, por lo que pongo 0 debajo del 3 del dividendo. Al lado de la resta 254 que es menor que el divisor, y que por lo mismo manifiesta que se ha puesto en el cociente lo que correspondia, bajo el guarismo siguiente que es 7; y considerando siempre al ejecutar la division al primer guarismo 5 del divisor como si fuera 6, digo: el 6 en 25 ¿cuantas veces? veo que son 4, pongo 4 en el cociente, y sigo ejecutando la operacion diciendo: 3 por 4 son 12, de 12 á 17 van 5, que pongo debajo y de 17 llevo 1; 8 por 4 son 32, y 1 que llevaba son 33, de 33 á 34 va 1 que pongo, y de 34 llevo 3; 5 por 4 son 20, y 3 que llevaba son 23, de 23 á 25 van 2, y de 25 llevo 2; de 2 á 2 no va nada, por lo que pongo 0 debajo del 2. Al lado de la resta 215 bajo el guarismo siguiente 1, y digo: 6 en 21 ¿cuantas veces? veo que son 3, pongo 3 en el cociente, y multiplico diciendo: 3 por 3 son 9, de 9 á 11 van 2, que pongo debajo del 1, y de 11 llevo 1; 8 por 3 son 24, y 1 que llevaba son 25, de 25 á 25 no va nada, pongo 0 y de 25 llevo 2; 5 por 3 son 15, y 2 son 17, de 17 á 21 van 4, que pongo debajo; y como no hai mas guarismos que bajar en el dividendo, pongo la resta segun lo dicho anteriormente, y tengo por cociente $643\frac{402}{583}$.

2.º Si quisiera dividir 465903057 por 78306, ejecutaria la operacion como se ve en (*A*).

```
            (A)                                    (B)
4 6 5 9 0 3,0,5,7 | 78306          4 6 5 9 0 3, 0, 5, 7   | 78306
0 7 4 3 7 3 0     |------          0 7 4 3 7 3  6  1 (3   |------
  0 3 8 9 7 6 5   | 5949 60663/78306   0 3 8 9 7  4 (6    | 5949 60663/78306
    0 7 6 5 4 1 7                       0 7 6 5 (6
      0 6 0 6 6 3                         0 (6 0
```

Tambien se puede omitir el ir bajando los guarismos, y no hacer mas que restar los productos de los guarismos que les corresponden, como se ve en este mismo ejemplo (*B*), donde los últimos guarismos que se hallan separados forman la resta.

3.º Si quiero dividir 8523065 por 7203 sacaré el cociente $1183\frac{1016}{7205}$.

4.º Si divido 15703026 por 1753, hallaré por cociente $8957\frac{1405}{1733}$.

77 Ademas de esta abreviacion que es general para todos los casos, hai otras que corresponden á casos particulares; y los principales son cuando el dividendo y el divisor acaban en ceros ó solo termina en ceros

el divisor. En el primer caso *se borran en ambos tantos ceros como hai en el que ménos.* Por ejemplo: quiero dividir 36000 por 500, borraré en cada uno de estos números dos ceros, porque dos ceros son los que tiene solamente el divisor 500, y quedan los números con que se ha de ejecutar la division reducidos á 360 y 5; y dividiendo 360 por 5 resulta por cociente 72, que es el que hubiera salido de dividir 36000 por 500.

Otro ejemplo. Si quisiera dividir 800000 por 27000, borraria en ambos números tres ceros, y estaria reducida la operacion á dividir 800 por 27, que da por cociente $29\frac{17}{27}$.

La razon de esta práctica es (contrayéndonos al primer ejemplo en que el divisor es 5 centenas exactas, y el dividendo es 360 centenas tambien exactas) que como el 5 estará contenido en 360 siempre un mismo número de veces, ya estos números espresen decenas, centenas, millares, hombres, caballos, &c. porque la division siempre se hace en abstracto, resulta que encontrarémos el verdadero cociente suponiendo que son unidades; y como esto se consigue suprimiendo en ambos dos ceros, porque estos son los que tiene el que ménos, resulta la regla que hemos dado (*).

Cuando los ceros se hallan al fin del divisor, no se borran, sino que se separan con una especie de media luna de esta forma (__, y se separan tambien en el dividendo tantos guarismos como ceros hai en el divisor; se ejecuta la operacion con los demas guarismos que quedan á la izquierda, y luego al poner la resta que quede, se deben añadir á esta los guarismos separados en el dividendo y debajo de la raya se pone todo el divisor; y sino queda resta, se ponen los guarismos separados en el dividendo á la derecha del cociente con la raya, y todo el divisor debajo.

Ejemplo. Si tubiera que dividir 45426 por 300, colocaria los números como se ha dicho (73): despues, advirtiendo que el divisor termina en dos ceros, los separaré, y separaré tambien los dos guarismos últimos del dividendo de este modo:

4,5,4(26	3(00
15	$151\frac{126}{300}$
004	
126	

Haré la division del 454 por 3, y al lado de la resta 1 bajo los guarismos separados; pongo todo esto á la derecha del cociente con la raya y todo el divisor debajo, con lo que tengo el cociente $151\frac{126}{300}$.

Esto está fundado en que podemos descomponer al 45426 en estas dos partes 45400+26, con lo que para hallar el cociente deberé dividir cada una de estas partes; pero $\frac{45400}{300}$ da, ejecutando la operacion como

(*) *Tambien pudiéramos dar razon de esto diciendo: que el suprimir en ambos dos ceros, equivale á dividirlos por* 100, *lo que no altera el cociente como demostrarémos* (93).

se acaba de esponer ántes, 151 de cociente, y por resta 1 unidad, que como en sí es de centena y el divisor espresa centenas, dará $\frac{100}{300}$; pero ademas de esta resta se debe contar con el 26, y como 100 y 26 componen 126 resulta que el cociente debe ser $151\frac{126}{300}$.

Si el divisor es la unidad seguida de ceros resulta despues de practicado lo que acabamos de decir, que como todo número dividido por la unidad es el mismo número, se tiene inmediatamente el cociente separando ó considerando mentalmente separados en el dividendo tantos guarismos hácia la derecha como ceros hai despues de la unidad, y los demas guarismos que queden espresarán el cociente; á cuyo lado se deberán poner los guarismos separados con la raya y el divisor debajo.

1.er ejemplo. Si quiero dividir 12523 por 100, considero separados mentalmente los dos últimos guarismos 23 del dividendo, y los otros 125 espresan el cociente; á cuyo lado se deben poner los guarismos separados con la raya y todo el divisor debajo; de manera que el verdadero cociente será $125\frac{23}{100}$.

2.º ejemplo. Si quisiera dividir 8376253 por 1000, hallaria por cociente $8376\frac{253}{1000}$.

78 Bajo cinco aspectos se presentan en la sociedad las cuestiones que conducen á la operacion de dividir, y ademas hai necesidad en otra clase de cuestiones á que da orígen la ciencia que nos ocupa; y por lo mismo dirémos que son seis los usos de la division; 1.º cuando claramente se dice que se quiere buscar las veces que un número está contenido en otro, ó de cuantos números como uno dado se compone otro tambien dado; 2.º cuando hai que repartir entre varias personas cierto número de cosas; 3.º cuando se quiere dividir un número en partes iguales, ó tomar una parte de un número; 4.º cuando conociendo el valor de muchas unidades, se quiere averiguar el de una; 5.º cuando se quieren reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior; y finalmente 6.º cuando se quieren hallar todos los números que dividen exactamente á otro dado.

En el primer caso no hai mas que *dividir el mayor por el menor*; en el segundo que es cuando hai que repartir cierto número de cosas entre cierto número de personas, *se divide en abstracto el número que espresa las cosas que hai por el que espresa las personas.*

Por ejemplo. Si se supone que un padre al morir ha dejado en haciendas, alajas, casas, &c. 2359367 reales, y se trata de saber cuanto corresponde á cada uno de sus nueve hijos, lo ejecutarémos dividiendo el número 2359367 por el número de hijos que son 9; y en el cociente $262151\frac{8}{9}$ se hallará el número de reales que corresponde á cada uno.

Para dividir un número en partes iguales ó tomar una parte de un número, como la mitad, tercio &c. *se divide el número dado por el que espresa las partes en que se ha de dividir, ó la parte que se quiere tomar.*

1.er ejemplo. Si se quiere dividir en cinco partes iguales el número

4625, no hai mas que dividir el 4625 por 5, y en el cociente 925 se tiene el valor de una de estas partes.

2.º ejemplo. Si quiero tomar la duodécima parte del número 8563015, dividiré el 8563015 por 12, y el cociente $713584\frac{7}{12}$ espresará la duodécima parte del número propuesto.

Para hallar el valor de una unidad cuando se conoce el de muchas, *se divide el valor de dichas unidades por el número de ellas, y el cociente será el valor de una.* Por ejemplo: sabiendo que 25 varas de paño han costado 750 reales, para averiguar á como ha costado la vara dividiré el valor de todas las varas que es 750, por el número de ellas que es 25, y en el cociente 30 tendré el valor de la vara; por lo que diré que cada vara de paño costó 30 reales.

Cuyo procedimiento está fundado en que como el valor de cada unidad es el mismo, el valor de una de ellas será igual á una parte del valor de todas espresada por el número de unidades que hai.

Para reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior *se divide el número de unidades de especie inferior que se dan por el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior cabe en la de especie superior.* Por ejemplo: si quiero reducir 8536 maravedíses á reales, dividiré los 8536 maravedíses por 34, porque teniendo el real 34 maravedíses, contiene al maravedí 34 veces, y en el cociente $251\frac{2}{34}$ tengo los reales que componen; pero en estos casos no se pone la resta á la derecha del cociente con la raya y el divisor debajo, sino que se deja, conservándole el nombre que tenia el dividendo de que provino; de modo que en vez de decir que componen 251 reales y *dos treinta y cuatroavos de real*, se dice que componen 251 reales y 2 maravedíses.

Cuando se quieren reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior, y entre estas y aquellas hai otras intermedias, es mejor irlas reduciendo sucesivamente á las unidades de especie inmediatamente superior; porque ademas de la dificultad que hai en conservar en la memoria las unidades de especie inferior que componen á la superior; cuando hai una ó dos unidades intermedias, se reune por otra parte la ventaja de que quedan espresadas las restas en unidades de la especie que corresponde.

1.er ejemplo. Si quisiera reducir 8530065 maravedíses á doblones, en vez de dividir este número por 2040, que espresa las veces que el maravedí está contenido en el doblon, ó los maravedíses de que se compone el doblon, dividiré primero por 34 para reducirlos á reales; los reales que me resulten los dividiré por 15 para reducirlos á pesos; y finalmente estos pesos los dividiré por 4 para reducirlos á doblones, y tendré en este último cociente, junto con las restas anteriores, los doblones, pesos, reales y maravedíses que hai en el número propuesto. La operacion se ejecuta como se ve en la página siguiente:


```
8 5,3,0,0,6,5 mrs. | 3 4
1 7 3              |--------------
0 0 3 0 0          | 2 5,0,8,8,4 rs. | 1 5
    0 2 8 6        | 1 0 0           |---------------
      0 1 4 5      | 0 1 0 8         | 1 6,7,2,5 ps. | 4
        0 0 9      |   0 0 3 8       | 0 0 7         |-----------
                         0 8 4           3 2         | 4 1 8 1 ds.
                           0 9           0 0 5
                                             1
```

Primero divido por 34 y saco 250884 reales, y quedan de resta 9 maravedíses, de los que no haré caso hasta lo último; despues divido este número de reales por 15, y saco 16725 pesos con 9 reales de resta; divido luego este número de pesos por 4 y saco 4181 doblones, quedando un peso de resta; de manera que teniendo ahora presentes todas estas restas, diré: que 8530065 maravedíses componen 4181 doblones, 1 peso, 9 reales y 9 maravedíses.

79 Para proceder al sesto uso necesitamos hacer algunas observaciones: en primer lugar, cuando un número está contenido en otro un número exacto de veces, se llama al que contiene *múltiplo* del contenido, y al contenido *submúltiplo ó parte alicota* del continente ó que contiene; cuando un número no está contenido en otro un número exacto de veces, se dice que es *parte alicuanta* del continente. *Parte alicota y submúltiplo* es lo mismo que *factor*, de manera que se llama *factor* de un número aquel que le divide exactamente sin dejar resta. Así, á lo que nos dirigimos ahora es á encontrar todos los factores que puede tener un número propuesto; pero entre estos factores los puede haber que no reconozcan otros factores que ellos mismos y la unidad, y tambien los puede haber que reconozcan otros factores ademas de ellos mismos y la unidad; en el primer caso se llaman *factores simples* ó números *primos ó primeros*, y en el segundo *compuestos*. Todas las investigaciones que tenemos que hacer sobre este particular estriban en saber conocer por otros medios mas simples que los de la division, si un número dado es divisible por los números primeros 2, 3, 5, 7, 11, &c. y por lo mismo dirémos que se *conoce si un número es divisible por 2, si su último guarismo es 0 ó guarismo par*, esto es, si es alguno de estos guarismos 0, 2, 4, 6, 8; por esta regla advertimos que los números 18, 26, 48, 74 y 250, son todos divisibles por 2; *se conoce si es divisible por 3, si la suma de todos los guarismos del número propuesto, considerados como unidades, da 3 ó un múltiplo de 3*; por esta regla se advierte que los números 15 y 237 son divisibles por 3, pues la suma de los guarismos del primero es 6, que es múltiplo de 3, y la de los del segundo 12 que tambien lo es; y si nos queremos cerciorar de ello por la regla, dirémos 2 y 1 son 3, que es múltiplo de 3. *Se conoce si es divisible por 5, si su último guarismo es 0 ó 5.* Para sa-

ber si un número es divisible por los demas números primos, la regla es mas complicada que la simple division; y por lo mismo solo pondrémos aquí la que hai para conocer si es divisible por 11, por ser mas sencilla que esta operacion, y es la siguiente: *súmense todos los guarismos que se hallan en lugares pares, á esta suma añádasele un cero, y á esto añádase la suma de los guarismos que ocupan lugares impares; y si el resultado es divisible por 11, lo será igualmente el número propuesto*; por esta razon se ve que el 58014 es divisible por 11, porque la suma de sus guarismos pares es: 1 y 8 son 9, que añadiendo un 0 son 90; la de los impares es: 4 y 0 son 4, y 5 son 9, y 90 son 99; donde vemos que 99 es divisible por 11, y da por cociente 9 (*).

(*) *Todas estas reglas las dan generalmente los autores sin demostracion ninguna, y solo se contentan con verificarlas; algunos mas delicados se paran á demostrar algunas de ellas, atendiendo en cada caso á observaciones particulares; pero nosotros vamos á resolver esta cuestion en general, cosa que no tenemos noticia se halle en ningun libro elemental, por medio del siguiente*

PROBLEMA. Dado un número cualquiera, conocer si es divisible por otro número cualquiera, por otros medios diferentes de los que suministra la division.

Res. *Fórmese ante todas cosas un conjunto de números con el órden siguiente: póngase en un lugar separado 1; á su izquierda el residuo que quede de restar el número que ha de servir de divisor, todas las veces que se pueda de 10; á la izquierda de este residuo póngase el que quede de restar el divisor propuesto, todas las veces que se pueda, de diez veces la resta anterior, á la izquierda de este, el que quede de restar el mismo divisor todas las veces que se pueda de diez veces el residuo anterior; y continúese de este modo hasta encontrar tantos residuos de estos, como guarismos tiene el que ha de servir de dividendo, ó hasta que los residuos sean cero; despues multiplíquese el último guarismo del que ha de servir de dividendo por 1, que es el primero de este conjunto de números; el segundo del dividendo por el segundo de este números, el tercero por el tercero, &c. hasta que cada guarismo del dividendo se haya multiplicado por el correspondiente en este conjunto; súmense todos estos productos, y si la suma es divisible por el divisor dado lo será tambien el dividendo propuesto.*

EJEMPLO. Propongámonos averiguar si el número 6232 *es divisible por* 19.

Para esto formarémos primero las restas, y tendrémos poniendo 1 *á la derecha, que como de* 10 *no se puede quitar* 19 *ninguna vez, el primer residuo es* 10, *que colocarémos á la izquierda del* 1; *de diez veces este residuo que es* 100, *quitarémos el* 19 *todas las veces que se pueda, y*

Entendido esto, para hallar los factores simples y compuestos se practicará la regla siguiente: *divídase el número propuesto por* 2 *todas las veces que se pueda, lo cual se conocerá por las reglas dadas ántes; des-*

---

hallarémos un segundo residuo 5, *que colocarémos á la izquierda del anterior; de diez veces este residuo, esto es de* 50, *quitarémos* 19 *todas las veces que se pueda y quedará por tercer residuo* 12, *que colocarémos á la izquierda del anterior* 5; *y como no hai mas de cuatro guarismos en el número que ha de servir de dividendo, no tenemos necesidad de mas restas; de modo que nos bastará con* 12, 5, 10, 1. *Ahora multiplicarémos cada residuo empezando desde* 1, *por su guarismo correspondiente en el* 6232, *sumarémos los productos y hallarémos por suma* 114.

Ahora ejecutarémos con el 114 *lo mismo que con el* 6232, *y nos dará la multiplicacion sucesiva, despues de haber hecho la suma,* 19, *que como es divisible por* 19, *nos dice que tambien son divisibles por* 19 *los números* 114 *y* 6232.

Dem. *Para que la demostracion sea mas clara, y convenga al mismo tiempo á toda clase de números, señalarémos el número dividendo por*

&c. T S R Q P N M;

donde suponemos que M *es el guarismo que espresa las unidades,* N *el de las decenas,* P *el de las centenas, &c.; llamarémos* A *al número que se quiere averiguar si es divisor, y* B,C,D,E,F, &c. *el órden de las restas que podrémos colocar á la izquierda de la unidad de modo que se correspondan debajo del número propuesto en esta forma:*

&c. T S R Q P N M
&c. G,F,E,D,C,B, 1

Y tendrémos que si el número propuesto consta solo de un guarismo M, *este multiplicado por la unidad da el mismo número* M; *y si fuese este producto múltiplo de* A, *seria porque lo era ántes de hacer la multiplicacion por* 1; *luego queda demostrado para cuando el número no tiene mas de un guarismo.*

Si consta de dos, será por ejemplo NM, *y voi á demostrar que si* $M+N\times B$ *es múltiplo de* A, *lo será tambien* NM.

Porque hallándose el carácter N *en la columna de las decenas, equivale á* 10 N, *y añadiéndole las unidades* M *se tendrá que* $NM=10N+M$.

Ahora, por ser B *el residuo que queda de restar* A *de* 10 *todas las veces que se pueda, tendrémos que si quitamos de* 10 *la* B, *nos vendrá un residuo que será múltiplo de* A; *luego* $10-B$ *será múltiplo de* A, *y multiplicándole por* N, *el producto tambien lo será; luego* $10N-B\times N$ *es múltiplo de* A; *pero si sucede que* $M+B\times N$ *sea múltiplo de* A, *sumando estos dos múltiplos hallarémos:*

$10N-B\times N+B\times N+M$ *múltiplo de* A, *ó* $10N+M$ *múltiplo de* A, *pues se dividirá por 3 todas las veces que se pueda, luego por 5, despues por 7, luego por 11, y en general por todos los números primos todas las veces que se pueda, y se tendrán los factores simples del número*

(*porque la reunion de*—B×N *con* +B×N *equivale á cero; pues la primera espresion indica que se ha de quitar* B×N, *y la segunda que se ha de añadir; luego si se añade por una parte lo mismo que se quita por otra, esto no altera en nada el resultado); pero* 10N+M *es lo mismo que* NM, *luego si* M+B×N *es múltiplo de* A, *tambien lo será* NM.

Si el dividendo consta de tres guarismos y es por ejemplo PNM, *tendrémos del mismo modo*: 10—B *múltiplo de* A (1);

luego si multiplicamos por 10 *será*: 100—10B *múltiplo de* A (2);

y multiplicando por P *el producto será tambien múltiplo de* A, *á saber*:

100P—10B×P *múltiplo de* A (3);

y como C *era el residuo que quedaba de quitar* A *todas las veces que se podia de* 10B, *resulta que si de* 10B *quitamos* C, *nos vendrá* 10B—C; *que equivaldrá á un múltiplo de* A, *espresado por el número de veces que se restó y tendrémos*: 10B—C *múltiplo de* A (4);

y multiplicando por P *será*: 10B×P—C×P *múltiplo de* A (5);

luego si sumamos los múltiplos (5) *y* (3) *nos vendrá*:

100P—10B×P+10B×P—C×P, *ó* 100P—C×P, *múltiplo de* A (6).

Ahora como 10—B *es múltiplo de* A, *multiplicando por* N *será*:

10N—B×N *múltiplo de* A (7);

y sumando este con el (6) *resultará*:

100P—C×P+10N—B×N *múltiplo de* A (8);

y si ademas se verifica que C×P+B×N+M *sea múltiplo de* A, *la suma de estos dos últimos será tambien múltiplo de* A; *luego*

100P—C×P+10N—B×N+C×P+B×N+M *múltiplo de* A, *ó*

100P+10N+M *múltiplo de* A;

pero 100P+10N+M=PNM, *pues* P *espresa centenas*, N *decenas y* M *unidades; luego el número propuesto* PNM *será divisible por* A, *si lo es* C×P+B×N+M. *Lo mismo demostraríamos si tuviese mas guarismos.*

Cor. general. *De aquí se deduce que si la suma de dichos productos no es múltiplo de* A, *tampoco lo será el número propuesto; y que la resta que quede de dividir dicha suma por* A, *será igual á la que quede de dividir por* A *el número propuesto; porque aquí teníamos que* 100P—C×P+10N—B×N *es* (8) *múltiplo de* A; *luego si le añadimos la suma* C×P+B×N+M *de los productos de los guarismos por las restas, en esta suma, la resta que quede ademas de los múltiplos de* A, *solo provendrá de la resta que haya en* C×P+B×N+M; *luego conocerémos la resta que queda de dividir por* A *el número propuesto, si averiguamos la resta que queda de dividir por* A *la suma* C×P+B×N+M.

propuesto. Ahora, todos estos factores se multiplican entre sí de dos en dos de cuantas maneras se pueda, y se tendrán los compuestos de á dos;

Ahora, de esta proposicion, que es de Pascal, deducirémos para la práctica las reglas sencillas que se han dado arriba.

Formemos ante todas cosas el conjunto de restas que convienen al divisor 2, *y tendrémos en primer lugar que poner la unidad; despues restarémos el* 2 *de* 10 *todas las veces que se pueda, y haciéndolo cinco veces quedará por residuo* 0, *que podrémos poner á la izquierda del* 1. *Ahora, multiplicando* 0 *por* 10 *es* 0, *y restando las veces que se pueda el* 2, *se ve que no se puede restar ninguna y queda* 0 *por resta; y como todas las demas restas nos saldrian tambien iguales con* 0, *se deduce que todos los productos que se formen, escepto el primero, serán* 0; *de modo que tendrémos &c.,* 0,0,0,1. *Luego queda reducida la cuestion á multiplicar* 1 *por el último guarismo del número propuesto, y si el producto es divisible por* 2, *tambien lo será el propuesto; y como la multiplicacion por* 1 *da el mismo multiplicando, resulta que si el último guarismo es divisible por* 2, *lo será tambien todo el número; pero el último guarismo es divisible por* 2 *cuando es guarismo par ó* 0, *porque* 0 *es divisible por cualquier número sin resta, dando tambien* 0 *por cociente; luego resulta la regla que hemos dado arriba.*

Para deducir la regla de cuando es divisible por 3 *formarémos las restas, y tendrémos en primer lugar que poner la unidad; despues restarémos el* 3 *todas las veces que se pueda de* 10, *y hallamos por residuo al ejecutar la tercera resta* 1, *que colocarémos á la izquierda del primer* 1; *despues de diez veces esta resta que es* 10, *restarémos* 3 *todas las veces que se pueda, y al cabo de tres hallamos por residuo* 1, *que colocarémos á la izquierda del anterior; y como hallaríamos que todas las restas siguientes eran* 1, *se tendrá &c.* 1,1,1, 1.

Pero el producto de cualquier número por 1 *es el mismo número, luego los productos que resulten de multiplicar los guarismos del número propuesto por las restas correspondientes, serán los mismos guarismos; de donde se deduce que si la suma de estos guarismos como si espresasen unidades es divisible por* 3; *tambien lo será el número propuesto, como hemos dicho en el testo.*

Para hallar los números divisibles por 4, *por* 8, *por* 16, *por* 32, *&c. hallaríamos que el órden de las restas era: para* 4.... *&c.* ,0,0,2,1; *para* 8.... *&c.* ,4,2,1; *para* 16.... *&c.* ,4,10,1, *y del mismo modo hallaríamos para* 32, 64, *&c.*

Con el fin de averiguar las circunstancias que se requieren para que un número sea divisible por 5, *formarémos el órden de las restas correspondientes á este divisor, y serán: &c.* ,0,0,0,0,1; *luego solo se ne-*

luego se multiplican de tres en tres de todos los modos posibles, y se tendrán los compuestos de á tres; luego de cuatro en cuatro, y así suce-

---

cesita que su último guarismo multiplicado por 1 *sea divisible por* 5; *y como la multiplicacion por* 1 *no le alterará, resulta que solo bastará que el último guarismo sea divisible por* 5; *pero solo el* 5 *y el* 0 *son divisibles por* 5 *sin resta: luego para que un número sea divisible por* 5 *debe terminar en* 0 *ó en* 5.

Si quisiéramos indagar las restas sucesivas para conocer si un número es divisible por 6, *hallaríamos:* &c. ,4,4.4,4,1;
pero es mas sencillo ver si el último guarismo es par ó cero, y si la suma de todos es múltiplo de 3; *pues verificándose estas dos circunstancias será divisible por* 2 *y por* 3 *á un mismo tiempo, ó por su producto* 6.

Si indagamos las condiciones que se requieren para que un número sea divisible por 7, *hallarémos las restas siguientes:*

&c. ,1,5,4,6,2,3,1,5,4,6,2,3,1;

donde se ve que despues del residuo 5 *se vuelven á repetir otra vez los mismos; lo que es indispensable, porque las restas han de ser siempre menores que el divisor; pero el poner en práctica la regla en este caso es generalmente mas complicado que el averiguarlo por la division.*

Las restas para conocer si un número es divisible por 9, *son*

&c. ,1,1,1,1,1,1;

de donde se deduce que un número será divisible por 9, *si sus guarismos sumados como si espresasen unidades sencillas dan* 9 *ó un múltiplo de* 9.

Si indagamos las restas para dividir por 11, *tendrémos que son:*

&c. 10,1,10,1,10,1;

de donde se deduce para la práctica la regla sencilla que hemos dado en el testo.

Las restas para conocer si es divisible por 13, *serian:*

&c. 10, 1, 4, 3, 12, 9, 10, 1;

donde se ve que, así como las del 7, *no suministran métodos bastante sencillos en la práctica; lo mismo sucederia para las de* 17, 19 &c.

En el apéndice 1.º *que se halla al fin de este volúmen se manifiesta por otro método el modo de deducir todas estas reglas.*

Esc. *En lo sucesivo tendrémos necesidad de averiguar con prontitud las restas que nos resultan; y así observarémos que las restas que son mas fáciles de encontrar son las del* 2 *y del* 5: *para la del* 2, *solo investigarémos si el último guarismo es par, y si lo es no habrá resta; si es impar, la resta será* 1. *Para ver la del* 5, *se observará si el último guarismo es* 5 *ó cero, en cuyo caso la resta es* 0; *si el último guarismo no fuese ninguno de estos, la resta será el último guarismo, si es menor que* 5; *y si es mayor, el esceso de dicho guarismo sobre* 5. *Así, la resta que deja el* 37 *dividido por* 5 *es* 2; *y la que el* 33 *es* 3.

sivamente hasta que se multipliquen todos entre sí; de cuyo producto resultará el número propuesto.

{ Para que se tenga facilidad en encontrar los compuestos sin que se olvide ninguno, conviene disponer la operacion del modo siguiente: *el número se pone en un parage cualquiera, pero escrito lo mas alto y hácia la izquierda del papel ó pizarra donde se ejecuta la operacion; despues se tira una raya de arriba abajo, y enfrente, esto es, á la derecha de esta raya, pero en el mismo renglon que el número propuesto, se pone el número menor por que sea divisible; como esta division es sencilla, se va haciendo mentalmente por el método dicho al fin del párrafo* (72), *y el cociente se va poniendo debajo del número propuesto. Enfrente de este cociente se pone otra vez el mismo divisor, si este cociente es divisible por él; y sino, aquel número primo menor por que sea divisible este cociente, y así se continúa hasta llegar á un cociente que sea número primo, el cual será el último divisor; y se conocerá si es número primo en las mas de las ocasiones* (*) *viendo si es igual á un*

(*) *Decimos en las mas de las ocasiones, porque no siempre que esto se verifique en un número resultará que sea primero; en efecto, lo que sí es cierto es que todo número primero debe ser igual á un múltiplo de* 6 *mas ó ménos la unidad. Para convencernos de esto, observarémos que solo los números impares pueden ser números primeros, pues los demas son divisibles por* 2; *y como los números impares, divididos por* 6 *que es número par, deben dar por resta un número impar, resulta que como toda resta debe ser menor que el divisor, las restas que podrán quedar solo serán* 1, 3 *y* 5; *luego si señalamos el cociente con la letra* m, *que es la inicial de múltiplo, resultará que todo número impar tendrá esta forma:* $m\times6+1$, $m\times6+3$, *ó* $m\times6+5$; *pero los que tengan la segunda forma no pueden ser primeros porque son divisibles por* 3, *luego solo podrán ser primeros los que tengan la forma* $m\times6+1$, $m\times6+5$; *y como* $5=6-1$, *resulta que esta segunda forma la podrémos poner bajo este aspecto* $m\times6+6-1$; *pero si á un múltiplo de* 6, *le añadimos una vez el mismo* 6 *resulta un múltiplo de* 6; *luego deberá ser todo número primero en este segundo caso igual á un múltiplo de* $6-1$; *luego queda probado lo que deseábamos. Ahora, no todos los números que estén comprendidos en las formas* $m\times6+1$ *ó* $m\times6-1$ *serán números primeros; porque si el múltiplo fuese el cuádruplo, la primera caia en defecto; y si fuese el sétuplo caeria la segunda.*

Luego aun cuando un número sea de la forma $m\times6+1$, *ó de la* $m\times6-1$, *no se tiene aun certeza de si es número primero; de lo cual solo nos podemos convencer ensayando la division por todos los números primeros menores que aquel que multiplicado por sí mismo nos da un resultado igual ó mayor que el número propuesto. Pero como este método es mui com-*

múltiplo de 6, mas ó ménos la unidad; sino lo es, no será número primo.

{ Todos los factores simples se hallan ahora en una columna, á la derecha de la cual se tirará una raya de arriba abajo; para formar los com-

---

plicado, y por otra parte se necesita en muchas ocasiones saber conocer tanto los números primeros como los factores de los que no lo son, Mrs. Lambert, Vega, Lidónne, Chernac y Burckhardt, han publicado tablas sobre este particular. Las de Mr. Chernac comprenden todos los números primeros y los factores de los que no lo son hasta el 1020000; *y las de Mr. Burckhardt contienen los comprendidos desde el* 1020000 *hasta el* 3036000 *y ofrece continuarlas hasta diez millones.*

El método mas sencillo para su formacion es el colocar en una fila todos los números impares desde el 3 *en adelante: despues se borran todos los que están en los lugares* 3, 6, 9 *&c, ó en general en los lugares que son múltiplos de* 3, *respecto del que ocupa el primer lugar que es el* 3; *luego, los que están en los lugares* 5, 10, 15 *respecto del* 5, *ó en general los que ocupan un lugar espresado por un múltiplo de* 5; *luego los que ocupan los lugares* 7, 14, 21 *&c. respecto del* 7, *&c. y los que vayan quedando serán los números primeros. Este procedimiento es mui antiguo, se debe á Eratóstenes, y se suele llamar la* criba de Eratóstenes; *porque este sabió, bibliotecario del Muséo de Alejandría hácia el año de* 280 *ántes de la era cristiana, escribió la serie de los números sobre una plancha; y despues de haber desechado los números pares escepto el* 2, *y de haber reconocido los múltiplos de los números primeros superiores al* 2, *hizo debajo de estos números un agujero por el cual suponia que pasaban de manera que solo quedaban los números primeros. Pondrémos aquí los comprendidos hasta* 1000.

Tabla de los números primeros comprendidos desde 1 hasta 1000.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,
41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ... 26.
101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,
167,173,179,181,191,193,197,199, ... 47.
211,223,227,229,233,239,241,251,257,263,269,271,277,
281,283,293, ... 63.
307,311,313,317,331,337,347,349,353,359,367,373,379,
383,389,397, ... 79.
401,409,419,421,431,433,439,443,449,457,461,463,467,
479,487,491,499, ... 96.
503,509,521,523,541,547,557,563,569,571,577,587,593,
599, ... 110.

puestos de á dos, *se multiplicará cada uno de los simples por los que tenga debajo de sí, y el producto se pondrá á la derecha de la raya enfrente del factor por que se multiplica.* Luego, para formar los compuestos de á tres *se multiplicará cada uno de los compuestos de á dos por todos los simples que haya debajo del renglon en que está el compuesto de á dos*; y así se procede hasta llegar al último que debe resultar en el renglon inferior, é igual con el número propuesto.

{ 1.^{er} ejemplo. Si me propongo hallar los factores simples y compuestos del número 210, lo primero que ejecutaré será colocar el 210 lo mas arriba y hácia la izquierda que me sea posible, y tiraré la raya á su derecha como aquí se presenta:

210	2				
105	3	6			
35	5	10; 15	30		
7	7	14; 21; 35	42; 70; 105	210.	
1					

Y como el 210 termina en 0, veo que es divisible por 2, pongo por consiguiente el 2 enfrente, y hago la division diciendo: la mi-

---

601,607,613,617,619,631,641,643,647,653,659,661,673,
677,683,691, ... 126.
701,709,719,727,733,739,743,751,757,761,769,773,787,
797, ... 140.
809,811,821,823,827,829,839,853,857,859,863,877,881,
883,887, ... 155.
907,911,919,929,937,941,947,953,967,971,977,983,991,
997, ... 169.

Los números de la columna de la derecha dan á conocer los números primeros comprendidos hasta aquella centena donde están, y por consiguiente resulta que desde 1 hasta 1000 hai 169 números primeros.

Terminarémos esta nota observando que todo número entero ha de tener por precision una de estas formas $2n$, ó $2n+1$; porque ó ha de ser divisible exactamente por 2, en cuyo caso, espresando por n el cociente estará representado el número por $2n$, ó de la division por 2 quedará una resta espresada por 1, puesto que ha de ser (74) menor la resta que el divisor 2; y en este caso, señalando por n el cociente resulta que el número estará espresado por $2n+1$.

Por la misma razon todo número entero estará comprendido en una de estas tres formas $3n$, $3n+1$, $3n+2$;
en una de estas cuatro $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$;
en una de estas cinco $5n$, $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$, $5n+4$; &c.

tad de 2 es 1, que pongo debajo del 2 del 210, continúo: la mitad de 1 es 0 que pongo debajo del 1 del 210, y me queda 1 que junto con el 0 de arriba da 10; la mitad de 10 es 5, que pongo á la derecha del 0; como el 105 no termina en 0 ni en guarismo par, no es divisible por 2. Así averiguo si es divisible por 3, diciendo: 1 y 0 es 1, y 5 son 6, y como 6 es múltiplo de 3, infiero que el 105 se puede dividir por 3; y por lo mismo coloco el 3 á su derecha, y hago la division de este modo: la tercera parte de 1 es 0 que no pongo, porque á la izquierda de los guarismos significativos no hace nada; este 1 le junto con el 0 que sigue, diciendo: la tercera parte de 10 es 3, que pongo debajo del 0, y me queda 1 que junto con el 5 compone 15; la tercera parte de 15 es 5 que pongo á la derecha del 3; el 35 no es ya divisible por 3, pero lo es por 5; coloco el 5 á su derecha, y hago la division diciendo: la quinta parte de 35 es 7, que pongo debajo del 5; y como el 7 es divisible por 7, hago la division diciendo: la séptima parte de 7 es 1; ahora, como el 1 es divisible por 1, tambien lo será el propuesto; pero como todos los números son divisibles por 1, no se hace caso de este factor.

Para hallar los factores compuestos de dos simples, tiraré á la derecha de estos una raya, y multiplicaré el 2 por todos los que tenga debajo de sí, diciendo: 2 por 3 son 6, que coloco á la derecha de la raya, pero enfrente del 3, que es por el que he multiplicado; continúo: 2 por 5 son 10, que pongo enfrente del 5, que es por el que he multiplicado, y continúo: 2 por 7 son 14, que pongo por la misma razon enfrente del 7. Como el 2 ya no tiene mas factores simples debajo, paso á multiplicar el 3 por todos los que tiene debajo diciendo: 3 por 5 son 15, que pongo enfrente del 5, que es por el que he multiplicado, y para que no se confunda con el 10 que tengo en el mismo renglon, los separo poniendo entre ellos punto y coma; continúo diciendo; 3 por 7 son 21, que pongo enfrente del 7, y por consiguiente al lado del 14, pero separándolos con punto y coma; luego paso á multiplicar el 5 por todos los que tenga debajo de sí, diciendo: 5 por 7 son 35, que pongo enfrente del 7, y por consiguiente al lado del 21. Como el 7 no tiene ninguno debajo de sí, no puedo ya sacar mas factores de á dos.

Paso á los de á tres: para lo cual despues de tirada una raya multiplicaré el 6, primer factor de á dos, por el 5 y por el 7, que son los simples que hai debajo del renglon donde se halla el 6, diciendo: 6 por 5 son 30 que pongo enfrente del 5, que es el simple por que he multiplicado; y luego 6 por 7 son 42, que pongo enfrente del 7. Paso ahora á multiplicar el 10 por el 7, que es el simple que hai en el renglon inferior á aquel en que se halla el 10 diciendo: 10 por 7 son 70 que pongo enfrente del 7, y por consiguiente al lado del 42. Como los que están en el renglon inferior no tienen debajo de sí en los simples ningun otro factor, no puedo formar mas factores de á tres; por consiguiente tiro la

raya, y paso á los de á cuatro. Para lo cual multiplicaré el 30 por los que haya en los simples debajo del renglon donde está el 30; y como solo hai uno que es el 7 diré: 30 por 7 son 210; que pongo enfrente del 7, y me da á conocer que ya no hai mas factores, puesto que este resulta del producto de los cuatro factores simples que habia.

En esta operacion no hemos intentado hacer la division por 4, por que no habiéndose podido ya dividir por 2, con ménos razon se podrá dividir por 4.

Suele ocurrir el que los factores simples se repitan, y en este caso tambien se repetirian los compuestos: lo cual se evita no poniendo ninguno de los que se tenian ya, y su procedimiento es como en el siguiente ejemplo. Supongamos que quiero encontrar los factores simples y compuestos del número 180; lo primero que ejecutaré, será colocarle lo mas á la izquierda y alto que me sea posible, como aquí se presenta:

180	2				
90	2	4			
45	3	6	12		
15	3	9	18	36	
5	5	10; 15	20;30;45	60;90	180
1					

Tiro despues una raya á su derecha, y como el 180 termina en 0, conozco que es divisible por 2, y por lo mismo coloco el 2 á la derecha de la raya, y hago la division diciendo: la mitad de 1 no puede ser, tomo por lo mismo los dos primeros guarismos, y digo: la mitad de 18 es 9, que pongo debajo del 8 del 18; y como de 18 no me ha quedado nada, digo: la mitad de 0 es 0, que pongo debajo del 0 del 180, ó al lado del 9; como el 90 termina en 0, es divisible por 2, coloco el 2 enfrente y hago la division diciendo: la mitad de 9 es 4, que pongo debajo del 9, y queda 1 que junto con el 0 del 90 compone 10; la mitad de 10 es 5, que pongo á la derecha del 4. Como el 45 no termina en 0 ni en guarismo par, no es ya divisible por 2; indago si es divisible por 3 diciendo: 4 y 5 son 9, y como 9 es divisible por 3, infiero que tambien lo será el 45, pongo el 3 á su derecha, y ejecuto la division diciendo: la tercera parte de 4 es 1, que pongo debajo y queda 1, que junto con el 5 da 15; la tercera parte de 15 es 5; como el 15 es aun divisible por 3, por que 1 y 5 son 6 que es múltiplo de 3, ejecuto otra vez la division por 3, y pongo debajo el cociente 5. Ahora, como el 5 no es ya divisible por 3, y lo es por el mismo 5, lo ejecutaré diciendo: la quinta parte de 5 es 1, que pongo debajo, y tengo ya los factores simples.

Para hallar los compuestos de á dos factores simples, tiraré una raya de arriba abajo, á la derecha de los simples; multiplicaré el primer factor 2 por todos los que tenga debajo de sí, diciendo, 2 por 2 son 4, que pongo á la derecha de la raya enfrente del segundo 2, que es por el que he multiplicado; despues digo: 2 por 3 son 6, que pongo enfrente del primer 3, que es por el que he multiplicado; despues deberia decir: 2 por 3, pero como el producto del 2 por este segundo 3, será el mismo que el del primero, no lo ejecuto y paso á multiplicar el 2 por el 5, diciendo: 2 por 5 son 10 que pongo enfrente del 5, que es por el que he múltiplicado. Ahora deberia multiplicar el segundo 2 por todos los que tiene debajo de sí; pero como de estos productos me resultarian los mismos que ya tengo apuntados, escuso el hacer la operacion. Paso despues á multiplicar el 3 por todos los que tiene debajo de sí, diciendo: 3 por 3 son 9, que pongo enfrente del 3 segundo, que es por el que multipliqué, y por consiguiente en un lugar vacío que me habrá quedado entre el 6 y el 10 que ya tenia; continúo diciendo: 3 por 5 son 15, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente á la derecha del 10; como de multiplicar el segundo 3 por el 5 que tiene debajo, me resultará 15 que ya tengo, omito esta operacion y paso á sacar los compuestos de á tres.

{ Para esto, despues de tirada la raya multiplicaré el 4, primer factor compuesto de á dos, por todos los simples que tenga debajo de sí, esto es, por todos los simples que están debajo del renglon donde se halla el 4, diciendo: 4 por 3 son 12, que pongo enfrente del primer 3, que es por el que he multiplicado; luego, como de la multiplicacion del mismo 4 por el segundo 3 me resultaria el 12 que ya tengo, omito esta operacion y paso á multiplicar el 4 por el 5, diciendo: 4 por 5 son 20, que pongo enfrente del 5; ahora el 6, segundo compuesto de á dos, le multiplicaré por todos los que en la columna de los simples se hallen inferiores á él, diciendo: 6 por 3 son 18, que pongo enfrente del segundo 3, que es por el que he multiplicado, y por consiguiente en el hueco que quedó entre el 12 y el 20; despues digo: 6 por 5 son 30, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente al lado del 20; paso al 9 diciendo: 9 por 5 son 45, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente al lado del 30. Como en la columna de los simples no hai ya ningun factor que se halle debajo del renglon de los compuestos de á dos, donde está el 10 y el 15, no puedo sacar mas compuestos de á tres; y paso á los de á cuatro diciendo, despues de tirar la raya: 12 por el segundo 3, que es el que se halla inferior al 12 en la columna de los simples, es 36, que pongo enfrente del segundo 3; 12 por 5 son 60, que pongo enfrente del 5; continúo diciendo: 18 por 5 son 90, que pongo enfrente del 5, y por consiguiente al lado del 60. Como ya no puedo sacar mas compuestos de á cuatro, paso á los de á cinco diciendo: 36 por 5 son 180, que pongo despues de tirada la raya enfrente del 5; y como ya no hai mas factores simples he concluido mi operacion.

{ Con el fin de que los principiantes se ejerciten en esta operacion, les pondrémos aun los ejemplos siguientes:

I.

630	2				
315	3	6			
105	3	9	18		
35	5	10;15	30;45	90	
7	7	14;21;35	42;63;70;105	126;210;315	630
1					

II.

540	2					
270	2	4				
135	3	6	12			
45	3	9	18	36		
15	3		27	54	108	
5	5	10;15	20;30;45	60;90;135	180;270	540
1						

III.

2310	2				
1155	3	6			
385	5	10,15	30		
77	7	14,21,35	42,70,105	210	
11	11	22,33,55,77	66,110,165,154,231,385	330,462,770,1155	2310
1					

Del mismo modo se hallaria que los factores simples del 27720 son 2, 2, 2, 3, 3, 5, 7, y 11; los compuestos de á dos 4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 33, 35, 55, y 77; los compuestos de á tres 8, 12, 18, 20, 28, 30, 42, 44, 45, 63, 66, 70, 99, 105, 110, 154, 165, 231, 385; los de á cuatro 24, 36, 40, 56, 60, 84, 88, 90, 126, 132, 140, 198, 210, 220, 308, 315, 330, 462, 495, 693, 770, 1155; los de cinco 72, 120, 168, 180, 252, 264, 280, 396, 420, 440, 616, 630, 660, 924, 990, 1386, 1540, 2310, 3465; los de seis 360, 504, 792, 840, 1260, 1320, 1848, 1980, 2772, 3080, 4620, 6930; los de siete 2520, 3960, 5544, 9240, 13860; y el de ocho es el 27720 que es el número propuesto.

El 41580 tiene por factores simples los siguientes 2, 2, 3, 3, 3, 5, 7, y 11; doce factores de á dos; diez y nueve de á tres; veinte y dos de á cuatro; diez y nueve de á cinco; doce de á seis; cinco de á siete; y el de á ocho resulta ser el propuesto.

{ 80 En punto á encontrar los divisores de los números, se pueden proponer varias cuestiones útiles; pero aquí solo manifestarémos una, que es la de hallar el *máximo comun divisor* de dos ó mas números. *Divisor ó factor* ya hemos dicho lo que es, y con decir *comun* damos á entender que lo ha de ser de todos los números que tratemos de indagar si son divisibles por él; pero como pueden ser muchos los divisores que sean comunes, en la cuestion se nos pide que hallemos el mayor de todos, al cual le llamarémos *máximo*. Pero ántes debemos demostrar el siguiente

Teor. *Si dos números tienen un divisor comun, este dividirá tambien exactamente á la diferencia de estos números.*

Dem. Si descomponemos al mayor en dos partes, la una igual con el menor, la otra será la diferencia; pero si el todo era divisible por un número que dividia al menor, este número tambien deberá dividir á la resta; pues sino, en el mayor habria una parte divisible por dicho número y otra no, en cuyo caso no seria divisible; lo cual siendo contra el supuesto manifiesta que la diferencia debe ser divisible por dicho número. L. Q. D. D.

Esc. En esta demostracion hemos dicho que si siendo una parte divisible, la otra no lo fuese, era señal de que aquel número propuesto no lo era. Hemos espresado esta circunstancia, porque aunque un número sea divisible por otro, no se infiere que lo sean todas las partes en que le descompongamos; pues si el 15 que es divisible por 5 le descomponemos en 8+7, ninguna de estas partes es divisible por 5, aunque lo es el 15; pero si le descomponemos en dos partes tales que la una sea divisible por 5, la otra tambien lo será; así es que descomponiéndole en 10+5, ambas partes son divisibles por 5.

Corol. De aquí se deduce que *si dos números tienen un comun divisor, este tambien dividirá á la resta que quede de dividir el uno por el otro*; pues en este caso el dividendo se compondrá de cierto número de veces el divisor, mas la resta; luego le podemos descomponer en dos partes, que la una sea igual al producto del cociente hallado por el divisor, y la otra la resta; pero como por el supuesto habia un número que dividia exactamente á ambos, y aquí tenemos descompuesto el mayor en dos partes que la una es divisible, á saber, la que equivale al producto del cociente por el divisor, resulta que la otra que es la resta tambien deberá ser divisible por dicho divisor.

Ahora, supongamos que se intente hallar el máximo comun divisor de los dos números 420 y 500; pues que ya sabemos encontrar los factores ó divisores, el primer método que se nos presenta es el de hallarlos por el método espuesto (79), y ver despues cuales son los comunes, y de estos elegir el mayor; pero no necesitamos en esta operacion, sino hallar los simples en ambos, apuntar los que son comunes, y su producto será el máximo comun divisor pedido. Así, sacarémos los factores simples de estos números, y apuntarémos los que son comunes como aquí se presenta:

420	2.	500	2.
210	2.	250	2.
105	3	125	5.
35	5.	25	5
7	7	5	5
1		1	

Y como convienen en tener dos veces el 2 y una el 5, inferimos que el divisor mayor es 20 que resulta de multiplicar estos tres. Pero hemos dicho (nota de la pág. 67.) que al fin no podríamos cerciorarnos de si el último cociente que nos resulta es número primo ó no, sino por métodos mui largos, los cuales sino los empleábamos

podríamos en algunas ocasiones omitir algun divisor, y entónces al hallar el máximo por este método podríamos padecer equivocacion, no siendo el verdadero. Por esto vamos á indagar analíticamente otras reglas que siempre nos conduzcan al resultado.

En efecto, pues que el divisor que buscamos ha de dividir exactamente á los dos, resulta que no puede ser mayor que el menor de ellos; pues entónces este no se podria dividir exactamente, porque en un número no puede caber exactamente otro que sea mayor que él; luego sino puede ser mayor, lo que debemos averiguar es si es igual, y sino, deberá ser menor. Para averiguar si es igual, dividamos el mayor por el menor, y si aquel es divisible por este, este será el máximo comun divisor. Ejecutando la operacion vemos que el 500 dividido por 420, da 1 por cociente y deja 80 de resta, y por consiguiente podemos descomponer al 500 en una vez 420+80 ó en 420+80; luego el máximo comun divisor que buscamos ha de dividir al 420 y al 80; luego no podrá ser mayor que el 80, pues ningun número que fuese mayor que el 80 podria dividir á este número exactamente: veamos si el mismo 80 puede dividir exactamente al 420, pues si le divide exactamente, tambien dividirá al 420+80, y será por consiguiente 80 el máximo comun divisor; pero 420 dividido por 80 da por cociente 5 y deja por resta 20, luego el 420 equivale á cinco veces el 80+20; y por lo mismo tendrémos que los números cuyo máximo comun divisor vamos buscando, los podrémos poner bajo esta forma: $420=5\times80+20$; $500=420+80=5\times80+20+80$.

Ahora, todo número que divida exactamente á ambos, deberá dividir al 20 (cor. antec.), luego no podrá ser mayor que el 20; ensayemos si el 20 divide al 80; pues si esto sucede, como los demas se componen de cierto número de veces el 80 y de 20, resultará que los propuestos tendrán el mismo divisor comun; y como el 20 divide exactamente al 80, inferimos que este es el máximo comun divisor que buscamos.

Luego todo está reducido á dividir el mayor de estos dos números por el menor, el menor por la primera resta, la primera resta por la segunda, esta por la tercera y así sucesivamente hasta llegar á una division que no deje resta; en cuyo caso el número que nos haya servido de divisor, será el máximo comun divisor pedido. Si este número fuese igual con la unidad, era señal de que no tenian ningun divisor comun mayor que la unidad; y como sabemos que esta es divisor comun de todos los números, resulta que en este caso no tienen ningun comun divisor mas que la unidad; y entónces se dice que son números primeros entre sí.

Para conciliar la brevedad con la claridad y comodidad, se dispone la operacion como aquí se presenta:

500	420	80	20
	1)	5)	4)
080	020	00	
25	21	4	1

Se coloca el 420 á la derecha del 500 separados con las rayas de dividir; se pone el cociente 1 y la resta donde corresponde; luego se pone la resta á la derecha del 420 con las rayas de dividir; se hace la division, y se coloca el cociente y la resta donde corresponde; mas á fin de que la resta segunda 20 no se confunda con el cociente anterior 1, se encierra este con una media luna como allí se presenta; y así se continúa hasta que no se encuentre resta.

{ Colocados de este modo, se halla por un procedimiento mui sencillo el cociente que resulta de dividir cada número por el máximo comun divisor. Para esto, se prolongan todas las rayas que van de arriba abajo, y se tira debajo de las restas otra raya; debajo del último divisor se pone la unidad, la cual da á entender que el máximo comun divisor 20, dividido por él mismo da 1 por cociente; luego, se multiplica este 1 por el cociente que tiene en la casilla de encima, y este producto se pone en la casilla de la izquierda; luego, este número se multiplica por el cociente que está en la casilla de encima, y al producto se le añade el que está en la casilla de la derecha, diciendo: 4 por 5 son 20, y 1 son 21, que pongo en la de la izquierda; y luego continúo del mismo modo diciendo: 21 por 1 es 21, y 4 son 25, que pongo en la casilla de la izquierda, esto es, debajo del 500; con lo cual tengo debajo de cada número de los de arriba, el cociente que resulta de dividirlos por el máximo comun divisor.

{ En efecto, el 20 dividido por 20 da 1; por eso pongo 1 en la primera casilla de la derecha; pero el 20 estaba contenido cuatro veces en el 80, luego sacaré el número de veces que el máximo comun divisor 20 está contenido en el 80, multiplicando el número de veces que estaba contenido en el último divisor 20, por el que espresa las veces que este está contenido en el 80, esto es, multiplicando 1 por 4. Ahora, el 80 está contenido cinco veces en el 420, y ademas deja por resta 20; luego para hallar las veces que está contenido en el 420, deberé multiplicar por 5 el número de veces que el máximo comun divisor está contenido en 80, esto es, por 4; y á esto deberé añadir las veces que el máximo comun divisor está contenido en la resta 20, esto es 1, y tendré 21.

{ Por la misma razon deberé multiplicar este 21 por el número de veces que el 420 está contenido en 500, porque por cada vez que lo esté, lo estará 21 veces el máximo comun divisor 20, y ademas deberé añadir las veces que esté contenido en la resta 80, y saco 25.

{ Si quisiera hallar el máximo comun divisor de tres ó mas números, procederia del modo siguiente: *hallaria primero el de dos; luego, el máximo comun divisor de este máximo comun divisor y de otro; luego, el máximo comun divisor del último máximo comun divisor hallado y de otro número; y así se procederia hasta que no hubiese mas números.* De manera que si me propusiese hallar el máximo comun divisor de los números 540, 432, 336 y 258, ejecutaria la operacion hallando, como se ve en (*A*) página siguiente, el máximo comun divisor de los dos primeros, que es el 108.

(*A*)

540	432	108
	1)	4
108	000	
5	4	1

(*B*)

336	108	12
	3)	9)
012	00	
28	9	1

(*C*)

258	12	6
018	21)	2
06	00	
43	2	1

{ Despues buscaré el máximo comun divisor de 356, y de este máximo comun divisor 108 hallado ántes, y encuentro ser el 12 (*B*).

{ Luego, paso á encontrar el máximo comun divisor del 258, que es el último número que me queda, y del 12 que es el último máximo comun divisor hallado, y encuentro ejecutando la operacion (*C*), que el máximo comun divisor de todos estos números es el 6.

{ Terminarémos este punto manifestando *el modo de hallar el menor múltiplo comun á tantos números como se quiera*; esto es, determinar un número que se pueda dividir exactamente por otros varios; pero que entre los números que pueden cumplir con esta condicion sea el menor de todos ellos. Para lo cual no hai mas que *descomponer los números propuestos en sus factores simples, y formar un producto con tantos factores simples primeros de cada especie, como hai de dicha especie, en el número propuesto que tiene mas de ellos.*

{ Supongamos que se quiera hallar el menor múltiplo comun á los números 24, 18 y 15; como los factores simples del 24 son 2, 2, 2 y 3; los del 18 son 2, 3 y 3, y los del 15 son 3 y 5, números que en el primero está repetido el 2 por factor tres veces; en el segundo se halla repetido el 3 dos veces; y en el 3.º se halla un factor 5 que no está en los otros; por lo que el número buscado será $2.2.2.3.3.5.=8.9.5=360$.

{ Para convencernos de ello, observarémos que hallándose en este producto por factor tres veces el 2, y ademas el 3 del primero, debe ser divisible por dicho primer número 24; ademas se hallan los dos 3 y el 2 del 18, y el 3 y el 5 del 15; por lo que hallándose todos los factores simples de los números propuestos es divisible por todos ellos; y es el número menor que puede ser divisible por ellos; porque no contiene mas factores simples que aquellos que son absolutamente indispensables para que se efectúe dicha division. }

Pruebas de la multiplicacion y division.

81 Como el producto debe ser igual á tantas veces el multiplicando como unidades hai en el multiplicador, resulta que dividiéndole por el mismo multiplicando vendrá el multiplicador por cociente; y como podemos mudar los oficios de multiplicador en los de multiplicando, resulta que el producto dividido por el multiplicador debe dar por cociente el multiplicando; *luego en general, si el producto se divide por*

uno de los factores, el cociente será el otro factor si las dos operaciones están bien hechas; porque es mui difícil el que se compensen los errores en operaciones opuestas. Luego la division puede servir de prueba para la multiplicacion. Pero como aquella es mas complicada y difícil de ejecutar sin equivocacion que esta, resulta que no nos trae cuenta el probar la multiplicacion por la division, y vale mas ejecutar la multiplicacion otra vez de nuevo.

82 Ahora, como el cociente manifiesta las veces que el divisor está contenido en el dividendo, *si le multiplicamos por el divisor, y añadimos á esto la resta si quedó alguna, nos vendrá el dividendo.* Luego esta multiplicacion nos podrá servir de prueba de la division; y como la multiplicacion es mas sencilla y ménos espuesta á equivocaciones que la division, resulta que de esta sí debemos usar mas bien que de volver á ejecutar la division. Luego para averiguar si está bien hecha la division ejecutada en el primer ejemplo de la division abreviada (76), en que el dividendo era 375271, el divisor 583, el cociente 643 y la resta 402, no haré mas que multiplicar el divisor 583 por el cociente 643, lo que me dará el producto 374869, que despues de añadirle la resta 402 se convierte en 375271: que siendo igual con el dividendo manifiesta que está bien ejecutada la division.

De las alteraciones que sufren los resultados de las cuatro operaciones esplicadas hasta aquí por las que sufren los datos.

83 A los números que entran en cada operacion les hemos dado un nombre particular; pero cuando se consideran en general las operaciones, á todos los números que entran en las cuestiones se les llama *datos*; y á lo que por medio de ellos se saca, se le da el nombre general de *resultado.* Ahora vamos á manifestar las alteraciones que sobrevienen á los resultados por las que sobrevienen á los datos. Para esto, observarémos en primer lugar, que si á uno cualquiera de los sumandos se le añade una cantidad cualquiera, tendrémos en la suma esta misma cantidad demas. Si á uno de los sumandos le quitamos una cantidad cualquiera, resultará en la suma esta misma cantidad ménos; luego *una suma permanecerá la misma si á un sumando le añadimos una cantidad cualquiera y á otro se la quitamos*; porque por un lado añadimos á la suma la misma cantidad que por otro le quitamos. Si uno de los sumandos se multiplicase ó dividiese por una cantidad cualquiera, la suma variaria; pero como no resultarian en la suma aumentos ó decrementos, análogos á los que sufriéron los sumandos, porque habiéndose hecho á estos cierto número de veces mayores ó menores, la alteracion que resultaria á la suma seria la de tantas unidades mas ó ménos, cuantas resultáron demas ó de ménos en aquel sumando, y no la del mismo número de veces mayor ó menor, no nos detendrémos en esto.

84 Pasemos á la resta: *si al minuendo de una operacion de restar le añadimos una cantidad cualquiera, la resta contendrá tantas unidades mas que ántes, cuantas fuesen las que tenia aquella cantidad*; porque la diferencia se compondrá de la anterior y de lo que se ha añadido. *Si al minuendo se le quitase una cantidad cualquiera, resultaria la resta con tantas unidades ménos como se hubiesen quitado al minuendo*; porque en este caso se diferenciarian en esto ménos. *Si al sustraendo se le añade una cantidad cualquiera, la resta tendrá tantas unidades ménos, cuantas se añadiéron al sustraendo*; porque en este caso le falta tanto ménos para ser igual con el minuendo. Si al contrario, *se quitase del sustraendo una cantidad cualquiera, resultarian en la resta tantas unidades mas como tenia dicha cantidad*; porque esto mas le faltará ahora para ser igual con el minuendo. De aquí resulta que por dos causas puede aumentar la resta: por aumentar el minuendo, ó por disminuir el sustraendo; y de dos modos disminuir: ó por disminuir el minuendo, ó por aumentar el sustraendo; y tambien deducimos, que *si al minuendo y sustraendo les añadimos ó quitamos una misma cantidad, la resta no debe sufrir alteracion*; de lo cual tambien podíamos estar cerciorados por el axioma general de que *si á dos cantidades cualesquiera se les añade ó quita una misma cantidad, las restas quedarán iguales*; puesto que la diferencia no proviene de lo que hai de comun en las cantidades, sino de lo que no hai.

Por la misma razon que en la suma, aquí no tienen analogía los incrementos ó decrementos de la resta con los del minuendo ó sustraendo, cuando se multiplican ó dividen por una cantidad cualquiera.

85 *Si á uno cualquiera de los factores de la multiplicacion se le añade una cantidad cualquiera, resultarán en el producto tantas unidades mas como haya en el producto del número que se añadió por el otro factor*; pues en este caso podrémos descomponer al factor que ha sufrido alteracion en dos partes, que la una sea el factor que teníamos ántes, y la otra el aumento que le sobrevino; y al hacer la multiplicacion de la primera parte, resultará el producto primitivo; y al multiplicar por la segunda, resultará el producto que hemos dicho, que es el que se hallará demas. Del mismo modo, *si á un factor se le quitase un número cualquiera de unidades, resultarian en el producto tantas unidades ménos como espresase el producto de estas unidades por el otro factor*; porque en este caso podríamos suponer al factor que ha variado igual con el anterior ménos la cantidad que se quitó.

Si á ambos factores se añadiese ó quitase una misma cantidad, resultarian alteraciones en el producto que aunque se podrian esplicar, no son interesantes por cuanto no tienen analogía con las de los factores.

86 Teor. *Si á un factor cualquiera le multiplicamos por una cantidad cualquiera, resultará un producto que se compondrá de tantas veces el primitivo, como unidades tenia el número por que se multiplicó el factor.*

Dem. En efecto, sabemos que el producto de 4 por 5 es 20; pues vamos á probar que si multiplicamos á uno cualquiera de los factores por un número cualquiera, resultará un producto que contendrá ó se compondrá de tantas veces el anterior, como unidades tenia el número por que se multiplicó; porque supongamos que el 4 sea el que se multiplique por 3, resultará entónces un número que equivaldrá (53) á la suma de tres sumandos iguales con el 4, ó á 4+4+4; ahora, este número quedará multiplicado por 5, si lo quedan todas las partes de que se compone (Introd. ax. 3.º); luego haciendo la multiplicacion de cada parte por 5, resultará el producto 20+20+20=60, que se compone de tantas veces el anterior, como unidades tenia el número por que se multiplicó el 4.

87 Teor. *Si á cada uno de los factores se le multiplica por un número cualquiera, resultará un producto que contendrá ó se compondrá de tantas veces el anterior, como unidades haya en el producto de los dos números por que se multiplicáron los factores.*

Dem. En efecto, si al 4 de la multiplicacion anterior le multiplicamos por 3, se convertirá en 12 ó en 4+4+4; si al 5 le multiplicamos por 2, se convertirá en 10 ó en 5+5; luego la operacion se habrá reducido á multiplicar 4+4+4 por 5+5; y como para hacer la multiplicacion de los todos, debemos ejecutar (Introd. ax. 3.º) la de todas sus partes, resulta que de multiplicar todas las partes del multiplicando por la primera del multiplicador, se originarán tantos productos iguales con el primitivo, como partes ó sumandos habia; pero estos eran tantos como unidades tenia el número por que se multiplicó, luego de todo el multiplicando por la primera parte del multiplicador, resultan tantos productos iguales con el primitivo, como unidades hai en el número por que se multiplicó el multiplicando; y como cada parte ó sumando del multiplicador dará otros tantos productos, resulta que en todos habrá tantos, como esprese el producto de los números porque se multiplicáron los factores.

88 Teor. *Si á uno de los factores se le divide por un número cualquiera, el producto quedará dividido, ó se habrá hecho tantas veces menor como unidades tenia el número porque se dividió el factor.*

Dem. En efecto, sabemos que el producto de 5 por 8 es 40; si dividimos por 2 á uno de los factores tal como el 8, vamos á demostrar que el producto se reducirá á la mitad del anterior, ó que este se compondrá de dos veces el nuevo que resulte. En efecto, dividir el 8 por 2 es dividirle en dos partes iguales; luego para nosotros será lo mismo 8 que 4+4, y el producto primitivo será 5×4+5×4, ó dos veces el producto que resulta de multiplicar el 5 por el 4; pero este es igual al de 5 por la mitad del 8, luego este producto está contenido dos veces en el anterior.

Por la misma razon si cada uno se dividiese por un número cualquiera, el producto estaria contenido tantas veces en el anterior, como unidades contuviese el producto de ambos números.

89 *Cor.* De aquí resulta que *lo que sucede á alguno de los factores sucede al producto; y que si á uno de los factores se le multiplica por un número cualquiera, y al otro se le divide por el mismo número, el producto permanece el mismo*; pues por una parte se le hace tantas veces mayor, como unidades tenia el número por que se le multiplicó, y por otra se le hace el mismo número de veces menor; luego le hemos dejado conforme estaba.

Antes de pasar á la division, demostrarémos los tres siguientes teoremas.

1.º *El producto de la suma es igual á la suma de los productos.*

Esplic. Supongamos que se quiera multiplicar 4 por 3+2; voi á demostrar que esto es lo mismo que multiplicar primero el 4 por el 3, despues el 4 por el 2 y sumar estos productos.

Dem. El multiplicar 4 por 3 equivale á poner por sumando 3 veces el 4; y así 4.3 es lo mismo que 4+4+4; y el 4.2 es lo mismo que 4+4; luego si agregamos esto al anterior, tendrémos 4+4+4+4+4; esto es 5 veces 4; y como este raciocinio se podrá estender á un número cualquiera de sumandos, resulta en general que *el producto de la suma de varios números por un número cualquiera es lo mismo que la suma de los productos de cada sumando por el otro factor.* L. Q. D. D.

2.º *El producto de la diferencia de dos números por otro, es igual á la diferencia de los productos de dichos números por el otro.*

Espl. Puesto que 3=5—2, voi á demostrar que es lo mismo multiplicar el 4 por 3, lo que da 12; que multiplicar el 4 por el 5, el 4 por el 2 y restar del producto 20 del primero, el producto 8 del segundo, lo que da en efecto el mismo resultado 12.

Dem. El multiplicar 4 por 5 equivale á poner cinco sumandos iguales con 4, esto es, á 4+4+4+4+4; el multiplicar 4 por 2, equivale á tomar al 4 dos veces por sumando ó á 4+4; pero si de los cinco 4 que tenemos arriba se quitan estos dos, quedan solo tres cuatros ó 4+4+4, que equivale á 4.3; luego (5—2).4 = 3.4; que era L. Q. D. D.

3.º *El producto de dos números contiene tantas cifras, ó tantas cifras ménos una como hai en sus dos factores.*

Espl. Supongamos que se tenga que multiplicar 6358 por 729, voi á demostrar que el producto no puede tener mas de 7 cifras, ni ménos de 6.

Dem. En efecto, este producto no puede tener 8 cifras, pues que si el multiplicador fuese 1000, es decir la unidad seguida de tantos ceros como cifras hai en 729, el producto seria 6358000, que solo contiene 7 cifras; pero 729 es menor que 1000; luego el producto de 6358 por 729 será menor que 6358000; luego no podrá tener mas de 7 cifras.

{ Dicho producto no puede tener ménos de 6 cifras; porque 6358 multiplicado por 100, es decir, por la unidad seguida de tantos ceros ménos uno como cifras hai en 729, da 635800; pero 729 es mayor que 100; luego el producto de 6358 por 729 será mayor que 635800; luego no podrá tener ménos de 6 cifras: que era todo L. Q. D. D.

{ *Esc.* Como este raciocinio se puede estender al producto de un número cualquiera de factores, se deduce que *en general el número de cifras de un producto no puede esceder al de la suma de las de todos sus factores, y que no puede ser inferior á este número disminuido en tantas unidades ménos una como factores hai.*

{ Así, el producto 65 . 24 . 357 . 9 . 1248 no puede tener mas de 12 cifras, ni ménos de 8 }.

90 Pasemos á la division: si al dividendo ó al divisor le añadimos ó quitamos una cantidad cualquiera, el cociente se alterará; pero las alteraciones que le resultarán no tendrán tampoco analogía con la de los términos de la division, y por tanto no nos detendrémos en examinarlas. Ahora, *si estos términos crecen ó menguan por via de multiplicacion ó division, resultarán en el cociente las mismas alteraciones que en el dividendo, y las alteraciones contrarias á las que sucediéron al divisor*; *esto es, que si se multiplica ó parte el dividendo por un número cualquiera, equivale esta operacion á multiplicar ó dividir el cociente por el mismo número; y si se multiplica ó parte el divisor por un número cualquiera, equivale esto á haber hecho lo contrario con el cociente, ó á haber dividido ó multiplicado el cociente por el mismo número.*

En efecto, supongamos que se tenga la division de 24 por 6, y nos resultará 4 por cociente. Si el dividendo se multiplica por un número cualquiera tal como 2, tendrémos que se convertirá en $2 \times 24 = 48$, ó (§ 53) en $24 + 24$: luego estará reducida ahora la operacion á dividir $24 + 24$ por 6; y como para dividir un todo necesitamos dividir todas sus partes, tendrémos que esto equivaldrá á $\frac{24}{6} + \frac{24}{6}$; pero aquí habrá siempre indicadas tantas divisiones como esta $\frac{24}{6}$, cuantas partes tuviese el dividendo último iguales con el primitivo; y como estas son tantas como unidades tenia el número por que se multiplicó el dividendo, resulta que el nuevo cociente se compondrá de tantas veces el primitivo como unidades tenia el número por que se multiplicó el dividendo.

Si suponemos ahora que el dividendo se parta por un número cualquiera, el cociente resultará tantas veces menor, cuantas unidades hai en el primitivo por que se partió el dividendo. En efecto, supongamos que al dividendo 24 se le divida por 2, y tendrémos entónces 12, que dividido por 6 da 2 por cociente, que es dos veces menor que el anterior 4; para cerciorarnos de que en todos los casos debe resultar lo mismo, observarémos que podrémos descomponer al dividendo primitivo en tantas partes iguales con el cociente que resulte de dividirle por un número cualquiera, como unidades haya en este número; luego el dividendo primitivo le podrémos descomponer en $12 + 12$, y dicha division tambien quedará reducida á dividir cada parte 12 por el divisor 6; luego dicha division equivaldrá á $\frac{12}{6} + \frac{12}{6}$, ó á dos veces la division que resulta despues de haber dividido por 2 el dividendo; y como en general la primitiva equivaldrá á tantas veces la resultante de ella, como unidades tenia el número por que se dividió, tenemos que el cociente de esta se hallará tantas veces contenido en el anterior, como unidades tenia dicho número por que se partió el dividendo, ó será tantas veces menor que él, cuantas unidades haya en dicho número.

91 Para hacer ver lo que resulta de las alteraciones del divisor, atenderémos al orígen de la division que es la resta; porque nos parece el método mas claro para convencerse de estos resultados, que son los de mayor trascendencia en las Matemáticas, y que por lo mismo conviene queden bien demostrados. Supongamos ahora que permaneciendo uno mismo el dividendo, se multiplique el divisor por un número cualquiera; entónces este divisor se compondrá de tantas veces el anterior como unidades tenia el número por que se multiplicó; y como el cociente espresa las veces que el divisor se puede restar del dividendo, tendrémos que al averiguar el cociente por este medio, cada resta que hagamos ahora equivaldrá á tantas como la anterior, como unidades tenia el número por que se multiplicó el divisor; luego este número de restas que ahora se puedan hacer, será tantas veces menor que el anterior como unidades tenga el número por que se multiplicó el divisor; pero este número de restas es lo que forma el cociente, luego queda probada la proposicion.

Para hacer sensible el raciocinio, supondrémos que el divisor 6 se haya multiplicado por 2, y se habrá convertido en 12; ahora, al averiguar cuantas veces el 12 se puede restar del 24, tendré que cada resta de 12 me equivaldrá á 2 de 6; luego el número de restas que podia hacer con el 6, será duplo del que puedo hacer con el 12, ó las que puedo hacer con el 12 será un número subduplo del que puedo hacer con el 6; luego el cociente de dividir por 12 será dos veces menor que el de dividir por 6. Si suponemos ahora que el divisor se parta por un número cualquiera, obtendrémos un cociente que contendrá tantas veces al primitivo, ó que será tantas veces mayor que él, cuantas unidades hai en el número por que se dividió. En efecto, partiendo el divisor por un número cualquiera, resulta otro que será tantas veces menor que él, como unidades tenia el número por que se dividió; y por consiguiente por cada vez que el primitivo se pudiese restar, se podrá restar este tantas veces como unidades tenia dicho número; pero estos números que espresan las restas que se pueden hacer son los cocientes, luego el cociente que nos resulta será tantas veces mayor que el primitivo, como unidades hai en el número por que se partió el divisor. Para hacer sensible este raciocinio supongamos que á nuestro divisor 6 se le parta por 2, y tendrémos que se convertirá en 3; y como el primitivo equivalia á 3+3, resulta que por cada vez que podamos restar el 6, podrémos restar dos veces el 3; luego el número de veces que se podrá restar el 3, será dos veces mayor que el que espresaba las veces que se puede restar el 6; pero el número que espresa estas veces es el cociente, luego el cociente que resulta &c.

92 Teor. *Un cociente no se altera, aun cuando se multipliquen los dos términos de la division por un mismo número.*

Dem. Con multiplicar al dividendo por un número cualquiera, se hace al cociente tantas veces mayor (90) como unidades hai en dicho número; y como con multiplicar al divisor por el mismo número se le hace (91) el mismo número de veces menor, resulta que por una parte le aumentamos lo que por otra le disminuimos; luego permanecerá el mismo que ántes. Así es, que si multiplicamos por 2 los dos términos de la division $\frac{24}{6}=4$, se convertirá dicha operacion en $\frac{48}{12}=4$. L.Q.D.D.

93 Teor. *Un cociente no se altera, aun cuando se partan el dividendo y divisor por un mismo número.*

Dem. Con partir al dividendo hacemos al cociente tantas veces menor, como unidades tiene dicho número (90); y con partir el divisor por el mismo número le hacemos (91) el mismo número de veces mayor; luego tambien aquí lo que disminuimos por una parte, lo aumentamos por otra, y por lo mismo no se alterará. Así, si partimos por 2 los dos términos de la division $\frac{24}{6}=4$, se convertirá en $\frac{12}{3}=4$, que da el mismo cociente. L. Q. D. D.

Corol. De todo esto que hemos esplicado resulta que *lo que se hace con el dividendo, queda ejecutado con el cociente; y que lo contrario de lo que se hace con el divisor, queda hecho con el cociente; y que el cociente no se altera aun cuando se multipliquen ó partan por un mismo número el dividendo y el divisor.*

Esc. Por un método análogo al espuesto (89) deduciríamos que *el cociente de la suma ó diferencia de varios números divididos por otro es lo mismo que la suma ó diferencia de los cocientes de dichos números partidos por el mismo divisor.* Pero no podríamos deducir que el cociente de un mismo número dividido por otros dos es igual al cociente de dividir el espresado número por la suma ó diferencia de los divisores. En efecto $\frac{12}{4}=3$; $\frac{12}{2}=6$ y $\frac{12}{4+2}=2$, que no es 9 como se deberia verificar si equivaliese á la suma 3+6 de los cocientes; y tampoco se verifica que $\frac{12}{4-2}=6$ equivalga á la diferencia de los cocientes 3 y 6. Lo cual nos hace ver con cuanto fundamento aconsejamos

con Laplace que no se generalice demasiado por el método de induccion.

DIGRESION

acerca de otros diversos medios que hai para probar las operaciones, y de algunos métodos particulares de abreviacion en las operaciones esplicadas.

94 Dos son las razones que nos obligan á poner esta digresion: la primera, el que no se tiene una idéa cabal y fundada en principios, de las pruebas de las operaciones que se conocen en los libros prácticos; y la segunda, el que siendo el tiempo lo que mas debe economizar el hombre, se le deben proporcionar todos los medios para conseguirlo.

Es mui conocido entre los prácticos que para averiguar si una multiplicacion está bien hecha, se coloca en la cabeza ó lado superior de una cruz la resta que queda de quitar todos los nueves del multiplicando; en el pié la que resulta de quitar todos los nueves del multiplicador; en uno de los brazos el producto que resulta de la multiplicacion de estas dos restas, despues de quitados de él los nueves; y que si la resta que queda de quitar los nueves del producto que se coloca en el otro brazo, es igual con esta última, es señal de estar bien ejecutada la operacion. Pero lo que no es comun, y aun es demasiado raro, ó por mejor decir no es conocido, es el fundamento de esta regla, sus defectos, ni que esto que se hace con el nueve, se puede hacer con cualquiera otro número; ni cual es el número que se debe elegir con preferencia por ser mas sencillo, y al mismo tiempo no ser su práctica tan defectuosa; ni que esto que se hace en la multiplicacion, se puede ejecutar en cualquiera otra operacion; que es todo lo que nos proponemos investigar.

Esta prueba que los prácticos llaman *por nueve*, no es mas que un caso particular de la que se puede hacer con otro número cualquiera en todas las operaciones. Sea primero una operacion de sumar: si todos los sumandos los descomponemos en dos partes, que la una se componga del múltiplo mayor posible de aquel número por que se trata de probar, y la otra que sea la resta que haya demas: tendrémos, que sumándolos, la suma se compondrá de un múltiplo del mismo número mas una resta; de la suma de los múltiplos de los sumandos resultará un múltiplo del mismo número por que se prueba; luego la resta de la suma solo podrá provenir de la suma de las restas de los sumandos; *luego si sumamos separadamente las restas de los sumandos, y de esta suma quitamos todas las veces que se pueda el número por que se prueba, deberá resultar la resta que queda de quitar el mismo número todas las veces que se pueda de la suma.*

Para hacer sensible este raciocinio, supongamos que se quiere sumar 34 con 28, y tendrémos la suma 62; para averiguar si la operacion está bien hecha por medio del 5, que es el que da mas fácilmente las restas (esc. de la 1.ª nota del § 79), descompondré el 34 en 30+4, siendo

30 el múltiplo mayor de 5 que se contiene en 34; y el 28 le descompondré tambien en 25+3, siendo 25 el múltiplo mayor de 5 que se contiene en 28. Ahora, la suma de 30 con 25 se compondrá de un número exacto de 5, y por lo mismo no dejará resta despues de quitar el 5 de la suma total todas las veces que se pueda; luego la resta que quede en esta, provendrá de la suma de 4 con 3, ó de 7; luego si de 7, que es la suma de estas restas, quitamos el 5 todas las veces que se pueda, nos deberá venir la misma resta, que de quitar los 5 de la suma total. En efecto, quitando de 7 el 5 quedan 2, y como el último guarismo del 62 es 2, que es menor que 5, esta será la resta (esc. citado); y por lo mismo vemos que la operacion está bien hecha. En la práctica se dispone esta operacion y su prueba, poniendo la resta á la derecha de los sumandos y de la suma total, separándolos con una raya, como aquí se presenta:

34	4
28	3
—	—
62	2

Y la prueba está reducida á decir: 4 y 3 son 7, fuera de los 5 quedan 2, que debe ser la resta de la suma, como en efecto se verifica.

95 Si se tratase de restar, descomponiendo al minuendo y sustraendo en dos partes como ántes; de restar los múltiplos del número por que se prueba, no vendrá sino otro múltiplo; y así, la resta que haya en el residuo, despues de quitar todas las veces que se pueda el número propuesto, solo provendrá de las restas de los términos de la operacion; luego la diferencia de estas restas deberá ser igual á la de la diferencia total. Si la resta del sustraendo fuese mayor que la del minuendo, se restará de la de este junto con el número por que se prueba, y la resta deberá ser la misma que la de la diferencia. Para hacerlo sensible, supongamos que se quiera restar de 34 el 28; la diferencia será 6; cuya resta despues de quitados los 5 es 1. Ahora, descomponiendo al 34 en 30+4, y al 28 en 25+3, la resta de 25 á 30, no dará sino múltiplos del número por que se prueba; luego esta no influirá nada en la resta de la diferencia; luego esta solo provendrá de la diferencia entre las restas de los términos de la operacion, como en efecto se verifica, pues 4—3=1.

En la práctica se dispone esta prueba del mismo modo, como aquí se ve:

34	4
28	3
—	—
06	1

Y está reducida á decir: de 3 á 4 va 1, que fuera de los 5 es 1, que debe ser la de la resta como lo es en efecto.

Si la resta del sustraendo fuese mayor que la del minuendo se tomará la de este con un 5; y de esta suma se hará la resta.

Por ejemplo, si tuviese que restar el 28 del 31; pondria los números y sus restas como aquí se ve:

31	1
28	3
—	—
3	3

y como la resta 3 del sustraendo no la puedo restar de la 1 del minuendo, la quitaré de 5+1=6, diciendo de 3 á 6 van 3; y esta debe ser la de la diferencia de los números propuestos como en efecto se verifica.

96 En cuanto á la multiplicacion, observarémos que despues de descompuestos los factores en dos partes con la condicion espresada (94), como debemos multiplicar todas las partes del multiplicando por todas las del multiplicador, el producto de las partes que sean múltiplo de aquel por que se prueba, será tambien múltiplo de dicho número; luego la resta del producto total no dependerá en manera alguna del producto de estos múltiplos. El producto de la parte del multiplicando, que es el múltiplo, por la resta del multiplicador, será tambien múltiplo de dicho número; é igualmente el producto de la parte del multiplicando que no es múltiplo, por la parte del multiplicador que lo es; luego la resta no provendrá de ninguno de estos productos parciales; y como solo falta ya multiplicar las restas, tendrémos que la resta del producto total solo provendrá de la del producto de las restas de los factores; luego *si multiplicamos estas restas entre sí, y de este producto quitamos las veces que se pueda el número por que se prueba, esta resta que quéde será la del producto total, si la operacion está bien hecha.* Así, para hacer sensible este raciocinio, supongamos que se quiera multiplicar el 34 por 28, que dan 952 por producto; descompondrémos á los factores en 30+4 y en 25+3; al multiplicar 30 por 25 darán un múltiplo de 5, porque ambos factores lo son; luego este producto no influirá en la resta del total. Al multiplicar el 30 por 3, y el 25 por el 4, como en cada uno de estos productos hai un factor que es múltiplo de 5, resulta que tambien lo serán dichos productos; luego no podrán influir en nada en la resta del producto total; y como ya no falta sino multiplicar el 4 por el 3, resulta que la resta del producto total solo provendrá de este producto; luego si multiplicamos el 4 por el 3, y de su producto 12 quitamos las veces que se pueda el 5, de lo cual nos quedan 2, esta resta deberá ser la del producto total 952, como en efecto se verifica.

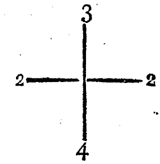
En la práctica se dispone esta operacion, poniendo en la cabeza de una cruz la resta del multiplicando, en el pié la del multiplicador, en uno de los brazos la del producto de estas, y en el otro la del producto total; de manera que en este caso se dispone así:

	4	
2	+	2
	3	

Se pone en la cabeza de la cruz el 4, en el pié el 3, se multiplican estas diciendo: 4 por 3 son 12, que fuera de los 5 da 2 de resta, y se pone en un brazo, por ejemplo, en el izquierdo; se pasa á encontrar la resta del producto que es 2, se pone en el otro brazo; y como las restas que se hallan en ambos brazos son iguales, inferimos que la operacion está bien hecha.

97 Como en la division el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, resulta que el producto de las restas del divisor y del cociente, junto con la resta que quedó de la division, debe dejar por resta la misma que el dividendo. Así, si nos proponemos probar si

la division de 952 por 28, que da 34 por cociente, está bien hecha, lo ejecutarémos como aquí se ve:



Pondrémos en la cabeza de la cruz el 3, resta que quedó de quitar los 5 del divisor 28; en el pié pondrémos 4, que es la que queda del cociente; las multiplicarémos, y del producto 12 quitando los 5 quedan 2, que pondrémos en uno de los brazos, y esta debe ser la resta que queda del dividendo 952, como en efecto se verifica, y que colocarémos en el otro brazo.

Si en la division hubiese resta, al producto de las restas del divisor por el cociente se deberá añadir la resta de la division, y de esto quitar las veces que se pueda el número por que se prueba; así, para probar la division de 87 por 13, que da $6\frac{9}{13}$ de cociente, pondrémos en la cabeza de la cruz 3 que es la resta del divisor, en el pié 1 que es la resta del cociente; multiplicarémos 3 por 1 que da 3, al producto le añadirémos la resta 9 de la division, y tendrémos 12 cuya resta es 2, que pondrémos en un brazo de la cruz, y luego en el otro pondrémos la del dividendo, que deberá ser la misma que esta, como en efecto se verifica.

Cuando en la prueba de estas dos últimas operaciones se halla que es o la primera resta, se puede omitir el hallar la segunda, pues que su producto por la primera debe ser o. Luego en este caso todo está reducido á ver si es o la resta del producto en la multiplicacion; y la del dividendo en la division sin resta, ó á ver si es la misma que la del dividendo la de la resta cuando la haya.

98 Se ve no obstante que todas estas pruebas tienen el inconveniente de que si la equivocacion consiste en un múltiplo del número por que se prueba, no la da á conocer la prueba. Todos los números son á propósito; pero el que ha sido mas usado hasta ahora para probar, ha sido el 9, porque su resta se halla sumando los guarismos, y viendo cual es la resta que deja esta suma; esta propiedad la tenemos nosotros demostrada en general (en la nota del § 79); mas no obstante la vamos á deducir aquí independientemente de lo dicho allí, en el siguiente

Teor. *Si se divide por 9 un número cualquiera, quedará la misma resta que se hallaria sumando las cifras de este número, consideradas como espresando unidades simples, y quitando 9 al paso que la suma vaya siendo igual ó mayor que el 9.* Por ejemplo: dividiendo el número 57326 por 9 hallo el cociente 6369, y ademas la resta 5; pues digo que si sumo todos los guarismos del dividendo, y de la suma quito el 9 todas las veces que pueda, la resta será 5; al paso que vaya haciendo la suma, iré desechando los 9, en esta forma: 5 y 7 son 12, fuera de los 9 ó quitando 9 quedan 3; sumo esta resta 3 con los guarismos siguientes diciendo: 3 y 3 son 6, y 2 son 8, y 6 son 14, que fuera de los 9 da por resta 5, que es en efecto lo que se debia verificar.

Dem. Para demostrar esta proposicion, observarémos que si se divide por 9 alguno de los números 10, 100, 1000, 10000, &c. la resta será siempre 1; porque todos estos números equivalen á 9, 99, 999, 9999, mas la unidad; y como todos los guarismos de la primera parte son divisibles por 9, lo será toda ella; luego la resta de dividir los números propuestos será 1; luego si dividimos por 9 alguno de los números $20=10+10$, $200=100+100$, $2000=1000+1000$, &c. la resta será 2; si se divide por 9 alguno de los $30=10+10+10$, $300=100+100+100$, &c. la resta será 3. De donde inferirémos en general que *la resta que queda de dividir por 9 un guarismo significativo, seguido de tantos ceros como se quiera, es igual al mismo significativo*; y como todo número se puede descomponer en sumandos de esta especie, por ejemplo, el 57326 en $50000+7000+300+20+6$, resulta que las restas parciales serán los guarismos del mismo número, á saber, en nuestro caso $5+7+3+2+6=23$; luego si de esta suma quitamos los 9 que contenga, nos vendrá por última resta la que obtendríamos ejecutando la division, que aquí es 5, despues de quitado dos veces el 9. L. Q. D. D.

Entendido esto, para probar las operaciones por medio del número 9, no tenemos que hacer mas, ni ménos que lo practicado para probar por el número 5.

99 Por desgracia la prueba por 9 de que hacen tanto aprecio los prácticos, está mui espuesta á equivocaciones; pues por su medio no percibiríamos el error, 1.º cuando se hubiesen omitido ó puesto demas uno ó muchos ceros; 2.º si se hubiesen omitido ó puesto demas uno ó muchos nueves; 3.º si se hubiese puesto un o por 9 ó un 9 por o; 4.º si se hubiese invertido el órden de dos ó mas guarismos; y 5.º si se hubiesen cometido dos ó mas errores que se compensasen; por ejemplo, si en vez de 49 se hubiera escrito 67, porque la suma de estos guarismos es 13, que fuera de los 9 da 4.

Sobre este asunto de pruebas se disputa mucho entre los prácticos; pero todas estas disputas no merecen llamar nuestra atencion; pues como observó mui bien el bachiller Juan Pérez de Moya (*), nacen de ignorancia; porque los que se quieren asegurar de si una operacion que otro les presenta, está bien hecha, la vuelven á ejecutar; sin embargo

(*) *Este autor se estiende en el libro 6.º de su apreciable tratado de Matemáticas, impreso en 1573, á probar por todos los números dígitos, todas las operaciones de la Aritmética; como son, ademas de las espuestas, las que se hacen con quebrados, con números denominados, la regla de tres, la ráiz cuadrada y raiz cúbica: terminando dicho libro con manifestar que esto de las pruebas no tendria fin, porque seria tambien necesario probar la operacion que sirvió de prueba, y luego esta, y así sucesivamente.*

M

de esto, ántes de terminar este punto, no podemos dejar de manifestar un método para probar por 11, que es mui poco conocido, y que tiene la ventaja de ser casi tan sencillo como el del 9, reuniendo al mismo tiempo la circunstancia de estar exento de los mas de los errores de este.

En efecto, hemos probado (nota del § 79) que un número será divisible por 11, si sumados todos los guarismos que ocupan un lugar par, añadiendo á esta suma un 0, y á esto la suma de los ímpares se tiene un número divisible por 11; y que sino, haciendo la division por 11, de esta suma quedará la misma resta que del total; luego el procedimiento de esta operacion solo estriba en dividir por 11 un número compuesto de dos guarismos, y ver la resta que queda; por lo que se puede decir que dicho procedimiento es casi tan sencillo como el de los nueves. Así, si queremos averiguar, probando por 11, si la multiplicacion (64) está bien hecha, como el multiplicando es 9658, sumaré los guarismos que ocupan lugares pares diciendo: 5 y 9 son 14, añadiéndole un 0 y la suma de los ímpares, que es tambien 14, da 154; ahora ejecutaré lo mismo con este añadiendo al 5 un 0, y la suma de los ímpares que es 5, y tengo 55, que como es divisible por 11 no deja resta; luego valiéndome de la observacion hecha (97), solo averiguaré si es 0 la resta del producto 7088972, diciendo: 7 y 8 son 15, añadiéndole un cero son 150; ahora sumaré los ímpares diciendo: 2 y 9 son 11, y 8 son 19, y 7 son 26, que sumados con los 150, dan 176; y para averiguar la resta, al guarismo 7 añado un 0 y la suma 7 de 1 y 6 guarismos ímpares; y como la suma 77 es divisible por 11 sin dejar resta, es prueba de que la operacion está bien hecha, como se verifica. Para hallar la resta que queda de dividir por 11, podríamos dar y demostrar esta regla: *súmense todos los guarismos que ocupan lugares ímpares, de esta suma réstese la suma de los que ocupan lugares pares, y la resta que quede será la de la division por 11*; pero podemos dar otra mas sencilla fundada sobre la propiedad que tiene el número 11, de que sus nueve primeros múltiplos se escriben por dos cifras iguales, y es la siguiente: *réstese el guarismo de especie superior de su inmediato á la derecha, la resta que quede de su inmediato á la derecha, y la resta que quede del guarismo siguiente; continúese de este modo hasta que no haya mas guarismos, y la resta última que quede, será la que resulta de dividir por 11*. Si el primer guarismo es mayor que el que tiene á su derecha, se le quita una unidad al primero y se resta del que tiene á su derecha, junto con la unidad que se quitó al anterior, que vale 10 respecto de él; y lo mismo se ejecuta si alguna resta es mayor que el guarismo correspondiente. Y así, si queremos averiguar cual es la resta que queda de dividir por 11 el número 358, diria: de 3 á 5 van 2, de 2 á 8 van 6, y esta será la resta que queda.

El fundamento de esta regla es que vamos descomponiendo tácitamente el número propuesto en múltiplos de 11; porque cuando decimos

de 3 á 5 van 2, descomponemos las cinco decenas en 3+2; por consiguiente, podemos descomponer el 358 en 330+28; cuando luego decimos de 2 á 8 van 6, descomponemos al 28 en 22+6; luego esto equivale á haber descompuesto el 358 en 330+22+6; y siendo divisibles por 11 todas las partes, ménos la última, se tendrá que esta será la resta.

Para averiguar si el 7088972 es divisible por 11, dirémos: de 7 á 0 no puede ser, de 6 á 10 van 4, de 4 á 8 van 4, de 4 á 8 van 4, de 4 á 9 van 5, de 5 á 7 van 2, de 2 á 2 no va nada; luego el número dado es divisible por 11, pues no deja resta.

De todo lo espuesto podemos inferir, que aunque son muchos y mui ingeniosos los métodos, por medio de los cuales puede uno cerciorarse de si una operacion está bien hecha, lo mejor es ejecutarla una ó dos veces, y si fuese posible en diferente tiempo, ó por diferentes sugetos. Por esta causa, en las oficinas donde es indispensable ejecutar con presteza las operaciones, y en que un error podria traer fatales consecuencias, se ponen dos oficiales igualmente diestros, y ejecuta cada uno de por sí la cuenta que se presenta: lee uno el resultado, y si es el mismo, no habrá equivocacion. Sin embargo, en operaciones demasiado complicadas es insuficiente aun la conformidad de dos personas, y la esperiencia ha probado que era necesaria la conformidad de cuatro personas, para tener una confianza perfecta en los resultados de las operaciones mayores que se han necesitado ejecutar.

100 Entendido esto, pasemos ya á manifestar algunos otros métodos particulares de abreviacion.

En cuanto á la suma y resta no se pueden dar métodos abreviados; porque son sencillas, y lo que se adquiere con el ejercicio es una práctica por medio de la cual se ejecutan de memoria estas operaciones, cuando los números no son mui complicados.

En las otras hai abreviaciones que pueden ser mui importantes en muchas ocasiones; y respecto de la multiplicacion vamos á manifestar seis casos.

1.º Cuando uno de los factores es el producto de otros simples que conozcamos, podemos multiplicar el otro por uno de ellos, y luego este producto por otro, y luego este por otro, &c.

Ejemplo. Si tuviera que multiplicar 429 por 35, como sé (79) que $35=5\times7$, multiplicaria primero por 5, y luego el producto que me resultase por 7, en la forma que aquí se presenta:

$$\begin{array}{r} 429 \\ 5 \\ \hline 2145 \\ 7 \\ \hline 15015 \end{array}$$

Donde advierto que me he ahorrado el hacer una adicion.

2.º Si tuviese que multiplicar por un número cualquiera de nueves, añadiria al multiplicando tantos ceros como nueves habia, de esto restaria el multiplicando, y lo que me resultase seria el producto pedido.

Ejemplo. Si tuviese que multiplicar 38647 por 9999, añadiria cuatro ceros al multiplicando, y del producto quitaria el mismo multiplicando en esta forma:

La razon de esto es que siendo $9999 = 10000 - 1$, el producto deberá componerse de 10000 multiplicandos ménos un multiplicando; y como el número que contiene diez mil multiplicandos se saca (62) con añadirle cuatro ceros, si de este número quitamos una vez el mismo multiplicando, tendrémos el producto verdadero.

$$\begin{array}{r} 386470000 \\ 38647 \\ \hline 386431353 \end{array}$$

Este procedimiento se podria generalizar diciendo: que *la multiplicacion se haria, añadiendo tantos ceros al multiplicando como guarismos tiene el multiplicador, y restando de esto el producto del mismo multiplicando por lo que falta al multiplicador para llegar á ser la unidad seguida de tantos ceros, como guarismos tenia el mismo multiplicador*; pero esto no seria útil, sino cuando los guarismos de la izquierda del multiplicador fuesen nueves, porque solo entónces, y no en otro caso, la resta tendria ménos guarismos que el mismo multiplicador.

Así, si quisiera multiplicar 357853 por 99973, advertiria que al multiplicador le faltan 27 unidades para llegar á ser 100000; luego si al multiplicando le añado cinco ceros, tendré en él, 27 veces mas al multiplicando; luego del 35785300000 deberé restar el producto de 357853 por 27, lo que ejecutaré en esta forma:

Coloco el multiplicando con los ceros, despues debajo de él el mismo multiplicando, y luego el 27; ejecuto la multiplicacion y hago la suma de los dos productos parciales y resta del total á un tiempo, diciendo: 1 es 1, de 1 á 10 van 9, y de 10 llevo 1; 1 y 7 son 8, y 6 son 14, de 14 á 20 van 6, y de 20 llevo 2; 2 y 9 son 11, de 11 á 20 van 9, y de 20 llevo 2; 2 y 4 son 6, y 7 son 13, de 13 á 20 van 7, y llevo 2; 2 y 5 son 7, de 7 á 10 van 3, y de 10 llevo 1; 1 y 5 son 6, y 1 son 7, de 7 á 13 van 6, y de 13 llevo 1; 1 y 2 son 3, y 7 son 10, de 10 á 15 van 5, y de 15 llevo 1; de 1 á 8 van 7; y pongo los demas guarismos que hai á la izquierda.

$$\begin{array}{r} 35785300000 \\ 357853 \\ 27 \\ \hline 2504971 \\ 715706 \\ \hline 35775637969 \end{array}$$

3.° Cuando el multiplicador es 25, podemos ejecutar la multiplicacion añadiendo dos ceros al multiplicando, y tomando la cuarta parte de esto; porque con añadir dos ceros (62) le multiplico por 100; y como 100 es cuatro veces mayor que 25, resulta que el producto tambien será cuatro veces mayor que el verdadero, y por lo mismo le deberémos hacer este número de veces menor.

Por ejemplo: si quisiera multiplicar 57834 por 25 (ó si quisiera reducir 57834 @ á libras), añadiria dos ceros y tendria 5783400; y tomando la cuarta parte por el método espuesto (72), resultará 1445850.

Si le hubiera tenido que multiplicar por 125, le hubiera añadido tres ceros, y esto lo hubiera dividido por 8, y tendria 7229250.

4.° Cuando dos guarismos seguidos del multiplicador equivalen al producto de alguno de los anteriores, se multiplica este por el otro factor y se escusa la repeticion, como se ve en este ejemplo:

$$\begin{array}{r} 547253052 \\ 123287364 \end{array}$$

Producto por 4.	2189012208
Producto del anterior por 9.	19701109872
Producto del multiplicando por 7. . . .	3830771364
Producto del anterior por 4.	15323085456
Producto del multiplicando por 3. . .	1641759156
Producto del anterior por 4.	6567036624
Producto total.	67469386222034928

Donde advierto despues de multiplicado por 4, que como 36 equivale á 9 veces 4, habré multiplicado por 36, si multiplico el anterior por 9; despues multiplico por 7, y su producto le corro dos lugares hácia la izquierda porque he multiplicado á un tiempo por los dos guarismos 36; luego multiplico esto por 4, y así continúo como se ve en el ejemplo.

5.° Tambien se pueden hacer semejantes abreviaciones, aun cuando en el multiplicador se hallasen los múltiplos á la derecha de sus factores; pues en este caso no se necesitaria mas que empezar á multiplicar por los últimos, teniendo cuidado de ir colocando cada producto parcial los lugares que corresponda hácia la derecha, como se ve en este ejemplo:

$$\begin{array}{r} 7324576 \\ 365424 \end{array}$$

Producto por 3.	21973728
Producto del anterior por 2.	43947456
Producto del anterior por 9..	395527104
Producto del mismo por 4..	175789824
Producto total.	2676575860224

Donde advierto, que despues de haber multiplicado por 3, para hacerlo por el 6, multiplicaré este producto por 2 y le correré un lugar hácia la derecha. Luego, como $54 = 9 \times 6$, multiplico el producto de 6 por 9, corriéndole dos lugares hácia la derecha; y como el 24 último tambien es igual á 4×6, multiplicaré por 4 el producto por 6 corriéndole dos lugares, y ejecutando la suma tendré el producto total.

Como hai pocos casos en las multiplicaciones algo complicadas, en que no se puedan practicar algunas de estas abreviaciones, parecé conveniente poner aun aquí los ejemplos siguientes:

1.º Si quisiera multiplicar 532623 por 24618, como el 6 es submúltiplo del 18 y del 24, empiezo la multiplicacion por él; y luego multiplico este producto por 3 para que quede multiplicado el multiplicando por 18, pero coloco este producto dos lugares mas á la derecha; y luego multiplico el mismo por 4 para que lo quede el multiplicando por 24, corriéndole un lugar hácia la izquierda respecto del primitivo ó tres respecto del último, como aquí se presenta:

532623
24618

Producto por 6. 3195738
Producto por 18. 9587214
Producto por 24. 12782952

Producto total. 13112113014

2.º Si tuviera que multiplicar 8471232583 por 1165548742, multiplicaria 1.º por 7, y despues este producto por 6, para que quedase por 42, corriéndole dos lugares hácia la derecha, á fin de que el último guarismo caiga debajo del último del multiplicador parcial; luego, pasaré á multiplicar por 6, y colocaré el producto de manera que su último guarismo caiga debajo del 6 del multiplicador; y como el 48 equivale á ocho veces 6, multiplicaré este por 8, y colocaré el producto de manera que su último guarismo caiga debajo del último del 48; luego, paso á multiplicar por 11, que ya lo sé ejecutar abreviadamente (66); y coloco su producto debajo del 1 inmediato al 6; y como el 55 equivale á 5×11, multiplicaré esto por 5, y lo colocaré de manera que el último guarismo caiga debajo del segundo 5, y luego sumaré como aquí se presenta.

8471232583
1165548742

Producto por 7. . . . . 5929862808[1]
Por 42. 355791768486
Por 6. 50827395498
Por 48. 406619163984
Por 11 (por lo dicho (66)). . 93183558413
Por 55 (el anterior por 5). . . . 465917792065

Producto total. 9873634480305060586

6.º Finalizarémos este asunto con un método abreviado y general, por cuyo medio se obtiene el producto final sin escribir los productos parciales intermedios; y para abreviar considerablemente los discursos, en vez de decir, por ejemplo, *el producto de las decenas del multiplicando por las unidades del multiplicador*, dirémos: *las decenas por las unidades*, suprimiendo la palabra *el producto*, y que el órden de unidades enunciadas en primer lugar, se reputará pertenecer al multiplicando y el otro por consiguiente al multiplicador.

Para esto recordarémos que si se observan con atencion los productos parciales de algunas multiplicaciones, se ve que todos están dispuestos de manera que los mismos órdenes de unidades se hallan en una misma columna vertical; y analizando su formacion, se verá ademas que las unidades por las unidades deben siempre dar unidades, pudiendo tambien dar decenas, pero nada mas; que para tener todas las decenas, es necesario añadir este esceso de decenas que provienen de las unidades por las unidades, 1.º á las decenas por las unidades; 2.º á las unidades por las decenas, lo que podrá dar centenas ademas; que para tener todas las centenas, es necesario añadir este esceso 1.º á las centenas por las unidades; 2.º á las unidades por las centenas; 3.º á las decenas por las decenas, lo que podrá ocasionar millares ademas; que para tener todos los millares es necesario añadir este esceso, 1.º á los millares por las unidades; 2.º á las unidades por los millares; 3.º á las centenas por las decenas; 4.º á las decenas por las centenas; lo que podrá dar decenas de millar, &c.

Luego podrémos establecer esta regla general para encontrar á un tiempo el producto de dos factores cualesquiera.

Multiplíquense las unidades por las unidades: escríbanse las unidades del producto y reténganse las decenas; multiplíquense despues las decenas por las unidades, luego las unidades por las decenas, y á su suma agréguense las decenas retenidas: escríbanse las decenas de esta suma total, y reténganse las centenas; multiplíquense las centenas por las unidades, las unidades por las centenas, y las decenas por las decenas, al total añádanse las centenas retenidas: escríbanse las centenas contenidas en este nuevo total, y reténganse los millares para añadirlos á la suma de los millares por las unidades, de las unidades por los millares, de las centenas por las decenas, de las decenas por las centenas, &c.

Con algunos ejemplos aclararémos esta regla; mas para abreviar omitirémos las palabras: unidades, decenas, centenas, &c.

Ejemplo 1.º Si tuviera que multiplicar 54 por 37, ejecutaria la operacion como aquí se presenta:

54
37

1998

Diciendo: 4 por 7 son 28, pongo el 8 y llevo 2, 5 por 7 son 35, y 2 que llevaba son 37; 3 por 4 son 12, y 37 son 49, pongo 9 y guardo 4; 5 por 3 son 15, y 4 que llevaba son 19, que pongo; con lo que tengo ejecutada la operacion.

Si los dos factores fuesen iguales, en vez de tomar sucesivamente las decenas por las unidades, y las unidades por las decenas, *se tomará el duplo de las decenas por las unidades*; pues que entónces siendo iguales los dos productos, su suma equivale al duplo de uno de ellos; así, si tubiéramos que multiplicar el número 57 por el mismo 57, ejecutaria la operacion como aquí se presenta:

Diciendo: 7 por 7 son 49, pongo 9 y llevo 4; 5 por 7 son 35, el duplo de 35 es 70, y 4 que llevaba son 74, pongo el 4 y llevo 7; 5 por 5 son 25, y 7 son 32, que pongo, y tengo hecha la multiplicacion.

57
57
———
3249

Ejemplo 2.° Si tubiera que multiplicar 854 por 327, diria: 4 por 7 son 28, pongo el 8 y llevo 2; 5 por 7 son 35, y 2 que llevaba son 37, 2 por 4 son 8, y 37 son 45, pongo 5 y llevo 4; 8 por 7 son 56, y 4 son 60, 3 por 4 son 12, y 60 son 72, 5 por 2 son 10, y 72 son 82, pongo 2 y llevo 8; 8 por 2 son 16, y 8 que llevaba son 24, 3 por 5 son 15, y 24 son 39, pongo 9 y llevo 3: 8 por 3 son 24, y 3 que llevaba son 27, que pongo, y tengo hecha la operacion.

854
327
———
279258

Si los dos factores fuesen iguales, aplicando el mismo razonamiento que ántes, se verá que se deben duplicar las decenas por las unidades, las centenas por las unidades, y las centenas por las decenas, &c.; por ejemplo: si tubiese que multiplicar 325 por 325, haria la operacion como aquí se ve:

Diciendo: 5 por 5 son 25, pongo 5 y llevo 2; 2 por 5 son 10, el duplo de 10 es 20, y 2 que llevaba son 22, pongo 2 y llevo 2; 3 por 5 son 15, el duplo de 15 es 30, y 2 que llevaba son 32, 2 por 2 son 4, y 32 son 36, pongo 6 y llevo 3; 3 por 2 son 6, el duplo de 6 es 12, y 3 que llevaba son 15, pongo 5 y llevo 1; 3 por 3 son 9, y 1 que llevaba son 10, que pongo, y tengo concluida la operacion.

325
325
———
105625

Este método, se puede continuar tanto como se desee ó como se pueda; porque es necesario mucha costumbre en calcular, y mucha memoria para continuar mentalmente hasta el producto de doce guarismos por otros doce guarismos, principalmente si los números no son iguales entre sí.

En todos los ejemplos que hemos resuelto, se han supuesto ambos factores con un mismo número de guarismos; si esto no sucediese, se podrian poner ceros á la izquierda del que tiene ménos para igualarse, si se teme alguna equivocacion; pero tambien se puede ejecutar sin esto, como en el siguiente ejemplo, que resolverémos:

Diciendo: 2 por 3 son 6, que pongo; 3 por 3 son 9, 2 por 8 son 16, y 9 son 25, pongo 5 y llevo 2; 4 por 3 son 12, y 2 que llevaba son 14, 2 por 6 son 12, y 14 son 26, 3 por 8 son 24, y 26 son 50, pongo 0 y llevo 5; 5 por 3 son 15, y 5 que llevaba son 20, ahora deberia multiplicar el 2 del multiplicando por los millares del multiplicador; pero como no los hai, omito esta operacion, y paso á multiplicar las centenas del multi-

5432
683
———
3710056

plicando por las decenas del multiplicador, diciendo: 4 por 8 son 32, y 20 que tenia son 52, 3 por 6 son 18, y 52 son 70, pongo 0 y llevo 7; 5 por 8 son 40, y 7 son 47, 4 por 6 son 24, y 47 son 71, pongo 1 y llevo 7; 5 por 6 son 30 y 7 son 37 que pongo, y tengo concluida la operacion.

101 Pasemos ahora á ver algunas abreviaciones particulares de la division. 1.° Ante todas cosas observarémos que, con el fin de disminuir el número de tentativas inútiles, hemos dado los medios de reducirlas solo á una, cuando el segundo guarismo del divisor es 9, 8 ó 7, y creemos poder asegurar que sobre este punto nos hemos detenido lo suficiente, paraque los principiantes no se paren al ejecutar esta operacion; pero ahora que tratamos de manifestar los casos particulares, no podemos ménos de dar á conocer otra regla, que se podria seguir en este caso para hallar el cociente verdadero, ó al ménos que solo deje una tentativa.

Esta regla es la siguiente: *divídase el primero ó dos primeros guarismos del dividendo por el primero del divisor; despues, divídase por el primer guarismo del divisor mas la unidad; súmense estos cocientes y tómese la mitad, la cual espresará el cociente verdadero ó solo se podrá diferenciar de él en una unidad.* V. g. si quisiera dividir 25785 por 356, estaria reducido á dividir 25 por 3, que da 8; dividiríamos tambien 25 por 4 que da 6; sumaríamos 8 con 6 que da 14, y tomando la mitad tendríamos que 7 es el cociente verdadero. Esta regla se funda en que estando el divisor 356, entre tres centenas y cuatro centenas, el cociente debe tambien hallarse entre los que den las divisiones por estos números.

2.° Si los dos primeros guarismos del divisor fuesen 11 ó 12, entónces se dividirian los dos ó tres primeros guarismos de cada dividendo parcial, por estos dos guarismos como si se tratase de un número simple; y si por casualidad uno de los cocientes parciales se hallase tambien ser 11 ó 12, se les pondria en el cociente total, lo que abreviará la operacion. Por ejemplo: si tuviera que dividir 1364797 por 1127, ejecutaria la operacion como aquí se presenta:

13647,97	1127
123 97	———
000 00	1211

Primero diria: 11 en 13 ¿cuantas veces? veo que son 1, y que despues quedan 2 de resta; que unidas al 6 dan 26, que contienen dos veces al 11, y por esta causa tomo un guarismo mas en el dividendo, esto es, cinco guarismos, y digo desde luego: 11 en 136 ¿cuantas veces? veo que son 12, y las pongo en el cociente; ahora hago la multiplicacion del divisor (66) por el 12, y resto diciendo: 12 por 7 son 84, de 84 á 87 van 3 que pongo, y llevo 8; 12 por 2 son 24, y 8 son 32, de 32 á 34 van 2, y y llevo 3; 12 por 11, desde luego, son 132, y 3 que llevaba son 135, de 135 á 136 va 1 que pongo, y de 136 llevo 13; de 13 á 13 no va nada. Si ahora dividiera 12 por 11, daria 1 por cociente, y quedaria 1 de resta, que unida con el 3 que sigue les toca aun á 1, y por lo mismo bajo desde luego los otros dos guarismos, y divido 123 por 11, que veo les cabe á 11, y por consiguiente pondré 11 en el cociente, y diré: 11 por 7 son 77, de 77 á 77 no va nada, pongo 0 y llevo 7; continúo: 2 por 11 son 22, y 7 que llevaba son 29, de 29 á 29 no va nada, pongo 0 y llevo 2; 11 por 11 son 121, y 2 que llevaba son 123, de 123 á 123 va 0; con lo que tengo concluida la operacion.

{ 3.º Si el divisor se pudiese descomponer en dos factores, entónces seria mas corto dividir sucesivamente por estos factores. Así, si el divisor fuese por ejemplo 54, que es el producto de 6 por 9, dividiríamos primero por 6, y luego dividiríamos por 9 el cociente que nos resultase, y este segundo cociente seria el verdadero. La razon de esto es que dividiendo solo por 6, dividimos por un número que es nueve veces menor que el verdadero; luego en virtud de lo espuesto (91), el cociente será este mismo número de veces mayor, y por lo mismo le deberémos hacer nueve veces menor, lo que se consigue dividiendo dicho cociente por 9; por ejemplo: si tubiéramos que dividir 19818 por 54, dividiríamos primero por 6 diciendo: la sesta parte de 19 es 3, y sobra 1; la sesta parte de 18 es 3; la sesta parte de 1 es 0; la de 18 es 3, y por lo mismo tengo que el cociente es 3303; ahora divido esto por 9 diciendo: la novena parte de 33 es 3, y sobran 6; la novena parte de 60 son 6, y sobran 6; la novena parte de 63 es 7, y no queda nada; luego el cociente verdadero es 367.

{ Del mismo modo se haria si tubiese el divisor mas factores de un solo guarismo, pues en este caso se deberia volver á partir el cociente hallado por otro divisor, hasta que no hubiese mas divisores.

{ Si al ejecutar estas divisiones se encontrase una resta, no se haria caso de ella hasta haber encontrado el cociente final; en cuyo caso para encontrar la resta total, se haria lo siguiente: *se multiplicaria la última por el divisor precedente, y á este producto se añadiria la otra resta, y así sucesivamente.* Luego si tuviésemos el divisor 378, que equivale á 9.7.6, y el dividendo fuese 1784680, dividiríamos primero por 9, lo que nos daria por cociente 198297, y la resta 7; dividiríamos este cociente por 7, obtendríamos 28328, y la resta 1; despues dividiria por 6, y tendria por último cociente 4721, y la resta 2. Para hallar ahora la resta total, multiplicaré esta resta 2 por el divisor penúltimo que es 7, y tendré 14: á esto añadiré la resta anterior que es 1, y tendré 15, que multiplicado por 9 da 135, que sumados con la primera resta 7 daria 142, y tendré que el verdadero cociente $4721\frac{142}{378}$ (*).

(*) *La razon de esta práctica estriba en la teoría de los quebrados que espondrémos en el capítulo siguiente; mas no obstante pondrémos aquí la demostracion. El primer cociente con la resta es* $198297\frac{7}{9}$;

{ 102 Por el contrario, cuando un mismo número se tiene que dividir por otro, luego el cociente que resulta por otro, luego este por otro, y así sucesivamente; si estos divisores son compuestos es mas sencillo *el multiplicarlos todos entre sí, y dividir el número total por el producto.*

V. g. si tuviera que dividir 853271503, primero por 76, luego el cociente por 32, y luego el cociente por 17, seria mas sencillo el dividir desde luego por el producto 76.32.17=41344, el dividendo 853271503.

{ 4.º Así como cuando el multiplicador era 5, 25, 125, &c. se abreviaba la operacion de multiplicar, así tambien cuando el divisor sea alguno de estos números, se abrevia, multiplicando por 2, por 4, por 8, &c. y separando con una media luna uno, dos ó tres, &c. de los últimos guarismos que espresarán la resta que deba acompañar, dividida por 10, por 100, por 1000, &c. De manera que si me propusiese dividir 7823 por 5, le multiplicaria por 2 y tendria por producto 1564(6; que tomando el último guarismo por resta de division por 10, tendré el verdadero cociente en $1564\frac{6}{10}$; si hubiese de dividir por 25 el mismo número, le multiplicaria por 4, y tomaria del producto 312(92 todos los guarismos por cociente ménos los dos últimos, que los tomaré por resta de division por 100, y el cociente será $312\frac{92}{100}$; si le quisiera dividir por 125, le multiplicaria por 8, y tomando por cociente todos los guarismos ménos los tres últimos, que tomaré por resta de dividir por 1000, tendré que el verdadero cociente será $62\frac{584}{1000}$, &c.

{ Esta práctica se funda, en el primer caso, en que multiplicando el dividendo por 2, el cociente debe salir dos veces mayor, y para que sea el verdadero se le debe partir por un número dos veces mayor tam-

luego la resta de su division por 7 es no solo 1, *sino* $1+\frac{7}{9}$; *y por lo mismo el segundo cociente es* $28328+\dfrac{1+\frac{7}{9}}{7}$; *la tercera resta no solo es* 2, *sino* $2+\dfrac{1+\frac{7}{9}}{7}$; *y por lo mismo el verdadero cociente de la division propuesta será* $4721+\dfrac{2+\dfrac{1+\frac{7}{9}}{7}}{6}$; *luego la resta total es* $\dfrac{2+\dfrac{1+\frac{7}{9}}{7}}{6}$; *que en virtud de lo que se espondrá* (127), *la irémos reduciendo de este modo:*

$$\frac{2+\dfrac{1+\frac{7}{9}}{7}}{6}=\frac{\dfrac{2\times7+1+\frac{7}{9}}{7}}{6}=\frac{15+\frac{7}{9}}{6\times7}=\frac{\dfrac{15\times9+7}{9}}{6\times7}=\frac{135+7}{6\times7\times9}=\frac{142}{378}=\frac{71}{189},$$

que es en efecto la que nos hubiera resultado, haciendo la division con toda estension.

bien, esto es, por 10, que se ejecuta (77) tomando por cociente todos los guarismos, escepto el último que es la resta. En el segundo caso, como multiplicamos por 4 el dividendo, se debe tambien multiplicar por 4 el divisor, el cual se convierte en 100, cuya division se ejecuta como lo hemos practicado en virtud de lo espuesto (77). Lo mismo se demostrará en cualquier otro caso.

5.º Cuando los términos de la division son mui complicados se abrevia mucho la operacion formando del divisor una tabla análoga á la pitagórica, como se hizo (66) con el multiplicador en la multiplicacion.

Hecho esto y separando los guarismos necesarios, no hai necesidad de tantéos, sino que se ve en los guarismos separados cual es el mayor producto de los de la tabla formada que está contenido en cada dividendo parcial y se pone en el cociente el número que tiene dicho producto á la izquierda; despues se pone este producto debajo del dividendo parcial, y se resta; al lado de la resta se baja el guarismo siguiente, y se procede del mismo modo hasta concluir la operacion, que quedará efectuada sin fatiga y sin esponerse á tantas equivocaciones.

Terminarémos esta digresion manifestando porque en la suma, resta y multiplicacion se principia de derecha á izquierda, y en la division de izquierda á derecha.

En la suma se principia por la derecha, porque de este modo las decenas que resultan de la suma de las unidades se van reuniendo al mismo tiempo á la suma de las decenas; y si procediésemos al contrario, tendríamos primero que sumar cada especie de unidades, y formar despues otra suma de estas sumas parciales; pero cuando se podria practicar la suma con igual sencillez principiando por la derecha ó por la izquierda, seria cuando los sumandos fuesen tales que de la suma de cada especie de unidades no resultase ninguna unidad de especie superior, como se verifica en este ejemplo:

$$\begin{array}{r} 213 \\ 431 \\ 124 \\ \hline 768 \end{array}$$

que se puede efectuar sin ninguna dificultad principiando por la izquierda, diciendo 2 y 4 son 6 y 1 son 7, que pongo; 1 y 3 son 4 y 2 son 6 que pongo á la derecha del 7; 3 y 1 son 4 y 4 son 8 que pongo y saco por suma el 768.

En la resta se podria tambien principiar por la izquierda si todos los guarismos del sustraendo fuesen menores que sus correspondientes en el minuendo, como sucede en el ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{r} 786 \\ 263 \\ \hline 523 \end{array}$$

que podemos decir, de 2 á 7 van 5, que pongo debajo; de 6 á 8 van 2 que tambien pongo; y de 3 á 6 van 3 que pongo y resulta por resta 523. Pero si alguna de las especies de unidades del minuendo fuese menor que su correspondiente en el sustraendo, al llegar á ella, no podríamos efectuar la resta sin tener que enmendar el resultado de la columna anterior.

En la multiplicacion se procede de derecha á izquierda porque de este modo á cada producto parcial podemos añadir desde luego las que

se llevan del producto de especie inferior; pero si los factores fuesen tales que de los productos de sus guarismos parciales no resultase mas de 9 se podria hacer tambien por la izquierda sin ninguna dificultad; como se ve en el ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{r} 213 \\ 3 \\ \hline 639 \end{array}$$

que se puede decir 2 por 3 son 6, que pongo; 1 por 3 es 3, que pongo debajo y 3 por 3 son 9 que tambien pongo, y resulta el producto 639.

En la division de un compuesto por un dígito se podria tambien principiar por la derecha si todos los cocientes parciales de dividir cada guarismo por el dígito fuesen exactos, como se verificaria en el ejemplo $\frac{864}{2}=432$, que podríamos decir 4 dividido por 2 es 2; 6 dividido por 2 es 3, y 8 dividido por 2 es 4; lo que nos daria por cociente 432.

Pero en todos los demas casos es indispensable proceder de izquierda á derecha para poder descomponer la resta que quede de cada division parcial en las unidades de especie inferior inmediata y continuar la division.

Mas lo que sí seria mui conveniente era el hacer la multiplicacion del divisor por cada cociente parcial, principiando la multiplicacion por los guarismos de especie superior del divisor, é ir haciendo la resta al mismo tiempo. Lo cual nos proporcionaria dos ventajas: 1.ª que el número de tantéos seria menor, porque desde los primeros productos ya se conocia si se habia puesto demas, cuando por el otro método solo se conoce al fin del producto; 2.ª que de este modo no hai que tener tanta intensidad ni cuidado para saber las que se llevan, ni para saber cuantas se han de tomar para restar cada producto parcial.

Con el fin de manifestarlo, supongamos que se quiera practicar la siguiente operacion:

$$\begin{array}{r|l} 4620054 & 78306 \\ \cline{2-2} 1125050 & 59 \\ 070475 & \\ 07200 & \\ 00 & \end{array}$$

Si por el método general procediéramos diciendo el 7 en 46 está 6 veces, y pusiéramos 6 al cociente, no conoceríamos que habíamos puesto demas sino al fin de la multiplicacion de todo el divisor; pero del modo que acabamos de indicar se conocia la equivocacion desde el segundo producto, porque diríamos 7 por 6 son 42, de 42 á 46 van 4; el cual junto con el 2 siguiente componen 42; y como el producto del 8 por 6 ya da 48 que es mayor que 42 nos indica que debemos poner á 5 solamente. Puesto el 5 por primer cociente parcial se puede continuar la division haciendo la multiplicacion de izquierda á derecha y verificando la resta al mismo tiempo diciendo: 5 por 7 son 35, de 35 á 46 van 11, que pongo debajo del 46; 5 por 8 son 40, de 40 á 42 van 2 que pongo debajo del 2, y de 40 llevo 4, de 4 á 11 van 7 que pongo debajo del segundo 1 del 11, y de 11 llevo 1; de 1 á 1 no va nada y pongo cero debajo del primer 1 del 11; sigo 3 por 5 son 15, de 15 á 20 van 5 que pongo debajo del primer cero del dividendo, y de 20 llevo 2, de 2 á 2 no va nada, y pongo 0 debajo del 2; continúo 5 por 0 es 0, de 0 á 0 va 0 que pongo; y sigo 5 por 6 son 30, de 30 á 35 van 5 que pongo, y de 35 llevo 3, de 3 á 10 van 7 que pongo debajo del 0, y de 10 llevo 1, de 1 á 5 van 4 que pongo; y tengo por resta 70475.

Ahora continúo diciendo el 7 en 70 está 9 veces que pongo al cociente, y haciendo la multiplicacion como se acaba de ver, se hallará 0 por resta, como se manifiesta en el ejemplo. }

De los quebrados ó fracciones; de su espresion, reduccion á un comun denominador y simplificacion.

103 Ya hemos dicho (25) que números quebrados son aquellos que resultan de comparar la unidad con la muchedumbre, ó una muchedumbre con otra muchedumbre mayor; y que son aquellos números que *constan solo de partes de la unidad.* Para formarse idéa de un quebrado se necesita atender á dos cosas: al número de partes en que se considera dividida la unidad, que se llama *denominador*; y al que espresa las partes que se toman de estas, que se llama *numerador*. Por ejemplo: para formar idéa del número espresado por *dos tercios ó dos terceras partes* de unidad, se considerará que la unidad, v. g. una manzana, una pera, &c. está dividida en *tres* partes iguales, y que se toman *dos* de estas partes; de manera que el denominador será *tres*, y el numerador *dos*. Se da el nombre de numerador al que espresa las partes que se toman, porque él las numera ó cuenta; y el de denominador al que espresa las partes en que se considera dividida la unidad, porque él es el que da nombre al quebrado ó á las partes que espresa el numerador. El numerador y denominador juntos se llaman *términos* del quebrado.

Todo quebrado se puede considerar como el cociente de una division del numerador por el denominador. En efecto, en el ejemplo anterior, el número *dos tercios* de una unidad cualquiera, que supondrémos aquí ser una manzana, vamos á probar que es lo mismo que el cociente que resultaria de dividir dos manzanas entre tres personas. Porque si dividimos cada manzana en tres partes iguales, podrémos dar á cada persona una de estas partes por cada manzana que haya; y como suponemos iguales las manzanas, dos terceras partes de una equivaldrán á la tercera parte de la una, mas la tercera parte de la otra; luego para repartir las dos manzanas entre tres, en vez de dar á cada uno una tercera parte de cada manzana, podrémos darle las dos terceras partes de una; luego es lo mismo las dos terceras partes de una manzana que el cociente de dividir dos manzanas entre tres personas; y como lo que hemos manifestado con relacion á la manzana, para mayor claridad, lo podemos demostrar

con relacion á cualquiera otra unidad, ó con relacion á la unidad abstracta, queda demostrada la proposicion.

Por esta causa se escribe un quebrado del mismo modo que una division indicada, poniendo el numerador, debajo una raya, y luego el denominador; de manera que *dos tercios* de una unidad cualquiera se escribe $\frac{2}{3}$; donde el numerador 2 hace oficios de dividendo, y el denominador 3 de divisor.

Ahora, cuando un quebrado está escrito se lee del modo que se ha dicho (70) se deben leer las restas de la division, es decir; que *se lee el numerador con los nombres numerales absolutos, el denominador con los numerales partitivos si no llega á* 10, *y con los numerales absolutos si llega ó pasa de* 10; pero añadiendo despues la partícula *avos*. Por ejemplo: $\frac{7}{9}$ se lee *siete novenos*, $\frac{15}{58}$ se lee *quince cincuenta y ochoavos*.

De la idéa que nos formamos del quebrado, resulta que una unidad equivale á tantas partes de aquellas de que se trata, como unidades tiene su denominador; porque si consideramos una unidad dividida en tres partes, el conjunto de dichas tres partes equivaldrá á la unidad; por esta causa se tiene que $1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}$, &c. Cuando se ejecuta esta operacion, se dice que *se ha puesto la unidad en forma de quebrado.* Puesto que un quebrado es lo mismo que el cociente de una division, resultará que todo lo demostrado (91, 92 y 93) tendrá lugar aquí; y por lo mismo *á un quebrado le sucederá lo que le suceda á su numerador, y lo contrario de lo que le suceda á su denominador; y su valor no se alterará, aun cuando se multipliquen ó partan sus dos términos por un mismo número.* Sin embargo, como allí lo hemos manifestado en divisiones que se podian ejecutar, y los quebrados son divisiones indicadas, lo demostrarémos aquí, independientemente de lo que allí espusimos.

104 Teor. 1.º *Si una unidad se divide en un número cualquiera de partes iguales, y la misma unidad se divide en otro número cualquiera de partes iguales, resultará que el valor de cada parte será mayor en aquella que resulte de dividir en un número menor de partes; y si uno de estos números es múltiplo del otro, la parte que resulte de dividir en el mayor número, será el mismo submúltiplo de la otra.*

Espl. Si una unidad se divide, por ejemplo, en tres partes iguales, y tambien en cinco partes iguales, voi á demostrar que cada parte que resulte de la primera division, será mayor que la de la segunda en general; y que si el número segundo fuese 6, que es duplo del primero 3, el valor de la primera será el duplo del de la segunda.

Dem. Concíbase dividida la unidad en el número mayor de partes, que en nuestro caso es cinco, y tendrémos en primer lugar que la unidad equivaldrá á todo el conjunto de estas partes ó á cinco partes. Ahora, si consideramos todas estas partes distribuidas en tantos montones como unidades tenia el número menor, esto es, en tres, tendrémos que en cada monton habrá lo ménos una de estas partes; por ejemplo, aquí habrá una en cada monton, y todavía habrá que poner algo por razon de las otras dos partes que sobran; luego si suponemos que las otras partes que quedan, están repartidas convenientemente entre los tres montones, resultará que cada monton será una parte de la unidad, espresada por el número menor; y que en cada monton habrá lo ménos una parte de aquellas que resultaban del número mayor y algo mas; luego cada monton será mayor que la parte que resulta del número mayor; pero cada monton es una parte de la unidad espresada por el número menor; luego la parte que resulta de dividir en menor número, es mayor que la que resulta de dividir en mayor número.

Si el número mayor fuese múltiplo del menor, por ejemplo, si aquí fuese 6 en vez de ser 5, tendríamos que al distribuir en tres montones todas las partes que resultan de dividir en 6, resultarán en cada monton tantas partes de á 6 como veces el 3 esté contenido en 6; luego resultarán aquí dos partes, y por lo mismo equivaliendo cada monton á dos partes, será dos veces mayor que una de ellas; y como cada monton es una tercera parte de la unidad, resultará que la tercera parte es dupla de la sesta. L. Q. D. D.

105 Teor. 2.º *Si permaneciendo uno mismo el denominador, aumenta ó disminuye su numerador, aumentará ó disminuirá del mismo modo el quebrado; y si aumenta por via de multiplicacion, ó disminuye por via de division, lo hará del mismo modo el quebrado.*

Dem. Por no alterarse el denominador, no se altera el valor de cada parte; luego cuando se tomen mas partes, que es cuando crece el numerador, se tendrá un quebrado mayor; y cuando se tomen ménos, que es cuando disminuye el numerador, se tendrá un quebrado menor. Esto es lo mismo que decir: que *de quebrados que tienen un mismo denominador, aquel es mayor que tiene mayor numerador.*

Ahora, si el número de partes que se tomó fué el duplo, el triplo, &c. si fué el subduplo, el subtriplo, &c. el valor del quebrado que nos resulte, lo será igualmente; luego *con multiplicar ó dividir el numerador por un número cualquiera, hemos multiplicado ó dividido el quebrado por el mismo número, ó le hemos hecho el mismo número de veces mayor ó menor que se hizo á su numerador.* L. Q. D. D.

106 Teor. 3.º *Si permaneciendo uno mismo el numerador del quebrado, aumenta ó disminuye el denominador, disminuirá ó aumentará el quebrado; y si el denominador aumenta por via de multiplicacion, el quebrado disminuirá por via de division; y si el denominador disminuye por via de division, el quebrado aumentará por via de multiplicacion.*

Dem. Como el numerador permanece el mismo, se toma siempre un mismo número de partes; luego el valor del quebrado será mayor ó menor, segun lo sean las partes que esprese; pero miéntras mayor sea el número de partes en que se divida una unidad cualquiera, será (104) menor el valor de cada una; luego miéntras mayor sea el denominador,

será menor el valor de cada parte, y por consiguiente el valor de un número cualquiera de ellas. Ahora, si el denominador aumentase por via de multiplicacion, esto es, que se hiciese dos ó tres, &c. veces mayor, el valor de cada parte se haria (104) dos, tres, &c. veces menor; luego un número cualquiera de ellas será tambien dos ó tres, &c. veces menor que lo que era ántes. Si el denominador disminuye por via de division entónces el valor de cada parte aumentaria por via de multiplicacion, y lo mismo sucederia á un número cualquiera de ellas, L. Q. D. D.

Cor. De aquí se sigue que si el denominador se divide por sí mismo, quedará multiplicado el quebrado por el denominador; pues como de la division resultaria la unidad por denominador del nuevo quebrado, y todo número partido por la unidad es igual á sí mismo resulta que *para multiplicar un quebrado por su denominador no hai mas que suprimir este.* Por ejemplo $\frac{3}{7}\times7=3$.

107 Teor. 4.º *Un quebrado no se altera, aunque sus dos términos se multipliquen ó partan por un mismo número.*

Dem. Este teorema tiene dos partes: cuando se multiplican ambos términos, y cuando se dividen; si se multiplican por un mismo número los dos términos, tenemos que con multiplicar el numerador se hace el quebrado tantas veces mayor (105), como unidades tiene el número por que se multiplica; pero como con multiplicar el denominador por el mismo número, se le hace este mismo número de veces menor (106), resulta que se queda conforme estaba; luego no hemos alterado su valor.

Si se dividen por un mismo número, tenemos que con dividir el numerador hacemos al quebrado tantas veces menor, como unidades tiene el número por que se divide; y como con dividir tambien su denominador por el mismo número, se le hace el mismo número de veces mayor, resulta conforme estaba; luego su valor no se habrá alterado, que era L. Q. D. D.

Cor. *Tampoco se altera un quebrado cuando á su numerador se le añade un número cualquiera de veces el mismo numerador, y al denominador el mismo número de veces dicho denominador.*

En efecto, supongamos que se tenga el quebrado $\frac{3}{4}$; si al numerador le añadimos 3 y al denominador le añadimos 4, esto equivale á haber multiplicado ambos términos del quebrado por 2; lo que no altera su valor, por lo que acabamos de demostrar; el añadir al numerador $2.3=6$ y al denominador $2.4=8$, causa el mismo efecto que multiplicar ambos términos del quebrado por 3 y así sucesivamente.

108 En la primera parte del teorema anterior está fundada la *reduccion de los quebrados á un comun denominador*, y en la segunda *su simplificacion.*

Cuando dos ó mas quebrados tienen un mismo denominador se dice que tienen aquel denominador *comun*; para muchas investigaciones, como son el averiguar cual de dos ó mas quebrados es mayor, &c. ó para hacer las operaciones con ellos, se necesita que tengan un comun denominador, y la operacion que se ejecuta para conseguirlo, se llama *reduccion de quebrados á un comun denominador.*

Para esto *se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demas*; en este caso no se altera el valor de ningun quebrado, porque sus dos términos se multiplican por un mismo número; y sale el mismo denominador en todos, porque todos resultan de la multiplicacion de los denominadores de todos los quebrados dados; por ejemplo: si quiero reducir á un comun denominador los quebrados $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ los pondré así: $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$

Multiplicaré los dos términos del $\frac{2}{3}$ por 5, que es el denominador del otro quebrado, diciendo: 2 por 5 son 10 que pongo por numerador del nuevo quebrado, debajo de su correspondiente $\frac{2}{3}$; tiraré la raya y diré: 3 por 5 son 15, que pondré debajo de la raya; paso al segundo quebrado $\frac{4}{5}$ y digo: 4 por 3 son 12, que pongo debajo del $\frac{4}{5}$; tiro la raya y despues pongo debajo 15, producto de 3 por 5; con lo que tengo los quebrados $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, que son iguales cada uno con su correspondiente, y que tienen un mismo denominador. $\frac{10}{15}$ $\frac{12}{15}$

Si los quebrados fuesen $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, multiplicaria los dos términos del primero $\frac{3}{4}$, por 15 producto de 3 por 5, que son los denominadores de los demas, y tendria que el primer quebrado se convertiria en $\frac{45}{60}$; pasaria al segundo que es $\frac{2}{3}$, cuyos términos los multiplicaria por 20, producto de 4 y 5 denominadores de los demas, y se convertiria en $\frac{40}{60}$; y luego los dos términos del tercero, que es $\frac{4}{5}$, los multiplicaria por 12, producto de 3 por 4, que son los denominadores de los demas, lo que da $\frac{48}{60}$; con lo que tengo los tres quebrados $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, que son iguales con los primitivos, y que tienen un mismo denominador, que era lo que se pedia.

Esta reduccion se puede abreviar algo; porque en punto á los denominadores no se necesita mas que multiplicarlos una vez entre sí; y así, la regla general para no tener que hacer mas ni ménos de lo que se necesite, la darémos en estos términos: *multiplíquese cada numerador por el producto de los denominadores de los demas, y se tendrán de este modo los numeradores de los quebrados que han de quedar reducidos á un mismo denominador; y para encontrar el denominador, se multiplicarán entre sí los denominadores.*

Así, en el ejemplo antecedente, para reducir los quebrados $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, á un comun denominador, no haré mas que multiplicar el numerador 3 del primero por 15, producto de 3 por 5, y tendré 45, para hallar el numerador del segundo, multiplicaré su numerador 2 por 20, producto de 5 por 4, y tendré 40; para el tercero, multiplicaré su numerador actual 4 por 12, producto de 4 y 3 que son los denominadores de los demas, y tendré 48; para hallar el denominador comun, multiplicaré todos los denominadores entre sí, diciendo: 4 por 3 son 12, 12 por 5 son 60, y poniendo 60 por denominador á los numeradores 45, 40, 48, ten-

dré los quebrados $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$ y $\frac{48}{60}$, que son iguales con los primitivos y tienen un mismo denominador.

Otro ejemplo: si se aplicase esta regla á los quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{3}$ despues de reducidos á un comun denominador seria: $\frac{72}{120}$, $\frac{60}{120}$, $\frac{90}{120}$ y $\frac{40}{120}$.

Aun en operaciones mui complicadas se podria abreviar algo mas; pues despues de sacado el primer quebrado por la regla general para hallar por que número se debe multiplicar cada numerador, se puede hacer dividiendo el denominador del primero por el denominador del quebrado de que se trata, lo que será mas fácil que multiplicar entre sí los demas denominadores.

Cuando los denominadores de los quebrados son los unos factores de los otros se consigue dicha reduccion con mas sencillez. Por ejemplo: si tuviera que reducir á un comun denominador los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{12}$, advertiria que como los denominadores de los tres primeros son factores del 12, denominador del cuarto, quedaria ejecutada la operacion con multiplicar los dos términos del primero por 4, que es el factor por que se debe multiplicar el denominador 3 para convertirle en 12, lo que le reduciria á $\frac{8}{12}$; multiplicando los dos términos del segundo por 3, y los del tercero por 2, por la misma razon, tendrémos hecha nuestra operacion, y los quebrados serán: $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{2}{12}$ y $\frac{5}{12}$.

{ Aunque no sean los denominadores unos factores de otros, se puede hacer esta abreviacion siempre que tengan factores comunes; por ejemplo: si quisiera reducir los $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{8}$, multiplicando los dos términos del primero por 4, y los dos del segundo por 3, tendríamos $\frac{20}{24}$ y $\frac{9}{24}$, que tienen un mismo denominador.

{ *Esc.* La regla general para reducir los quebrados á un comun denominador, cuando los denominadores tienen factores comunes (ó son los unos factores de los otros) es la siguiente: *Hállense los factores simples de los denominadores dados, y el denominador comun que se busca, se compondrá del producto de todos los factores simples diferentes que se hayan encontrado, estando cada uno repetido tantas veces como en el que mas se encuentre de los denominadores dados, y para hallar los numeradores respectivos se multiplicará el de cada quebrado dado por los factores que le falten á su denominador para convertirse en el denominador comun.*

{ Sean los quebrados $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{18}$ y $\frac{13}{24}$: los factores simples de los denominadores son los que aquí se ven:

Donde advierto que los factores simples diferentes que hai son 2 y 3; que el 2 el mayor número de veces que está repetido es tres veces, y el 3 dos; por consiguiente el denominador comun será

8	2	12	2	18	2	24	2
4	2	6	2	9	3	12	2
2	2	3	3	3	3	6	2
1		1		1		3	3
						1	

$2\times2\times2\times3\times3=72$; y para hallar los numeradores, se multiplicará el de cada quebrado por los factores que falten á su denominador para convertirse en el comun, esto es, el numerador 5 del 1.º por $3\times3=9$, el 7 del 2.º por $2\times3=6$, el 11 del 3.º por $2\times2=4$, y el 13 del último por 3, y los quebrados dados se convertirán en los siguientes $\frac{45}{72}$, $\frac{42}{72}$, $\frac{44}{72}$ y $\frac{39}{72}$.

{ *Esc.* La regla que acabamos de dar podria enunciarse tambien diciendo: *hállese el menor múltiplo comun de los denominadores y este será el denominador comun: multiplíquese cada numerador por los factores que falten al denominador que le corresponde para convertirse en el denominador comun y se tendrán los numeradores.*

{ Entendido esto, podemos demostrar el siguiente

Teor. *Si á los dos términos de un quebrado se les añade un mismo número el quebrado crece si es propio, y mengua si es impropio.*

{ *Dem.* Sea el quebrado $\frac{3}{5}$; si añadimos un mismo número, por ejemplo 4, á sus dos términos se tendrá $\frac{3+4}{5+4}$. Si reducimos á un comun denominador este quebrado y el primitivo, tendrémos $\frac{3\cdot(5+4)}{5\cdot9}$, y $\frac{(3+4)\cdot5}{5\cdot9}$, ó indicando la multiplicacion de cada parte $\frac{3\cdot5+3\cdot4}{5\cdot9}$, y $\frac{3\cdot5+4\cdot5}{5\cdot9}$.

{ En los cuales se advierte que tienen de comun en el numerador la parte $3\cdot5$ que es el producto de los dos términos del quebrado primitivo; y que el otro sumando en el primitivo, es el producto de su numerador por el número de unidades que se añadiéron; y en el trasformado es el producto del denominador, por el mismo número añadido; de donde resulta que si el quebrado es propio, como lo es el propuesto, el segundo será mayor que el primero, por consiguiente *cuando el quebrado sea propio, la operacion de añadir una misma cantidad á sus dos términos aumentará el quebrado.*

{ Si el propuesto fuese impropio, como el denominador será menor (25) que el numerador, la segunda parte del quebrado trasformado será menor que el primitivo; por lo cual *este seria menor*; que era L. Q. D. D.

{ *Esc.* Lo contrario se verificaria si en vez de añadir unidades á los dos términos, las quitásemos, es decir, que *cuando á los dos términos de un quebrado se les quita un mismo número, el quebrado disminuye si es propio y aumenta si es impropio.*

Sobre cuyo punto no nos detendrémos mas, porque en el apéndice 3.º nos volverémos á ocupar del mismo asunto con toda generalidad.}

109 La operacion de reducir los quebrados á un comun denominador los trasforma en otros que son de igual valor; pero cuyos términos son mayores, y por consiguiente los quebrados son mas complicados. Por esta causa esta operacion solo se ejecuta como auxiliar de otras; pe-

ro la operacion que se necesita hacer en todos los resultados donde haya quebrados, es *simplificarlos*: y se dice que se simplifica un quebrado, ó que se reduce á su mas simple espresion; *cuando se presenta otro quebrado de igual valor, y cuyos términos sean menores.*

Para conseguir esto, se dividen sus dos términos por 2 todas las veces que se pueda: luego por 3, y por los demas números primos; y se conocerá si un quebrado se puede simplificar, dividiendo por alguno de estos números, si se ve que ambos términos tienen las circunstancias que hemos espuesto (79). Así, si me propusiera simplificar el quebrado $\frac{96}{180}$, como lo primero que advierto es que sus dos términos se pueden dividir por 2, porque el numerador acaba en 6 que es guarismo par, y el denominador en 0; dividiendo el numerador 96 por 2 sale 48, y dividiendo el denominador por el mismo 2 sale 90, de modo que tengo el quebrado $\frac{48}{90}$ del mismo valor que el primero, pero mas sencillo. Este todavía se puede simplificar mas; porque como el numerador acaba en 8 que es guarismo par, y el denominador en 0, se pueden dividir ambos por 2, y ejecutándolo tengo el quebrado $\frac{24}{45}$, que es mas sencillo; ahora advierto que el numerador se puede dividir por 2 porque acaba en 4, que es guarismo par; mas como el denominador no es divisible por 2, porque no acaba en guarismo par ni en 0, no le puedo simplificar mas dividiéndole por 2; y veré si lo puedo hacer dividiendo sus dos términos por 3. Para esto, sumo los guarismos del numerador, y veo que 2 y 4 son 6, y como 6 se puede dividir por 3, infiero que tambien será divisible exactamente por 3 el 24; sumo los guarismos 4 y 5 del denominador, y como la suma 9 se puede dividir exactamente por 3, infiero que el denominador tambien es divisible por 3; y ejecutando la division de ambos términos del quebrado por 3, queda en $\frac{8}{15}$; ahora veo que el numerador no es divisible por 3 ni por 5 aunque lo es el denominador, y así no puedo simplificar mas el quebrado $\frac{96}{180}$, que queda reducido á $\frac{8}{15}$.

Otro ejemplo. Si tuviera el quebrado $\frac{45}{90}$, veria que por las reglas antecedentes no se podian dividir por 2 sus dos términos, y que sí se pueden dividir por 3, y ejecutándolo se convierte el quebrado $\frac{45}{90}$ en $\frac{15}{30}$; cuyos términos todavía se pueden dividir por 3; y ejecutada la division se reduce á $\frac{5}{10}$; los dos términos de este por acabar el numerador en 5 y el denominador en 0, son divisibles por 5; y ejecutada la division queda reducido el quebrado $\frac{45}{90}$ á $\frac{1}{2}$.

La regla mas directa para simplificar un quebrado, es averiguar el máximo comun divisor de sus dos términos, y dividirlos por él. De este modo estará uno seguro de que en efecto se ha reducido á su mas simple espresion; pues sino algunas veces daríamos por quebrados que no se pueden simplificar, y que por lo mismo se llaman *irreducibles*, algunos que sí; por ejemplo: este $\frac{851}{5661}$ no se puede simplificar dividiendo por ninguno de estos números, y caeríamos en un absurdo si dijésemos que por esto se hallaba reducido á su mas simple espresion; y así proponiéndonos hallar su máximo comun divisor (80), encontramos como aquí se ve que es 23; y que despues de dividido el numerador 851 por 23 se convierte en 37, como se halla debajo de 851 en la operacion, y el denominador 5681 se convierte en 247; de manera que

5681	851	575	276	23
	6)	1)	2)	12)
0575	276	023	046 000	
247	37	25	12	1

el quebrado reducido á su mas simple espresion es $\frac{37}{247}$. No obstante cuando no hai miras particulares con un quebrado, no se practica esta reduccion por el máximo comun divisor, y solo se ejecuta simplificando por el otro método hasta que buenamente se pueda.

Esc. Equivaliendo el quebrado $\frac{851}{5681}$, á $\frac{23 \cdot 37}{23 \cdot 247}$ resulta que si del numerador quitamos 37, y del denominador se quitase el 247 se reduciria el último á $\frac{22 \cdot 37}{22 \cdot 247}$ que es igual con el anterior, pues suprimiendo el 22 arriba y abajo, queda reducido al $\frac{37}{247}$ que es igual con el primitivo. Si del numerador del primitivo, hubiéramos quitado dos veces el numerador del reducido, y del denominador del primitivo quitásemos dos veces el denominador del reducido se convertiria en $\frac{21 \cdot 37}{21 \cdot 247}$, y así sucesivamente; luego en general *un quebrado que no está reducido á su mas sencilla espresion no se altera quitando á su numerador un número cualquiera de veces el numerador del reducido, con tal que á su denominador se le quite el mismo número de veces el denominador del reducido.*

Sumar, restar, multiplicar y dividir quebrados.

110 Con los quebrados se hacen las mismas operaciones que con los números enteros, y por eso vamos á manifestar ahora como se suman, restan, multiplican y parten.

Para sumar quebrados *se reducen primero á un mismo denominador si no le tienen; despues se suman los numeradores; á esta suma se le pone por denominador el denominador comun; y si este quebrado tiene el numerador igual ó mayor que el denominador, en cuyo caso se llama quebrado impropio, se divide dicho numerador por el denominador para sacar los enteros que contenga.*

1.^{er} ejemplo. Si quiero sumar $\frac{3}{4}$ con $\frac{5}{6}$, primero los reduciré á un

comun denominador por el método dicho (108), y los tendré convertidos en $\frac{18}{24}$, $\frac{20}{24}$; despues sumaré los numeradores 18 y 20, y á la suma 38 le pondré por denominador el 24, que es el denominador comun, y tengo la suma en el quebrado $\frac{38}{24}$; pero como el numerador es mayor que el denominador, este quebrado es impropio; y así para sacar los enteros que contiene, divido el numerador 38 por el denominador 24, y saco el cociente $1\frac{14}{24}$ que es un número misto, porque se compone de entero y quebrado. Siempre que en un resultado quede un quebrado, debe simplificarse lo mas que se pueda; y así, como veo que el $\frac{14}{24}$ se puede simplificar dividiendo sus dos términos por 2, lo ejecutaré y tendré $\frac{7}{12}$, por lo que diré que la suma de $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ es $1\frac{7}{12}$.

2.º ej. Si quiero sumar los quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$ los reduciré á un comun denominador, y tendré $\frac{72}{120}$, $\frac{60}{120}$, $\frac{80}{120}$, $\frac{30}{120}$; sumando los numeradores, y poniendo á la suma el denominador comun, tendré $\frac{242}{120}$, ó despues de sacados los enteros $2\frac{2}{120}$; y despues de simplificado el quebrado $\frac{2}{120}$, tendré por último $2\frac{1}{60}$.

La demostracion de esta regla es la siguiente: se reducen los quebrados á un comun denominador, porque para sumarlos deben ser homogeneos, y los quebrados no son homogeneos si no tienen un mismo denominador; porque una peseta ordinaria que equivale á un quinto de peso duro, no es homogenea con una peseta columnaria que equivale á un cuarto de peso duro; despues se suman los numeradores, porque en ellos está (103) el valor de los quebrados; y á esta suma se le pone por denominador el comun, para saber el nombre de aquellas partes. La simplificacion que despues se hace, es porque en todas las operaciones se deben presentar los resultados con la mayor sencillez.

111 En la suma en que entran quebrados pueden ocurrir tres casos: *sumar quebrados con quebrados*, que es lo que acabamos de ejecutar; *sumar un entero con un quebrado ó un quebrado con un entero*; y *sumar enteros y quebrados con enteros y quebrados, ó números mistos con números mistos.*

Para sumar un entero con un quebrado ó un quebrado con un entero, *se multiplica el entero por el denominador del quebrado, á esto se añade el numerador, y á todo se le pone por denominador el denominador del quebrado.*

La cuestion que conduce á sumar un entero con un quebrado se presenta cuando se quiere reducir un entero á la especie del quebrado que le acompaña; esto es, cuando se tiene un número misto tal como $3\frac{2}{5}$, y se quiere saber cuantos quintos compone el entero junto con el quebrado. Así, para reducir un entero á la especie del quebrado que le acompaña, *se multiplica el entero por el denominador del quebrado, á esto se añade el numerador, y á la suma se le pone por denominador el denominador del quebrado*, de manera que para reducir el entero á la especie del quebrado que le acompaña en $3\frac{2}{5}$, multiplicaré el 3 por el 5, al producto 15 le añadiré el numerador 2 del quebrado, y á la suma 17 le pondré por denominador el denominador 5 del quebrado, y tendré en $\frac{17}{5}$ ejecutada la operacion que se me pedia.

Practicando esta operacion con el número $15\frac{5}{8}$, sacaré $\frac{125}{8}$.

112 Para sumar números mistos con números mistos, *se suman los quebrados con los quebrados, y los enteros con los enteros, cuidando de sumar con estos los que resulten de la suma de los quebrados.*

1.er ejemplo. Si quiero sumar $23\frac{2}{5}$ con $12\frac{4}{5}$ y con $25\frac{3}{5}$, los pondré unos debajo de otros, de modo que se correspondan los enteros debajo de los enteros, y los quebrados debajo de los quebrados, en esta forma:

Como aquí los quebrados tienen un mismo denominador, para sumarlos no se necesita mas que sumar los numeradores, y poner á esta suma el denominador comun; con lo cual saco de la suma de los quebrados $\frac{9}{5}$; pero en $\frac{9}{5}$ hai un entero y $\frac{4}{5}$, borro el $\frac{9}{5}$ y pongo debajo el $\frac{4}{5}$; el entero 1 para que no se me olvide, le coloco sobre los enteros separándole con una media luna, para que se conozca que ha provenido de la suma de los quebrados; sumo despues los enteros y saco 61, por lo que la suma pedida es $61\frac{4}{5}$.

$$\begin{array}{rl} (1 & \\ 23 & \frac{2}{5} \\ 12 & \frac{4}{5} \\ 25 & \frac{3}{5} \\ \hline 61 & \frac{9}{5} \\ & \frac{4}{5} \end{array}$$

2.º ej. Si quisiera sumar los números $27\frac{3}{5}$, $6\frac{2}{3}$ y $128\frac{1}{4}$, primero tendria que reducir los quebrados á un comun denominador, porque no le tienen, y sacaria por último resultado $162\frac{31}{60}$.

113 Para restar quebrados *se reducen á un comun denominador si no le tienen; despues se restan los numeradores; y á la resta se le pone por denominador el denominador comun, y se simplifica luego si se puede.*

1.er ejemplo. Quiero restar $\frac{2}{7}$ de $\frac{4}{5}$; para esto los reduciré á un comun denominador (108), y se convertirán en $\frac{10}{35}$ y $\frac{28}{35}$, y restando el 10 numerador del $\frac{10}{35}$ correspondiente al sustraendo $\frac{2}{7}$, del 28 numerador del $\frac{28}{35}$ correspondiente al minuendo $\frac{4}{5}$, y poniendo á la diferencia 18 el denominador comun 35, tendré la resta $\frac{18}{35}$ que no se puede simplificar.

2.º Si quisiera restar $\frac{5}{9}$ de $\frac{12}{15}$, sacaria por resta, despues de simplificada, $\frac{11}{45}$.

Hemos dicho que se han de reducir á un comun denominador, porque en la resta los datos deben ser homogeneos; despues se han de restar los numeradores, porque en ellos está el valor de los quebrados y finalmente se le ha de poner á la resta por denominador el denominador comun, porque es el que da el nombre al quebrado.

114 Cuando en la operacion de restar entran quebrados, pueden ocurrir tres casos: *restar un quebrado de otro*, que acabamos de manifestar como se ejecuta, *restar un quebrado de un entero*, y *restar un número misto de otro número misto.*

Para restar un quebrado de un entero, *se le quita al entero una unidad, al lado de este entero, despues de rebajada la unidad, se pone un quebrado, cuyo numerador es igual á la diferencia que hai entre el denominador y el numerador del quebrado dado, y el denominador es el mismo que el del quebrado que se da*, con lo que está hecha la resta.

1.er ejemplo. Si quiero restar de 8 el quebrado $\frac{3}{5}$, quitando una unidad al 8 se convertirá en 7; al lado de este 7 pongo un quebrado, cuyo numerador es 2 diferencia que hai entre 3 y 5, numerador y denominador del quebrado propuesto, y cuyo denominador es 5, el mismo que el del quebrado dado, y así la resta será $7\frac{2}{5}$.

2.º ej. Si quisiera restar de 23 el quebrado $\frac{15}{38}$, la resta seria $22\frac{23}{38}$.

Esta regla está fundada en que para restar un quebrado de un entero, solo tendré necesidad de tomar una unidad del entero: esta la pondrémos en forma de quebrado (103), cuyo denominador sea el mismo que el del quebrado propuesto; luego la operacion está reducida á restar de la unidad, puesta bajo esta forma, el quebrado dado; y como el numerador de la unidad puesta en forma de quebrado es igual al denominador, para efectuar la resta se debe restar del numerador del primero que es igual con el denominador del primitivo, el numerador de este, y á esta resta le deberémos poner el mismo denominador. Así, en el primer ejemplo para restar de 8 el quebrado $\frac{3}{5}$, tomo del 8 una unidad y la pongo en forma de quebrado, cuyo denominador sea 5, y tendré que el minuendo será $7+\frac{5}{5}$, de lo cual quitando $\frac{3}{5}$, quedan $7+\frac{2}{5}$.

Esta regla la suelen dar los autores diciendo: que *se multiplique el entero por el denominador del quebrado, de esto se quite el numerador, y á lo que resulte se le ponga por denominador el denominador del quebrado*; pero como en este caso se deberán aun sacar los enteros que contenga este resultado, es mucho mas sencilla la regla que hemos dado.

115 Para restar un número misto de otro número misto, *se resta el quebrado del quebrado, y el entero del entero*; pero puede suceder que despues de reducidos á un mismo denominador, si no le tienen, el quebrado del sustraendo sea mayor que el del minuendo, y para poder restar se necesita tomar una unidad del minuendo, la cual se reduce á la especie del quebrado que le acompaña, lo que se consigue sumando el numerador del quebrado con el denominador, y poniendo á esto por denominador el comun; de este quebrado que será impropio se resta el del sustraendo, y luego al ejecutar la resta con los enteros, se debe advertir que al minuendo se le ha quitado una unidad.

1.er ejemplo. Si quisiera restar $8\frac{3}{7}$ de $14\frac{5}{7}$, los colocaria de este modo:

Y diria, porque los quebrados tienen un mismo denominador: de $\frac{3}{7}$ á $\frac{5}{7}$ van $\frac{2}{7}$; de 8 enteros á 14 enteros van 6 enteros, y la resta es $6\frac{2}{7}$.

$$\begin{array}{r} 14\frac{5}{7} \\ 8\frac{3}{7} \\ \hline 6\frac{2}{7} \end{array}$$

2.º ej. Si quisiera restar $23\frac{2}{3}$ de $34\frac{1}{2}$, primero tendria que reducir los quebrados á un comun denominador, y se convertirian en $\frac{4}{6}$ y $\frac{3}{6}$; pero como el $\frac{4}{6}$ del sustraendo es mayor que el quebrado $\frac{3}{6}$ del minuendo, despues de colocados como aquí se ve: Advierto que debo tomar una unidad del minuendo 34, y para reducirla á sestos digo: 6 y 3 son 9, de $\frac{9}{6}$ quitando $\frac{4}{6}$ quedan $\frac{5}{6}$, y restando despues los enteros, quedará ejecutada la operacion, y la resta será $10\frac{5}{6}$.

$$\begin{array}{r}
34\tfrac{1}{2} \,..\, \tfrac{3}{6} \\
23\tfrac{2}{3} \,..\, \tfrac{4}{6} \\
\hline
10 + \tfrac{5}{6}
\end{array}$$

3.^{er} ej. Si restara $27\frac{7}{8}$ de $49\frac{3}{5}$, la resta seria $21\frac{29}{40}$.

116 Para multiplicar un quebrado por otro *se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.*

1.^{er} ejemplo. Si quisiera multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, diria: 2 por 4 son 8, 3 por 5 son 15; poniendo por numerador el producto de los numeradores, y por denominador el de los denominadores, tendré en $\frac{8}{15}$ el producto pedido.

2.^{o} ej. Si quiero multiplicar $\frac{7}{9}$ por $\frac{12}{47}$, el producto será $\frac{84}{423}=\frac{28}{141}$.

Esta regla está fundada, contrayéndonos al primer ejemplo, en que si tuviera que multiplicar el $\frac{2}{3}$ por el numerador 4 del quebrado $\frac{4}{5}$, que es el multiplicador, estaba reducida la operacion á hacer cuatro veces mayor al quebrado; lo que se consigue (105) multiplicando su numerador por 4; luego en este caso el producto seria $\frac{8}{3}$; pero como no teníamos que multiplicar por 4, sino por $\frac{4}{5}$, que es cinco veces menor que 4, resulta que este producto que hemos sacado es cinco veces mayor que el verdadero, y por tanto, para encontrar este le deberémos hacer cinco veces menor; y como esto se consigue (106) multiplicando su denominador por 5, resulta ejecutándolo, que $\frac{8}{15}$ es el producto verdadero, y que tenemos demostrada la regla.

Aquí observarémos que *si el multiplicador fuese un quebrado propio, el producto será menor que el multiplicando*; porque su numerador se deberá multiplicar por un número menor que aquel por que se debe multiplicar su denominador. *Si el multiplicador fuese la unidad en forma de quebrado, el producto seria igual con el multiplicando* (61); *y si fuese un quebrado impropio, el producto será mayor que el multiplicando*; porque su numerador se multiplicará por un número mayor que aquel por que se multiplique su denominador.

Cuando entran quebrados en una multiplicacion, pueden ocurrir cinco casos: *multiplicar un quebrado por otro*, que es lo que acabamos de esplicar; *multiplicar un entero por un quebrado ó un quebrado por un entero*; *multiplicar un quebrado por un número misto*; *multiplicar un entero por un número misto*; y finalmente *multiplicar un número misto por otro número misto.*

117 Para multiplicar un entero por un quebrado ó un quebrado por un entero, *se multiplica el entero por el numerador del quebrado, y al producto se le pone por denominador el denominador del quebrado.*

1.^{er} ejemplo. Si quiero multiplicar 5 por $\frac{3}{7}$, multiplicaré el 5 por 3, y al producto 15 le pondré por denominador el denominador 7 del quebrado, y tendré que el producto será $\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$.

2.^{o} ej. Si quisiera multiplicar $\frac{5}{11}$ por 7, tendria el producto $\frac{35}{11}$, que sacando los enteros se convierte en $3\frac{2}{11}$.

Esta regla está fundada en que á todo entero se le puede poner la unidad por denominador, lo que de ninguna manera le altera; porque todo número dividido por la unidad (72, 4.^{o}) es el mismo número, con lo cual está reducida la operacion á multiplicar un quebrado por otro; y como de la multiplicacion del 1, denominador del entero, por el denominador del quebrado, resulta el denominador de este, tenemos demostrada la regla. Así, en el primer ejemplo, al 5 se le puede dar esta forma $\frac{5}{1}$; para multiplicarle por $\frac{3}{7}$, dirémos: 5 por 3 son 15, que es el numerador del producto; 1 por 7 es 7, que es su denominador, igual con el del quebrado primitivo.

118 Para multiplicar un quebrado por un número misto, *se reduce en el número misto el entero á la especie del quebrado que le acompaña y despues se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.* V. g. si tuviera que multiplicar $\frac{3}{8}$ por $4\frac{3}{5}$, reduciria el $4\frac{3}{5}$ á $\frac{23}{5}$ (§ 111), y despues le multiplicaria por $\frac{3}{8}$ diciendo: 3 por 23 son 69, que será el numerador del producto; 5 por 8 son 40, que será el denominador; con lo que tendré el producto espresado por $\frac{69}{40}=1\frac{29}{40}$.

Otro ejemplo. Si quisiera multiplicar $\frac{4}{13}$ por $7\frac{5}{9}$, iria ejecutando las operaciones dichas como aquí se indica:

$$\frac{4}{13}\times7\frac{5}{9}=\frac{4}{13}\times\frac{63+5}{9}=\frac{4}{13}\times\frac{68}{9}=\frac{4\times68}{13\times9}=\frac{272}{117}=2\frac{38}{117}.$$

119 Para multiplicar un entero por un número misto, *se reduce el entero de este á la especie del quebrado que le acompaña; despues se multiplica el numerador del quebrado por el entero, y á esto se le pondrá por denominador el denominador del quebrado.*

Por ejemplo: si quisiera multiplicar 5 por $2\frac{3}{4}$ reduciria el $2\frac{3}{4}$ á $\frac{11}{4}$; despues multiplicaria el 5 por 11, y al producto 55 le pondria por denominador el 4; de manera que el producto será $\frac{55}{4}=13\frac{3}{4}$.

120 Para multiplicar un numero misto por otro número misto, *se reduce el entero á la especie del quebrado que le acompaña en cada uno de los factores, y despues se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.*

Por ejemplo: si quiero multiplicar $4\frac{2}{3}$ por $5\frac{3}{4}$, reduciré en ambos factores el entero á la especie del quebrado que le acompaña, y tendré que multiplicar $\frac{14}{3}$ por $\frac{23}{4}$, que multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador, tendré $\frac{322}{12}$; y sacando los enteros será $26\frac{10}{12}$, ó simplificando el quebrado será $26\frac{5}{6}$.

{ *Esc.* Cuando los quebrados que acompañan á los enteros son sencillos, la multiplicacion de los números mistos se puede hacer sin necesidad de reducir los enteros á la especie de sus respectivos quebrados, del modo siguiente: supongamos que se trata de averiguar cuanto valen $86\frac{1}{2}$ varas de paño á $38\frac{1}{4}$ rs. Se colocan los números el uno debajo del otro, se multiplica el entero 86 por el entero 38, y ántes de sumar los dos productos parciales se multiplica el 86 por $\frac{1}{4}$, ó lo que es lo mismo se toma la cuarta parte de 86 que es 21 y $\frac{2}{4}$, que equivale á $\frac{1}{2}$, y se coloca debajo de los productos parciales de modo que se correspondan, quedando el quebrado á la derecha; luego se multiplica el 38 por $\frac{1}{2}$ ó se toma su mitad que es 19 y se pone tambien debajo de modo que se corresponda; por último se multiplica el quebrado $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{4}$ lo que da $\frac{1}{8}$, que se pone debajo del $\frac{1}{2}$; despues se suma todo y tenemos que el producto verdadero ó total es $3308\frac{5}{8}$ de real.

$$\begin{array}{rl}
86\frac{1}{2} & \\
38\frac{1}{4} & \\
\hline
688 & \\
258 & \\
21\ldots\frac{1}{2} & = 17 \text{ mrs.} \\
19\ldots\frac{1}{8} & = 4\frac{1}{4} \\
\hline
3308\ldots\frac{5}{8}\text{rs.} & = 21\frac{1}{4}\text{mrs.}
\end{array}$$

En la práctica se espresan desde luego en maravedíses los quebrados que resultan; y así en vez de $\frac{1}{2}$ se pueden poner desde luego 17 mrs. y en vez del $\frac{1}{8}$ el $4\frac{2}{8}$ ó $4\frac{1}{4}$ mrs. y hubiera resultado sumando luego los $21\frac{1}{4}$ mrs. }

121 Puesto que ya sabemos multiplicar un quebrado por un entero, vamos á resolver una cuestion que suele ocurrir en la práctica: y es la de reducir un quebrado á otro que tenga un denominador dado. Sea, por ejemplo, el quebrado $\frac{3}{5}$, y supongamos que se quiera reducir á otro cuyo denominador sea 7; en este caso, como toda cantidad se puede considerar dividida por la unidad, podrémos poner el $\frac{3}{5}$ bajo este aspecto $\frac{\frac{3}{5}}{1}$; ahora considerando como numerador al $\frac{3}{5}$, y como denominador al 1, podrémos multiplicar los dos términos de esta espresion por 7, sin que se altere su valor y se reducirá á $\frac{\frac{3}{5}\times 7}{1\times 7}=\frac{\frac{21}{5}}{7}=\frac{4\frac{1}{5}}{7}$ (*).

En el cual si se desprecia el $\frac{1}{5}$ del numerador, se tendrá $\frac{4}{7}$ que será el valor del quebrado pedido; y este valor se dice que es aproximado por defecto; porque para ser el verdadero le falta algo, que es el $\frac{1}{5}$ del numerador que hemos despreciado. Cuando resulta un quebrado en el numerador que es igual ó mayor que la mitad de la unidad, en vez de él se le añade una unidad al entero, y se dice que está aproximado por esceso; y cuando no resulta quebrado es señal de que está reducido exactamente, lo cual ocurre cuando el denominador que se le quiere dar es múltiplo del que ya tenia el quebrado.

(*) *Este resultado manifiesta que* para convertir un quebrado en otro que tenga un denominador dado, se ha de multiplicar el numerador del quebrado por el denominador que se le quiere dar; el producto se ha de partir por el denominador del quebrado; y al cociente se le pondrá por denominador el que se le quiere dar.

122 Para dividir un quebrado por otro, *se trastornan los dos términos del quebrado divisor, y se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador, ó se multiplican desde luego en cruz*; ó lo que es mejor: *se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor; y este producto será el numerador del cociente; despues se multiplica el denominador del dividendo por el numerador del divisor, y este producto será el denominador del cociente.*

1.^{er} ejemplo. Si quiero dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$; multiplicaré el numerador 3 del dividendo por el denominador 5 del divisor, y tendré en el producto 15 el numerador del cociente; despues multiplicaré el denominador 4 del dividendo por el numerador 2 del divisor, y en el producto 8 tendré el denominador del cociente, el cual será $\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$.

2.º ej. Si quisiera dividir $\frac{3}{7}$ por $\frac{2}{9}$, sacaria por cociente $\frac{27}{14}=1\frac{13}{14}$.

Para dar la demostracion de esta regla nos contraerémos al primer ejemplo; y observarémos que si solo tuviésemos que dividir por 2, numerador del divisor $\frac{2}{5}$, estaba reducida la operacion á hacer dos veces menor al quebrado, lo que se consigue (106) multiplicando su denominador por 2 de manera que $\frac{3}{8}$ seria el cociente; pero nosotros no teníamos que dividir por 2, sino por $\frac{2}{5}$ que es cinco veces menor que 2; luego el cociente hallado dividiendo por 2, es cinco veces menor que el verdadero; y así para obtener este debemos hacer aquel cinco veces mayor, lo cual se consigue (105) multiplicando su numerador por 5; de manera que ejecutándolo, tendré por cociente verdadero $\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$.

{ Esta regla la podríamos deducir analíticamente con bastante sencillez y claridad, observando que como en la division los términos deben ser homogeneos, para ejecutar esta operacion deberémos hacer que lo sean los quebrados, reduciéndolos á un comun denominador; de manera que yendo indicando la operacion tendrémos, $\frac{3}{4}:\frac{2}{5}=\frac{3\times 5}{4\times 5}:\frac{2\times 4}{4\times 5}$.

{ Ahora, como un cociente no se altera, aunque se multipliquen ó partan el dividendo y divisor por un mismo número, resulta que podrémos multiplicar los dos términos de la division indicada arriba por el denominador 4×5; y como esto se consigue suprimiendo los denominadores (106 cor.) se tendrá $3\times 5:2\times 4$, ó indicando la division por medio de la raya será $\frac{3\times 5}{2\times 4}$.

Resultado que manifiesta que se ha de ejecutar la multiplicacion en cruz para obtener directamente el cociente. }

En esta operacion observamos resultados opuestos á los de la multiplicacion; pues aquí *si el divisor es quebrado propio, el cociente será mayor que el dividendo; si es la unidad en forma de quebrado será igual; y si es impropio resultará menor.* Cuando el divisor es la unidad en forma de quebrado, debe venir por cociente el dividendo, porque toda cantidad dividida por la unidad es igual á la misma cantidad. Ahora, como en todo quebrado propio el numerador es menor que el denominador, cuando el divisor sea un quebrado propio se multiplicará el numerador del dividendo por un número mayor, que por el que se multiplica el denominador; por lo que el cociente será mayor que el dividendo. Si el divisor es quebrado impropio se multiplica el numerador del dividendo por un número menor que aquel por que se multiplica el denominador, por lo que el cociente será menor que el dividendo.

Los casos que pueden ocurrir en la division donde entran quebrados, son cuatro: *dividir un quebrado por otro quebrado*, que es el que acabamos de considerar; *dividir un entero por un quebrado*; *dividir un quebrado por un entero*; y finalmente *dividir un número misto por otro número misto.*

123 Para dividir un entero por un quebrado, *se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y al producto se le pone por denominador el numerador del quebrado.*

1.er ejemplo. Si quiero dividir 5 por $\frac{2}{3}$, multiplicaré el entero 5 por el denominador 3 del quebrado, y tendré 15; pondré á este producto por denominador el numerador 2 del quebrado, y el cociente será $\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$.

2.º ej. Si dividiera 15 por $\frac{3}{7}$, sacaria el cociente 35.

Esto está fundado en que al entero 5 le podemos poner la unidad por denominador, y quedará reducida la operacion á dividir $\frac{5}{1}$ por $\frac{2}{3}$; y como por la regla general, de multiplicar por la unidad resulta la misma cantidad, no hacemos esta multiplicacion.

124 Para dividir un quebrado por un entero *se multiplica el denominador del quebrado por el entero, y con esto queda hecha la division.*

1.er ejemplo. Si quiero dividir $\frac{3}{4}$ por 6, multiplicaré el denominador 4 del quebrado por el entero 6, y tendré por cociente $\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$.

2.º ej. El cociente de dividir $\frac{10}{13}$ por 5, es despues de simplificado $\frac{2}{13}$. La razon de este caso es la misma que en el anterior; y se puede establecer por regla que *cuando el numerador del quebrado se puede dividir exactamente por el entero* (105) *se practique esto*, y queda hecha la division por el entero sin llegar al denominador.

125 Para dividir un número misto por otro misto, *se reduce cada entero á la especie del quebrado que le acompaña, y despues se ejecuta la division como la de un quebrado por otro* (122).

1.er ejemplo. Quiero dividir $8\frac{2}{5}$ por $3\frac{2}{7}$: primero reduciré cada entero á la especie del quebrado que le acompaña, y tendré que dividir $\frac{42}{5}$ por $\frac{23}{7}$, que para ejecutarlo multiplicaré el numerador 42 del dividendo por el denominador 7 del divisor, y tendré 294 que será el numerador del cociente: multiplicaré despues el denominador 5 del dividendo por él numerador 23 del divisor, y tendré en 115 el denominador del cociente; por lo que este será $\frac{294}{115}=2\frac{64}{115}$.

2.º ej. Si quiero dividir $47\frac{2}{9}$ por $6\frac{3}{5}$, ejecutando lo dicho ántes, sacaré por cociente el número $7\frac{46}{297}$.

126 Por no complicar los casos con demasiadas reglillas, hemos dicho que son cuatro los de la division, pero en realidad son ocho; pues ademas puede ocurrir el *dividir un entero por un número misto*; *un número misto por un entero*; *un quebrado por un número misto*; y *un número misto por un quebrado*; mas para todos estos casos darémos esta regla: *redúzcase en el número misto el entero á la especie del quebrado que le acompaña, y quedarán reducidos el primero de estos casos á la division de un entero por un quebrado; el segundo á la de un quebrado por un entero; y los otros dos á la de un quebrado por otro quebrado.*

1.er ejemplo. Si quisiera dividir 9 por $5\frac{3}{4}$, reduciria el $5\frac{3}{4}$ á $\frac{23}{4}$, y despues dividiria por él el 9 por las reglas dadas (123), lo que me daria

$$\frac{9}{5\frac{3}{4}}=\frac{9}{\frac{23}{4}}=\frac{36}{23}=1\frac{13}{23}.$$

2.º ej. Si quisiera dividir $6\frac{2}{3}$ por 5, reduciria el $6\frac{2}{3}$ á $\frac{20}{3}$, y dividiria por lo dicho (124) en esta forma: $\dfrac{6\frac{2}{3}}{5}=\dfrac{\frac{20}{3}}{5}=\frac{20}{15}=1\frac{5}{15}=1\frac{1}{3}$.

3.er ej. Si quisiera dividir $\frac{3}{7}$ por $2\frac{4}{5}$, reduciria este á $\frac{14}{5}$ y ejecutaria la operacion (122) de este modo: $\dfrac{\frac{3}{7}}{2\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{14}{5}}=\dfrac{3\times5}{7\times14}=\frac{15}{98}$.

4.º Finalmente, si quisiera dividir $5\frac{3}{7}$ por $\frac{4}{9}$, reduciria el $5\frac{3}{7}$ á $\frac{38}{7}$, y ejecutaria la operacion (122) como aquí se presenta:

$$\frac{5\frac{3}{7}}{\frac{4}{9}}=\frac{\frac{38}{7}}{\frac{4}{9}}=\frac{38\times9}{4\times7}=\frac{342}{28}=12\frac{6}{28}=12\frac{3}{14}.$$

127 En los ejemplos que acabamos de manifestar y en el espuesto (118), hemos preferido el ir indicando las operaciones, para que los principiantes se vayan acostumbrando á dar trasformaciones; y como es mui importante el que adquieran este uso, les vamos á poner aquí una espresion bastante complicada, para que la vayan reduciendo á una sola. Sea por ejemplo la espresion (A):

(A)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{2+\frac{3}{4}}{3+\cfrac{4}{5+\frac{2}{3}}}}{\frac{5}{9}}}{\cfrac{5+\frac{4}{7}}{2+\cfrac{2}{2+\frac{3}{4}}}}$$

La raya mas larga de todas nos indica que el valor de todo lo que hai encima de ella, se ha de dividir por todo lo que hai debajo.

Ahora, tanto arriba como abajo hai todavía otras rayas que indican divisiones; y así es necesario ver lo que nos señalan. Empezando por arriba, en el dividendo observarémos cual es la raya mayor, y todo lo que hai sobre ella que es (B), se ha de dividir por el $\frac{5}{9}$ que tiene debajo. Ahora, aun tenemos en este dividendo varias divisiones indicadas, y observando cual es la raya mayor, vemos que sobre ella está el $2+\frac{3}{4}$; y debajo la espresion $3+\cfrac{4}{5+\frac{2}{3}}$; por consiguiente debemos

$$\text{(B)}\quad \cfrac{2+\frac{3}{4}}{3+\cfrac{4}{5+\frac{2}{3}}}$$

ejecutar ántes esta division, para lo cual se reducirá el dividendo $2+\frac{3}{4}$ á $\frac{11}{4}$ (§ 111); y como en el divisor hai un número misto, en que el denominador del quebrado es otro número misto, se reducirá á un quebrado solo, y tendrémos $5+\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$, con lo cual $3+\cfrac{4}{5+\frac{2}{3}}=3+\cfrac{4}{\frac{17}{3}}$; y como haciendo la division de 4 por $\frac{17}{3}$ tenemos (§ 123) $\frac{12}{17}$, el $3+\cfrac{4}{5+\frac{2}{3}}$ se nos convertirá en $3+\frac{12}{17}=\frac{3\times17+12}{17}=\frac{63}{17}$. Luego la espresion (B) la tenemos reducida ya á $\cfrac{\frac{11}{4}}{\frac{63}{17}}$, que ejecutando la division (122) se convierte en $\frac{11\times17}{4\times63}=\frac{187}{252}$ (C); luego todo el numerador ó dividendo de la espresion (A), que es todo lo que se halla sobre la raya mayor, lo tendrémos reducido á $\cfrac{\frac{187}{252}}{\frac{5}{9}}=\frac{187\times9}{252\times5}=\frac{1683}{1260}=\frac{561}{420}=\frac{187}{140}$ (D).

Pasemos ahora á la espresion (E) que sirve de divisor, que como es mui semejante á la espresion (B), la reducirémos por el mismo método, como aquí irémos indicando del modo siguiente:

$$\text{(E)}\quad \cfrac{5+\frac{4}{7}}{2+\cfrac{2}{2+\frac{3}{4}}}$$

$$\cfrac{5+\frac{4}{7}}{2+\cfrac{2}{2+\frac{3}{4}}}=\cfrac{\frac{5\times7+4}{7}}{2+\cfrac{2}{\frac{2\times4+3}{4}}}=\cfrac{\frac{39}{7}}{2+\cfrac{2}{\frac{11}{4}}}=\cfrac{\frac{39}{7}}{2+\frac{8}{11}}=\cfrac{\frac{39}{7}}{\frac{2\times11+8}{11}}=\cfrac{\frac{39}{7}}{\frac{30}{11}}=$$

$$\frac{39\times11}{7\times30}=\frac{429}{210}=(\S\ 109)\ \frac{143}{70}.$$

Luego el denominador ó el divisor total de la espresion (A), habiéndosenos convertido en $\frac{143}{70}$, y el numerador en $\frac{187}{140}$, dicha espresion (A) la tendrémos reducida á

$$\cfrac{\frac{187}{140}}{\frac{143}{70}}=(\S\ 122)\frac{187\times70}{140\times143}=(\S\ 79)\frac{187\times70}{2\times70\times143}=\frac{187}{2\times143}=\frac{187}{286}=(\S\ 79)\frac{17}{26};$$

que es el valor de dicha espresion.

De la valuacion de los quebrados, y de los quebrados continuos.

128 Se dice que se *valúa* un quebrado cuando se espresa en unidades de especie inferior á aquella á que se refiere el quebrado. Por ejemplo: se sabe que $\frac{1}{3}$ de vara no se puede espresar en varas, porque no hai ninguna vara; pero como la vara tiene 3 piés, 1 pié es tambien la tercera parte de la vara, y por lo mismo (ax. 5.º) $\frac{1}{3}$ de vara $=$ 1 pié; luego hemos espresado el valor de $\frac{1}{3}$ de vara en piés, que es la unidad de especie inferior á la vara.

Para valuar un quebrado: *se multiplica el numerador por el número que espresa las veces que la unidad, en que se quiere valuar el quebrado, está contenida en aquella á que se refiere el quebrado, y esto se parte por el denominador; si de la division resulta un número misto y hai todavia unidades de especie inferior, se hace con el quebrado del número misto lo mismo, y así se continúa hasta que no haya mas unidad de especie inferior; en cuyo caso si queda todavía quebrado, se desprecia si el numerador no llega á ser la mitad del denominador; y se añade en vez del quebrado una unidad á las unidades anteriores, si el numerador llega ó pasa de la mitad del denominador.*

1.er ejemplo. Si quiero saber cuanto valen $\frac{5}{7}$ de doblon, multiplicaré el numerador 5 por 4 que son los pesos que tiene el doblon, y dividiré el producto 20 por 7, lo que da 2 pesos y $\frac{6}{7}$ de peso. Para averiguar los reales que hai en $\frac{6}{7}$ de peso, multiplicaré el numerador 6 por 15 que son los reales que contiene un peso, y dividiré por 7 el producto 90, y tendré 12 reales y $\frac{6}{7}$ de real. Para averiguar los maravedíses que hai en $\frac{6}{7}$ de real, multiplicaré el numerador 6 por 34 que son los maravedíses que tiene un real, y el producto 204 le dividiré por 7, y tendré que hai 29 maravedíses y $\frac{1}{7}$ de maravedí; que como no hai unidad inferior al maravedí, y el numerador 1 no es la mitad del denominador 7, le desprecio y tengo que los $\frac{5}{7}$ de doblon valen 2 pesos, 12 reales y 29 maravedíses.

2.º ej. Si quisiera hallar cuanto valian los $\frac{3}{5}$ de 27 doblones, como aquí se toman por unidad los 27 doblones, que es á lo que se refiere el quebrado, para hallar los doblones que hai, multiplicaré el numerador 3 por 27, dividiré por 5 el producto 81, y sacaré 16 doblones y $\frac{1}{5}$ de doblon. Para averiguar cuantos pesos hai en $\frac{1}{5}$ de doblon, multiplicaré el numerador 1 por 4, que son los pesos que componen el doblon; y como no puedo dividir el producto 4 por 5, digo que no hai ningun peso, y que solo hai $\frac{4}{5}$ de peso. Para averiguar los reales que hai en $\frac{4}{5}$ de peso, multiplicaré el numerador 4 por 15 que son los reales que tiene un peso, y el producto 60 le dividiré por 5, y sacaré que hai 12 reales; y como no queda resta infiero que $\frac{3}{5}$ de 27 doblones equivalen á 16 doblones, o pesos y 12 reales.

3.er ej. Si quisiera averiguar cuanto valian los $\frac{5}{6}$ de 1 quintal, ejecutando las operaciones correspondientes, hallaria que valian exactamente 3 arrobas, 8 libras, 5 onzas, 5 adarmes y 1 tomin.

Esta regla está fundada en que un quebrado es lo mismo que una division indicada (103), y por lo mismo no pudiéndose ejecutar la division del dividendo se reduce á su especie inmediata inferior, se ejecuta la division, y si sale un cociente exacto quedará valuado; si sale un número misto, se vuelve á valuar este quebrado hasta que se llegue á la unidad de especie ínfima; en cuyo caso si aun resulta un quebrado, hemos dicho que se desprecie si su numerador es menor que la mitad del denominador, ó se añada una unidad si llega á la mitad ó pasa. Esto se funda en que al matemático le toca decir lo que á cada uno le pertenece; le sale, por ejemplo, al fin de un resultado, como en el primer caso, que uno debe recibir 29 maravedíses y $\frac{1}{7}$; como la última moneda que hai es el maravedí, no se le puede dar la séptima parte; y así ó se le ha de dar por este séptimo un maravedí, en cuyo caso recibiria demas $\frac{6}{7}$ de maravedí, ó él ha de perder $\frac{1}{7}$ de maravedí; como de despreciar un séptimo solo resulta este perjuicio, y de darle en vez de él un maravedí, resulta que se le paga $\frac{6}{7}$ mas, siempre se procura hacer que resulte el menor perjuicio, lo que se consigue en virtud de lo que acabamos de decir (*).

129 En muchas ocasiones sucede que la unidad á que se refiere el quebrado es otro quebrado, y entónces vienen seguidos dos quebrados separados con la preposicion *de*, que forman un *quebrado de quebrado*; y lo primero que se debe hacer, es reducirlos á un quebrado solo, multiplicando los numeradores entre sí, y despues los denominadores; luego, se valúa este quebrado por las reglas dadas ántes (128).

1.er ejemplo. Quiero averiguar cuanto valen los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de vara: primero reduciré los dos quebrados á uno solo, diciendo: 2 por 4 son 8; 3 por 5 son 15; con lo que tengo ya reducida la espresion á $\frac{8}{15}$ de vara; averiguando ahora el valor de $\frac{8}{15}$ de vara, encuentro que es 1 pié, 7 pulgadas, 2 lineas y $\frac{2}{5}$ de linea.

2.º ej. $\frac{3}{8}$ de $\frac{16}{21}$ de quintal valen: 1 arroba, tres libras, 9 onzas y 2 $\frac{2}{7}$ adarmes.

La razon de esta práctica consiste en que tomar, por ejemplo, los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, es lo mismo que multiplicar el $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, porque si tuviera que tomar solo la 3.ª parte de $\frac{4}{5}$ estaria reducida la operacion á hacer tres veces menor el $\frac{4}{5}$, lo que se consigue multiplicando por 3 su denominador, y tendria $\frac{4}{15}$; pero como no tenia que tomar la tercera parte, sino dos veces la tercera parte, despues de multiplicado el denominador por 5,

(*) *En las tesorerías públicas no se atiende á esto: los picos quedan á beneficio de la caja, por las equivocaciones y quiebras de moneda que puede tener.*

deberé tomar dos veces esta espresion $\frac{4}{15}$, lo que se consigue multiplicando por 2 el numerador; y tendré que $\frac{8}{15}$ espresará las dos terceras partes de $\frac{4}{5}$.

Ahora, si fuese $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{9}$, reducidos los dos primeros á $\frac{8}{15}$, tendríamos que esto seria lo mismo que $\frac{8}{15}$ de $\frac{2}{9}$, que por lo dicho ántes será $\frac{16}{135}$.

Cuando se da para valuar un quebrado de quebrado, ó para reducirle á quebrado comun, conviene indicar la multiplicacion de los numeradores y denominadores; y si alguno se puede descomponer en factores se ejecuta para hacer la simplificacion que se pueda, sin necesidad de practicar la multiplicacion; por ejemplo si quisiera averiguar cuanto valian los $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{2}{5}$ de una arroba, indicaria la operacion, descomponiendo los términos en factores, como aquí se presenta:

$$\tfrac{2}{3} \text{ de } \tfrac{5}{6} \text{ de } \tfrac{2}{5} \text{ de arroba} = \frac{2 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{2}}{3 \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{5}} \text{ de arroba} = \frac{2}{3 \cdot 3} \text{de arroba} = \frac{2 \cdot 25}{9} \text{ de}$$

libra $= \frac{50}{9}$ de libra $= 5$ libras $+ \frac{5}{9}$ de libra; y valuando el quebrado $\frac{5}{9}$ de libra, sacaré 8 onzas, 14 adarmes y $\frac{2}{9}$ de adarme.

Del mismo modo, si quisiera averiguar cuanto valian los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{2}$ de 10 doblones, indicaria la operacion como aquí se presenta:

$$\tfrac{2}{3} \text{ de } \tfrac{4}{5} \text{ de } \tfrac{5}{6} \text{ de } \tfrac{1}{2} \text{ de 10 doblones} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \;\; \cancel{5} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{2}} \text{de doblon} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 3}$$

de doblon $=$ 2 doblones, o pesos, 13 reales, 11$\frac{1}{3}$ maravedíses.

130 Cuando los términos de un quebrado son demasiado grandes, no percibimos bien su valor; porque nuestro entendimiento no puede formar una idéa bastante exacta del valor de una parte de una unidad que está dividida en muchas, y luego despues saber á cuanto equivaldrá un gran número de ellas. En este caso para percibir su valor se divide el numerador y el denominador por el numerador, y se tendrá un nuevo quebrado igual con el dado, que tendrá por numerador la unidad, y por denominador el cociente que resulte de dividir el denominador por el numerador. Si este cociente es exacto, es decir, si es un número entero, se concebirá con claridad el valor exacto de dicho quebrado; porque estará reducido á otro, cuyo numerador es la unidad y el denominador un número no mui grande. Si es un número misto, no se podrá percibir con exactitud su valor; pero habrá dos quebrados entre los cuales estará el valor del quebrado dado; estos quebrados serán: el primero el que resulta de poner por numerador la unidad y por denominador el cociente entero que se sacó: el segundo tendrá por numerador la unidad, y por denominador el cociente entero mas la unidad; y el quebrado dado será menor que el primero, y mayor que el segundo.

1.er ejemplo. Sea el quebrado $\frac{527}{2108}$ que á primera vista parece que no se puede simplificar. Así como está, no se puede conocer su valor; porque no se puede concebir con claridad una unidad, por ejemplo, una manzana, un maravedí &c. dividida en 2108 partes, y cuanto valen las 527 de estas partes; por esto dividiré los dos términos del quebrado por el numerador 527, lo que no altera su valor, y le convierte en $\frac{1}{4}$; por lo que veo que dicho quebrado $\frac{527}{2108}$ equivale á la cuarta parte de la unidad; cuyo valor se percibe mui claramente, porque todos saben figurarse bien una unidad cualquiera dividida en cuatro partes, y conocer de este modo el valor de una de ellas.

2.º ej. Si el quebrado fuese $\frac{2125}{7528}$, advertiria que tampoco se puede simplificar; pero dividiendo el numerador y el denominador por el numerador 2125, se me convertirá en $\dfrac{1}{3\frac{1153}{2125}}$, cuyo valor tampoco puedo conocer bien, á causa de que en el denominador se halla el quebrado $\frac{1153}{2125}$; si le desprecio tendré el quebrado $\frac{1}{3}$ que será (106) mayor que el $\dfrac{1}{3\frac{1153}{2125}}$, y por consiguiente mayor tambien que el $\frac{2125}{7528}$; y si en vez de despreciar el quebrado, añado una unidad al denominador 3 tendré otro quebrado $\frac{1}{4}$ que será (106) menor que el $\dfrac{1}{3\frac{1153}{2125}}$, y por consiguiente menor que el primitivo $\frac{2125}{7528}$; y como es mui fácil concebir lo que es la cuarta parte de la unidad y la tercera parte, tambien lo es el concebir un valor mayor que el primero y menor que el segundo; y así queda averiguado que el quebrado $\frac{2125}{7528}$ es mayor que $\frac{1}{4}$ y menor que $\frac{1}{3}$.

Si quisiera encontrar otros quebrados mas aproximados, no despreciaria el quebrado $\frac{1153}{2125}$, sino que ejecutaria lo mismo con él que con el primitivo; esto es, dividiria sus dos términos por el numerador 1153, y se convertirá en $\dfrac{1}{1+\frac{972}{1153}}$, y por consiguiente el primitivo en $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{1+\frac{972}{1153}}}$, el cual, despreciando el quebrado último, será $\dfrac{1}{3+\frac{1}{1}}=\frac{1}{4}$; y si en vez de él añado una unidad, se tendrá $\dfrac{1}{3+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{3\times2+1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{7}{2}}=\frac{2}{7}$.

Ahora, este quebradó que nos resulta es mayor que el primitivo, porque aumentando el número misto $1+\frac{972}{1153}$ que sirve de denominador del último quebrado, disminuye (106) dicho quebrado; y disminuyendo este quebrado; disminuye el número misto $3+\frac{1}{2}$ que sirve de denominador al primitivo, y por lo mismo este aumenta.

En vez de despreciar el quebrado $\frac{972}{1153}$, podrémos dividir sus dos términos por él numerador, y así podríamos ir procediendo hasta encontrar una division que no nos diese resta; con lo cual tendríamos descompuesto nuestro quebrado en otro, cuyo numerador era la unidad, y el denominador un número misto, en que el quebrado tenia por denominador otro número misto, cuyo denominador del quebrado seria otro número misto, &c. Á estas fracciones se les da el nombre de *fracciones continuas ó de quebrados continuos*; cuya teoría es mui importante, por cuanto nos proporciona conocer entre que números se halla el valor de una espresion, de que no tenemos una justa idéa.

131 Como el método que hemos seguido ha sido dividir el denominador por el numerador, este por la resta, esta resta por la que queda de la division anterior &c. resulta que el método para *trasformar en quebrado continuo un quebrado cualquiera, está reducido á encontrar el máximo comun divisor de los dos términos del quebrado, y poner por numeradores siempre la unidad, y por denominadores los cocientes enteros, con el mismo órden con que vayan saliendo.* Luego si queremos trasformar en quebrado continuo el $\frac{2125}{7528}$, hasta que el último quebrado tenga por numerador la unidad, practicarémos con sus dos términos las mismas reglas que para hallar el máximo comun divisor, en esta forma:

7528	2125	1153	972	181	67	47	20	7	6	1
	3)	1)	1)	5)	2)	1)	2)	2)	1)	6
1153	0972	0181	067	047	20	07	06	1	0	

y poniendo ahora la unidad por numerador y por denominadores los cocientes, tendrémos que

$$\frac{2125}{7528}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{6}}}}}}}}}};$$

donde vemos que siempre que tratemos de simplificar un quebrado por el máximo comun divisor, y nos encontramos con que no se puede ejecutar, los cocientes nos pueden servir para trasformarle en quebrado continuo. Pero aun hai mas, por estos mismos cocientes se halla con mucha sencillez una multitud de quebrados, entre los cuales se encuentra el valor del propuesto. Para esto se colocan todos en un renglon, y debajo de cada cociente se pone un quebrado correspondiente de esta manera: *se multiplican los dos términos del quebrado anterior por el cociente, cuyo quebrado se busca: al numerador se añade el del anterior, y al denominador el denominador.* Esta regla supone que se tengan ya calculados dos quebrados; por esta causa dicen los mas de los autores que el primer quebrado se halla, desde luego, poniendo por numerador la unidad, y por denominador el primer cociente; y para hallar el segundo dicen que se ponga ántes este quebrado $\frac{0}{1}$; mas se puede hacer que el primero resulte tambien por la regla general, poniendo ántes de los cocientes estas dos espresiones $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$ (*) en forma de quebrado. Así, si queremos hallar entre que quebrados se halla el valor del $\frac{2125}{7528}$, pondrémos los cocientes que ha dado la operacion del máximo comun divisor con el órden que han salido, y aquí se presenta:

$$3,\quad 1,\quad 1,\quad 5,\quad 2,\quad 1,\quad 2,\quad 2,\quad 1,\quad 6$$

$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{7},\ \frac{11}{39},\ \frac{24}{85},\ \frac{35}{124},\ \frac{94}{333},\ \frac{223}{790},\ \frac{317}{1123},\ \frac{2125}{7528}$$

y pondrémos dos lugares mas hácia la izquierda del 3 las dos espresiones $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$; y para calcular el quebrado que corresponde al cociente 3, dirémos: 3 por 0 es 0, que añadiéndole el numerador del $\frac{1}{0}$ es 1, que espresa el numerador del quebrado que buscamos; para hallar su denominador dirémos: 3 por 1 es 3, y 0 son 3, que es dicho denominador. Para llegar al correspondiente al primer 1, dirémos: 1 por 1, numerador del $\frac{1}{3}$, es 1, y 0, numerador del $\frac{0}{1}$, es 1, y tengo el numerador; para hallar el denominador diré: 3 por 1 es 3, y 1, denominador del anterior, son 4; y tendrémos que $\frac{1}{4}$ es el que corresponde al primer 1. Para hallar el que corresponde al segundo dirémos: 1 por 1 es 1, y 1 son 2; 1 por 4 es 4, y 3 son 7, luego será $\frac{2}{7}$. El del 5 se hallará diciendo: 5 por 2 son 10, y 1 son 11; 5 por 7 son 35, y 4 son 39, luego será $\frac{11}{39}$. Encontrarémos el del 2 diciendo: 2 por 11 son 22, y 2 son 24; 2 por 39 son 78, y 7 son 85, luego será $\frac{24}{85}$. Siguiendo del mismo modo se obtendrán todos los que allí se ven, debiendo salir el último igual con el primitivo, como en efecto se verifica.

Todos los quebrados que ocupan un lugar ímpar son mayores que el quebrado propuesto, y menores los que ocupan un lugar par. Para convencernos de ello, basta observar que si en el quebrado continuo omitimos el quebrado que acompaña al entero en el número misto, que es denominador del quebrado que ocupe un lugar ímpar, resulta mayor quebrado; así es, que de suprimir lo que acompaña al 3, resulta mayor en efecto por lo dicho (106); para verlo cuando se omite el $\frac{1}{5\frac{1}{2}}$ &c. que acompaña al segundo 1, observarémos que de este modo disminuye

(*) *La primera espresion es el símbolo de una cantidad, que puede llegar á ser mayor que cualquiera otra, y que se llama como dirémos en su lugar,* infinita; *y la segunda el símbolo de cero: y hemos dicho que se pueden poner ántes de los quebrados que van saliendo, porque toda cantidad dada está comprendida entre el infinito y cero.*

el denominador $1\frac{1}{5}$ &c.; disminuyendo este, crece el quebrado $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ &c. y creciendo este, crece todo el denominador $1\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ &c.; creciendo este denominador disminuye el quebrado $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{5}}}$ &c. y por consiguiente todo el denominador $3\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{5}}}$ &c.; y disminuyendo este, crece por consiguiente el $\frac{1}{3\frac{1}{1}}$ &c. que resulta. Del mismo modo lo demostraríamos de los demas. Respecto de los pares dirémos: que omitiendo el $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ &c. disminuye el denominador $1\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ &c. y por consiguiente crece el quebrado $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{5}}}$ &c. y el número misto $3\frac{1}{1}$ &c. luego se disminuirá el quebrado $\frac{1}{3\frac{1}{1}}$ &c.: y como lo mismo demostraríamos de los demas pares, queda demostrada la proposicion.

Terminemos este asunto sacando todos los quebrados que pueden espresar el valor del $\frac{1000000000}{3141592653}$, porque en lo sucesivo le necesitarémos; para lo cual tratarémos de hallar el máximo comun divisor de sus dos términos, como aquí se presenta:

3141592653	1000000000	14159265,3	8851429	88212,1,8	30211	2981,7	394	267	127	13	10	3	1
	3	7)	15)	1)	291)	1)	75)	1)	2)	9)	1)	3)	3)
0141592653	0008851429	05307836 3	0030211	27790 1	00394	0223 7	127	013	010	03	01	0	
		0882121 8		00600 2 8		026 7							
				298 1 7									

Ahora dispondrémos los cocientes con el órden que nos han salido, y sacarémos los quebrados por las reglas que acabamos de esponer, del modo siguiente:

$$3,\ 7,\ 15,\ 1,\quad 291,\quad 1,\quad 75,\quad 1,$$

$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{7}{22},\ \frac{106}{333},\ \frac{113}{355},\ \frac{32989}{103638},\ \frac{33102}{103993},\ \frac{2515639}{7903113},\ \frac{2548741}{8007106},$$

$$2,\qquad 9,\qquad 1,\qquad 3,\qquad 3,$$

$$\frac{7613121}{23917325},\ \frac{71066830}{223263031},\ \frac{78679951}{247180356},\ \frac{307106683}{964804099},\ \frac{1000000000}{3141592653}.$$

De los quebrados ó fracciones decimales.

132 La teoría de los quebrados embaraza mucho los cálculos por dos razones: la primera porque hai que atender en ellos á dos números cuales son el numerador y el denominador, y la segunda porque casi siempre se necesita practicar operaciones auxiliares, como reducirlos á un comun denominador, ántes de ejecutar las operaciones que se deséan. Con la

mira de facilitar las operaciones, y hacer que su práctica aparezca con la misma sencillez que la de los números enteros, se ha tratado de sustituir á las fracciones ó quebrados comunes, fracciones ó quebrados cuyos denominadores sean 10, 100, 1000, &c. ó en general la unidad seguida de ceros, y que les sean iguales en valor; estos quebrados son los que se llaman *quebrados decimales.*

Estos quebrados los podríamos dar á conocer fundándonos en la cuestion resuelta (121); pero es mejor manifestar su teoría directamente, considerándolos como una consecuencia del sistema de numeracion.

En efecto, formarémos una idéa exacta de ellos concibiendo la unidad dividida en diez partes iguales, que cada una de ellas se llama *décima* de la unidad; concibiendo despues cada décima dividida en otras diez partes iguales, que se llaman *centésimas*; concibiendo cada centésima dividida en otras diez partes, que se llaman *milésimas*; cada milésima en otras diez, que se llaman *diezmilésimas*; cada diezmilésima en diez *cienmilésimas*; cada cienmilésima en diez *millonésimas*; cada millonésima en diez *diezmillonésimas*; y así en adelante, *cienmillonésimas*, *milmillonésimas*, *diezmilmillonésimas*, *cienmilmillonésimas*, &c.

Estos quebrados se escriben del mismo modo que los números enteros, poniendo á la derecha de las unidades las décimas, á la derecha de estas las centésimas, despues las milésimas, luego las diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, diezmillonésimas, cienmillonésimas, &c.

El guarismo que espresa las unidades se determina poniendo á continuacion de él, esto es, entre las unidades y las décimas, una coma; y si no hai unidades se pone 0 ántes de la coma, para que ocupe el lugar de las unidades. Por ejemplo: si quiero espresar *treinta y dos unidades y cuatro décimas*, escribiré así: 32,4; y la coma da á entender que el guarismo 2 espresa las unidades, y el 4 las décimas; si solo hubiera querido escribir *cuatro décimas*, hubiera puesto 0 en el lugar de las unidades, y tendria escritas las cuatro décimas de este modo: 0,4.

Puesto que *cuatro décimas* es lo mismo que cuatro partes de aquellas de que la unidad consta de diez, tendrémos que $0{,}4=\frac{4}{10}$, y que $32{,}4=32\frac{4}{10}$; luego aquí la coma hace los oficios de denominador, y por lo mismo ella nos proporciona el que en estos quebrados solo tengamos necesidad de atender á su numerador, y de colocar convenientemente la coma. Como por otra parte en estos quebrados cada unidad sigue la lei de ir siendo de diez en diez veces menor, contando de izquierda á derecha como en los números enteros, resulta que los podemos calcular del mismo modo que estos, sabiendo la colocacion que se debe hacer de la coma.

Á fin de que se conozca bien la clase de unidades para que está destinado cada lugar, presentarémos aquí un número cualquiera de cifras ó guarismos, y pondrémos al lado de cada uno el nombre de la uni-

dad que representa, segun el lugar que ocupe, en esta forma:

&c.	&c.
7	centenas de millar.
6	decenas de millar.
5	millares.
4	centenas.
3	decenas.
4,	unidades.
8	décimas.
5	centésimas.
7	milésimas.
4	diezmilésimas.
5	cienmilésimas.
6	millonésimas.
1	diezmillonésimas.
3	cienmillonésimas.
9	milmillonésimas.
6	diezmilmillonésimas.
5	cienmilmillonésimas.
8	billonésimas.
7	diezbillonésimas.
5	cienbillonésimas.
2	milbillonésimas.
&c.	&c.

Ponemos &c. tanto á la izquierda como á la derecha del número, para indicar que todavía se pueden poner los guarismos que se quieran; y con esto se ve que el sistema de las decimales no es mas que una estension del de los enteros; pues así como este proporciona medios para escribir un número por grande que sea, aquel nos los proporciona para escribir un número tan pequeño como se quiera, siguiendo siempre una misma lei.

133 Las decimales vayan ó no acompañadas de enteros se leen del mismo modo que estos números; solo que ántes se necesita averiguar el nombre que se debe pronunciar al fin. Para lo cual se va diciendo desde la coma á la derecha en el primer lugar: *décimas*, en el segundo *centésimas*, y así sucesivamente, hasta que se llegue al último guarismo, cuyo nombre se apunta para que no se olvide si es complicado el número. En este caso se van separando los guarismos en períodos de seis en seis, empezando de derecha á izquierda, poniendo en el primer período un 1, en el segundo un 2, &c.; y dividiendo despues cada uno de estos períodos en dos de tres guarismos con una coma, se lee como un número entero, pronunciando al fin la especie de unidades que se apuntó, ó que espresaba el último guarismo. Para que no se confundan estas comas con la primitiva, la separacion se puede hacer por arriba poniendo la coma inversa. Por ejemplo: si quisiera leer el número 8234,565297035008752, averiguaría la especie de unidades que espresaba el último guarismo 2, y hallaria por el método acabado de esponer que espresaba *milbillonésimas.* Despues le dividiré de derecha á izquierda en períodos de seis en seis guarismos, y luego cada uno de estos en dos de tres; y haciendo la division por arriba, le tendré preparado como aquí se ve:

$$8^{3}234,{}^{\text{‘}}565^{2}297^{\text{‘}}035^{1}008^{\text{‘}}752$$

y le leeré así: *ocho trillones, doscientos treinta y cuatro mil quinientos sesenta y cinco billones, doscientos noventa y siete mil treinta y cinco millones, ocho mil setecientas cincuenta y dos milbillonésimas.*

Esto se puede hacer tambien leyendo primero el entero por las reglas dadas (21), y las decimales por las reglas acabadas de esponer; así, el número 3470265081725,3006125635727, le prepararia de este modo:

$$3_2470,265_1081,725,30^2061{}^{\text{‘}}256^1357{}^{\text{‘}}727$$

que se lee: *tres billones, cuatrocientos setenta mil doscientos sesenta y cinco millones, ochenta y un mil setecientos veinticinco enteros ó unidades, treinta billones, sesenta y un mil doscientos cincuenta y seis millones, trescientas cincuenta y siete mil setecientas veintisiete cienbillonésimas.*

134 Pues que las decimales son quebrados que tienen denominadores particulares, como 10, 100, 1000, &c. tambien debe haber casos en que no se altere su valor. Estos son *cuando á continuacion de los guarismos significativos se añaden ó quitan los ceros que se quieran*; por que con añadir un cero, hacemos que el número de unidades sea diez veces mayor; pero como en este caso cada una es diez veces menor, queda compensado; y por lo mismo 0,4=0,40=0,400=0,4000=&c. lo que por otra parte es tambien mui fácil de concebir; porque $0,4=\frac{4}{10}$; $0,40=\frac{40}{100}$; $0,400=\frac{400}{1000}$; &c. y todos estos quebrados son iguales por resultar del primitivo multiplicando sus dos términos por 10, por 100, por &c.

135 *Cuando los ceros se colocan entre la coma y los guarismos significativos, se hace el quebrado tantas veces menor, como espresa la unidad seguida de tantos ceros como se han puesto entre la coma y los guarismos significativos*; porque en este caso se hace diez, ciento, mil, &c. veces menor el valor de cada unidad, y no se hace diez, ciento, mil, &c. veces mayor el número de ellas.

Del mismo modo, si en un número que lleva enteros con decimales se corre la coma un lugar mas hácia la izquierda, como su guarismo que ántes espresaba unidades, ahora espresará décimas; el que ántes décimas, ahora centésimas; y así sucesivamente, resulta que á cada parte se le ha hecho diez veces menor; y por lo mismo esta mutacion de la coma habrá convertido al número propuesto en otro diez veces menor; si se hubiera corrido la coma dos lugares hácia la izquierda, hubiéramos hecho cien veces menor á dicho número; y en general, *con correr la coma un número cualquiera de lugares hácia la izquierda, se hace al número tantas veces menor, como espresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.*

Por el contrario *corriendo la coma un número cualquiera de lugares hácia la derecha, quedará hecho el número tantas veces mayor, como espresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.* De donde resulta que si en el número 352,48652 colocamos la coma entre el 3 y el 5 tendrémos 3,5248652, que será cien veces menor que el propuesto; y si la hubiéramos puesto entre el 6 y el 5, hubiéramos obtenido 35248652 que es mil veces mayor que el propuesto.

136 Pues que la utilidad de los quebrados decimales, es el evitar los comunes, lo primero que debemos enseñar es á reducir á quebrado de-

cimal todo quebrado comun. Para esto *se añaden á su numerador tantos ceros como guarismos decimales se quieran sacar; y dividiendo despues por el denominador, no hai mas que separar de derecha á izquierda en el cociente tantos guarismos con la coma, como ceros se añadiéron al numerador.* Por ejemplo: si quiero reducir el quebrado $\frac{9}{14}$ á uno decimal, que tenga solo dos guarismos decimales, añadiré al 9 dos ceros, y tendré 900; divido ahora 900 por 14, y saco 64; en este cociente debo separar dos guarismos con la coma; y como entónces no queda nada á la izquierda de la coma, necesito poner un cero de modo que tendré 0,64 ó *sesenta y cuatro centésimas*, que no es mas que un valor aproximado del $\frac{9}{14}$; pero cuya aproximacion la hubiera podido continuar tanto como hubiera querido, sacando mas guarismos.

900	14
060	—
04	64

Esta práctica está fundada en lo que hemos manifestado (121); pues con añadir ese número de ceros no hacemos mas que multiplicarle por el denominador que queremos que tenga. Mas este método no es en la práctica el mas espedito, porque es embarazoso tener despues que saber donde se ha de poner la coma, y tambien puede haber equivocacion al ir bajando los ceros. Ademas de que en sí estriba en una cosa que las mas de las veces no sabemos; pues en muchas ocasiones puede salir cociente exacto, ántes de haber sacado los guarismos que nos proponíamos. Y así, vamos á dar otra regla que es mas general y ventajosa, á saber: *tómese el numerador del quebrado por dividendo, y el denominador por divisor, y divídase el uno por el otro; mas si el quebrado es propio, el denominador que aquí hace de divisor, será mayor que el numerador que hace de dividendo, y por lo mismo no cabrá el divisor en el dividendo, y así se pone 0 en el cociente y despues del 0 la coma. Añádanse despues al dividendo tantos ceros como se necesiten, para que el divisor esté contenido alguna vez en dicho dividendo con los ceros, y pónganse á continuacion de la coma tantos ceros ménos uno, como se añadiéron al dividendo; véase ahora cuantas veces cabe el divisor en este dividendo; póngase este guarismo por cociente, multiplíquese este cociente por el divisor, y réstese del dividendo; añádase un cero á la resta, vuélvase á ver cuantas veces está contenido el divisor en este segundo dividendo parcial, póngase en el cociente, multiplíquese por el divisor, réstese del dividendo; á la resta añádase otro cero, y continúese de este modo hasta sacar los guarismos que se quieran.*

1.er ejemplo. Si quiero sacar con tres decimales el valor de $\frac{6}{13}$, ejecutaré la operacion como aquí se ve:

60	13
080	—
020	0,461
07	

Tomo el 6 por dividendo, y el 13 por divisor: veo que el 13 no está contenido ninguna vez en el dividendo 6, y por lo mismo pongo 0 en el cociente y despues la coma; ahora debo añadir al dividendo 6 los ceros que necesite para que el 13 esté contenido en él alguna vez, y advierto que es suficiente añadir un cero, porque en 60 está contenido el 13; como no he tenido que añadir mas de un o, no debo poner ahora ningun o á continuacion de la coma; y así veré cuantas veces está contenido el 13 en 60: son 4, que pongo en el cociente despues de la coma; multiplico este cociente por el divisor, le resto del dividendo 60 y saco la resta 8. A esta resta añado un o, veo que el 13 está contenido seis veces en 80, pongo 6 en el cociente, multiplico por el divisor, y resto del dividendo 80; al lado de la resta 2 pongo otro o, veo que el 13 en 20 está contenido una vez, pongo 1 en el cociente, multiplico por el divisor y resto; del mismo modo continuaria hasta sacar los guarismos decimales que quisiese; con lo cual tengo reducido el quebrado $\frac{6}{13}$ á quebrado decimal, aproximado hasta milésimas, esto es, que le falta para ser igual con el dado ménos de una milésima parte de la unidad.

2.º ej. Si quiero reducir á quebrado decimal el $\frac{7}{832}$, ejecutaré la operacion en esta forma:

7000	832
03440	0,008413
01120	
02880	

Tomaré el 7 por dividendo, el 832 por divisor, y como este no está contenido ninguna vez en 7, pongo inmediatamente en el cociente o y coma; veo cuantos ceros necesito añadir al 7 para que contenga alguna vez al 832, y son tres; los pongo, y despues de la coma pongo dos ceros, esto es, uno ménos de los que he tenido que añadir al dividendo. Empiezo ahora la division diciendo: 832 en 7000 cabe ocho veces, pongo 8 en el cociente despues de los dos ceros, multiplico por el divisor y resto; á la resta le añado un cero, y así continuaré la division hasta sacar los guarismos que necesite, que supongo aquí que son seis, y tengo el quebrado 0,008413, que es el mismo que el $\frac{7}{832}$ con diferencia de ménos de una millonésima parte de la unidad.

La razon de porque se han de poner en general tantos ceros ménos uno despues de la coma como se añadiéron, es el que se ha de hacer que el cociente primero que salga ocupe un lugar despues de la coma, espresado por el número de ceros que se añadiéron al dividendo; pues con esto se hace el cociente tantas veces menor como veces mayor se hizo el numerador del quebrado ó dividendo con añadirle los ceros; y como él ha de ocupar un lugar determinado, se sigue que los demas lugares se han de llenar con ceros.

Cuando se trata de reducir á quebrado decimal un quebrado comun concreto, esto es, que se refiere á una unidad determinada, se suele poner por condicion que no se pierda tal ó tal parte de alguna de las partes alícotas de la unidad primitiva. En este caso debemos manifestar cuantos guarismos decimales se necesitan sacar; para lo cual se ejecutará lo siguiente: *véase cuantas veces está contenida en la unidad primitiva, aquella parte que no se quiere despreciar, y tantos como sean los guarismos con que se escriba este número, tantos guarismos decimales se deberán sacar.* Propongámonos, por ejemplo, reducir á que-

brado decimal este quebrado comun $\frac{5}{7}$ de doblon, sin que se llegue á perder medio maravedí; para esto observaré que teniendo el doblon 60 reales, y cada real 34 maravedíses, el doblon equivaldrá á 2040 maravedíses, ó á 4080 medios maravedíses; por consiguiente deberé sacar en el quebrado decimal lo ménos cuatro guarismos exactos; y ejecutándolo tendré $\frac{5}{7}$ de doblon $=$ 0,7142 de doblon.

137 Al reducir quebrados comunes á decimales, solo se hallará cociente exacto cuando el denominador no tenga otros factores que el 2 y el 5; pero cuando no sale cociente exacto, resulta al cabo de cierto tiempo que los guarismos del cociente se repiten otra vez los mismos, y á estas fracciones se les da el nombre de *fracciones periódicas.*

Si quisiera reducir á quebrados decimales los quebrados comunes $\frac{13}{25}$, $\frac{1}{16}$ y $\frac{6}{11}$, ejecutaria las operaciones como aquí se ve:

(*A*)	130	25	(*B*)	100	16	(*C*) 60	11
	0050			0040		050	
	00	0,52		080	0,0625	060	0,545454 &c.
				00		050	
						060	

donde observo que de los dos primeros (*A*), (*B*) hallo cociente exacto; porque los factores de sus denominadores son respectivamente 5×5 los del primero, y 2×2×2×2 los del segundo; y en el tercero (*C*) advierto que se van repitiendo los guarismos 54, y por lo mismo los podré poner tantas veces como quiera.

Debe salir por precision *cociente exacto* cuando los factores del denominador son 2 ó 5; porque con añadir un o, se multiplica el numerador por 10, cuyos factores siendo 2 y 5, por cada cero que añadamos desaparece uno de los factores; y en el otro caso debe salir por precision *fraccion periódica*, porque la resta que resulta despues de hecha una division parcial siempre ha de ser menor que el divisor; y por consiguiente todas las restas que pueden resultar, solo son tantas ménos una como unidades tenga el divisor. Así, despues de puestos en el cociente tantos guarismos ménos uno como unidades tenga el divisor, la resta que resulte será una de las antecedentes, á la cual añadiendo o, dará uno de los guarismos puestos en el cociente, y despues se irán repitiendo todos los guarismos que habia en el cociente, entre los dos que se repitan primero.

1.er ejemplo. Si quiero reducir el quebrado $\frac{2}{3}$ á decimal, advierto que como la resta ha de ser menor que el divisor 3, solo podrá ser 2 ó 1; y así, al sacar la tercera resta ya se ha de volver á repetir alguna de estas, por lo cual infiero que se volverán á repetir los guarismos del cociente; y ejecutando la operacion como aquí se manifiesta:

20	3
20	
20	0,66666 &c.

Veo que el 3 cabe en 20, que es el dividendo despues de haber añadido un o, seis veces y deja 2 por resta, que es la misma que el dividendo; y así, añadiéndole un cero se convertirá en 20, y cabrá el 3 en él otras seis veces, y dejará la misma resta, y así en adelante; por lo cual pondré el 6 todas las veces que quiera.

2.º ej. Si quiero reducir el $\frac{4}{7}$, lo primero que advierto es que lo ménos al sesto guarismo ya se ha de repetir alguna resta; y ejecutada la operacion como aquí se presenta:

40	7
050	0,571428
010	
030	
020	
060	
04	

Sale en efecto, al sesto guarismo la resta 4 que es la misma que el dividendo, y por consiguiente añadiéndole el cero volverá otra vez el divisor 7 á estar contenido cinco veces, luego 7, &c. de manera que se podrá poner á continuacion del cociente hallado 0,571428, tantas veces como se quiera el período 571428, y nos resultará: 0,571428571428571428571428 &c.

No siempre la primera resta que se repite es el numerador ó dividendo (lo cual sucede cuando el denominador tiene entre sus factores algunos 2 ó 5), y entónces la fraccion en parte es periódica y en parte no.

1.er ejemplo. Si quisiera reducir la fraccion $\frac{5}{12}$ á decimal, ejecutando la operacion como aquí se ve:

50	12
020	0,416666&c.
080	
08	

Encuentro que se repite la resta que da 6 por cociente; y así, á continuacion del 0,416 podré poner las veces que quiera el 6; porque si á la resta 8 le añado 0, volverá á caber seis veces el divisor y dejará la misma resta; y así tendré la fraccion 0,416666 &c. que en parte es periódica y en parte no.

2.º ej. Si reduzco á decimal el quebrado $\frac{137}{275}$ sacaré 0,498181 &c. (*).

138 Ahora, para resolver la cuestion inversa, á saber: *dada una fraccion decimal, hallar el quebrado comun de donde provino*, observarémos que pueden ocurrir tres casos: 1.º que la fraccion decimal no sea periódica; 2.º que lo sea; y 3.º que en parte sea periódica y en parte no.

Cuando no es periódica la fraccion decimal, *se pone en forma de quebrado comun, poniendo por numerador los guarismos significativos, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como guarismos decimales hai, y despues se simplifica si se puede.*

1.er ejemplo. He visto (137) que el quebrado decimal 0,52 ha provenido del comun $\frac{13}{25}$; si quiero venir en conocimiento de este por medio de aquel, le pondré por numerador los guarismos significativos del 0,52 y por denominador la unidad seguida de dos ceros, porque hai dos guarismos decimales; con lo cual tengo el quebrado $\frac{52}{100}$, que despues de simplificado dividiendo sus dos términos dos veces de seguida por 2, se convierte en $\frac{13}{25}$, que es el mismo que produjo al 0,52.

2.º ej. Si quisiera averiguar de donde provenia el quebrado 0,367 diria que era de $\frac{367}{1000}$ que no se puede simplificar.

139 Ahora, para dirigirnos á resolver el segundo caso, es necesario que demostremos el siguiente

Teor. *Si el denominador de un quebrado es 9,99,999, &c. ó en general todos sus guarismos son 9, la fraccion decimal que resulte será periódica; el período se compondrá de tantos guarismos como nueves hai en el denominador, y estos guarismos serán los que hai en el numerador.*

Espl. Si tenemos, por ejemplo, el quebrado comun $\frac{53}{99}$, voi á demostrar que la fraccion periódica que resulta es 0,5353 &c. y que si tuviese $\frac{53}{999}$, la que resultase seria 0,053053 &c.

Dem. Esto quedará demostrado si manifestamos, que en el primer caso los dos primeros guarismos que sacamos son el 5 y el 3, y que debe quedar una resta igual con el numerador, la cual daria por lo mismo otros dos guarismos iguales, y así sucesivamente; y en el segundo caso, si demostramos que los tres primeros guarismos son 0,5 y 3, quedando el mismo 53 por resta.

En el primero, para sacar dos guarismos deberémos añadir (136) dos ceros á su numerador, de manera que el quebrado se convertirá en $\frac{5300}{99}$;

pero añadir dos ceros es multiplicar por 100, luego esto será igual á $\frac{53 \cdot 100}{99}$;

pero $100 = 99 + 1$, luego el numerador de esta espresion le podrémos poner bajo esta forma: $53 \times 99 + 53 \times 1 = 53 \times 99 + 53$.

Pero al hacer la division de la primera parte dará por cociente el 53, y como la otra parte que es 53 no se puede dividir por 99, quedará esta resta; y por lo mismo los guarismos se repetirán de aquí en adelante.

En el 2.º caso para sacar tres guarismos deberémos añadir tres ceros al numerador, ó multiplicar por 1000; luego tendrémos que se nos convertirá en $53000 = 53 \times 1000 = 53 \times (999 + 1) = 53 \times 999 + 53$; ahora, la primera parte es divisible por el denominador 999, y da por cociente 53; pero como estas 53 deben ser milésimas, debe haber ántes un cero, luego serán 053 los tres primeros guarismos; y como queda la misma resta 53, se irán repitiendo los mismos períodos, y será $\frac{53}{999} = 0{,}053053053$&c.

Hemos dicho que los guarismos del período son los mismos que los que tiene el numerador, porque aunque no haya tantos como en el denominador, se pueden concebir hácia la izquierda tantos ceros como se deséen.

140 Esc. *Cuando despues de los nueves del denominador hai ceros,*

(*) *No será importuno fijar nuestra consideracion en estos resultados; pues nos dan á conocer que las fracciones periódicas, aunque indefinidas en su forma, es decir, que aunque se componen de tantas guarismos como se quiera, sin embargo su valor es fijo, finito y determinado, cual es el quebrado de que proviene; porque en lo sucesivo tendrémos frecuentísimas ocasiones de considerar espresiones de esta naturaleza.*

resultan en el quebrado decimal ántes de empezar el período, tantos ceros como hai en el denominador despues de los nueves. Así, si tuviésemos $\frac{53}{9900}$, resultaria 0,005353&c. y de $\frac{53}{99000}$ sacaria 0,0005353 &c. Esto se verifica así porque entónces deberíamos añadir al numerador, ademas de los ceros regulares para sacar tantos guarismos como nueves hai en el denominador, tantos mas cuantos ceros hai despues de los nueves, para que resulten los guarismos que se deséen; luego en este caso deberá haber este mismo número de ceros ántes de empezar el período (*).

141 Entendido esto, para hallar el quebrado de donde proviene una fraccion periódica dada, *se pondrá por numerador el período; y por denominador tantos nueves como guarismos tiene el período. Si ántes de empezar el período hubiese ceros, se pondrán en el denominador despues de los nueves tantos ceros como habia entre la coma y el período, y luego se simplifica si se puede.*

1.er ejemplo. Si quiero averiguar el quebrado de donde proviene el 0,666 &c., pondré el 6 por numerador, y por denominador un 9, porque aquí el período se compone de un guarismo, y tendré $\frac{6}{9}$; que simplificando se convierte en $\frac{2}{3}$, que es en efecto (137) el que produjo al 0,666&c.

2.º ej. Si quiero hallar el quebrado de donde proviene el 0,5454&c. encontraré que es del $\frac{54}{99}$; que despues de simplificado, dividiendo dos veces sus dos términos por 3, se convierte en $\frac{6}{11}$, que es en efecto el que produjo al 0,545454&c.

3.er ej. Si tuviera la fraccion 0,05151 &c. diria que habia provenido de $\frac{51}{990}$, ó despues de simplificado de $\frac{17}{330}$.

142 Cuando la fraccion es en parte periódica y en parte no, se halla la fraccion comun de donde provino, *multiplicando el número que componen los guarismos no periódicos por un número que conste de tantos nueves seguidos, como guarismos tenga el período; á este producto se añaden los guarismos que forman el período, y la suma que resulte es el numerador del quebrado que se busca. El denominador se compone de tantos nueves seguidos como guarismos tiene el período, y despues de los nueves tantos ceros como guarismos no periódicos habia. Despues se simplifica todo lo que se puede.*

(*) *Si en el numerador hubiese mas guarismos que nueves en el denominador, no resultarian ceros ántes de principiar el período, sino otros guarismos; pero el período constaria de dos guarismos, aunque no serian los del numerador. Así, si tuviésemos el quebrado $\frac{532}{990}$, siempre resultará el período de dos guarismos, y ántes de principiar el período habria un guarismo, como en efecto se verifica pues resulta 0,53737 &c.; pero estos guarismos no son los del numerador: sobre cuyo punto no nos detendrémos porque lo espuesto basta para deducir la regla inversa como se hace en el testo, que es lo que se necesita.*

1.er ejemplo. Si quiero averiguar de donde proviene la fraccion 0,41666&c. como aquí el período se compone de un solo guarismo, multiplicaré el número 41 que es el que se compone de los guarismos no periódicos por un 9, y al producto 369 le añadiré el período que es 6, y tendré por numerador del quebrado que busco 375. El denominador se compondrá de un solo 9, porque el período es de un solo guarismo, pero acompañado de dos ceros, porque hai dos guarismos no periódicos; y así tengo el quebrado $\frac{375}{900}$, que despues de simplificado se convierte en $\frac{5}{12}$, que es en efecto (137) el que produjo al 0,41666 &c.

2.º ej. Si quiero averiguar de donde proviene la fraccion 0,498181 &c. multiplicaré 49 por 99, al producto 4851 añadiré 81, y á la suma 4932 le pondré por denominador 9900, y tendré el quebrado $\frac{4932}{9900}$; que despues de simplificado se convierte en $\frac{137}{275}$, que es en efecto el que produce al 0,49818181 &c.

Esto se funda en que podemos descomponer, en este caso, en dos partes la fraccion propuesta: una la que no es periódica, y la otra la que lo es; v. g. la 0,41666 &c. la descompondrémos en 0,41+0,00666 &c. Hallarémos separadamente el quebrado de que proviene cada una, y tendrémos: $0{,}41+0{,}00666\ \&c.=\frac{41}{100}+\frac{6}{900}=\frac{41}{100}+\frac{6}{9\times100}=$ $\frac{41\times9}{100\times9}+\frac{6}{9\times100}=\frac{41\times9+6}{900}$; lo que suministra la regla dada.

{ Tambien se puede determinar directamente el quebrado de que proviene una fraccion decimal periódica del modo siguiente: sea la fraccion 0,272727 &c.; multiplicándola por 100, se tendrá (135) 27,272727 &c.; pero observando que la fraccion decimal propuesta era indefinida y que se le debian suponer cuantos períodos se quisiesen, la actual que sigue al 27 tambien debe ser indefinida, porque si para un período ménos, esta se terminase, restituyendo dicho período se obtendria la primera, que en este caso no seria indeterminada; lo que es contra la hipótesis; quitando de este resultado la primera fraccion obtendríamos 27 por diferencia, pues que la parte decimal, siendo la misma en ambas, desaparece por la sustraccion; luego esta diferencia equivale á 100 veces la fraccion que se busca, ménos una vez esta misma fraccion; ó á 99 veces la fraccion buscada; luego esta será (§ 79) $\frac{27}{99}$.

{ Este raciocinio aplicado á cualquiera otra fraccion decimal periódica conduce tambien á la regla dada (141). }

De las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir decimales, ya vayan acompañadas de enteros, ya vayan solas; y de la valuacion de estos quebrados.

143 Como las decimales siguen la misma lei que los números enteros,

resulta que las reglas por cuyo medio se ejecutan las operaciones, son las mismas ya vayan acompañadas de enteros, ya vayan solas; y por lo mismo en los datos de las operaciones que vamos á ejecutar entrarán ó no entrarán enteros indistintamente.

Para sumar las decimales *se ponen todos los sumandos los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan las décimas debajo de las décimas, las centésimas debajo de las centésimas, &c. esto es, que la coma en todos los sumandos forme columna; y despues empezando de derecha á izquierda, se suman exactamente como si fuesen enteros, teniendo cuidado de poner la coma en la suma, de modo que forme columna con las de los sumandos.*

1.^{er} ejemplo. Quiero sumar 8,32 con 0,7325, con 15,07, con 0,0083 y con 3,2. Pondré estos sumandos los unos debajo de los otros, de modo que la coma esté en columna como aquí se ve:

```
  8,32
  0,7325
 15,07
  0,0083
  3,2
 -------
 27,3308
```

Y despues de tirada la raya, empiezo por la derecha diciendo: 5 y 3 son 8, pongo 8 debajo de la raya, y paso á la columna siguiente donde digo: 2 y 8 son 10, pongo 0 y llevo 1 para añadirla á la suma de la columna siguiente, en la que diré: 2 y 1 que llevaba son 3, y 3 son 6, y 7 son 13, pongo 3 y llevo 1; sigo: 3 y 1 que llevaba son 4, y 7 son 11, y 2 son 13, pongo 3 y llevo 1. Como aquí hallo la columna de las comas, pongo la coma para que no se me olvide ántes de pasar á sumar los enteros, y despues de puesta digo: 8 y 1 que llevaba son 9, y 5 son 14, y 3 son 17, pongo 7 y llevo 1; 1 y 1 que llevo son 2, y de 2 no llevo nada; con lo que saco la suma 27,3308.

2.^{o} ej. Si quiero sumar 47,2356 con 128,035793, con 439,5128, con 0,072, con 0,83, con 9,5 y con 15,732, ejecutaré la operacion como he dicho y aquí se ve:

```
  47,2356
 128,035793
 439,5128
   0,072
   0,83
   9,5
  15,732
 ----------
 640,918193
```

El fundamento de esta regla es que como haciendo la colocacion dicha y sumando en columna, sumamos todas las unidades de una misma especie, y todas las sumas parciales las reunimos en una sola al mismo tiempo que las vamos sacando, resulta que en esta tenemos la suma total.

144 Para restarlas *se ejecuta lo mismo que con los enteros; así es que se pone el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de cada especie, esto es, que la coma del sustraendo corresponda debajo de la del minuendo; se tira una raya, y se resta como en los números enteros.*

Aquí puede ocurrir que no tenga un mismo número de guarismos decimales el minuendo y sustraendo; si el sustraendo tiene ménos guarismos decimales que el minuendo, lo primero que se hace es poner aquellos guarismos que tiene demas el minuendo, y luego se restan los

del sustraendo de los que quedan en el minuendo, teniendo cuidado de poner la coma en la resta de modo que forme columna con las del minuendo y sustraendo; si el minuendo tiene ménos que el sustraendo, se resta el último guarismo del sustraendo de 10, y todos los demas de 9, hasta llegar al primer guarismo del minuendo, el cual se considera con una unidad ménos.

1.^{er} ejemplo. Quiero restar de 15,378 el número 3,625, pondré el sustraendo 3,625 debajo del minuendo como he dicho y se ve en (*A*):

```
(A) 15,378     (B) 49,38753     (C) 45,32
     3,625         27,052           36,213574
    ------         --------         ---------
    11,753         22,33553         09,106426
```

Y despues de tirada la raya, como tienen un mismo número de guarismos decimales, diré: de 5 á 8 van 3 que pongo debajo; de 2 á 7 van 5; de 6 á 13 van 7; pongo ahora la coma y continúo diciendo: de 13 llevo 1; 3 y 1 que llevaba son 4, de 4 á 5 va 1; y de nada á 1 va 1; con lo que saco la resta 11,753.

2.^{o} ej. Si de 49,38753 quisiera restar 27,052 los colocaria como se ve en (*B*).

Y como el sustraendo tiene ménos guarismos decimales que el minuendo, pongo debajo de la raya los dos guarismos 53 del minuendo, que no tienen correspondientes en el sustraendo, y despues resto diciendo: de 2 á 7 van 5; de 5 á 8 van 3; de 0 á 3 van 3; de 7 á 9 van 2; de 2 á 4 van 2; y colocando al mismo tiempo estos guarismos y la coma en sus lugares respectivos, hallo que la resta es 22,33553.

3.^{er} ej. Si de 45,32 quisiera restar 36,213574, pondria el sustraendo debajo del minuendo como se ve en (*C*).

Tiraria la raya, y como el sustraendo tiene mas guarismos que el minuendo, diria: de 4 á 10 van 6 que pongo; de 7 á 9 van 2; de 5 á 9 van 4; de 3 á 9 van 6; ahora debo considerar al 2 del minuendo con una unidad ménos, y diré: de 1 á 1 no va nada; de 2 á 3 va 1; de 6 á 15 van 9, y de 15 llevo 1; 3 y 1 que llevaba son 4, de 4 á 4 va 0; y saco la resta 9,106426.

En el primer caso no tiene nada que demostrar la regla; pues se resta cada especie de unidades del sustraendo de su homogenea en el minuendo; en el segundo, como á continuacion del sustraendo se pueden poner los ceros que se quieran sin que se altere su valor (134), podrémos considerar que despues del 2 haya dos ceros, los cuales restados de los dos guarismos 5 y 3 del minuendo, darán esta misma resta; y concibiendo en el tercer caso que hai los ceros suficientes á continuacion del minuendo para que tenga igual número de guarismos decimales que el sustraendo, queda reducida la operacion á la espuesta (48).

145 Para multiplicar las decimales *no se hace caso de la coma, se multiplican como si fuesen números enteros, y luego en el producto se separan con la coma tantos guarismos de derecha á izquierda como habia en ambos factores juntos; y si no hubiese bastantes se añadirán á la izquierda los ceros que se necesiten.*

1.^r ejemplo. Quiero multiplicar 3,74 por 5,8; tomaré por multiplicador, segun dije en la multiplicacion de los enteros el 5,8 por tener ménos guarismos, y le pondré debajo del multiplicando como sino tuviese la coma; de modo que no importa nada el que la coma no forme columna, como aquí se ve (*A*).

(*A*)	(*B*)	(*C*)	(*D*)
3,74	0,46	0,37	27,326
5,8	0,5	0,2	45,3
2992	0,230	0,074	81978
1870			136630
21,692			109304
			1237,8678

Despues de tirada la raya multiplicaré el 3,74 por el 8, sin hacer caso de la coma, y saco por producto parcial 2992 que pongo debajo de la raya; multiplico despues por 5, y coloco el producto parcial 1870 un lugar mas hácia la izquierda respecto del primero; tiro despues una raya y sumo estos dos productos parciales; y separando en la suma 21692 tres guarismos con la coma de derecha á izquierda, que son los guarismos decimales que habia en ambos factores juntos, saco el producto total 21,692.

2.º ej. Si quiero multiplicar 0,46 por 0,5, ejecutaré la operacion como se ve en (*B*).

Multiplicaré el 46 por 5, lo que me da el producto 230; y como en este producto debo separar tres guarismos con la coma, que son los que hai en ambos factores juntos, pondré ántes un cero y tendré 0,230; pero como los ceros despues de los guarismos decimales no los aumentan ni los disminuyen (134), borraré el 0 que hai despues del 3, y diré que el producto es 0,23.

3.^er ej. Si quiero multiplicar 0,37 por 0,2, ejecutaré la operacion como se ve en (*C*).

Multiplicaré el 37 por 2, y como el producto 74 no tiene mas de dos guarismos, y debo separar tres con la coma, supliré con ceros los guarismos que me falten, y tendré el producto 0,074.

4.º ej. Si quiero multiplicar 27,326 por 45,3, ejecutaré la operacion como se ve en (*D*) y saco el producto 1237,8678.

La razon de porque se han de separar tantos guarismos en el pro-

ducto como hai en ambos factores juntos, es porque con suprimir la coma en el multiplicando le hacemos tantas veces mayor, como espresa la unidad seguida de tantos ceros como guarismos habia en él; con suprimirla en el multiplicador le hacemos tantas veces mayor, como espresa la unidad seguida de tantos ceros como guarismos hai en él; luego (87) el producto nos debe salir tantas veces mayor como espresa el producto de estos dos números; luego para obtener el verdadero le debemos hacer este mismo número de veces menor, lo que se consigue separando con la coma tantos guarismos como hai en ambos factores juntos.

146 De lo que hemos dicho (135) se deduce que un número que lleva enteros y decimales ó decimales solas, se multiplica por 10, *corriendo la coma un lugar hácia la derecha*; por 100, *corriéndola dos*; por 1000, *corriéndola tres*; y en general, para multiplicar por la unidad seguida de cierto número de ceros, *no hai mas que correr la coma tantos lugares hácia la derecha como ceros hai despues de la unidad.*

Si hubiese tantos ceros como guarismos decimales, quedaria hecha la multiplicacion con quitar la coma; y si hubiese ménos guarismos decimales que ceros despues de la unidad, seria necesario borrar la coma y añadir tantos ceros como haya de diferencia entre el número de ceros que siguen á la unidad y los guarismos decimales. V. g. si quisiera multiplicar el número 43,52367 por 100, el producto seria 4352,367; si le hubiera querido multiplicar por 10000, el producto seria 435236,7; si le hubiera querido multiplicar por 100000, el producto seria 4352367; y finalmente si le hubiera querido multiplicar por 10000000, el producto hubiera sido 435236700.

{ 147 En la práctica ocurre con mucha frecuencia el tener que multiplicar un número compuesto de muchas figuras decimales por otro; y segun el método que se sigue en la multiplicacion, los guarismos que se van sacando son los últimos; pero como segun la mayor ó menor importancia de los resultados, en muchas ocasiones no nos hacen al caso los últimos guarismos por no influir sensiblemente en lo que buscamos, es de la mayor importancia el tener medios de hallar los guarismos que necesitamos sin vernos precisados á encontrar los que vienen despues; por esta causa se ha procurado abreviar esta operacion del modo siguiente.

{ En primer lugar ejecutarémos una multiplicacion; y será por ejemplo la de 53,25261 por 3,2945, donde nosotros á primera vista conocemos que el producto ha de contener nueve guarismos decimales, y si suponemos que no tengamos necesidad sino de tres exactos, verémos el tiempo que nos ahorra la abreviacion. Mas primero ejecutemos la operacion con estension empezando por el guarismo de especie superior como se ve en la página siguiente:

{ Y como no queríamos hallar sino tres guarismos exactos, si separamos los demas con una raya que vaya de abajo arriba, y separamos en los productos parciales los guarismos correspondientes; verémos que si se tuviera un medio para omitir la ejecucion de lo que hai á la derecha de la raya, nos ahorraríamos todo este tiempo, y el poner la mitad de los guarismos, lo cual se consigue poniendo en práctica esta regla.

53,252	61
3,29	45
159757	83
10650	522
4792	7349
213	01044
26	626305
175,440	723645

{ *Véase cual es el guarismo de especie superior del multiplicador; si está en el lugar de las unidades, tómense en el multiplicando tantos guarismos decimales como se quieran en el producto, separando los demas con una raya si hai mas, ó añadiendo los ceros que se necesiten si hai ménos. Si dicho guarismo se halla á la derecha de la coma, véase que lugar ocupa despues de ella; el número que espresa este lugar se restará del que espresa los guarismos que se quieren sacar; y se tomarán en el multiplicando tantos guarismos como unidades tenga dicha resta, separando los otros con una raya si hai mas, ó añadiendo ceros si hai ménos. Si el espresado guarismo se halla á la izquierda de las unidades se verá que lugar ocupa despues de ellas; el número que esprese este lugar se sumará con el que espresa los guarismos que se quieren sacar; y se tomarán en el multiplicando tantos guarismos como unidades tenga esta suma, separando los otros si hai mas, ó añadiendo ceros si hai ménos. Hecha ya esta separacion, multiplíquese todo lo que queda del multiplicando á la izquierda de la raya por dicho guarismo de especie superior del multiplicador; póngase un punto sobre el último guarismo del multiplicando, y otro debajo del del multiplicador; pásese á multiplicar todo el multiplicando, ménos el guarismo apuntado, por el segundo guarismo del multiplicador, y su producto póngase debajo del anterior, de manera que se correspondan en columna los últimos guarismos. Apúntese igualmente el último guarismo del multiplicando que hemos considerado con un punto, y el del multiplicador por que hemos multiplicado; multiplíquese por el siguiente guarismo, y colóquese el producto debajo de los anteriores sin correrle ningun lugar; y continúese del mismo modo hasta que no haya mas guarismos que apuntar en el multiplicando ó multiplicador; despues se suma todo esto, y en la suma se separan tantos guarismos como se queria que resultasen en el producto.*

{ Esc. *Al ejecutar esta operacion conviene multiplicar tambien el último ó dos últimos guarismos apuntados del multiplicando, por el guarismo del multiplicador que hace de nuevo multiplicador parcial, con el objeto de saber las que se llevan para añadirlas al producto del primer guarismo del multiplicando; pero á pesar de esto conviene hacer la operacion como si quisiéramos hallar un guarismo ó dos guarismos mas en operaciones bastante grandes.*

{ Así, para ejecutar la operacion anterior abreviadamente, colocarémos el multiplicador debajo del multiplicando de cualquier modo, pero es mas cómodo hacerlo de modo que se corresponda en columna la coma; y como el guarismo de especie superior del multiplicador espresa unidades, se deberán tomar en el multiplicando cuatro guarismos, si queremos que en el producto no salgan mas de tres exactos; y así separarémos los demas con una raya como aquí se presenta:

53,2526	1
3,2945	
1597578	
106505	
47927	
2130	
266	
175,4406	

{ Empezaré la multiplicacion diciendo: 3 por 1 (para saber las que llevo) son 3, y de 3 no llevo nada para añadir al producto del 6 por el 3, y diré: 6 por 3 son 18, y llevo 1; 3 por 2 son 6, y 1 que llevaba son 7 &c.; pongo un punto sobre el 6 del multiplicando y debajo del 3 del multiplicador, y paso á multiplicar lo demas por el 2 del multiplicador, diciendo ántes: 2 por 6 son 12, y de 12 llevo 1; 2 por 2 son 4, y 1 que llevaba son 5, que pongo y continúo del mismo modo; despues apunto el 2 de arriba y el 2 de abajo, y paso á multiplicar por el 9 diciendo: 6 por 9 son 54, y de 54 llevo 5; 2 por 9 son 18, y 5 que llevaba son 23, y de 23 llevo 2 para añadirlas al producto 45 de 5 por 9, y será 47, pondré el 7 y llevo 4; 2 por 9 son 18, y 4 que llevaba son 22 &c.; paso á multiplicar por el 4, diciendo: 5 por 4 son 20, y de 20 llevo 2; 2 por 4 son 8 y 2 que llevaba son 10, &c.; paso á multiplicar por el 5, diciendo: 2 por 5 son 10, y de 10 llevo 1; 3 por 5 son 15, y 1 que llevaba son 16, pongo 6 y de 16 llevo 1; 5 por 5 son 25, y 1 que llevaba son 26 que pongo. Lo sumo todo, en la suma separo con la coma cuatro guarismos, y tendré ejecutada la operacion; donde se ve que tenemos sacados exactos los tres guarismos decimales que nos proponíamos.

{ Si quisiera multiplicar 5,6421768 por 0,004568372 14, sacando seis guarismos exactos haria la operacion como para sacar siete; y como aquí el guarismo de especie superior del multiplicador ocupa el tercer lugar despues de la coma, dirémos: de 3 á 7, que espresa los guarismos que quiero sacar, van 4, y por lo mismo deberémos tomar cuatro guarismos decimales en el multiplicando; hecho lo cual procederémos como se ve en (*A*) página siguiente.

Y como en la suma solo hai seis guarismos, y debo separar siete, supliré con un cero el que falta.

{ Supongamos ahora que se quiera multiplicar 25832,52742 por el número 324,72659347, como en este caso el primer guarismo del multiplicador ocupa el segundo lugar hácia la izquierda de las unidades, si quiero sacar cuatro guarismos exactos, haré la operacion como si quisiera sacar seis, porque esta es complicada, y diré: 2 (lugar que ocupa el

```
     . . . . .
(A)  5,6 4 2 1|7 6 8
     0,0 0 4 5 6 8 3 7 2 1 4
           . . . . .
    ______________________
      2 2 5 6 8 7
        2 8 2 1 0
          3 3 8 5
            4 5 1
              1 6
                3
    ______________________
    0,0 2 5 7 7 5 2
```

```
     . . . . . . . . . . .
(B)  2 5 8 3 2,5 2 7 4 2 0 0 0
           3 2 4,7 2 6 5 9 3 4 7
         . . . . . . . . . . .
     _________________________
     7 7 4 9 7 5 8 2 2 6 0 0 0
       5 1 6 6 5 0 5 4 8 4 0 0
       1 0 3 3 3 0 1 0 9 6 8 0
         1 8 0 8 2 7 6 9 1 9 4
             5 1 6 6 5 0 5 4 8
             1 5 4 9 9 5 1 6 4
               1 2 9 1 6 2 6 3
                 2 3 2 4 9 2 7
                     7 7 4 9 7
                     1 0 3 3 3
                       1 8 0 8
     _________________________
     8 3 8 8 5 0 8,6 2 9 8 1 4
```

guarismo del multiplicador por donde empieza la multiplicacion) y 6 (número de guarismos que quiero sacar) son 8; y estos serán los guarismos decimales que debo tomar en el multiplicando; pero como él no contiene sino cinco, deberé añadir tres ceros, y ejecutaré la operacion como se ve en (*B*).

{ Entendida ya bien la regla, vamos á manifestar el fundamento de ella, contrayéndonos al primer ejemplo; en el cual, como nos proponíamos hallar solo cuatro guarismos decimales, y el de especie superior del multiplicador tenia unidades, y las unidades para que el producto ocupe el cuarto lugar decimal se deben multiplicar por un guarismo que se halle en el cuarto lugar, resulta que por eso suprimimos los demas, porque nos darian un producto que se deberia colocar en el quinto guarismo; pero como de este producto podria resultar alguna unidad para el lugar inmediato, hemos aconsejado que en la multiplicacion se cuente con él. En el segundo ejemplo nos proponíamos sacar siete; y como el primer guarismo 4 del multiplicador ocupa el tercer lugar decimal, debe multiplicarse por el cuarto decimal del multiplicando para dar siete en el producto. En el tercer caso como el guarismo del multiplicador por donde empezaba la multiplicacion espresaba centenas, y las centenas para producir unidades que se hallen en el sesto lugar decimal, se deben multiplicar por un guarismo que se halle en el lugar octavo, se debe buscar dicho guarismo. Ahora, se suprime un guarismo en el multiplicando en cada multiplicacion parcial, porque como el guarismo del multiplicador por que se va á ejecutar la operacion es diez veces menor que el anterior, paraque el producto resulte en el mismo lugar que el precedente, se debe multiplicar por un guarismo que sea diez veces mayor que el del multiplicando anterior, esto es, por el que está

á la izquierda del último de dicho multiplicando; y por lo mismo este se debe apuntar, y el del multiplicador tambien para que no se olvide.

Esta abreviacion conforme la hemos presentado nos parece mas natural y sencilla que la que se atribuye á Ougtred, de que hacen uso algunos autores, y consiste en escribir el multiplicador en un órden inverso.

148 Para dividir las decimales *se añaden al dividendo ó divisor tantos ceros como se necesiten para que en ambos haya un mismo número de guarismos decimales; entónces se borra la coma y se ejecuta la division como la de los enteros, sin tener que hacer nada con el cociente. Despues, si la division no sale exacta, aquella resta que se habia de poner al lado del cociente en forma de quebrado, se convierte en quebrado decimal*; esto es, luego que se ha bajado el último guarismo se añade á la resta un cero, é inmediatamente se pone la coma en el cociente; se ve cuantas veces cabe el divisor en esta resta, se pone en el cociente despues de la coma este número de veces, ó cero sino cabe ninguna vez; se multiplica por el divisor y se resta; á la resta se le añade otro cero, se ve cuantas veces está contenido el divisor; y así se continúa hasta haber sacado los guarismos decimales que se quieran.

1.er ejemplo. Quiero dividir 0,5 por 0,125; añadiré al dividendo 0,5 dos ceros y se convertirá en 0,500; despues borro la coma en el dividendo y divisor, y queda reducida la operacion á dividir 500 por 125, lo que ejecutado como se ve en (*A*), da 4 por cociente, y digo que el 0,125 está contenido en 0,5 cuatro veces.

```
   (A)            (B)                    (C)
500|125     2400   |725          24632,5 |7000
000| 4      02250  |3,31034      03632 5 |35,1892857142857 14 &c.
             00750                0132 5
              02500                062 5
               03250                06 5
                0350                 0 20
                                       060
                                        040
                                         050
                                          010
                                           030
                                            020
```

2.º ej. Si quiero dividir 24 por 7,25, como el dividendo no tiene ningun guarismo decimal le debo añadir dos ceros: y borrando la coma en el divisor queda reducida la operacion á dividir 2400 por 725, la que ejecutada como se presenta en (*B*), da 3 por cociente y deja 225 por resta, la cual en vez de ponerla al lado del cociente 3 con la raya y el divisor debajo, la reduciré á decimales añadiéndole un cero, poniendo la coma despues del 3, y continuando la division; para esto veo que el 725 está contenido tres veces en 2250, pongo este 3 despues de la coma; multiplico por el divisor y resto; á la resta 75 añado otro cero, veo que está contenido una vez el divisor, pongo 1 en el cociente; y así continúo hasta sacar los guarismos decimales que desée, que aquí supongo son cinco.

3.^{er} ej. Si quisiera dividir 246,325 por 7, añadiria al divisor 7 tres ceros porque no teniendo ningun guarismo decimal, le faltan tres para tener los que el dividendo; borro despues la coma en el dividendo, y queda reducida la operacion á dividir 246325 por 7000, y ejecutada la operacion como se ve en (*C*) pág. ant., saco el cociente 35; y en vez de poner la resta 1325 á la derecha del cociente con la raya y el divisor debajo, le deberé añadir un cero y poner la coma en el cociente; pero cuando el divisor acaba en ceros, en vez de añadir un cero á la resta, se borrará uno en el divisor; y así, borraré un cero en el divisor, pondré la coma en el cociente, y averiguaré cuantas veces el 700 está contenido en 1325, hallo que cabe una vez; pongo 1 en el cociente despues de la coma, multiplico por el divisor y resto; borro otro cero en el divisor, y se convierte en 70, veo que está contenido ocho veces en 625, pongo 8 en el cociente, multiplico y resto; borro otro cero en el divisor, y se me convierte en 7, hallo que está contenido nueve veces en 65, pongo 9 en el cociente, multiplico y resto; y como ya no hai mas ceros en el divisor que poder borrar, añado á la resta 2 un cero, veo que en 20 está contenido dos veces el 7, pongo 2 en el cociente, multiplico y resto; y así continúo hasta sacar los guarismos que quiera; y advierto que desde el décimo guarismo decimal se empiezan otra vez á repetir, saliendo una fraccion, que en parte es periódica y en parte no.

Para manifestar el fundamento de esta regla, solo observarémos que con añadir los ceros que se necesiten al término que tiene ménos guarismos, no alteramos de ningun modo su valor (134); y con suprimir la coma en los dos términos, los multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como guarismos hai, lo que no altera el valor del cociente (93).

{ *Esc.* Cuando los ceros se han de añadir al divisor para que ambos tengan igual número de guarismos decimales, complica esto la operacion; por lo cual en la práctica se debe omitir, teniendo cuidado de saber donde se ha de colocar la coma en el cociente. Así, en el mismo ejemplo (*C*) pudiéramos haber omitido el añadir los tres ceros solo con atender á que la parte entera del dividendo 246,325 dividida por el 7, dará dos guarismos para la entera; por consiguiente haciendo la operacion como aquí se presenta:

```
246,325 | 7
36      |__________
 013    | 35,1892 &c.
  062
   065
    020
      6
```

Y poniendo la coma despues de los dos guarismos, se obtiene el verdadero cociente con mas sencillez.

{ En general, basta hacer que el divisor sea número entero corriendo la coma en ambos términos tantos lugares como sea necesario pa-

ra este efecto. Así es, que si tuviésemos que dividir 0,0007523 por 0,05, correríamos la coma en ambos dos lugares hácia la derecha, lo que equivale á multiplicar ambos términos por 100; y quedará reducida la operacion á dividir 0,07523 por 5. Ahora deberémos observar que espresando centésimas el guarismo de especie superior del dividendo, y hallándose contenido el divisor en él 1 vez, este cociente espresará centésimas; y continuando la operacion como aquí se presenta: sale el cociente 0,015046. }

```
0,07523 | 5
 25     |_________
  0023  | 0,015046
     30
     00
```

149 Tambien se presenta aquí abreviacion cuando el divisor es la unidad seguida de ceros; porque en este caso como está reducida la operacion á hacer el número 10, 100 &c. veces menor, lo que se consigue en virtud de lo dicho (135), establecerémos en general *que para dividir un número cualquiera que contenga decimales por la unidad seguida de un cierto número de ceros, no hai mas que correr la coma tantos lugares hácia la izquierda como ceros hai despues de la unidad; y sino hai bastantes guarismos hácia la izquierda de la coma, se suplen con ceros.*

Por ejemplo: si quiero dividir por 100 el número 452,3, ó lo que es lo mismo, si le quiero hacer cien veces menor, correré la coma dos lugares hácia la izquierda, y tendré 4,523; si le quisiera haber dividido por 1000 la hubiera corrido tres, y tendria 0,4523; y si le hubiera querido dividir por 100000 la hubiera corrido cinco lugares en esta forma 0,004523. Si el número no tuviese decimales se separarian con la coma tantos guarismos como ceros hubiese despues de la unidad; y así dividiendo por 100 el número 585 tendré 5,85; y dividiéndole por 10000 tendré 0,0585.

{ 150 Tambien es susceptible la division de las decimales de una abreviacion análoga á la de la multiplicacion, y consiste en ir disminuyendo ó suprimiendo un guarismo en el divisor á cada division parcial. Por ejemplo: si quisiera dividir 58,326432 por 3,257243, empezaria ejecutando la operacion como aquí se ve (*A*):

```
              ......                              .......
(A) 5832643,2 | 32 57243      (B) 85232794,0      | 52 743029
    2575400 2 |__________         32489765 0      |______________
    0295330 1 | 17,906688         00843947 60     | 16,1600112121
     0021783                        3165173 10
        2240                         000059 1360
         286                             06 3930
          26                              1 1187
                                          0 0639
                                             112
                                             007
                                               2
```

Donde advertimos despues de sacado el cociente entero 17, que si queremos el cociente total con seis guarismos, le podrémos hallar suprimiendo ó señalando con un punto encima un guarismo en el divisor, en vez de añadir un cero en el dividendo; esta operacion hace que el divisor sea algo menor, y por consiguiente el cociente deberá ser algo mayor; pero como el error está en el séptimo guarismo del divisor, resultará tambien que el error se originará en el séptimo del cociente; luego hallarémos los seis exactos. Despues se ejecuta la division diciendo: 3 en 29 cabe nueve veces, se pone 9 en el cociente á la derecha de la coma, y al hacer la multiplicacion se multiplica tambien por el guarismo apuntado para ver si se lleva algo, y añadirlo al producto del primero por que se ha de hacer la multiplicacion efectiva; despues se va suprimiendo otro guarismo, &c.

{ Si se quisieren sacar mas guarismos exactos que los que tiene el divisor ménos uno, entónces se sacarán añadiendo á la resta tantos ceros como esprese la diferencia entre los que queremos sacar exactos, y los que hai en el divisor ménos uno, y despues se sacarian los demas suprimiendo guarismos en el divisor. Por ejemplo: si quisiera sacar con diez guarismos exactos el cociente de 852,32794 por 52,743029, ejecutaria la operacion como se ve en (*B*) pág. ant.: siguiéndola por el método regular sacaria tres guarismos decimales exactos, y despues seria cuando empezaria á suprimir ó apuntar los guarismos del divisor. }

151 Como en los quebrados decimales hace la coma los oficios de divisor ó denominador, resulta que para valuarlos *se multiplican por el número que espresa las veces que la unidad en que se quiere valuar el quebrado, cabe en aquella á que se refiere el quebrado. Si hai unidades de especie inferior todavía, se vuelve á multiplicar el quebrado que resulte por el número de veces que la unidad en que se quiere valuar ahora este quebrado, cabe en aquella á que se refiere el quebrado. Así se continúa hasta que no haya unidades de especie inferior; y si al fin queda quebrado se desprecia sino llega á cinco décimas, y se añade en vez de él una unidad si llega ó pasa de cinco décimas.*

1.er ejemplo. Si quiero averiguar cuanto valen 0,37 de doblon, multiplicaré como se ve en (*A*) página siguiente, el 0,37 por 4 que son los pesos que tiene un doblon, y saco un peso y 0,48 de peso; que para reducirle á reales multiplico el 0,48 por 15 que son los reales que tiene el peso. Para esto coloco el 15 debajo del primer producto 1, 48; pero no multiplicaré el entero 1, y saco 7,20, en el cual borraré el 0 y multiplicaré por 34 las dos décimas, y saco 6,8, esto es, 6 maravedíses y 8 décimas de maravedí; pero como 8 décimas es mayor que 5, diré que son 7 maravedíses; y las 0,37 de doblon valdrán 1 peso, 7 reales y 7 maravedíses.

2.º ej. Si quisiera averiguar cuanto valian 0,3251 de vara, haria la operacion como se ve en (*B*) página siguiente: y haliaria 0 pies, 11 pulgadas y 8 lineas.

(*A*) 0,37 de doblon.	(*B*) 0,3251 de vara.	(*C*) 0,7432 de quintal.
4	3	4
1,48 pesos.	0,9753 pies.	2,9728 arrobas.
15	12	25
240	19506	48640
48	9753	19456
7,2~~0~~ reales.	11,7036 pulgadas.	24,32~~00~~ libras.
34	12	16
6,8 maravedíses.	14072	192
	7036	32
	8,4432 lineas.	5,12 onzas.
		16
		1,92 adarmes.

3.er ej. Si quisiera averiguar cuanto valian 0,7432 de quintal, ejecutaria la operacion como se ve en (*C*): y sacaria dos arrobas, 24 libras, 5 onzas y 2 adarmes, porque en lugar de las 92 centésimas se debe tomar una unidad mas.

En el párrafo (136) nos propusimos reducir á quebrado decimal el $\frac{5}{7}$ de doblon sin que se perdiera medio maravedí, y obtuvimos 0,7142; si queremos ahora averiguar si en efecto conseguimos nuestro intento, le valuarémos, y ejecutándolo hallarémos que sale 2 pesos, 12 reales y 28,968 maravedíses; cuyo resultado comparado con el que obtuvimos (128), vemos que no se diferencia en medio maravedí.

De las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir números denominados.

152 Se da el nombre de *números complejos ó denominados*, *á aquellos que constan de unidades de diferentes especies relativas todas á un mismo género*: como 7 varas, 2 pies, 5 pulgadas y 8 lineas, y 6 quintales, 2 arrobas y 7 libras. Es indispensable que todas las unidades se refieran á un mismo género; así, 8 pesos y 5 varas no componen un número denominado; porque las unidades aunque son de diferentes especies no se refieren á un mismo género ó clase como de peso, de medida, de moneda, &c.

Aunque nosotros hemos puesto la division y subdivision de las unidades de pesos y medidas mui desde el principio, porque era indispensable para las aplicaciones que teníamos que hacer de las demas operaciones, no obstante las volverémos aquí á poner con el objeto de presentarla en tablas, cuya inteligencia es mui importante.

Medidas de longitud.

linea.

12	pulgada.			
144	12	pié.		
432	36	3	vara.	
2880000	240000	20000	6666$\frac{2}{3}$	legua.

Medidas de áridos.

ochavillo.

4	ochavo.				
16	4	cuartillo.			
64	16	4	celemin.		
768	192	48	12	fanega.	
9216	2304	576	144	12	cahiz.

Medidas de tiempo.

tercero.

60	segundo.			
3600	60	minuto.		
216000	3600	60	hora.	
5184000	86400	1440	24	dia.

Medidas de superficie ó agrarias.

pié cuadrado.

9	vara cuadrada.			
144	16	estadal cuadrado.		
1728	192	12	cuartillo de tierra.	
6912	768	48	4	celemin.
82944	9216	576	48	12 fanega.

De peso.

grano.

12	tomin.					
36	3	adarme.				
576	48	16	onza.			
9216	768	256	16	libra.		
230400	19200	6400	400	25	arroba.	
921600	76800	25600	1600	100	4	quintal.

De moneda.

maravedí.

34	real.		
510	15	peso.	
2040	60	4	doblon.

Estas tablas están dispuestas de manera que empiezan por la unidad de especie inferior, y el número que está á la izquierda de cada clase de unidades manifiesta cuantas unidades vale esta respecto de la que hai encima de la casilla donde se halla dicho número. Por ejemplo: en la tabla de las unidades de peso, el 16 que hai inmediatamente á la izquierda de la palabra *libra*, manifiesta que la libra equivale á 16 onzas, que es el nombre que tiene encima; luego, á la izquierda del 16 hai 256, que indica que la libra equivale á 256 adarmes; y tambien á 768 tomines y á 9216 granos.

Cada nacion usa de diferente division y subdivision en sus unidades de pesos y medidas; pero las que nos son de un conocimiento necesario son las de las naciones francesa é inglesa, tanto porque las de la primera han

estado autorizadas en nuestra nacion por mucho tiempo, y los escritores ó traductores han cuidado tan poco sobre este punto, que hablan de pesos y medidas poniendo los resultados en medidas francesas como si fuesen españolas; como por las relaciones que debe haber entre nuestra nacion y la inglesa. Por lo cual pondrémos aquí su correspondencia con las españolas sacada de un escelente escrito que aun conserva inédito nuestro sabio é infatigable D. Juan de Peñalver (*).

Mas con el fin de que los jóvenes se acostumbren á ver la colocacion con que se suele presentar la division y subdivision de dichas unidades de pesos y medidas, pondrémos estas bajo otro aspecto, empezando por la de especie superior y no haciendo uso de las rayas, porque de este modo no les sorprenderá cuando las encuentren así en otros autores.

Tabla de las medidas y pesas antiguas de Francia.

MEDIDAS LINEALES.

De Francia equivalen á. . . . . de España.

Toesas.	*Brazadas.*	*Pies de Rei.*	*Pulgadas.*	*Lineas.*		
1	1$\frac{1}{5}$	6	72	864. . . .	6,99494	pies.
	1	5	60	720. . . .	5,829	idem.
		1	12	144. . . .	1,165823	idem.
			1	12. . . .	1,165823	pulgadas.
				1. . . .	1,165823	lineas.

La *ana* ú *ona* (*aune*). . . . . 1,422 varas.
La longitud del péndulo simple que oscila los segundos en Paris es de 440,5593 lineas del pié de Paris. . . . . 513,614 lineas.
El estadal ó pértiga (perche) varía; el mas general tiene de largo 22 pies de Rei. . . . . 25,648 pies.

MEDIDAS ITINERARIAS.

La legua comun es de 2283 toesas ó. . . . . . . 0,798473 legu. (**)
La legua de 2500 toesas equivale á. . . . . 0,874367 leguas.
La posta es de dos leguas comunes ó. . . . . . . 1,596946 leguas.

MEDIDAS DE SUPERFICIE.

El pié cuadrado equivale á. . . . . 1,359144 pies cuadrados.

(*) *D. Josef Rebollo en su escelente traduccion de la Aritmética de Lacroix ha publicado un estracto de este escrito, hecho con mucho acierto.*

(**) *Leguas de 20000 pies de España.*

El estadal cuadrado á. . . . . { 657,826 pies cuadrados. / 4,568 estad. cuadrados. (*)

El *arpent* es por lo comun de 100 pértigas ó estadales cuadrados; pero como el estadal varía, tambien varía el arpent { 456,82 estad.cuadrados. / 1,142 aranzadas.

La legua cuadrada de 2500 toesas es de 0,7645186 leguas cuadrad.ˢ

MEDIDAS DE SOLIDEZ.

Pié cúbico. . . . . 1,58452 pies cúbicos.
Toesa cúbica. . . . . 342,2563 pies cúbicos.

En la arquitectura, escavaciones, &c. usan de la espresion: *pié de toesa cúbica*, que significa el sólido que tiene por base el cuadrado de una toesa y por altura 1 pié. En este mismo sentido se dice: *pulgada de toesa cúbica*, y *linea de toesa cúbica*.

PARA LAS MADERAS.

De Francia equivalen á. . . . . de España,

Ciento de madera de carpinteria.	*Solive.*	*Pié cúbico.*	*Pié de solive.*	*Pulgada de solive.*	*Linea de solive.*		
1	100	300	600	7200	86400 .	475,356	*pies cúbicos.*
	1	3	6	72	864 .	4,75356	idem.
		1	2	24	288 .	1,58452	idem.
			1	12	144 .	0,79226	idem.
				1	12 .	0,06602	idem.
					1 .	0,00550	idem.

MEDIDAS DE ÁRIDOS.

De Francia valen en medidas. . . . . de España.

Muid ó tonneau.	*Setier.*	*Mine.*	*Minot.*	*Boisseau.*	*Litron.*	*Pulgada cúbica.*		
1	12	24	48	144	2304	92160 .	32,8895	fanegas.
	1	2	4	12	192	7680 .	2,7408	idem.
		1	2	6	96	3840 .	1,3704	idem.
			1	3	48	1920 .	8,2224	celemines.
				1	16	640 .	2,7408	idem.
					1	40 .	0,6852	cuartillos.
						1 .	1,584522	pulg. cúb.

(*) *Estadales de cuatro varas ó 12 pies españoles de lado.*

PARA LA AVENA.

Muid ó tonneau.	*Setier.*	*Mine.*	*Minot.*	*Boisseau.*	*Picotin.*	*Pulgada cúbica.*		
1	12	24	48	288	1152	184320.	65,77896	fanegas.
	1	2	4	24	96	15360.	5,48158	idem.
		1	2	12	48	7680.	2,74079	idem.
			1	6	24	3840.	1,37039	idem.
				1	4	640.	2,74079	celemines.
					1	160.	2,74079	cuartillos.
						1.	1,584522	pulgadas cúbicas.

PARA LOS LÍQUIDOS.

Muid.	*Feuillette.*	*Cuartaut.*	*Pié cúbico.*	*Velte ó verge.*	*Cuarte ó pot.*	*Pinte.*	*Chopine ó setier.*	*Poisson.*	*Roquille.*	*Pulgada cúbica.*	
1	2	4	8	36	144	288	576	2304	9216	13824.	16,9933 cánt.ˢ
	1	2	4	18	72	144	288	1152	4608	6912.	8,4967 idem.
		1	2	9	36	72	144	576	2304	3456.	4,2483 idem.
			1	4½	18	36	72	288	1152	1728. . .	
				1	4	8	16	64	256	384.	3,776 azumb.ˢ
					1	2	4	16	64	96.	3,776 cuart.ˢ
						1	2	8	32	48.	1,888 idem.
							1	4	16	24.	3,776 copas.
								1	4	6.	0,944 idem.
									1	1½	0,236 idem.
										1.	1,584522 pu.ˢc.ˢ

PARA LA SAL.

Muid.	*Setier.*	*Mine.*	*Minot.*	*Boisseau.*	*Medida de sal.*	*Litron.*	*Pulgada cúbica.*		
1	12	24	48	192	1152	3072	122880 .	43,85263	fanegas.
	1	2	4	16	96	256	10240 .	3,65439	idem.
		1	2	8	48	128	5120 .	1,82719	idem.
			1	4	24	64	2560 .	10,96314	celemin.ˢ
				1	6	16	640 .	2,74079	idem.
					1	2⅔	106⅔.	1,8272	cuartillos.
							40 .	0,6852	idem.
							1 .	1,584522	pul. cúb.ˢ

La pinta de aceite equivale á. . . . . 1,8948 libras.

PESAS.

Mi-ller.	*Quin-tal.*	*Libra.*	*Marco.*	*Onza.*	*Grueso ó dracma.*	*Escrú-pulo ó dinero.*	*Grano.*		
1	10	1000	2000	16000	128000	384000	9216000.	10,63928	quintales.
	1	100	200	1600	12800	38400	921600.	1,063928	idem.
		1	2	16	128	384	9216.	1,063928	libras.
			1	8	64	192	4608.	1,063928	marcos.
				1	8	24	576.	1,063928	onzas.
					1	3	72.	1,063928	ochavos.
						1	24.	1,063928	tomines.
							1.	1,063928	granos.

La libra para la seda es de 15 onzas. . . . . { 15,95892 onzas. 0,9974 libras.

153 El cálculo que se hace con los números denominados es sumamente complicado como verémos en adelante; por otra parte la division y subdivision de las unidades de pesos y medidas, no ofreciendo ninguna union ni dependencia, forma un sistema vago é incoherente: ademas de esto cada nacion, y aun en cada nacion, cada provincia usa de diferente subdivision, de manera que espresando con un mismo nombre unidades de diferente valor, resulta una multitud de incertidumbres y de errores en el comercio, en la sociedad, en las ciencias y en las artes. Con el fin de evitar todos estos inconvenientes tratáron los franceses de elegir un nuevo sistema filosófico; y como este era un punto que interesaba á todas las naciones, las mas de las civilizadas de Europa embiáron sus comisionados para presenciar todos los esperimentos; por nuestra parte fuéron Don Agustin Pedrayes y D. Gabriel Ciscar, como ya hemos citado en otro lugar.

En el nuevo sistema se reducen todas las medidas á la unidad de longitud; esta convenia que fuese invariable y se tomase en la naturaleza, por lo cual se eligió un cuadrante del meridiano terrestre, y se tomó la diezmillonésima parte de esta distancia que es 3 pies, o pulgadas y 11,296 lineas francesas ó 3,5889216 pies españoles. Á esta distancia se le llamó (*mètre*) ó *metro* de una palabra griega que significa *medida*, como queriendo decir: *medida fundamental* ó *medida por escelencia.* Se llama despues (*are*) *ara* á la unidad de superficie, y se convino en representarla por un cuadrado que tuviese por lado una longitud de 10 metros. Se ha llamado *stere* á la unidad de solidez, y convinieron en entender por esta palabra el valor de un metro cúbico, es decir, una medida que tuviese un metro de largo, de ancho, y de profundo. Para tener despues la unidad de medida para las capacidades, se ha elegido el *decímetrocúbico*, es decir, una medida hueca de la figura

de un cubo, y que tiene una décima de metro en longitud, ancho y alto, y se ha dado á esta medida el nombre de *litre*. Para los pesos se estableció la *grama*, que se ha hecho igual al peso de un *centímetrocúbico* de agua destilada. En cuanto á la unidad de moneda que se llama *franco*, su valor es el de una pieza que contiene nueve décimas de plata con una décima de cobre, y su peso es de cinco gramas.

Con los nombres colectivos griegos *deca* (diez), *hecto* (ciento), *quilo* (mil), y *miria* (diez mil), formáron despues las palabras reunidas á las primitivas para significar unidades diez veces, cien veces, &c. mayores que las que significaba su raiz; y con las partitivas latinas *deci*, *centi*, *mili*, &c. para significar las que eran diez, ciento, mil &c. veces menores.

Entendido esto, hé aquí la correspondencia de estas medidas y pesas.

Nuevas medidas y pesas de Francia.

MEDIDAS LINEALES.

De Francia equivalen á medidas. . . . . de España.

Cuadrante de meridiano.	*Grado terrestre.*	*Miriámetro.*	*Quilómetro.*	*Hectómetro.*	*Decámetro.*	*Metro.*	*Decímetro.*	*Centímetro.*		
1	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000. .	3 5 8 8 9 2 1 6	pies.
	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000. .	3 5 8 8 9 2,1 6	idem.
		1	10	100	1000	10000	100000	1000000. .	{3 5 8 8 9,2 1 6 {1,7 9 4 4 6	idem. leguas.
			1	10	100	1000	10000	100000. .	3 5 8 8,9 2 1 6	pies.
				1	10	100	1000	10000. .	3 5 8,8 9 2 1 6	idem.
					1	10	100	1000. .	3 5,8 8 9 2 1 6	idem.
						1	10	100. .	3,5 8 8 9 2 1 6	idem.
							1	10. .	{0,3 5 8 8 9 2 1 6 {4,3 1	idem. pulgadas.
								1. .	{0,0 3 5 8 8 9 2 1 6 {5,1 7	pies. lineas.

El grado terrestre tiene 17,9446 leguas de 20000 pies españoles segun la última medicion hecha por los franceses.

MEDIDAS DE SUPERFICIE.

Miriara.	*Quilara.*	*Hectara.*	*Ara.*	*Deciara.*	*Centiara.*	*Metro cuadrado.*		
1	10	100	1000	10000	100000	1000000. . .	8 9 4 4 6,8 7	Estadales cuadrados de á 12 pies.
	1	10	100	1000	10000	100000. . .	8 9 4 4,6 8 7	
		1	10	100	1000	10000. . .	8 9 4,4 6 8 7	
			1	10	100	1000. . .	8 9,4 4 6 8 7	
				1	10	100. . .	8,9 4 4 6 8 7	
					1	10. . .	0,8 9 4 4 6 9	
						1. . .	{0,0 8 9 4 4 7 {1 2,8 8 0 3 5	 . . pies cuadrados.

La hectara vale {2,27234 aranzadas de 400 estadales cuadrados.
{1,5529 fanegas de 576 estadales cuadrados.

MEDIDAS DE CAPACIDAD.					MEDIDAS DE ÁRIDOS.			MEDIDAS DE LÍQUIDOS.	
Quilo-litre.	*Hecto-litre.*	*Deca-litre.*	*Litre.*	*Centi-litre.*	*Metro cúbico.*				
1	10	100	1000	10000	1 . .	17,9909	fanegas.	61,9653	cántaras.
	1	10	100	1000	0,1 . .	1,79909	idem.	6,19653	idem.
		1	10	100	0,01 . .	2,15890	celemines.	4,957226	azumbres.
			1	10	0,001 . .	3,454249	ochavos.	1,98289	cuartillos.
				1	0,0001 . .	1,3815	ochavillos.	0,198289	idem.
					0,00001 . .	0,13815	idem.	0,0198289	idem.
					1 . .	1,712095	varas cúbicas.	46,226565	pies cúbicos.

La litra de aceite tiene 1,98971 libras. PARA LA LEÑA..... Stere igual al cubo del metro.

PESAS.

Ba-ro.	*Decí-baro.*	*Miria-grama.*	*Quilo-grama.*	*Hecto-grama.*	*Deca-grama.*	*Grama.*	*Deci-grama.*	*Centigrama.*	*Miligrama.*	*Metro cúbico de agua pura.*	
1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	1..21,734736	*quint.s*
	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	0,1..2,1734739	*id.*
		1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	0,0 1..21,734736	*lib.s*
			1	10	100	1000	10000	100000	1000000	0,0 0 1..2,1734736	*id.*
				1	10	100	1000	10000	100000	0,0 0 0 1..3,4775578	*on.s*
					1	10	100	1000	10000	0,0 0 0 0 1..200,307333	*gr.s*
						1	10	100	1000	0,0 0 0 0 0 1..20,0307333	*id.*
							1	10	100	0,0 0 0 0 0 0 1..2,00307333	*id.*
								1	10	0,0 0 0 0 0 0 0 1..0,20.307333	*id.*
									1	0,0 0 0 0 0 0 0 0 1..0,0200307333	*id.*

Tambien se suelen presentar estas tablas en la forma que vamos á poner aquí la anterior, que es del modo siguiente:

Baro (diez decíbaros).	21,734736	quintales.
Decíbaro (diez miriagramas).	2,1734736	idem.
Miriagrama (diez quilogramas).	21,734736	libras.
Quilograma (diez hectogramas).	2,1734736	idem.
Hectograma (diez decagramas).	3,4775578	onzas.
Decagrama (diez gramas).	200,307333	granos.
Grama (diez decigramas).	20,0307333	idem.
Decigrama (diez centigramas).	2,00307333	idem.
Centigrama (diez miligramas).	0,200307333	idem.
Miligrama (0,000000001 del peso del metro cúbico de agua pura).	0,0200307333	idem.

Correspondencia de las medidas y pesas inglesas con las españolas.

MEDIDAS INGLESAS DE LONGITUD.

El pié ingles (*foot*) equivale á 1,0938951 pies españoles. La *yarda* ó vara equivale á 3 pies ingleses.

La *ana* para los tejidos ordinarios (*the english ell*) equivale á 1,3674 varas españolas. La *ana* para los lienzos superfinos (*the flemish ell*) equivale á 0,82042 de la vara española.

La milla equivale á 0,28885 de la legua española.

El estadal (*pole*) equivale á 18,0488 pies españoles, ó lo que es lo mismo, á 1,504 estadales españoles.

AGRARIAS.

El (*rood*) equivale á 40 estadales ingleses cuadrados, y de consiguiente á 90,48 estadales cuadrados españoles.

El *acre* legal equivale á 4 *roods*, y de consiguiente á 361,92 estadales cuadrados españoles.

El *acre* no es generalmente de la misma estension, porque el estadal ingles varía desde $16\frac{1}{2}$ á 28 pies ingleses.

DE CAPACIDAD.

El *gallon* de cerveza equivale á 9,1626 cuartillos españoles: y el de vino y otros líquidos á 7,50589 cuartillos.

La pipa ó bota de vino contiene 126 *gallons*, y se divide en dos *hogsheads*.

El *gallon* de aceite equivale á 7,53289 libras españolas.

El *bushel* para los granos equivale á 7,7052 celemines, y se divide en 4 *pecks*.

La *cuartera* (*cuarter*) contiene 8 *bushel*, y de consiguiente equivale á 5,1368 fanegas.

PESAS.

La libra llamada de *troy* tiene 12 onzas, y la de *avoir du pois* 16

onzas, pero las onzas de la primera son mayores que las de la segunda. La primera equivale á 0,81111, y la segunda á 0,98556 de la libra española. La libra de *avoir du pois* es para las mercancías, y la de *troy* es para los metales preciosos y joyas.

El quintal (*hundred*) tiene 112 libras inglesas, y equivale á 110,3824 libras españolas.

MONEDAS EFECTIVAS.

		$R.^s$	$v.^n$ $mr.^s$
De oro....	La guinéa (*guinei*) es de 21 chelines y vale.	103. .	10,152
	La moneda de 7 chelines corresponde á.	34. .	14,717
De plata.	La corona (*crown*) es de 5 chelines y vale. . .	22. .	15,893
	El chelin (*shilling*) corresponde á.	4. .	16,776
De cobre.	El penique (*penny*).		12,731
	El (*farthing*).		3,182

Del cotejo de las monedas de oro inglesas hecho con las nuestras del mismo metal, se deduce que la libra esterlina, moneda imaginaria equivalente á 20 chelines, corresponde á 98 reales y 12,9 maravedíses de vellon; pero del cotejo de las monedas de plata resulta que la libra esterlina equivale á 89 reales 29,52 maravedíses de vellon; y á este respecto nuestro peso de plata equivale á 40,216 peniques ó dineros. }

154 Entendido esto, pasemos á manifestar como se ejecutan las operaciones con estos números.

Para sumar los números denominados, *se ponen todos los sumandos los unos debajo de los otros de modo que se correspondan las unidades de cada especie; se tirará una raya, y se empieza á sumar por la especie inferior; si la suma de estas contiene alguna ó algunas unidades de la especie superior inmediata, se guardan para sumarlas con las de la otra columna; se suman estas, y así se continúa hasta haber sumado las de especie superior, y el número que resulta debajo de la raya es la suma pedida.*

1.^{er} ejemplo. Quiero sumar 8 pesos, 3 reales y 7 maravedíses con 5 pesos, 12 reales y 23 maravedíses, con 23 pesos, 7 reales y 15 maravedíses, y con 1 peso, 5 reales y 3 maravedíses; colocaré todos los sumandos los unos debajo de los otros como aquí se ve:

(1	(1	
8 $p.^s$	3 $r.^s$	7 $mr.^s$
5	12	23
23	7	15
1	5	3
	~~28~~	~~48~~
38 $p.^s$	13 $r.^s$	14 $mr.^s$

Tiraré una raya y empezaré sumando los maravedíses, lo que me da 48 que pongo debajo de los maravedíses, hasta que esté bastante diestro para conservar en la memoria el resultado, y hallar los que quedan despues de sacadas las unidades que hai para la columna inmediata; veo que en 48 maravedíses hai un real y quedan 14 maravedíses; borro el 48, pongo debajo los 14 maravedíses que me quedan, y el 1 real que llevo para sumarle con los reales de la columna inmediata, le pongo encima de los reales separado con una media luna, y sumo todos estos reales, lo que me da 28 reales; pero en 28 reales hai 1 peso y quedan 13 reales; borro el 28; pongo debajo los 13 reales que me quedáron, y el 1 peso le coloco sobre los pesos, y sumo, lo que me da 38 pesos; y por tanto digo que la suma es 38 pesos, 13 reales y 14 maravedíses.

2.º ej. Si quiero sumar 15 quintales, 3 arrobas, 23 libras y 7 onzas, con 47 quintales, 1 arroba y 15 onzas, con 3 quintales, 5 libras y 12 onzas, y con 13 quintales, 2 arrobas, 5 libras y 2 onzas, ejecutaré la operacion como aquí se ve:

Como en esta operacion hemos sumado todas las partes de que se componen todos los sumandos no nos queda duda de que hemos sumado todos los sumandos.

(1	(1	(2	
15 *quint.s*	3 *arr.s*	23 *lib.s*	7 *on.s*
47	1		15
3		5	12
13	2	5	2
	~~7~~	~~35~~	~~36~~
79 *quint.s*	3 *arr.s*	10 *lib.s*	4 *on.s*

155 Para restar los números denominados *se pone el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de una misma especie; se tira una raya, y se va restando cada especie de unidades del sustraendo de las correspondientes en el minuendo, empezando por las de especie inferior. Aquí puede ocurrir que en alguna especie haya mas unidades en el sustraendo que en el minuendo; para poder restar en este caso, se toma una unidad de la especie inmediatamente superior, y se descompone en las de aquella especie de que se trata, se suman con las que hai, y de esta suma se restan las del sustraendo; despues es menester tener presente en la columna inmediata que se quitó una unidad al minuendo para rebajársela. Si en la especie de unidades inmediata no hai ninguna unidad, se pasa á tomarla de la otra, y en caso de no haberla tampoco en esta, se pasa á la otra, y así hasta llegar á una en que las haya; entónces se toma una de estas unidades, se descompone en las de especie inferior inmediata, y como con sola una de estas hai bastante para poder restar de ella las de la especie inferior que se trata de restar, se conciben dejadas en la columna inmediatamente inferior tantas unidades ménos una, como tenia la de especie superior inmediata; esta unidad que queda se descompone en unidades de la especie inferior siguiente, y si es de estas de las que se habia de restar se ejecuta la resta; sino, se dejan con el pensamiento en esta columna tantas unidades ménos una, como contenia la de especie superior inmediata, y esta que queda se descompone en las que la siguen; y así se procede hasta que se llega á la columna en que se trataba de restar, lo cual ejecutado, se pasa á las columnas siguientes, teniendo cuidado de rebajar una unidad á aquella de quien se quitó.* Esto se hará mas claro con los ejemplos.

1.er ejemplo. De 75 doblones, 3 pesos, 12 reales y 27 maravedíses quiero restar 12 doblones, 1 peso, 7 reales y 19 maravedíses; colocaré el sustraendo debajo del minuendo, y despues de tirada la raya, empezaré á restar por la columna de los maravedíses, lo que da 8 maravedíses de resta; paso á restar los reales del sustraendo de los correspondientes del minuendo, y hallo 5 reales de resta; paso á los pesos, y encuentro 2 pesos; y finalmente pasando á los doblones hallo que la resta total es 63 doblones, 2 pesos, 5 reales y 8 maravedíses.

75 *dob.s*	3 *pesos.*	12 *r.s*	27 *mar.s*
12	1	7	19
63 *dob.s*	2 *pesos.*	5 *r.s*	08 *mar.s*

2.º ej. De 59 quintales, 2 arrobas, 23 libras, 6 onzas y 13 adarmes quiero restar 37 quintales, 3 arrobas, 15 libras, 9 onzas y 4 adarmes.

59 *quint.s*	2 *arr.s*	23 *lib.s*	6 *on.s*	13 *adarm.s*
37	3	15	9	4
21 *quint.s*	3 *arr.s*	7 *lib.s*	13 *on.s*	9 *adarm.s*

Despues de colocado el sustraendo debajo del minuendo y tirada la raya, empiezo restando los adarmes, y hallo 9 adarmes de resta; paso á las onzas, y como de 6 onzas no puedo restar 9 onzas, tomo una unidad de la especie superior inmediata que es la de las libras; y como la libra tiene 16 onzas, añado á estas 16 las 6 que habia en la columna de las onzas y tengo 22 onzas; restando ahora 9 onzas de 22 onzas saco 13 de resta; paso á la columna de las libras, y como tomé una unidad de las libras del minuendo para poder restar las onzas, consideraré el 23 libras con una ménos, es decir, como si fuese 22, y restando 15 de 22 saco por resta 7 libras; paso á la columna de las arrobas, veo que no se pueden restar 3 arrobas de 2 arrobas, por consiguiente tomo una unidad de los quintales, que como tiene 4 arrobas, digo: 4 y 2 que tenia son 6, de 3 á 6 van 3, pongo en la resta 3 arrobas; y pasando á restar los quintales, teniendo presente que he tomado uno de los del minuendo, saco por último que la resta total es 21 quintales, 3 arrobas, 7 libras, 13 onzas y 9 adarmes.

3.er ej. De 29 varas y 5 lineas quiero restar 15 varas, 2 pies, 8 pulgadas y 7 lineas; colocaré el sustraendo debajo del minuendo ocupando con ceros los lugares donde no hai unidades en el minuendo conforme aquí se ve:

	2	11	
29 *var.s*	o *pies.*	o *pulg.s*	5 *lin.s*
15	2	8	7
13 *var.s*	o *pies.*	3 *pulg.s*	10 *lin.s*

Y despues de tirada la raya, empiezo á restar por las lineas; pero como de 5 lineas no puedo restar 7 lineas, voi á tomar una unidad de la columna inmediata mas como no las hai, paso á la otra que tampoco tiene, y así tengo que tomar una unidad de la columna de las varas; 1 vara tiene 3 pies, y como para restar las lineas solo se necesita un pié, dejo con el pensamiento los otros 2 pies en la columna de los pies, ó para mayor claridad pongo 2 encima del 0 pies; 1 pié que es el que me queda tiene 12 pulgadas, y como para restar las lineas es suficiente 1 pulgada, dejo las otras 11 en la columna de las pulgadas, y luego digo: 1 pulgada tiene 12 lineas, y 5 que hai en la columna de las lineas son 17, quitando de 17 lineas, las 7 lineas que hai en el sustraendo, quedan 10 lineas; restando despues 8 pulgadas de 11 pulgadas, 2 pies de 2 pies y 15 varas de 28 varas, porque ántes quité una, saco por resta total 13 varas, 0 pies, 3 pulgadas y 10 lineas.

4.º ej. Si de 327 doblones quiero restar 258 doblones, 2 pesos, 13 reales y 27 maravedíses, ejecutaré la operacion como aquí se ve:

Como aquí tambien restamos todas las partes del sustraendo de todas las del minuendo, y todas las restas parciales las tenemos reunidas en un solo número, este espresará la resta total.

	3	14	34
327 *dob.s*	0 *p.s*	0 *r.s*	0 *mr.s*
258	2	13	27
068 *dob.s*	1 *p.s*	01 *r.s*	07 *mr.s*

156 En la multiplicacion de los números denominados se pueden seguir tres métodos: 1.º el poner en forma de número fraccionario cada número denominado, lo que se consigue reduciéndole todo á las unidades de especie inferior, y poniendo á esto por denominador el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior está contenida en la superior, y ejecutando despues la multiplicacion; 2.º el practicar tres reglas que dirémos; y el 3.º el que se conoce con el nombre de las partes alicotas.

Los dos primeros son, aunque complicados, independientes del talento del calculador, y por eso se deben preferir, porque están al alcance de todos; el otro es mas filosófico, y al mismo tiempo mas corto, por lo que tambien debe llamar nuestra atencion; y siendo el 2.º algo mas breve que el primero será el que en general aconsejemos que se siga, y por lo mismo le vamos á dar á conocer.

Este método consiste en practicar las tres reglas siguientes: 1.ª *redúzcanse el multiplicando y multiplicador á la menor de sus especies*; 2.ª *multiplíquense entre sí estos dos números despues de reducidos*; 3.ª *divídase el producto por el número que espresa cuantas veces la unidad de especie inferior del multiplicador cabe en la mayor, y el cociente espresará el producto en las unidades de especie inferior del multiplicando; por lo que se deberán reducir á las de especie superior segun las reglas dadas* (78).

En esta cuestion es indispensable conocer cual es el multiplicando y cual el multiplicador, para practicar la tercera regla; y así, recordarémos que esto se conoce viendo de que especie es lo que buscamos, y el número de los datos que sea de esta misma especie, será el multiplicando, y el otro será el multiplicador.

Para hacer aplicaciones de estas reglas, supongamos que se quiera averiguar cuanto valen 5 varas y 2 pies, costando la vara á 8 pesos y 3 reales. Reduciré primero el multiplicando y multiplicador á la menor de sus especies, y tendré el primero reducido á 123 reales, y el segundo á 17 pies; multiplico 123 por 17 y saco el producto 2091; divido este producto por 3, que espresa las veces que la unidad de especie inferior del multiplicador cabe en el mayor, y tendré el cociente 697, que espresa los reales que valen las 5 varas y 2 pies; mas como la cuestion venia propuesta en pesos, reduciré estos 697 reales á pesos, y sacaré 46 pesos y 7 reales.

2.º ej. Si quisiera averiguar cuanto costaban 3 quintales, 2 arrobas y 7 libras de azúcar, costando el quintal 7 doblones, 3 pesos y 8 reales, reduciré el multiplicando y multiplicador á la menor de sus especies, y se me convertirán en 473 reales y 357 libras; multiplicaré estos dos números entre sí, y el producto 168861 le dividiré por 100 á causa de componerse el quintal de 100 libras, lo que (135) dará 1688,61 reales; que reducidos á doblones hacen 28 doblones, 0 pesos y 8,61 reales, que vienen á ser 8 reales, y 21 maravedíses.

3.er ej. Si quiero multiplicar 8 varas y 2 pies por 5 varas y 1 pié, reduciré el multiplicando y multiplicador á la menor de sus especies, y tendré que multiplicar entre sí los números 26 pies y 16 pies, lo que da el producto 416; ahora tendria que dividir por 3 este producto segun la tercera regla; pero como luego tengo que volver á dividir por 3 para que salgan reducidas á la especie superior que se daba en el multiplicando, le dividiré desde luego por el producto de 3 por 3 que es 9, y sacaré 46 $\frac{2}{9}$ varas; pero estas varas no son de la misma especie que las del multiplicando y multiplicador, sino que son varas *cuadradas*. Estos casos en que el multiplicando y multiplicador son de una misma especie, no ocurren comunmente sino en la medicion de las tierras.

De estas reglas solo debemos manifestar el fundamento de la tercera; la cual se ha de practicar porque cuando multiplicamos el multiplicando por las unidades de especie inferior del multiplicador, multiplicamos, contrayéndonos al primer ejemplo, el valor de la vara no por el número de varas, sino por el número de pies; y así, el producto que nos resulte de practicar la regla, debe ser tantas veces mayor que el verdadero, cuantas veces el pié sea menor que la vara; luego le debemos hacer el mismo número de veces menor, lo que se consigue dividiéndole por 3 en este caso, ó en general por el número que esprese las veces que la unidad de especie inferior del multiplicador esté contenida en la superior.

El método de las partes alicotas consiste en *multiplicar todo el multiplicando por las unidades de especie superior del multiplicador, y yendo colocando los productos en columna de modo que se correspondan las unidades de cada especie; despues, para multiplicar por las de segunda, se ve aquel número de unidades que parte alicota es de la unidad prin-*

cipal, y se toma esta misma parte del valor de dicha unidad; luego, se pasa á ver el número de unidades de tercera especie que parte alicota es del anterior, y si es complicada esta parte se elige como auxiliar otra, que luego se borra; y así se continúa hasta que no haya mas unidades en el multiplicador; entónces se hace la suma total, y esta espresará el producto.

Propongámonos ejecutar por este método los dos primeros ejemplos de ántes para que se puedan comparar, y tendrémos, para resolver el primero, que averiguar cuanto valen 5 varas y 2 pies costando la vara 8 pesos y 3 reales; y así dirémos: 5 varas á 8 pesos son ó valen 40 pesos, que pondrémos como aquí se presenta:

5 *v.s*	*á 8 p.s valen*	40 *pesos*	
	á 3 r.s	1	
2 *pies*		5	7 *r.s*
5 *v.s y 2 pies á 8 pesos y 3 r.s valen*		46 *p.s y*	7 *r.s*

Luego, dirémos: 5 varas á 3 reales son 15 reales; pero como 15 reales valen 1 peso, pondrémos 1 debajo de los pesos; no se necesita repetir 5 varas y por eso se omite, y solo se pone en la operacion á 3 reales. Luego, se trata de tomar el valor de dos pies y como dos pies son los $\frac{2}{3}$ de la vara, todo estará reducido á tomar los $\frac{2}{3}$ del valor de la vara, esto es, de 8 pesos y 3 reales, lo que ejecutarémos diciendo: las dos terceras partes de 8 pesos son 5 pesos y $\frac{1}{3}$ de peso: pongo por consiguiente los 5 pesos debajo de los pesos, y el $\frac{1}{3}$ de peso le reduzco á tercios de real y son $\frac{15}{3}$ ó 5 reales; luego, digo: los $\frac{2}{3}$ de 3 reales son 2 reales, y 5 reales que me dió la resta anterior son 7 reales, que pongo en la columna de los reales; y sumándolo todo saco lo que dice el renglon de debajo de la raya.

Para resolver el segundo ejemplo dirémos, como aquí se presenta:

	(4					
3 quin.s á 7 doblones valen. .	21 dobl.s	(3				
á 3 pesos.		9 p.s	(2			
á 8 reales.			24 r.s	(1		
2 arrobas.	3	3	11	17 mr.s		
5 libras.	0	1	8	22	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{50}$
1 libra.		0	4	24	$\frac{41}{50}$	$\frac{41}{50}$
1 libra.		0	4	24	$\frac{41}{50}$	$\frac{41}{51}$
Valór pedido.	28	~~16~~	~~53~~	~~88~~		~~87~~
		0	8	20		~~50~~
						$\frac{37}{50}$

Tres quintales á 7 doblones son ó valen 21 doblones; á 3 pesos valen 9 pesos, que pongo á su derecha en la columna que ha de servir para los pesos; luego, digo: á 8 reales son 24 reales que pongo otro lugar mas á la derecha. Despues como dos arrobas es la mitad de un quintal,

pues este tiene 4 arrobas, tomaré la mitad del valor del quintal, diciendo: la mitad de 7 doblones, son 3 doblones, y me queda un doblon; este doblon reducido á pesos da 4 pesos, y 3 pesos son 7 pesos; la mitad de 7 pesos son 3 pesos y queda un peso ó 15 reales; que juntos con los 8 reales da 23 reales; la mitad de 23 reales son 11 reales y queda 1 real ó 34 maravedíses, y diré: la mitad de 34 maravedíses son 17 maravedíses, con lo que tendré el valor de las dos arrobas. Ahora me falta hallar el valor correspondiente á las 7 libras; pero como 7 libras no es parte alicota sencilla de 2 arrobas, que es el valor que tengo ántes, debo investigar cual es el partido que debo tomar; para lo cual lo mas fácil es tomar primero el valor de 5 libras que es $\frac{1}{10}$ de 2 arrobas, y así dirémos, la décima parte de 3 doblones es 0 doblones, y quedan 3 doblones que valen 12 pesos, y 3 que hai allí son 15; la décima parte de 15 pesos es 1 peso, y quedan 5 que valen 75 reales; 75 reales y 11 reales son 86 reales; la décima parte de 86 es 8, y quedan 6 que valen 204 maravedíses, que juntos con los 17 maravedíses hacen 221; la décima parte de 221 son 22 y $\frac{1}{10}$ que pongo.

Ahora, para hallar el valor de las dos libras que faltan para 7, tomaré las dos quintas partes del valor de las 5 libras, ó lo que es mas sencillo, se tomará el valor de una libra, que es la quinta parte, y se pondrá dos veces diciendo: la quinta parte de un peso da 0 pesos, y un peso ó 15 reales de resta, que juntos con los 8 reales da 23 reales; la quinta parte de 23 reales son 4 reales y quedan 3 reales que valen 102 maravedíses, que juntos con los $22\frac{1}{10}$ dan $124\frac{1}{10}$ de maravedí; la quinta parte de $124\frac{1}{10}$ maravedíses son $24\frac{41}{50}$ maravedíses; cuyo valor puesto otra vez dará el valor de las dos libras.

Para hallar el valor total sumaré todos estos valores; y para sumar los quebrados observo que quedarán reducidos á un comun denominador (108) multiplicando los dos términos del primero por 5 que le convertirá en $\frac{5}{50}$; y sumando despues todo lo demas saco el valor que está debajo de la raya. Donde vemos que los resultados son los mismos por ambos métodos; pues los 20 mrs y $\frac{37}{50}$ de maravedí equivalen exactamente á 0,61 de real.

157 Para dividir los números denominados se practicarán las tres reglas siguientes: 1.ª *se reduce el divisor á la menor de sus especies*; 2.ª *se hace la division empezando por las unidades de especie superior del dividendo; y si de esta division queda alguna resta, se reduce á las unidades de especie inferior inmediata, y se añaden las unidades de esta especie que hai en el dividendo; se dividen por el divisor, y si queda alguna resta se reduce á las unidades de especie inferior inmediata, y así se continúa hasta que no haya unidades de especie inferior*; 3.ª *despues se multiplica todo este cociente por el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, teniendo cuidado de empezar esta multiplicacion por las unidades de especie inferior, para que si de esto resultan unidades de especie superior,*

se saquen para añadirlas al producto que resulte de la columna inmediata.

1.^{er} ejemplo. Sé (156) que 5 varas y 2 pies han costado 46 pesos y 7 reales; si quiero averiguar á como ha costado la vara, no tendré mas que dividir 46 pesos y 7 reales por 5 varas y 2 pies. Aquí conozco cual es el dividendo, porque en estos casos es de la misma especie que lo que se busca. Practico la primera regla y se me convierte el divisor en 17 pies; ahora empiezo á dividir, y lo ejecuto como aquí se ve:

Empiezo por los pesos y digo: 46 entre 17 les toca á 2, que son pesos, y me quedan de resta 12 pesos; que para reducirlos á reales los multiplicaré por 15, y al producto 180 le añadiré los 7 reales que hai en el dividendo; veo que el 17 cabe en 187 once veces, y no deja ninguna resta. Ahora debo multiplicar por tres el cociente 2 pesos y 11 reales, porque 3 espresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, y saco el producto 8 pesos y 3 reales, que es en efecto el valor de la vara.

46 *pe.*^{s} 7 *r.*^{s}	17
12	2 *pe.*^{s} 11 *r.*^{s}
15	3
60	8 *pe.*^{s} 3 *r.*^{s}
12	
180	
7	
187	
017	
00	

2.° ej. Sé que 3 quintales, 2 arrobas y 7 libras de azúcar han costado 28 doblones, 0 pesos y 8,61 reales; si quiero averiguar á como ha costado el quintal, reduciré primero el divisor 3 quintales, 2 arrobas y 7 libras á libras, y se me convierte en 357.

Empiezo la division como aquí se ve:

28 *dob.*^{s} 0 *pe.*^{s} 8,61 *r.*^{s}	357		
4	0 *dob.*^{s}		
112	0 *pe.*^{s}		
0	4,73 *r.*^{s}		
112	1 00		
15	473 *r.*^{s}	15	
560	023	31 *pe.*^{s}	4
112	08	3	7 *dob.*^{s}
1680			
8,61			
1688,61			
0260 6			
010 71			
00 00			

Y advierto que en el cociente no sale ningun doblon; reduzco los doblones á pesos y veo que tampoco sale en el cociente ningun peso; los reduzco á reales, añado los 8,61 que habia en el dividendo, parto por el divisor y saco por cociente 4,73, reduciendo á decimales la resta 260,61 que habia quedado del cociente entero 4; este cociente 4,73 le debo multiplicar por 100 porque el quintal contiene cien veces á la unidad de especie inferior del divisor que es la libra, y saco 473 reales; qué reducidos á doblones componen 7 doblones, 3 pesos y 8 reales, que es el valor del quintal de azúcar.

De estas reglas solo tenemos que demostrar la tercera; la cual se funda en que dividimos lo que se nos dió por el número de unidades de especie inferior del divisor; y así nos resultará un cociente tanto menor como unidades tiene el número que espresa las veces que dicha unidad cabe en la de especie superior, y por lo tanto le deberémos hacer este mismo número de veces mayor, lo que se consigue practicando dicha tercera regla.

Si el dividendo y divisor se refiriesen á una misma unidad, se reducirian ambos á la menor de sus especies y se practicaria la division como si fuesen números abstractos. Por ejemplo, si quisiéramos averiguar cuantas varas de paño se podrian comprar con 46 pesos y 7 reales, en el supuesto de costar la vara á 8 pesos y 3 reales, reduciríamos el dividendo y divisor á reales y estaria reducida la cuestion á dividir 697 por 123 y el cociente $5\frac{82}{123}=5+\frac{2}{3}$ espresaria el número de varas que se podrian comprar, que son 5 varas y 2 pies, como debia verificarse (156).

158 Concluirémos este asunto observando que todo número denominado se puede presentar como número misto: para lo cual se reducen todas las unidades de especie inferior á la primera, á la inferior de todas, y este es el numerador del quebrado que debe acompañar á las unidades de especie superior, despues se le pone por denominador el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior está contenida en la mayor. Por ejemplo: para poner como número misto el número 7 doblones, 3 pesos y 8 reales, reduciré los pesos á reales, y tendré 53 reales, que será el númerador del quebrado que debe acompañar al 7 doblones; despues veo que el real cabe sesenta veces en el doblon, tendré que 7 doblones, 3 pesos y 8 reales es lo mismo que 7 doblones y $\frac{53}{60}$ de doblon.

Tambien podré reducir el quebrado $\frac{53}{60}$ á decimales, y sacaré que 7 doblones, 3 pesos y 8 reales, ó 7 doblones $\frac{53}{60}$ de doblon, ó 7,883333 &c. es una misma cosa.

De aquí se sigue que el cálculo de los números denominados, que como se ha visto es mui complicado, se puede hacer con mucha sencillez, reduciendo á decimales los factores en la multiplicacion, y los dos términos en la division. V. g. si quiero resolver el segundo ejemplo (156) tendré que el multiplicando será 7,8833 doblones, y el multiplicador será 3,57 quintales, cuyo producto es 28,1434 doblones; que valuando el quebrado decimal sale por último 28 doblones, 0 pesos, 8 reales, 20,536 maravedíses, que es lo mismo que diéron los otros métodos. Lo mismo sucederia en la division.

PRINCIPIOS DE ÁLGEBRA.

159 Hasta ahora solo hemos considerado la cantidad en cuanto está espresada por números; de aquí en adelante vamos á tratar de ella generalmente, esto es, considerándola solo en cuanto es susceptible de aumento ó diminucion; y la ciencia que tiene esto por objeto se llama *Álgebra* (*). De manera que Álgebra es la *ciencia que trata del cálculo de las cantidades consideradas en general, esto es, independientemente de toda magnitud numérica y de todo sistema de numeracion.* Los signos de que se vale para espresarlas son las letras del alfabeto, porque son de un uso mas fácil y cómodo que ninguna otra clase de signos; y así, por a podemos espresar una cantidad de cualquier especie que sea,

(*) *La palabra Álgebra la derivan algunos de la voz árabe* algiabarat *que significa el* restablecimiento, de una cosa rota, *suponiendo falsamente que la principal parte del Álgebra consiste en la consideracion de los números rotos ó quebrados. Otros piensan que el Álgebra tomó su nombre de Gebert filósofo químico y matemático célebre, á quien los árabes llaman* Giabert, *el cual se cree que fué entre ellos el inventor de esta ciencia, y el que construyó la Giralda de Sevilla. Otros pretenden que esta palabra viene de la palabra* geber, *y que con la partícula* al *se ha formado la palabra* Álgebra, *que es puramente arábiga, y significa propiamente la* reduccion de los números rotos á números enteros. *En cuanto al origen del Álgebra no se sabe nada de cierto; se atribuye ordinariamente su invencion á Diofanto, autor griego, que vivia en el siglo cuarto de la era cristiana, y que escribió trece libros de ella, aunque solo nos quedan seis que se publicáron por primera vez en 1575. Se cree que los árabes, sino la inventáron por sí mismos, al ménos la cultiváron mucho; tambien se dice que ellos la habian recibido de los persas, y los persas de los indios. Lo que parece mas cierto es que los árabes la trajeron á España, de donde segun la opinion de algunos pasó á Inglaterra ántes de ser conocido allí Diofanto.*

Lucas de Burgo es el primero en la Europa que ha escrito sobre este punto; su libro que está en italiano, se imprimió en Venecia en 1494. Segun él, el Álgebra viene originariamente de los árabes; y como no hace ninguna mencion de Diofanto, se puede inferir que este autor no era aun conocido en Europa.

como numérica, de peso, de medida, de movimiento, de estension &c; esto es, en sí la letra a espresa una cosa en cuanto es susceptible de aumento ó de diminucion.

El Álgebra es mucho mas general que la Aritmética; pues aunque en la Aritmética se prescinde del valor específico de la cantidad, no se puede prescindir del numérico; y así, el 4 aunque es cierto que puede espresar 4 hombres, 4 caballos, 4 libras, &c. no puede dejar de espresar cuatro cosas segun nuestro sistema; y la a no solo puede espresar hombres, caballos, pesos, &c. sino que puede ser 4, 40, 70, 80, 1000 &c.

Por muchas cantidades que hayan de entrar en una cuestion, tiene el Álgebra signos para espresarlas; porque hace uso del alfabeto minúsculo y mayúsculo: tambien echa mano del alfabeto griego (por eso está al principio del libro) y aun del hebréo y aleman. Ademas una letra cualquiera tal como a poniéndole un acento en esta forma a', espresa ya otra cantidad diferente de la que espresaba a; despues se le pueden poner dos, tres, cuatro, &c. acentos en esta forma: a, a', a'', a''', a^{IV}, &c. cuando estas letras están acentuadas se leen: *a primera, a segunda, a tercera, a cuarta, &c.* segun el número de acentos que tenga.

Los acentos tambien se ponen ántes en esta forma; $'a$, $''a$, $'''a$, ^{IV}a, &c. y entónces se leen: *primera a, segunda a, tercera a, cuarta a,* &c. Aun los acentos se pueden colocar por la parte inferior bien á la derecha como $a_{,}$, $a_{,,}$ &c. en cuyo caso se pueden leer: *a subprimera, a subsegunda* &c. ó bien á la izquierda como $_{,}a$, $_{,,}a$, &c. en cuyo caso se leerán: *subprimera a, subsegunda a,* &c. De donde se infiere que si con una misma letra podemos señalar tantas cantidades, con todas ellas podrémos señalar cuantas se deséen.

160 Algunos definen el Álgebra diciendo que es la *ciencia que trata de reducir á reglas generales todas las cuestiones que pueden ofrecerse acerca de las cantidades.* El Álgebra tiene dos partes: la 1ª trata del modo de ejecutar las operaciones de sumar, restar, multiplicar &c. con las cantidades espresadas por letras; y la 2ª del modo de servirse de este cálculo para la resolucion de los problemas.

La segunda parte fué la primera que se inventó, pues los libros de Diofanto se reducen á resolver cuestiones; despues la adelantáron mucho Vieta, Fermat y Descártes, resolviendo un gran número de problemas importantísimos. Luego que se vió su utilidad y escelencia, se echó de ver que era necesario esplicar en general el modo de ejecutar la primera parte; y el primer escrito que yo conozco tenga esto por objeto, es el que se halla con el título de *Principia Mathéseos universalis seu introductio ad Geométriæ méthodum Renati Descártes conscripta ab Er. Bartolino*; en el principio del segundo tomo de la edicion de la Geometría de Descártes hecha en Amsterdam en 1683.

161 Para dar á conocer como solo con el auxilio del raciocinio se pudieron resolver las cuestiones, ántes de enseñar á ejecutar las operacio-

nes con las letras, nos propondrémos resolver la primera cuestion del libro primero de Diofanto, que nos hará conocer al mismo tiempo el método de invencion, y la necesidad de esponer la primera parte del Álgebra ántes de la segunda.

Cuestion. *Dividir un número propuesto en dos partes cuyo intervalo ó diferencia sea dada.*

Resolucion de Diofanto. »Sea el número dado 100 y el intervalo ó »diferencia 40, conviene hallar los números. Supongamos que el menor »sea N (esto es llamando N á dicho número; Diofanto usaba de la le- »tra griega llamada *stigma* que equivale á *St*, y que se ha remplazado »despues por la letra N), con lo cual tendrémos que el *mayor equival- »drá á* 1×N *y* 40 *unidades*; luego *ambos juntos equivaldrán á* 2×N »*mas* 40. Pero como por el supuesto los dos juntos habian de compo- »ner 100, se tendrá que 100 *unidades son iguales á* 2×N *mas* 40 y »quitando á ambas cantidades 40 unidades, quedará 2×N *igual á* 60 »*unidades.* Luego si el duplo del número menor es 60 unidades; toman- »do la mitad *se tendrá dicho número menor que será* 30 *unidades*, y »como el mayor habia de tener 40 unidades mas que el menor, *será »igual á* 70; donde se ve que los dos juntos equivalen á 100, y por »lo mismo la demostracion es manifiesta.»

Esta cuestion está enunciada en general, y solo está resuelta en particular; esto es lo que hace Diofanto en todas sus cuestiones. Veamos el método de resolverla en general usando solo del raciocinio.

Llamemos *número menor* á la parte menor, y tendrémos que el *mayor* será igual á dicho *número menor mas el intervalo ó diferencia*; y reuniendo los dos, será *dos veces el número menor mas el intervalo igual al número propuesto.* Luego si del número propuesto quitamos el intervalo, nos vendrá el *duplo del menor*; *y si de la diferencia entre el número propuesto y el intervalo dado*, *tomamos la mitad*, *nos vendrá el número menor*; *y añadiendo á esto el intervalo se tendrá el mayor.* Luego vemos ahora que si el propuesto fuese 100, y el intervalo 40, diríamos 100 ménos 40 son 60, y tomando la mitad se tendrá 30 que será el menor, y añadiendo á este 40, será 70 el mayor, como ántes.

Aquí tenemos ya resuelta nuestra cuestion con toda generalidad; mas si en vez del número que buscamos, usamos de una letra tal como por ejemplo de la x,y,z,&c. y señalamos ademas el número propuesto con una letra tal como a, y el intervalo dado por otra letra tal como b, conseguirémos dos cosas: 1.ª resolver la cuestion con toda generalidad; y 2.ª aliviar nuestra memoria, disminuyendo los esfuerzos que tiene que hacer para retener las diferentes cosas que son necesarias para el descubrimiento de la verdad que indagamos.

En efecto, llamando x á la parte menor, a al número propuesto y b al intervalo, resultará que $x+b$ será el mayor; y debiendo a ser igual á los dos juntos, se tendrá $a=x+x+b$, ó $a=2x+b$; y quitando de ambas

cantidades el intervalo b, será $a-b=2x$; y dividiendo ambas por 2, resultará $x=\frac{a-b}{2}$; y este resultado nos suministra la regla que deberémos seguir en todos los problemas de esta especie; pues nos da á conocer que *del número propuesto se reste el intervalo*, *y de lo que quede se tome la mitad con lo que se tendrá la parte menor*; y añadiendo á esta el intervalo b, se tendrá la mayor; luego la mayor será igual con $\frac{a-b}{2}+b$, ó con $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{2b}{2}$ ó con $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, y quiere decir que tambien se pudiera hallar directamente la mayor, *añadiendo á la mitad del número propuesto la mitad del intervalo conocido.*

Usando del método de Diofanto vemos que la cuestion no se resuelve con generalidad; usando del raciocinio es necesario tener una gran tension de espíritu para conservar todo lo que se ha dicho, á pesar de ser esta la cuestion mas sencilla que nos podemos proponer. Usando de las letras y de los signos que ya conocemos, vemos que desaparecen estos inconvenientes; mas como en este ejemplo hemos tenido necesidad de ejecutar sumas, restas, &c.: vamos á tratar ahora de la 1.ª parte del Álgebra, para poder tratar despues la 2.ª con la generalidad que corresponde.

162 Por esta causa vamos á recordar ahora que el signo + señala la adicion y se lee *mas*, de manera que $a+b$ quiere decir que el valor de la cantidad b se debe añadir á la cantidad a; el signo — la sustraccion y se lee *ménos*, de manera que $a-b$ espresa que el valor de la cantidad b se debe restar del valor de la cantidad a; el signo × ó el (.) la multiplicacion, de manera que $a×b$ ó $a.b$ espresa que el valor de a se debe multiplicar por el valor de b. Tambien se indica la multiplicacion de la a por la b poniéndolas una á continuacion de otra sin signo, de manera que ab es lo mismo que $a×b$ ó que $a.b$; en la Aritmética no se puede suprimir el signo de la multiplicacion, porque como los guarismos significan diferentes cosas segun el lugar que ocupan, resultarian grandes errores; por ejemplo: si en 3×4 ó en 3.4 suprimimos el signo de la multiplicacion tendrémos 34, que á causa de la lei del sistema de numeracion, espresa *treinta y cuatro unidades*, cuando su producto solo vale *doce.*

El signo — entre dos cantidades que están la una sobre la otra, ó dos puntos (:) espresan la division; de manera que $\frac{a}{b}$ ó $a:b$ (*) espresa que el valor de a se ha de dividir por el de b.

(*) *Este método de indicar la division con dos puntos le inventó* Leibnitz *para no desfigurar los renglones*; *le preguntó á Juan Bernoulli*

El signo = espresa el resultado de todas las operaciones, y se lee *igual* (*).

El signo > es el de mayoría, de manera que $a>b$ espresa que a es mayor que b; el signo < es el de menoría, por manera que $b<a$ indica que b es menor que a; de donde se deduce en general que la cantidad que hai en la bòca del signo es mayor que la que se halla en la punta.

163 En el Álgebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sino al modo con que influyen en la cuestion que el calculador se propone resolver. Desde luego se advierte que al resolver una cuestion solo se pueden encontrar dos clases de cantidades que influyan en ella: cantidades que conspiren al fin que se propone el calculador, y cantidades que conspiren á un fin opuesto; pues si entrasen otras cantidades que no conspirasen á ninguno de estos fines serian indiferentes en la cuestion; y por lo mismo se las despreciaria, puesto que el resultado que buscamos no depende de ellas.

Á las cantidades que conspiran al fin que se propone el calculador se les da el nombre de cantidades *positivas*, y á las que conspiran á un fin opuesto el de *negativas*. Acerca de las cantidades negativas se han dicho muchos desatinos; porque se les ha llamado cantidades *falsas*, y se ha dicho que no existian, &c.; pero en la idéa de cantidad negativa no entra otra sino la de conspirar al fin contrario al que el calculador se propone, debiendo advertirse que una misma cantidad puede ser positiva en una cuestion y negativa en otra. Por ejemplo: si nos proponemos averiguar en cuanto tiempo se llenará un estanque de agua, en que por un lado entra agua y por otro sale, tendrémos que atender no solo al agua que

---

si le aprovaba. Este le respondió que le parecia mui cómodo; pero que seria difícil de hacerle adquirir á los que están acostumbrados á la division vulgar, que apénas saben distinguir á primera vista el dividendo y el divisor; y principalmente en una fraccion complicada, como si en vez de $\dfrac{a+\dfrac{b}{c}}{e-\dfrac{f}{g}}$ *se escribiese* $\overline{a+b}:c:\overline{e-f}:g$.

(*) *No siempre se ha usado para la igualdad del signo =. Descártes usaba del* ∞ *para esto, y en la introduccion á su Geometría, que ya hemos citado, se usa del signo = para indicar la diferencia entre dos cantidades, cuando no se sabe cual es la mayor; por ejemplo: con* a—b *se espresaba el esceso que* a *llevaba á* b, *con* b—a *el que* b *llevaba á* a, *cuando era mayor que ella; y con* a=b *la diferencia que habia entre estas dos cantidades cuando se ignoraba cual era la mayor. Nuestro Tosca usaba para la igualdad de este signo* ≏.

entra sino tambien al agua que sale; y como el agua que entra conspira al fin que nos proponemos, esta será la positiva; y la que sale que conspira á vaciar el estanque, que es lo contrario de llenarle, será la negativa.

Propongámonos al contrario averiguar el tiempo en que se vaciaria un estanque, en que sabemos que por una parte entra agua y por otra sale; y tendrémos que atender tambien en este caso al agua que entra y al agua que sale; pero como aquella conspira al fin opuesto, será la negativa.

Propongámonos por segundo ejemplo averiguar lo que ahorra un hombre anualmente; y tendrémos que todas las rentas de este sugeto, como conspiran al fin que nos proponemos, serán las cantidades positivas en nuestra cuestion; y como los gastos conspiran al fin opuesto, serán las negativas.

Supongamos ahora que nos proponemos averiguar en cuanto se atrasa ó empeña un sugeto al año; y tendrémos que como en este caso los gastos conspiran á nuestro fin, serán las cantidades positivas; y como las rentas conspiran al fin opuesto serán las negativas. Luego esto de cantidades positivas y negativas solo es relativo al fin que se propone el calculador; y la cantidad que en una cuestion sea positiva, en la cuestion opuesta será negativa.

Como las cantidades positivas conspiran al fin que se propone el calculador, tratan de aumentar el resultado que se busca, y por lo mismo se señalan estas cantidades con el signo + que es el de aumento ó de adicion; y como las cantidades negativas conspiran al fin opuesto al que se propone el calculador, tratan de disminuir el resultado que se busca, y por lo mismo se señalan con el signo —; de manera que de aquí en adelante no podrémos escribir una cantidad sin poner el signo que le corresponde para indicar su naturaleza. Sin embargo cuando es el signo + el que lleva una cantidad se suprime, de modo que a es lo mismo que $+a$; pero cuando de ningun modo se puede omitir el signo es cuando es ménos ó —; de manera que en $-a$ no se puéde dejar de poner el signo —, pues entónces no se espresaria que en cualquiera cuestion donde debia entrar la a, habia de conspirar á disminuir el resultado en todo el valor que ella tuviese.

164 Las cantidades negativas no se han necesitado considerar en la Aritmética; porque allí en la resolucion de las cuestiones se suple todo por palabras, y se ejecutan las operaciones separadamente. Por ejemplo: propongámonos averiguar cuanto ahorra un sugeto que tiene por su destino *dos mil y trecientos ducados anuales; que tiene que mantener dos hijos en una casa de educacion, que cada uno le cuesta quinientos ducados; que por otra parte se sabe que tiene una dehesa que le produce tres mil ducados; y que el gasto de su casa equivale á tres mil seiscientos cincuenta ducados.*

Para resolver esta cuestion por los conocimientos que tenemos de Aritmética, averiguarémos primero cuanto importan las rentas de este sugeto, y por lo mismo sumarémos los 2300 ducados con los 3000 ducados, y tendrémos que equivale todo á 5300 ducados; ahora averiguarémos todos los gastos, y tendrémos en primer lugar que costándole la manutencion de cada hijo 500 ducados, la de ambos le costará 1000 ducados, los cuales juntos con el gasto de su casa que es 3650 ducados, importan 4650 ducados; luego si restamos 4650 ducados de 5300, nos resultarán 650 ducados, que espresarán el ahorro de dicho sugeto.

Supongamos ahora que ademas de las circunstancias dichas se añada el que este mismo sugeto tiene dos niñas en otra casa de educacion, y que la manutencion de cada una sea de cuatrocientos ducados. En este caso para averiguar lo que ahorra este sugeto, sumarémos como ántes, su renta total; y como la circunstancia que hemos añadido no aumenta la renta, tendrémos que la renta del sugeto será la misma que ántes, esto es, 5300 y los gastos ascenderán á 800 ducados mas que ántes; luego si reunimos estos 800 ducados con los 4650 que gastaba ántes, resultará que los gastos de este sugeto ascienden á 5450 ducados. Aquí vemos que siendo solo la renta 5300 y los gastos 5450, este sugeto no ahorrará, sino que al contrario se empeñará en cada año; y así encontrarémos un resultado contrario del que buscábamos, pues procedíamos buscando ahorro y hallamos al contrario alcance. Ahora, pues que ya la cuestion nos dice que procedíamos bajo un supuesto falso, cual es el de haber ahorros, para hallar en cuanto se empeña cada año, restarémos la renta 5300 de los gastos 5450; pues en tanto como los gastos escedan á la renta, en tanto será en lo que se empeñe cada año; y ejecutando esta resta, se tendrá que se empeña cada año en 150 ducados.

165 El Álgebra trata de indicar, solo con un corto número de signos, todos los razonamientos que pueden influir en los resultados, de manera que el Álgebra es la escritura de la lengua de la cantidad. Los signos que hasta ahora hemos dado á conocer son suficientes para resolver estas cuestiones; y con otro corto número de ellos que manifestarémos en lo sucesivo, tenemos una lengua sumamente sencilla y perfecta, y que ademas tiene las circunstancias de ser general, porque todas las naciones la entienden del mismo modo.

Propongámonos traducir nuestra primera cuestion al lenguage algebráico, y dirémos en primer lugar: los 2300 ducados anuales contribuyen á nuestro fin, que es el de hallar ahorros, luego esta será para nosotros una cantidad positiva, que deberémos señalar con el signo $+$; pero como es al principio de escritura, y estamos convenidos en que al principio de escritura se sobrentiende el signo $+$, pondrémos solo 2300; despues la segunda circunstancia dice que tiene que mantener dos hijos en una casa de educacion, costándole cada uno 500 ducados, y por lo mismo inferimos que los dos juntos le costarán dos veces quinientos ducados; y como esta no contribuye al ahorro que buscamos, sino al contrario, esta será una cantidad negativa, luego la deberémos señalar con el signo $-$ de este modo -2×500. Ahora, como el ahorro que buscamos

debe resultar del conjunto del gasto y rentas, esta cantidad la pondrémos al lado del 2300 con su signo ménos, con lo cual tendrémos ya escrito $2300-2\times500$. Dice despues la cuestion que este sugeto tiene ademas *una dehesa que le da de renta* 3000 *ducados*, y como esto conspira á nuestro fin, será una cantidad positiva, por lo mismo tendrémos que poner $+3000$ al lado de lo que tenemos escrito, y nos resultará ahora $2300-2\times500+3000$. La última circunstancia dice que su gasto es de 3650 ducados, y como esto no conspira á nuestro fin que es el de buscar ahorros, sino al fin opuesto, le deberémos señalar con $-$, de manera que pondrémos -3650 al lado de lo que tenemos escrito; y se nos convertirá en $2300-2\times500+3000-3650$; y como ya no hai mas circunstancias, tenemos escrita toda nuestra cuestion.

Ahora, la principal ventaja del Álgebra consiste en que por su medio no se necesita ejecutar sino mui pocas operaciones, y esas de las mas sencillas; puesto que todo el artificio de esta ciencia consiste en dar otra nueva forma á la espresion que tenemos, paraque haya cantidades iguales, que ejerciendo oficios contrarios destruya la una el efecto que podia causar la otra; y por lo mismo nos podemos desentender de ambas, puesto que su reunion en nada altera el resultado. Así, si observamos, por ejemplo, que la última cantidad -3650 es lo mismo que $-3000-650$, y colocamos estas dos en vez de la primera, tendrémos:

$$2300-2\times500+3000-3000-650;$$

pero el $+3000$ con el -3000 quedan destruidos; porque lo que el uno aumenta el resultado, el otro le disminuye, y por lo mismo el resultado no dependerá en manera alguna de ellos, luego los podrémos borrar y tendrémos: $2300-2\times500-650$.

Ahora, el 2300 es lo mismo que $1300+1000$, y como 2×500 tambien es igual con 1000, la espresion de arriba se convertirá en

$$1300+1000-1000-650;$$

que borrando el $+1000$ y el -1000 por lo acabado de esponer, solo nos quedará $1300-650$;

y si observamos ahora que el 1300 es igual á dos veces 650, nos resultará que $2\times650-650$ será igual á una vez 650 ducados como ántes; donde vemos que sin ejecutar ninguna operacion formal, hemos encontrado el resultado.

No obstante, en esta operacion parece aun mas sencillo el otro método, porque el último exige esta descomposicion; pero cuando las cantidades se señalan con letras, está mas patente la destruccion. Mas no es esta sola la ventaja del Álgebra, sino que al mismo tiempo el resultado nos da á conocer si hemos caminado bajo un supuesto falso; porque por ejemplo, si caminamos en el supuesto de buscar ahorro, y nos encontramos con que se verifica lo contrario, el resultado de nuestra operacion nos lo debe dar á conocer, y esto lo ejecuta por medio del signo negativo. Así, añadamos la circunstancia de la manutencion de las dos niñas, y tendrémos que poner ademas de lo escrito ántes, -2×400; de manera que toda la cuestion estará escrita de este modo:

$$2300-2\times500+3000-3650-2\times400;$$

haciendo la descomposicion del 2300 y del 3650 como ántes, y observando que $2\times500=1000$ y que $2\times400=800$, se nos convertirá esta espresion en $1300+1000-1000+3000-3000-650-800$;
que borrando el $+1000$ con el -1000, y el $+3000$ con el -3000, se nos convertirá en $1300-650-800$;
y observando que el $1300=2\times650$, y que el -800 es lo mismo que $-650-150$, tendrémos por último: $2\times650-650-650-150$;
en cuya espresion 2×650 quedará destruido por dos veces que se tiene el -650; luego resultará finalmente -150;
cuyo signo $-$ da á conocer que este resultado es contrario á lo que buscábamos, esto es, que en vez de ahorrar 150 ducados, se empeña en esto mismo; y el Álgebra nos advierte cuando no hai resultado, fundándonos en lo que vamos á buscar, y al mismo tiempo nos da resuelta la cuestion opuesta, á que dan ocasion los datos que se conocen.

166 Si al resolver esta cuestion encontrásemos que el resultado era cero, diríamos que el sugeto ni ahorraba ni se empeñaba; y comparando el resultado anterior con este en que sale *cero*, vemos que es mas ventajoso para el sugeto ahorrar cero que ahorrar -150; por esta causa se ha dicho que *las cantidades negativas eran menores que cero*; en lo cual no se ha procedido con el mayor acierto, puesto que formándonos nosotros la idéa de cero, ó de la nada cuyo símbolo es, prescindiendo de todo lo que hai, para poder decir que hai nada; despues de haber prescindido de todo lo que hai, no se puede prescindir de mas, y por lo mismo no se puede formar idéa de una cosa que sea aun ménos que nada. No obstante, esta es una espresion abreviada de que se usa para dar á conocer que una cantidad de esta especie reunida con otra de especie contraria, la disminuye en tanto cuanto ella vale; luego esto equivale á ménos que á haberle añadido nada ó cero.

Tambien ha conducido á esto el que, suponiendo que se pueda comparar una cantidad negativa con cero, resulta que el valor de aquella es menor que cero; porque sea por ejemplo $-a$: si el valor de esta cantidad, comparado con nada ó cero no es menor, será igual ó mayor; si fuese igual, y supusiésemos que $-a=0$, como si á cosas iguales se añaden iguales, los resultados serán iguales, tendrémos añadiéndoles $3a$ á ambas, que $3a-a=0+3a$; pero $3a-a$ es $2a$, porque podemos considerar á $-a$ como una unidad cualquiera, y quitando de tres veces esta unidad una vez esta unidad, nos resultará dos veces esta unidad ó $2a$;
y como $0+3a$ es $3a$, tendrémos que $2a=3a$;
pero como esto es un absurdo, porque dos unidades ó cosas cualesquiera no pueden equivaler á tres de las mismas; tendrémos que el supuesto que nos ha conducido á él tambien lo será; luego no puede ser $-a=0$.

Tampoco puede ser $-a>0$, porque en este caso añadiendo á ambas espresiones $3a$, tendríamos: $3a-a>0+3a$, ó $2a>3a$ absurdo tambien manifiesto; luego tampoco se puede suponer que $-a>0$, luego será forzosamente $-a<0$.

167 Figurémonos ahora que ajustamos las cuentas á otro sugeto, y encontramos que se empeña en 300 ducados cada año; si queremos comparar la situacion de estos dos sugetos, con el fin de averiguar el que mas se empeña, dirémos que es este último: porque es mucho mayor 300 ducados que 150 ducados que sacámos ántes. Pero si suponemos la cuestion resuelta por Álgebra, con el fin de buscar el ahorro de este sugeto, encontraríamos que su ahorro anual seria -300 ducados; y si quisiéramos comparar este ahorro con el anterior que era -150, no diríamos que -300 sea mayor ahorro que -150, sino al contrario; porque en un sentido absoluto, si buscamos cual de los dos ahorra mas, y encontramos que ninguno ahorra, el que tiene el estado mas ventajoso es aquel que ménos se empeña. Por esta causa, cuando se compara el valor absoluto de dos cantidades negativas, se dice que es mayor aquella que tiene ménos unidades, esto es, que $-2a>-3a$.

Para demostrarlo con generalidad, observarémos igualmente que si $-2a$ no es mayor que $-3a$, será igual ó menor; si suponemos que sea igual, tendrémos $-2a=-3a$, y añadiendo á ambas espresiones una misma cantidad, por ejemplo $4a$, será $4a-2a=4a-3a$, ó $2a=a$, absurdo manifiesto; porque dos unidades ó cosas cualesquiera son mayores que una unidad ó cosa cualquiera. Si suponemos que $-2a<-3a$; añadiendo á ambas cantidades $4a$, será: $4a-2a<4a-3a$, ó $2a<a$, tambien absurdo; pues dice que dos cosas ó unidades son menores que una cosa ó unidad; luego sino puede ser $-2a$ ni igual ni menor que $-3a$, será mayor.

De todo esto se deduce que *cuando el resultado de una cuestion es negativo, responde á la cuestion opuesta ó al fin contrario de aquel para que se entabló el cálculo, ó que manifiesta una situacion contraria á la que nosotros supusimos; y que cuando se considera en sí una cantidad señalada en el signo $-$ sin suponerla el resultado inmediato de operacion, entónces al reunirse con otras cantidades hace ménos efecto que el reunir cero en vez de ella.*

168 Entendido esto, pasemos á manifestar los nombres con que se distinguen los varios conjuntos de letras que forman una espresion algebráica; ante todas cosas observarémos que cuando se tiene repetida por sumando una misma letra, se omite esta repeticion, poniéndola una sola vez con un número ántes que esprese las veces que está repetida por sumando, cuyo número se llama *coeficiente*; de manera que en vez de $a+a$ se escribe $2a$; en vez de $a+a+a+a$ se pone $4a$; en vez de $ab+ab+ab$, se pone $3ab$; y los números 2,4,3 son los coeficientes

que *espresan que la cantidad á que afectan se ha de tomar por sumando tantas veces como unidades hai en ellos.* Tambien se pone coeficiente cuando la letra ó cantidad está repetida con el signo —; y así, en vez de $-ab-ab-ab$ se pone $-3ab$. Cuando una letra está repetida por factor, se pone una vez sola con un número escrito á su derecha un poquito mas alto, *que tenga tantas unidades como veces está repetida la letra por factor*; así, en vez de aa escribirémos a^2, en vez de aaa se escribe a^3, y en vez de $aaaaa$ se escribirá a^5. Este número se llama *esponente*, y su introduccion se debe á Descártes, con cuyo uso se evita la cacofonía que resulta de nombrar muchas veces de seguida una misma letra.

El coeficiente y el esponente convienen en una cosa, que es en que ambos espresan con sus unidades las veces que está repetida la letra ó cantidad á que ellos afectan; pero el coeficiente dice *que está repetida como sumando*, y el esponente *que está repetida como factor.* Así, no se debe confundir $3a$ con a^3; pues la una espresion es $a+a+a$, y la otra $a\times a\times a$ ó aaa; para hacer mas palpable el error que resultaria de confundir sus oficios, supongamos que a valga 4, y en este caso se tendrá que $3a=a+a+a=4+4+4=3\times4=12$, y $a^3=a\times a\times a=4\times4\times4=64$, resultados bien diferentes entre sí.

Tambien advertirémos que cuando una letra se presenta sola tal como a, se le puede suponer la unidad por coeficiente; porque es una vez sumando en sí; la unidad por esponente, porque toda cantidad es una vez factor en sí; y tambien si se quiere la unidad por divisor, porque toda cantidad dividida por la unidad da por cociente la misma cantidad; por esta causa a es lo mismo que $1a$, que a^1, que $\frac{a}{1}$ y aun que $\frac{1a^1}{1}$. Ahora, toda cantidad ó espresion de cantidad, sea de la especie que sea, separada de otras cantidades por medio del signo + ó —, se llama *término*; v. g. $-a$ se llama un término, $4ab$, $-5abc$, $\frac{ac}{e}$, $\frac{2ab}{cd}$, $\frac{a^4b^3c}{d-z}$ son tambien términos.

169 Se dice de un término que consta de tantas *dimensiones* cuantas letras tiene, sino hai denominador; por ejemplo: $+a$ es de una dimension, $4ab$ de dos, $-5abc$ de tres; donde debemos observar que el coeficiente no constituye dimension.

Si la espresion está en forma de quebrado, se saca su dimension de la diferencia entre el número de dimensiones del numerador y el del denominador; por ejemplo: $\frac{ac}{e}$ es de una sola dimension, porque de dos dimensiones que hai arriba destruye una la dimension que hai abajo: $\frac{2ab}{cd}$ es un término de dimension *nula*, ó de *cero* dimensiones, porque hai tantas dimensiones arriba como abajo; y cuando hai mas en el denominador que en el numerador, entónces se dice que es de una dimension *negativa*, espresada por la diferencia entre el número de dimensiones del denominador y el del numerador; así, el termino $\frac{ab}{cde}$ es de *ménos* una dimension. Finalmente cuando las letras tienen esponente, se debe reputar cada letra por tantas dimensiones como unidades hai en su esponente. Así, $\frac{6a^4b^3c}{d^2}$ es un término de seis dimensiones porque a^4 se debe reputar por $aaaa$, b^3 por bbb, luego las dos juntas componen ya siete dimensiones, y una á causa de la c son ocho; y como en el denominador hai dos dimensiones á causa del esponente 2 de la d, resultan seis dimensiones en el término.

170. Cuando una espresion algebráica consta de un solo término se llama *monomia*, ó se dice que es un *monomio*; cuando de mas de uno se llama en general *polinomio*, distinguiéndose en particular con los nombres de *binomio*, *trinomio*, *cuadrinomio*, &c. cuando consta de *dos*, *tres*, *cuatro*, &c. monomios. Así, las espresiones $a+b$, $3a^4-4b^2c^2$ son binomios, de los cuales a y $3a^4$ son los primeros términos, y $+b$, $-4b^2c^2$ son los segundos; las espresiones $a+b-c$, a^2+b^2-cd son trinomios; la $5a^4b^2-7a^5c+3b^2d^3c-6c^6$ es un cuadrinomio, &c.

Cuando todos los términos de un polinomio tienen un mismo número de dimensiones, se dice que el polinomio es *homogeneo*; y cuando no se verifica esta circunstancia que es *heterogeneo*. Todos los que hemos puesto hasta ahora son polinomios homogeneos; pero el $ab-c+3b^2d^3$ es un polinomio heterogeneo, porque el primer término tiene dos dimensiones, el segundo una y el tercero cinco.

171 Cuando ya por la traduccion que hagamos de una cuestion al lenguage algebráico, ya por haber ejecutado alguna operacion, lleguemos á tener un polinomio, debemos ante todas cosas averiguar si hai términos *semejantes*: advirtiendo que se da este nombre de semejantes *á aquellos que tienen unas mismas letras con unos mismos esponentes*; en cuyo caso aquel polinomio se puede poner bajo una forma mas sencilla; y como el Álgebra trata de presentar los resultados con la mayor sencillez posible, se debe ejecutar siempre esta simplificacion.

Sabiendo ya que hai términos semejantes, puede suceder una de dos cosas: ó que tengan un mismo signo ó que le tengan diferente; si tienen un mismo signo, la simplificacion que se hace se llama *reduccion*; para lo cual *no hai mas que sumar los coeficientes de los términos semejantes* *que llevan el mismo signo, y poner este coeficiente á uno de estos términos con su signo.* Cuando los términos semejantes tienen diferente signo, entónces la simplificacion que hai que hacer, se llama *destruccion*; y para ejecutarla *se restan entre sí los coeficientes, y se pone una vez un término de ellos, con el signo que llevaba el término que le tenia mayor, y cuyo coeficiente sea la diferencia entre los coeficientes.*

Para hacer aplicacion de esto, supongamos que tenemos el siguiente polinomio: $2a^3-8bc+2ac+5a^3+5bc-d^2+a^3-5d^2-2ac+2b^3$; en el cual observamos que hai tres términos donde se halla a^3 con un mismo signo, y por lo mismo hai tres términos semejantes con él; pues para la semejanza en nada influye el que tengan diferente coeficiente; y como tienen un mismo signo harémos la reduccion diciendo; 2, coeficiente de $2a^3$, y 5, coeficiente de $5a^3$, son 7, y 1 coeficiente de a^3 (§ 168), son 8; luego colocaré ó deberé poner un término en que haya a^3, con un coeficiente 8 y con el signo $+$, que es el que llevan dichos términos; pero como es el primero que se va á poner, se omitirá dicho signo. Luego, vemos que hai dos términos donde se halla bc, y como tienen diferente signo, haré la destruccion diciendo: la diferencia entre 8 y 5 son 3, que será el coeficiente que deberé poner á bc, y como el término $-8bc$ es el que tiene mayor coeficiente, deberé poner el signo $-$ al $3bc$; como hai dos términos semejantes con d^2, y tienen un mismo signo, se hará la reduccion diciendo: 1, coeficiente de $-d^2$, y 5, coeficiente de $-5d^2$, son 6, que deberé poner por coeficiente al d^2 con el signo $-$, y tendré $-6d^2$; por fin paso á hacer la destruccion de los términos $+2ac$ y $-2ac$, diciendo: la diferencia entre 2 y 2 es cero, que deberá ser el coeficiente de ac; pero el cero por coeficiente manifiesta que no está el término aquel ninguna vez por sumando, y por lo mismo no se deberá poner. Cuando ocurren términos que ademas de ser semejantes, son iguales por tener un mismo coeficiente, y tienen diferente signo como en este caso, el lenguage que se usa es decir como aquí: $+2ac$ y $-2ac$ *se destruyen*, y se borran, tachan ó rayan en el parage donde se hallan; y como ya no hai mas que el $+2b^3$ que no tiene ninguno semejante con él, este quedará del mismo modo en el resultado, el cual será:

$$8a^3-3bc-6d^2+2b^3.$$

Esta práctica consiste en que cada término sin coeficiente se puede considerar como una cosa cualquiera ó como una unidad; si tiene coeficiente, equivaldrá (168) á tantas veces aquella cosa ó unidad como unidades hai en su coeficiente. Luego si tenemos dos términos semejantes con un mismo signo, los dos equivaldrán á tantas veces aquella cosa ó unidad, como esprese la suma de dichos coeficientes; porque en la Aritmética para averiguar á lo que equivalen dos números de cosas cualesquiera, se suman los números que espresan las cosas que hai, cuyos números son aquí los coeficientes. Cuando los términos semejantes tienen diferente signo, como los que tengan el signo $+$ conspiran á aumentar lo

que buscamos, y los que el $-$ á disminuirlo, en el que tenga mayor coeficiente quedará inutilizada una parte igual con el otro; la cual no influyendo en el resultado, se omite y queda solo la parte que influye, como aquí en $-8bc$ y $+5bc$: el $-8bc$ dice que ocho veces la cosa, unidad ó producto bc, influye contra el resultado que buscamos; el $+5bc$ nos dice que la cosa ó producto bc, influye cinco veces á favor del resultado, luego estas cinco veces á favor, inutilizarán el efecto de cinco veces en contra; luego de los dos términos, solo nos quedará tres veces el bc que influye contra el resultado, ó $-3bc$.

Se llama *valor numérico* de una espresion algebráica, el número que se obtiene dando valores particulares á las letras que entran en ella, y efectuando todas las operaciones aritméticas indicadas. Así, el valor numérico de $3ab$, siendo $a=4$ y $b=5$ es 60, porque el producto de 4 por 5 es 20, y tomando su triplo resulta 60. El valor numérico de $4a+2b-3c$ en el supuesto de ser $a=8$, $b=3$ y $c=5$, es 23; porque el valor de $4a$ es $4.8=32$; el de $2b$ es $2.3=6$; el de $3c$, es $3.5=15$; sumando los dos primeros resulta 38, y restando de esta suma el tercero que es 15 queda 23.

El mismo resultado hubiéramos tenido, quitando primero del valor de $4a$ que es 32, el de $3c$ que es 15, lo que nos hubiera dado 17; y añadiendo á esto el valor de $2b$ que es 6 resulta 23, y como lo mismo se verifica en cualquiera otra espresion algebráica, podemos establecer en general que el valor numérico de un *polinomio no muda aunque se varíe el órden de sus términos, con tal que se tenga cuidado de conservar á cada uno su signo respectivo.*

De la suma de las cantidades algebráicas.

172 *Sumar en Álgebra es reunir en una sola espresion el valor de dos ó mas.* El Álgebra tiene sobre la Aritmética la ventaja de que cuando por su medio se halla un resultado, este nos da la regla general que debemos practicar en todos los casos de la misma especie; nos propondrémos hallar la suma de $+a$ con $+b$, y de $+a$ con $-b$, y el resultado nos suministrará la regla que debemos seguir para hallar la suma en todos los demas casos.

Con esta mira colocarémos debajo del $+a$ el $+b$, tirarémos una raya, y debajo de ella indicarémos la operacion de sumar del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} +a \\ +b \\ \hline +a+(+b) \end{array}$$

Señalamos aquí cada letra con su signo, porque el Álgebra no solo considera el valor absoluto de las cantidades, sino su modo de existir ó el modo con que influyen en el cálculo; y en nuestra indicacion el signo $+$ que hai fuera del paréntesis, indica que lo que hai dentro de él se ha de agregar á lo que hai fuera que es el $+a$; el signo $+$ de dentro del paréntesis indica que la cantidad $+b$, que está dentro, es positiva, esto es, que conspira al fin que nos proponemos; y como el fin que nos proponemos es aumentar por la reunion de las dos cantidades, tendrémos que no habrá mas que reunir la b con el signo que indica su naturaleza, con $+a$, y nos resultará que $+a+(+b)=a+b$; y comparando este resultado con los datos que se nos diéron, vemos que *se ha ejecutado la suma, solo con poner los dos sumandos uno á continuacion del otro con los mismos signos que llevaban.*

Supongamos ahora que con $+a$ se quiere reunir $-b$; en este caso indicarémos la operacion de este modo: $+a+(-b)$;
el signo de fuera del paréntesis indica que lo que hai dentro, se debe reunir con lo que está fuera; y como el signo $-$ de dentro del paréntesis indica que la naturaleza de la cantidad $-b$ es de conspirar al fin contrario del que se propone el calculador, resulta que siendo aquí el fin que nos proponíamos aumentar, el fin contrario será disminuir; luego deberémos reunir la b con la a, poniendo entre las dos el signo $-$ que indica esta diminucion; luego tendrémos: $+a+(-b)=+a-b$.

Si ahora á esta suma tratásemos de añadirle otros sumandos cualesquiera, por ejemplo: $+c, -3a, +4b$, lo indicaríamos de este modo:
$$+a-b+(+c)+(-3a)+(+4b);$$
que haciendo el mismo raciocinio que ántes, tendrémos por resultado:
$$+a-b+c-3a+4b;$$
y como lo mismo podríamos ejecutar con todos los sumandos que se nos propusiesen, deducimos de estos resultados la siguiente regla general.

Para sumar en Álgebra *no hai mas que poner todos los sumandos, los unos á continuacion de los otros con los mismos signos que llevan; y como en todo resultado se debe averiguar si hai reduccion ó destruccion, se deberá hacer despues.* Ejecutando la reduccion y destruccion (171) en la espresion anterior se nos convertirá en $-2a+3b+c$.

Ahora, cuando en un resultado la primera cantidad es negativa, se procura poner ántes una positiva; porque de este modo nos ahorramos el poner un signo, puesto que el signo $+$ al principio de escritura se omite; así, la espresion antecedente la escribirémos de este modo: $c-2a+3b$.

173 Una de las propiedades mas sobresalientes del Álgebra es la generalidad con que da los resultados; por lo mismo para abrazar á un tiempo dos cuestiones suele usar del signo $\pm$ que se llama signo de *ambigüedad*; y quiere decir que la cantidad á que afecta puede ser positiva ó negativa, y usando de este signo se demuestran á un tiempo las propiedades respecto de las unas y de las otras. Conviene que los principiantes se acostumbren á usar de este signo, y por lo mismo vamos á dar de una vez, usando de él, las dos demostraciones del párrafo anterior; para lo cual supondrémos que con $+a$ se quiera reunir la cantidad $\pm b$; indicando nuestra operacion será: $+a+(\pm b)$;
y tendrémos que el signo que hai fuera nos dice que se debe agregar á $+a$ lo que hai dentro del paréntesis; pero el signo de ambigüedad que

hai dentro, nos dice que la cantidad b puede ser positiva ó negativa: cuando es positiva conspira al fin que nos proponemos, y cuando es negativa al fin contrario; luego en el resultado deberá quedar la misma duda; luego se deberá poner á continuacion de $+a$, con el signo de ambigüedad, y será: $+a+(\pm b)=+a\pm b$;
de donde podemos sacar de una vez la regla general para sumar. Esta regla que sacamos respecto de los monomios, es exactamente la misma para los polinomios; porque si á $a\pm b$ quisiésemos añadir $\pm 3c\pm bd$, quedaria ejecutada la suma con añadir todas las partes del $\pm 3c\pm bd$, pues entónces habiendo reunido todas las partes, tendríamos reunidos los todos; luego iríamos indicando nuestra operacion del modo siguiente:
$$a\pm b+(\pm 3c\pm bd)=a\pm b+(\pm 3c)+(\pm bd);$$
que, en virtud del raciocinio anterior, se convierte en $a\pm b\pm 3c\pm bd$; que da para los polinomios la misma regla que para los monomios.

Ahora solo falta que pongamos aquí algunos ejemplos de sumar polinomios, con cuyo objeto nos propondrémos sumar $4a^2b+3b^2c-5abc$, con $7abc+3d^2-3b^2c$, y con $5d^2+3d^2e-6a^2b$. Para esto aconsejan los autores que se coloquen los sumandos unos debajo de otros como en la Aritmética, y que se ponga la suma debajo de la raya, como aquí se presenta:
$$\begin{array}{c} 4a^2b+3b^2c-5abc \\ 7abc+3d^2-3b^2c \\ 5d^2+3d^2e-6a^2b \\ \hline 4a^2b+3b^2c-5abc+7abc+3d^2-3b^2c+5d^2+3d^2e-6a^2b \end{array}$$
y haciendo en la suma la reduccion y destruccion (171), se tendrá:
$$-2a^2b+2abc+8d^2+3d^2e,\ \text{ó}\ 2abc+8d^2+3d^2e-2a^2b;$$
pero aunque los autores hacen dicha colocacion al esplicar las operaciones, como despues no hacen uso de ella en la práctica (porque esto es separarse del curso de lo que se va ejecutando, y es contra el objeto del Álgebra, que trata de ir escribiendo las cuestiones y luego dar trasformaciones hasta llegar al resultado mas sencillo) nosotros ejecutarémos esto, siguiendo la marcha del Álgebra; esto es, indicando las operaciones y poniendo las trasformaciones al lado, separándolas con el signo $=$; pues de este modo cualquiera que tome la operacion, leerá lo que se está ejecutando; siendo así que estando colocados los sumandos como allí se presenta, no podríamos saber si esta colocacion era para sumarlos, ó para restar del primero la suma del segundo con el tercero, ó de la suma del primero y segundo restar el tercero, ó para multiplicarlos todos entre sí ó para cualquiera otra operacion.

Y así, pues que el Álgebra es una lengua, escribirémos en ella nuestra cuestion, del modo siguiente:
$$(4a^2b+3b^2c-5abc)+(7abc+3d^2-3b^2c)+(5d^2+3d^2e-6a^2b);$$
aquí encerramos dentro de un paréntesis á cada sumando, porque un

signo cualquiera solo estiende sus facultades hasta donde encuentra un signo + ó un signo —, de lo cual ya dijimos algo en la Aritmética (53).

Ahora, practicando la regla (172) que equivale aquí á suprimir los paréntesis, se nos convertirá en

$4a^2b+3b^2c-5abc+7abc+3d^2-3b^2c+5d^2+3d^2e-6a^2b$,

que despues de hecha la reduccion y destruccion, resulta

$$2abc+8d^2+3d^2e-2a^2b.$$

Para que los principiantes se ejerciten, pondrémos aquí dos ejemplos en que solo se presentan indicadas las operaciones y trasformaciones, sin esplicacion:

1.º $(3b^2a+5a^2c-7abd)+(2b^2-5a^3)+(6abd+5a^3-7a^2c+6b^2a)+(7c^3-5a^4)=3b^2a+5a^2c-7abd+2b^2-5a^3+6abd+5a^3-7a^2c+6b^2a+7c^3-5a^4=9b^2a-2a^2c-abd+2b^2+7c^3-5a^4$.

2.º $(5a^3b^3c+8a^2b^3d-7abc^4)+(16abc^4-9a^2b^3d+32a^2b^5)+(9a^5m-3a^3b^3c)+(5a^4b^2-2abc^4)=5a^3b^3c+8a^2b^3d-7abc^4+16abc^4-9a^2b^3d+32a^2b^5+9a^5m-3a^3b^3c+5a^4b^2-2abc^4=2a^3b^3c-a^2b^3d+7abc^4+32a^2b^5+9a^5m+5a^4b^2$.

De la operacion de restar cantidades algebráicas.

174 *Restar en Álgebra es, hallar la diferencia entre dos cantidades, ó quitar una cantidad de otra dada.*

Para hallar las reglas que nos deben conducir en la operacion de restar, supondrémos que de $+a$ se quiera quitar $\pm b$; y tendrémos indicando la operacion: $a-(\pm b)$;

ahora, el signo— que está fuera del paréntesis, indica (163) que la cantidad á que afecta, influye en el resultado de un modo inverso al que influiria si tuviese el signo +; pero si tuviese el signo +, el resultado de esta operacion seria (§ 173) $a\pm b$; luego como aquí ha de ser el inverso, será: $a-(\pm b)=a\mp b$; en cuyo resultado tenemos á un mismo tiempo estos dos: $a-(+b)=a-b$, y $a-(-b)=a+b$;

que pudiéramos haber sacado separadamente; pero hemos preferido hacerlo así, para acostumbrar cuanto ántes al principiante á los resultados generales.

Para sacar de un resultado donde entran signos de ambigüedad, los dos que están comprendidos en él, la máxima que hai que seguir es tomar un resultado con los signos superiores, y otro con los inferiores, como hemos hecho aquí.

Si en vez de ser monomio el sustraendo fuese un polinomio, estaria reducido á ir indicando la sustraccion de todas sus partes; de manera que si de $a\pm b$ quisiéramos restar $\pm c\mp d$, indicaríamos nuestra operacion del modo siguiente: $(a\pm b)-(\pm c\mp d)$, ó $a\pm b-(\pm c)-(\mp d)$; que en virtud del raciocinio anterior se convierte en $a\pm b\mp c\pm d$; lo cual nos suministra esta regla para la práctica: para restar cantidades algebráicas *no hai mas que poner el minuendo y á su continuacion el sustraendo mudándole los signos* (*).

175 Podríamos aquí colocar tambien el sustraendo debajo del minuendo, y efectuar la operacion como lo hacen comunmente los autores; pero nosotros seguirémos la marcha del Álgebra, indicando la operacion. Así, si nos proponemos restar de $5ab+3b^2-7c^3+4b^2c$ la cantidad $7b^2-4b^2c+2ab-d^2-5c^3$, primero indicarémos la operacion encerrando el sustraendo dentro de un paréntesis, luego practicarémos la regla que acabamos de dar, y finalmente harémos la reduccion como aquí se presenta:

$5ab+3b^2-7c^3+4b^2c-(7b^2-4b^2c+2ab-d^2-5c^3)=5ab+3b^3-7c^3+4b^2c-7b^2+4b^2c-2ab+d^2+5c^3=3ab-4b^2-2c^3+8b^2c+d^2$.

Si de $17a^7b^2-8c^4d+6a^2b^2c^3-5a^4$ quisiese restar la cantidad $3a^2b^2c^3-d^9-5a^7b^2-8c^4d$ ejecutaria la operacion como aquí se ve:

$17a^7b^2-8c^4d+6a^2b^2c^3-5a^4-(3a^2b^2c^3-d^9-5a^7b^2-8c^4d)=17a^7b^2-8c^4d+6a^2b^2c^3-5a^4-3a^2b^2c^3+d^9+5a^7b^2+8c^4d)=\ldots 22a^7b^2+3a^2b^2c^3-5a^4+d^9$.

De la multiplicacion algebráica.

176 *Multiplicar en Álgebra es tomar una cantidad tantas veces como diga otra, y tomarla del modo que diga se debe tomar.* Añadimos aquí esta circunstancia, porque como en el Álgebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sino tambien á su modo de existir, el multiplicador con sus unidades nos dice las veces que debemos tomar el multiplicando, y con su signo el modo con que le debemos tomar.

En la multiplicacion algebráica pueden ocurrir tres casos: *multiplicar un monomio por otro*; *un polinomio por un monomio*, ó al contrario; y *un polinomio por otro polinomio.*

Para multiplicar un monomio por otro, hai que atender á cuatro cosas: á los *signos*, á los *coeficientes*, á las *letras* y á los *esponentes.*

Diofanto tomaba por axioma que — por — daba +, y que — por + daba —, pues hacia que entrase esto en la definicion 9.ª del libro 1.º

Para demostrar nosotros la regla de los signos, nos proponédrémos

(*) *Laplace da la siguiente demostracion de la regla de los signos en esta operacion.*

Si de la cantidad a+b, *se tuviese que quitar* b, *es evidente que se tendria* a *por resultado; del mismo modo si de* ±a=±a+b—b, *nos proponemos quitar* +b, *viene por resta*: ±a—b;

y si de ±a=±a+b—b *se quita* —b, *la resta será*: ±a+b;

lo que demuestra la regla de los signos, esto es, que se han de mudar los del sustraendo.

multiplicar $+a$ por $+b$, ó para mayor sencillez y claridad, tomarémos por multiplicador la unidad; y así indicarémos nuestra operacion de este modo: $+a\times+1$;
ahora, el multiplicador $+1$ nos dice con sus unidades que tomemos una vez al multiplicando, y con su signo $+$ nos dice que le tomemos como él sea; el multiplicando $+a$ es positivo, luego le deberémos tomar una vez positivamente, y será por consiguiente el producto $+1a$ ó $+a$, omitiendo el coeficiente 1; luego $+a\times+1=a$ que en cuanto á los signos en abstracto da: $+\times+=+$.

Supongamos ahora que el multiplicador sea -1, y tendrémos indicada nuestra operacion de este modo: $+a\times-1$;
aquí el multiplicador con sus unidades nos dice que debemos tomar una vez al multiplicando, y con su signo que le tomemos al contrario de como él sea; el multiplicando es positivo, luego le deberémos tomar una vez negativamente, y se tendrá: $+a\times-1=-1a=-a$;
lo que en punto á los signos da: $+\times-=-$.

Supongamos ahora que el multiplicando sea negativo tal como $-a$; si el multiplicador es $+1$, tendrémos indicada la operacion de este modo: $-a\times+1$;
donde el multiplicador $+1$ nos dice con sus unidades que debemos tomar una vez al multiplicando, y con su signo que le debemos tomar como él sea; el multiplicando es negativo, luego le deberémos tomar una vez negativamente, y será: $-a\times+1=-1a=-a$;
lo que da para los signos $-\times+=-$.

Finalmente si el multiplicador fuese -1, tendríamos indicada la operacion de este modo: $-a\times-1$;
donde el multiplicador -1 nos dice con sus unidades que debemos tomar al multiplicando una vez, y con su signo que le debemos tomar al contrario de como él sea; el multiplicando es negativo, luego le deberémos tomar positivamente, y se tendrá: $-a\times-1=+1a=a$;
lo que da para los signos $-\times-=+$.

Estos cuatro casos se convierten en estos dos, á saber: que *signos semejantes*, esto es, $+$ por $+$ ó $-$ por $-$, *ó en general* $\pm$ por $\pm$ ó $\mp$ por $\mp$, *dan siempre* $+$ *en el producto*; *y signos desemejantes*, esto es, $+$ por $-$ ó $-$ por $+$, *ó en general* $\pm$ por $\mp$ ó $\mp$ por $\pm$, *dan siempre en el producto* $-$ (*).

(*) *Laplace demuestra la regla de los signos del modo siguiente.*

Si se tiene que multiplicar a$-$a *por* $+$b *el producto debe ser* ab$-$ab; *porque siendo cero el multiplicando el producto debe ser cero; pero siendo el primer término* $+$ab, *el segundo debe ser* $-$ab *para satisfacer á esta condicion; luego* $-$a$\times+$b$=-$ab.

Si se tiene que multiplicar a *por* b$-$b, *se hallará, haciendo el mismo razonamiento*, ab$-$ab *por producto*; *luego* 2.° $+$a$\times-$b$=-$ab.

En fin, si se multiplica $-$a *por* b$-$b, *el primer término del producto siendo por lo que acabamos de demostrar* $-$ab, *el segundo será necesariamente* $+$ab: *en efecto*, $-$ab$+$ab$=$o; *luego* 3.° $-a\times-$b$=+$ab.

El célebre Euler en su Álgebra da la demostracion de los signos de esta manera. Primero multiplica una cantidad positiva por otra positiva, y dice con razon que no hai motivo para dudar de que el producto sea $+$, *por lo que* $+a\times+$b$=+$ab. *Pero se propone examinar aparte lo que debe provenir de la multiplicacion de* $+$a *por* $-$b, *y de* $-$a *por* $-$b.

Principiemos (dice) por multiplicar $-$a *por* 3 *ó* $+3$, *y puesto que* $-$a *se puede considerar como una deuda, es claro que si se toma tres veces esta deuda, debe tambien hacerse tres veces mayor, y por consiguiente el producto buscado es* -3a. *Igualmente, si se trata de multiplicar* $-$a *por* $+$b, *se obtendrá* $-$ba, *ó lo que es lo mismo* $-$ab. *De aquí sacamos la consecuencia de que una cantidad positiva multiplicada por una negativa, da un producto negativo; y establecemos por regla que* $+$ *por* $+$ *da* $+$ *ó* mas, *y que al contrario* $+$ *por* $-$ *ó* $-$ *por* $+$ *da* $-$.

Aun nos falta (continúa) resolver el caso de $-$ *multiplicado por* $-$, *ó por ejemplo*, $-$a *por* $-$b. *Es evidente desde luego, que en cuanto á las letras el producto será* ab; *pero aun es incierto si este producto ha de llevar el signo* $+$ *ó el signo* $-$; *todo lo que se sabe es que será el uno ó el otro de estos signos; pero yo digo que no puede ser el signo* $-$; *porque* $-$a *por* $+$b *da* $-$ab, *y* $-$a *por* $-$b *no puede dar el mismo resultado que* $-$a *por* $+$b, *sino que debe dar el opuesto, es decir*, $+$ab; *por consiguiente tenemos esta regla*: $-$ *multiplicado por* $-$ *da* $+$ *del mismo modo que* $+$ *multiplicado por* $+$ *da* $+$.

Mr. Bois-Bertrand *da la siguiente demostracion.*

»*Para hallar el signo del producto de* $+$a *por* $-$b, *remontémonos desde luego á la generacion de las cantidades negativas: sabemos que toda cantidad de esta especie, tal como* $-$b, *se puede considerar como que proviene de una sustraccion en la cual la cantidad que se ha de sustraer es mayor que aquella de que se quiere sustraer. Así*, $-$b *se puede considerar como igual á* m$-$c, *suponiendo que* $+$b *sea el esceso de* c *sobre* m. *El producto de* $+$a *por* $-$b *es pues la misma cosa que el de* $+$a *por* m$-$c. *Procurémos formar este último; y para esto observarémos que debe ser visiblemente igual al producto de* $+$a *por* m, *disminuido del producto de* $+$a *por* c, *es decir*, *á* am$-$ac.» *Y al llegar aquí pone la siguiente nota.* »*Porque si se tuviese que multiplicar* a *por* m, *el producto seria* am; *pero no es por* m *por el que se debia multi-*

Ahora, como los coeficientes son números, *se multiplican por las reglas de Aritmética*; porque si $a\times b=ab$; de multiplicar $3a$ por $4b$, debe resultar (87) un producto doce veces mayor que ab.

En cuanto á las letras que son diferentes en ambos factores, *se ponen unas á continuacion de otras sin interposicion de signos ningunos*; porque aquí cuando entre dos letras no hai ningun signo, se da á conocer que están multiplicadas.

---

plicar, sino por m *disminuido en* c; *luego se ha tomado* a, c *veces de mas, luego es necesario tomarla* c *veces de ménos, es decir, quitar de* am *el producto* ca."

»*Parece que esto encierra la demostracion del hecho, y prueba que el producto de una cantidad positiva* a *por una negativa* —c *es negativo. Pero aquí esta cantidad negativa no está aislada, ella está ligada con* m; *es necesario llegar á la misma conclusion para la cantidad* —b, *que era nuestro multiplicador primitivo; por otra parte no se sabe si* —ac *es el producto de* a *por* —c; *se sabe solamente que para tener el producto de* a *por* m—c, *es necesario quitar* ac *de* am, *es decir escribir* —ac *á continuacion de* am." *Esto quiere decir que en concepto de* Bois-Bertrand *las demostraciones que se dan por el estilo de la primera parte de esta nota, que son las mas, todas ellas son inexactas y dejan la cuestion por resolver. Yo he sido siempre de la misma opinion; y he preferido la demostracion del testo, porque la creo mas conforme con el método de la generacion de las idéas. Con el fin de llegar* Bois-Bertrand *á la conclusion verdadera, continúa despues de lo que llevamos puesto*: »*así*, a×(—b) *equivale á* am—ac; *pero la cantidad* m *equivale á* c—b, *pues que* m *disminuida de* c *es igual con* —b. *Luego el producto* am *puede remplazarse por* a.(c—b) *ó* ac—ab.

Luego a×(—b) *equivale á* ac—ab—ac; *pero la parte* ac *destruye á la* —ac; *luego en fin* a×(—b) *equivale á* —ab."

Aunque esta demostracion tiene todavía el inconveniente de esplicar lo simple, suponiendo conocido lo compuesto, es sin embargo preferible á las que dan los demas autores. Y como yo deséo que en esta obra se halle todo lo mejor que tenga relacion con su objeto, continuaré aquí lo que él dice. »*En fin*, cuando los dos factores están afectos del signo —, *el producto recibe el signo*+. *En efecto, sea* —a *la cantidad que se deba multiplicar por* —b. *Podrémos remplazar* —b *por* m—c, *suponiendo que* +b *sea el esceso de* c *sobre* m; *y todo estará reducido á multiplicar* —a *por* m—c; *pero el producto de estas dos cantidades será*—ma+ac; *porque si se tuviese que multiplicar* —a *por* m, *el producto seria* —ma; *pero no era por* m *por quien era necesario multiplicar, sino por* m *disminuido de* c; *luego es necesario quitar de* —ma *el producto* —ca *de* —a *por* c, *lo que da* —ma+ac. *Así* —a×(—b) *equivale á* —ma+ac.

Pero m *es igual con* c—b, *pues que* m *disminuido de* c *es igual con* —b; *luego se puede sustituir al producto de*—a *por* m, *el de*—a *por* c—b, *es decir* —ac+ab. *Así* —a×(—b) *equivale á* —ac+ab+ac.

En punto á los esponentes, *los de una misma letra se suman*; porque si se tiene que multiplicar a^3 por a^2, el esponente 3 del multiplicando nos dice que la a es tres veces factor, y el 2 del multiplicador nos dice que la a es en este dos veces factor; y como en el producto se hallará la a tantas veces por factor como se halla en el multiplicando y multiplicador juntos, se deberá hallar tantas veces como unidades haya en ambos esponentes juntos, luego se deberá encontrar la letra en el producto con un esponente igual á la suma de los de los factores. Este raciocinio se hará sensible de este modo:

$$a^3 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2}.$$

Ahora, solo falta que apliquemos estas reglas á algunos ejemplos. Propongámonos en primer lugar multiplicar $+5b^2a^3ce$ por $+3a^2b^4cd^2$, y dirémos: + por + da + que pondrémos en el producto; 5 por 3 son 15 que pondrémos despues del signo +; b^2 por b^4, sumando sus esponentes, será b^6; a^3 por a^2, sumando sus esponentes, será a^5; c por c, sumando sus esponentes que son 1, será c^2; y como no hai e en el multiplicador, ni d^2 en el multiplicando, se pondrán estas letras á continuacion las unas de las otras despues de lo que ya hemos sacado; de manera que tendrémos: $+5b^2a^3ce \times +3a^2b^4cd^2 = +15b^6a^5c^2ed^2$.

Otros ejemplos de multiplicacion de monomios:

$$(1.^{\circ}) -6a^4b^3c^2d^7 \times -4a^5d^3cm^4 = +24a^9b^3c^3d^{10}m^4.$$

$$(2.^{\circ}) -3a^6b^4m^5cd \times ab^8m^5c^4n^3 = -3a^7b^{12}m^{10}c^5dn^3.$$

Cuando los esponentes son indeterminados, esto es, cuando son letras, se indica la suma de los esponentes de los factores; así, si se quiere multiplicar $+3a^mb^3c^nd^r$ por $-5b^sa^te^5d^s$, tendrémos que el producto será $-15a^{m+t}b^{3+s}c^nd^{r+s}e^5$.

177 Cuando ocurre multiplicar muchos monomios entre sí, se *multiplican primero todos los signos, esto es, se ve que signo resulta del conjunto de todos; despues se multiplican todos los coeficientes; luego se suman todos los esponentes de una misma letra, y las que no se hallan sino en un factor quedarán del mismo modo en el producto.* Así, si me propusiera multiplicar $5a^2bc^3$ por $-3a^4c^5m$, y esto por $2c^3b^4$, y lo que

---

Y como +ac *y* —ac, *se destruyen, resulta que el producto de* —a *por* —b *equivale á* ab.

Habria que hacer sobre esta demostracion la misma observacion que sobre la precedente."

Terminarémos esta nota poniendo la demostracion de Hutton.

»*Supongamos que* —a *se ha de multiplicar por* —c; *aquí* —a *debe restarse tantas veces como unidades hai en* c; *pero restar cantidades negativas es lo mismo que añadir positivas; por consiguiente el producto es* c *veces* a *ó* + ac."

resultase por a^3c^2br, indicaria y ejecutaria la operacion como aquí se ve: $5a^2bc^3 \times -3a^4c^5m \times 2c^3b^4 \times a^3c^2br = -30a^9b^6c^{13}mr$, diciendo: + por — da —, y por + que tienen los otros dos da — que pongo en el producto; luego, 5 por 3 son 15; 15 por 2 son 30, que pongo; sumo los esponentes de la a, y hallo que su suma es 9, y ejecutando lo mismo con los demas tendré el producto que allí se presenta.

178 Para multiplicar un polinomio por un monomio, ó un monomio por un polinomio *se multiplicará cada término del polinomio por el monomio*; así, si tuviera que multiplicar $4b^3c^2-3a^2d^5+6bcd^4$ por $-5a^7d^6c$, indicaria así la operacion: $(4b^3c^2-3a^2d^5+6bcd^4)\times-5a^7d^6c = \ldots$ $-20b^3c^3a^7d^6+15a^9d^{11}c-30bc^2d^{10}a^7$; y multiplicaria el primer término $4b^3c^2$ por $-5a^7d^6c$, lo que (176) nos dará $-20b^3c^3a^7d^6$; luego, pasaria á multiplicar el $-3a^2d^5$ por $-5a^7d^6c$, lo que dará por producto $+15a^9d^{11}c$; por último pasaré á multiplicar el $+6bcd^4$ por $-5a^7d^6c$, que dará $-30bc^2d^{10}a^7$, y tendrémos que el producto será el que allí se presenta.

Si en el polinomio que sirve de multiplicando ó multiplicador, no se puede hacer reduccion ni destruccion, tampoco se podrá hacer en el producto; porque despues de haber añadido á cada término las letras que tenga el monomio que sirve de factor, no podrán hallarse términos que sean semejantes; y como al proponer una cuestion se deben presentar los datos simplificados, ó se deben simplificar ántes de empezar á ejecutarla, resulta que podemos establecer en general: que *de la multiplicacion de un polinomio por un monomio, no puede resultar simplificacion.*

Otros ejemplos de multiplicacion:

(1.º) $2a^4b^3c^2\times(5a^5d^4c^2-3b^4c+8c^7d^6a^5m^6)=\ldots$
$10a^9b^3c^4d^4-6a^4b^7c^3+16a^9b^3c^9d^6m^6$.

(2.º) $(8a^4b^5c^md^2-6a^rc^nd^p+7c^2b^5ad-7a^4b^nc^7)\times-3a^2b^rc^qd^4=\ldots\ldots$
$-24a^6b^{5+r}c^{m+q}d^6+18a^{r+2}c^{n+q}d^{p+4}b^r-21a^3b^{5+r}c^{2+q}d^5+21a^6b^{r+n}c^{7+q}d^4$.

179 Para multiplicar un polinomio por otro polinomio, *se multiplica primero todo el multiplicando por el primer termino del multiplicador; despues todo el multiplicando por el segundo término del multiplicador; despues por el tercero, &c. se van colocando los productos unos á continuacion de otros con los signos con que vayan saliendo; luego, se ve si hai reduccion ó destruccion, y se ejecuta si se puede.*

Propongámonos, por ejemplo, multiplicar $a+b$ por $a-b$, y tendrémos que multiplicar primero $a+b$ por a, lo que da a^2+ab; y luego el multiplicando $a+b$ por $-b$, lo que da $-ab-b^2$, que puesto á continuacion del anterior da: $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$, porque $+ab$ con $-ab$ se destruye.

Este resultado le debemos traducir en regla, porque nos será mui

útil en lo sucesivo, y nos dice: que *la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, da por producto la diferencia de estas cantidades con un esponente duplo del que tenian en los factores* (*); así es, que si en general se tiene que multiplicar a^m+b^m por a^m-b^m, su producto será $a^{2m}-b^{2m}$, como se ve en la operacion que aquí se presenta:

$$(a^m+b^m)(a^m-b^m)=a^{2m}+a^mb^m-a^ma^m-b^{2m}=a^{2m}-b^{2m}.$$

Propongámonos ahora multiplicar $5a^4b^3+3b^4a^3-2a^2b^5$ por a^2-b^2, y tendrémos indicando la operacion:
$(5a^4b^3+3b^4a^3-2a^2b^5)\times(a^2-b^2)=5a^6b^3+3b^4a^5-2a^4b^5-5a^4b^5-3b^6a^3+2a^2b^7=5a^6b^3+3b^4a^5-7a^4b^5-3b^6a^3+2a^2b^7$;
multiplicarémos primero todo el multiplicando por el primer término a^2 del multiplicador, lo que nos dará por producto $5a^6b^3+3b^4a^5-2a^4b^5$; despues multiplicarémos todo el multiplicando por el segundo término $-b^2$ del multiplicador, y el producto $-5a^4b^5-3b^6a^3+2a^2b^7$, le irémos colocando á continuacion del primero como allí se ve; y ejecutando la reduccion sale por último $5a^6b^3+3b^4a^5-7a^4b^5-3b^6a^3+2a^2b^7$.

Si tuviéramos que multiplicar $6a^2b^2+4b^3a+a^4+4a^3b+b^4$ por $b^3-3ab^2-a^3+3a^2b$, indicaríamos y ejecutaríamos la operacion como aquí se presenta: $(6a^2b^2+4b^3a+a^4+4a^3b+b^4)\times(b^3-3ab^2-a^3+3a^2b)=6a^2b^5+4b^6a+a^4b^3+4a^3b^4+b^7-18a^3b^4-12a^2b^5-3a^5b^2-12a^4b^3-3ab^6-6a^5b^2-4b^3a^4-a^7-4a^6b-a^3b^4+18a^4b^3+12a^3b^4+3a^6b+12a^5b^2+3a^2b^5=-3a^2b^5+ab^6+3a^4b^3-3a^3b^4+b^7+3a^5b^2-a^7-a^6b$.

Del mismo modo si tuviéramos que multiplicar $a^4b+ab^4+a^3b^2+a^2b^3+a^5+b^5$ por $a-b$, indicaríamos la operacion y sacaríamos el resultado que aquí se presenta:
$(a^4b+ab^4+a^3b^2+a^2b^3+a^5+b^5)\times(a-b)=a^5b+a^2b^4+a^4b^2+a^3b^3+a^6+ab^5-a^4b^2-ab^5-a^3b^3-a^2b^4-a^5b-b^6=a^6-b^6$.

180 Antes de concluir la multiplicacion generalizarémos la proposicion (55); pues en todo lo que hemos dicho hasta aquí, hemos supuesto que la colocacion de los factores no influia en el producto; y como reflexionando con atencion la demostracion que dimos para probar que el producto era el mismo, ya se tomase por multiplicando al multiplicador ó al contrario, se echará de ver que era solo aplicable á los números enteros: vamos ahora á probar que esta proposicion siempre es verdadera.

Supongamos que los dos números sean A y B; si fuesen iguales, entónces no hai dificultad en que $A\times B=B\times A$, puesto que sustituyendo A en lugar de B ó B en lugar de A, tendrian ambos la forma $A\times A$ ó $B\times B$. Si son desiguales supongamos que A sea el mayor, y C la diferencia; con lo cual tendrémos: $A=B+C$, por lo que sustituyendo en vez de A este valor, se tendrá:

(*) *Como* a² *verémos en adelante que es el* cuadrado *de* a, *y* b² *el de* b, *esta proposicion se enunciará*: la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia da la diferencia de sus cuadrados.

$A\times B=(B+C)\times B=B\times B+C\times B$, y $B\times A=B\times(B+C)=B\times B+B\times C$; donde vemos que como ambas espresiones convienen en el primer término del producto, serán iguales si llegamos á probar que $C\times B$ es lo mismo que $B\times C$. Del mismo modo si C y B no fuesen iguales, llegaríamos á demostrar, si suponíamos que B era el mayor é igual á $C+D$, que $C\times B$ y $B\times C$ serian iguales, si $C\times D$ y $D\times C$ lo eran; y continuando así, se llegaria á un caso en que los dos factores fuesen iguales entre sí, ó que el uno de ellos fuese igual con la unidad. En el primer caso hai igualdad como notámos al principio; en el segundo vendrémos á tener $H\times 1$, y $1\times H$; pero en la idéa que tenemos del número entra que una vez un número es lo mismo que aquel número de unidades; luego será lo mismo H veces uno que una vez H; y como la verdad de los resultados anteriores depende de la de este último se deduce que $A\times B=B\times A$.

Esta demostracion se estiende á todos los casos en que los factores (sean de la especie que sean) tengan una comun medida con la unidad; pero como hai muchas cantidades que no la tienen, acabarémos de generalizar esta proposicion, (332) cuando hayamos dado á conocer la existencia de estas cantidades.

De la division algebráica.

181 *Dividir en Álgebra es buscar cuantas veces una cantidad contiene á otra, y del modo que la contiene*; de donde resulta que el divisor multiplicado por el cociente que obtengamos debe dar el dividendo; y por lo mismo podemos decir que el objeto que nos proponemos al ejecutar una division algebráica es: *hallar una cantidad que multiplicada por el divisor dé el dividendo.*

En la division algebráica pueden ocurrir cuatro casos: *dividir un monomio por otro*; *dividir un polinomio por un monomio*; *dividir un monomio por un polinomio*; y *dividir un polinomio por otro polinomio.*

Para dividir un monomio por otro hai que atender á cuatro cosas que son: *signos*, *coeficientes*, *letras y esponentes.*

En punto á signos se observa la misma regla que en la multiplicacion, á saber: que signos semejantes dan $+$ en el cociente, y signos desemejantes dan $-$. Para demostrarlo, supongamos que se tenga que dividir una cantidad que lleve el signo $+$ por otra que lleve tambien el signo $+$, esto es, $+a$, v. g., por $+b$, ó haciendo para mayor sencillez $b=1$, $+a$ por $+1$; é indicarémos la operacion del modo siguiente: $\frac{+a}{+1}$; ahora en el mismo hecho de querer intentar la operacion de dividir, consideramos al dividendo como un producto; y como el signo $+$ de un producto solo puede provenir de $+$ por $+$ ó de $-$ por $-$, y aquí conocemos el signo $+$ de uno de los factores que es el divisor, resulta

que solo puede provenir de $+$ por $+$; luego el signo del otro factor que es el cociente que buscamos, será $+$; y como por otra parte la unidad está contenida en otra cantidad tantas veces como unidades tiene ella, 1 estará contenido en a, a veces, y por lo mismo tendrémos:

$\frac{+a}{+1}=+a$, ó atendiendo solo á los signos $\frac{+}{+}=+$.

Sea ahora $\frac{-a}{+1}$, como debemos considerar al dividendo como un producto, su signo provendrá de $+$ por $-$ ó de $-$ por $+$; pero como uno de estos signos ha de ser el $+$ del divisor, resulta que el del otro factor que es el cociente, será $-$; luego en virtud de esto, y de lo que acabamos de esponer en el caso anterior, se tendrá:

$\frac{-a}{+1}=-a$, ó con relacion solo á los signos $\frac{-}{+}=-$.

Sea ahora $\frac{+a}{-1}$, como el $+$ del dividendo debe resultar del producto de otros dos signos, y solo $+$ por $+$ ó $-$ por $-$, pueden producirle, tendrémos que como aquí conocemos el signo de un factor que es el $-$ del divisor, provendrá en este caso de $-$ por $-$; luego el signo del otro factor será tambien $-$ y se tendrá:

$\frac{+a}{-1}=-a$, ó con relacion á los signos $\frac{+}{-}=-$.

Por último, si tenemos $\frac{-a}{-1}$, como el $-$ de arriba ha de provenir de $+$ por $-$ ó de $-$ por $+$, y aquí conocemos que uno de los factores ha de tener $-$, resulta que el otro deberá tener el otro signo que queda, esto es $+$, y será: $\frac{-a}{-1}=+a$, ó respecto de los signos $\frac{-}{-}=+$.

Donde vemos que el primero y cuarto caso en que los términos tenian signos semejantes, nos han dado $+$; y que el segundo y tercero en que eran desemejantes nos han dado $-$; luego es la misma regla que para la multiplicacion.

Ahora, combinando dos de estos resultados con el signo de ambigüedad, tendrémos: $\frac{\pm a}{+1}=\pm a$; $\frac{\pm a}{-1}=\mp a$; $\frac{+a}{\pm 1}=\pm a$; $\frac{-a}{\pm 1}=\mp a$; $\frac{\pm a}{\pm 1}=+a$; $\frac{\pm a}{\mp 1}=-a$; $\frac{\mp a}{\pm 1}=-a$; $\frac{\mp a}{\mp 1}=+a$.

En cuanto á los coeficientes *se dividen por las reglas de la Aritmé-*

tica; y sino se puede ejecutar la operacion con exactitud se deja indicada, y solo se hace la simplificacion que se pueda.

En cuanto á las letras diferentes que haya en el dividendo y en el divisor, *se dejan donde estén; si son una misma letra sin esponente, ó con un mismo esponente, se borra en ambos, y cuando tienen esponentes diferentes se resta el uno del otro, y se pone esta letra con el esponente igual á esta diferencia en el término donde se hallaba con mayor esponente.*

La regla de los coeficientes no tiene nada que demostrar, puesto que siendo números corresponde á la Aritmética el modo de ejecutar las operaciones (*); la de dejar las letras que no sean comunes en su lugar correspondiente, tampoco; porque no pudiéndose ejecutar la division se deja indicada; y la de cuando hai una misma letra sin esponente ó con un mismo esponente suprimirla, es porque esto equivale á partir el dividendo y el divisor por una misma cantidad, lo que hemos visto (93) que no altera el cociente (**). Cuando se restan los esponentes, es porque se puede descomponer la letra que se halla con el mayor esponente, en dos factores que el uno tenga por esponente el menor de ellos, y el otro la diferencia; y entónces el factor comun puede suprimirse en ambos términos, lo que equivale á dividirlos por aquella cantidad.

Entendido esto, pasemos á ejecutar algunos ejemplos de division de monomios.

1.º Si quisiéramos dividir $9a^4b^3c^2d$ por $-3b^2ac^5e^2$, diríamos: $+$ que tiene el dividendo porque se le sobrentiende (163), dividido por $-$ da $-$; 9 dividido por 3 da 3; a^4 dividido por a, es a^3, porque restando el esponente 1 de la a en el divisor, del esponente 4 de la a en el dividendo, queda a^3; b^3 dividido por b^2, es b, porque $3-2=1$, y $b^1=b$; c^2 dividido por c^5 da c^3 en el denominador, porque la diferencia entre 2 y 5 es 3, y en el denominador es donde hai mayor esponente; la d quedará en el dividendo, y la e^2 en el divisor, de manera que tendré:

$$\frac{9a^4b^3c^2d}{-3b^2ac^5e^2}=-\frac{3a^3bd}{c^3e^2}.$$

Si tuviera que ejecutar esta division indicada $\frac{12a^7b^4c^md^s}{8a^5b^3c^nd^r}$, diria primero: $+$ por $+$ da $+$ que no pongo (163); 12 dividido por 8 no se puede ejecutar; y así, ó lo dejaré indicado, ó simplificaré dividiendo ambas cantidades por 4, lo que las reducirá á $\frac{3}{2}$; ahora diré: a^7 dividido por a^5 es a^2 en el numerador; b^4 dividido por b^3 da b; c^m dividido por c^n no podemos hacer sino indicarlo; pero como no sabemos si m es mayor que n ó n mayor que m, no sabemos cual es la que se debe restar de cual; pero el mismo hecho de intentar la division parece da á conocer que en general la del dividendo debe ser mayor; así, se indicará la resta dejándola en él con la diferencia de los esponentes, y quedará c^{m-n}; por la misma razon quedará igualmente d^{s-r}, y tendrémos por último:

$$\frac{12a^7b^4c^md^s}{8a^5b^3c^nd^r}=\tfrac{3}{2}a^2bc^{m-n}d^{s-r}.$$

Otros ejemplos de division de monomios:

$$\frac{-20b^5m^8d^3}{-4a^3b^2m^5d}=\frac{5b^3m^3d^2}{a^3};\quad \frac{4a^2b^9m^7d^8c^r}{12b^5a^7m^2d^nc^4}=\frac{b^4m^5d^{8-n}c^{r-4}}{3a^5}.$$

182 Ántes de pasar mas adelante harémos algunas observaciones sobre la espresion $\frac{c^m}{c^n}$ que acabamos de considerar. Hemos visto que al ejecutar esta operacion de $\frac{c^m}{c^n}$ nos hallábamos embarazados por no saber que esponente era mayor; y hemos dicho que el mismo hecho de intentar la division parece da á entender que el esponente del dividendo ha de ser mayor, y que así se pone c^{m-n}; en rigor, hallándonos en esta duda, la misma razon habrá para decir que $\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}$, que para decir que era $\frac{1}{c^{n-m}}$; pero como la 1ª espresion es mucho mas sencilla porque se presenta bajo la forma de entero, se ha preferido siempre. Veamos ahora las consecuencias que resultan de dicha espresion $\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}$ (A).

Tres casos pueden ocurrir aquí: ó que $m>n$, ó que $m=n$, ó finalmente que $m<n$. Si $m>n$ será necesario añadir á n una cantidad cualquiera tal como u, paraque sea igual con m; de manera que se tendrá $m=n+u$, y sustituyendo este valor en la espresion (A) será:

$$\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}=c^{n+u-n}=c^u;$$

porque $+n$ y $-n$ se destruyen. Este caso no nos enseña nada de nuevo.

Si $m=n$, haciendo esta sustitucion en la espresion (A) será:

(*) *Sin embargo hé aquí una razon: el cociente multiplicado por el divisor ha de dar el dividendo; luego el coeficiente del cociente por el del divisor dará el coeficiente del dividendo, y por lo mismo el coeficiente del cociente deberá ser lo que resulte de dividir el del dividendo por el del divisor.*

(**) *Allí lo demostrámos respecto de números, pero establecíamos en general el raciocinio; y así, lo que demostrámos entónces queda demostrado para ahora.*

$$\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}=c^{n-n}=c^0;$$

aquí nos encontramos con una espresion c^0 desconocida para nosotros; y así, para ver lo que significa, harémos la sustitucion de n por m ántes de indicar la resta de los esponentes, y se tendrá: $\frac{c^m}{c^n}=\frac{c^n}{c^n}=1$;

porque toda cantidad dividida por sí misma equivale á la unidad; luego tenemos aquí dos espresiones de cantidad c^0 y 1 que son iguales á una tercera $\frac{c^m}{c^n}$, y por lo mismo serán (Introd. ax. 5.º) iguales entre sí; luego se tendrá $c^0=1$; pero por c indicamos una cantidad cualquiera, luego *toda cantidad elevada á cero es igual con la unidad.*

Ahora, si c es cero tambien se verificará la proposicion; luego $0^0=1$ (*).

En fin, cuando $m<n$ será necesario añadir á m una cantidad cualquiera paraque sea igual con n; de manera que si la llamamos u será $m+u=n$, y poniendo en vez de n este valor en la espresion (A), tendrémos: $\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}=c^{m-(m+u)}=c^{m-m-u}=c^{-u}$.

Tambien nos encontramos aquí con una espresion c^{-u} no conocida para nosotros; y así, con el fin de indagar lo que nos espresa harémos la sustitucion ántes de indicar la resta de los esponentes, y se tendrá:

$$\frac{c^m}{c^n}=\frac{c^m}{c^{m+u}}=\frac{c^m}{c^m c^u}=\frac{1}{c^u};$$

donde tenemos dos valores de $\frac{c^m}{c^n}$ á saber: c^{-u} y $\frac{1}{c^u}$ que por lo dicho (Introd. ax. 5.º) serán iguales y tendrémos $\frac{1}{c^u}=c^{-u}$; lo que nos dice que *toda cantidad se puede trasladar del divisor al dividendo mudando el signo á su esponente* (**).

(*) *Acerca de estas consecuencias hai algunas consideraciones importantes en mi memoria sobre la curvatura de las lineas.*

(**) *Estas dos últimas demostraciones las hubiéramos podido dar á* posteriori *en estos términos.*

1.º *Si* $c^0=1$, *despues de multiplicadas por una misma cantidad deberán ser iguales tambien*; *y si esto no se verifica no lo serán dichas espresiones; pero multiplicando á ambas por* c^2, *se convierte la primera en* $c^0\times c^2=c^{0+2}=c^2$, *y la segunda en* $1\times c^2=c^2$; *y como estos productos resultan iguales, inferimos que tambien lo eran los factores* c^0 *y* 1.

2.º *Si* $c^{-u}=\frac{1}{c^u}$, *deberán permanecer iguales si se multiplican por una misma cantidad, y si los productos que resulten no son iguales será por que ántes de hecha la multiplicacion no lo eran; pero si las multiplicamos por* c^{2u} *nos vendrá* $c^{-u}\times c^{2u}=c^{-u+2u}=c^u$, *y* $\frac{1}{c^u}\times c^{2u}=\frac{c^{2u}}{c^u}=c^u$; *y como estos productos son iguales con* c^u, *se infiere que los factores* c^{-u} *y* $\frac{1}{c^u}$ *tambien lo serán. Esto tambien se hubiera podido deducir de lo dicho acerca de las cantidades negativas; pues si* c^u *indicaba que la* c *era* u *veces factor*, c^{-u} *indicará que la* c *es* —u *veces factor; ó que es* u *veces lo contrario de factor; pero lo contrario de factor es divisor, luego una cantidad que tiene esponente negativo se debe trasladar al denominador. Si tuviese esponente negativo hallándose ella en el denominador, la deberíamos trasladar al numerador mudando el signo del esponente, de modo que* $\frac{a^2}{b^{-2}}$ *es lo mismo que* a^2b^2; *de esta trasformacion se hace mucho uso, porque en unos casos conviene que una cantidad se halle en el numerador, y en otros conviene que se halle en el denominador.*

Esta propiedad es mui interesante, y de ello nos convencerémos en lo sucesivo por las muchísimas aplicaciones que harémos.

183 Para dividir un polinomio por un monomio *se divide cada término del polinomio por el monomio*, porque dividiendo todas las partes del dividendo y reuniendo todos los cocientes (Introd. ax. 3.º), nos debe resultar el cociente de todo el dividendo. Supongamos, v. g. que se quiera dividir la cantidad $12b^4c^3-8c^2a^3+16a^2b^7$ por $-4a^2bc^3$, y tendrémos: 1.º $\frac{12b^4c^3}{-4a^2bc^3}=-\frac{3b^3}{a^2}$; 2.º $\frac{-8c^2a^3}{-4a^2bc^3}=+\frac{2a}{cb}$; y 3.º $\frac{16a^2b^7}{-4a^2bc^3}=-\frac{4b^6}{c^3}$; luego $\frac{12b^4c^3-8c^2a^3+16a^2b^7}{-4a^2bc^3}=-\frac{3b^3}{a^2}+\frac{2a}{bc}-\frac{4b^6}{c^3}$.

Del mismo modo hallaríamos que: $\frac{20a^7b^5c^2-35a^4d^8-9c^5d^{10}}{5a^2d^4}=\frac{4a^5b^5c^2}{d^4}-7a^2d^4-\frac{9c^5d^6}{5a^2}$; y que $\frac{40a^mc^rb^s-8a^3b^nc^2+24d^sg-16m^2c^nb^4}{8a^4d^nb^t}=\frac{5a^{m-4}c^rb^{s-t}}{d^n}-\frac{b^{n-t}c^2}{ad^n}+\frac{3d^{s-n}g}{a^4b^t}-\frac{2m^2c^nb^{4-t}}{a^4d^n}$.

184 Para dividir un monomio por un polinomio hai que seguir un método análogo al que espusimos en la Aritmética para la division de los números; esto es: *se divide el monomio por el primer término del divisor, y lo que resulta se coloca en el cociente; luego, se multiplica este cociente por todo el divisor y se resta del dividendo; la resta se divide por el primer término del divisor, y así se continúa tanto como se quiera*; pero advirtiendo que jamas se puede obtener cociente exacto.

Propongámonos, por ejemplo, dividir a por $a-b$. Colocarémos el divisor á la derecha del dividendo con las rayas que se tiran para la division en esta forma:

$$\begin{array}{r|l}
\mathrm{a} & a-b \\ \cline{2-2}
-\mathrm{a}+\mathrm{b} & 1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}+\dots\dots\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} \\ \cline{1-1}
+\mathrm{b} & \\
+\frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}} & \\
+\frac{\mathrm{b}^3}{\mathrm{a}^2} & \\
\&c. &
\end{array}$$

y dirémos, dividiendo por el primer término del divisor: $+a$ dividido por $+a$ es $+1$ que pondrémos en el cociente; ahora deberémos multiplicar este cociente 1 por todo el divisor y restarle del dividendo, diciendo: 1 por a es a, que como se ha de restar del dividendo se colocará debajo de él, mudándole el signo y por consiguiente será $-a$; ahora multiplicarémos el cociente 1 por el segundo término $-b$ del divisor diciendo: 1 por $-b$ es $-b$, pero como se ha de restar del dividendo se le mudará el signo y será $+b$; tirarémos debajo una raya, y ejecutarémos nuestra resta; y como $-a$ y $+a$ se destruyen (*) queda por resta $+b$.

Como de multiplicar el primer término del divisor por el cociente que hemos sacado, nos debe venir siempre el dividendo (181), podrémos omitir esta operacion y la destruccion que resulta con el dividendo, haciendo este raciocinio: el *cociente por el divisor da el dividendo, y como se ha de restar se destruyen*; con lo cual se borra el dividendo, y se ahorra el escribir el producto debajo y ejecutar la destruccion; así lo harémos en adelante.

Ahora, ya sabemos que $\frac{a}{a-b}$ da 1 por cociente, dejando b por resta; luego tendrémos $\frac{a}{a-b}=1+\frac{b}{a-b}$;

pero si queremos un valor mas aproximado en forma de monomios, continuarémos la division de la resta por el divisor diciendo: b dividido por a da $\frac{b}{a}$ que pondrémos al lado del cociente anterior; ahora, el cociente multiplicado por el divisor ha de dar el dividendo; esto es, $\frac{b}{a}\times a=b$, y como se ha de restar será $-b$ y se destruirá con la resta $+b$; por lo cual se borrará el $+b$, y continuarémos nuestra multiplicacion diciendo: $\frac{b}{a}$ multiplicado por $-b$ es $-\frac{b^2}{a}$, que como se ha de restar será $+\frac{b^2}{a}$, que pondrémos por segunda resta; de manera que ya tenemos: $\frac{a}{a-b}=1+\frac{b}{a}+\frac{\frac{b^2}{a}}{a-b}$.

(*) *Los términos señalados con letra redonda equivalen á estar tachados, como los números que se ven en la prueba de la suma* (§50).

Aun podemos continuar sacando mas términos monomios diciendo: $+\frac{b^2}{a}$ dividido por a es (§ 102) $\frac{b^2}{a^2}$, que pondrémos en el cociente y dirémos: el cociente multiplicado por el divisor dará el dividendo, y como se ha de restar se destruyen, y borraré el $\frac{b^2}{a}$; $\frac{b^2}{a^2}$ multiplicado por $-b$ da $-\frac{b^3}{a^2}$ que como se ha de restar es $\frac{b^3}{a^2}$; y si queremos continuar la division dirémos: $\frac{b^3}{a^2}$ dividido por a es $\frac{b^3}{a^3}$ que pondrémos; y así continuarémos como allí se ve, sacando los términos que queramos.

Esta operacion es algo engorrosa, pero tiene la ventaja de que en sacando tres ó cuatro términos se pueden sacar los demas por la lei que sigan los que conocemos. Así, aquí despues de sacados los tres primeros términos, como vemos que el tercero es lo mismo que el segundo, solo que tiene su esponente una unidad mas, podrémos ir formando los siguientes sin necesidad de ejecutar la division. Aun hai mas; en muchas ocasiones se suele pedir un término de este cociente sin necesitar los que anteceden, en cuyo caso si hallásemos todos los anteriores haríamos un trabajo inútil para nosotros; y así, en todas estas espresiones conviene buscar una que dependa del lugar que ocupa cada término en el cociente. Para esto no se pueden dar mas reglas que la observacion del calculador para ver que dependencia tienen los coeficientes y esponentes con el lugar que ocupa cada término. En nuestro caso no hai ningun coeficiente; y como vemos que el esponente de la a y b en el segundo término es 1, en el tercero es 2, en el cuarto es 3, &c. resulta que los esponentes tienen una unidad ménos que el número que representa el lugar que cada término ocupa en la espresion; luego si al lugar que ocupa cada término le llamamos n, un término cualquiera estará representado por $\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$, que es la espresion que tenemos puesta en el cociente despues de los puntos.

Á esta espresion se le da el nombre de *término general*, porque en ella están contenidos todos los términos. Así, si suponemos $n=1$ tendrémos ó nos vendrá el primer término como en efecto se verifica, pues $\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}=\frac{b^{1-1}}{a^{1-1}}=\frac{b^0}{a^0}=\frac{1}{1}=1$; haciendo $n=2$ nos vendrá $\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}=\frac{b^{2-1}}{a^{2-1}}=\frac{b^1}{a^1}=\frac{b}{a}$ que es el segundo término, &c. y si quisiéramos hallar el término que en la espresion ocupase el lugar 20, sustituiríamos 20 en vez de n, y tendríamos que $\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}=\frac{b^{20-1}}{a^{20-1}}=\frac{b^{19}}{a^{19}}$, &c. y lo mismo haríamos para hallar un término cualquiera.

Entendido esto, falta que demos la razon de esta práctica: en primer lugar debemos observar que un monomio dividido por un polinomio jamas puede dar cociente exacto; porque si esto se verificase, debiendo ser el producto del divisor por el cociente igual con el dividendo, este cociente primero que es monomio multiplicado por todo el divisor dará un polinomio que contenga tantos términos como el divisor; y como de esta multiplicacion (178) jamas puede resultar reduccion ni destruccion, no se puede jamas sacar un cociente entero exacto. Ahora, debiendo quedar una resta, esta contendrá siempre un término ménos que el divisor; en el ejemplo anterior se ve que la resta solo contiene un término, porque teniendo dos el divisor, el primer término de su producto por el cociente se debe destruir con el dividendo parcial; y por lo mismo solo debe quedar un término en la resta.

Sabiendo ya que no puede tener cociente exacto, si queremos sin embargo ejecutar la division, lo podemos hacer y tendrémos un cociente mas una resta; de esta resta podrémos tambien sacar otro cociente exacto y nos vendrá otra resta; y así sucesivamente que es lo que hemos ido ejecutando.

{ Si en la espresion $\frac{a}{a-b}=1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+$ &c. suponemos $a=1$, y $b=2$, tendrémos $\frac{1}{1-2}=-1=1+2+4+8+16+32+64+$ &c.; lo que á primera vista parece absurdo. Pero no se debe olvidar que, al detenerse en un término cualquiera, es necesario reunir á la parte entera la resta que completa el cociente. Así es, que si nos detenemos en el 64, será necesario añadir á la suma $1+2+4+8+16+32+64$, la fraccion $\frac{128}{1-2}$ que queda por resta; la cual siendo igual con -128, dará $127-128=-1$, lo que en efecto debe verificarse. }

Propondrémos otros ejemplos de este caso: supongamos que se quiera dividir a por a^2+x^2. Ejecutarémos nuestra operacion colocando las cantidades en la forma que aquí se ve:

$$\begin{array}{l|l}
a & a^2+x^2 \\ \hline
-\frac{x^2}{a} & \frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^4}{a^5}-\frac{x^6}{a^7}\ \ldots\ \pm\frac{x^{2n-2}}{a^{2n-1}} \\
x^4 & \\
+\frac{x^4}{a^3} & \\
-\&c. &
\end{array}$$

diciendo: a dividido por a^2 es $\frac{1}{a}$; el cociente por el divisor dará el dividendo, y como se ha de restar se destruirá: y por lo mismo le borro y continúo: el cociente $\frac{1}{a}$ multiplicado por x^2 da $+\frac{x^2}{a}$, y como le he de restar es $-\frac{x}{a}$; ahora continúo: $-\frac{x^2}{a}$ dividido par a^2 es $-\frac{x^2}{a^3}$, &c. y observando que los esponentes van aumentando dos unidades, y que los signos van siendo alternativamente positivos y negativos, pondrémos tantos términos como queramos, y luego el término general $\pm\frac{x^{2n-2}}{a^{2n-1}}$, poniendo el signo $\pm$, porque si n es ímpar debemos tomar el signo $+$, y si par el $-$; la x se halla con el esponente $2n-2$ porque es en cada término igual al duplo del lugar que ocupa ménos 2; y la a con $2n-1$ porque es igual al duplo del número que espresa dicho lugar ménos la unidad.

Pondrémos aquí los dos ejemplos siguientes para que los principiantes se ejerciten. Supongamos que quiera ejecutar la division de a^2 por $a+x$, y practicaré la operacion como se ve á la vuelta:

$$\begin{array}{l|l} a^2 & a+x \\ \hline -ax & a-x+\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{x^4}{a^3}-\dfrac{x^5}{a^4}\ldots\pm\dfrac{x^{n-1}}{a^{n-2}}\ (*) \\ \quad +x^2 & \\ \quad -\dfrac{x^3}{a} & \end{array}$$

&c.

Del mismo modo hallaria que

$$\frac{a}{a^3+x^3}=\frac{1}{a^2}-\frac{x^3}{a^5}+\frac{x^6}{a^8}-\frac{x^9}{a^{11}}+\frac{x^{12}}{a^{14}}-\frac{x^{15}}{a^{17}}\ldots\pm\frac{x^{3n-3}}{a^{3n-1}}$$

185 Pasemos ya á la division de un polinomio por otro polinomio; ante todas cosas debemos ver cual es la letra que está mas repetida en el dividendo y divisor, y los dispondrémos ambos de manera que el término donde se halle la letra con mayor esponente sea el primero; despues aquel en que se halle con el esponente inmediatamente menor, &c.; y si hai muchos términos que contengan dicha letra con un mismo esponente se ponen en columna. Esta operacion preparatoria se llama *ordenar* (**); y despues de ordenados los términos de la division, y colocado el divisor en las rayas como en el caso anterior, se practicará lo siguiente.

Divídase el primer término del dividendo por el primero del divisor, y tendrémos un término del cociente; multiplíquese este término por todo el divisor y réstese el producto de todo el dividendo, lo cual se conseguirá mudando los signos del producto conforme le vayamos formando, y se hará la destruccion que se pueda. Despues se divide el término de esta resta, donde se halle con mayor esponente la letra por que se ordenó, por el primer término del divisor, lo que nos dará el segundo término del cociente; despues se ejecutará la multiplicacion y resta, y se continuará del mismo modo hasta que se halle cociente exacto, ó hasta que el mayor esponente de la letra por que se ordena sea menor en la resta que el mayor de la misma letra en el divisor; pues entónces es señal de no tener cociente exacto, y se suele dejar indicada la division de la resta por el divisor, sino se quieren hallar mas términos por aproximacion.

Supongamos con el fin de aplicar esta regla que se quiera dividir $a^3b^3c-ab^2c^2+2a^4b^2c+a^5bc-2a^2bc^2-a^3c^2$ por $2ab+b^2+a^2$.

(*) *En esta espresion están tambien comprendidos el 1.° y 2.° término; porque haciendo* n=1 *tenemos* $\frac{x^{1-1}}{a^{1-2}}=\frac{x^0}{a^{-1}}=$ (§182) $\frac{1}{a^{-1}}=a^1=a$; *y haciendo* n=2 *es* $\frac{x^{2-1}}{a^{2-2}}=\frac{x^1}{a^0}=\frac{x}{1}=x$.

(**) *Mr. Suzanne llama* letra principal *á aquella respecto de la cual se ordena.*

Aquí lo primero que hai que hacer es ordenar, para lo cual advertimos que en el divisor se halla tan repetida la b como la a; pero como en el dividendo lo está mas la a, pues se halla en todos los términos, ordenarémos por ella y tendrémos:

$$\begin{array}{r|l} a^5bc+2a^4b^2c+a^3b^3c-2a^2bc^2-ab^2c^2 & a^2+2ab+b^2 \\ -a^3c^2 \qquad\qquad\qquad & \overline{a^3bc-ac^2} \\ -2a^4b^2c-a^3b^3c \qquad\qquad\qquad & \\ \hline -a^3c^2-2a^2bc^2-ab^2c^2 & \\ +2a^2bc^2+ab^2c^2 & \\ \hline 0 \quad\ 0 \quad & \end{array}$$

Ahora empezarémos nuestra division diciendo: *a^5bc dividido por a^2* es a^3bc, que pondré en el cociente; haré la multiplicacion de a^3bc por todo el divisor (escepto por el primer término a^2 respecto del cual hago el siguiente raciocinio: el *cociente multiplicado por el divisor da el dividendo* a^5bc, *y como se ha de restar se destruye; por lo que se tachará el término como allí se presenta*). Para los demas diré: $a\cdot bc$ por $2ab$ es $2a^4b^2c$, que como se ha de restar le coloco debajo del dividendo con el signo —, porque él tiene el signo +; a^3bc por b^2 tercer término del divisor da a^3b^3c, que pondré tambien con el signo — por la misma razon; tiraré una raya para poner debajo de ella la resta que quede despues de hecha la destruccion; pero advirtiendo que $+2a^4b^2c$ se destruye con $-2a^4b^2c$, y que a^3b^3c lo hace igualmente con $-a^3b^3c$, pongo debajo de la raya lo que queda que es $-a^3c^2-2a^2bc^2-ab^2c^2$. Como el término de esta resta en que la a se halla con mayor esponente es el $-a^3c^2$, le dividiré por a^2 primero del divisor, lo que dará $-ac^2$; y para hacer la multiplicacion diré: el cociente $-ac^2$ multiplicado por el divisor a^2 dará el dividendo $-a^3c^2$, y como se ha de restar se destruirá, y por lo mismo le tacho; continúo: $-ac^2$ por $2ab$ es $-2a^2bc^2$, que como se ha de restar pongo $+2a^2bc^2$; sigo: $-ac^2$ por b^2 es $-ab^2c^2$, que como se ha de restar será $+ab^2c^2$; y como estos términos se destruyen con sus correspondientes, pondrémos debajo de la raya 0 por resta, y el cociente será a^3bc-ac^2.

Para manifestar el fundamento de esta regla, y dar á conocer que practicándola se hallará el cociente que se busca, considerarémos al dividendo como un producto cuyos factores sean el cociente y el divisor, y nos propondrémos el mismo ejemplo de la division anterior, esto es, el practicar ántes la multiplicacion del $a^2+2ab+b^2$ por a^3bc-ac^2; estando ya ordenados como aquí se ve, y atendiendo á que llamamos primeros términos en ambos factores á los que ocupan el primer lugar, ejecutarémos la multiplicacion de esta manera:

$$\begin{array}{ll} \text{multiplicando. . .} & a^2+2ab+b^2 \\ \text{por. . . . .} & a^3bc \\ \hline \text{resulta. . . . . .} & a^5bc+2a^4b^2c+a^3b^3c \\ \text{y por } -ac^2\text{. . . .} & -a^3c^2-2a^2bc^2-ac^2b^2 \end{array}$$

En cuyo producto observamos que el término donde se halla la a con mayor esponente, resulta de multiplicar el primer término del multiplicando por el primero del multiplicador; de donde se deduce que si despues de haber escrito por primer término, tanto en el dividendo como en el divisor del ejemplo propuesto, el que tiene la letra a con mayor esponente, se divide uno por otro: en el resultado nos vendrá el término del cociente que tenga tambien la a con mayor esponente.

Así, en este ejemplo, considerando al producto como un dividendo y al multiplicador como un divisor, se dividirá a^5bc por a^2, lo que dará a^3bc por primer término del cociente. Si en todo el dividendo estuviesen espresos los productos parciales como aquí, tendríamos diferentes medios de hallar este primer término del cociente, pues le hallaríamos 1.° dividiendo a^5bc por a^2; 2.° dividiendo el segundo término $2a^4b^2c$ del primer producto por el segundo $2ab$ del multiplicando, lo que dará tambien a^3bc; 3.° dividiendo el tercero a^3b^3c por b^2, lo que da tambien a^3bc; ó finalmente dividiendo todo el primer producto $a^5bc+2a^4b^2c+a^3b^3c$ $=(a^2+2ab+b^2)a^3bc$ por todo el multiplicando $a^2+2ab+b^2$, que tambien da a^3bc; pero como generalmente no se presentan con este órden los términos, se sigue que solo puede servir de regla fija la de dividir el primer término del dividendo por el primero del divisor.

Hecho esto, se multiplica todo el divisor por este primer término del cociente, y el producto se resta de todo el dividendo, con lo cual queda destruido todo el primer producto parcial. Para hallar el segundo cociente tendríamos, si el producto ó productos parciales estuviesen espresados, los mismos medios que ántes; pero como en general esto no se tiene, solo puede servir de regla la de dividir el término de la resta en que tiene mayor esponente la letra por que se ordena por el 1.° del divisor; y luego se hace la multiplicacion por las mismas razones que ántes.

La razon de porque se ha de ordenar es que sin esta circunstancia no se hallaria cociente exacto aun cuando por la naturaleza de las mismas cantidades le debiese dar la division.

En efecto, supongamos que se tenga que dividir $2ab+a^2+b^2$ por $b+a$; y que se practique sin ordenar como aquí se ve:

$$\begin{array}{r|l} 2ab+a^2+b^2 & b+a \\ \hline -2a^2 & 2a-\frac{a^2}{b}+\frac{a^3}{b^2} \\ \hline -a^2+b^2 & \\ +\frac{a^3}{b}-\frac{a^4}{b^2} & \end{array}$$

donde observamos que los demas términos del cociente serán $-\frac{a^4}{b^3}$, $\frac{a^5}{b^4}$, $-\frac{a^6}{b^5}$ &c., cuando el verdadero cociente debe ser $a+b$.

Pero es tal el enlace y encadenamiento del Álgebra, que en cualquier estado en que se halle la division; si ordenamos la resta con relacion al divisor y continuamos la division, se llega á tener el verdadero cociente; y así, si la resta $-\frac{a^4}{b^2}+b^2$, la ordenamos con relacion

á la letra b y dividimos $b^2-\frac{a^4}{b^2}$, por $b+a$ tendrémos:

$$\begin{array}{r|l} b^2-\frac{a^4}{b^2} & b+a \\ \hline -ab & b-a+\frac{a^2}{b}-\frac{a^3}{b^2} \\ +a^2 & \\ -\frac{a^3}{b} & \\ +\frac{a^4}{b^2} & \end{array}$$

y añadiendo este cociente $b-a+\frac{a^2}{b}-\frac{a^3}{b^2}$ al $2a-\frac{a^2}{b}+\frac{a^3}{b^2}$ hallado ántes, resulta.......

$2a-\frac{a^2}{b}+\frac{a^3}{b^2}+b-a+\frac{a^2}{b}-\frac{a^3}{b^2}=a+b$ que es el verdadero.

{ Esto lo podemos demostrar con toda generalidad del modo siguiente. Sea A un polinomio cualquiera que se haya de dividir por otro polinomio B: supongamos que en muchas divisiones parciales no se haya ordenado y representemos por c el polinomio inexacto que hayamos obtenido; y la resta que nos habrá quedado estará espresada por $A-Bc$, ó mas bien equivaldrá á esta cantidad. Pero si en este estado se ordena la resta y el divisor, y se hace la division, resulta que si A es múltiplo de B, al hacer la division de A por B, se obtendrá el verdadero cociente, que espresarémos por C; y al dividir $-Bc$ por B, saldrá por cociente $-c$ sin resta; por lo que el cociente total estará espresado por c, que obtuvimos sin ordenar reunido con $C-c$, esto es, por $c+C-c=C$, es decir, que de este modo resultará el verdadero cociente. }

Entendida y demostrada la regla vamos á resolver algunos ejemplos.

Sea el primero dividir $3a^2b+3ac^2+a^3+b^3+3a^2c+3ab^2+6abc+c^3+3b^2c+3bc^2$ por $2bc+2ab+b^2+a^2+2ac+c^2$. Para esto ordenarémos por la a, y ejecutarémos la operacion como aquí se presenta:

$$\begin{array}{l|l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 & a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 \\ \quad +3a^2c+3ac^2 & \overline{a+b+c} \\ \qquad +6abc & \\ \quad -2a^2b-2a^2c-ab^2-2abc-ac^2 & \\ \hline \quad a^2b+2ab^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 & \\ \quad +a^2c+2ac^2 & \\ \qquad +4abc & \\ \qquad -2ab^2-2abc-b^3-2b^2c-bc^2 & \\ \hline \quad a^2c+2ac^2+b^2c+2bc^2+c^3 & \\ \qquad +2abc & \\ \qquad -2abc-2ac^2-b^2c-2bc^2-c^3 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Si me propusiera dividir a^6-b^6 por $a-b$, ejecutaria la operacion como aquí se presenta:

$$\begin{array}{r|l}
a^6-b^6 & a-b \\ \cline{2-2}
+a^5b & \\
+a^4b^2 & a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5 \\
+a^3b^3 & \\
+a^2b^4 & \\
+ab^5 & \\
+b^6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

donde veo que hallo cociente exacto porque el $+b^6$ que me resulta se destruye con el $-b^6$ de arriba.

{ *Esc.* En este ejemplo observamos que en las multiplicaciones que se hacen del divisor por los cocientes parciales resultan términos tales como a^5b, a^4b^2 &c. que no tienen otros semejantes en el dividendo; y estos términos son los que en el dividendo que consideramos como un producto, han desaparecido por la simplificacion. }

186 Antes de pasar mas adelante debemos hacer conocer que esto se verifica en toda clase de espresiones de esta forma; por ejemplo: en a^m-b^m dividido por $a-b$ siempre tendrémos cociente exacto, el cual le podrémos poner desde luego por esta observacion: *el primer término será el primero del dividendo con una unidad ménos en su esponente; en el segundo la primera parte del dividendo tiene una unidad ménos que en el anterior, y aparece la segunda con la unidad por esponente; la primera parte va teniendo una unidad ménos en su esponente, y la segunda una unidad mas hasta que en el último término no se halla la primera parte, y la segunda se encuentra sola con un esponente una unidad ménos que el que llevaba dicha cantidad en el dividendo; todos los signos son positivos, y los términos no tienen coeficientes.*

Esta regla se encuentra verificada en el ejemplo anterior, y aplicándola á este con esponentes indeterminados será:

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}.$$

Quedarémos convencidos de que esta proposicion es verdadera en todos los casos siempre que multiplicando el divisor $a-b$ por el cociente $a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}$ nos resulte el dividendo a^m-b^m; pero ejecutando esta operacion nos viene por resultado

$$\begin{array}{l}
a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+a^{m-3}b^3\ldots\ldots+a^2b^{m-2}+ab^{m-1} \\
\quad -a^{m-1}b-a^{m-2}b^2-a^{m-3}b^3-a^{m-4}b^4\ldots\ldots-ab^{m-1}-b^m.
\end{array}$$

Donde vemos que siendo todos los términos del primer renglon los mismos que los del segundo, escepto el primero del primero, y el último del segundo, resulta que como tienen diferente signo se destruirán, y solo quedará a^m-b^m.

Aunque no se ve que en el renglon superior se halle $a^{m-4}b^4$ para destruirse con el $-a^{m-4}b^4$ de abajo, ni en el de abajo se halle el $-a^2b^{m-2}$ para destruirse con el $+a^2b^{m-2}$ que hai arriba, no obstante no por eso dejan de estar, y los comprendemos en los que faltan que están indicados por los puntos. (*)

Esc. *La espresion* a^m+b^m *es divisible por* $a+b$ *cuando* m *es impar.*

En efecto, si nos propusiéramos dividir a^7+b^7 por $a+b$ hallaríamos $a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6$; donde vemos que es un cociente análogo al anterior solo que los términos que ocupan lugares pares son negativos.

187 Si me propusiera dividir $6a^5b^2-15a^3bc^2+bc^3$ por $3a^2-bc$ ejecutaria la operacion de este modo:

$$\begin{array}{r|l}
6a^5b^2-15a^3bc^2+bc^3 & 3a^2-bc \\ \cline{2-2}
+2a^3b^3c & \\ \cline{1-1}
-15a^3bc^2+bc^3 & 2a^3b^2-5abc^2+\frac{2}{3}ab^3c+\dfrac{-5ab^2c^3+\frac{2}{3}ab^4c^2+bc^3}{3a^2-bc} \\
+2a^3b^3c & \\
-5ab^2c^3 & \\ \cline{1-1}
2a^3b^3c-5ab^2c^3+bc^3 & \\
+\frac{2}{3}ab^4c^2 & \\ \cline{1-1}
-5ab^2c^3+bc^3 & \\
+\frac{2}{3}ab^4c^2 &
\end{array}$$

(*) *De la verdad de esta proposicion nos podemos convencer por induccion del modo siguiente.*

Que a^2-b^2 *es divisible por* $a-b$ *es una verdad demostrada* (179); *luego si al cociente le llamamos* q, *será* $\frac{a^2-b^2}{a-b}=q$, *en la cual quitando el divisor y despejando* a^2, *se tiene* $a^2=b^2+q(a-b)$, *multiplicando por* a *será* $a^3=ab^2+qa(a-b)$; *y restando* b^3 *de ambos miembros, se tendrá*

$a^3-b^3=ab^2+qa(a-b)-b^3=b^2(a-b)+aq(a-b)=(a-b)(b^2+aq)$;

y puesto que este segundo miembro es divisible por $a-b$ *por entrar esta cantidad como factor, se sigue que el primer miembro tambien lo será; y si representamos el cociente por* q' *se tendrá* $\frac{a^3-b^3}{a-b}=q'$, *que da* $a^3=b^3+q'(a-b)$; *y multiplicando por* a *será* $a^4=ab^3+q'a(a-b)$; *de donde*

$a^4-b^4=ab^3+aq'(a-b)-b^4=b^3(a-b)+aq'(a-b)=(a-b)(b^3+aq')$,

donde se ve que siendo el segundo miembro divisible por $a-b$, *lo será tambien* a^4-b^4, *y del mismo modo lo demostrarémos respecto de* a^5-b^5 *&c.*

y como despues de sacado el tercer término, en la resta que queda tiene ya la a menor esponente que en el divisor, concluyo aquí mi division poniendo la resta al lado del cociente hallado con el divisor debajo, porque esto es ya señal de que no tengo que esperar cociente exacto.

188 Las demostraciones que hemos dado de las alteraciones que padecia el cociente por las de los términos de la division, aunque contraidas á números eran generales, pues los raciocinios estaban espresados con toda generalidad; y así, todas aquellas proposiciones las podrémos considerar como demostradas respecto de las cantidades algebráicas; por lo que pasarémos á manifestar algunas de las proposiciones relativas á los divisores.

La 1.ª proposicion que demostrarémos será que *el producto de dos números A y B es divisible por todo número que divida exactamente al uno de los factores A ó B.* Porque sea m un número primero que divida á B, en cuyo caso será $B=Cm$, siendo C el cociente que resulta de dividir B por m, y tendrémos $AB=ACm$; y dividiendo esta espresion por m será $\frac{AB}{m}=AC$; pero siendo A y C números enteros, su producto AC tambien lo será, y por lo mismo AB dividido por m dará cociente exacto.

189 *Si el número* m *es un factor comun de A y B será tambien factor de la suma y de la diferencia de otros dos múltiplos cualesquiera de estos números.* Porque si suponemos $A=A'm$, y $B=B'm$, será:

$$\alpha A\pm\beta B=\alpha A'm\pm\beta B'm=(\alpha A'\pm\beta B')m;$$

y dividiendo ambas espresiones por m será $\frac{\alpha A\pm\beta B}{m}=\alpha A'\pm\beta B'$;

y por lo mismo representando la segunda un número entero, la primera tambien lo será.

190 *Todo número primero que no divide á ninguno de los dos factores A, B, no puede dividir á su producto AB.*

Si esta proposicion no es verdadera habrá un número primero tal como m, que no dividiendo á ninguno de los factores A y B divida al producto AB. Ya sea $A>$ ó $<m$, siempre podrémos suponer que dividiendo A por m se obtenga el cociente entero α (que será cero cuando $A<m$) y la resta A', por lo cual tendrémos $A=\alpha m+A'$; del mismo modo resultará $B=\beta m+B'$; luego $A\times B=\alpha\beta m^2+\beta A'm+\alpha B'm+A'B'$.

Como por el supuesto AB era divisible por m, lo será igualmente este valor suyo; y como los tres primeros términos lo son, resulta que tambien lo deberá ser el cuarto; luego deberá ser $A'B'=mC'$.

En este primer resultado advertimos: 1.º que ninguna de las dos restas A', B' puede ser igual con cero, porque hemos supuesto que ni A ni B eran divisibles por m; 2.º que siendo A' y B' restas de la division

por m serán menores que m; y 3.º que ninguno de los números A', B' puede ser igual con la unidad, porque si se tuviese $A'=1$ el producto $A'B'$ se convertirá en B'; pero siendo $B'<m$ es imposible que B' sea divisible por m.

Luego tenemos dos números enteros A', B', ambos mayores que la unidad y menores que m, cuyo producto es divisible por m, de modo que $A'B'=mC'$. Veamos las consecuencias que de aquí resultan.

Pues que A′ es menor que m, se podrá dividir m por A'; sea γ el cociente entero y A'' la resta, y será $m=\gamma A'+A''$; luego $mB'=\gamma A'B'+A''B'$. Siendo mB' divisible por m es preciso que lo sea $\gamma A'B'+A''B'$; luego siéndolo el término $\gamma A'B'$ por serlo $A'B'$, lo será $A''B'$.

El número A'' que es una resta de division es menor que el divisor A'; por otra parte no puede ser cero, porque si esto se verificase seria m divisible por A', y no seria ya un número primero; luego de ser el producto $A'B'$ divisible por m, se saca otro producto $A''B'$ divisible aun por m, el cual es mas pequeño que $A'B'$ y sin embargo no es cero.

Continuando el mismo raciocinio se deducirá del producto $A''B'$ otro producto $A'''B'$ ó $A''B''$ aun menor, y que será siempre divisible por m sin ser cero; y como estos productos van decreciendo, llegará un caso en que tengamos un número menor que m. Pero siendo imposible que un número menor que m, que no es cero, sea divisible por m, se deduce que tambien es imposible la hipótesis de que hemos partido. Luego si los números A y B no son divisibles ni el uno ni el otro por el número primero m, su producto AB tampoco podrá ser divisible por m.

De los quebrados literales.

191 Los quebrados literales ó algebráicos se calculan por las mismas reglas (*) que los numéricos; porque todas las demostraciones que dimos respecto de estos estaban concebidas en términos generales. Así tendrémos que su valor no se alterará aun cuando se multipliquen ó partan sus dos términos por una misma cantidad. Por esta causa se reducirán á un comun denominador del mismo modo que ellos (108); de manera que si tengo los quebrados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$, quedarán reducidos á un comun denominador si multiplico los dos términos del primero por dn, los del segundo por bn, y los del tercero por bd, cuya operacion los trasformará en $\frac{adn}{bdn}$, $\frac{cbn}{bdn}$, $\frac{mbd}{bdn}$.

(*) *Los que deséen verlas demostradas algebráicamente pueden consultar el apéndice 3.º que se halla al fin de este volúmen.*

Cuando tratábamos de los quebrados numéricos, indicamos (108) que la reduccion de los quebrados á un mismo denominador se hacia abreviadamente, cuando los denominadores eran los unos factores de los otros; y que tambien se puede ejecutar dicha abreviacion cuando (aunque no sean los unos factores de los otros) tienen factores comunes. Aquí se presenta esta abreviacion con mas sencillez, porque cuando los denominadores son monomios tienen patentes sus factores, y por lo mismo estableceréмos esta regla.

Búsquese primero el denominador comun, que será igual al producto de cada letra ó cantidad de los denominadores con el mayor esponente que tenga; despues véase lo que le falta á cada denominador para convertirse en el denominador comun, y por esto que le falte deberémos multiplicar su numerador.

Propongámonos, por ejemplo, reducir á un comun denominador los quebrados $\frac{a^2}{b^4c^3dm^5}$, $\frac{b}{a^3c^2n^4g}$, $\frac{d^2}{b^6m^3c^7f}$, y para formar primero el denominador comun, buscarémos cual es el mayor esponente con que se halla la b en todos los denominadores; y como vemos que es 6 deberá haber en el denominador comun b^6; luego, como el mayor esponente de la c es 7, tambien deberá haber c^7 en dicho denominador; la d no se halla sino con la unidad por esponente, y así deberá quedar en el denominador comun; el mayor esponente de la m es 5, y por lo mismo deberá haber m^5; la a solo se halla en un denominador con el esponente 3, y por lo mismo deberá haber a^3 en el denominador comun; por la misma razon deberá hallarse n^4, g y f; luego el denominador comun será $b^6c^7dm^5a^3n^4gf$. Ahora, observando lo que le falta al denominador de cada quebrado para convertirse en este, tendrémos que al primero le falta $b^2c^4a^3n^4gf$; al segundo $b^6c^5m^5df$, y al tercero $m^2dn^4a^3g$; y multiplicando cada numerador respectivamente por esto, los tendrémos reducidos en la forma siguiente:

$$\frac{a^5b^2c^4n^4gf}{b^6c^7dm^5a^3n^4gf},\ \frac{b^7c^5m^5df}{b^6c^7dm^5a^3n^4gf},\ \frac{d^3m^2n^4a^3g}{b^6c^7dm^5a^3n^4gf}.$$

Si se nos diese un quebrado cualquiera en que hubiese factores comunes en el numerador y denominador, podríamos omitir en ambos los que nos hiciesen al caso, y con esto los simplificaríamos; de manera que $\frac{ab}{b^2c}$ es lo mismo que $\frac{a}{bc}$; y $\frac{ac+ab}{c^2+cb}$ es lo mismo que $\frac{a}{c}$, pues en el numerador y denominador es comun el factor $c+b$, que despues de suprimido se convierte en lo que hemos dicho.

192 Para sumarlos *se reducirán á un comun denominador, despues se sumarán los numeradores, y á esto se le pondrá por denominador el*

denominador comun. De manera que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$; y si quisiera sumar $\frac{a^3}{b^2c}$ con $\frac{a^2}{c^4b}$ y con $\frac{e}{a^2c^3}$, los reduciria á un comun denominador por lo que acabamos de decir, y ejecutaria la operacion como aquí se va indicando:

$$\frac{a^3}{b^2c}+\frac{a^2}{c^4b}+\frac{e}{a^2c^3}=\frac{a^5c^3}{b^2c^4a^2}+\frac{a^4b}{b^2c^4a^2}+\frac{cb^2e}{b^2c^4a^2}=\frac{a^5c^3+a^4b+cb^2e}{b^2c^4a^2}.$$

193 Para restarlos *se reducirán tambien á un comun denominador sino le tienen, se restará el numerador del sustraendo del numerador del minuendo, y á la diferencia se le pondrá por denominador el denominador comun.* Por ejemplo: si de $\frac{a}{b}$ quisiera restar $\frac{c}{d}$ tendria $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$. Si de $\frac{a+b}{c-d}$ quisiera restar $\frac{a-b}{c+d}$, iria indicando la operacion del modo siguiente:

$$\frac{a+b}{c-d}-\frac{a-b}{c+d}=\frac{(a+b)(c+d)}{(c-d)(c+d)}-\frac{(a-b)(c-d)}{(c-d)(c+d)}=\ldots\ldots$$
$$\frac{(a+b)(c+d)-(a-b)(c-d)}{(c-d)(c+d)}=\frac{ac+bc+ad+bd-ac+bc+ad-bd}{c^2-cd+cd-d^2}=$$
$$\frac{2bc+2ad}{c^2-d^2}.$$

194 Ocurre con frecuencia tambien en el Álgebra reducir un entero á la especie del quebrado que le acompaña, ya sea por via de suma ó de resta; para lo cual *se multiplica el entero por el denominador del quebrado, con esto se suma el numerador del quebrado cuando este se halla unido al entero por via de suma, ó se resta cuando lo está por via de resta.*

Sea, por ejemplo, la espresion $a+b+\frac{a^2}{b-a}$ la que queramos reducir: multiplicarémos el entero $a+b$ por el denominador $b-a$, con esto sumarémos el numerador a^2, y á la suma le pondrémos por denominador el denominador del quebrado, en esta forma:

$$a+b+\frac{a^2}{b-a}=\frac{(a+b)(b-a)+a^2}{b-a}=\frac{ab+b^2-a^2-ba+a^2}{b-a}=\frac{b^2}{b-a}.$$

Si la espresion fuese $a^3-b^3-\frac{b^2-c^2}{c+b}$, la reducirémos como aquí se ve:

$$a^3-b^3-\frac{b^2-c^2}{c+b}=\frac{(a^3-b^3)(c+b)-(b^2-c^2)}{c+b}=\frac{a^3c-b^3c+a^3b-b^4-b^2+c^2}{c+b}.$$

195 Para multiplicar los quebrados *se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador*; de manera que

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; y $\frac{a+b}{c^2-d^2}\times\frac{a-b}{c^2+d^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{(c^2-d^2)(c^2+d^2)}=(\S 179)\frac{a^2-b^2}{c^4-d^4}$.

Y si quisiera multiplicar un quebrado por un entero ó al contrario, no habria mas que *multiplicar el numerador del quebrado por el entero*, como aquí se ve: $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$; y $(a^2-b^2)\times\frac{c}{d}=\frac{(a^2-b^2)}{d}\times c=\frac{a^2c-b^2c}{d}$.

Cuando en la multiplicacion entran quebrados no es indispensable aquí, como en la Aritmética, el reducir el entero á la especie del quebrado; y así no se ejecutará sino cuando se espere que de esta reduccion ha de resultar alguna simplificacion; por lo cual si nos propusiéramos multiplicar $a+\frac{c}{d}$ por $b+\frac{m}{n}$, indicaríamos y ejecutaríamos la operacion como aquí se presenta: $(a+\frac{c}{d})(b+\frac{m}{n})=ab+\frac{c}{d}\times b+a\times\frac{m}{n}+\frac{mc}{nd}$.

196 Para dividirlos *se trastornarán los dos términos del divisor, y se multiplicará numerador por numerador y denominador por denominador, ó multiplicarémos en cruz*; de manera que $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$; ó desde luego multiplicando en cruz será $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$; $\frac{a^2}{bc}:\frac{c}{ba}=\frac{a^3b}{bc^2}=\frac{a^3}{c^2}$; y $\frac{a+b}{c+d}:\frac{c-d}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c-d)}=(\S 179)\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$.

Para dividir un quebrado por un entero *se multiplicará el denominador del quebrado por el entero*; de modo que $\frac{a}{b}$ dividido por c es $\frac{a}{bc}$; $\frac{a-c}{b^2+c^2}$ dividido por a^3 es $\frac{a-c}{(b^2+c^2)a^3}=\frac{a-c}{b^2a^3+c^2a^3}$.

Si se tratase de dividir un entero por un quebrado *se multiplicaria el entero por el denominador del quebrado, y el producto se partiria por el numerador del quebrado*; por ejemplo: a dividido por $\frac{c}{d}$ es igual con $\frac{ad}{c}$; y $a-b$ dividido $\frac{c}{d}$, ó $\frac{a-b}{\frac{c}{d}}=\frac{(a-b)d}{c}=\frac{ad-bd}{c}$.

Para dividir una espresion que contiene cantidades en forma de enteros, y cantidades en forma de quebrado, conviene reducir los enteros á la especie de los quebrados que los acompañan. Así, para dividir

$a+\frac{c}{d}$ por $b+\frac{m}{n}$, harémos la operacion como aquí se presenta:

$$\frac{a+\frac{c}{d}}{b+\frac{m}{n}}=\frac{\frac{ad+c}{d}}{\frac{bn+m}{n}}=\frac{(ad+c)n}{(bn+m)d}=\frac{adn+cn}{bnd+md};$$

y

$$\frac{a-\frac{a^2}{a-b}}{b-\frac{b^2}{a+b}}=\frac{\frac{a(a-b)-a^2}{a-b}}{\frac{b(a+b)-b^2}{a+b}}=\frac{[a(a-b)-a^2](a+b)}{[b(a+b)-b^2](a-b)}=\frac{(a^2-ab-a^2)(a+b)}{(ba+b^2-b^2)(a-b)}$$

$$=\frac{-ab(a+b)}{ba(a-b)}=\frac{-(a+b)}{a-b}=(\text{mudando los signos á los dos términos})\frac{a+b}{b-a}.$$

Terminarémos este punto demostrando *que las operaciones de multiplicar y dividir se ejecutan cuando las cantidades están afectas de esponentes negativos del mismo modo que si fuesen positivos.*

En efecto: supongamos que se quiera multiplicar a^{-m} por a^{-n}; por la regla general se tiene desde luego $a^{-m}\times a^{-n}=a^{-m-n}$; pero observando (182) que $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, y que $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, será $a^{-m}\times a^{-n}=\frac{1}{a^m}\times\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}$, que por lo demostrado (182) se puede poner bajo la forma a^{-m-n}.

Si solo un esponente fuese negativo seria $a^n\times a^{-m}=a^n.\frac{1}{a^m}=\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$, lo mismo que se obtiene por la regla general.

En la division se debe seguir tambien la regla general; de manera que si se tiene $\frac{a^{-n}}{a^{-m}}$, el resultado será a^{-n+m}.

En efecto $\frac{a^{-n}}{a^{-m}}=\frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^m}}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}=a^{-n+m}$; si n solo fuese negativa, se tendría $\frac{a^{-n}}{a^m}=\frac{\frac{1}{a^n}}{a^m}=\frac{1}{a^na^m}=\frac{1}{a^{n+m}}=a^{-n-m}$.

Si solo fuese negativa la m, sería $\frac{a^n}{a^{-m}}=\frac{a^n}{\frac{1}{a^m}}=a^n.\,a^m=a^{n+m}$; lue-

go sean los esponentes de las cantidades positivos ó negativos, para multiplicarlas se suman los esponentes, y para dividirlas se restan. }

De la elevacion á potencias y estraccion de raices de las cantidades monomias.

197 Diofanto llama *cuadrado* en la definicion 1.ª del libro 1.º al número que resulta de la multiplicacion de otro por sí mismo, y á este que sirve de factor *lado del cuadrado*; *cubo* al número que resulta de multiplicar el cuadrado por su lado; *cuadrado-cuadrado* al que resulta de multiplicar por sí mismo el cuadrado; *cuadrado-cubo* al que resulta de multiplicar el cuadrado por el cubo; y *cubo-cubo* al que resulta de multiplicar el cubo por sí mismo; y el comentador advierte que á lo que Diofanto llama *cuadrado-cubo* se le llamaba en su tiempo *supersólido*, *surdesólido*, ó *número relato*; y al *cubo-cubo* le llamaba *cuadrado-cubo*; porque resulta de cuadrar el cubo, ó de cubicar el cuadrado.

Como se podria continuar dando nombres sin fin, y por otra parte todas estas denominaciones son embarazosas en la práctica, los modernos se han convenido en llamar en general *potencia* de una cantidad *al producto que resulta de multiplicar dicha cantidad por sí misma cierto número de veces*; si se multiplica una vez resulta la *segunda potencia*; si dos la *tercera*; si tres la *cuarta*; y si n la potencia del grado $n+1$. Considerando á la cantidad que se multiplica con relacion á la potencia se le da el nombre de *raiz*; de manera que *raiz* de una cantidad cualquiera *es aquella que multiplicada por sí misma cierto número de veces produce la cantidad primitiva.*

Los nombres que han dado á las potencias no los han deducido de las multiplicaciones que hai que hacer, sino de las veces que es factor la cantidad en la potencia; y por esta causa se dice que todo número es *su primera potencia*, porque es una vez factor en sí. De las denominaciones que Diofanto y tambien los árabes diéron á las potencias, solo se han conservado las de *cuadrado* y *cubo*, porque en la Geometría hai *cuadrados y cubos que considerar.*

198 Para indicar que una cantidad se ha de elevar á una potencia, si consta solo de una letra, basta ponerle á su derecha un poco mas alto el número que espresa la potencia á que se ha de elevar; y si la cantidad no consta solo de una letra ó tiene ya esponente, se encierra dentro de un paréntesis y fuera de este se coloca un poco mas elevado el número que espresa la potencia, el cual se llama *esponente de la potencia.* De manera que para indicar que la cantidad $2ab$ se ha de elevar á la segunda potencia ó al cuadrado, se pondrá de este manera $(2ab)^2$ que se lee: *dos* ab *elevado á dos*; para indicar que se ha de elevar á la tercera potencia ó al cubo, se pondrá $(2ab)^3$ que se lee: *dos* ab *elevado á tres*; y para indicar que se ha de elevar á la potencia del grado n, se pondrá $(2ab)^n$ que se lee: *dos* ab *elevado á n.*

Como la elevacion á potencias no es sino un caso particular de la multiplicacion, á saber, el caso en que los factores son iguales, resulta que las reglas para elevar á potencias se deducirán de las de multiplicar; pero en esta operacion observámos (176) que habia que atender á cuatro cosas; y como aquí han de ser iguales los factores, no tendrá lugar la circunstancia de las letras diferentes. Así, para elevar á potencias solo hai que atender á tres cosas, que son *signos*, *coeficientes y esponentes.*

En punto á signos la regla que hai que practicar es que si *la potencia es de grado par, esto es, si el esponente de la potencia es un número par, el signo de la potencia es siempre positivo*; *y si el esponente de la potencia es ímpar, el signo de la potencia será el mismo que el de la raiz.* Esta regla está fundada en que si el signo de la raiz es $+$, el de la potencia tambien lo será; pero si es $-$, el signo de la potencia resultará de tantos signos $-$ combinados como unidades tenga su esponente; pero como un número par de signos $-$ combinados dan $+$, porque de dos en dos siempre dan $+$, resulta que siendo par el esponente de la potencia, aun cuando la raiz lleve el signo negativo, el signo de la potencia será positivo. Si fuese ímpar, como un número ímpar de signos $-$ combinados dan $-$, resultará que tendrá la potencia el signo $-$; luego queda demostrada la regla (*).

En punto á los coeficientes se hará el número de multiplicaciones que exija la potencia por las reglas de Aritmética, ó se dejará indicado; *v. g.* para elevar á la 5.ª potencia una cantidad que tuviese 2 por coeficiente, ó haria las cuatro multiplicaciones que exige la potencia 5.ª diciendo: 2 por 2 son 4; 4 por 2 son 8; 8 por 2 son 16; 16 por 2 son 32; y diria que el coeficiente de la potencia era 32, ó dejaria indicada la operacion, poniéndole por esponente el de la potencia en esta forma 2^5.

Ahora en punto á los esponentes la regla que hai que seguir es *multiplicar el esponente de la cantidad por el de la potencia.* Por ejemplo: para elevar la cantidad a^2 á la potencia cuarta diria: 2 por 4 son 8, y a^8 seria la potencia cuarta de a^2. Esta regla se funda en que como la cantidad ó raiz ha de estar tantas veces contenida por factor en la potencia cuantas unidades tiene el esponente de dicha potencia, resulta que esta se compondrá de tantos factores monomios iguales como unidades tiene dicho esponente; y como para hacer una multiplicacion de esta especie se han de sumar todos los esponentes, resulta que el esponente del primer factor será tantas veces sumando como unidades tenia el es-

(*) *Esto se puede demostrar por cálculo, del modo siguiente. Todo número par está representado (nota 2.ª del* § 79) *por* $2n$; *luego toda potencia par estará espresada por* $(\pm a)^{2n}=[(\pm a)^2]^n=(+a^2)^n=+a^{2n}$.

Como todo número ímpar está representado por $2n+1$, *se tendrá* $(\pm a)^{2n+1}=(\pm a)^{2n}\times(\pm a)=a^{2n}\times\pm a=\pm a^{2n+1}$.

ponente de la potencia; luego en punto á los esponentes se deberá multiplicar el esponente de la cantidad por el esponente de la potencia. Este raciocinio se hará mas palpable indicando aquí la operacion anterior: $(a^2)^4 = a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2+2} = a^{4.2} = a^8$.

En esta regla está comprendido tambien el caso en que no lleva esponente la letra, porque entónces se le sobrentiende la unidad; y así, pasarémos á resolver algunos ejemplos, y serán:

1.° $(a)^4 = a \times a \times a \times a = a^1 \times a^1 \times a^1 \times a^1 = a^{1+1+1+1} = a^{1.4} = a^4$.
2.° $(-2a^4b^2c)^2 = +4a^8b^4c^2$; 3.° $(-7a^3b^2c^3m^9)^5 = -7^5a^{15}b^{10}c^{15}m^{45}$;
y en general 4.° $(5a^6b^3c^4m^5d^4)^r = 5^r a^{6r} b^{3r} c^{4r} m^{5r} d^{4r}$.

Estos ejemplos manifiestan que *la potencia de un producto de tantos factores como se quiera, es lo mismo que el producto de la misma potencia de cada uno de los factores.*

Si tuviésemos la espresion $[(a^m)^n]^p$, tendríamos que espresaba que a^m se habia de elevar primero á la potencia n, y despues á la potencia p; y como $(a^m)^n$, es por lo que acabamos de esponer a^{mn}, y $(a^{mn})^p$ es a^{mnp}, resulta que $[(a^m)^n]^p = a^{mnp}$.

Del mismo modo se tendrá que $\left([(a^m)^n]^p\right)^q = a^{mnpq}$.

199 Como para multiplicar quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, resulta que para elevar á potencias los quebrados se elevará el numerador y el denominador; v. g.

1.° $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 = \frac{(a^3)^4}{(b^2)^4} = \frac{a^{12}}{b^8}$; 2.° $\left(-\frac{2a^5b^2c^3}{3d^2m^5}\right)^3 = -\frac{8a^{15}b^6c^9}{27d^6m^{15}}$;
y en general 3.° $\left(\frac{5a^7b^nc^r}{6d^5e^3m^t}\right)^p = \frac{5^p a^{7p} b^{np} c^{rp}}{6^p d^{5p} e^{3p} m^{tp}}$.

200 Para indicar que se ha de proceder de la potencia á la raiz se usa del signo $\sqrt{}$, que viene á ser una *r* un poco abierta; este signo se llama *signo radical*; entre sus piernas se pone el número que espresa la raiz que se quiere estraer, cuyo número se llama *esponente radical*; y debajo del signo se pone la cantidad cuya raiz se quiere sacar.

Para estraer raices hai que atender á las mismas tres cosas; en punto á signos se usará de esta regla: *cuando el esponente de la raiz sea par se pondrá en la raiz el signo de ambigüedad* $\pm$; *y cuando impar, el signo de la cantidad de que se habia de estraer la raiz.* Esta regla está fundada en que cuando la potencia es de grado par su signo es siempre $+$, ya lleve la raiz el signo $+$, ya lleve el signo $-$. En efecto, tanto $(+a)^2$ como $(-a)^2$ dan $+a^2$; luego al buscar la raiz segunda ó cuadrada de a^2, no sabemos si se deberá tomar el signo $+$ ó el signo $-$; pero si en vez de a^2 tuviésemos la operacion indicada $(+a)^2$ ó $(-a)^2$, entónces ya no habria ninguna duda, pues está espresado el signo de la raiz; y así, no se deberá poner el signo $\pm$ sino $+$ en el primer caso, y $-$ en el segundo. Cuando es ímpar el esponente, el signo de la potencia debe ser

el mismo que el de la raiz; luego al proceder de la potencia á la raiz deberémos poner el signo que lleve la cantidad.

En punto á los coeficientes *se dejará indicada la operacion*, porque aun no sabemos el método para estraer las raices numéricas; y finalmente en punto á esponentes *se debe dividir el esponente de la cantidad por el esponente del radical*; porque esta operacion es la contraria de elevar á potencias, y para elevar á potencias se debe multiplicar.

Propongámonos, por ejemplo, estraer la raiz cuadrada ó segunda de a^4b^6: para esto lo primero que observarémos es que ocurriendo con mucha frecuencia el estraer raices de segundo grado ó cuadradas, se omite en estos casos el esponente 2 del radical que se deberia poner; de manera que $\sqrt{a^4b^6}$ es lo mismo que $\sqrt[2]{a^4b^6}$, y ejecutando la operacion del modo que acabamos de decir, será:

1.° $\sqrt{a^4b^6} = \pm a^{\frac{4}{2}} b^{\frac{6}{2}} = \pm a^2b^3$; 2.° $\sqrt[3]{-a^9b^{12}c^{15}} = -a^3b^4c^5$;
3.° $\sqrt[7]{5a^{28}b^{14}c^{49}} = \sqrt[7]{5} \times a^{\frac{28}{7}} b^{\frac{14}{7}} c^{\frac{49}{7}} = \sqrt[7]{5} \times a^4 \times b^2 \times c^7$;
y en general 4.° $\sqrt[n]{a^mc^3d^4b^r} = a^{\frac{m}{n}} c^{\frac{3}{n}} d^{\frac{4}{n}} b^{\frac{r}{n}}$.

Si fuesen quebrados se estraerá la raiz del numerador y del denominador, en esta forma: 1.° $\sqrt{\frac{a^4}{b^8}} = \pm\frac{a^{\frac{4}{2}}}{b^{\frac{8}{2}}} = \pm\frac{a^2}{b^4}$;

2.° $\sqrt[3]{-\frac{a^6c^{18}}{b^9}} = -\frac{a^2c^6}{b^3}$; y en general $\sqrt[n]{\frac{a^mc^t}{b^4d^r}} = \frac{a^{\frac{m}{n}} c^{\frac{t}{n}}}{b^{\frac{4}{n}} d^{\frac{r}{n}}}$:

lo cual está fundado en que para elevar á potencias un quebrado se ha de elevar el numerador y el denominador; por lo que aquí se deberá seguir la regla contraria, la cual manifiesta que *la raiz de un cociente es lo mismo que el cociente de las raices* (*).

(*) *Para dar una prueba de lo circunspectos que debemos ser en sacar consecuencias generales de verdades particulares; y de la sabiduría con que Laplace aconseja que no se abuse del método de induccion, debemos advertir, que aunque hemos demostrado que* el producto y cociente de las raices es el mismo que la raiz del producto y cociente, *no por eso podemos establecer que* la suma de las raices es lo mismo que la raiz de la suma; ni que la diferencia de las raices es lo mismo que la raiz de la diferencia: porque la raiz de la suma es menor que la suma de las raices; y la raiz de la diferencia es mayor que la diferencia de las raices: *es decir, que* $\sqrt{4+9} < \sqrt{4} + \sqrt{9}$; *y que* $\sqrt{16-9} > \sqrt{16} - \sqrt{9}$.

201 Cuando la division de los esponentes no se puede hacer exactamente, aun debe permanecer radical en la espresion; pero se debe sacar fuera de él todo lo que se pueda. Para lo cual en el esponente fraccionario que resulta de quitar el radical se sacan los enteros que se puedan, y aquella cantidad se descompone en factores poniendo por primer factor la cantidad con el esponente entero, y por segundo la misma cantidad con el esponente quebrado; y luego se vuelve á restablecer el radical poniendo entre sus piernas el denominador del quebrado, y debajo de él la cantidad con el numerador del quebrado por esponente. Propongámonos, v. g. estraer la raiz tercera ó cúbica de a^8, y ejecutarémos la operacion como aquí se ve: $\sqrt[3]{a^8} = a^{\frac{8}{3}} = a^{2+\frac{2}{3}} = a^2\, a^{\frac{2}{3}} = a^2\sqrt[3]{a^2}$.

Debemos restablecer por último el radical sustituyéndole en vez del esponente fraccionario $\frac{2}{3}$, porque debemos siempre presentar el último resultado bajo el mismo aspecto que se nos da el primero, á no ser que por alguna otra razon nos acomode conservar el esponente fraccionario.

Si hubiere dos ó mas cantidades en que no se pudiese hacer exactamente la division, se incluirán todas debajo del mismo radical con unos esponentes iguales á sus numeradores. Por ejemplo: si tuviésemos que estraer la raiz quinta de $-a^7b^{12}c^{18}$, iríamos indicando la operacion como aquí se presenta: $\sqrt[5]{-a^7b^{12}c^{18}} = -a^{\frac{7}{5}}\, b^{\frac{12}{5}}\, c^{\frac{18}{5}} = -a^{1+\frac{2}{5}}\, b^{2+\frac{2}{5}}\, c^{3+\frac{3}{5}} = -a^1 \times a^{\frac{2}{5}} \times b^2 \times b^{\frac{2}{5}} \times c^3 \times c^{\frac{3}{5}} = -ab^2c^3\sqrt[5]{a^2b^2c^3}$.

Esto está fundado en que como para elevar á potencias hemos elevado á la potencia correspondiente cada factor, y tenemos que el producto de dos potencias es lo mismo que la potencia del producto: se verificará tambien la inversa, esto es, que *la raiz de un producto de tantos factores como se quiera, es igual con el producto de las raices del mismo grado de los factores.*

202 Estas cantidades que están afectas del signo $\sqrt{\ }$ toman el nombre de él, y se llaman *cantidades radicales*, por ejemplo: $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, &c. son cantidades radicales. Cuando a y b se representen por números, podrá suceder que a, por ejemplo, sea un número cuadrado como 1,4,9, 16, &c. ó $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, &c. y que b sea un número cúbico como 1,8,27,64, &c. ó $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{64}$, &c. En este caso el radical desaparecerá porque estos números tendrán raiz exacta; pero cuando no sea ninguno de estos números como cuando a valga 2, 3, 5, 6, 7, &c. y el valor de b sea 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, &c. no tiene raiz exacta; y es imposible hallar un número entero ni quebrado que esprese el valor de estos radicales; por lo cual $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, &c. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{10}$, &c. ó cualesquiera otros radicales de esta especie esto es, que no tengan raiz exacta, se llaman *números sordos*, *irracionales*, ó *incomensurables*: recibiendo estos nombres porque no tienen ninguna comun medida con la unidad, como la tienen todos los demas números.

{ En general, siempre que se tiene radical, de cualquier grado que sea, se puede quitar, dividiendo el esponente que la cantidad tiene debajo de él, por el esponente del radical; de manera que en vez de $\sqrt[n]{a^m}$, podrémos poner en todas ocasiones $a^{\frac{m}{n}}$; y recíprocamente, siempre que tengamos una cantidad con esponente en forma de quebrado, podrémos quitar este esponente fraccionario remplazando la cantidad por un radical que entre sus piernas tenga por esponente el denominador de la fraccion; y la cantidad que quede debajo tenga por esponente el numerador de la espresada fraccion; de manera que de $a^{\frac{m}{n}}$, se pasará sin dificultad á $\sqrt[n]{a^m}$, y de $b^{\frac{4}{5}}$ á $\sqrt[5]{b^4}$.

Pero como (196) $\frac{m}{n} = \frac{1}{\frac{n}{m}}$ se tendrá $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{\frac{n}{m}}}$, que en virtud de lo que acabamos de decir, se podrá remplazar por la espresion $\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$; de manera que se tendrán estas trasformaciones $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = a^{\frac{1}{\frac{n}{m}}} = a^{\frac{m}{n}}$; y suponiendo ahora que $n=1$, y $m=2$, será $\sqrt[\frac{1}{2}]{a} = a^{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{2}{1}} = a^2$.

Esta observacion nos será mui útil en lo sucesivo; y para fijar desde luego la atencion de los principiantes sobre este particular, debemos advertir que esta es una consecuencia general de que las verdades que se demuestran respecto de los radicales $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$ son verdaderas, cualesquiera que sean los esponentes n, m de que estén afectos, esto es, ya sean números enteros, ya quebrados, y ya sean irracionales; lo que demostrarémos con todo rigor por digresion al fin de este volúmen; para llenar este vacío que se nota en los libros elementales, en los cuales se supone, y se hace uso de esta verdad sin demostrarla, ni hacer la mas leve indicacion sobre ella. }

203 Estas espresiones radicales entran tambien con frecuencia en los cálculos, y por lo mismo conviene adiestrarse en ejecutar con ellas las operaciones. Las reglas que hai que seguir para esto son las mismas que para las espresiones en forma de entero; porque cuando hemos demostrado que $+a$ junto con $+b$ era $a+b$, por a entendíamos solo una cantidad en cuanto cantidad, esto es, en cuanto susceptible de aumento ó

de diminucion, prescindiendo de si este valor le podríamos ó no espresar exactamente por un número. Así, para sumarlas *pondrémos las unas á continuacion de las otras con los mismos signos que llevan, haciendo la reduccion y destruccion que se pueda.* Para lo cual es menester advertir que los términos donde entran radicales no son semejantes sino tienen debajo del radical una misma cantidad, siendo el mismo el esponente del radical, de manera que solo se pueden diferenciar en el signo y coeficiente que hai ántes de los radicales. Así, si quisiéramos sumar $5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}$ con $+2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}-8b^2a^3\sqrt[5]{a^2}-12c^2\sqrt{bc}$, indicaríamos y ejecutaríamos nuestra operacion como aquí se presenta: $(5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3})+(2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}-8b^2a^3\sqrt[5]{a^2}-12c^2\sqrt{bc})=5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}+2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}-8b^2a^3\sqrt[5]{a^2}-12c^2\sqrt{bc}=-3a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-16c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}+2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}$.

204 Para restarlas tampoco hai mas que *poner el sustraendo á continuacion del minuendo mudando los signos al sustraendo*; de manera que si la segunda de las cantidades de arriba la quisiéramos restar de la primera, indicaríamos y ejecutaríamos la operacion como aquí se presenta: $(5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3})-(2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}-\ldots\ldots 8a^3b^2\sqrt[5]{a^2}-12c^2\sqrt{bc})=5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}-2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}+8a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+12c^2\sqrt{bc}=13a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}+\ldots 8c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}-2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}$.

205 Para multiplicarlas, si el radical es de un mismo grado, como el producto de dos raices de un mismo grado es el mismo (201) que la raiz del producto, no tendrémos mas que *poner debajo del radical el producto de las cantidades; despues se ve si se puede sacar algo de debajo del radical, lo que se ejecutará viendo si hai alguna letra debajo con mayor esponente que el del radical; en cuyo caso se divide dicho esponente por el del radical, y el cociente entero será el esponente de dicha letra fuera del radical: y la resta, si la hai, será el esponente de la misma letra que ha de quedar debajo del radical.*

Por ejemplo: $\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[3]{abc^2}=\sqrt[3]{a^3b^2c^2}=a\sqrt[3]{b^2c^2}$; $\sqrt[5]{a^3b^4c^2}\times\sqrt[5]{ab^3c^3}\times\sqrt[5]{a^4b^3dc^2}=\sqrt[5]{a^8b^{10}c^7d}=ab^2c\sqrt[5]{a^3c^2d}$.

Cuando los radicales no tienen un mismo esponente se reducen á él, *multiplicando los esponentes de cada cantidad y de cada radical, por el producto de los esponentes de los radicales de los demas.* Esto está fundado en lo mismo que el reducir los quebrados á un mismo denominador; pues podemos quitar los radicales poniendo á las letras esponentes fraccionarios, cuyos denominadores son los esponentes de los radicales; y así, la reduccion debe ser la misma solo con la diferencia de que aquí los esponentes de los radicales hacen oficios de denominadores. Así, si quisiera reducir á un mismo esponente radical los $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[5]{a^3b^4}$, $\sqrt{abc}$; multiplicaríamos primero todos los esponentes radicales diciendo: 3 por 5 son 15; 15 por 2 esponente del tercero son 30, y este será el esponente comun del radical; ahora, para saber los que deben tener las cantidades que se hallan debajo de cada radical, multiplicarémos los esponentes de las letras que están debajo del primero por 10, producto de 5 por 2; los de las que se hallan debajo del segundo por 6, producto de 3 por 2; y los de las que se hallan debajo del tercero por 15, producto de 3 por 5; de manera que dichos radicales los tendrémos reducidos á

$$\sqrt[30]{a^{20}b^{10}},\ \sqrt[30]{a^{18}b^{24}},\ \sqrt[30]{a^{15}b^{15}c^{15}};$$

y si los quisiera multiplicar sacaria por producto:

$$\sqrt[30]{a^{20+18+15}b^{10+24+15}c^{15}}=\sqrt[30]{a^{53}b^{49}c^{15}}=ab\sqrt[30]{a^{23}b^{19}c^{15}}.$$

En los libros elementales se suele presentar esta regla quitando los radicales por medio de los esponentes fraccionarios, y siguiendo luego la regla de los esponentes; pero es mas sencillo el reducirlos á un mismo esponente radical y hacer la multiplicacion. Para manifestar como se van indicando estas operaciones, lo ejecutarémos en el ejemplo siguiente: $\sqrt[3]{a^2bc^2}\times-\sqrt[4]{a^3b^2c}=\sqrt[12]{a^8b^4c^8}\times-\sqrt[12]{a^9b^6c^3}=-\sqrt[12]{a^{17}b^{10}c^{11}}=\ldots\ldots\ldots -a\sqrt[12]{a^5b^{10}c^{11}}$

Pero tambien se pueden ir colocando debajo del radical comun las cantidades formando producto, y por lo mismo pondrémos algunos ejemplos, porque conviene estar diestros en la práctica. Si me propusiese multiplicar $\sqrt[3]{a^2b}$ por $\sqrt[5]{a^4b^2c}$ diria: 3 por 5 son 15, este deberá ser el esponente del radical; ahora bien, los esponentes de las letras que están debajo del primero se deberán multiplicar por 5, y para la a será: 2 por 5 son 10, á este deberé añadir el producto del esponente 4 de la a del segundo por 3, esponente del radical primero, y será: 3 por 4 son 12 y 10 que tenia son 22, el cual será el esponente de la a; ahora, para la b diré: 1 por 5 es 5; 2 por tres son 6, y 5 que tenia son 11; este deberá ser el esponente de la b; y respecto de la c como no la hai sino en un factor llevará por esponente el producto de 1 por 3 esponente del otro radical, y se tendrá que $\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[5]{a^4b^2c}=\sqrt[15]{a^{22}b^{11}c^3}=a\sqrt[15]{a^7b^{11}c^3}$.

Paraque se adquiera esta práctica pondrémos aun algunos ejemplos; pero indicarémos esta abreviacion en el primero paraque los principiantes la entiendan bien, y despues procuren hacerla de una vez: $-\sqrt[4]{a^3b^2c^3d}\times-\sqrt[7]{a^5b^6d^5}=\sqrt[28]{a^{3.7+5.4}b^{2.7+6.4}c^{3.7}d^{1.7+5.4}}=\ldots\ldots\ldots \sqrt[28]{a^{41}b^{38}c^{21}d^{27}}=ab\sqrt[28]{a^{13}b^{10}c^{21}d^{27}}$;

ahora, en este ejemplo ejecutarémos las multiplicaciones á un tiempo: de manera que $\sqrt[3]{a^2b^2c}\times\sqrt[8]{b^7c^6a^5}\times-\sqrt[5]{a^2b^2c^4}=\ldots\ldots$ $-\sqrt[120]{a^{80+75+48}b^{80+105+48}c^{40+90+96}}=-\sqrt[120]{a^{203}b^{233}c^{226}}=\ldots\ldots$ $-abc\sqrt[120]{a^{83}b^{113}c^{106}}$.

En este harémos el producto y suma de una vez:

$$\sqrt[5]{a^3b^4}\times\sqrt[6]{a^2b^3c^4}=\sqrt[30]{a^{28}b^{39}c^{20}}=b\sqrt[30]{a^{28}b^9c^{20}}.$$

Y si los esponentes fuesen indeterminados se tendria $\sqrt[n]{a^rb^s}\times-\sqrt[m]{a^pc^tb^q}=-\sqrt[mn]{a^{rm+pn}b^{sm+qn}c^{tn}}$.

206 Para la division tenemos igualmente en virtud de lo dicho (200) que siendo la raiz de un cociente lo mismo que el cociente de las raices, darémos por regla: *el cociente de dos radicales de un mismo grado es un radical del mismo grado del cociente de las cantidades que hai debajo.*

Luego el cociente de dividir $\sqrt[5]{a^3b^4c^5}$ por $\sqrt[5]{a^2b^5c^2d^4}$ será: $\frac{\sqrt[5]{a^3b^4c^5}}{\sqrt[5]{a^2b^5c^2d^4}}=\sqrt[5]{\frac{a^3b^4c^5}{a^2b^5c^2d^4}}=\sqrt[5]{\frac{ac^3}{bd^4}}$;

y $\frac{\sqrt[7]{4a^6b^5r^3}}{-\sqrt[7]{2a^3b^4r^5}}=-\sqrt[7]{\frac{4a^6b^5r^3}{2a^3b^4r^5}}=-\sqrt[7]{\frac{2a^3b}{r^2}}$.

Cuando no tienen el mismo esponente radical se reducirán á él, de manera que

$$\frac{\sqrt[3]{a^2bc^2d}}{\sqrt{abcm}}=\frac{\sqrt[6]{a^4b^2c^4d^2}}{\sqrt[6]{a^3b^3c^3m^3}}=\sqrt[6]{\frac{a^4b^2c^4d^2}{a^3b^3c^3m^3}}=\sqrt[6]{\frac{acd^2}{bm^3}};$$

ó haciéndolo abreviadamente

$$\frac{\sqrt[4]{a^3b^2cd^3m}}{\sqrt[3]{a^2cd^2em^2}}=\sqrt[12]{\frac{a^9b^6c^3d^9m^3}{a^8c^4d^8e^4m^8}}=\sqrt[12]{\frac{ab^6d}{ce^4m^5}};$$ ó en general

$$\frac{\sqrt[n]{a^3b^rc^s}}{\sqrt[m]{a^5c^td}}=\sqrt[mn]{\frac{a^{3m}b^{rm}c^{sm}}{a^{5n}c^{tn}d^n}}=\sqrt[mn]{\frac{a^{3m-5n}b^{rm}c^{ms-tn}}{d^n}}.$$

207 Las cantidades que están afectas de los radicales tambien se elevan á potencias, y se estraen de ellas raices de cualquier grado.

Para elevarlas á una potencia cualquiera se deduce de las reglas de la multiplicacion que basta elevar la cantidad que hai dentro á la misma potencia, dejando el mismo esponente del radical; porque elevar $(\sqrt[3]{a^2b})$ á la cuarta potencia es efectuar el producto

$(\sqrt[3]{a^2b})^4=\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[3]{a^2b.a^2b.a^2b.a^2b}=\ldots\ldots$ $\sqrt[3]{a^{2\cdot4}b^{1\cdot4}}=\sqrt[3]{a^8b^4}=a^2b\sqrt[3]{a^2b}$.

Al ejecutar esta operacion puede ocurrir que el esponente del radical sea divisible por el de la potencia á que se eleva la cantidad propuesta; y en este caso queda hecha la operacion con dividir el esponente del radical por el esponente de la potencia á que se quiere elevar. V. g.: para elevar á la segunda potencia la cantidad $\sqrt[4]{a^3b^2}$ quedará ejecutado con dividir el esponente 4 por el 2, y será dicha potencia $(\sqrt[4]{a^3b^2})^2=\sqrt{a^3b^2}=ab\sqrt{a}$; esto está fundado en que sustituyendo en vez del radical el esponente fraccionario se tiene $(\sqrt[4]{a^3b^2})^2=(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{4}})^2=a^{\frac{6}{4}}b^{\frac{4}{4}}$; cuyos esponentes despues de simplificados se reducen á $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{2}$ ó 1; por lo que dan $(\sqrt[4]{a^3b^2})^2=a^{\frac{6}{4}}b^{\frac{4}{4}}=a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{2}}=\sqrt{a^3b^2}=ab\sqrt{a}$.

Como estraer raices es lo contrario de elevar á potencias, para estraer la raiz de una cantidad radical dividirémos el esponente de la cantidad que haya dentro por el esponente de la raiz que queramos sacar, y al resultado le pondrémos el mismo radical. Así $\sqrt{\sqrt[7]{a^6b^4c^8}}=\sqrt[7]{a^3b^2c^4}$;

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3b^6c^9d^{15}}}=\sqrt[4]{ab^2c^3d^5}=d\sqrt[4]{ab^2c^3d}$;

pero como no siempre se podrá ejecutar la division exactamente, con el fin de que en el resultado solo haya un radical, se multiplica el esponente del radical primitivo por el de la raiz que queremos sacar, sin llegar á las cantidades que hai debajo del signo radical. Por ejemplo:

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2b^5c^7}}=\sqrt[12]{a^2b^5c^7}$; $\sqrt[5]{\sqrt[7]{a^6b^4c^9d^{11}}}=\sqrt[35]{a^6b^4c^9d^{11}}$;

$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[np]{a^m}$; $\sqrt[r]{\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}}=\sqrt[rpn]{a^m}$.

Puesto que $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, debemos hacer una advertencia, y es que si una cualquiera de las cantidades m ó n fuese negativa, se convertiria la espresion en $a^{-\frac{m}{n}}$, que en virtud de lo espuesto (182) será $=\ldots\ldots$ $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$; de manera que suponiendo que la m sea la negativa, se tendrá $\sqrt[n]{a^{-m}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, y suponiendo que n sea la negativa, será tambien

$$\sqrt[-n]{a^m}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Y como cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, resultará que $\sqrt[n]{a^{-m}}=\sqrt[-n]{a^m}$; lo que nos dice que *en una espresion radical podemos mudar los signos á los esponentes que hai en el radical, y á los que lleven las cantidades que hai dentro sin que se altere su valor*; de manera que se tiene en general $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[-n]{a^{-m}}$.

De las cantidades ó espresiones imaginárias, y de las operaciones que con ellas se ejecutan.

208 Hemos visto (198) que al elevar una cantidad á una potencia par siempre resultaba un signo +, de donde se deduce que ninguna cantidad negativa puede ser potencia par; luego si nos pidiesen estraer una raiz de grado par de una cantidad negativa, se nos pedia una cosa que no podia ser ó un imposible. No obstante ocurre esto con mucha frecuencia y por esta causa á estas espresiones se les ha dado el nombre de *cantidades ó espresiones imaginárias* (*), porque solo la imaginacion es la que tiene facultad para comparar cosas contradictorias: así, $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-b^4}$, $\sqrt[2n]{-a^m}$ son espresiones imaginárias.

Como ocurren con mucha frecuencia y son de la mayor importancia las consecuencias á que nos conducen, vamos á ejercitarnos en su cálculo; pero ántes conviene que manifestemos esta propiedad general.

Toda espresion imaginária se puede descomponer en dos factores, el uno real que será un radical del mismo grado que contenga debajo de sí la cantidad real, y el otro un radical del mismo grado que contenga debajo de sí la unidad con el signo negativo.

Tomemos para manifestarlo la espresion $\sqrt[2n]{-a^m}$ que es el símbolo de toda espresion imaginária cuando n es un número entero cualquiera; y como toda cantidad se puede considerar multiplicada por la unidad, podrémos poner la $-a^m$ bajo este aspecto $-1a^m$, ó $+1\times-a^m$, ó $a^m\times-1$, porque á cualquiera de los factores que le pongamos el signo — hará que le lleve el producto; luego en vez de $\sqrt[2n]{-a^m}$ podrémos poner $\sqrt[2n]{a^m\times-1}$; pero podemos evitar todo radical con el uso de los esponentes fraccionarios (201), luego $\sqrt[2n]{a^m\times-1}=a^{\frac{m}{2n}}\times(-1)^{\frac{1}{2n}}$, ó restableciendo los radicales será $\sqrt[2n]{a^m}\times\sqrt[2n]{-1}$, que manifiesta la proposicion enunciada.

(*) *Mr. Wronski dice que las* cantidades imaginárias *se deben llamar* cantidades ideales, *y que son unos seres privilegiados y eminentemente* lógicos *en el dominio de nuestro saber.*

Ahora, si n fuese un número ímpar cualquiera, se tendrá que como $\sqrt[2n]{-1}=\sqrt{\sqrt[n]{-1}}$, y la raiz de grado ímpar de -1 es -1, tendrémos que $\sqrt[2n]{-1}=\sqrt{-1}$, y por consiguiente será: $\sqrt[2n]{-a^m}=\sqrt[2n]{a^m}\times\sqrt{-1}=B\sqrt{-1}$, llamando B á la cantidad $\sqrt[2n]{a^m}$.

209 Con las espresiones imaginárias se hacen las mismas operaciones que con las reales, y se ejecutan del mismo modo; de manera que para sumar $3\sqrt{-a^4}-2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}$ con $6\sqrt[6]{-a^3b^2}-\ldots\ldots\ldots 5\sqrt[8]{-a^5b^3}-3\sqrt{-a^4}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}$, *las pondrémos las unas á continuacion de las otras con los mismos signos que llevan, y despues ejecutarémos la reduccion y destruccion como aquí se presenta*:

$$\left(3\sqrt{-a^4}-2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}\right)+\left(6\sqrt[6]{-a^3b^2}-5\sqrt[8]{-a^5b^3}-3\sqrt{-a^4}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}\right)=3\sqrt{-a^4}-2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}+\ldots\ldots 6\sqrt[6]{-a^3b^2}-5\sqrt[8]{-a^5b^3}-3\sqrt{-a^4}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}=4\sqrt[6]{-a^3b^2}+\ldots\ldots 16\sqrt[4]{-c^3d^5}-5\sqrt[8]{-a^5b^3}.$$

210 Para restarlas *mudarémos los signos al sustraendo*, y ejecutarémos despues la reduccion y destruccion que se pueda. Así, para restar la segunda de estas cantidades de la primera, ejecutarémos la operacion como aquí se presenta:

$$\left(3\sqrt{-a^4}-2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}\right)-\ldots\ldots\left(6\sqrt[6]{-a^3b^2}-5\sqrt[8]{-a^5b^3}-3\sqrt{-a^4}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}\right)=3\sqrt{-a^4}-\ldots\ldots 2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}-6\sqrt[6]{-a^3b^2}+5\sqrt[8]{-a^5b^3}+3\sqrt{-a^4}-\ldots\ldots 8\sqrt[4]{-c^3d^5}=6\sqrt{-a^4}-8\sqrt[6]{-a^3b^2}+5\sqrt[8]{-a^5b^3}.$$

211 Para multiplicarlas las *descompondrémos ántes en sus dos factores, y despues ejecutarémos nuestra operacion como en los radicales*; de manera que para multiplicar $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-b}$ descompondrémos ántes á $\sqrt{-a}$ en $\sqrt{a}.\sqrt{-1}$, y á $\sqrt{-b}$ en $\sqrt{b}.\sqrt{-1}$; y la multiplicacion la harémos en esta forma: $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}.\sqrt{-1}\times\sqrt{b}.\sqrt{-1}=\ldots\sqrt{a}.\sqrt{b}\times(-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}\times(-1)^1=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}.$

Observando este resultado, echamos de ver que el producto de dos imaginárias es una cantidad real, y que el signo que nos resulta es contrario al que obtendríamos por las reglas generales de la multiplicacion;

pues teniendo $\sqrt{-a}$ y $\sqrt{-b}$ los signos positivos, ó un mismo signo fuera del radical, deberia salir el producto positivo, y vemos que es negativo; esta circunstancia solo se verifica cuando el producto es real, porque entónces sale un -1 de debajo del radical, que hace trastornar los signos del producto; cuando este permanece imaginário, entónces como el signo $-$ queda debajo del radical, no sale ninguno que trastorne el signo del producto. En efecto,

$$\sqrt{-a}\times\sqrt[4]{-b}=\sqrt{a}.\sqrt{-1}\times\sqrt[4]{b}.\sqrt[4]{-1}=\sqrt{a}.\sqrt[4]{b}\times(-1)^{\frac{1}{2}}.(-1)^{\frac{1}{4}}=\ldots.$$

$$\sqrt[4]{a^2}\sqrt[4]{b}\times(-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{a^2b}\times(-1)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^2b}\times\sqrt[4]{(-1)^3}=\sqrt[4]{a^2b}\times\sqrt[4]{-1};$$

que poniéndolo todo debajo de un radical, porque tienen un mismo esponente, será: $\sqrt[4]{a^2b}\times\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{a^2b\times-1}=\sqrt[4]{-a^2b}$.

212 Para dividirlas *se descompondrán tambien en factores el dividendo y el divisor*; de manera que $\sqrt{-a}$ dividido por $\sqrt{-b}$, será: $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}.\sqrt{-1}}{\sqrt{b}.\sqrt{-1}}$; y como $\sqrt{-1}$ arriba y $\sqrt{-1}$ abajo se pueden suprimir, quedará $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ que es igual con $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Del mismo modo si tuviéramos que dividir $\sqrt{-a}$ por $\sqrt[4]{-b}$, las descompondríamos en $\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$ y en $\sqrt[4]{b}\times\sqrt[4]{-1}$ y despues iríamos ejecutando nuestra operacion como aquí se presenta:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt[4]{-b}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{b}\times\sqrt[4]{-1}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}\times\frac{(1-)^{\frac{1}{2}}}{(-1)^{\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[4]{b}}\times(-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\times(-1)^{\frac{2}{4}-\frac{1}{4}}}=\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\times(-1)^{\frac{1}{4}}}=\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\times\sqrt[4]{-1}}=\sqrt[4]{-\frac{a}{b}}.$$

Cuando en una espresion entra una parte real y otra imaginária toda la espresion es imaginária, de manera que $a+\sqrt{-b}$ es una espresion imaginária: porque si suponemos que sea una cantidad real como c, será $a+\sqrt{-b}=c$; y si de estas cantidades quitamos la a, tendrémos: $\sqrt{-b}=c-a$, pero $c-a$ espresa la diferencia entre c y a, que son cantidades reales, luego la diferencia entre dos cantidades reales seria igual á una espresion imaginária, lo cual siendo un absurdo da á conocer que $a+\sqrt{-b}$ no puede ser una cantidad real. Como $\sqrt{-b}$ es lo mismo que $\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$ resulta que toda espresion de imaginárias de segundo grado puede tomar esta forma $A+B\sqrt{-1}$ siendo A y B cantidades reales;

d'Alembert fué el primero que demostró esta proposicion en el párrafo 69 *de sus investigaciones sobre la causa general de los vientos; donde demuestra, igualmente que en las memorias de la Academia de Berlin, que toda espresion donde entren espresiones tales como $A+B\sqrt{-1}$, ya sea por suma, por resta, por multiplicacion, &c. es susceptible de una forma análoga.*

213 Antes de concluir este punto no podemos ménos de observar que si se multiplican entre sí dos binomios de esta especie, pero que en cada uno sea diferente el signo del radical, el producto será una cantidad real; v. g. si multiplicamos $A+B\sqrt{-1}$ por $A-B\sqrt{-1}$ tendrémos:

$$(A+B\sqrt{-1})(A-B\sqrt{-1})=A^2+AB\sqrt{-1}-AB\sqrt{-1}+B^2=A^2+B^2.$$

De aquí podemos deducir una regla para descomponer en factores toda cantidad compuesta de la suma de dos términos, cuya operacion es mui socorrida en la práctica y es: que se *ponga la raiz cuadrada de uno de los términos en ambos factores por primer término, y por segundo la raiz del otro multiplicada por $\sqrt{-1}$ pero con diferente signo en cada factor*; de manera que $a^2+b^2=(a+b\sqrt{-1})\times(a-b\sqrt{-1})$;

$$a^4+b^4=(a^2+b^2\sqrt{-1})\times(a^2-b^2\sqrt{-1});$$

$$a^6b^2c^8+d^2m^{10}=(a^3bc^4+dm^5\sqrt{-1})\times(a^3bc^4-dm^5\sqrt{-1});$$

$$a^3+b=(a\sqrt{a}+\sqrt{b}\sqrt{-1})\times(a\sqrt{a}-\sqrt{b}\sqrt{-1});$$

$$a^m+b^n=(\sqrt{a^m}+\sqrt{b^n}\sqrt{-1})\times(\sqrt{a^m}-\sqrt{b^n}\sqrt{-1}).$$

Para manifestar como se elevan á potencias las imaginárias, observarémos que siendo, como hemos demostrado (208), $\sqrt{-a}=\sqrt{a}.\sqrt{-1}$; elevando ambos miembros á la potencia m, se tendrá $(\sqrt{-a})^m=(\sqrt{a})^m.(\sqrt{-1})^m=\sqrt{a^m}.(\sqrt{-1})^m$; donde vemos que la dificultad está reducida á determinar el valor de $(\sqrt{-1})^m$; por lo que formarémos las diferentes potencias de esta espresion como aquí se presenta:

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)^2}=-1$$

$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2.\sqrt{-1}=-1.\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^3.\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-\sqrt{(-1)^2}=-(-1)=+1$$

$$(\sqrt{-1})^5=(\sqrt{-1})^4.\sqrt{-1}.=1.\sqrt{-1}=\sqrt{-1}.$$

$$(\sqrt{-1})^6=(\sqrt{-1})^4.(\sqrt{-1})^2=+1.(\sqrt{-1})^2=\sqrt{(-1)^2}=-1$$
$$(\sqrt{-1})^7=(\sqrt{-1})^4.(\sqrt{-1})^3=1.(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^8=(\sqrt{-1})^4.(\sqrt{-1})^4=+1.+1+=1.$$

Aquí observamos que las cuatro últimas potencias de $\sqrt{-1}$ son iguales á las cuatro primeras; y continuando del mismo modo reconoceríamos que sucederia lo mismo respecto de las cuatro siguientes; pero como siempre son preferibles las demostraciones generales, nosotros siguiendo el consejo de Laplace demostrarémos en general esta proposicion. Para esto, observarémos que todo número entero, de cualquier especie que sea, puede tener (2.ª nota del § 79) una de las cuatro formas $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$.

Por lo cual todas las potencias de $\sqrt{-1}$ las podrémos dividir en cuatro clases, á saber: aquellas cuyos esponentes sean $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$. Por consiguiente tendrémos

1.° $(\sqrt{-1})^{4n}=\left((\sqrt{-1})^4\right)^n=(+1)^n=+1$

2.° $(\sqrt{-1})^{4n+1}=(\sqrt{-1})^{4n}.\sqrt{-1}=+1.\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$

3.° $(\sqrt{-1})^{4n+2}=(\sqrt{-1})^{4n}.(\sqrt{-1})^2=+1.(\sqrt{-1})^2=\ldots\ldots(\sqrt{-1})^2=-1$

4.° $(\sqrt{-1})^{4n+3}=(\sqrt{-1})^{4n}.(\sqrt{-1})^3=+1.(\sqrt{-1})^3=\ldots\ldots(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$.

Por lo que resulta demostrado en general que todas las potencias de $\sqrt{-1}$ se reducen á las cuatro primeras.

Para estraer las raices de las espresiones imaginárias, se procederá del mismo modo que con los radicales, de manera que

$\sqrt[m]{\sqrt[2n]{-1}}=\sqrt[2mn]{-1}$; y despues se practicarán las simplificaciones de que la espresion sea susceptible.

De las espresiones 2.°, 3.°, 4.° que acabamos de considerar se deduce que

$$\sqrt[4n+1]{\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}\,;\ \sqrt[4n+2]{-1}=\sqrt{-1}\,;\ \sqrt[4n+3]{-\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}.$$

SEGUNDA PARTE DEL ÁLGEBRA.

De la análisis algebráica y resolucion de las ecuaciones de primer grado.

214 Cuando las cantidades se hallan separadas entre sí por medio del

signo $=$, reciben estas espresiones el nombre de *ecuaciones*; de manera que ecuacion es *la igualdad de dos cantidades*, como, por ejemplo, $c=a+b$; lo que se pone á la izquierda de dicho signo se llama *primer miembro*, y lo que se pone á la derecha *segundo miembro*. A la parte del Álgebra que trata de resolver los problemas despues de puestos en ecuacion, se llama *análisis*. Todo el espíritu analítico consiste en suponer conocido lo mismo que se trata de indagar para despues llegar á conocerlo. Por esta causa los mejores analistas Fermat, Vieta y aun Arquimedes, al intentar resolver una cuestion, sea de la especie que sea, empiezan con estas espresiones: *Factum sit, suppono rem tamquam jam factam*, esto es, *supóngase hecho todo lo que se pide hacer*, ó *supongo la cosa como ya hecha*. Despues de considerar la cosa como ya hecha se espresan las cantidades por letras, y las condiciones á que han de satisfacer dichas cantidades por ecuaciones. Para señalar las cantidades por letras es necesario elegir caractéres con que se distingan las que se dan conocidas de las desconocidas ó cantidades que se buscan, á que damos el nombre de *incógnitas*. Vieta y Fermat señalaban las cantidades que se buscaban ó incógnitas con las letras vocales del alfabeto, y las conocidas con las consonantes; despues se ha abandonado este uso (*), y en la actualidad se señalan las incógnitas con las últimas letras del alfabeto z, y, x, u, &c. y las conocidas con las primeras a, b, c, &c. en cuyo modo de indicar no se ve un límite de demarcacion entre unas y otras; y así, al encontrar en un cálculo la m, la n, la p, la q, la r, &c. parece que dudaríamos si eran símbolos de cantidades conocidas, ó de cantidades desconocidas; pero de esto no resulta confusion porque el contesto dice las que se deben considerar como incógnitas. (**).

(*) *No reputamos mui puesto en razon el haber abandonado este uso, y yo creo que su orígen ha sido el siguiente: cuando Descártes aplicó el Álgebra á la Geometría ponia siempre ecuaciones indeterminadas, y por consiguiente adelantó la análisis indeterminada; en la análisis indeterminada ó en las ecuaciones indeterminadas hai cantidades constantes, que son las que en una misma cuestion no tienen mas de un valor, y variables que son aquellas que en una misma cuestion pueden tener todos los valores que se quiera: á las constantes las señalaba él con las primeras letras del alfabeto, y á las variables con las últimas; desde entónces se ha continuado espresando tanto las incógnitas como las variables por las últimas letras del alfabeto.*

(**) *Mr. Bois-Bertrand indica que se debe distinguir la* ecuacion *de la* igualdad; *y dice que en la igualdad todas las cantidades que entran son conocidas, cuando en la ecuacion entran ciertas cantidades desconocidas que se trata de determinar de modo que la ecuacion se trasforme en una misma igualdad. De manera que la ecuacion es una*

215 El espresar las condiciones en ecuaciones se llama *plantear el problema*; y para conseguirlo no se pueden dar reglas que sean del todo independientes del talento del calculador; mas no obstante las mas generales son las de observar las de una rigurosa traduccion. Así, observarémos que las palabras del lenguage comun *sumado, mas, con, junto, y, agregado, unido* y todas sus semejantes, conducen á escribir el signo +; las *restado de, quitado de, disminuido en, ménos* y sus semejantes, conducen al signo —; las *multiplicado, tantas veces mayor* y sus semejantes, al signo ×; y las *dividido, partido, tantas veces menor* y sus semejantes, al signo de dividir; las *elevado á tal potencia*, como cuadrado, cubo, &c. al de elevar á potencias; de *estraer tal ó tal raiz* al signo radical; y finalmente las palabras *dé, componga, resulte* y todas sus equivalentes conducen á escribir el signo =.

Cuando despues de planteado un problema se hallan tantas ecuaciones como incógnitas, entónces la cuestion es *determinada*; cuando resultan ménos ecuaciones que incógnitas es *indeterminada*; y cuando resultan mas ecuaciones que incógnitas se deberia llamar *mas que determinada*; pero en este caso la cuestion ó es absurda, ó es inútil alguna condicion de las que se diéron, y por lo mismo no se considera esta clase de cuestiones (*).

---

igualdad que aun no está satisfecha, y que lo será cuando se sustituya en lugar de la incógnita el valor conveniente; es decir, que segun dicho autor la espresion $x+5=15$ *es una ecuacion; y cuando en vez de* x *se sustituya el valor que le corresponde que es* 10, *lo que da* $10+5=15$, *ó* $15=15$ *es ya una igualdad.*

(*) *Para aclarar estas denominaciones, observarémos* 1.º *que si se nos pidiese* hallar un número que *sumado con* 2 *diese* 6; *tendríamos planteado el problema en la siguiente ecuacion,* $x+2=6$; *y sin gran dificultad vendrémos en conocimiento de que el número que se busca es* 4; *pues esta cuestion es determinada, y tambien es determinada la ecuacion en que está cifrada.*

2.º *Si se pidiese por ejemplo* hallar dos números enteros y positivos cuya diferencia fuese 2; *si á estos números que se buscan los señalamos con* z *y con* x, *tendrémos planteada la cuestion en la siguiente ecuacion* $z-x=2$.

Por poco que reflexionemos acerca de la cuestion, echarémos de ver, que habiendo muchos números que se diferencien en dos unidades, como son el 6 *y el* 4, *el* 8 *y el* 6, *el* 10 *y el* 8, *el* 3 *y el* 1, *el* 5 *y el* 3, *el* 7 *y el* 5 *&c., se viene en conocimiento de que no basta la condicion espresada para determinar dos números únicos que cumplan con ella; y por esta razon la ecuacion* $z-x=2$ *en que está cifrada se llama con toda propiedad* indeterminada.

La parte de la análisis que trata de las cuestiones determinadas se llama *análisis determinada*; y la que trata de las indeterminadas se llama *análisis indeterminada.*

Se ha añadido en la cuestion que los números fuesen enteros y positivos; porque sin estas condiciones, seria todavía mucho mas indeterminada la cuestion; pues cumplirian con ella, no solo los números indicados ya, sino tambien los $\frac{5}{2}$ *y* $\frac{1}{2}$; $\frac{9}{2}$ *y* $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{3}$ *y* $\frac{1}{3}$ *&c.; y tambien los* -2 *y* -4, *los* -4 *y* -6 *&c.*

Del mismo modo seria indeterminada la cuestion si nos propusiéramos hallar dos números diferentes cuya suma fuese 8; *pues podrian cumplir con esta condicion los* 7 *y* 1; 6 *y* 2; *los* 5 *y* 3; *por consiguiente esta cuestion y la ecuacion* $z+x=8$ *es indeterminada.*

3.º *Pero si tratásemos de buscar dos números que satisfaciesen á estas dos condiciones á un mismo tiempo, es decir, si nos propusiésemos hallar dos números cuya diferencia fuese* 2, *y cuya suma fuese* 8, *como entre todos los números que satifacen á la primera, solo los* 5 *y* 3 *satisfacen á la segunda, resulta que con estas dos condiciones que se suponen se han de verificar á un mismo tiempo, quedan completamente determinados los dos números que se buscaban, de manera que ningunos otros satisfagan á la cuestion.*

4.º *Esto mismo sucede siempre que se dén conocidas tantas condiciones como números se buscan; y por esto hemos asegurado que las cuestiones son determinadas cuando conducen despues de planteadas, á tantas ecuaciones como incógnitas; pero debemos advertir para que no se incurra en alguna equivocacion, que se supone que estas ecuaciones han de ser* distintas *las unas de las otras, y que no se puedan deducir unas de otras por ningun otro procedimiento; y así si nos propusiéramos* hallar dos números cuya diferencia fuese 3 y cuyos duplos se diferenciasen en 6 unidades; *esta segunda condicion nada añade á la primera, pues se deduce de ella, á causa de que si dos números se diferencian en una cantidad cualquiera, sus duplos se diferenciarán en el duplo de la misma diferencia; y como aquí la segunda condicion establece que sea* 6, *que es duplo de la primitiva, los mismos números que satisfacen á la primera condicion, satisfacen tambien á la segunda; por consiguiente esta nada añade. Planteada esta cuestion conduce á estas dos ecuaciones* $z-x=3$, $2z-2x=6$; *y como esta segunda se deduce de la primera multiplicando ambos miembros por* 2, *y de la misma ecuacion primitiva se podrian deducir una infinidad de ellas (haciendo una misma operacion con ambos miembros), y ninguna nos podria servir para determinarnos los números, resulta la restriccion con que debemos entender lo del testo.*

Cuando en una ecuacion considerada por sí sola no hai mas de una incógnita, se dice que es determinada; pero cuando se hallan dos ó mas incógnitas se dice que dicha ecuacion es indeterminada.

216 Las ecuaciones, sean determinadas ó indeterminadas, se dividen en *grados*, tomando el nombre del mayor esponente que tenga la incógnita; y así, $a+bx=cx+d+e$ es una ecuacion de *primer grado*, porque la incógnita x que contiene, solo se halla elevada á la primera potencia y es determinada porque solo contiene una incógnita que es la x. La ecuacion $ax^2+bx=c+dx$ es de *segundo grado*, porque el mayor esponente de la incógnita es 2: y ademas es determinada porque solo contiene una incógnita que es la x; y la ecuacion $ax^5+bx^9+d=cx^2$ es del *noveno grado*, porque el mayor esponente de la incógnita x es 9: y es determinada por la misma razon que las anteriores.

Las ecuaciones indeterminadas tambien toman el nombre del mayor esponente de las incógnitas; pero como puede haber términos donde se hallen las incógnitas multiplicadas ó divididas entre sí, para averiguar el número de dimensiones desconocidas (*variables* se llamarán en lo sucesivo) ó el grado de la ecuacion, se sumarán los esponentes de las incógnitas que se hallan en este mismo término. Por ejemplo: la ecuacion $ax+bz=c$ es una ecuacion indeterminada porque tiene dos incógnitas: y es de primer grado porque en un mismo término no se halla sino una incógnita, y es con la unidad por esponente; la ecuacion $az+bz^3x^2=ax^2$ es indeterminada porque tiene dos incógnitas: y ademas es de quinto grado porque en el segundo término del primer miembro se hallan dos incógnitas, la una con un esponente 3, y la otra con un esponente 2; luego en este término hai cinco dimensiones desconocidas. La ecuacion

Puesto que las dos condiciones espresadas bastan para determinar completamente los dos números que se buscan, resulta que si se añade otra condicion, ó esta ha de estar comprendida en las anteriores, ó ha de ser inútil el añadirla, ó es absurda. Por ejemplo, añadiendo en la ecuacion (4.º) *la condicion de que* los duplos se diferenciasen en 6, *esta condicion era inútil; si se añadiese que su producto fuese un número determinado, habia de resultar una de dos cosas, ó que por casualidad acertásemos con el producto, ó que entónces fuese imposible la cuestion. En efecto, si añadiésemos á la cuestion* (3.º) *que su producto fuese* 15, *habríamos acertado por casualidad; pero esta condicion para nada nos sirve, pues determinados los dos números* 3 *y* 5 *por las dos condiciones, su producto ya queda fijo y determinado por las reglas de la aritmética; y si se quisiese por ejemplo que el producto fuese* 20, 30, *ó cualquiera otro número esto ya es un absurdo; pues no puede haber dos números, que satisfagan á estas tres condiciones á un mismo tiempo; y por eso se ha espresado con esta especificacion en el testo.*

$ax^2u^4+bu^7-cx^2u^3z=ez$ es una ecuacion indeterminada, porque contiene tres incógnitas: y ademas es del séptimo grado porque en el segundo término se halla la u elevada á la séptima potencia; pues aunque se sumen los esponentes 2, 3 y 1 de las tres incógnitas que se hallan en el tercer término del primer miembro, solo dan seis dimensiones incógnitas.

Cuando las ecuaciones son de un grado mas elevado al primero pueden ser de dos maneras: *puras* ó *incompletas*, que son aquellas en que solo se halla la incógnita con el esponente que da nombre á la ecuacion; ó *mistas*, *completas* ó *afectas*, que son aquellas en que ademas del término donde se halla la incógnita con el esponente que da nombre á la ecuacion, se encuentra en otros términos con un esponente menor. Por ejemplo: $x^2+a=b$, $x^4+a=b$, $x^7=a$, ó en general $x^n=b$, son ecuaciones puras de 2.º, 4.º, 7.º, y n.º grado; las ecuaciones $x^2+x+c=b$, $x^4+ax^3+bx=c$, $x^7+bx=a$, ó en general $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\&c.=c$ son ecuaciones mistas, completas ó afectas de los mismos grados que las anteriores.

Se dice de una ecuacion que es *numérica* cuando solo entran en ella incógnitas y números; y que es *literal* cuando ademas de la incógnita ó incógnitas que pueda contener, entran otras letras que representen cantidades conocidas (*).

(*) *Mr. Bois-Bertrand juzga oportuno introducir en la análisis la denominacion de* ecuacion formular *para espresar la ecuacion mas general de cada grado, y en la cual se pueden por consiguiente comprender todas las de aquel grado.*

Así, la ecuacion formular del primer grado es $Ax+B=0$.

La de segundo grado es $Ax^2+Bx+C=0$.

La de tercero $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ &c.

En todas estas se puede hacer desaparecer uno cualquiera de los coeficientes, sin que deje de subsistir ecuacion formular; por ejemplo, dividiendo por A *todos los términos de la de segundo grado, se tendrá*

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=\frac{0}{A}=0;$$

y espresando el coeficiente $\frac{B}{A}$ *por* p *y el* $\frac{C}{A}$ *por* q, *será* $x^2+px+q=0$

que se puede tomar tambien por ecuacion formular de segundo grado.

La ecuacion formular de primer grado entre dos incógnitas (ó variables), es $Ax+Bz=C$.

La de segundo grado es $Az^2+Bzx+Cx^2+Dz+Ex+F=0$ *y así sucesivamente.*

Mr. Cunard da diferentes denominaciones á las ecuaciones de dos

217 Como el espíritu analítico consiste en hallar una ó mas cosas desconocidas en valores de las cosas que se dan conocidas, todo el artificio de la análisis, cuando ya está planteado el problema, consiste en determinar á que cantidades conocidas es igual ó son iguales las incógnitas; y las operaciones que se ejecutan para dejarla sola en un miembro sin coeficiente, esponente, ni divisor, y con el signo positivo, se comprenden bajo el nombre de *despejo de las incógnitas ó resolucion de las ecuaciones*; para lo cual sí suministra medios la análisis, que es lo que vamos á manifestar respecto de las de primer grado.

218 Las Matemáticas han mudado enteramente de aspecto desde que se adelantó el Álgebra, aplicándola á la Geometría; y todos los grandes progresos se deben á la aplicacion de la análisis, sin embargo de que aun no se pueden resolver con exactitud y generalidad sino las ecuaciones de primero y segundo grado. Hai métodos para resolver las de tercero y cuarto grado (*), y aun para resolver aproximadamente las de un grado cualquiera, que seguramente es una gran ventaja; pero aun dista mucho este ramo del grado de perfeccion que exige su importancia.

El despejo de las incógnitas se funda en este principio general: *si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales los resultados serán iguales.* Para conseguirlo, se ejecuta con el miembro donde no se halla la incógnita, lo contrario de lo que hacen las cantidades que están juntas con ella en el miembro donde se halla. *Así, cuando la incógnita esté junta con otras cantidades por via de suma se despejará restando; cuando por via de resta sumando; cuando por via de multiplicacion dividiendo; cuando por via de division multiplicando; cuando esté elevada á potencias estrayendo raices; y cuando se halle debajo de algun radical elevando á potencias*; esto es, haciendo siempre las operaciones contrarias á las que estén indicadas con la incógnita, como manifestarémos.

219 En efecto, 1.º Cuando la incógnita se halla sumada con otra cantidad, *queda despejada pasando por via de resta al otro miembro la cantidad que sumaba á la incógnita*; es decir, que si se tiene $x+a=b$, quedará despejada la x pasando el término $+a$ al otro miembro con el signo — de este modo $x=b-a$; porque siendo $x+a=b$, como si de cantidades iguales se quita una misma cantidad los resultados serán iguales, se sigue que si de ambos miembros quitamos la a será $x+a-a=b-a$; pero en el primero $+a$ y $-a$ se destruyen, luego quedará $x=b-a$.

---

incógnitas (ó variables). Cuando ambas están elevadas á la segunda potencia llama á la ecuacion de segundo-segundo grado; *cuando una está á la segunda potencia y la otra á la tercera de* segundo-tercer grado; *y así sucesivamente de* segundo-cuarto grado, tercer-tercer grado &c.

(*) *Estos métodos los damos á conocer en los apéndices* 6.º y 7.º *que se hallan al fin de este volúmen.*

220 2.º Cuando una cantidad constante afecta á la incógnita por via de resta, *queda despejada pasando al otro miembro dicha cantidad por via de suma*; es decir, que si se tiene $x-a=b$, será $x=b+a$; porque si á ambos miembros de la ecuacion añadimos una misma cantidad tal como a, se tendrá $x-a+a=b+a$; y como $-a$ y $+a$ en el primer miembro se destruyen, quedará $x=b+a$.

Cor. De estos dos casos se deduce que *para pasar un término de un miembro á otro basta mudarle el signo*; *y que si en un resultado nos viniese por último la incógnita con el signo —, se podrá poner con el signo + mudando los signos á toda la ecuacion*; porque esto equivale á trasladar los términos de un miembro al otro. Así, si tuviésemos $-x=a-b$ podríamos poner $x=b-a$.

221 3.º Cuando una cantidad multiplica á la incógnita, quedará esta despejada *partiendo el otro miembro por lo que multiplica á la incógnita*; es decir, que si se tiene $ax=b$, resultará $x=\frac{b}{a}$; porque si dividimos ambos miembros de dicha ecuacion por a, se tendrá $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$; y como a arriba y a abajo se pueden suprimir sin que se altere la espresion, quedará $x=\frac{b}{a}$.

222 4.º Cuando una cantidad divide á la incógnita, quedará esta despejada *multiplicando el otro miembro por lo que divide á la incógnita*; es decir, que si se tiene $\frac{x}{a}=b$, será $x=ab$.

Para demostrarlo, observarémos que si multiplicamos ambos miembros de la ecuacion por a, tendrémos $\frac{ax}{a}=ab$; pero en el primer miembro la a del numerador se puede suprimir con la del denominador, luego resultará $x=ab$.

223 Al despejar una incógnita no se presentan ecuaciones como las que hemos considerado hasta ahora, sino que se hallan á un tiempo enlazadas con las incógnitas las cantidades conocidas por via de suma, resta, multiplicacion y division; y en este caso *para despejarla lo primero que se hace es pasar al primer miembro todos los términos donde se halla la incógnita, y al segundo todos aquellos donde no se halla, lo que se consigue mudando los signos del término ó términos que se trasladan. Despues se quitan todos los divisores de los términos donde hai incógnita, lo que se consigue multiplicando cada término por el producto de los divisores de los demas; luego, como en todos los términos del primer*

miembro se ha de hallar la incógnita, se descompondrá en dos factores sacando la incógnita fuera de un paréntesis, y encerrando dentro de él lo demas que multiplique á la incógnita; y finalmente quedará despejada dividiendo el otro miembro por lo que multiplica á la incógnita, que es lo que se halla dentro del paréntesis.

Propongámonos, por ejemplo, despejar la incógnita de esta ecuacion:

$$\frac{x}{a}+b+2x-\frac{c^2}{n}=d+\frac{3x}{5}+m-\frac{x}{e};$$

lo primero que ejecutarémos será pasar al primer miembro los términos $\frac{3x}{5}$ y $-\frac{x}{e}$ del segundo, y los b y $-\frac{c^2}{n}$ del primero al segundo mudándoles los signos; de manera que tendrémos:

$$\frac{x}{a}+2x-\frac{3x}{5}+\frac{x}{e}=d+m-b+\frac{c^2}{n};$$

ahora quitarémos todos los divisores de los términos donde hai x, multiplicando el $\frac{x}{a}$ por $5e$, producto de los divisores de los demas términos; el $2x$ por $5ae$; el $-\frac{3x}{5}$ por ae, producto de los divisores de los demas; y el $\frac{x}{e}$ por $5a$, producto de los divisores de los demas; todo el 2.º miembro se multiplicará por $5ae$, producto de todos los divisores del primero, y será: $5ex+10aex-3aex+5ax=5ae(d+m-b+\frac{c^2}{n})$

ó reduciendo $5ex+7aex+5ax=5ae\left(d+m-b+\frac{c^2}{n}\right)$(A).

Esta trasformacion no altera la ecuacion, porque equivale á multiplicar sus dos miembros por el producto de todos los espresados divisores; pues en el término donde haya alguno, queda hecha la multiplicacion con suprimirle.

Tambien pudiéramos haber quitado el divisor n del $\frac{c^2}{n}$ contándole entre los divisores, y entónces practicando la regla hubiéramos tenido:

$$5enx+7aenx+5anx=5aden+5aemn-5aebn+5aec^2.$$

Pero de este modo no nos parece tan ventajoso por cuanto complica mas la ecuacion, no influyendo esto en nada para el simple despejo.

Ahora, resolviendo en factores el primer miembro de la ecuacion (*A*), lo que conseguirémos sacando la x fuera de un paréntesis que contenga

todo lo demas, se tendrá $x(5e+7ae+5a)=5ae(d+m-b+\frac{c^2}{n})$;

y dividiendo por lo que multiplica á la incógnita, resultará por último:

$$x=\frac{5ae\left(d+m-b+\frac{c^2}{n}\right)}{5e+7ae+5a}.$$

Del mismo modo se procederia en ecuaciones mas complicadas.

Cor. De aquí resulta que *una cantidad que en un miembro se halla como factor puede pasar al otro por divisor*; y al contrario: *toda cantidad que se halla por divisor puede pasar por factor al otro miembro*; y que quitar los divisores de una ecuacion *equivale á multiplicar sus dos miembros por el producto de todos ellos* (*).

224 Cuando la incógnita se halla elevada á una potencia cualquiera en una ecuacion pura, *se despeja estrayendo del otro miembro una raiz del grado que espresa el esponente de la potencia*; es decir: que si se tiene $x^n=b$, quedará despejada la x poniendo $x=\sqrt[n]{b}$. Porque si estraemos de ambos miembros de la ecuacion $x^n=b$ la raiz n, tendrémos $\sqrt[n]{x^n}=\sqrt[n]{b}$; pero $\sqrt[n]{x^n}=x^{\frac{n}{n}}=x^1=x$, luego $x=\sqrt[n]{b}$; si n fuese un número par se deberá poner el signo $\pm$; de manera que si se tuviese $x^2=a^2$, deberíamos obtener $x=\pm a$. Tambien deberíamos poner

(*) *No será inoportuno el que demostremos la siguiente proposicion:* en una ecuacion de primer grado con una sola incógnita solo hai un valor que sustituido por la incógnita satisfaga á dicha ecuacion.

En efecto, supongamos que haya dos números α *y* β *que puedan satisfacer á la ecuacion* $Ax+B=0$, *que es la mas general del primer grado; en este caso se tendrá* $A\alpha+B=0$, $A\beta+B=0$; *y restando la segunda de la primera, se tendrá* $A\alpha-A\beta=0$, *ó* $A(\alpha-\beta)=0$.

Mas para que esta ecuacion se verifique, es indispensable que uno de los factores sea 0; *pero no pudiendo* A *ser* 0, *porque entónces la ecuacion primitiva se reduciria á* $B=0$, *y no contendria incógnita, es indispensable que el otro factor lo sea, y resultará* $\alpha-\beta=0$, *que da* $\alpha=\beta$; *luego si todos los valores que satisfagan á dicha ecuacion han de ser iguales, resulta la proposicion.*

En general se llama raiz de una ecuacion *á todo valor que sustituido en ella en vez de la incógnita satisface á dicha ecuacion: por lo que la proposicion anterior la podrémos enunciar tambien del modo siguiente:* una ecuacion de primer grado de una sola incógnita no puede admitir mas de una raiz.

en el primer miembro $\pm$, de manera que en rigor debería ser $\pm x=\pm a$, que da $+x=+a$, $+x=-a$, $-x=+a$, $-x=-a$; pero como estos dos últimos valores son los mismos que los primeros mudando el signo á las ecuaciones, solo se conserva el $\pm$ en el segundo miembro.

225 Si se hallase la incógnita debajo de algun radical, quedaria despejada *elevando el otro miembro á una potencia del mismo grado que el radical*; es decir, que si se tuviese $\sqrt[n]{x}=b$, resultaria $x=b^n$.

Porque si elevamos ambos miembros de la ecuacion $\sqrt[n]{x}=b$ á la potencia n, resultará que $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=b^n$; pero (§ 207) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=\ldots\ldots\sqrt[n]{x^n}=x^{\frac{n}{n}}=x$, luego $x=b^n$.

226 Cuando al plantear una cuestion nos hallamos con tantas ecuaciones como incógnitas, hemos dicho que dicha cuestion es determinada; para despejar en este caso cada una de las incógnitas se pueden seguir tres métodos diferentes: 1.º el *de sustitucion*; 2.º el *de igualacion*; y 3.º *métodos particulares*.

El de sustitucion consiste *en determinar en la ecuacion mas sencilla la incógnita que sea mas fácil de despejar; y sustituir su valor en las demas, de cuya sustitucion resulta una ecuacion ménos y una incógnita ménos; luego en una de estas, que convendrá sea la mas sencilla, determinarémos otra incógnita que deberá ser aquella cuyo despejo ofrezca ménos dificultad, y sustituirémos su valor en las demas; y así continuarémos hasta que solo tengamos una ecuacion con una incógnita, en cuyo caso se despejará y se sustituirá su valor en los de las anteriores, á fin de tener en cantidades conocidas espresado el valor de todas las incógnitas.*

Propongámonos por este método despejar las incógnitas en este sistema de ecuaciones (A:

$$\left.\begin{array}{l}(1.^a)\,x+u+z=a\\(2.^a)\,x+u-z=b\\(3.^a)\,x-u-z=c\end{array}\right\}(A)$$

Para esto determinaré en la primera ecuacion una cualquiera de ellas tal como la x, y tendré $x=a-u-z$.

Sustituiré este valor de x en las dos de abajo, y se me convierten en

$$\left.\begin{array}{l}a-u-z+u-z=b\\a-u-z-u-z=c\end{array}\right\}\text{ ó en }\left\{\begin{array}{l}a-2z=b\\a-2u-2z=c\end{array}\right\}(B)$$

y como en la primera de estas dos ecuaciones no tengo ya mas de una incógnita que es la z, la despejaré pasando primero la a al segundo miembro, lo que dará $-2z=b-a$, ó mudando los signos á la ecuacion para que sea positiva la z, será $2z=-b+a=a-b$, y finalmente dividiendo por 2 será $z=\frac{a-b}{2}$.

Ahora sustituyamos en vez de z su valor en la segunda de las ecuaciones (B), ó desde luego en vez de $-2z$ su valor $b-a$, y tendrémos: $a-2u+b-a=c$, ó $-2u+b=c$, lo que da pasando b al otro miembro $-2u=c-b$, ó mudando los signos, $2u=b-c$, y $u=\frac{b-c}{2}$.

Si sustituimos estos valores de z y de u en el de x será: $x=a-u-z=a-\frac{b-c}{2}-\frac{a-b}{2}$; que reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña se tendrá: $x=\frac{2a-b+c-a+b}{2}=\frac{a+c}{2}$; con lo cual quedan despejadas las tres incógnitas.

227 El método de igualacion consiste *en determinar en todas las ecuaciones una misma incógnita; despues se iguala el valor sacado de la primera con cada valor sacado de las demas, lo que dará una ecuacion y una incógnita ménos; despues en el conjunto de ecuaciones que resultan, se determinará otra incógnita, y el valor sacado de la primera se igualará con los sacados de las demas, lo que nos dará otra ecuacion y otra incógnita ménos; y así procederémos hasta que solo tengamos una sola ecuacion con una sola incógnita, en cuyo caso se despejará, y se sustituirá su valor sucesivamente en las anteriores.*

Propongámonos despejar por este método las x, u, z en el mismo sistema (A) de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}x+u+z=a\\x+u-z=b\\x-u-z=c\end{array}\right\}(A)\quad\left.\begin{array}{l}x=a-u-z\\x=b-u+z\\x=c+u+z\end{array}\right\}(B)\quad\left.\begin{array}{l}a-u-z=b-u+z\\a-u-z=c+u+z\end{array}\right\}(C)$$

Determinando en todas ellas la x tendrémos las tres ecuaciones (B).

Que igualando el primer valor de x con los dos de abajo se tendrán las dos (C).

En las cuales determinando otra incógnita tal como la z, la primera nos da $-2z=b-a$ ó $2z=a-b$, y $z=\frac{a-b}{2}$, en la que ya no hai incógnita; por lo que podré sustituir este valor en la de abajo y despejar la u. Pero como ahora se trata de manifestar el método de igualacion, determinarémos tambien la z en la segunda ecuacion, lo que nos dará:

$$-2z=c-a+2u \text{ ó } 2z=a-c-2u, \text{ y } z=\frac{a-c-2u}{2};$$

que igualando los dos valores de z tendrémos: $\frac{a-c-2u}{2}=\frac{a-b}{2}$;

y como aquí no tenemos ya mas de una incógnita que es la u, la despejarémos quitando primero los divisores de ambos miembros, lo que nos dará $a-c-2u=a-b$; pasando todo lo conocido al segundo miembro se tendrá $-2u=a-b-a+c$, ó mudando los signos y destruyendo,

$$2u=b-c\text{, y por último } u=\frac{b-c}{2}.$$

Sustituyendo ahora el valor de u y de z en cualquiera de los tres valores (B) de x, por ejemplo en el primero, tendrémos:

$$x=a-u-z=a-\frac{b-c}{2}-\frac{a-b}{2}=\frac{2a-b+c-a+b}{2}=\frac{a+c}{2};$$

que es el mismo resultado de ántes.

228 El tercer método consiste *en ejecutar con las ecuaciones que se dan, aquellas operaciones que conozca el calculador que le dirigen á despejar inmediatamente la incógnita que se deséa*; sobre este punto no se pueden dar reglas, pues solo dependen del talento, destreza y tino del calculador. (*) Por esta causa le aplicarémos al mismo ejemplo con el fin de que se puedan comparar unos métodos con otros.

Sean las mismas ecuaciones (A).

$$\left.\begin{aligned}x+u+z&=a\\x+u-z&=b\\x-u-z&=c\end{aligned}\right\}\text{(A)}$$

Si me propongo despejar inmediatamente la x, observaré que sumando la primera con la tercera obtendré por primer miembro $2x$, porque $+u$ se destruye con $-u$, y $+z$ con $-z$; y como de sumar los segundos miembros resulta $a+c$, se tendrá $2x=a+c$, de donde $x=\frac{a+c}{2}$.

Si me propongo despejar directamente la u, restaré la tercera ecuacion de la segunda y obtendré $2u=b-c$; porque de restar los primeros miembros resulta que $+x$ con $-x$ (porque al sustraendo se le han de mudar los signos) se destruyen, y $-z$ con $+z$ igualmente se destruyen; luego dividiendo por por 2 será $u=\frac{b-c}{2}$.

Finalmente para despejar z restaré la segunda de la primera, lo que me dará $2z=a-b$ y $z=\frac{a-b}{2}$.

(*) *Á este tercer método le suelen llamar los autores* método por adicion y sustraccion, *ó por* sumas y restas, *y comprenden bajo esta denominacion todo lo que esponemos en el apéndice* 5.°; *y como allí se hace uso tambien de la multiplicacion y division, creemos mas propia nuestra denominacion de* métodos particulares.

con lo cual tenemos sacados los mismos valores que ántes.

Esc. Cuando al calculador no le ocurra ninguno de estos métodos particulares, deberá elegir el método de sustitucion que en general es el mas corto. Por esta causa le preferimos en las cuestiones que vamos á resolver; pero ántes advertirémos que cuando se da un sistema ó un conjunto de ecuaciones con un cierto número de incógnitas, y en una de ellas se determina una cualquiera de las incógnitas y se sustituye en las otras, resulta, como se ha visto ya, una ecuacion ménos y una incógnita ménos; por lo que se dice que aquella incógnita se ha *eliminado*. Donde se ve que con un número n de ecuaciones podrémos eliminar $n-1$ incógnitas; así es que en el sistema (A) hemos eliminado la incógnita x cuando hemos obtenido el sistema (B); y habiendo eliminado en este sistema la u, nos ha quedado una sola ecuacion que no conteniendo ya sino una incógnita z, nos ha servido para despejarla.

229 Cuestion 1.ª *Dada la suma y la diferencia de dos cantidades, hallar la mayor y la menor.*

Res. y *Dem.* Como el espíritu analítico consiste en tomar por conocido lo mismo que buscamos, supondrémos halladas ya estas cantidades, y que sean por ejemplo x, z, de las cuales sea x la mayor y z la menor. Si á la suma dada la llamamos a, ó s por ser inicial de suma, y d á la diferencia, tendrémos planteado el problema cifrando las dos condiciones en las siguientes ecuaciones: $\left\{\begin{aligned}x+z&=s\\x-z&=d\end{aligned}\right.$

que determinando z por el método de sustitucion en la primera, será $z=s-x$; cuyo valor sustituido en la segunda da $x-s+x=d$ ó $2x=s+d$; de donde (§221) $x=\frac{s+d}{2}=\frac{s}{2}+\frac{d}{2}$; y sustituyendo este valor en el de z se tendrá $z=s-\frac{s+d}{2}=\frac{2s-s-d}{2}=\frac{s-d}{2}=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}$.

Los métodos particulares nos hubieran dado el valor de x inmediatamente, sumando las dos ecuaciones; pues resultaria $2x=s+d$, y $x=\frac{s+d}{2}=\frac{s}{2}+\frac{d}{2}$; y restando la segunda de la primera hubiéramos tenido $2z=s-d$, que da $z=\frac{s-d}{2}=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}$.

Despues de resuelta una cuestion por Álgebra se debe procurar traducir el resultado al lenguage vulgar, lo que nos suministra una regla práctica que nos puede servir para todos los casos de la misma especie. Así, traduciendo estos dos valores al lenguage vulgar, tenemos que el de x nos dice: que *la cantidad mayor es igual á la mitad de la suma* *mas la mitad de la diferencia; y la menor á la mitad de la suma ménos la mitad de la diferencia.*

De manera que si se nos pidiese hallar la edad de un padre y de un hijo en el supuesto de que ambas edades compusiesen 100 años, y el padre llevase á su hijo 30, sin necesidad de plantear la cuestion diríamos: la mitad de 100 es 50, la mitad de 30 es 15, sumando 50 y 15 será 65 la edad del padre que es la mayor. Y para hallar la del hijo que es la menor diríamos: 50 ménos 15 son 35 que seria la edad del hijo. Si querémos ahora verificar las condiciones, ó ver si los resultados cumplen ó satisfacen á las ecuaciones, sumarémos 65 con 35 y hallarémos 100; y restarémos 35 de 65 lo que nos dará 30; y por lo mismo vemos que quedan satisfechas las condiciones.

230 Cuestion 2.ª *Se pide un número tal, que si al quíntuplo de dicho número se le añade siete veces la duodécima parte del mismo número, y de todo esto se quitan 17 unidades, resulte dicho número mas 203 unidades.*

Res. y *Dem.* Sea x el número que busco, y tendré que $5x$ será su quíntuplo, por lo cual le pondré; despues tengo que escribir la palabra *se le añade*, la cual conduce á poner el signo $+$; despues lo que dice que se le debe añadir es *siete veces la duodécima parte del mismo número*; y como el número le hemos supuesto x, su duodécima parte será $\frac{1}{12}x$, y siete veces esta duodécima parte será $\frac{7}{12}x$; luego escribiendo $\frac{7}{12}x$ despues del signo $+$ tendrémos ya escrita esta circunstancia; despues sigue que si *de todo esto se quita*, cuya palabra conduce al signo $-$ que pondrémos, y á su derecha lo que se ha de quitar que es 17 unidades. Sigue despues en la cuestion, *resulte*, palabra que conduce al signo $=$, despues del cual pondrémos x, porque lo que ha de resultar es el mismo número; luego, el signo $+$ para escribir la palabra *junto*; y finalmente el 203. De manera que la cuestion traducida al lenguage algebráico está espresada por la ecuacion $5x+\frac{7}{12}x-17=x+203$;
en la cual para despejar x pasarémos primero todos los términos donde se halla la x al primer miembro, y al otro todos aquellos donde no se halla, de manera que será: $5x+\frac{7}{12}x-x=203+17$, ó $4x+\frac{7}{12}x=220$; y quitando el divisor se tendrá: $48x+7x=220\times12$, ó $55x=220\times12$; que dividiendo por 55 resulta por último

$$x=\frac{220\times12}{55}=\frac{20\times\cancel{11}\times12}{5\times\cancel{11}}=\frac{\cancel{5}\times4\times12}{\cancel{5}}=4\times12=48;$$

luego el número que busco es 48, el cual satisface á todas las condiciones pedidas.

231 Cuestion 3.ª *Hallar cuatro números tales que la suma de los tres primeros componga 50; que el primero junto con el séstuplo del cuarto sea igual al tercero; que la mitad del primero junto con el triplo del segundo sea igual al décuplo del cuarto; y que el tercio del primero sea igual á la mitad del segundo.*

Res. y *Dem.* Aquí se nos piden cuatro números, y para esto se nos dice que han de satisfacer á cuatro condiciones, por lo que vemos que el problema es determinado. Si llamamos á estos números u,x,y,z, esto es, al primero u, al segundo x, al tercero y, y al cuarto z, escribirémos estas cuatro condiciones en las cuatro ecuaciones siguientes:

$$u+x+y=50$$
$$u+6z=y$$
$$\frac{u}{2}+3x=10z$$
$$\frac{u}{3}=\frac{x}{2}$$

Empezarémos determinando, por ejemplo la u en la cuarta ecuacion, la cual, multiplicando el segundo miembro por 3, nos dará $u=\frac{3x}{2}$.

Sustituyendo este valor de u en la primera dará $\frac{3x}{2}+x+y=50$; que despejando la y da

$$y=50-\frac{3x}{2}x-x=50-\frac{3x}{2}-\frac{2x}{2}=50-\frac{5x}{2}.$$

Sustituyendo ahora el valor de y y de u en la segunda se tendrá $\frac{3x}{2}+6z=50-\frac{5x}{2}$, que da $6z=50-\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}=50-\frac{8x}{2}=50-4x$,

de donde $z=\frac{50-4x}{6}=\frac{25-2x}{3}$.

Sustituyendo en la ecuacion tercera en vez de u y de z sus valores, se convertirá en $\frac{\frac{3}{2}x}{2}+3x=10\times\frac{25-2x}{3}$, ó $\frac{3x}{4}+3x=10\times\frac{25-2x}{3}$;

y quitando los divisores se tendrá $9x+36x=40.(25-2x)=1000-80x$, ó $45x=1000-80x$; que pasando el $-80x$ al primer miembro y reduciendo, será $125x=1000$; de donde se saca $x=\frac{1000}{125}=8$, que será el valor del segundo número.

Y poniendo este valor de x en los sacados ántes de u, de z y de y, tendrémos $u=\frac{3x}{2}=\frac{3\times8}{2}=3\times4=12$, valor de primero;

$y=50-\frac{5x}{2}=50-\frac{5\times8}{2}=50-\frac{40}{2}=50-20=30$, valor del tercero;

$z=\frac{25-2x}{3}=\frac{25-2\times8}{3}=\frac{25-16}{3}=\frac{9}{3}=3$, valor del cuarto;

luego los cuatro números pedidos son 12, 8, 30 y 3, los cuales satisfacen á las cuatro condiciones propuestas.

232 Las cuestiones suelen venir desfiguradas con muchos adornos, y por lo mismo pondrémos algunas que son mui curiosas, y que para el que no entiende de esto vienen á ser enigmas.

Cuestion 4.ª *Encontró un gavilan á una bandada de palomas, y las saludó diciendo: bien venida sea la bandada de las cien palomas, y una le respondió: aunque no vamos cien palomas, sin embargo, con estas, otras tantas como estas, la mitad de estas, la cuarta parte de estas y tu, gavilan, componemos ciento cabal*: se pregunta cuantas palomas iban?

Para esto señalaré con x el número de palomas, y veré que la palabra *estas* la debo escribir con x, la de *otras tantas como estas* tambien con x, pero poniendo en medio el signo $+$; porque aunque aquí no hai ninguna palabra que conduzca á dicho signo, se halla sin embargo una coma que hace los oficios de la conjuncion (y), que se halla omitida por la figura que llaman los retóricos *asíndeton*; luego, la *mitad de estas* será $\frac{1}{2}x$, la *cuarta parte de estas* será $\frac{1}{4}x$, y el gavilan como es uno pondrémos 1; despues de lo cual escribirémos $=$ porque es el signo á que conduce la palabra *componemos*, y luego el 100; de manera que la cuestion está planteada en esta ecuacion $x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100$; en la cual despejando x hallarémos (223) que es igual á 36; por consiguiente 36 es el número de palomas que habia en la bandada, cuyo número cumple con las condiciones que se pedian.

233 Cuestion 5.ª *Preguntado Artemidoro, filósofo, que edad tenia Alejandro Magno, dió, segun el obispo Caramuel, la respuesta siguiente*:

Preguntaba Diodoro
Embajador del príncipe de Egipto,
Que edad tenia el Macedon invicto:
Y luego Artemidoro
Le responde ingenioso:
Dos años tiene mas el belicoso
Rei que su camarada
Efestion, cuyo padre
Cuatro mas que los dos enumeraba,
Y el padre de Alejandro
Cuando noventa y seis giros de Apolo
Los años de estos tres contaba solo.

Que en pocas palabras fué la respuesta que Alejandro tenia dos años mas que Efestion; que el padre de este escedia en cuatro años á la edad de entrambos; y el padre de Alejandro, contando ya noventa y seis años, tenia tanta edad como los tres juntos.

Por lo cual para hallar la edad de Alejandro la llamaré u, x la de Efestion, z la del padre de Efestion, la del padre de Alejandro la sabemos pues dice que es 96; luego la cuestion quedará planteada en las tres ecuaciones siguientes (A):

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} u=x+2 \\ z=u+x+4 \\ u+x+z=96 \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda el valor de u sacado de la primera, será: $z=x+2+x+4=2x+6$;

y sustituyendo estos dos valores en la tercera será:

$$x+2+x+2x+6=96,\ \text{ó}\ 4x+8=96,$$

que da: $4x=96-8=88$, y $x=\frac{88}{4}=22$, que será la edad de Efestion; la de Alejandro será: $u=x+2=22+2=24$;
y la del padre de Efestion $z=2x+6=2\times22+6=44+6=50$.

Esc. Al resolver una cuestion se debe procurar ejecutarlo con el menor número posible de incógnitas, en lo cual consiste la elegancia y sencillez de la resolucion; nosotros hemos puesto hasta aquí las que debe seguir todo principiante, y no las que puede dar cuando ya sabe; pero como conviene que se acostumbren á lo mejor, vamos á resolver esta cuestion con una sola incógnita.

Para esto señalarémos con x la edad de Alejandro, y será $x-2$ la de Efestion; y como la del padre de Efestion debia equivaler á las dos juntas mas 4, será $x+x-2+4$ ó $2x+2$; y como todas tres habian de componer la edad de Filipo, padre de Alejandro, que era de 96, tendrémos cifrada esta circunstancia en la ecuacion $x+x-2+2x+2=96$, ó $4x=96$ que da $x=24$, que es la edad de Alejandro; de donde se deduce que la de Efestion será 22, y la del padre de Efestion 50.

234 Cuestion 6.ª *Preguntó Hércules á Augéo, rei de los Eleos, cuantas vacas tenia, y la respuesta fué un enredado enigma que propuso el obispo Caramuel en un certámen matemático, en la forma siguiente*:

Hércules vino á visitar á Augéo,
Que era mui opulento,
Y teniendo deséo
De robarle sus vacas ciento á ciento,
Pregunta con cuidado
El número y lugar de su ganado.
Yo, señor, dice el venerable anciano
Brevemente respondo:
Que en aquel rico llano,
Cuya orla es oro y esmeralda el fondo,
A la márgen de Alféo
La mitad de mis vacas pacer veo;
La octava parte de Saturno el monte
Turba con sus bramidos;
Y en distante horizonte
La duodécima tiene destruidos
Los valles, que es mui fiera
En el monte, en el prado, en la ribera;
La vigésima parte
En Elide segura se apacienta;
De Arcadia ya se aparta
La trigésima; y corren por mi cuenta
Cincuenta, cuyas voces
Hoi son suaves y mañana atroces.
Mover la clava, pero no la pluma,
Sabe el hijo de Alcmena,
Y así se queda sin saber la suma
Del ganado, que en los montes suena;
Tu que eres mas esperto
El número descubre que he encubierto.

Esta cuestion despojada de todos sus adornos, está reducida á encontrar un número tal, que restando de él su mitad, su octava parte, su duodécima, su vigésima y su trigésima parte, queden 50. Por lo que suponiendo x el número que se busca, tendré planteada la cuestion en esta ecuacion: $x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{12}x-\frac{1}{20}x-\frac{1}{30}x=50$;
ó quitando los divisores (para lo cual basta multiplicar la ecuacion por 120, que es el mínimo múltiplo (80) de todos los denominadores) será:

$$120x-60x-15x-10x-6x-4x=50\times120,$$

$$\text{ó}\ 25x=6000\ \text{que da}\ x=\tfrac{6000}{25}2=40.$$

Luego el número de vacas que tenia Augéo era 240; de las cuales habia 120 en Alféo, 30 en el monte de Saturno, 20 en los otros valles, 12 en Élide, 8 en Arcadia, y las 50 restantes en su propia casa.

235 Cuestion 7.ª Sobre el viage de Homero.

Homero, poeta célebre de Grecia, deseoso de saber cual fuese su patria, consultó á Apolo en Délfos. No quiso el oráculo sacarle de la duda; pero le dió para su itinerario cierto número de monedas. Partióse con ellas á Sycion, ciudad antigua del Peloponeso, donde gastó la mitad de lo que habia recibido; pero cantando sus versos mendigó de puerta en puerta 20 monedas. Pasóse á Árgos, donde habiendo gastado la cuarta parte de lo que traia, cantando en la plaza mayor sus versos, recogió del pueblo 15 monedas; de allí pasó á la isla de Salamina, donde gastó el tercio de su dinero; pero con su acostumbrado ejercicio recibió del pueblo 16 monedas. Llegó á Atenas donde consumió el sesto de lo que tenia, y oyéndole cantar un caballero le dió 18 monedas. Salióse de Atenas, y habiéndose embarcado se volvió con viento favorable al lugar de su habitacion; y despues de pagar 5 monedas de flete se halló con doblado dinero del que le dió Apolo. Pídese cuanto le dió este en Délfos.

Llamando x el número de monedas que le dió Apolo, se tendrá que habiendo gastado la mitad en Sycion solo le quedaba $\frac{1}{2}x$: y como allí ganó 20 mas, salió de Sycion con $\frac{1}{2}x+20$; ó con $\frac{x+40}{2}$; en Árgos gastó la cuarta parte de esto, que es $\frac{\frac{x+40}{2}}{4}=\frac{x+40}{8}$, por consiguiente le quedó solamente $\frac{x+40}{2}-\frac{x+40}{8}=\frac{4x+160-x-40}{8}=\frac{3x+120}{8}$; y como allí recibió 15 monedas, salió de Árgos con $\frac{3x+120}{8}+15$ monedas, ó con $\frac{3x+120+120}{8}=\frac{3x+240}{8}$.

En Salamina gastó el tercio de lo que tenia, esto es, $\frac{\frac{3x+240}{8}}{3}=\frac{3x+240}{3\times8}=\frac{x+80}{8}$, luego le quedaban $\frac{3x+240}{8}-\frac{x+80}{8}=\frac{3x+240-x-80}{8}=\frac{2x+160}{8}=\frac{x+80}{4}$; y como allí le diéron 16, salió de Salamina con $\frac{x+80}{4}+16$ monedas ó con $\frac{x+80+64}{4}=\frac{x+144}{4}$.

En Atenas consumió el sesto de lo que tenia, esto es, $\frac{\frac{x+144}{4}}{6}=\frac{x+144}{4\times6}=\frac{x+144}{24}$, luego le quedaban $\frac{x+144}{4}-\frac{x+144}{24}=\frac{6x+6\times144-x-144}{24}=\frac{5x+5\times144}{24}=\frac{5x+720}{24}$; pero como allí recibió 18,

salió de Atenas con $\frac{5x+720}{24}+18$, y pagando las 5 monedas del flete se hallaba con $\frac{5x+720}{24}+13=\frac{5x+1032}{24}$; como esto debe ser el duplo de lo que le dió Apolo, que fué x, se tendrá la ecuacion $\frac{5x+1032}{24}=2x$. que quitando el divisor será: $5x+1032=48x$, de donde $48x-5x=1032$, ó $43x=1032$, y $x=\frac{1032}{43}=24$.

Luego Apolo le dió 24 monedas.

Esc. Hubiéramos podido sacar este resultado con mas sencillez suponiendo que el número pedido era $120x$; pues entónces le quedáron en Sycion $60x$, y sacó de allí $60x+20$; cuya cuarta parte es $15x+5$, y y por consiguiente le quedaban $45x+15$, que junto con los otros 15 que le diéron en Árgos salió de allí con $45x+30$; cuya tercera parte es $15x+10$, y por consiguiente le quedaban, gastado esto, $30x+20$, que junto con los 16 que le diéron en Salamina componen $30x+36$, con que salió de allí; y habiendo consumido en Atenas la sesta parte de lo que le quedaba ó $5x+6$, salió de allí con $25x+30$, mas los 18 que allí le diéron, esto es, con $25x+48$; que despues de pagadas las 5 del flete le quedaban $25x+43$ que debia ser el duplo de lo que le dió Apolo ó de $120x$; luego venimos á parar á esta ecuacion $240x=25x+43$, ó $240x-25x=43$, ó $215x=43$, que da $x=\frac{43}{215}=\frac{1}{5}$, y por consiguiente el dinero que le dió Apolo, que era $120x$, será $120x=120\times\frac{1}{5}=24$ que es lo mismo que ántes.

236 Cuestion 8.ª *Habia en el mar cierto número de Ninfas, llamadas Galatéas; y en la ribera otras llamadas Napéas: consultado Apolo para que declarase el número de unas y otras, respondió lo que refiere el obispo Caramuel en los versos siguientes:*

Entre líquida plata
Descubrí no sé cuantas Galatéas,
Y donde se remata
La selva oscura, un coro de Napéas:
Tétis á todas en el mar retrata;
Bellas aquellas eran, estas feas;
En número no iguales,
Porque en especie eran desiguales.
No pudiendo contarlas
Consulté á Apolo que en el mar lucia,
Y doradas guirnaldas
De perlas desatadas les tejia;
Y el Dios Intonso para mas honrarlas
No me quiso decir lo que sabia;
Pero al son de las olas
Cantó elocuente estas palabras solas.
Si dejan sus cristales
tres Ninfas bellas, que á la selva llama
La hermosísima Pales,
Adornada de flores no de escama,
En número serán todas iguales;
Pero si viendo que Triton las ama
Al mar van tres Napéas
Serán doblado mas las Galatéas.

Es lo mismo que hallar dos números tales que si del mayor se quitan tres y se añaden al menor, queden iguales; y si del menor se quitan tres

y se añaden al mayor, resulte el duplo de lo que queda del menor. Si llamamos al número mayor x, y z al menor, tendrémos planteada la cuestion en las dos ecuaciones siguientes: $\begin{cases} x-3=z+3 \\ x+3=2(z-3) \end{cases}$
que despejando x en la primera tendrémos: $x=z+3+3=z+6$;
cuyo valor sustituido en la segunda dará: $z+3+6=2z-6$;
de donde sacarémos: $z-2z=-6-6-3=-15$, ó $z=15$;
cuyo valor sustituido en el de x da $x=z+6=15+6=21$;
luego las Galatéas eran 21, y las Napéas 15.

En efecto; si de las Galatéas pasan tres á las Napéas quedarán aquellas en 18 y estas se convertirán en 18, como indicaba la cuestion; y si de las Napéas van 3 á las Galatéas, estas se convertirán en 24, y aquellas quedarán en 12, que es la mitad de 24, como indicaba la cuestion.

Esc. Pondrémos aquí algunos problemas que he tenido la satisfaccion de ver resueltos con mucha elegancia y exactitud, en los exámenes que en virtud de órden del Gobierno he presenciado en la Academia militar de la isla de Leon (*).

1.º *Forma en batalla un general su ejército que es de 36000 hombres en tres divisiones, de modo que la del centro tenga 3000 hombres mas que la de la derecha, y esta 1500 mas que la de la izquierda; se pregunta cuantos habrá de tener cada division?*

Traduccion al lenguage algebráico:

$$x+(x+1500)+(x+1500+3000)=36000.$$

Resultado: Division de la izquierda. 10000
Division de la derecha.. 11500
Division del centro.... 14500

2.º *Ha habido una accion entre dos divisiones de igual fuerza; por nuestra parte se perdiéron 200 hombres, y el enemigo perdió 800, habiendo quedado nosotros con cuádrupla fuerza; se pregunta cual era la de ambas partes al principio de la accion?*

Plantéo. $(x-800)4=x-200$. Resultado: 1000 hombres.

3.º *Un coronel para estimular á sus soldados, les ofrece dar 5 reales por cada vez que den al blanco; pero que cada soldado debe dejar en el fondo de su compañía 3 reales por cada vez que no le dé: despues de 12 tiros ajustan cuentas, y se halla que el coronel debe á sus soldados 28 reales; se pregunta cuantas veces diéron al blanco, y cuantas no.*

Plantéo: $5x-(12-x)3=28$. Resultado: diéron 8 veces en el blanco.

(*) *Desde la primera vez que tuve esta honrosa comision, conocí las ventajas que resultarian á la nacion de proteger estos establecimientos: y tengo la satisfaccion de haber contribuido con los demas co-examinadores á inclinar el ánimo del Gobierno á un fin tan importante. La espresada Academia se halla ahora establecida en Granada.*

4.º *Separa un comerciante de su fondo 1000 duros para gastos de casa, &c.; y al fin del primer año halla que su caudal se aumenta un tercio. Sigue por espacio de tres años, separando 1000 duros y aumentándosele un tercio su caudal, y halla que al fin del tercer año tiene duplo fondo que al principio; se pregunta cuanto tenia el comerciante el primer año?*

Haciendo 1000 duros $=a$, y llamando x el caudal que tenia,

al cabo del primer año tendria.......... $x-a+\frac{x-a}{3}=\frac{4x-4a}{3}$;

al cabo del 2.º .... $\frac{4x-4a}{3}-a+\frac{4x-4a}{9}-\frac{a}{3}=\frac{16x-28a}{9}$;

al cabo del 3.º .... $\frac{16x-28a}{9}-a+\frac{16x-28a}{27}-\frac{a}{3}=\frac{64x-148a}{27}$;

y como esto ha de ser igual con $2x$ será: ...... $2x=\frac{64x-148a}{27}$;

de donde sale $x=14800$ duros, que será el capital que tenia al principio del primer año.

5.º *Hallándose acantonados dos ejércitos, y tratándose de poner en movimiento, con el fin de entrar en campaña en una misma provincia, distando entre sí dichos ejércitos 68 leguas, el primero sale tres dias ántes que el segundo, y anda 6 leguas al dia, y este cuatro: se pregunta á que distancia de la primera ciudad se encontrarán?*

Representando por x lo que andaba el primero, y por z lo que andaba el segundo, y restando de 68 lo que andaba en los tres dias que se anticipó el primero queda 50, y se plantéa del modo siguiente:

$$x+z=50$$

$$\frac{x}{6}=\frac{z}{4}$$

Y resulta que el primero anduvo 30 leguas (y 18 que llevaba andadas son 48) y 20 el segundo.

6.º *Queriendo un labrador premiar á una partida de soldados que le habia defendido su casa de la invasion del enemigo, trata de repartirles una porcion de pesetas; y halla que si á cada soldado da 20 pesetas le sobran 25, y si da á razon de 25 pesetas le faltan 10; cuantas eran las pesetas, y cuantos los soldados?*

Si x representa el número de soldados y z el de las pesetas, se tendrá: $\left.\begin{matrix} 20x+25=z \\ 25x-10=z \end{matrix}\right\}$ que dan $5x-35=0$, de donde $\begin{cases} x=7 \text{ soldados} \\ \text{y } z=165 \text{ pesetas.} \end{cases}$

7.º *Un brigadier tiene tres batallones á su disposicion para asaltar una plaza con una parte de ellos; uno es de españoles, otro de ingleses y otro de portugueses. Les ofrece 901 doblones en esta forma: que á* *cada soldado de los que monten la brecha les dará un doblon, y los restantes se repartirán á los demas. Se halla que dando el asalto los españoles, les toca á los demas á medio doblon; si le dan los ingleses, toca á los demas $\frac{1}{3}$ de doblon; y si le dan los portugueses, les toca á los demas $\frac{1}{4}$ de doblon. Se pide que número de soldados tenia cada batallon?*

Si por x espresamos los españoles, por z los ingleses, y por u los portugueses, se planteará el problema del modo siguiente:

$$x+\frac{z+u}{2}=901,\qquad z+\frac{x+u}{3}=901,\qquad u+\frac{z+x}{4}=901.$$

De donde resultan 265 españoles, 583 ingleses, y 689 portugueses.

Terminaré este capítulo con algunos otros ejemplos sobre que conviene se ejerciten los principiantes, dejando para el apéndice 5.º el hallar las fórmulas generales para el despejo de las incógnitas en las ecuaciones de 1.er grado.

8.º *Aquiles camina diez veces mas de prisa que una tortuga que le lleva una legua de delantera, se pregunta, ¿á que distancia se encontrarán?*

Espresando por x el camino que Aquiles haya corrido cuando alcance á la tortuga, esta habrá corrido una legua ménos, esto es $x-1$, pues que le lleva una legua de delantera; y como habrá corrido un camino diez veces menor, se tendrá $x=10(x-1)$, ó $x=10x-10$, que da $9x=10$, y $x=\frac{10}{9}$.

Luego, en habiendo andado Aquiles $\frac{10}{9}$ de legua ó 1 legua y $\frac{1}{9}$ de otra, encontrará á la tortuga.

Cuando los Griegos se complacian en envolver la verdad con paralogismos y razonamientos falsos, Zenon formó acerca de este problema el sofisma siguiente: »Cuando Aquiles haya corrido la primera legua, la tortuga habrá andado la centésima parte de otra legua, y así sucesivamente: luego Aquiles no alcanzará jamas á la tortuga;" y por lo que acabamos de manifestar aparece la falsedad de esta consecuencia.

9.º Si las ecuaciones fuesen $\left\{\begin{array}{l}5x+7z=43\\11x+9z=69\end{array}\right\}$ se hallaria $x=3$, y $z=4$.

10.º Si se tuviese $\left\{\begin{array}{l}x+z=n\\ax-bz=c\end{array}\right\}$ se hallaria $x=\frac{nb+c}{a+b}$, $z=\frac{an-c}{a+b}$.

11.º Si se tuviese $\left\{\begin{array}{l}8x-21z=33\\6x+35z=177\end{array}\right\}$ se hallaria $x=12$, $z=3$.

12.º Si se tuviese $\left\{\begin{array}{l}5x-6z+4u=15\\7x+4z-3u=19\\2x+z+6u=46\end{array}\right\}$ se hallaria $x=3$, $z=4$, $u=6$.

13.º Si se tuviese $\left\{\begin{array}{r}2x-3t+2z=13\\4u-2x=30\\4t+2z=14\\5t+3u=32\end{array}\right\}$ se hallaria $x=3$, $z=5$, $t=1$, $u=9$.

14.º Si se tuviese $\left\{\begin{array}{r}7x-2z+3u=17\\4r-2z+t=11\\5r-3x-2u=8\\4r-3u+2t=9\\3z+8u=33\end{array}\right\}$ se hallaria $\left\{\begin{array}{l}x=2\\r=4\\z=3\\t=1\\u=3\end{array}\right.$

Por último nos propondrémos el siguiente problema que manifieste ser imposible su resolucion en los términos que viene propuesto, y que para que satisfaga á él es necesario que se varie el modo de enunciarle.

15.º *Hallar dos números cuya suma sea 7 y su diferencia 19.*

Llamando x al menor, el mayor será $x+19$; y como los dos han de componer 7, se tendrá $2x+19=7$; que da $x=-6$ para el menor, y 13 para el mayor.

Aunque estos números satisfacen algebráicamente á la cuestion, sin embargo, manifiestan el descuido que se ha padecido al proponer el problema; porque desde luego se advierte que debiendo ser siempre la diferencia de dos números, menor que el mayor, con mas razon deberá ser menor que la suma; y al enunciarle hemos supuesto que la suma es 7 y la diferencia 19. Por lo que si queremos que el resultado venga espresado en números positivos deberémos variar el modo de enunciar la cuestion, diciendo que *la suma sea* 19 *y la diferencia* 7; en cuyo caso el problema quedará planteado en la siguiente ecuacion, $2x+7=19$, que da $x=6$; y el número mayor será $6+7=13$: y los números 6 y 13 satisfacen ahora á la cuestion en los mismos términos que viene propuesta.

De la elevacion al cuadrado, y estraccion de la raiz cuadrada, de las cantidades polinomias y de las cantidades numéricas.

237 Ya hemos dicho (197) que se llama *cuadrado* el producto que resulta de multiplicar una cantidad por ella misma; de manera que multiplicando $a+b$ por $a+b$ tendrémos el cuadrado de $a+b$, como aquí se presenta: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$.

Traduciendo este resultado al lenguage vulgar, quiere decir que el cuadrado de una cantidad que se compone de dos partes, consta de tres partes, á saber: *de cuadrado de primera parte* (esto es lo que nos dice aquí a^2), *de duplo de primera por segunda* (esto es lo que quiere decir $2ab$) *y finalmente del cuadrado de segunda* (que es lo que espresa b^2).

Á todas estas espresiones que nos suministran una regla para la práctica se les da el nombre de *fórmulas*; y si se nos preguntase aisladamente que es una *fórmula*, diríamos que era *una espresion analítica, en la que está cifrado el modo de ejecutar una operacion, ó alguna propiedad de una cantidad*; y se dice que es espresion analítica, porque toda fórmula debe ser una ecuacion tal que en el primer miembro esté indicada la operacion que se ha de ejecutar, ó se ponga la propiedad que se dice en el segundo.

Si la segunda parte del binomio hubiera tenido el signo —, hubiéramos sacado $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$; y solo tendríamos que enmendar en la regla, el decir *ménos el duplo de primera por segunda*, de manera que tendrémos reunidos los dos resultados en $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

Ahora, por medio de la fórmula $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 (A)$, podemos elevar al cuadrado cualquiera otra cantidad, como v. g. $c^2+d^2+4m^3$; para esto harémos igual con a, ó tomarémos por primera parte, toda la cantidad ménos el último término, esto es, c^2+d^2, é igual con b dicho último término $4m^3$; y haciendo las sustituciones en la fórmula (A) tendrémos $(c^2+d^2+4m^3)^2=(c^2+d^2)^2+2(c^2+d^2)\times 4m^3+16m^6$; ahora efectuarémos el cuadrado de c^2+d^2 por medio de la misma fórmula (A) ó de la regla que hemos deducido, y ejecutando la operacion indicada en el segundo término se tendrá por último:

$$(c^2+d^2+4m^3)^2=c^4+2c^2d^2+d^4+8c^2m^3+8d^2m^3+16m^6.$$

Conviene adquirir mucha destreza en elevar al cuadrado cantidades de muchos términos, y por lo mismo nos propondrémos elevar el polinomio $a+b+c-d+e-f+$ &c. al cuadrado.

Aquí podríamos tomar por primera parte todos los términos ménos el último, y ejecutar esta operacion; despues para efectuar el cuadrado de esta primera parte, volver á tomar por primera parte todos los términos suyos ménos el último, y así sucesivamente; pero como esto es demasiado fastidioso en la práctica, lo que ejecutarémos desde luego es: *cuadrar el primer término, luego multiplicar el duplo del primer término por cada uno de los que le siguen; cuadrar el segundo término, y multiplicar el duplo de dicho segundo término por todos los que le siguen; y ejecutar lo mismo con todos hasta llegar á cuadrar el último*; de modo que $(a+b+c-d+e-f+$ &c.$)^2=a^2+2ab+2ac-2ad+2ae-2af+$ &c. $+b^2+2bc-2bd+2be-2bf+$ &c. $+c^2-2cd+2ce-2cf+$ &c. $+d^2$...... $-2ed+2df-$ &c. $+e^2-2ef+$ &c. $+f^2+$ &c.

Esta práctica está fundada en que tomando por primera parte la a y por segunda todos los demas, el cuadrado se compondrá de las tres partes dichas; y por consiguiente deberémos poner el cuadrado del primer término; despues el duplo del primer término por todo lo que sigue, y luego el cuadrado de todo lo que sigue despues del primero; que se compondrá del cuadrado del segundo término, del duplo de dicho segundo término por todo lo que sigue, y del cuadrado de todo lo que sigue, &c.

238 Para elevar al cuadrado una cantidad numérica, observarémos que si el número es dígito tenemos ya sabido su cuadrado, puesto que está en la tabla pitagórica (57); y así, pues que
$1^2=1\times1=1$; $2^2=2\times2=4$; $3^2=3\times3=9$; $4^2=4\times4=16$; $5^2=5\times5=25$; $6^2=6\times6=36$; $7^2=7\times7=49$; $8^2=8\times8=64$; $9^2=9\times9=81$,

podemos obtener inmediatamente el cuadrado de un número dígito.

Ahora, si es compuesto, le descompondrémos en dos partes tales que la segunda esté representada por las unidades simples que contenga, y la primera por todo lo demas del número que no sean unidades; de manera que si querémos elevar el 47 al cuadrado le descompondrémos en las dos partes dichas, y será $47=40+7$; y suponiendo $40=a$ y $7=b$, tendrémos por medio de la fórmula (A):

$$47^2=(40+7)^2=40^2+2\times40\times7+7^2=1600+560+49=2209;$$

donde advertimos que el cuadrado de todo número que se compone de decenas y unidades, consta de tres partes, á saber: *de cuadrado de decenas, de duplo de decenas por unidades, y de cuadrado de unidades.*

Como el menor número de decenas que hai es una decena ó 10, y el cuadrado de 10 es 100, resulta que el cuadrado de decenas lo ménos que ha de espresar es centenas; el duplo de decenas por unidades lo ménos decenas, porque decenas multiplicadas por un número cualquiera ha de dar decenas en el producto; y finalmente el cuadrado de las unidades espresará lo ménos unidades.

{ Ademas, resulta de lo espuesto (89... 3.º) que el cuadrado de un número constará del duplo de guarismos de su raiz cuando el guarismo de especie superior sea mayor que 3; y de este mismo duplo ménos 1 cuando dicho guarismo de especie superior sea 3, 2 ó 1. }

239 Si nos propusiéramos elevar al cuadrado el número 436, le descompondríamos en $430+6$; y la fórmula (A) nos dará:

$$436^2=(430+6)^2=430^2+2\times430\times6+6^2.$$

Ahora, para elevar el 430 al cuadrado por la misma fórmula, le descompondrémos en $400+30$, y tendrémos
$430^2=(400+30)^2=400^2+2\times400\times30+30^2$;
de modo que $436^2=(400+30+6)^2=400^2+2\times400\times30+30^2+2\times430\times6+6^2=160000+24000+900+5160+36=190096$.

Mas fácil nos hubiera sido el ejecutar directamente la multiplicacion del 436 por el 436, y del 47 por el 47; pero hemos preferido el irlo así indicando, porque esto nos facilitará hallar las reglas para retroceder del cuadrado á la raiz; para lo cual observarémos que el *cuadrado de las centenas está desde el quinto guarismo en adelante; el duplo de las centenas por las decenas desde el cuarto en adelante* &c.; y si el número contuviese ademas millares, el cuadrado de los millares se hallaria desde el séptimo guarismo en adelante; y así sucesivamente.

240 Con estas observaciones tenemos ya lo suficiente para estraer la raiz cuadrada de un número; para lo cual establecerémos la siguiente regla: *divídase el número propuesto en períodos de á dos guarismos empezando por la derecha, y no le hace que el último período contenga solo un guarismo; á su derecha se colocan las mismas rayas que para dividir; se ve en este período último de la izquierda cual es el mayor cuadrado contenido, y su raiz se pone en las rayas; esta raiz se cua-*

dra, y el cuadrado se resta de dicho período; al lado de la resta se baja el período siguiente, y se separa con una coma el guarismo de la derecha; lo que queda á la izquierda de la coma se divide por el duplo de la raiz hallada, que se coloca para hacer la operacion con sencillez debajo de lo separado con la coma; el cociente que resulta se pone en la raiz á la derecha del guarismo anterior, al lado del duplo de la raiz hallada ántes, y debajo de sí mismo; se multiplica el duplo de la raiz hallada ántes, junto con el cociente, por el mismo cociente, y el producto se resta del residuo anterior, junto con el período que se le añadió; al lado de la resta que resulte se baja el período siguiente, se separa el último guarismo, y lo que queda á la izquierda se divide por el duplo de toda la raiz hallada; y así se continúa hasta que no haya mas períodos que bajar; en cuyo caso, si la última resta es cero es señal de que el número tiene raiz exacta; y sino, es señal de que no la tiene. Si en este caso se quiere continuar por decimales, se añadirán á la resta dos ceros, se separará uno, y se dividirá lo que quede á la izquierda por el duplo de toda la raiz hallada, y el cociente se pondrá en la raiz despues de la coma; luego, se continuará todo lo que se quiera añadiendo dos ceros por cada guarismo que se intente sacar.

Ejemplo: propongámonos estraer la raiz cuadrada del número 190096, lo primero que harémos será dividirle en períodos de á dos guarismos cada uno, y despues tiraré las rayas como aquí se presenta:

```
1 9,0 0,9 6 | 436
1 6         |-----
-----
0 3 0,0
    8 3
      3
-------
  2 4 9
-------
  0 5 1 9,6
      8 6 6
          6
-----------
  - 5 1 9 6
    -------
    0 0 0 0
```

Luego, veré cual es el mayor cuadrado contenido en 19 que es el primer período de la izquierda; y repasando los cuadrados de los números dígitos veo que 19 está entre 16, cuadrado de 4, y 25 cuadrado de 5; luego el mayor cuadrado que está contenido en 19 es 16, cuya raiz es 4 que pondrémos en la raiz, y su cuadrado 16 debajo del 19; tirarémos por la parte inferior una raya, y ejecutarémos la resta, la que nos dará 3; al lado de la resta 3 bajarémos el siguiente período 00, separarémos el último guarismo con una coma, y dividirémos lo que quede á la izquierda de esta, que es 30, por 8, duplo de la raiz hallada, que hemos puesto debajo de lo separado con la coma; el cociente 3 que resulta de dividir 30 por 8 le pondrémos en la raiz á la derecha del 4, tambien le pondrémos al lado del 8 y tambien debajo; multiplicarémos el 83 por el cociente 3 que hai debajo, y restarémos el producto 249 de lo que teníamos arriba que era 300. Al lado de la resta 51 bajarémos el período siguiente 96, separarémos el último guarismo 6, y lo que quede á la izquierda lo dividirémos por el duplo de toda la raiz hallada que es 86; el cociente que nos resulte de dividir 519 por 86 (que le hallarémos di-

vidiendo el 51 por 8) es 6, que puesto en los tres parages, y hecha la multiplicacion del 866 por 6, nos resulta 5196; que restados de los 5196 que teníamos arriba, nos sale 0; y por consiguiente tenemos ejecutada nuestra operacion, la cual nos da un resultado exacto.

Para demostrar esta regla observarémos en primer lugar, que inmediatamente que vemos que el número consta de mas de dos guarismos, inferimos que su raiz tendrá por precision mas de uno; porque el mayor número dígito es 9, que tiene por cuadrado 81, el cual se escribe solo con dos guarismos. Constando la raiz de mas de un guarismo, tendrá decenas y unidades, y por consiguiente en el número propuesto están contenidas las tres partes (238) que constituyen el cuadrado; y como el cuadrado de las decenas está desde el tercer guarismo en adelante, para hallar las decenas no tendrémos que atender de ningun modo á los dos últimos guarismos; y por lo mismo los separamos con la coma. Si lo que queda á la izquierda de la coma se compone de mas de dos guarismos, es señal de que las decenas de la raiz que buscamos están espresadas por un número lo ménos de dos guarismos; luego la raiz contendrá centenas, cuyo cuadrado se ha de hallar desde el quinto guarismo en adelante; y por lo mismo separarémos otros dos guarismos con la coma ademas de los dos separados ántes. Ahora, si lo que quedase á la izquierda tuviese mas de dos guarismos, era señal de que las centenas de la raiz estaban representadas por mas de uno; y por lo mismo volveríamos á separar otros dos guarismos, y así sucesivamente; de manera que dado un número conocerémos los guarismos que ha de tener su raiz, pues por cada período debemos tener un guarismo.

Ahora, en el primer período de la izquierda está el cuadrado del guarismo de especie superior de la raiz; luego viendo cual es el mayor cuadrado contenido en él, su raiz será el primer guarismo de la raiz que se busca.

Como en los dos primeros períodos de la izquierda está el cuadrado de los dos guarismos de especie superior de la raiz, deberá haber el cuadrado de la primera parte, el duplo de la primera por la segunda, y el cuadrado de la segunda; de donde resulta que si del primer período se resta el cuadrado del primer guarismo de la raiz, y á su lado bajamos el segundo período, en esto nos quedarán las otras dos partes; que contrayéndonos al ejemplo, en la resta 3 junto con el período 00 tenemos el duplo de las centenas por las decenas, y el cuadrado de las decenas; pero el duplo de las centenas por las decenas ha de espresar millares (239), luego este duplo se ha de hallar desde los millares en adelante; por consiguiente no estará en el cero último que espresa centenas, y por esta causa le separarémos con la coma. En el 30 que nos queda se halla dicho duplo de centenas por decenas, pero si un producto le dividimos por uno de los factores el cociente será el otro factor; luego si el 30, que es donde se halla el producto del duplo de las centenas por las decenas, le dividimos por el duplo de las centenas halladas, el cociente espresará las decenas de la raiz, y por lo mismo las pondrémos al lado de las centenas.

Ahora, como en el 300 no solo se hallaba el duplo de centenas por decenas y el cuadrado de decenas, sino tambien algunas centenas que nos pueden haber resultado del duplo de las partes puestas en la raiz por las unidades que aun no conocemos, para sacar esto que nos queda ponemos el cociente 3 al lado del duplo 8 debajo del mismo 3; se hace la multiplicacion del 3 por el 3, lo que nos dará el cuadrado de las decenas, y al multiplicar el 8 por el 3 formamos el duplo de las centenas por las decenas; luego si estos dos productos parciales que reunimos al mismo tiempo que hacemos la multiplicacion, los quitamos del 300, la resta será la parte que queda del duplo de las centenas y decenas por las unidades, que juntas con el último período contendrá ademas el cuadrado de las unidades; pero el conjunto de centenas y decenas le podemos considerar como un número de decenas nada mas: y así es, que al formar el cuadrado en el término $2\times430\times6$ no descompusimos el 430 en $400+30$, porque 430 son 43 decenas; luego podemos decir que en lo que nos queda está el duplo de todas las decenas por las unidades; pero el duplo de decenas por unidades ha de estar desde las decenas en adelante, luego separando el último guarismo hallarémos en lo demas dicho duplo; por consiguiente si lo que queda á la izquierda lo dividimos por el duplo de todas las decenas, que es el duplo de toda la raiz hallada, el cociente espresará las unidades; y despues deberémos formar las dos partes por la misma razon que ántes.

Al ejecutar la operacion de dividir lo separado á la izquierda de la coma por el primer guarismo del duplo de la raiz hallada, suele ocurrir el que pongamos en la raiz un guarismo mayor de lo que corresponde; lo cual se conocerá si despues de hecha la multiplicacion, el producto fuese mayor que la resta junta con su período. El poner de ménos en la raiz no ocurre á no ser que sea por distraccion, y conocerémos si se le ha puesto de ménos, siempre que la resta que quede sea igual ó mayor que el duplo de la raiz hallada junto con la unidad.

241 Esto que acabamos de decir está fundado en esta proposicion general: *los cuadrados de dos números que se diferencian en una unidad, se diferencian en el duplo del menor mas la unidad.*

Para demostrarla sea el número menor propuesto a, y el otro que se ha de diferenciar en una unidad será $a+1$, cuyos cuadrados son el de a, a^2, y el de $a+1$, $(a+1)^2=a^2+2a\times1+1^2=a^2+2a+1$, y la diferencia será: diferencia $=(a+1)^2-a^2=a^2+2a+1-a^2=2a+1$; resultado que espresa la proposicion enunciada.

De esta proposicion nos podemos valer para formar con suma prontitud los cuadrados de los números que solo se vayan diferenciando en una unidad; por ejemplo, los de 9, 10, 11, 12, &c. Hallarémos el primero diciendo: 9 por 9 son 81; ahora dirémos: 2 por 9 son 18 y 1 son 19, que añadido al 81 cuadrado de 9, nos dará 100 cuadrado de 10; para hallar el de 11 dirémos: 2 por 10 son 20 y 1 son 21, que añadido á 100 cuadrado de 10, son 121 cuadrado de 11; para el de 12 dirémos: 2 por 11 son 22 y 1 son 23, que añadido á 121 son 144 cuadrado de 12, &c.

242 En la práctica de la estraccion de la raiz cuadrada se pueden omitir dos cosas: 1.ª el poner debajo del renglon donde se halla el duplo de la raiz hallada el cociente; y 2.ª el poner el producto de la multiplicacion, pues al mismo tiempo se puede ir ejecutando la resta. Para manifestar como se hace esto nos propondrémos estraer la raiz cuadrada de 2209 en esta forma:

```
22,09 | 47
 60,9
   87
 ----
  000
```

Despues de dividido el número en períodos, verémos que el mayor cuadrado contenido en 22 es 16, y su raiz 4 que pondrémos en las rayas, y dirémos: el cuadrado de 4 es 16, de 16 á 22 van 6 que pondrémos debajo del 22; al lado de este 6 bajarémos el período siguiente 09, separarémos el 9 y dirémos: 60 dividido por 8, duplo de la raiz hallada, da 7 por cociente, que pondrémos en las rayas y á la derecha del 8; ahora dirémos: 7 por 7 son 49, de 49 á 49 va 0 y llevo 4; 8 por 7 son 56 y 4 que llevaba son 60, de 60 á 60 no va nada; por consiguiente resulta 0, que es señal de que el 2209 tiene raiz exacta, y que es 47.

Si nos proponemos estraer la raiz cuadrada de 7853643, ejecutarémos la operacion haciendo uso de la abreviacion anterior como aquí se presenta:

```
7,85,36,43 | 2802,43519
 38,5
  48
-----
0013,6
  560
 ------
  1364,3
   5602
  -------
   24390,0
    56044
   --------
    197240,0
     560483
    ---------
     2909510,0
      5604865
     ----------
      10707750,0
       56048701
      -----------
       510287990,0
        560487029
       ------------
        0584966639
```

Donde advierto que como al sacar el tercer guarismo sale 0, el producto del 560 por 0 debe ser cero; y así, la resta será lo que tenia arriba, á saber 136, al lado de la cual bajo el período siguiente 43; y como al fin me sale una resta 2439, infiero que el número propuesto no tiene raiz exacta, y diré que su raiz es 2802 y algo mas; este esceso le podemos espresar de dos modos: poniendo al lado de la raiz entera un quebrado cuyo numerador sea la resta que quedó, y el denominador el duplo de la raiz hallada mas la unidad; cuyo quebrado será aquí $\frac{2439}{5605}$: ó añadiendo dos ceros á la resta, y aproximándonos por decimales.

Ambos métodos son de aproximacion: el primero se funda en que la raiz de

7853643 es mayor que 2802 y menor que 2803; y como (241) el cuadrado de 2803 llevaria al de 2802 el duplo del mismo 2802 mas la unidad, resulta que aquella resta 2439 viene á espresar partes de las que le faltan para llegar á ser la raiz del de una unidad mas, que aquí son las 5605; pero es mucho mejor aproximarnos por decimales, *para lo cual por cada guarismo que se quiera en la raiz deberémos añadir dos ceros*; cuya práctica está fundada en que si la raiz tuviese un guarismo decimal, su cuadrado tendria dos guarismos decimales, uno por cada vez que es factor.

Y así, para conseguir esta aproximacion añadirémos dos ceros á la resta é inmediatamente pondrémos la coma en la raiz, separarémos el último cero, y lo que quede á la izquierda lo dividirémos por el duplo de toda la raiz hallada; el cociente le pondrémos en las rayas despues de la coma y al lado del duplo, ejecutarémos la multiplicacion y resta; y á lo que nos resulte añadirémos otros dos ceros, y continuarémos de este modo hasta hallar los guarismos decimales que deseemos; de manera que la raiz es 2802,43519 &c.

Si el número constase de enteros y decimales ó de decimales solas, se haria que el número de guarismos decimales fuese par, añadiendo un cero si fuese ímpar; por ejemplo: si quisiera estraer la raiz cuadrada de 0,4 añadiria un cero, y despues de haber puesto el cero enteros y la coma en las rayas, veria cual era el mayor cuadrado contenido en 40; y como es 36 y su raiz 6, pongo 6 en las rayas, resto el 36 del 40, y á la resta añado otros dos ceros; y así continúo hasta sacar los guarismos que desée.

```
0,4 0     | 0,6 3 2
  4 0,0   |--------
  1 2 3
  -----
  0 3 1 0,0
    1 2 6 2
  ---------
    0 5 7 6
```

Puesto que elevar al cuadrado no es sino un caso particular de la multiplicacion, resulta que esta es la tercera operacion de aumentar; y pues que la estraccion de la raiz cuadrada no viene á ser sino un caso particular de la division, á saber, cuando el divisor y el cociente son iguales, resulta que esta es la tercera operacion de disminuir que se puede considerar.

243 Antes de pasar mas adelante manifestarémos que si un número entero no tiene raiz exacta en enteros, tampoco la tendrá en fraccionarios de ninguna especie; es decir, que puesto que el número 2 no tiene raiz cuadrada exacta en enteros, no se debe esperar que la tenga espresada por ningun quebrado; porque si suponemos que $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, y que m y n estén reducidos á su menor espresion, tendrémos elevando al cuadrado que $2=\frac{m^2}{n^2}$; y paraque $\frac{m^2}{n^2}$ fuese igual con 2 seria preciso que cada uno de los factores de n se destruyese con los de m; pero suponiendo la fraccion $\frac{m}{n}$ irreducible, su cuadrado $\frac{m}{n}\times\frac{m}{n}$ ó $\frac{m^2}{n^2}$ tambien lo será (190); y por consiguiente no podrá ser igual con ningun número entero.

Sin embargo se concibe que existe una cantidad que multiplicada por sí misma produzca un número cualquiera, tal como 1287; y que en este caso esta cantidad está comprendida entre 35 y 36; porque $35\times35=1225$ es un producto menor, y $36\times36=1296$ da un producto mayor.

La estraccion de la raiz cuadrada aplicada á números que no son cuadrados exactos, da orígen á una nueva especie de números, así como la division origina las fracciones; pero hai esta diferencia entre las fracciones y las raices de los números que no son cuadrados perfectos: á saber, que los primeros que se componen siempre de un número exacto de partes de la unidad tienen con esta unidad *una comun medida*, y que los segundos no la tienen.

Por ejemplo: concibiendo la unidad dividida en siete partes, se representa con 11 de estas partes el cociente de la division de 11 por 7, ú $\frac{11}{7}$; y $\frac{1}{7}$ estando contenido siete veces en la unidad, y once veces en $\frac{11}{7}$, es la comun medida de la unidad y de la fraccion $\frac{11}{7}$.

Considerando que tanto los números enteros como los quebrados tienen con la unidad una comun medida, se dice que estas cantidades son *comensurables* con la unidad, ó simplemente *comensurables*; tambien se les da el nombre de racionales porque sus *razones ó relaciones*, que mas adelante darémos á conocer, se pueden espresar por números enteros.

Al contrario, la raiz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto es *incomensurable* ó *irracional*, ó un número á que se suele llamar tambien *sordo*; porque no pudiéndose representar por ninguna fraccion se sigue que en cualquier número de partes que se suponga dividida la unidad, ningunas serán bastante pequeñas para medir al mismo tiempo exactamente á esta raiz y á la unidad.

244 Como para multiplicar quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, y para cuadrar un número no hai mas que multiplicarle por sí mismo: resulta que el cuadrado de un quebrado se forma *elevando el numerador y denominador*, y por lo mismo para estraer la raiz cuadrada *se estrae la del numerador y la del denominador*; pero aquí pueden ocurrir tres casos, á saber: que ambos términos tengan raiz exacta, que uno de ellos solo la tenga, y que no la tenga ninguno.

En el primer caso se estrae de ambos exactamente, por ejemplo: $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$; en el segundo se estrae exactamente del que la tiene y aproximada del que no la tiene; y así $\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1{,}732\ \&c.}{2}$;

$$y\sqrt{\tfrac{9}{14}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{14}}=\frac{3}{3{,}7416\ \&c.}$$

Cuando ninguno de los dos términos tiene raiz exacta se puede hacer que uno de los dos la tenga, multiplicando los dos términos del quebrado por aquel término que queramos que la tenga; lo cual no altera el valor del quebrado (107) y hace que dicho término sea el cuadrado del correspondiente en el primitivo; despues se estrae por aproximacion la del que no la tiene, y exactamente del que la tiene; pero como siempre conviene que el denominador sea el mas sencillo, por eso se procura que la tenga el denominador, multiplicando los dos términos del quebrado por el denominador; de manera que $\sqrt{\tfrac{5}{7}}=\sqrt{\frac{5\cdot 7}{7\cdot 7}}=\sqrt{\tfrac{35}{49}}=\frac{5{,}9\ \&c.}{7}$. La misma operacion se debe practicar y por la misma razon, aun cuando el numerador la tenga exacta.

{ 245 En el ejemplo espuesto (242) hemos visto que á cada guarismo que vamos sacando se va complicando mas la operacion, y por lo mismo conviene averiguar si hai algun medio para abreviarla. Neuton propone en su Aritmética universal que *cuando se han sacado la mitad de los guarismos de la raiz, ó la mitad y uno mas, se pueden sacar los otros dividiendo el residuo por el duplo de lo hallado ántes.*

{ Y así, si nos proponemos estraer la raiz cuadrada de 5978538283 procederémos como hemos dicho y aquí se ve, hasta haber sacado los tres primeros guarismos 773 que es uno mas de la mitad, pues aquí la raiz debe tener cinco; y despues divido la resta que queda por el duplo de 773; y los dos guarismos 21 que saco los pondré á la derecha de los anteriores, y tendré que la raiz es 77321.

```
59,78,53,82,83 | 77321
107,8
 147
 0495,3
  1543
  03248,2 | 1546
   01562  | 21
    0016  |
```

{ Esta abreviacion es sumamente socorrida cuando se tienen que estraer raices con mucha aproximacion; y así, si nos proponemos estraer la raiz de 5 (página siguiente) con once guarismos exactos, lo ejecutarémos por el método ordinario hasta encontrar los seis primeros guarismos, porque once decimales que quiero sacar y un entero que tengo, componen doce guarismos cuya mitad es seis; y despues dividiré el residuo por el duplo de la raiz hallada, y saco que la raiz de 5 es 2,23606797751 &c.

Neuton no demostró su regla como tenia de costumbre; mas para convencernos nosotros de que es verdadera, supondrémos que la raiz del número propuesto, sea la que sea, esté dividida en dos partes que

la primera que llamarémos a, contenga la mitad del número de guarismos de especie superior, si la raiz ha de tener un número par de guarismos, y la mitad mas uno si es impar; y llamando b á la otra parte será $a+b$ dicha raiz, cuyo cuadrado es $a^2+2ab+b^2$; y despues de haber estraido la mitad de la raiz, ó la mitad mas uno, esto es, la a, en lo que quede del cuadrado se hallará $2ab+b^2$. Ahora, la parte $2ab$ no se hallará en el cuadrado en ninguno de los guarismos que estén espresados por los que hai en b; pues que a debe terminar en tantos ceros como guarismos hai en b, y por consiguiente en el producto $2ab$, habrá (63) lo ménos este número de ceros; luego si en los guarismos del cuadrado que aun no se han bajado, se separan tantos como guarismos hai en b, á la izquierda de esta separacion nos quedarán otros tantos que yéndolos añadiendo á la resta que nos ha quedado nos irá dando los guarismos que nos faltan.

```
5                         | 2,23606797751
10,0
 42
 160,0
  443
  2710,0
   4466
   03040,00,0
    4472
    447206
     3567640       | 447212
     04371560      | 797751
      03466520
       03360360
        02298760
         006270000
           179788
```

{ En los guarismos que nos quedan separados á la izquierda estarán ademas del duplo $2ab$ algunas unidades mas que pueden haber resultado del cuadrado b^2; y por lo mismo podrá suceder que el cociente resulte así una, dos, tres ó cuatro unidades mas de lo que debia; pero no puede resultar ya mas; y si el primer guarismo de la raiz es 5 ó mayor que 5, jamas puede resultar ninguna unidad mas; sino lo es, se sacará un guarismo mas por el método regular en el caso de que sea par el número de guarismos de la raiz.

{ Para hacer sensible este raciocinio nos propondrémos elevar al cuadrado el número 352498, y le dividirémos en dos partes como las que hemos dicho, de esta manera: 352498=352000+498; por lo cual será: $352498^2=(352000+498)^2=352000^2+2\times352000\times498+498^2=\ldots\ldots$ 123904000000+350592000+248004=124254840004.

{ Ahora, empezarémos estrayendo nuestra raiz cuadrada como se ve á la vuelta: y luego que hayamos sacado los tres primeros guarismos que es la mitad de los de la raiz, los 350 que quedan junto con los otros tres guarismos que siguen 840, se irán dividiendo por el duplo de 352 que es 704, y sacamos por cociente 498; y tenemos por raiz 352498.

$$\begin{array}{l|l} 1\,2,4\,2,5\,4,8\,4,0\,0,0\,4 & \underline{352498} \\ 3\,4,2 & \\ \underline{6\,5} & \\ 0\,1\,7\,5,4 & \\ \underline{7\,0\,2} & \\ 3\,5\,0\,8 & 704 \\ 6\,9\,2\,4 & \overline{498} \\ 5\,8\,8\,0 & \\ 2\,4\,8 & \end{array}$$

Hemos dicho que lo mas que puede suceder es que por este medio cuando el número de guarismos de la raiz sea par, salga el cociente con una, dos, tres, ó cuatro unidades mas solamente; esto está fundado en que el caso mas desfavorable es aquel en que los primeros guarismos sean 1 con ceros, y los últimos todos nueves como en este número 100999; aquí en los guarismos de su cuadrado se hallarán desde el cuarto en adelante, todas las unidades que se llevasen del cuadrado de 999 que es 998001, y por consiguiente de este cuadrado resultarian 998 para el cuarto, quinto y sesto lugar. Como los tres primeros guarismos de la raiz son 100, su duplo será 200, que el mayor número de veces que puede estar contenido en 998 es cuatro; luego en este caso solo podrian resultar cuatro unidades mas en la raiz. Si el primer guarismo de la raiz fuera 2 el caso mas desfavorable era aquel en que los tres primeros fuesen 200, cuyo duplo es 400, que solo puede estar contenido dos veces en 998; luego cuando el primer guarismo de la raiz es 2, solo pueden resultar dos unidades mas en el cociente. Si el primer guarismo fuese 3 ó 4 en el caso mas desfavorable solo podria resultar una unidad mas; pero si fuese 5 ó mayor que 5 no podria resultar ni aun en el caso mas desfavorable ninguna unidad mas; porque en este serian los tres primeros guarismos 500 cuyo duplo es 1000, que no está contenido en 998 ninguna vez, y con ménos razon los duplos de 600, ó de 700 &c.

Si los tres últimos guarismos estuviesen representados por 899, como su cuadrado es 808201, resultarian 808 para el cuarto, quinto y sesto lugar; y por consiguiente en el caso mas desfavorable tendríamos los mismos resultados que ántes; pero si los tres últimos guarismos fuesen 799, resultarian 638 para el cuarto, quinto y sesto lugar; y si fuese 1 el guarismo de especie superior de la raiz, podrian resultar dos unidades de mas; si 2 ó 3, una solamente, y si mayor que 3 ninguna. Si los tres últimos fuesen 699, se llevarian 488; por consiguiente en el caso mas desfavorable de ser 1 el guarismo de especie superior de la raiz, solo podrian resultar dos unidades de mas; una si el guarismo fuese 2, y ninguna cuando fuese 3; si los tres últimos fuesen 599, resultarian 358, y cuando el primer guarismo de la raiz fuese 1, podria resultar una unidad de mas; pero ninguna cuando fuese 2, 3 &c. Si los tres últimos fuesen 499, resultarian 149, que ni en el caso mas desfavorable podria inducir á dar una unidad de mas; por consiguiente resulta que como el primer guarismo, que se saca abreviado se co-

noce desde luego por solo la inspeccion de la resta, tendrémos que si fuese 4, cualquiera que sea el valor del primero no causará ninguna unidad de error; si fuese 5 y el primero 2 ó mayor que 2 tampoco; si fuese 6 y el primero 3 tampoco; si fuese 7 y el primero 4 tampoco; por lo que en todos estos casos se obtienen siempre por medio de la division otros tantos guarismos exactos como ya se han sacado.

Esc. Muchas veces se conoce por la simple inspeccion de un número entero si es cuadrado exacto: por lo que presentarémos los principales indicios. 1.º Como todo número par se puede representar por $2n$, su cuadrado será $4n^2$; luego *todo número par que no es divisible por 4 no es un cuadrado exacto*; y todo número impar le podemos representar por $2n+1$, su cuadrado será $4n^2+4n+1$, número que disminuido en una unidad es divisible por 4, luego *todo número impar que disminuido en una unidad no es divisible por 4 no puede ser un cuadrado exacto.*

2.º En general *todo número que encierra un factor primero α, y no es divisible por α^2 no puede ser un cuadrado exacto*; porque la raiz cuadrada de este número, si la tuviese exacta seria de la forma αn, cuyo cuadrado $\alpha^2 n^2$ es divisible por α^2.

3.º *Todo número terminado por una de los cuatro cifras 2, 3, 7, 8, no puede ser cuadrado exacto*; porque los cuadrados de los nueve números dígitos, de cuyas unidades se han de componer las del cuadrado no terminan en 2, 3, 7 ni 8.

4.º En fin un número terminado en 5 no puede ser cuadrado exacto si la cifra de sus decenas no es 2; porque en este caso el duplo de las unidades será 10, y multiplicado por las decenas dará centenas; luego de esta parte del cuadrado no habrá nada en el lugar de las unidades ni en el de las decenas; y por consiguiente en estos dos lugares no podrá haber sino el cuadrado de las unidades, esto es 25.

246 La raiz cuadrada de las cantidades algebráicas se estrae de un modo análogo al de las numéricas: *se ordenan, se estrae la raiz del primer término, y luego se divide siempre por el duplo de la raiz hallada*; y así, si nos proponemos estraer la raiz cuadrada de la cantidad $9a^4+4b^6-30a^2c+25c^2+12a^2b^3-20b^3c$, la ordenarémos por la a como aquí se presenta:

$$\begin{array}{l|l} 9a^4-30a^2c+25c^2+4b^6-20b^3c & \underline{3a^2-5c+2b^3} \\ \quad +12a^2b^3 & 6a^2-5c \\ \quad \underline{+30a^2c-25c^2} & \\ \quad +12a^2b^3+4b^6-20b^3c & 6a^2-10c+2b^3 \\ \quad \underline{-12a^2b^3+20b^3c-4b^6} & \\ \qquad 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Y empezarémos diciendo: la raiz de $9a^4$ es $3a^2$ que pondrémos en las rayas y borrarémos el $9a^4$; despues dividirémos el $-30a^2c$ por $6a^2$ que pondrémos debajo de las rayas, y el cociente $-5c$ le pondrémos al lado del $6a^2$ y en la raiz, multiplicarémos el $6a^2-5c$ por $-5c$, y el producto le colocarémos debajo de la cantidad mudándole los signos; tirarémos una raya, debajo de la cual pondrémos lo que nos quede despues de hecha la destruccion: y esto lo dividirémos por el duplo $6a^2-10c$ de la raiz hallada, lo que conseguirémos dividiendo el $12a^2b^3$ por el $6a^2$, y el cociente $2b^3$ le colocarémos en las rayas y al lado del duplo; multiplicarémos todo el $6a^2-10c+2b^3$ por el cociente $2b^3$, y el producto le colocarémos mudándole los signos debajo de la resta anterior; y como despues de hecha la destruccion no queda nada, resulta que la raiz de dicha cantidad es $3a^2-5c+2b^3$.

Si nos propusiéramos estraer la raiz cuadrada de a^2+b^2, la efectuaríamos como aquí se presenta:

$$\begin{array}{r|l}
a^2+b^2 & a+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}+\frac{b^6}{16a^5}-\&c. \\
\hline
-a^2 & 2a+\frac{b^2}{2a} \\
+b^2 & \\
-b^2-\frac{b^4}{4a^2} & \\
\hline
-\frac{b^4}{4a^2} & 2a+\frac{b^2}{a}-\frac{b^4}{8a^3} \\
+\frac{b^4}{4a^2}+\frac{b^6}{8a^4}-\frac{b^8}{64a^6} &
\end{array}$$

y hallaríamos que era

$$a+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}+\frac{b^6}{16a^5}-\&c.$$

De la elevacion á la tercera potencia ó cubo, y estraccion de la raiz cúbica, de las cantidades polinomias y numéricas.

247 Por lo espuesto anteriormente (197) sabemos que el cubo de una cantidad es el producto que resulta de multiplicarla por sí misma dos veces de seguida; de manera que el cubo de $(a+b)$ es el producto que resulta de multiplicar $a+b$ por $a+b$, y luego este resultado por $a+b$; y así, $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (B).

Este resultado nos puede servir de fórmula para elevar una cantidad cualquiera al cubo, y por lo mismo le traducirémos en regla diciendo: *el cubo de una cantidad que se compone de dos partes, consta de cuatro partes, á saber: del cubo de primera parte; del triplo del cuadrado de primera por segunda; del triplo de primera por el cuadrado de la segunda; y finalmente del cubo de la segunda.*

Si la segunda parte b fuese negativa, entónces todos los términos donde la b se halle con esponente ímpar, que son los que ocupan los lugares pares, tendrian el signo $-$, de manera que $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Si la cantidad que se hubiese de elevar al cubo constase de mas de dos términos, podríamos llamar a á la suma de todos ménos el último, y b al último, y ejecutar nuestra operacion; luego, llamaríamos otra vez a á todos los términos ménos el último que hubiese en el primer cuadrado

y b al último; y así procederíamos por un método análogo al esplicado (237) para elevar al cuadrado; pero es mucho mas ventajoso que esta sustitucion el ejecutarlo directamente por esta regla que le es equivalente. *Se elevan al cubo los dos primeros términos como si estuviesen solos, despues se multiplica el triplo del cuadrado de la suma de estos dos por el tercero, luego el triplo de cada uno de estos dos por el cuadrado del tercer término, despues se pone el cubo del tercer término, y luego se continúa del mismo modo, como aquí se presenta:*

$$(a+b+c+d+e+\&c.)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3+3a^2d+6abd+6acd+6bcd+3b^2d+3c^2d+3ad^2+3bd^2+3cd^2+d^3+3a^2e+6abe+6ace+6ade+6bce+6bde+6cde+3b^2e+3c^2e+3d^2e+3ae^2+3be^2+3ce^2+3de^2+e^3+\&c.$$

248 Si quisiéramos averiguar en cuanto se diferencian los cubos de dos números que se diferencian en una unidad, llamaríamos a al menor, con lo que $a+1$ seria el mayor; y suponiendo en la fórmula anterior que $b=1$ será $(a+1)^3=a^3+3a^2\times1+3a\times1^2+1^3=a^3+3a^2+3a+1$. De donde restando a^3 cubo del menor nos vendrá la diferencia espresada por $3a^2+3a+1$, que traducida en regla quiere decir *que se diferencian en el triplo del cuadrado del menor, mas el triplo del mismo número menor, mas la unidad*; con cuyo auxilio podrémos formar fácilmente los cubos de los números que solo se vayan diferenciando en una unidad.

Así es que empezarémos: el cubo de 1 es 1, porque cualquier potencia de la unidad es igual con la misma unidad; ahora, el cuadrado de 1 es 1, el triplo de dicho cuadrado es 3, el triplo del mismo número tambien es 3, y 3 que teníamos son 6, y 1 que debemos añadir son 7, que junto con el 1 cubo de 1, da 8 que es el cubo de 2.

Para el 3 dirémos: el cuadrado de 2 es 4, el triplo de 4 es 12, el triplo de 2 es 6, y 12 son 18, y 1 que debemos añadir son 19, que junto con el 8, cubo de 2, da 27 para el cubo de 3.

Continuando del mismo modo hallaríamos que el cubo de 4 es 64, el de 5 es 125, el de 6 es 216, el de 7 es 343, el de 8 es 512, el de 9 es 729, el de 10 es 1000. Los cubos de los nueve números dígitos conviene retenerlos en la memoria.

249 Ahora, para elevar al cubo una cantidad cualquiera numérica mayor que 10, la descompondrémos en dos partes que la una sea todo el número escepto las unidades, y la otra las unidades. Así, si quisiéramos elevar al cubo el número 57, le descompondríamos en estas dos partes $50+7$, y suponiendo en la fórmula (B) que $a=50$ y $b=7$, tendrémos: $57^3=(50+7)^3=50^3+3.50^2.7+3.50.7^2+7^3=125000+52500+7350+343=185193$.

Esta espresion nos dice que el cubo de un número que contiene decenas y unidades, *se compone del cubo de decenas, del triplo del cuadrado de decenas por unidades, del triplo de decenas por el cuadrado de uni-*

dades, y finalmente del cubo de las unidades. Y observando que el cubo de decenas ha de espresar millares; el triplo del cuadrado de decenas por unidades ha de espresar centenas; el triplo de decenas por el cuadrado de unidades, decenas; y el cubo de unidades, unidades: tendrémos lo suficiente para entender los fundamentos en que estriba la regla que vamos á dar para estraer la raiz cúbica de un número cualquiera, que es la siguiente.

Divídase el número propuesto en períodos de á tres guarismos con una coma, empezando de derecha á izquierda, aunque en el último de la izquierda solo quede uno ó dos guarismos; véase cual es el mayor cubo contenido en el primer período á la izquierda, y su raiz póngase en las rayas; despues, este cubo réstese de dicho primer período, al lado de la resta bájese el período siguiente, sepárense los dos guarismos de la derecha con una coma, y lo que quede á la izquierda divídase por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, que se ha colocado aparte debajo de las rayas; luego se forman las otras tres partes del cubo en esta forma: se multiplica el triplo del cuadrado de la raiz hallada por el cociente que acabamos de encontrar, y el producto se pone debajo de lo que nos sirvió de dividendo; de modo que el último guarismo esté debajo del inmediato á la izquierda de la coma con que se separáron los dos últimos del período que se bajó; despues se multiplica el triplo de la raiz que teníamos por el cuadrado del cociente, y el producto se coloca debajo del producto anterior, corriéndole un lugar hácia la derecha; por último se cubica el cociente y se pone debajo del producto anterior corriéndole un lugar hacia la derecha; luego, se suman estas tres cantidades, y al mismo tiempo se va restando de lo que teníamos ántes, que era la resta anterior junta con el período que se bajó. Al lado de la resta que obtengamos se bajará el período siguiente, se separarán los dos últimos guarismos, y lo que quede á la izquierda se dividirá por el triplo del cuadrado de toda la raiz hallada, se formarán las otras tres partes y se restarán; y así se continúa hasta que no haya mas períodos que bajar: en cuyo caso, sino ha quedado resta es señal de que el número tiene raiz cúbica exacta, y si quedase es señal de que no; y para aproximarnos por decimales debemos añadir tres ceros por cada guarismo que queramos sacar en la raiz, y continuar del mismo modo la operacion.

Cuando no se puede hacer la resta es señal de que se ha puesto demas en la raiz.

Apliquemos esta regla á la estraccion de la raiz cúbica del 185193 (página siguiente); lo primero que ejecutarémos será dividirle en períodos de á tres, ver cual es el mayor cubo contenido en el primer período de la izquierda que es 185, lo que hallaré repasando los cubos de los números dígitos, y viendo que 185 está entre 125, que es el cubo de 5, y 216 que es el de 6; advierto que el mayor es el de 5, cuya


```
185,193  | 7
125      | 58
-------  |----
 601,93  | 75
 600
  960          15     15
                64    49
 525           ---    ---
  735           60    135
    343         90     60
-------        ---    ---
 00000         960    735
```

raiz pondré en las rayas, despues restaré 125, cubo de 5, del 185; al lado de la resta 60 bajaré el período siguiente, separaré los dos últimos guarismos con la coma, y dividiré lo que quede á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raiz hallada que es 5, esto es, lo dividiré por 75 (porque el cuadrado de 5 es 25, y el triplo de 25 es 75); este 75 se pone debajo de las rayas como allí se presenta, y digo: 75 en 601 cuantas veces? ó 7 en 60 cuantas veces? veo que les cabe á 8, y pongo por consiguiente 8 en la raiz, multiplico el 75 por el 8, diciendo: 5 por 8 son 40, pongo el 0 debajo del 1 del 601 y llevo 4; 7 por 8 son 56, y 4 que llevaba son 60 que pongo á la izquierda del cero; ahora triplico la raiz hallada anteriormente que es 5, y lo que me resulte que es 15, multiplicado por 64 cuadrado del cociente 8, me dará 960; que colocaré debajo del producto anterior 600 corriéndole un lugar hácia la derecha. Sin pasar mas adelante veo que la suma de estos dos productos no la puedo restar del 60193, y por lo mismo los borraré, borrando igualmente el 8 de la raiz, y pondré 7: multiplicarémos el 75 por 7, y pondrémos el producto 525 debajo del 601, despues multiplicaré el triplo de 5, que es 15, por 49 cuadrado de 7, y el producto 735 le colocaré debajo del 525 corriéndole un lugar hácia la derecha; finalmente cubicaré el 7 y pondré el 343 debajo del 735 corriéndole tambien un lugar; sumaré estas tres partidas, y al mismo tiempo iré ejecutando la resta en esta forma: 3 es 3, de 3 á 3 no va nada; 5 y 4 son 9, de 9 á 9 no va nada; 5 y 3, son 8, y 3 son 11, de 11 á 11 no va nada y llevo 1; 2 y 1 son 3, y 7 son 10, de 10 á 10 no va nada y llevo 1; 5 y 1 son 6, de 6 á 6 no va nada; y como no hai mas períodos que bajar y la resta es cero, inferimos que el número propuesto tenia raiz exacta como debia verificarse.

Para dar razon de esta regla observarémos que el dividirle en períodos de á tres guarismos, es porque desde que vemos que un número tiene mas de tres guarismos, debemos inferir que la raiz tendrá mas de uno; y como el cubo de las decenas debe hallarse desde los millares en adelante se separarán los tres primeros; si en lo que queda á la izquierda hubiese aun mas de tres guarismos, era señal de que las decenas de la raiz estaban representadas por mas de un guarismo; y por la misma razon que ántes deberémos separar otros tres guarismos, &c.

Como en el primer período de la izquierda se halla el cubo del guarismo de especie superior de la raiz, viendo cual es el mayor cubo contenido en él obtendrémos el primer guarismo de la raiz; y restando dicho cubo del mismo período, y bajando el período siguiente al lado de la resta, tendrémos en esta cantidad las otras tres partes del cubo de los dos guarismos de especie superior de la raiz; la primera que se debe hallar es el triplo del cuadrado del de especie superior por el de especie inmediatamente inferior; y como esto se debe hallar desde el tercer guarismo en adelante separamos los dos últimos guarismos, y por la misma razon dividimos esto por el triplo del cuadrado de la raiz hallada; despues multiplicamos el divisor por el cociente, y le colocamos debajo de lo separado por la coma; y el producto del triplo de la raiz hallada por el cuadrado del segundo guarismo hallado, se coloca un lugar mas hácia la derecha, porque el triplo del primer guarismo de la raiz por el cuadrado del segundo ha de espresar decenas respecto de las unidades del segundo guarismo; y por lo mismo se debe poner un lugar mas hácia la derecha que el anterior que espresaba centenas; y finalmente se corre el cubo del segundo guarismo hallado otro lugar, porque espresa unidades respecto del segundo guarismo hallado; se suman estas tres cantidades y se restan para quitar todas las partes del cubo de los dos primeros guarismos; y se continúa del mismo modo por las mismas razones (*).

Cuando no se obtiene raiz exacta, se han de añadir tres ceros á la resta por cada guarismo que se quiera en la raiz; porque si hubiese un guarismo decimal en la raiz, como esta debe ser tres veces factor para producir el cubo, producirá tres guarismos decimales. Por esta causa se debe hacer que el número de guarismos decimales sea múltiplo de tres cuando se intente estraer la raiz de un número que contenga enteros y decimales ó decimales solas.

Si se quiere un valor aproximado en forma de quebrado comun, al lado de la parte entera de la raiz se pondrá un quebrado cuyo numerador sea la resta, y el denominador el triplo del cuadrado de la raiz entera, mas el triplo de la misma raiz, mas la unidad; por lo dicho (248), y en virtud de razones análogas á las espuestas (242) para la raiz cuadrada.

De lo espuesto (89 esc.) resulta que *el cubo de un número no puede tener mas cifras que el triplo de las que tiene el número; ni ménos que este triplo disminuido en 2.*

250 Aquí tambien se va complicando mucho la operacion al paso que se sacan mas guarismos, y por lo mismo conviene abreviar la operacion. Para esto indagarémos analíticamente que relacion debe guardar el número de guarismos que se pueden sacar abreviadamente con los ya sacados. Sea $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ la potencia de que se ha de estraer la raiz cúbica; a la parte ya estraida, y b la parte que falta por estraer; y puesto que la estraccion hecha por el método comun ha privado á la potencia $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ de su término a^3, lo que resta de esta potencia es $3a^2b+3ab^2+b^3$, cantidad que dividida por $3a^2$ da por cociente $b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$, que escede á la parte b que falta en $\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$.

(*) *En lugar de formar estas partes del cubo, se puede cubicar desde luego toda la raiz, y restar su cubo de los períodos que se han tenido en cuenta en el número dado; esto es, el cubo del primer guarismo de la raiz se resta del período de la izquierda; el cubo de los dos primeros guarismos de los dos períodos de la izquierda del número dado, &c. Todo lo demas es lo mismo.*

Luego tenemos ya reducida la cuestion á saber cual es la primera de las figuras de b, á que la adicion de $\frac{b^2}{a}+\frac{a^3}{3a^2}$ puede afectar. Para conocerla supongamos que sea n el número de guarismos de a, y haciendo a igual con la unidad seguida de $n-1$ ceros, y b igual con la unidad en el lugar que ocupa la última de las figuras de a, la fraccion $\frac{b^2}{a}$ será igual á la unidad dividida por la unidad seguida de $n-1$ ceros; luego tendrá esta forma $\frac{1}{10000....00}=0,000....01=$ á la unidad en el lugar decimal espresado por $n-1$. Y por lo que toca á la fraccion $\frac{b^3}{3a^2}$ será igual á la unidad dividida por 3 acompañado de un número de ceros espresado por $2.(n-1)$ ó igual con $\frac{1}{3000000...0000}$; lo que la hará tan pequeña en comparacion de $\frac{b^2}{a}$ que no haciendo depender sino de esta la superioridad del cociente sobre b, será lo mismo que si se hiciese depender de $\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$. Pero haciéndole depender solo de $\frac{b^2}{a}$ no puede esceder á la parte verdadera del cociente sino en una unidad en la cifra $n-1$ decimal de b; *luego si hubiésemos estraido por el método comun las* n *primeras figuras de la raiz cúbica de un número, se podria tener seguridad de que dividiendo la resta que resulta de esta estraccion regular por tres veces el cuadrado de las* n *figuras ya estraidas, se encontrarian las* n—1 *figuras siguientes de la raiz, tan exactamente que el mayor error que podria tener no esederia en una unidad de las que ocupen el lugar* n—1 *en estas figuras.* Esta unidad de error solo podria resultar en el caso estremo de que los guarismos de a fuesen 100000...&c.; pero si el primero de estos guarismos no fuese la unidad ó los otros no fuesen ceros, jamas se podria sospechar una unidad de error en este caso. Aun cuando esto se verificase, nunca podria resultar un error tan grande; porque las suposiciones sobre que hemos raciocinado para sacar su valor, cospiran mas bien á aumentarle que no á disminuirle, pues que hemos supuesto que b era igual á la unidad de especie inferior de a, cuando jamas se puede verificar; luego se puede contar que despues de haber obtenido n figuras de una raiz cúbica por el método comun, se pueden obtener las $n-1$ siguientes dividiendo la resta por el triplo del cuadrado de las n figuras sacadas por el método vulgar.

Y así, si nos propusiéramos estraer la raiz cúbica de 53254235270, veríamos que no la tenia exacta; y si quisiéramos aproximarnos por decimales hasta el tercer guarismo decimal, como ya tenemos cuatro guarismos de la raiz entera, hallaríamos los tres decimales dividiendo la resta 11988542 por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, y la coma en la forma que aquí se presenta:

```
53,254,235,270      | 3762,282
27                  |
-----               |
262,54              | 27
189                 |
 441                |                 119885420   | 42457932
  343               |                  349695560  |----------
------------        |                   100321040 | 0,282
0260122,35          | 4107               15405176
 24642              |
   3996             |
    216             |
--------------      |
 0096859270         | 424128
   848256           |
      4512          |
         8          |
--------------      |
   11988542         |
```

Si queremos hacer mas sensible la demostracion de esta abreviacion, como la hemos hecho respecto de la raiz cuadrada, supondrémos que en el caso mas desfavorable sea el número 1000999; en que haciendo $a=1000000$ y $b=999$; la parte $\frac{b^2}{a}$ será igual con $\frac{999^2}{1000000}=\frac{998001}{1000000}=$ 0,998001, que por ningun título puede llegar á valer la unidad. La otra parte $\frac{b^3}{3a^2}$ es igual con $\frac{997002999}{3000000000000}=\frac{332334333}{1000000000000}=$ 0,000332334333; cuyo valor sumado con el de $\frac{b^2}{a}$, da 0,998333334333 que no llega á valer una unidad; por lo que estamos seguros de que en

habiendo sacado n *guarismos por el método general, se sacarán otros* n—1 *guarismos, dividiendo la resta por el triplo del cuadrado de la raiz hallada sin que en ninguno se pueda recelar una unidad de error* (*).

251 Como para elevar un quebrado cualquiera al cubo se debe elevar su numerador y su denominador, resulta que para estraer la raiz cúbica de un quebrado se estraerá la raiz cúbica del numerador y la del denominador. Aquí pueden ocurrir los mismos casos que en la raiz cuadrada; y en los dos primeros se procede conforme dijimos tratando de ella, de manera que

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}=\tfrac{2}{5},\text{ y }\sqrt[3]{\frac{11}{27}}=\frac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{11}}{3}=\frac{2,2\ \&c.}{3}.$$

En el tercer caso que es cuando ninguno de los dos términos la tiene exacta (y aun cuando la tenga el numerador) se puede hacer que uno la tenga multiplicando los dos términos del quebrado por el cuadrado de aquel que queremos que la tenga, que por lo regular es el denominador; y así

$$\sqrt[3]{\tfrac{5}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5\times7^2}{7\times7^2}}=\sqrt[3]{\frac{5\times49}{7^3}}=\sqrt[3]{\frac{245}{343}}=\frac{\sqrt[3]{245}}{\sqrt[3]{343}}=\frac{6,2\ \&c.}{7}.$$

De las ecuaciones determinadas de segundo grado, y de las que siendo de un grado mas elevado contienen á la incógnita solo en dos términos, y el esponente del uno es duplo del otro.

252 Ya hemos dicho que ecuacion de segundo grado es aquella en que se halla la incógnita elevada á la segunda potencia; cuando la ecuacion es pura no tenemos que hacer para despejar la incógnita mas de lo espuesto (224), y por lo mismo solo nos falta manifestar como se resuelven las mistas.

Lo primero que tenemos que manifestar es que *toda ecuacion mista de segundo grado ha de constar solo de tres términos*: uno en que se halle la incógnita elevada al cuadrado, otro en que se halle elevada á

(*) *Aquí debemos hacer la misma observacion que en el prólogo; pues en los libros que corren con mas crédito en Francia, ó no se halla esta abreviacion, ó la ponen en los términos siguientes: »cuando se haya sacado un número de guarismos espresado por* 2n *por el método general, se pueden hallar otros* n—1 *sin sospechar un error mayor que dos unidades en la última cifra:" donde se ve cuanto mas ventajosa es la regla que nosotros demostramos. Neuton, Hutton, ni los demas autores ingleses que yo he visto nada dicen relativo á abreviacion en la raiz cúbica.*

la primera potencia, y otro donde no se halle incógnita; de modo que podemos tomar por espresion general de las ecuaciones de segundo grado esta $ax^2+bx=c$, ó $ax^2+bx-c=0$.

No puede haber más términos, porque no puede hallarse ninguno donde se encuentre la incógnita elevada á la tercera potencia ni á ninguna otra superior, pues entónces la ecuacion no seria de segundo grado; si hubiese muchos términos donde se hallase x^2 ó x todos los reduciríamos á uno haciendo la x^2 ó la x factor comun, y todos los términos donde no se hallase la x los podríamos considerar como uno solo. Tampoco puede tener ménos términos, porque si faltase el ax^2 no seria de segundo grado, si faltase el bx no seria mista, y si faltase el término constante c quedaria reducida la ecuacion á $ax^2+bx=0$, que dividiendo todo por x quedaba reducida á $ax+b=0$, que es de primer grado.

Ahora podemos dar á esta ecuacion otra forma dividiéndola toda por a, y se nos convertirá en $x^2+\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}=0$, ó haciendo $\frac{b}{a}=p$, y $-\frac{c}{a}=q$, en $x^2+px+q=0$ (C), que tomarémos por fórmula general de las ecuaciones de segundo grado. Cuando una ecuacion de segundo grado está bajo esta forma se dice que está *preparada*, y las circunstancias que exije el estar preparada son el que se haya reducido la ecuacion á solos tres términos; el que se halle sin coeficiente el primer término, que es aquel en que la incógnita está elevada al cuadrado: lo que se consigue dividiendo toda la ecuacion por el coeficiente que tenga dicho término; y que ademas dicho primer término tenga el signo positivo: lo que se consigue mudando los signos á toda la ecuacion cuando tenga el signo negativo.

253 Antes de pasar á manifestar como se resuelven estas ecuaciones, pondrémos aquí una bastante complicada para prepararla y reducirla á la forma (C).

Sea v. g. $ax^2+2bx-a^2+c^2-\frac{4bx^2}{e}=\frac{5}{3}ex-\frac{8d}{m}+\frac{7cx}{a}$.

Lo primero que ejecutarémos será pasar al primer miembro todos los términos en que se halle la incógnita, y todos los demas al segundo en esta forma: $ax^2+2bx-\frac{4bx^2}{e}-\frac{5}{3}ex-\frac{7cx}{a}=-\frac{8d}{m}+a^2-c^2$;

ahora sacarémos la x^2 fuera de un paréntesis, dentro del cual pondrémos todos los coeficientes de los términos en que se halle, y lo mismo respecto de aquellos en que se halle x, de este modo:

$$x^2(a-\frac{4b}{e})+x(2b-\tfrac{5}{3}e-\frac{7c}{a})=-\frac{8d}{m}+a^2-c^2;$$

ahora dividiendo toda la ecuacion por lo que multiplica á x^2 tendré:

$$x^2+x\times\frac{2b-\frac{5}{3}e-\frac{7c}{a}}{a-\frac{4b}{e}}=\frac{-\frac{8d}{m}+a^2-c^2}{a-\frac{4b}{e}} \quad (1),$$

con lo cual la tenemos preparada; y si llamamos p á lo que multiplica á x, y $-q$ al término constante de que se compone el segundo miembro, se convertirá esta en $x^2+px=-q$, ó pasando la q al primer miembro en $x^2+px+q=0$ que es la (C).

Estando ya preparada tratemos de resolverla (*); y pues que todas se pue-

(*) Tambien se puede resolver sin prepararla del modo siguiente. *Supongamos que se tenga la ecuacion* $ax^2+bx=c$: *el primer término se podrá considerar como el cuadrado de* $x\sqrt{a}$, *pues en efecto* $(x\sqrt{a})^2=ax^2$; *y multiplicando y dividiendo el segundo término por* $2\sqrt{a}$, *tendrémos que el primer miembro equivale á. . . . .*
$(x\sqrt{a})^2+2x\sqrt{a}\times\frac{b}{2\sqrt{a}}$, *que son los dos primeros términos del cuadrado de* $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$; *luego si á ambos miembros añadimos el cuadrado* $\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=\frac{b^2}{4a}$; *no se alterará la ecuacion, y tendrémos. . . . .*

$$ax^2+2x\sqrt{a}\times\frac{b}{2\sqrt{a}}+\frac{b^2}{4a}=\frac{b^2}{4a}+c$$

y estrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, será. . . . .

$$x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a}+c}$$

que da $x\sqrt{a}=-\frac{b}{2\sqrt{a}}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a}+c}$

$$y\ x=\frac{-\frac{b}{2\sqrt{a}}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a}+c}}{\sqrt{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{\frac{b^2}{4a}+c}{a}}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}:$$

cuya espresion comparada con la ecuacion $ax^2+bx=c$, *nos dice que cuando una ecuacion de segundo grado está ya reducida á tres términos se puede resolver desde luego sin ninguna otra preparacion, por la siguiente regla*: póngase la incógnita; despues el signo $=$; luego el cocienden reducir á la (C) se sigue que resuelta esta podrémos tener por su medio resueltas ya las demas. Para resolver esta ecuacion $x^2+px+q=0$ pasarémos el término q al segundo miembro, lo que nos dará $x^2+px=-q$.

Aquí advertimos que esta ecuacion quedaria resuelta si el primer miembro fuese un cuadrado exacto, porque en este caso estrayendo la raiz cuadrada tendríamos la x elevada solo á la primera potencia; pero comparando el primer miembro con la espresion $x^2+2ax+a^2$ del cuadrado de $x+a$, vemos que le falta el tercer término del cuadrado; luego considerando á x como primera parte, x^2 será el cuadrado de primera parte; px el duplo de primera por segunda, y como x es la primera, p será el duplo de la 2.ª y por lo mismo su mitad $\frac{p}{2}$ será igual á dicha segunda parte; luego si á ambos miembros añadimos $\frac{p^2}{4}$ que es el cuadrado de dicha mitad, la ecuacion no se alterará y el primer miembro será cuadrado exacto; luego tendrémos: $x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$, que estrayendo la raiz cuadrada sale $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, de donde $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

{ Pudiéramos haber demostrado que se habia de añadir la cantidad $\frac{p^2}{4}$ por un método puramente analítico en estos términos.

{ Si el primer miembro de la ecuacion $x^2+px+q=0$ (C) no es un cuadrado exacto, podrémos concebir que añadiéndole una cantidad de cierta especie lo será; sea A la cantidad que se le haya de añadir y tendrémos que la ecuacion (C) se convertirá en $x^2+px+q+A=A$ (D).

{ Ahora, pues que el primer miembro debe ser un cuadrado exacto, deberá tener esta forma $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$; luego deberá ser $2a=p$, de donde resulta $a=\frac{p}{2}$, y $a^2=q+A$, de donde $A=a^2-q=\frac{p^2}{4}-q$; luego la ecuacion (D) de arriba se convertirá en $x^2+2ax+a^2=\frac{p^2}{4}-q$, que estrayendo la raiz cuadrada será: $x+a=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, que da $x=-a\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, ó poniendo en vez de a su valor $\frac{p}{2}$, tendrémos: $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. }

---

te que resulte de dividir el coeficiente del segundo término por el duplo del primero, pero con un signo contrario al que lleva si está en el mismo miembro que el primer termino ó con el mismo signo si está en diferente miembro; despues debe seguir el signo $\pm$ y un radical de segundo grado; debajo de este se debe poner el cuadrado de la cantidad que ya se ha puesto fuera, siempre con el signo positivo y despues el cociente de dividir el tercer término por el coeficiente del primero, con el mismo signo que tenga el tercer término si se halla en diferente miembro que el primero, ó con el signo opuesto si se hallan ambos en un mismo miembro.

Este último resultado nos puede servir de fórmula para resolver todas las ecuaciones de segundo grado; pero es mucho mas ventajoso en la práctica traducirle en regla, que comparándole con la ecuacion primitiva nos da la siguiente.

Para resolver una ecuacion de 2.º grado que ya está preparada, póngase desde luego la incógnita: luego el signo $=$, despues de este signo la mitad del coeficiente (*) *del segundo término con un signo contrario al que lleve, despues el signo de ambigüedad $\pm$, luego un radical de segundo grado: debajo de este radical el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término siempre con el signo positivo, y despues el tercer término de la ecuacion con el mismo signo con que se halle en el segundo miembro, ó con un signo opuesto al que se halla en el primero.*

Aplicando esta regla á la ecuacion (1) tendrémos inmediatamente.

$$x=-\tfrac{1}{2}\,\frac{2b-\frac{5}{3}e-\frac{7c}{a}}{a-\frac{4b}{e}}\pm\sqrt{\left\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{2b-\frac{5}{3}e-\frac{7c}{a}}{a-\frac{4b}{e}}\right\}^2+\frac{-\frac{8d}{m}+a^2-c^2}{a-\frac{4b}{e}}}$$

Como en el valor de x hallamos un signo de ambigüedad $\pm$, nos dice que hai dos valores de x que reduzcan á cero el primer miembro de la ecuacion (C); y separándolos tendrémos:

$$x=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \text{ y } x=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

(*) *De aquí en adelante se da á la palabra* coeficiente *un sentido mas estenso que el espuesto* (168), *pues llamarémos coeficiente de un término cualquiera de una ecuacion á todo lo que multiplica á la incógnita en aquel término.*

Estos dos valores no pueden ser iguales á ménos que p no sea o, porque entónces el primero será $x=\sqrt{-q}$ y el segundo $x=-\sqrt{-q}$, que solo se diferencian en el signo. Pero cuando $p=0$ la ecuacion (C) se reduce á una ecuacion pura, luego *paraque los dos valores que da una ecuacion de 2.º grado sean iguales aunque de signo contrario, se necesita que esta ecuacion sea pura, ó que el coeficiente del 2.º término sea cero.*

Que toda ecuacion de segundo grado debe dar dos valores para la incógnita lo podrémos demostrar *á priori* de esta manera.

Sea $x^2+px+q=0$ dicha ecuacion: tratamos de demostrar que si hai una cantidad α, que sustituida por x reduzca el primer miembro á o, habrá necesariamente otra cantidad que sustituida en vez de la misma incógnita satisfaga á la misma condicion.

En efecto, pues que α cumple por el supuesto con dicha condicion, se tendrá $\alpha^2+p\alpha+q=0$, de donde $q=-\alpha^2-p\alpha$; cuyo valor sustituido en la primitiva la reduce á $x^2+px-\alpha^2-p\alpha=0$, ó á $x^2-\alpha^2+px-p\alpha=0$, que en virtud de la observacion hecha (179) podrémos poner bajo esta forma: $(x+\alpha)(x-\alpha)+p(x-\alpha)=0$, ó $(x-\alpha)(x+\alpha+p)=0$; ahora, el primer miembro de esta ecuacion se convertirá en cero cuando uno cualquiera de sus factores lo sea; luego dicha ecuacion queda verificada ó cuando $x-\alpha=0$ que da $x=\alpha$, ó cuando $x+\alpha+p=0$ que da $x=-\alpha-p$; luego tenemos demostrado lo que nos proponíamos.

Para completar esta discusion, demostrarémos que *una ecuacion de 2.º grado de una sola incógnita solo puede admitir dos valores para la incógnita.*

Para esto supongamos que se tenga la ecuacion $Ax^2+Bx+C=0$ que es la mas general de 2.º grado; y que coincide con la $x^2+px+q=0$, suponiendo que $p=\frac{B}{A}$ y $q=\frac{C}{A}$.

En virtud de lo que acabamos de demostrar, debe haber dos valores de x que satisfagan á dicha ecuacion; y llamándolos α y β, se tendrá

$$A\alpha^2+B\alpha+C=0 \quad (1)$$
$$A\beta^2+B\beta+C=0 \quad (2);$$

pero lo que ahora nos proponemos demostrar es que no hai ningun otro valor γ diferente de α y β que sustituido por x en dicha ecuacion pueda verificarla. En efecto, si supusiéramos que esto era posible, tendríamos $\quad A\gamma^2+B\gamma+C=0 \quad (3)$

restando de la (1), las (2 y 3), resultará

$$A(\alpha^2-\beta^2)+B(\alpha-\beta)=0 \quad (4)$$
$$A(\alpha^2-\gamma^2)+B(\alpha-\gamma)=0 \quad (5);$$

y dividiendo la (4) por el factor $\alpha-\beta$ que es comun en el primer miembro (179), y la (5) por $\alpha-\gamma$ que tambien le es comun será

$$A(\alpha+\beta)+B=0 \quad (6)$$
$$A(\alpha+\gamma)+B=0 \quad (7);$$

y restando la (7) de la (6), será

$$A(\alpha+\beta-\alpha-\gamma)=0, \text{ ó } A(\beta-\gamma)=0.$$

Para que se verifique esta ecuacion, ha de ser precisamente cero uno de los factores; pero A no puede ser cero; porque en este caso la ecuacion (6) daria $B=0$; y siendo $A=0$, y $B=0$ la (1) daria $C=0$ y no habria ecuacion; luego será preciso que sea cero el otro factor, y se tendrá $\beta-\gamma=0$, que da $\beta=\gamma$; luego no pudiendo verificar dicha ecuacion ninguna cantidad que no sea igual al uno de los dos valores de la incógnita, resulta la proposicion.

254 Por el método de las ecuaciones de segundo grado se resuelven las ecuaciones de un grado cualquiera, con tal que la incógnita se halle solo en dos términos, de manera que el esponente que tenga en el uno sea duplo del que tiene en el otro; todas estas ecuaciones tienen esta forma: $x^{2m}+px^m+q=0$ (E) espresando m un número entero positivo. Para resolver esta ecuacion harémos $x^m=z$, y tendrémos elevando al cuadrado que $x^{2m}=z^2$; luego sustituyendo estos valores en la ecuacion (E) se convertirá en $z^2+pz+q=0$ (F), que en virtud de la regla (253) obtendrémos inmediatamente:

$$z=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

que poniendo en vez de z su valor x^m será: $x^m=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, y estrayendo la raiz m de ambos miembros se tendrá:

$$x=\sqrt[m]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}};$$

que tambien podrémos traducir en la siguiente regla.

Para despejar la incógnita en una ecuacion de las circunstancias dichas, se pondrá desde luego la incógnita, despues el signo =, luego un radical cuyo esponente sea el que lleva la incógnita en el segundo término, y debajo de este radical se debe hallar todo lo que hemos dicho en la regla (253).

255 Con la mira de hacer aplicacion de estas reglas nos propondrémos resolver algunas cuestiones.

1.ª *Hallar un número tal que si á su duplo se añade siete veces el cociente que resulte de dividir* 30 *por dicho número, y de todo se quitan* 15 *unidades, resulte nueve veces la mitad de dicho número mas* 5.

Llamando x el número propuesto y siguiendo las reglas espuestas (215) plantearémos la cuestion en esta ecuacion: $2x+7\times\frac{30}{x}-15=9\times\frac{x}{2}+5$, que quitando ante todas cosas los divisores será:

$$4x^2+14\times30-15\times2x=9x^2+5\times2x,$$

ó pasando todos los términos donde hai incógnita al primer miembro, y todos aquellos donde no la hai al segundo, será: $4x^2-30x-9x^2-10x=-14\times30=-420$, ó $-5x^2-40x=-420$; que mudando los signos á toda la ecuacion será: $5x^2+40x=420$; ahora, dividiéndola toda por 5, para que el primer término se halle sin coeficiente, se tendrá: $x^2+8x=84$;
y como la tenemos ya preparada, despejarémos la incógnita inmediatamente diciendo que es igual á la mitad del coeficiente del segundo término con un signo opuesto al que lleva; como el coeficiente del segundo término es 8, su mitad será 4, y por lo mismo pondrémos -4 despues del signo $=$, luego el signo de ambigüedad $\pm$, despues un radical de segundo grado, y despues el cuadrado de 4, mitad del coeficiente del segundo término, que es 16, y luego el 84 con el mismo signo que tiene porque está en el segundo miembro, de manera que será:

$$x=-4\pm\sqrt{16+84}=-4\pm\sqrt{100}=-4\pm10.$$

Como aquí sacamos un signo de ambigüedad nos resultan dos valores para x, uno de tomar el signo superior, y otro el inferior; y tendrémos dos números que satisfarán á la condicion propuesta, á saber:

$$x=-4+10=+6,\ \text{y otro}\ x=-4-10=-14.$$

2.ª *Hallar un número de tres cifras tales que la primera á la izquierda mas la tercera equivalgan á 5 veces la segunda; que el producto de la primera por la tercera esceda al de 9 por la segunda en una cantidad igual á la primera; y que en fin, escribiendo estas tres cifras en un órden inverso se tenga un número con 198 unidades ménos que el propuesto.*

{ Sean x, z, u las tres cifras del número pedido, y tendrémos que dicho número estará espresado por $100x+10z+u$. Pero en virtud de las condiciones dadas $x+u=5z(a)$; $xu-9z=x(b)$ y $100u+10z+x=100x+10z+u-198(c)$; las cuales se reducen á $x+u-5z=0(d)$, $x(u-1)-9z=0(e)$, $99u-99x=-198$, ó dividiendo esta por 99, será $u-x=-2(f)$ que da $u=x-2(g)$.

Restando la (f) de la (d) se tiene $2x-5z=2$, que da $z=\dfrac{2x-2}{5}(h)$; y sustituyendo en la (e) en vez de u su valor $x-2$, será..... $x(x-2-1)-9z=0$, ó $x(x-3)-9z=0(i)$; en la cual sustituyendo en vez de z su valor $\dfrac{2x-2}{5}$, resulta $x^2-3x-9\times\dfrac{2x-2}{5}=0$, ó $5x^2-15x-18x+18=0$, ó $5x^2-33x=-18$, ó $x^2-\frac{33}{5}x=-\frac{18}{5}$, que dá (253) $x=\frac{33}{10}\pm\sqrt{(\frac{33}{10})^2-\frac{18}{5}}=\dfrac{33\pm\sqrt{1089-360}}{10}=\dfrac{33\pm\sqrt{729}}{10}=\dfrac{33\pm27}{10}$; de donde $x=\dfrac{33+27}{10}=\frac{60}{10}=6$; $x=\dfrac{33-27}{10}=\frac{6}{10}=0{,}6$.

Sustituyendo el valor entero en la (h), se tiene $z=\dfrac{12-2}{5}=\frac{10}{5}=2$; y la (g) da $u=6-2=4$. Así el número es 624 que satisface á la cuestion.

3.ª *Se pide un número tal que si del cuádruplo de su cubo se resta cinco veces el cociente que resulta de dividir 40 por el mismo cubo, resulte el cubo del mismo número ménos una unidad.*

Teniendo presente lo dicho (215) y llamando x el número que se busca, tendrémos planteada la cuestion en la siguiente ecuacion:

$4x^3-5\times\dfrac{40}{x^3}=x^3-1$, que quitando los divisores da: $4x^6-5\times40=x^6-x^3$, que se convierte en $4x^6-x^6+x^3=5\times40=200$, ó en $3x^6+x^3=200$; dividiéndola ahora por 3 será: $x^6+\frac{1}{3}x^3=\frac{200}{3}$;
que para aplicarle la regla (254) pondrémos despues de x el signo $=$, luego un radical de tercer grado, y debajo de este radical lo mismo que hubiéramos puesto si hubiera sido la ecuacion simplemente de segundo grado; de manera que tendrémos

$$x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{6}\pm\sqrt{\tfrac{1}{36}+\tfrac{200}{3}}}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{6}\pm\sqrt{\tfrac{1}{36}+\tfrac{200.12}{3.12}}}=\ldots\ldots\ldots$$
$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{6}\pm\sqrt{\tfrac{1}{36}+\tfrac{2400}{36}}}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{6}\pm\sqrt{\tfrac{2401}{36}}}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{6}\pm\tfrac{49}{6}};$$

que separando los valores da: $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{6}+\frac{49}{6}}=\sqrt[3]{\frac{48}{6}}=\sqrt[3]{8}=2$,
y $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{6}-\frac{49}{6}}=\sqrt[3]{-\frac{50}{6}}=-\sqrt[3]{\frac{25}{3}}=$ (§ 251)$-$ ....
$\sqrt[3]{\frac{225}{27}}=-\dfrac{\sqrt[3]{225}}{3}=-\dfrac{6{,}09\ \&c.}{3}$.

4.ª *Hallar un número tal que si del cuádruplo de dicho número se quita el séptuplo de su raiz cuadrada, resulten 15.*

{ Planteada esta cuestion, se tiene: $4x-7\sqrt{x}=15(\alpha)$; y dividiendo por 4 será $x-\frac{7}{4}\sqrt{x}=\frac{15}{4}$, ó $x-\frac{7}{4}x^{\frac{1}{2}}=\frac{15}{4}$.

{ Aquí observamos que el esponente 1 de la x en el primer término es duplo del $\frac{1}{2}$ que tiene en el segundo; por lo que se podrá resolver por la fórmula (254), y observando que aquí $m=\frac{1}{2}$, $p=-\frac{7}{4}$, y $q=-\frac{15}{4}$, será

$$x=\sqrt[\frac{1}{2}]{\tfrac{7}{8}\pm\sqrt{(\tfrac{7}{8})^2+\tfrac{15}{4}}}=\left(\tfrac{7}{8}\pm\sqrt{\tfrac{49}{64}+\tfrac{240}{64}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}}}=(\S\ 202)\left(\tfrac{7}{8}\pm\sqrt{\tfrac{289}{64}}\right)^2=$$
$$\left(\frac{7\pm\sqrt{289}}{8}\right)^2=\left(\frac{7\pm17}{8}\right)^2;$$ que da $x=\left(\dfrac{7+17}{8}\right)^2=(\frac{24}{8})^2=(3)^2=9$,
y $x=\left(\dfrac{7-17}{8}\right)^2=\left(\dfrac{-10}{8}\right)^2=\frac{100}{64}=\frac{25}{16}$; luego queda resuelta la cuestion, y satisfacen á ella los números 9 y $\frac{25}{16}$.

Hemos resuelto directamente la ecuacion (α) por la regla (254) para que se vea su generalidad; pero hubiéramos podido trasformar dicha ecuacion (α) en una regular del segundo grado, del modo siguiente: dejando solo en el primer miembro el término donde se halla el radical; se tiene $-7\sqrt{x}=14-4x$; que elevando al cuadrado será $49x=225-120x+16x^2$, que preparándola se convierte en $x^2-\frac{169}{16}x=-\frac{225}{16}$; la cual resuelta por la regla (253) da por último $x=9$ y $x=\frac{25}{16}$, que es el mismo resultado.

5.ª *Dividir un número* a *en dos partes, cuyo producto sea el mayor posible ó un máximo.*

Llamando x una de las partes, la otra será $a-x$, representemos por z el mayor producto cuyo valor nos es ahora desconocido, y se tendrá $z=x(a-x)$, ó $ax-x^2=z$, ó $x^2-ax=-z$; que da (253) $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-z}$; este resultado hace ver que los dos valores de x, no pueden ser reales, sino se tiene $z<\frac{1}{4}a^2$, ó á lo ménos $=\frac{1}{4}a^2$; de donde se puede concluir que el mayor valor que puede recibir z, ó el producto de las dos partes es $\frac{a^2}{4}$; pero haciendo $z=\frac{a^2}{4}$, los dos valores de x se reducen á $x=\frac{a}{2}$; luego para que las dos partes en que se divida un número a dén el máximo producto es indispensable que sean iguales.

Esta propiedad la podemos demostrar de un modo mas general en el siguiente

Teor. *El producto de un número cualquiera de factores variables, que tomados juntos forman una misma suma, es un máximo, cuando todos los factores son iguales entre sí.*

Dem. Supongamos primero dos factores cuya suma sea $2p$; si se representa uno de ellos por $p+d$, el otro será $p-d$; y su producto será (179) p^2-d^2; pero este valor es siempre menor que p^2, producto que resulta de ser p cada una de las partes; luego el producto de dos factores, que forman una misma suma es un máximo cuando los dos factores son iguales.

Si se toman tres factores cuya suma sea $3p$, y se representa uno por $p+a$; otro por $p+b$, el tercero será $p-a-b$, y el producto de los tres estará espresado por $(p+a)(p+a)(p-a-b)=p^3-(a^2+b^2)p-ab\times\ldots\ldots(a+b+p)$; pero entre los tres factores $p+a$, $p+b$, $p-a-b$, se encuentran necesariamente dos que son á un mismo tiempo ó mayores ó menores que p, pues que si todos fuesen mayores ó menores que p, su suma seria mayor ó menor que $3p$, lo que es contra el supuesto; así se puede siempre suponer que a y b son de un mismo signo; si se suponen positivas, el producto $p^3-(a^2+b^2)p-ab(p+a+b)$ es menor que p^3; si son negativas, el producto $p^3-(a^2+b^2)p-ab(p-a-b)$ es tambien menor que p^3, pues que $p-a-b$ es positivo; así, el producto de tres factores que forman una misma suma es un máximo cuando los tres factores son iguales; se advierte ademas que el producto de tres factores desiguales que forman una misma suma aumenta á medida que la desigualdad de estos factores disminuye.

En general, el producto de un número cualquiera de factores, que forman una misma suma no puede ser un *máximo* si los factores no son iguales entre sí; porque si m, n, p, q, r..... fuesen los factores que corresponden al producto *máximo* y hubiese desigualdad entre dos factores m y n por ejemplo, se podria sin alterar en nada los otros factores p, q, r..... sustituir á los m y n otros dos iguales y cuya suma fuese la misma; en cuyo caso se tendria un producto mayor que $mnpqr\ldots$, por consiguiente este último producto no seria el *máximo*, lo que es contra la hipótesis. Luego queda demostrada la proposicion.

6.ª *Dividir una cantidad dada en un número cualquiera de partes, de manera que el producto de estas partes elevadas cada una á potencias dadas sea un máximo.*

Si se espresa por a la cantidad dada, por x, u, z, t.... las partes en que se descompone esta cantidad, y se supone que m, n, p, q..... señalen los grados de las potencias de x, u, z, t..... será necesario que se tenga al mismo tiempo

$x+u+z+t+\ldots\ldots=a$ y $x^m u^n z^p t^q\ldots\ldots=$ *máximo.*

Para satisfacer á la última condicion, observarémos que pues $x^m=\frac{m^m x^m}{m^m}=m^m\left(\frac{x}{m}\right)^m$ se tiene siempre

$$x^m u^n z^p t^q\ldots\ldots=m^m n^n p^p q^q\ldots\ldots\left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{u}{n}\right)^n\left(\frac{z}{p}\right)^p\left(\frac{t}{q}\right)^q\ldots\ldots;$$

y como $m^m n^n p^p q^q$ es constante, no se puede satisfacer á la condicion enunciada sino en tanto que $\left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{u}{n}\right)^n\left(\frac{z}{p}\right)^p\left(\frac{t}{q}\right)^q\ldots\ldots$ sea un máximo. Pero este producto contiene un número m de factores iguales á $\frac{x}{m}$, cuya suma es x, un número n de factores iguales con $\frac{u}{n}$, cuya suma es u, un número p de factores iguales á $\frac{z}{p}$, cuya suma es z, un número q de factores iguales á $\frac{t}{q}$, cuya suma es t y así sucesivamente; luego todos estos factores son en el número de $m+n+p+q\ldots\ldots$; y como su suma es una cantidad constante igual con a, el máximo de su producto no se puede verificar (teor. ant.) á ménos que no sean todos iguales entre sí; por consiguiente cada una de las partes es igual con $\frac{a}{m+n+p+q+\ldots\ldots}$ y como x contiene un número m de estas partes, u contiene un número n, z un número p, t contiene un número q, y así sucesivamente se hallará que

$$x=\frac{ma}{m+n+p+q+\ldots.}$$
$$u=\frac{na}{m+n+p+q+\ldots.}$$
$$z=\frac{pa}{m+n+p+q+\ldots.}$$
$$t=\frac{qa}{m+n+p+q+\ldots.}$$

Así las partes en las cuales se debe descomponer la cantidad a son proporcionales á los grados de sus potencias.

Cor. Lo que se acaba de demostrar se puede facilmente estender al caso en que las potencias fuesen fraccionarias; porque si el producto $x^{\frac{m}{m'}}\times u^{\frac{n}{n'}}\times z^{\frac{p}{p'}}\times t^{\frac{q}{q'}}\times\ldots.$ es un máximo, es preciso que este producto elevado á la potencia $m'n'p'q'\ldots.$ sea tambien un máximo; y como por esta operacion se refiere el caso que consideramos á aquel en que se tratase de hacer un máximo del producto

$x^{mn'p'q'\ldots}\,u^{nm'p'q'\ldots}\,z^{pm'n'q'\ldots}\,t^{qm'n'p'\ldots}$, es necesario que los valores de x, u, z, $t\ldots.$ sean respectivamente iguales á la cantidad a multiplicada por la relacion del esponente de cada una de las variables en este último producto, á la suma de los esponentes de todas estas variables; así se tendrá aun

$$x=\frac{m}{m'}a:\left(\frac{m}{m'}+\frac{n}{n'}+\frac{p}{p'}+\frac{q}{q'}+\ldots\right)$$
$$u=\frac{n}{n'}a:\left(\frac{m}{m'}+\frac{n}{n'}+\frac{p}{p'}+\frac{q}{q'}+\ldots\right)$$
$$z=\frac{p}{p'}a:\left(\frac{m}{m'}+\frac{n}{n'}+\frac{p}{p'}+\frac{q}{q'}+\ldots\right)$$
$$t=\frac{q}{q'}a:\left(\frac{m}{m'}+\frac{n}{n'}+\frac{p}{p'}+\frac{q}{q'}+\ldots\right)$$

7.ª *Baco encontró á Sileno dormido junto á un tonel lleno de vino; y se aprovechó de la ocasion, bebiendo por un espacio de tiempo igual á las tres quintas partes del tiempo que Sileno hubiera empleado en beberse todo el tonel. Sileno despierta y se bebe el vino que queda. Si Baco y Sileno hubieran bebido juntos, el tonel se hubiera vaciado seis horas ántes, y Baco no hubiera bebido sino los dos tercios de lo que dejó á Sileno. Se pregunta ¿cuantas horas necesitaria cada uno por sí solo para beberse todo el tonel?*

Si espresamos por a el número de cuartillos de vino que contenia el tonel; por x el número de horas en que Baco solo se lo podia beber y por $5z$ el tiempo en que lo podia hacer Sileno, tendrémos que Baco en una hora beberá $\frac{a}{x}$ cuartillos y Sileno $\frac{a}{5z}$; y como Baco estuvo bebiendo un espacio de tiempo igual á los $\frac{3}{5}$ de $5z$ horas, ó á $3z$ horas, habrá bebido, durante este tiempo, $3z$ veces $\frac{a}{x}$ cuartillos ó $\frac{3az}{x}$; luego deja á Sileno $a-\frac{3az}{x}=\frac{a}{x}(x-3z)$ cuartillos.

Sileno bebe $\frac{a}{5z}$ en una hora; luego gastaria en beberse dicha cantidad un número de horas espresado por $\dfrac{\frac{a}{x}(x-3z)}{\frac{a}{5z}}=\frac{5z}{x}(x-3z)$. De manera que Baco y Sileno, habiendo bebido sucesivamente, han vaciado el tonel en $3z+\frac{5z}{x}(x-3z)$ horas $=3z+5z-\frac{15z^2}{x}=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $8z-\frac{15z^2}{x}=\frac{z}{x}(8x-15z)$ horas.

Si Baco y Sileno hubiesen bebido juntos, hubieran consumido en una hora $\frac{a}{x}+\frac{a}{5z}=\frac{5za+ax}{5xz}=\frac{a(5z+x)}{5xz}$ cuartillos, es decir, $a(x+5z)$ cuartillos en $5xz$ horas; y por consiguiente los a cuartillos contenidos en el tonel en $\frac{5xz}{x+5z}$ horas: la porcion de vino bebida por Baco durante este tiempo hubiera sido $\frac{5xz}{x+5z}$ veces $\frac{a}{x}$ cuartillos ó $\frac{5az}{x+5z}$ cuartillos.

Luego las ecuaciones del problema son

$$\frac{z}{x}(8x-15z)-6=\frac{5xz}{x+5z},$$
$$\frac{5az}{x+5z}=\frac{a}{x}(x-3z)\tfrac{2}{3};$$

que se reducen á

$$25xz^2-75z^3+3x^2z-6x^2-30xz=0\ (1).$$
$$30z^2+11xz-2x^2=0\ (2).$$

Esta da (253)

$$z=-\frac{11}{60}x\pm\sqrt{\frac{121}{3600}x^2+\frac{2}{30}x^2}=-\frac{11}{60}x\pm\frac{19}{60}x;$$

que separando los valores, da $z=-\frac{11}{60}x+\frac{19}{60}x=\frac{8}{60}x=\frac{2}{15}x$, y $z=-\frac{11}{60}x-\frac{19}{60}x$; pero este valor no nos hace al caso por ser negativo; por lo que sustituirémos el otro en la (ecuac. 1), y nos resultará $x=15$; de donde $z=2$ y $5z=10$. Luego Baco bebiendo solo se hubiera bebido todo el tonel en 15 horas, y Sileno en 10 horas. }

De las razones y proporciones.

256 Se da el nombre de *razon* á la comparacion de dos cantidades; la cantidad que se compara se llama *antecedente*, aquella con que se compara *consecuente*, y lo que resulta de la comparacion se llama *relacion ó esponente de la razon*. Cuando el antecedente es igual con el consecuente la razon se llama *razon de igualdad*; cuando no, se llama razon de *desigualdad*; si el antecedente es mayor que el consecuente se llama de *mayor desigualdad*; y si menor, de *menor desigualdad*. Con dos miras diferentes se puede hacer la comparacion de dos cantidades (*) ó con la mira de averiguar la diferencia que hai entre ellas, ó con la de averiguar las veces que la una contiene á la otra; cuando la comparacion se hace con el objeto de averiguar la diferencia que hai entre dos cantidades se llama *razon aritmética*, y cuando con el objeto de saber las veces que la una está contenida en la otra se llama *razon geométrica*.

La razon aritmética se señala poniendo el antecedente, despues un

(*) *Mr. Wronski dice que hai tres especies de relaciones entre dos números* M *y* N *unidos por otro* P, *á saber*:

1.ª *Relacion de sumacion (llamada relacion* aritmética), *que se espresa* M[:]N, *donde* M—N=P.

2.ª *Relacion de reproduccion (llamada relacion* geométrica), *que se espresa* M:N, *donde* $\frac{M}{N}=P$.

3.ª *Relacion de graduacion (llamada relacion de* saltacion), *que se espresa* M(:)N, *donde* $M^{\frac{1}{N}}=P$.

De donde resultan tres clases de proporciones, y otras tres de progresiones: la progresion por graduacion es $(:)m, m^m, m^{m^m}, m^{m^{m^m}}$, &c.

punto, y luego el consecuente; la geométrica poniendo dos puntos entre el antecedente y el consecuente. Por ejemplo: para señalar la razon aritmética que hai entre 6 y 2, se escribirá 6.2, que se lee: 6 *es aritméticamente á* 2; y para señalar la razon geométrica que hai entre las mismas cantidades, se escribe 6:2 que se lee: 6 *es geométricamente á* 2; ó como estas razones son las que ocurren con mayor frecuencia, se leen omitiendo la palabra geométricamente así: 6 *es á* 2. Al antecedente y consecuente juntos se les da el nombre de *términos* de la razon.

En la primera para encontrar el esponente de la razon restarémos el consecuente del antecedente, y hallarémos que $6-2=4$; para hallarle en la segunda se dividirá el antecedente por el consecuente; y será $\frac{6}{2}=3$. La razon aritmética se deberia señalar poniendo el signo — entre el antecedente y el consecuente, porque no viene á ser otra cosa que la indicacion de una operacion de restar. La geométrica está perfectamente señalada; pues los dos puntos son el signo de la division.

257 Puesto que la razon aritmética no es mas que un modo particular de indicar una resta, se sigue que *no se alterará dicha razon* (84) *aunque á sus dos términos se les añada ó quite una misma cantidad*; y puesto que la razon geométrica no es mas que una division indicada, resulta que *no se alterará aun cuando se multipliquen* (92) *ó partan sus dos términos por una misma cantidad*.

258 Cuando se tienen dos razones de una misma especie, de las cuales la una tiene por antecedente lo que la otra por consecuente, se dice que la una es *inversa* de la otra; y así 2.6 es inversa de la que teníamos ántes 6.2; y el esponente de su razon será tambien lo contrario de lo que era ántes, como en efecto se verifica, pues que $2-6=-4$; tambien 2:6 es razon geométrica inversa de la 6:2 que teníamos ántes, y el esponente de su razon es el contrario de lo de allí, puesto que allí era 3 ó $\frac{3}{1}$; y aquí es $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

259 Se llama *proporcion* á la igualdad de dos razones de una misma especie (*); y como las razones pueden ser de dos clases, á saber, *aritméticas* y *geométricas*, resulta que las proporciones serán *aritméticas*

(*) *Bois-Bertrand opina que para completar esta definicion deberia añadirse, que los antecedentes estuviesen afectos de unos mismos signos, y que sucediese lo mismo á los consecuentes; fundándose en que siendo verdadero que* $\frac{-7}{3}=\frac{28}{-12}$, *seria absurdo el deducir* $(-7):3::28:(-12)$; *pero en mi concepto no hai necesidad de añadir nada; pues ántes de poner la ecuacion en proporcion se puede prescindir del signo: ademas de que no resulta aquí otro absurdo que el de suponer que se comparan cantidades que no son de una misma naturaleza, y en este inconveniente se incurria igualmente añadiendo la circunstancia que espresa Bois-Bertrand.*

y *geométricas.* Proporcion aritmética será la igualdad de dos razones aritméticas, y proporcion geométrica la igualdad de dos razones geométricas (*). Como en una proporcion entran dos razones, y cada una consta de un antecedente y de un consecuente, resulta que en toda proporcion entran cuatro cantidades, dos antecedentes y dos consecuentes.

Para escribir una proporcion aritmética se pone una razon á continuacion de la otra, poniendo dos puntos en medio; y para escribir una geométrica se ponen cuatro puntos entre las dos razones. Para leerlas se lee cada razon separadamente, y cuando se llega á los dos puntos en la aritmética se leen *como*; y los cuatro puntos en la geométrica tambien se leen *como*.

260 Los principiantes encuentran mucha dificultad para escribir por sí mismos una proporcion; así les vamos á dar una regla para formarlas. *Para obtener una proporcion aritmética se pondrán dos cantidades cualesquiera, separadas entre sí con un punto paraque formen la primera razon; despues se pondrán dos puntos, y luego á las dos cantidades primitivas se les añadirá ó quitará una misma cantidad; y se pondrán estos dos números despues de los dos puntos, separados entre sí con un punto, los cuales formarán la segunda razon;* y siempre que hagan esto estarán seguros de que han puesto una proporcion, puesto que la primera razon, habiéndose añadido á cada uno de sus términos una misma cantidad, no se ha alterado (257); luego la segunda razon que hemos escrito es la misma que la primera. *Para formar una proporcion geométrica se escribirán dos cantidades para que formen la primera razon; luego, se pondrán los cuatro puntos, y despues por segunda razon lo que resulte de multiplicar ó dividir por una misma cantidad los dos términos de la primera.* Como esta multiplicacion ó division no altera la razon (257), no queda duda en que por este medio tendrán escrita una proporcion geométrica.

Propongámonos, por ejemplo, escribir una proporcion aritmética, y así, lo primero que harémos será poner dos cantidades cualesquiera 8 y 3, separadas con un punto, y luego poner los dos puntos y añadir ó quitar

(*) *Algunos llaman* proporcion por diferencia *á la proporcion aritmética* y proporcion por cociente *á la geométrica. Otros llaman* equidiferencia *á la proporcion aritmética; y designan con el simple nombre de* proporcion, *á lo que hasta aquí se ha llamado* proporcion geométrica *ó* proporcion por cociente; *pero en mi concepto se deberia designar la aritmética con el nombre de* equidiferencia, *y la geométrica con el nombre de* equicociente. *Sin embargo, sobre este particular no harémos novedad en el lenguage; pues aunque estamos convencidos de que es indispensable una reforma filosófica en la nomenclatura y notacion de las matemáticas, lo estamos igualmente de que todas estas variaciones parciales no producen utilidad.*

á las anteriores una misma cantidad, por ejemplo añadir 4, de manera que tendrémos 8.3:12.7; esta proporcion la leeríamos diciendo: 8 *es aritméticamente á* 3 *como* 12 *á* 7, donde vemos que hai igualdad de razones, porque $8-3=5$ y $12-7=5$.

Si en vez de añadir 4 las hubiéramos quitado, tendríamos 8.3:4.—1, donde vemos que tambien hai igualdad de razones porque $8-3=5$, y $4-(-1)=4+1=5$. Si se quiere que no resulten cantidades negativas se evitará añadiendo siempre.

Propongámonos ahora escribir una proporcion geométrica; para lo cual escribirémos dos cantidades cualesquiera para que formen la primera razon, por ejemplo, 15 y 3; y despues de puestos los cuatro puntos multiplicarémos ó dividirémos ambas cantidades por otra cantidad cualquiera, tal como 4, y tendrémos, multiplicando, la proporcion 15:3::60:12; esta proporcion la leeríamos diciendo: 15 *es geométricamente* ó simplemente 15 *es á* 3 *como* 60 *á* 12; y vemos que es proporcion porque $\frac{15}{3}=5$, y $\frac{60}{12}=5$.

Si hubiéramos dividido por 4, hubiera resultado $15:3::\frac{15}{4}:\frac{3}{4}$ que tambien forman proporcion porque $\frac{15}{3}=5$, y $\frac{\frac{15}{4}}{\frac{3}{4}}=(\S\ 122)\ \frac{15.4}{3.4}=\frac{15}{3}=5$; pero si se quiere evitar el que haya quebrados, nunca se procederá dividiendo ambos términos por una misma cantidad, sino multiplicándolos.

261 De los cuatro términos que componen una proporcion se llaman antecedentes el primero y el tercero, y consecuentes el segundo y el cuarto. El primero y el último se llaman *estremos*, el segundo y tercero *medios*; el primero y segundo se llaman los dos *primeros* términos, y el tercero y cuarto se llaman los dos *segundos* ó los dos *últimos.*

Cuando los medios están representados por diferentes cantidades como en las proporciones que hemos puesto hasta ahora, las proporciones se llaman *discretas*; pero cuando el antecedente de la segunda razon es el mismo que el consecuente de la primera, entónces los medios están representados por una misma cantidad, y la proporcion se llama *continua.* Para formar una proporcion continua aritmética, se pondrá por tercer término de la proporcion el segundo, y para poner el cuarto se quitará á este lo que el primero llevaba al segundo, ó se le añadirá lo que el segundo llevaba al primero. Así, para escribir una proporcion aritmética continua pondré por primera razon cualquiera, v. g. 6.11; despues del 11 pondré los dos puntos, luego el mismo 11, y despues de un punto lo que resulta de añadir 5 al 11; y así tendré la proporcion 6.11: 11.16.

Si el antecedente fuese mayor que el consecuente le quitaria las unidades que aquel llevase á este, de manera que si por primera razon hubiera puesto 9.7 tendria 9.7:7.5.

La proporcion aritmética continua se escribe de un modo abreviado poniendo ántes este signo $\div$, despues el primer término, luego el medio, y despues el otro estremo separándolos con un punto; de manera que esta última se escribe $\div 9.7.5$.

La raya ántes con el punto encima y debajo sirve para indicar que el segundo término se ha de repetir, y se lee 9 *es aritméticamente á* 7 *es á* 5; que es una espresion abreviada de la que verdaderamente indica; pues con estension se leeria 9 *es aritméticamente á* 7 *como* 7 *es á* 5.

Para formar una proporcion geométrica continua no hai mas que dividir los dos términos de la razon por el esponente de dicha razon. Así, para escribir una proporcion geométrica continua escribirémos dos números cualesquiera para formar la primera razon tales como 12 y 6, dividirémos ambos términos por el esponente 2 de la razon, y se tendrá $12:6::6:3$, que se escribe así abreviadamente $\div\!\div 12:6:3$; donde la raya con los dos puntos encima y los dos debajo, indica que el segundo término se ha de repetir, y se lee abreviadamente así: 12 *es á* 6 *es á* 3 y con estension de este modo: 12 *es á* 6 *como* 6 *es á* 3.

Cuando no se lleve otro objeto que el de formar una proporcion continua, conviene para evitar todos los casos el tener que poner quebrados, el empezar por un número cualquiera, despues poner por segundo término un múltiplo cualquiera de este número, y luego para el tercer término se toma el mismo múltiplo del múltiplo anterior. Por ejemplo, pondrémos primero un número cualquiera 7, despues un múltiplo cualquiera de este, tal como 21 que es el triplo, y este será el medio; para hallar el otro estremo tomarémos el mismo múltiplo del 21, esto es, el triplo y se tendrá $7:21::21:63$ ó $\div\!\div 7:21:63$.

262 La propiedad fundamental de la proporcion aritmética es que *la suma de los estremos es igual con la suma de los medios en la discreta y con el duplo del término medio en la continua.*

Para demostrarlo supongamos la proporcion $7.4:13.10$; y tendrémos que como proporcion es lo mismo que igualdad de razones, y la razon se halla restando el consecuente del antecedente, la proporcion anterior será la misma que esta ecuacion $7-4=13-10$; y como añadiendo á ambos miembros de una ecuacion una misma cantidad no se altera, resulta que si añadimos aquí la suma de los consecuentes, á saber $4+10$, tendrémos: $7-4+4+10=13-10+4+10$;
pero en el primer miembro -4 y $+4$ se destruyen, y en el segundo tambien se destruye -10 con $+10$; luego la ecuacion anterior se nos convertirá en $7+10=13+4$;
pero 7 y 10 son los estremos, 13 y 4 los medios, luego en toda proporcion aritmética *la suma de los estremos &c.*

Paraque quede la demostracion dada con toda generalidad, pondrémos una proporcion aritmética general, tal como $a.b:c.d$; la cual nos dará, por ser proporcion igualdad de razones, $a-b=c-d$, que trasladando (220 *cor.*) se convertirá en $a+d=c+b$; pero a y d son los estremos, c y b los medios, luego &c.

Si la proporcion fuese continua tal como $\div a.b.c$, tendríamos escribiéndola con estension: $a.b:b.c$ ó igualando las razones $a-b=b-c$;
que trasladando será $a+c=b+b=2b$; pero a y c son los estremos y b es el término medio, luego en toda proporcion aritmética continua la suma de los estremos es igual al duplo del término medio.

Hemos dicho que esta propiedad es fundamental, porque si cuatro cantidades son tales que la suma de dos de ellas es igual con la suma de las otras dos, estas formarán proporcion; en la cual estarán formados los medios por los dos sumandos que forman un miembro, y los estremos por los otros dos sumandos.

En efecto, si suponemos que se tenga $a+d=c+b$, vamos á probar que entre estas cuatro cantidades hai la proporcion $a.b:c.d$; porque si de ambos miembros de la ecuacion $a+d=c+b$ quitamos la suma de dos, que cada una esté en un miembro, por ejemplo, de d y de b, será: $a+d-b-d=c+b-b-d$, que hecha la destruccion queda en $a-b=c-d$; pero $a-b$ espresa la razon aritmética que tiene a con b, y $c-d$ la que c tiene con d; luego pues que tenemos igualadas estas dos razones, podemos poner la proporcion $a.b:c.d$.

{ De aquí se deduce que *todas las mudanzas que se hagan padecer á una proporcion aritmética, y que no destruyan la igualdad que debe haber entre la suma de los estremos y la de los medios, se podrá efectuar sin que deje de subsistir proporcion.* Luego 1.º se podrán mudar de lugar los medios; 2.º se podrán poner los medios en vez de los estremos y viceversa; 3.º se podrá añadir ó quitar á ambos antecedentes ó á ambos consecuentes una misma cantidad; 4.º se pueden sumar y restar ordenadamente dos proporciones aritméticas sin que deje de haber proporcion; y 5.º se pueden multiplicar y dividir todos los términos de una proporcion aritmética sin que deje de subsistir proporcion. Sobre cuyo punto no nos detendrémos, porque no trae grande utilidad en la práctica}.

263 En esta propiedad fundamental de la proporcion aritmética está fundada la resolucion de tres problemas.

1.º *Dados tres términos de una proporcion aritmética discreta encontrar el cuarto*; para lo cual no hai mas que *sumar el segundo con el tercero, y de esto restar el primero*; por ejemplo, si se nos pide hallar el cuarto término de esta proporcion $5.9:12$ dirémos: 12 y 9 son 21; 21 ménos 5 son 16, y el cuarto término será 16; de manera que se tendrá $5.9:12.16$.

La demostracion estriba en que si llamamos a, b, c á los tres términos dados y x al cuarto, tendrémos $a.b:c.x$;
pero debiendo ser la suma de los estremos igual á la de los medios, deberémos tener $a+x=b+c$, que (219) da $x=b+c-a$, cuya espresion traducida al lenguage vulgar da la regla.

El segundo problema se enuncia. *Dados dos términos hallar el tercero:* y quiere decir que en una proporcion continua se conoce el primer término y el término medio, y se pide el otro estremo: para encontrarle *se duplica el segundo, y de esto se resta el primero.* Por ejemplo, si quisiera hallar un tercer término á 17 y á 24 diria: el duplo de 24 es 48; 48 ménos 17 son 31, luego tendré $\div 17.24.31$.

Esto está fundado en que si se nos pidiese el tercer término correspondiente á estos dos a y b, llamándole x porque no le conocemos, se tendrá $\div a.b.x$; y como en una proporcion continua la suma de los estremos es igual al duplo del término medio, será: $a+x=2b$; de donde (219) sale $x=2b-a$, que traduciendo da la regla espuesta.

Finalmente, el tercer problema es: *Dados dos términos hallar un medio proporcional aritmético*, que está reducido á encontrar el término medio de una proporcion continua; para lo cual se *sumarán los estremos y de la suma se tomará la mitad*; v. g., si se quisiese hallar un medio entre 7 y 29, sumaria el 7 con el 29, y de la suma 36 tomaria la mitad que es 18; y tendria $\div 7.18.29$.

Esto está fundado en que dándosenos los dos estremos a y b paraque encontremos el medio, le podrémos llamar x y tendrémos $\div a.x.b$; de donde (§ 262) $a+b=2x$, y (§ 221) $x=\dfrac{a+b}{2}$, que traduciendo este resultado al lenguage vulgar da la regla.

264 La propiedad fundamental de la proporcion geométrica es *que el producto de los estremos es igual al producto de los medios en la discreta, y al cuadrado del término medio en la continua.*

Para demostrarlo desde luego con generalidad, supongamos que se tenga la proporcion geométrica $a:b::c:d$.

Como proporcion es lo mismo que igualdad de razones, y la razon geométrica se halla dividiendo el antecedente por el consecuente, tendrémos $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$; de donde quitando los divisores (223 *cor.*) resultará $ad=cb$; pero a y d son los estremos, c y b son los medios; luego *en toda proporcion geométrica discreta el producto de los estremos &c.*

Supongamos que se tenga ahora la continua $\div a:b:c$, que puesta con estension es $a:b::b:c$ y da $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$; de donde quitando los divisores se sacará $ac=bb=b^2$; y como a y c son los estremos y b el medio, resulta que en toda proporcion continua *el producto de los estremos es igual al cuadrado del término medio.*

Hemos dicho que esta propiedad es fundamental, porque siempre que se tengan cuatro cantidades tales que el producto de dos de ellas sea igual con el de las otras dos, estas cantidades formarán una proporcion,

en que las dos que formen un producto estén por medios y las otras dos por estremos. En efecto, supongamos que se nos dé la ecuacion $ad=bc$; si dividimos ambos miembros por el producto bd de dos de ellas, con tal que ambas no se hallen en un mismo miembro, será: $\dfrac{ad}{bd}=\dfrac{bc}{bd}$, ó simplificando $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$; pero el primer miembro espresa la razon que tiene a con b, y el segundo la de c con d; luego puesto que son iguales, podrémos ponerlos en forma de proporcion de este modo: $a:b::c:d$ que es la primitiva.

Ocurre con mucha frecuencia el tener que poner en proporcion una ecuacion y al contrario; y así, segun Vieta, se podia decir que *proporcion era la que constituia la ecuacion, y ecuacion la resolucion de la proporcion.*

Para sacar una ecuacion de una proporcion, no hai que hacer mas que efectuar el producto de estremos é igualarle con el de los medios; y para poner en proporcion una ecuacion cualquiera, poner en los estremos todas las cantidades que formen un producto, y por medios las que formen el otro.

Propongámonos, por ejemplo, descomponer en proporcion la ecuacion $6a^7b^2cd=35m^4e^5n^2$: con tal que por estremos pongamos todas las cantidades que forman el un miembro, y por medios las otras, de cualquier modo que los pongamos tendrémos proporcion; y así, de esta ecuacion podrémos deducir todas las proporciones que se ven en (A).

$$\left.\begin{array}{ll} (1.^a) & 6a^7:35m^4::e^5n^2:b^2cd \\ (2.^a) & 6a^7b^2:35m^4e^5::n^2:cd \\ (3.^a) & 6a^7b^2c:35m^4e^5n::n:d \\ (4.^a) & 3a^7:5m^4::7e^5n^2:2b^2cd \end{array}\right. \quad (A)$$

y otras muchísimas.

265 La propiedad fundamental de la proporcion geométrica tambien conduce á la resolucion de tres problemas: 1.º *Dados tres términos de una proporcion hallar el cuarto*; para lo cual *se multiplica el segundo por el tercero, y el producto se parte por el primero.* Así, si nos proponemos hallar el cuarto término á estos tres 5, 7 y 15, multiplicarémos el 7 por el 15, y el producto 105 le dividirémos por 5, lo que nos dará 21; y tendrémos que la proporcion completa será: $5:7::15:21$.

Cuando se va á buscar el cuarto término se suele suponer que es igual con x, y luego se van indicando allí mismo las operaciones en esta forma:

$$5:7::15:x=\frac{7\times15}{5}=\frac{7\times3\times5}{5}=7\times3=21;$$

esto está fundado en que suponiendo que x sea el cuarto término que se busca á los tres a,b,c, tendrémos $a:b::c:x$, que multiplicando estremos y medios da $ax=bc$, ó dividiendo por a, $x=\dfrac{bc}{a}$, que traduciendo este resultado al lenguage vulgar da la regla.

El 2.º problema es: *Dados dos términos hallar el tercero continuo proporcional*; para lo cual *se cuadrará el segundo, y este cuadrado se partirá por el primero*; de manera que si quisiéramos hallar el tercer término á estos dos 4 y 6, diríamos: el cuadrado de 6 es 36; 36 dividido por 4, da 9; luego 9 es el tercer término pedido, y tendré $\div\div 4:6:9$.

Esto está fundado en que llamando en general a y b á los dos términos dados, y x al tercero que buscamos, deberémos tener $\div\div a:b:x$, de donde (§ 264) $ax=b^2$, y dividiendo por a será $x=\frac{b^2}{a}$ que da la regla.

Finalmente, el 3.er problema está reducido á *encontrar un medio continuo proporcional á dos cantidades dadas*; para esto *se multiplican dichas dos cantidades, y del producto se estrae la raiz cuadrada, la cual será el medio pedido*; de manera que si entre 3 y 27 quisiéramos encontrar un medio, multiplicaríamos el 3 por el 27, y del producto 81 estraeríamos la raiz cuadrada, que es 9, y nos dará $\div\div 3:9:27$.

Cuando no se puede estraer la raiz cuadrada, ó se dejará indicada ó se aproximará por decimales, de manera que si se nos pidiese hallar un medio entre 5 y 12, multiplicaríamos el 5 por el 12, y del producto 60 estraeríamos la raiz cuadrada; pero como no la tiene exacta la dejaríamos indicada de uno de estos modos: $\sqrt{60}=\sqrt{4\times 15}=2\sqrt{15}$, ó nos aproximaríamos por decimales.

Esta regla está fundada en que llamando a y b á los estremos conocidos, y x al medio que busco, será $\div\div a:x:b$, de donde $x^2=ab$, y $x=\sqrt{ab}$ que da la regla espuesta.

Si el producto ab no es un número cuadrado, no tendrémos de ningun modo un medio exacto, y por consiguiente no hai un número que satisfaga á la condicion de ser un término medio, y de tener una relacion determinada con la unidad; por esta causa se ha llamado á los números incomensurables, números *irracionales*.

De las trasformaciones que se pueden dar á una proporcion sin que deje de subsistir proporcion, que es en lo que consistia la análisis de los antiguos.

266 Ya hemos visto la analogía que hai entre proporcion y ecuacion; y por esta causa los antiguos con el uso de las proporciones conseguian el efecto que nosotros conseguimos por el despejo de las incógnitas, que es mucho mas sencillo; pero no obstante conviene conocer en que consistia el artificio de los antiguos.

Con toda proporcion geométrica se pueden hacer seis cosas sin que deje de subsistir proporcion (*), á saber: *alternar*, *invertir*, *componer*, *dividir*, *permutar* y *convertir*.

(*) *En general se pueden hacer en los términos de una proporcion geométrica todas las alteraciones que se quieran, con tal que subsista*

Alternar es *comparar antecedente con antecedente, y consecuente con consecuente, cuya operacion queda hecha con mudar de lugar los medios ó los estremos*, esto se puede hacer con toda proporcion, porque aunque se muden de lugar los medios ó los estremos, su producto siempre será el mismo; y por tanto permaneciendo el producto de los estremos igual con el de los medios, tendrémos proporcion (264).

Invertir es *comparar consecuente con antecedente en cada una de las razones, cuya operacion queda hecha con poner los medios en lugar de los estremos, y los estremos en lugar de los medios*; esto se puede hacer, porque no altera en nada el producto de los estremos ni el de los medios.

Si suponemos que se nos da la proporcion $a:b::c:d$, y la alternamos se tendrá $a:c::b:d$; y si esta la invertimos resultará $c:a::d:b$; si esta la volvemos á alternar y luego á invertir, tendrémos que despues de ocho trasformaciones nos resulta la proporcion primitiva como se ve en (A):

(1)	$a:b::c:d$	proporcion primitiva.	
(2)	$a:c::b:d$	1.ª alternada	
(3)	$c:a::d:b$	2.ª invertida	
(4)	$c:d::a:b$	3.ª alternada	
(5)	$d:c::b:a$	4.ª invertida	(*A*)
(6)	$d:b::c:a$	5.ª alternada	
(7)	$b:d::a:c$	6.ª invertida	
(8)	$b:a::d:c$	7.ª alternada	
(9)	$a:b::c:d$	8.ª invertida.	

Componer es *comparar la suma de antecedente y consecuente con uno de los dos*; esto es, ó con el antecedente ó con el consecuente.

Para probar que se puede hacer esto con toda proporcion supongamos la primitiva $a:b::c:d$; de donde sale $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ó añadiendo 1 á ambos miembros $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$; ahora reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña en ambos miembros, será $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; que poniendo en proporcion da $a+b:b::c+d:d$ (10), la cual traducida quiere decir que en toda proporcion *la suma de antecedente y consecuente de la primera razon es al consecuente, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda es á su consecuente.*

Para demostrar que tambien se puede comparar con el antecedente, invertirémos la primitiva y nos dará $b:a::d:c$, de donde sale $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, y añadiéndole 1 tendrémos $\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$, que reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, da $\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$, ó $b+a:a::d+c:c$ (11);

la igualdad entre el producto de los estremos y el de los medios; pero las seis que se espresan conviene tenerlas presentes; porque aun se hace uso de ellas frecuentemente con las denominaciones que les damos en el testo.

que respecto de la primitiva manifiesta que tambien se puede comparar *la suma de antecedente y consecuente con el antecedente.*

Dividir una proporcion es *comparar la diferencia de antecedente y consecuente con uno de los dos en cada una de las razones*; esto es, ó bien con el antecedente ó bien con el consecuente.

Para probar que esto se puede hacer en toda proporcion, elegirémos la $a:b::c:d$, que igualando las razones da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y quitando 1 de ambos miembros será $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$,

que reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, dará $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, ó formando proporcion $a-b:b::c-d:d$ (12);

la cual manifiesta que *se puede comparar la diferencia de antecedente y consecuente con el consecuente.*

Para probar que tambien se puede hacer con el antecedente, la invertirémos y dará $b:a::d:c$ que da $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$,

y quitando ambos miembros de la unidad ó restando esta ecuacion de la $1=1$, nos resultará $1-\frac{b}{a}=1-\frac{d}{c}$ ó $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$,

y poniendo en proporcion $a-b:a::c-d:c$ (13),

que manifiesta que tambien se puede comparar con el antecedente. Á todo esto podríamos aun darle mas generalidad, pues si á ambos miembros de la ecuacion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ añadimos la cantidad $\pm n$, tendrémos

$\frac{a}{b}\pm n=\frac{c}{d}\pm n$, ó $\frac{a\pm bn}{b}=\frac{c\pm dn}{d}$, que puesta en proporcion da

$a\pm bn:b::c\pm dn:d$ (13 *); y nos dice que tambien se puede comparar el antecedente despues de añadirle ó quitarle un número cualquiera de veces el consecuente con el consecuente.

Permutar es *mudar de lugar las razones, ó poner la segunda razon por primera y la primera por segunda.*

Para demostrar que esto se puede hacer con toda proporcion, basta recordar que proporcion es la igualdad de dos razones, y que subsistirá siempre la misma igualdad cualquiera que sea la razon que se ponga ántes; ó si queremos demostrarlo por cálculo no tenemos mas que alternar la primitiva, despues invertirla, y luego volverla á alternar, y resultará una proporcion permutada; así es, que la proporcion (4) está permutada respecto de la primitiva (1).

Convertir propiamente es *comparar el antecedente con la suma ó diferencia de antecedente y consecuente*; cuando se compara con la suma

se llama *convertir componiendo*, y cuando con la diferencia *convertir dividiendo.* Para manifestar que toda proporcion se puede convertir componiendo, no tenemos mas que invertir la (11) que nos dará

$a:b+a::c:d+c$ (14),

que comparada con la primitiva manifiesta lo que deseamos.

Invirtiendo la (13) tendrémos $a:a-b::c:c-d$ (15),

que comparada con la primitiva manifiesta que toda proporcion se puede convertir dividiendo.

Tambien se puede comparar el consecuente con la suma de antecedente y consecuente y con la diferencia; pues si invertimos las (10) y (12) tendrémos $\left\{\begin{matrix} b:a+b::d:c+d\ (16)\ y \\ b:a-b::d:c-d\ (17), \end{matrix}\right\}$ que comparadas con la primitiva manifiestan la verdad de que se trata.

De aquí se deduce que podríamos decir en general que convertir es *invertir una proporcion compuesta ó dividida.*

267 Entendido esto, pasemos á demostrar algunas proposiciones que enunciarémos bajo el nombre de teoremas para fijar mas la atencion.

Teor. 1.º *Si los antecedentes de una proporcion son iguales tambien lo serán los consecuentes, y si son iguales los consecuentes tambien lo serán los antecedentes.*

Dem. Porque si en la proporcion $a:b::c:d$ multiplicamos estremos y medios tendrémos $ad=bc$; que si suponemos $a=c$, podrémos suprimirlas y quedará $d=b$; y si supusiéramos $d=b$, despues de suprimidas quedaria $a=c$, que era L. Q. D. D.

Teor. 2.º *Si dos proporciones tienen una razon comun con las otras dos razones tambien se podrá formar proporcion.*

Espl. Sean las dos proporciones $a:b::c:d$, y $a:b::m:n$, que tienen comun la razon $a:b$; digo que tambien se tendrá $c:d::m:n$.

Dem. Pues que proporcion es lo mismo que igualdad de razones, las dos anteriores nos darán $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, y poniendo en esta segunda ecuacion en vez de $\frac{a}{b}$ su igual $\frac{c}{d}$ sacado de la primera, será

$\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$, ó poniendo en forma de proporcion $c:d::m:n$ que es L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que *si dos proporciones tienen unos mismos antecedentes ó unos mismos consecuentes, se podrá formar proporcion con los consecuentes ó antecedentes*; porque alternadas tendrian una razon comun.

Teor. 3.º *Si dos proporciones tienen unos mismos estremos ó medios, con los otros podrémos formar proporcion; pero de manera que los que estaban por medios ó estremos en las dadas, queden tambien formando estremos ó medios en la nueva.*

Espl. Si se tiene $a:b::c:d$ y $m:b::c:n$, se tendrá $m:a::d:n$ ó $a:m::n:d$.

Dem. Porque multiplicando estremos y medios en las proporciones primitivas, se tendrá $bc=ad$, y $bc=mn$; de donde resulta que $ad=mn$, que da $a:m::n:d$ ó $m:a::d:n$, que era L. Q. D. D.

Teor. 4.° *En toda proporcion geométrica la suma de antecedentes es á la de consecuentes como un antecedente es á su consecuente.*

Dem. Sea la proporcion $a:b::c:d$, que alternada será $a:c::b:d$, y componiéndola dará $a+c:c::b+d:d$ ó alternada $a+c:b+d::c:d$(18); pero a y c son los antecedentes de la primitiva, b y d los consecuentes, c un antecedente y d su consecuente; luego si traducimos esta proporcion al lenguage vulgar, tendrémos la proporcion enunciada en el teorema.

Teor. 5.° *En toda proporcion geométrica la diferencia de antecedentes es á la diferencia de consecuentes como un antecedente es á su consecuente.*

Dem. Para demostrarlo elegirémos la misma proporcion $a:b::c:d$, que alternada da $a:c::b:d$, y dividiéndola tendrémos $a-c:c::b-d:d$; que alternada da $a-c:b-d::c:d$ (19) que espresa L. Q. D. D.

Teor. 6.° *En toda proporcion geométrica la suma de antecedentes es á la suma de consecuentes como la diferencia de antecedentes es á la diferencia de consecuentes.*

Dem. Para demostrar esto respecto de la misma proporcion $a:b::c:d$, solo observarémos que las proporciones (18) y (19) que se deducen de ella, tienen comun la razon $c:d$; y por lo mismo con las otras dos podrémos formar proporcion y será $a+c:b+d::a-c:b-d$ (20), que espresa L. Q. D. D.

Teor. 7.° *En toda proporcion geométrica la suma de antecedentes es á su diferencia como la suma de consecuentes es á su diferencia.*

Dem. Porque si alternamos la proporcion anterior (20), tendrémos $a+c:a-c::b+d:b-d$ (21), que espresa L. Q. D. D.

Las proporciones (18), (19), (20) y (21) traducidas respecto de la $a:c::b:d$ que es la primitiva alternada, nos darian estos cuatro teoremas. 1.° *La suma de los dos primeros términos es á la suma de los dos últimos como un consecuente es al otro*; 2.° *La diferencia de los dos primeros términos es á la diferencia de los dos últimos como un consecuente es al otro*; 3.° *La suma de los dos primeros términos es á la suma de los dos últimos como la diferencia de los dos primeros es á la diferencia de los dos últimos*; 4.° *La suma de los dos primeros términos es á su diferencia como la suma de los dos últimos es á su diferencia.*

De todo esto se deduce que una proporcion solo con alternarla é invertirla nos ha dado las ocho trasformaciones que hemos puesto (266). Si alternásemos é invirtiésemos, del mismo modo que lo hemos hecho con la primitiva, la (10) que resulta de componerla comparando con el consecuente, tendríamos otras ocho trasformaciones. Si ejecutásemos lo mismo con la (11) que resulta de componer la primitiva comparando con el antecedente, tendríamos otras ocho trasformaciones. Haciendo lo mismo con la (12) que resulta de dividir comparando con el consecuente, tendríamos otras ocho; tambien resultarian otras ocho de la (13) que resulta de dividir comparando con el antecedente; ejecutando lo mismo con la (20) que resulta de comparar la suma y la diferencia de antecedentes con la suma y diferencia de consecuentes, tendríamos otras ocho; y como nos daria otras ocho cada una de las que resultarian de la (13*) dando á n diferentes valores, se advierte cuan considerable es el número de proporciones que pueden resultar de una dada.

Teor. 8.° *Si cuatro cantidades están en proporcion la suma de la mayor y menor es mayor que la suma de las otras dos.*

Dem. Supongamos que la proporcion sea $8:4::6:3$; por el teorema quinto tenemos $8-6:4-3::8:4$; pero $8>4$, luego $8-6>4-3$; y si á estas cantidades que son desiguales les añadimos una misma cantidad, á saber, la suma $6+3$ de los que sirven de sustraendos será: $8-6+6+3>4-3+6+3$, que despues de hecha la destruccion queda $8+3>6+4$; L. Q. D. D.

268 Si tuviésemos tres ó mas razones iguales como $3:6$; $4:8$; $15:30$,&c. entónces se escriben de este modo: $3:6::4:8::15:30::$&c. ó se escriben abreviadamente así: $3:4:15:$&c.$::6:8:30:$&c.; á un conjunto de razones de esta especie se le caracteriza con el nombre de *serie de razones iguales*; y vamos á probar que en toda serie de razones iguales se verifican las mismas cosas que en una proporcion, que es una serie de dos razones iguales.

Teor. 1.° *En toda serie de razones iguales la suma de todos los antecedentes es á la suma de todos los consecuentes como un antecedente es á su consecuente.*

Dem. Sea v. g. esta la serie de razones iguales $a:b::c:d::m:n::$&c. y tendrémos, tomando las dos primeras, la proporcion $a:b::c:d$, que (267 teor. 4.°) nos dará $a+c:b+d::c:d$, ó poniendo en vez de la razon $c:d$ su igual $m:n$ por el supuesto, será

$$a+c:b+d::m:n;$$

que por el mismo teorema nos dará $a+c+m:b+d+n::m:n$ (α) que espresa la condicion enunciada.

Si hubiese mas razones iguales, en vez de la última $m:n$ sustituiríamos otra; y continuando del mismo modo lo tendríamos demostrado respecto de cuantas razones se tuviesen.

Teor. 2.° *En toda serie de razones iguales la diferencia de antecedentes es á la diferencia de consecuentes como un antecedente es á su consecuente.*

Dem. Supongamos la misma serie $a:b::c:d::m:n::$&c., y tomando las dos primeras tendrémos la proporcion $a:b::c:d$: la cual (267 teor. 5.°) nos dará $a-c:b-d::c:d$; ó poniendo en vez de $c:d$ su igual $m:n$ tendrémos $a-c:b-d::m:n$;

que en virtud del mismo teorema dará $a-c-m:b-d-n::m:n$ (β), que espresa la condicion enunciada.

Teor. 3.° *En toda serie de razones iguales la suma de todos los antecedentes es á la suma de todos los consecuentes como la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes.*

Dem. Como las proporciones (α), (β), tienen comun la razon $m:n$, con las otras dos formarémos proporcion y tendrémos
$a+c+m:b+d+n::a-c-m:b-d-n$ (γ) que espresa L. Q. D. D.

Teor. 4.° *En toda serie de razones iguales la suma de antecedentes es á su diferencia como la suma de consecuentes es á la suya.*

Dem. Porque si alternamos la proporcion anterior tendrémos
$a+c+m:a-c-m::b+d+n:b-d-n$ (δ) que espresa L. Q. D. D.

Teor. 5.° *En toda serie de razones iguales la relacion que tenga un antecedente con la suma de los otros, esa misma tendrá el consecuente correspondiente con la suma de los demas.*

Dem. Sea la serie de razones iguales $a:b::c:d::m:n::p:q::r:s::$ &c. y si consideramos que dicha serie empieza desde la segunda razon tendrémos (teor. 1.°) $c+m+p+r+$ &c.$:d+n+q+s+$ &c.$::c:d$; pero si en vez de la razon $c:d$ ponemos su igual $a:b$, tendrémos

$$c+m+p+r+\&c.:d+n+q+s+\&c.::a:b;$$

la cual permutada y alternada se convierte en
$a:c+m+p+r+$ &c.$::b:d+n+q+s+$ &c. (ε) que era L. Q. D. D.

269 *Cor.* De aquí resulta que *si el primer antecedente es igual con la suma de los demas, el primer consecuente tambien será igual con la suma de los demas consecuentes*; porque si en esta proporcion suponemos $a=c+m+p+$ &c., la primera razon será de igualdad, y por lo mismo lo deberá ser la segunda, pues de otro modo no habria proporcion; luego tendrémos $b=d+n+q+$ &c.

270 Cuando se multiplican dos ó mas razones entre sí, el producto que resulta se llama *razon compuesta*; cuando las razones componentes son dos é iguales, la razon que resulta se llama *duplicada*, y el esponente de la razon equivale al cuadrado del esponente de cualquiera de las primitivas. Cuando son tres é iguales se llama *triplicada*, y el esponente de su razon es el cubo del de cualquiera de las componentes. Cuando son cuatro é iguales se llama *cuadruplicada*; y así sucesivamente.

No se debe confundir razon *dupla* con razon *duplicada*; *tripla* con *triplicada*, &c. De una razon se dice que es *dupla* de otra cuando su esponente es duplo del de ella, y se dice que es duplicada cuando es su cuadrado; *tripla* cuando su esponente es triplo del de la otra, y *triplicada* cuando es el cubo.

Como las razones no son otra cosa que un quebrado, cuyo numerador es el antecedente y el denominador el consecuente, resulta que para multiplicar entre sí dos ó mas razones, se multiplican ordenadamente los antecedentes por los antecedentes, y los consecuentes por los consecuen-

tes. Por ejemplo: si tenemos las tres razones $3:5$; $20:30$; $8:4$ para multiplicarlas, dirémos: 3 por 20 son 60; 60 por 8 son 480; 5 por 30 son 150; 150 por 4 son 600; luego la razon compuesta es $480:600$, ó despues de simplificada dividiendo por 10 (lo que se consigue borrando un cero) será $48:60$, ó $24:30$, ó $12:15$, ó $4:5$.

Para evitar el que resulten los términos demasiado complicados se hace la simplificacion, indicando la razon compuesta por la multiplicacion de sus términos; de manera que la anterior será $3\times20\times8:5\times30\times4$, ó descomponiendo en factores $\cancel{3}.\cancel{4}.\cancel{5}.\cancel{2}.4:\cancel{5}.5.\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{4}$,
que despues de suprimir los factores comunes queda como ántes $4:5$.

Aun se hace con mas prontitud poniendo las razones unas debajo de otras, y viendo la supresion que se puede hacer de los factores de sus términos en esta forma:

$$\begin{array}{c} \cancel{3}:\cancel{5} \\ 5 \\ \cancel{10} \\ \cancel{20}:\cancel{30} \\ 4 \\ 8:\cancel{4} \end{array}$$

Aquí observamos desde luego que el 20 antecedente de la segunda equivale á 5×4, luego le podrémos suprimir con el 5 y el 4 de los consecuentes de las otras; ahora veo que el 30 es lo mismo que 3×10, luego podré suprimir el 3 con el 3, y quedará el 10; que para saber lo que me queda tacho el 30 y pongo á su lado, encima ó donde me quepa, el 10; y como el 8 y el 10 que quedan tienen aun de comun el factor 2, despues de suprimido, queda por último la razon $4:5$ como ántes.

Cor. De aquí se deduce que *en una razon compuesta se puede sustituir en vez de una de las razones componentes cualquiera otra que le sea igual*; porque si tenemos la razon $3\times5:6\times20$ la podrémos poner bajo este aspecto $\frac{3}{6}\times\frac{5}{20}$; y en vez de $\frac{5}{20}$ podrémos poner $\frac{1}{4}$, $\frac{10}{40}$, $\frac{20}{80}$ &c. que le son iguales, y será $\frac{3}{6}\times\frac{5}{20}=\frac{3}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{6}\times\frac{10}{40}=\frac{3}{6}\times\frac{20}{80}=$ &c.,
ó $3\times5:6\times20=3\times1:6\times4=3\times10:6\times40=3\times20:6\times80=$ &c.
ó poniendo los cuatro puntos en vez del signo $=$, será:

$$3\times5:6\times20::3\times1:6\times4::3\times10:6\times40::3\times20:6\times80::\&c.$$

271 Como proporcion es lo mismo que igualdad de razones, resulta que *podrémos multiplicar entre sí ordenadamente* (esto es, antecedente por antecedente y consecuente por consecuente) *dos ó mas proporciones, de manera que los resultados formen proporcion*; porque esto equivale á multiplicar entre sí dos ecuaciones, en cuyo caso el producto es una ecuacion. Luego tambien podrémos multiplicar una proporcion por ella misma; y como en este caso nos resultarán los cuadrados de los términos de la proporcion primitiva, tenemos que *si cuatro cantidades están en proporcion tambien lo estarán sus cuadrados*; y por la misma razon tambien lo estarán los cubos, y en general una potencia cualquiera; y tambien se verifica la inversa, á saber, *que si cuatro cantidades están en proporcion tambien lo estarán sus raices de cualquier grado que sean.* Á esto tambien conduciria la proporcion primitiva $a:b::c:d$, poniéndola bajo la forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; porque elevando ambos miembros de

esta ecuacion á la potencia n, será $\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$ que da $a^n:b^n::c^n:d^n$; y estrayendo la raiz n de la misma ecuacion será

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{c}{d}} \text{ ó } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}} \text{ que da } \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}.$$

Tambien se pueden dividir ordenadamente dos proporciones; porque si tenemos las $a:b::c:d$; y $m:n::p:q$, puestas en ecuacion, dan $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$; y dividiendo estas ecuaciones ordenadamente, se tendrá

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{m}{n}}=\frac{\frac{c}{d}}{\frac{p}{q}}, \text{ ó } (196)\ \frac{an}{bm}=\frac{cq}{dp}.$$

Pero el primer miembro no se altera (191) dividiendo cada uno de sus términos por una misma cantidad tal como mn; lo que nos dará

$$\frac{an}{bm}=\frac{\frac{an}{mn}}{\frac{bm}{mn}}=\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}}$$

y como el segundo tampoco se alterará si dividimos sus dos términos por pq, será $\frac{cq}{dp}=\frac{\frac{cq}{pq}}{\frac{dp}{pq}}=\frac{\frac{c}{p}}{\frac{d}{q}}$;

que igualando estos dos últimos miembros, se tendrá

$$\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}}=\frac{\frac{c}{p}}{\frac{d}{q}};$$ ó poniendo en forma de proporcion será

$\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{p}:\frac{d}{q}$, que es la que resultaria de dividir ordenadamente las dos proporciones primitivas.

Cuando ocurre multiplicar entre sí dos ó mas proporciones convendrá, para hallar desde luego la proporcion compuesta mas sencilla, el ejecutar dicha multiplicacion como hemos dicho de las razones; para lo cual

observarémos que un factor cualquiera que se halle en un estremo se puede suprimir con uno cualquiera de los medios; pero jamas lo puede hacer un factor de un medio con otro del medio, ni uno de un estremo con otro del otro estremo.

Esto está fundado en que no alterándose una razon geométrica cuando se multiplican ó parten sus dos términos por un mismo número, resulta que podrémos multiplicar ó dividir los dos primeros términos ó los dos últimos de una proporcion sin que deje de subsistir proporcion; y como si la alternásemos quedarian los antecedentes de la primitiva formando la primera razon de esta, y sus consecuentes la segunda, resulta que en general se pueden multiplicar ó dividir por una misma cantidad, sin que deje de subsistir proporcion, no solo los dos primeros términos ó los dos últimos: sino tambien el primero y el tercero que son los antecedentes, ó el segundo y el cuarto que son los consecuentes.

Entendido esto, para multiplicar entre sí las tres proporciones

$$15:56::30:112,\quad 16:10::8:5,\ y\ 14:12::7:6$$

$$\begin{array}{c} \overset{\cancel{3}}{\cancel{15}} : \overset{8}{\cancel{56}} :: \cancel{30} : \overset{2}{\cancel{112}} \\ \cancel{16} : \overset{\cancel{2}}{\cancel{10}} :: \cancel{8} : \cancel{5} \\ \overset{\cancel{2}}{\cancel{14}} : \overset{2}{\cancel{12}} :: \cancel{7} : \cancel{6} \\ \hline 1 : 2 :: 1 : 2 \end{array}$$

Las colocarémos como aquí se presenta: lo primero que observamos es que un 5 del 15 puede suprimir un 5 del 10, y quedará del uno un 3, y del otro un 2; el 56 equivaliendo á 7×8, observarémos que el 7 quedará suprimido con el 7 del 14, y por lo mismo quedará del primero un 8 y del segundo un 2; ahora como el 16 es lo mismo que 8×2, le suprimirémos con el 8 que quedó del 56, y con el 2 del 10; ahora, el 12 equivaliendo á 2×6, y el 6 siendo lo mismo que 2×3, podrémos suprimir este 6 con el 2 del catorce y el 3 del 15; de manera que la primera razon queda reducida á 1:2; porque aunque todos los antecedentes se han suprimido queda siempre la unidad, como cuando se hace la simplificacion de los quebrados.

Ahora, para la segunda razon vemos en primer lugar que el 30 se puede suprimir con el 5 y con el 6; el 112 siendo duplo de 56, y 56=7×8, podrémos suprimir el 8 y el 7 con el 56 del 112, y quedará solamente 2 del 112, y la segunda razon quedará reducida tambien á 1:2.

De manera que la proporcion compuesta que resulta es 1:2::1:2; pero como el objeto que se suele llevar al ejecutar una de estas multiplicaciones es el poner la mas sencilla, resulta que aun podrémos simplificar esta dividiendo los consecuentes por 2, y quedará 1:1::1:1 que es la proporcion mas sencilla de todas; á la cual podríamos haber llegado directamente borrando el 2 que quedaba del primer medio con el 2 que quedaba del segundo estremo }.

272 Antes de concluir el asunto de las proporciones dirémos algo acerca de las *desproporciones y desigualdades*.

Á la igualdad de dos razones la hemos llamado proporcion, y la analogía nos conduce á llamar *desproporcion* á la desigualdad de dos razones; y así, pues que $\frac{12}{4}=3$, y $\frac{6}{3}=2$, y $3>2$, tendrémos $\frac{12}{4}>\frac{6}{3}$, ó poniendo estos quebrados en forma de razon será $12:4>6:3$. Con esta espresion á que hemos dado el nombre de desproporcion, se pueden hacer cosas análogas á las que se hacen con las proporciones; así es, que se podrán alternar, porque en la espresion $\frac{12}{4}>\frac{6}{3}$ permanecerá aun desigualdad, aunque se multipliquen ambos miembros por una misma cantidad tal como $\frac{4}{6}$, y será $\frac{12}{4}\times\frac{4}{6}>\frac{6}{3}\times\frac{4}{6}$ ó $\frac{12}{6}>\frac{4}{3}$, ó $12:6>4:3$, que es la primitiva alternada. Tambien se puede invertir; pero en este caso es necesario invertir ó trastornar tambien el signo $>$; porque siendo $\frac{12}{4}>\frac{6}{3}$, si dividimos la unidad por estas dos cantidades tendrémos (§91)

$\frac{1}{\frac{12}{4}}<\frac{1}{\frac{6}{3}}$, ó en virtud de lo dicho (§123) $\frac{4}{12}<\frac{3}{6}$; que da $4:12<3:6$.

Tambien se puede componer, pues si añadimos la unidad á ambas cantidades de la espresion $\frac{12}{4}>\frac{6}{3}$

será $\frac{12}{4}+1>\frac{6}{3}+1$ que da $\frac{12+4}{4}>\frac{6+3}{3}$ ó $12+4:4>6+3:3$.

Del mismo modo demostraríamos las otras propiedades, y que en toda desproporcion hai desigualdad entre el producto de los estremos y el de los medios.

Á las espresiones en que entra el signo $>$ ó el signo $<$ las deberíamos llamar *desecuaciones* por analogía; pero les darémos el nombre de *desigualdades* porque es espresion mas castellana, y observarémos que con estas desigualdades podemos hacer lo mismo que con las ecuaciones; y así, podemos añadir y quitar á ambos miembros una misma cantidad. Se pueden tambien multiplicar y dividir ambos miembros de una desigualdad por toda cantidad positiva; pero si se multiplican ó parten por una cantidad negativa, se debe cambiar el signo de desigualdad. Así, de $a<b$, se deduce con exactitud $3a<3b$, y $\frac{a}{3}<\frac{b}{3}$; y de $-a<-b$, se deduce igualmente $-3a<-3b$, $-\frac{a}{3}<-\frac{b}{3}$; pero de $9>6$ no podemos deducir $9\times-3>6\times-3$, ó $-27>-18$, porque es lo contrario de lo demostrado (167); ni $\frac{9}{-3}>\frac{6}{-3}$ ó $-3>-2$ por la misma razon; sino $9\times-3<6\times-3$, ó $-27<-18$, y $\frac{9}{-3}<\frac{6}{-3}$, ó $-3<-2$.

Tambien se pueden sumar y multiplicar entre sí dos desigualdades permaneciendo desigualdad, con tal que se sumen ó multipliquen ordenadamente, esto es, que se sumen ó multipliquen los miembros mayores entre sí, y los menores entre sí. Porque si eran desiguales cuando

se sumaban ó multiplicaban por iguales, cuando la mayor se sume ó se multiplique por la mayor con mas razon permanecerán desiguales.

No sucede así con la resta; pues aquí solo permanecerá en general desigualdad, cuando de la mayor se reste la menor, porque la resta en este caso será mayor que lo que seria cuando se restasen iguales; y como la division es análoga con la resta, sucederá lo mismo con esta operacion.

Se pueden elevar al cuadrado los dos miembros de una desigualdad cuando son números positivos, así de $5>3$, se deduce $25>9$, pero *si los dos miembros de una desigualdad son de signos cualesquiera, no se puede asegurar de antemano en que sentido subsistirá la desigualdad resultante.*

Así es, que $-2<3$, da $(-2)^2$ ó $4<9$; pero $-3>-5$, da al contrario $(-3)^2$ ó $9<(-5)^2$ ó 25.

Tambien *se puede estraer la raiz cuadrada de los dos miembros de una desigualdad entre cantidades positivas* (*).

273 Tampoco podemos dejar de decir algo acerca de la *proporcion armónica*, para lo cual remontarémos á su orígen del modo siguiente.

Se sabe que mientras mas vibraciones hace una cuerda en un tiempo dado, por ejemplo en un segundo, mas *agudo* es el sonido que tiene esta cuerda; que al contrario el sonido que tiene una cuerda, es tanto mas *grave*, cuantas ménos vibraciones hace en un segundo. Á esto añadirémos que las cuerdas que dan los sonidos recibidos en música, hacen en un segundo números de vibraciones cuyas relaciones son mui simples: que en particular dos cuerdas á la *octava* la una de la otra hacen en un segundo números de vibraciones que están en la relacion de 1 es á 2; que dos cuerdas á la *quinta* la una de la otra hacen en un segundo números de vibraciones que están en la relacion de $2:3$; y que cuerdas á la *tercera* la una de la otra hacen en un segundo números de vibraciones que están en la relacion de $4:5$. En fin, es un hecho el que los mú-

(*) *Mr. Canard en su cálculo de las* inecuaciones *á que nosotros llamamos* desigualdades, *hace una distincion mui oportuna entre la* relacion *de* desigualdad adicional, *y la de* desigualdad múltipla. *Dice:* «*la inecuacion adicional* a>b, *equivale á* a=b+z; *la inecuacion múltipla* p>q, *equivale á* p=q.z. *En el cálculo de las inecuaciones, se considera siempre la relacion adicional. Así, la inecuacion* x<a *equivale á* x=a—z, *siendo* z *una incógnita que no se espresa en el cálculo de las inecuaciones, y que al fin se viene á hacer desaparecer, y se tiene entónces el valor de la raiz. Esta diferencia de inecuacion se espresa en el lenguage cuando se hace mencion del valor de la inecuacion. Así, se dice* 12 es mayor que 3 *sin especificar la naturaleza de esta relacion; pero se dice* 12 es mayor que 3 en 9 unidades *para espresar la relacion de inecuacion adicional, y* 12 es cuatro veces mayor que 3 *para espresar la relacion de inecuacion múltipla.*»

sicos han dado el nombre de *armonía perfecta* á la que hacen cuatro cuerdas en que las tres últimas estén respectivamente á la tercera, á la quinta y á la octava de la primera; ó de otro modo: los músicos han dado el nombre de *armonía perfecta* á la que resulta de cuatro cuerdas que hacen en un segundo números de vibraciones proporcionales á 4, 5, 6, 8.

Esto supuesto, los matemáticos han observado aun que estos números 4, 5, 6 y 8, eran tales que el *primero tenia con el cuarto la misma relacion que la diferencia de los dos primeros con la diferencia de los dos últimos*; es decir, que han observado que $4:8::5-4:8-6::1:2$, sobre lo cual generalizando la idéa tomada de su observacion han establecido que habria proporcion armónica entre cuatro números siempre que *el primero fuese al cuarto como la diferencia de los dos primeros á la de los dos últimos*; y tambien advirtiéron que habria *contrarmonía* entre cuatro números, de los cuales *el último era el primero como la diferencia de los dos primeros á la diferencia de los dos últimos*. De manera que cuando a, b, c, d, son tales que $a:d::a-b:c-d$, se dice que están en *proporcion armónica*; y que están en *proporcion contrarmónica*, cuando $d:a::a-b:c-d$; y de estas nociones han pasado á las de *proporcion armónica continua*, *proporcion contrarmónica continua*, *progresion armónica*, y *progresion contrarmónica*.

Se verifica la proporcion armónica continua entre tres términos, de los cuales *el primero es al tercero como la diferencia entre el primero y segundo es á la diferencia entre el segundo y tercero*; por ejemplo: a, b, c están en proporcion armónica continua cuando $a:c::a-b:b-c$.

La proporcion contrarmónica continua tiene lugar cuando a, b, c, son tres números tales que $c:a::a-b:b-c$. La progresion armónica es un conjunto de términos de los cuales tres cualesquiera, tomados á continuacion los unos de los otros, están en proporcion armónica continua. La progresion contrarmónica es un conjunto de términos de los cuales tres cualesquiera, tomados á continuacion los unos de los otros, están en proporcion contrarmónica continua.

Entendidas ya estas denominaciones pasarémos á resolver con relacion á la proporcion armónica los mismos problemas que se han resuelto acerca de las otras proporciones.

Sean a, b, c, los tres primeros términos de una proporcion armónica; si queremos hallar el cuarto le llamarémos x y tendrémos $a:x::a-b:c-x$; de donde (264) sale $a(c-x)=x(a-b)$ ó $ac-ax=ax-bx$

ó $2ax-bx=ac$, que da $x=\dfrac{ac}{2a-b}$; de modo que a, b, c y $\dfrac{ac}{2a-b}$, son los cuatro términos proporcionales armónicos.

Sean a y c los dos términos estremos de una proporcion armónica continua, si queremos hallar el medio le llamarémos x, y tendrémos $a:c::a-x:x-c$, de donde $a(x-c)=c(a-x)$ ó $ax-ac=ca-cx$,

que da $ax+cx=2ca$, y $x=\dfrac{2ca}{a+c}$.

En fin si fuesen a y b los dos primeros términos de una proporcion armónica continua y se pidiese el tercero, llamándole x seria $a:x::a-b:b-x$, de donde $a(b-x)=x(a-b)$, ó $ab-ax=ax-bx$

que da $2ax-bx=ab$, y $x=\dfrac{ab}{2a-b}$.

De la regla de tres y de otras que dependen de ella, como la conjunta, la de compañía, de aligacion &c.

274 Hemos dicho (266) que las proporciones eran los recursos de que se valian los antiguos para suplir la falta de la análisis. Así es, que hicieron de su teoría varias aplicaciones interesantes; una de las mas trascendentes es la que se conoce con el nombre de *regla de tres*, á que algunos han llamado *regla de oro* y vamos á manifestar.

Regla de tres es la *que enseña á determinar los efectos por medio de las causas ó las causas por medio de los efectos* (*), *cuando se conoce el enlace ó dependencia que tienen entre sí.*

La regla de tres puede ser de dos modos: *simple* y *compuesta*; la simple es aquella en que para determinar el efecto ó la causa que se busca, solo se necesita atender á una circunstancia; y compuesta es aquella en que se necesita atender á dos ó mas circunstancias.

La regla de tres simple se subdivide ó puede ser de otros dos modos: *directa é inversa*; directa es aquella en que se trata de averiguar el efecto que produce una causa, ó la causa de que proviene un efecto, cuando se conoce el efecto producido por una causa de la misma especie; y la inversa es aquella en que se trata de averiguar la causa que se necesita para producir, junta con otra dada, el mismo efecto que han producido ya otras dos causas de la misma especie. Para que se vea bien la diferencia que hai entre las reglas de tres nos valdrémos de estos ejemplos.

1.º *Sé que 15 pares de mulas han conducido de la era en un dia 60 cahices de trigo; si quiero averiguar cuantos cahices podrán traer 45*

(*) *Cuando se ve que una cosa es capaz de producir otra, á la que produce se llama* causa *y á la producida* efecto. *Por ejemplo: desde que vemos que la cera se derrite constantemente por la aplicacion de cierto grado de calor, damos al calor el nombre de causa, y al derretirse la cera el nombre de efecto; cuando un labrador siembra trigo y coge, el trigo que siembra es la causa que produce el trigo que coge, el cual es el efecto.*

pares de mulas en el mismo tiempo, esto es, en un dia: tengo aquí una regla de tres que es simple, porque el número de cahices que busco solo depende de una circunstancia, á saber, del número de pares de mulas que los han de traer; ademas es directa porque trato de averiguar los cahices, esto es, el efecto que han de producir los 45 pares de mulas, que son la causa, por medio del conocimiento que tengo del que han producido en las mismas circunstancias 15 pares de mulas. Tambien seria simple y directa la regla de tres si viniese propuesta en estos términos: *sé que 15 pares de mulas han traido de la era en un dia 60 cahices de trigo; para traer en el mismo tiempo 180 cahices, cuantos pares de mulas se necesitarán?* Porque aquí se trata de averiguar la causa, esto es, los pares de mulas que se necesitan para traer los 180 cahices que son el efecto, por medio del efecto conocido 60 cahices que han conducido los 15 pares de mulas.

2.° ejemplo. *Sé que 15 pares de mulas han trasportado de la era en 6 dias 60 cahices de trigo; si quiero averiguar cuantos pares de mulas se necesitarán para trasportar los mismos 60 cahices en 10 dias*: esta regla de tres será inversa, porque aquí tengo un mismo efecto que es 60 cahices, para cuya produccion han concurrido dos causas, los 15 pares de mulas y los 6 dias que han trabajado; ahora trato de determinar una de las causas, á saber, el número de pares de mulas que junta con la otra, es decir, con los 10 dias en que han de trabajar, ha de producir el mismo efecto de traer los 60 cahices de la era.

3.er ejemplo. *Sé que 15 pares de mulas han trasportado de la era en 5 dias 60 cahices de trigo; si quiero averiguar los cahices que trasportarán 45 pares de mulas en 12 dias*: esta regla de tres será compuesta, porque el número de cahices que busco depende de dos circunstancias, á saber, de los 45 pares de mulas que se han de emplear, y de los dias que han de estar trabajando.

275 Toda cuestion que conduce á una regla de tres ha de constar de dos partes, á saber, del *supuesto* y la *pregunta*; en el supuesto se da la dependencia que tiene la causa con el efecto, y en la pregunta la causa ó efecto que se da para determinar el efecto ó causa que se busca.

En toda regla de tres simple entran tres cantidades conocidas: dos del supuesto, y una de la pregunta; como esta ha de ser de la misma especie que una de las del supuesto, á las dos cantidades que son de una misma especie se les da el nombre de *principales*: la otra y la que se busca se llaman *relativas*; pero como de las relativas solo se conoce una, se llama cantidad *principal y su relativa* por escelencia á las dos del supuesto, siendo la principal aquella que es de la misma especie que la de la pregunta. Por ejemplo: cuando quiero averiguar los cahices que trasportan 45 pares de mulas en el supuesto de que 15 hayan trasportado 60 cahices, las dos cantidades principales son los 15 pares de mulas y los 45; las relativas son los 60 cahices y los cahices que busco; y las que

se llaman por escelencia cantidad principal y su relativa son los 15 pares de mulas y los 60 cahices, siendo la principal los 15 pares de mulas que es la de la misma especie que la de la pregunta.

276 Toda la dificultad en la resolucion de la regla de tres consiste en plantearla; porque despues de planteada todo está en hallar el cuarto término de una proporcion geométrica. Así, debemos indagar si se puede hallar *á priori* alguna regla que en la práctica nos pueda conducir á dicho plantéo sin equivocar la cuestion, que es lo que suele suceder mayormente cuando la regla de tres es inversa.

Supongamos ante todas cosas que la regla de tres sea directa, y que se pide el efecto que producirá la cantidad c sujeta á las mismas circunstancias en que la cantidad a ha producido el efecto b; como nosotros no conocemos este efecto que buscamos, le llamarémos x, y tendrémos que siendo b el efecto que ha producido la cantidad a, $\frac{b}{a}$ será el efecto que habrá producido cada unidad de las que contenga a; y como c debe ser de la misma especie que a, y está sujeta á las mismas leyes, por cada unidad que contenga producirá $\frac{b}{a}$; luego toda la cantidad c producirá tantas veces el efecto $\frac{b}{a}$ como unidades haya en c; luego el efecto de c estará representado por $\frac{b}{a}\times c$, y por lo mismo será $x=\frac{b}{a}\times c=\frac{bc}{a}$, que quitando el divisor da $ax=bc$, ó poniendo en proporcion será $a:b::c:x$ ó $a:c::b:x$.

Luego en general *para plantear una regla de tres directa se deberá poner por primer término la cantidad principal del supuesto, despues cualquiera de las otras dos, á saber, la relativa del supuesto ó la principal de la pregunta, despues la otra, y el cuarto término de la proporcion será lo que se busca; que para encontrarle no hai mas que multiplicar el segundo por el tercero, y partir esto por el primero* (*).

(*) *En el mismo tiempo de la revolucion francesa fué cuando esta nacion puso mas conato en el adelantamiento de las ciencias, y los sabios mas célebres no se desdeñáron de enseñarlas; por esta causa Lagrange y Laplace no tuvieron inconveniente en esplicar la Aritmética y Geometría; pero como esplicaban para sugetos que ya tenian conocimientos, se detenian solo en la parte mas sublime; por lo que Lagrange, hablando de la* regla de tres, *dice que* no presenta ninguna dificultad para los que hayan adquirido el espíritu analítico; *cuya proposicion ha pasado á algunos libros elementales sin tener presente que el objeto de esta clase de obras es el que los principiantes adquieran dicho espíritu analítico; y*

Entendido esto, pasarémos á resolver algunos ejemplos. 1.º *Se sabe que 300 soldados han abierto en un tiempo cualquiera 1200 varas de trinchera, para abrir 6000 varas en el mismo tiempo cuantos soldados se necesitarán?* Aquí la cantidad principal y su relativa son 1200 varas y 300 soldados, luego plantearémos la cuestion del modo siguiente:

$$1200^v:6000^v::300^s:x=\frac{300\times6000}{1200}=\frac{300\times5\times12}{12}=300\times5=1500,$$

y saco que se necesitan poner á trabajar 1500 hombres.

2.º *Un sugeto deséa saber lo que le producirán 86235 rs. que va á imponer en un fondo al 5 por 100.* Aquí la cantidad principal del supuesto es 100, porque la cuestion quiere decir que 100 reales le dan de rédito al año 5 reales; y así, la operacion se ejecutará como aquí se ve: 100 rs. : 5 rs. :: 86235 rs. : 4311,75 rs.=4311 rs. y 25,5 mrs.

3.º *Un sugeto quiere averiguar el capital que le produce 42321 rs. al tres por 100.* Aquí la cantidad principal del supuesto es 3; y así, ejecutando la operacion sacaré que el capital que tiene en el fondo es 1410700 rs.

4.º *Sé que 1728 varas de Aragon equivalen á 1597 españolas; si quiero averiguar las varas españolas que componen 5000 aragonesas, ejecutaré la operacion como aquí se ve:*

1728 vs. ar. : 1597 esp. :: 5000 ar. : 4620,949 esp.

5.º *En una fuente que tiene tres caños, se sabe que uno solo llena el pilon en tres horas, otro solo en 12, y otro en 15; se pregunta en cuanto tiempo le llenarán corriendo los tres juntos?*

Llamando x al tiempo que buscamos tendrémos que el caño que le llenaba en tres horas llenará un $\frac{1}{3}$ del pilon en una hora; por lo cual dirémos: si en una hora llena $\frac{1}{3}$ del pilon que considerarémos como la unidad, en x horas cuanto llenará? y hallarémos $\frac{1}{3}x$.

Por la misma razon el que le llenaba en 12 horas llenará $\frac{1}{12}x$, y el

los que mejor tratan esta materia se reducen á decir: que despues de conocidos los dos términos de cada especie, se examine si el término desconocido ha de ser mayor ó menor que el correspondiente de su especie, y se diga (en el caso de ser mayor)

el término menor de la primera especie
es al mayor de la misma
como el menor de la segunda
es al mayor de esta otra.

Donde se ve que para hacer dicho exámen se necesita poseer ó tener un espíritu del que no todos están dotados; y por lo mismo nuestra regla que no exige mas que el conocimiento de las cantidades de una misma especie para plantear inmediatamente la proporcion, está mas al alcance de los principiantes.

otro $\frac{1}{15}x$; luego tendrémos $\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{15}x=1$, que quitando los divisores da (§ 223) $20x+5x+4x=60$ ó $29x=60$, que da $x=\frac{60}{29}=2\frac{2}{29}$ horas.

Hai una cuestion que se resuelve por regla de tres, que suele costar algun trabajo á los principiantes, y que resolverémos aquí con la mira de deducir una regla sumamente sencilla para la práctica.

Esta cuestion es la siguiente: *Sabiendo que la manecilla de un reloj está entre una hora dada, hallar que hora será cuando la manecilla de los minutos está sobre la de las horas.*

Para resolver esta cuestion basta observar que la manecilla de los minutos da una vuelta entera, mientras que la de las horas anda el espacio de una hora, que es la dozava parte de toda la vuelta; y así, si llamamos a la hora dada y x la parte que ha andado la manecilla que señala las horas desde que se hallaba en la hora menor, tendrémos que $a+x$ será lo que habrá andado en el mismo tiempo la manecilla de los minutos; y así, estableceremos la siguiente proporcion $12:1::a+x:x$;

$$\text{la cual dividida da } 12-1:1::a+x-x:x=\frac{a}{11};$$

la cual espresion nos dice que *á la hora menor se deben añadir tantos 11 avos como unidades tiene a*; de manera que si la manecilla que señala las horas se halla entre las 7 y las 8, se encontrarian á las $7\frac{7}{11}$, que reduciendo á minutos da $38\frac{2}{11}$ de minuto.

277 Supongamos que la regla de tres sea inversa, y que se sepa que las dos cantidades a y b, consideradas como causas, han producido otra cantidad K que considerarémos como efecto; y que se busque la causa B de la misma especie que b, la cual junta con la dada A de la misma especie que a, han de producir el mismo efecto K.

Si la causa a obrase sola y produjese el efecto K, cada unidad de a obraria un efecto $\frac{K}{a}$; pero como no solo obra la unidad de a sino que obra al mismo tiempo la causa b, resulta que el efecto de cada unidad de a que acabamos de señalar, será tantas veces mayor como esprese el valor de b; luego para tener lo que produce cada unidad de a sola deberémos dividir $\frac{K}{a}$ por b, y será dicho efecto $=\frac{K}{ab}$. Ahora, por la misma razon será $\frac{K}{AB}$ el efecto que produzca cada unidad de A; pero como a y A son de una misma especie, los efectos que produzca cada una de sus unidades serán los mismos; y tendrémos que $\frac{K}{ab}=\frac{K}{AB}$, ó quitando los divisores $ABK=abK$, ó dividiendo por K será $AB=ab$, que da (§ 264) $A:a::b:B$, luego en la regla de tres inversa *se ha de escribir por primer antecedente la cantidad principal de la pregunta, y por medios la* *cantidad principal y relativa del supuesto; despues se multiplican los medios, se parte por el estremo, y el resultado es la causa que se busca.*

Puesto que los medios están representados por las dos cantidades del supuesto, resulta que podemos resolverla sin necesidad de escribir la proporcion, multiplicando desde luego las dos cantidades del supuesto y partiendo el producto por la de la pregunta. Por ejemplo: *si quiero averiguar los pares de mulas que se necesitan para trasportar en* 10 *dias el mismo trigo (por ejemplos* 60 *cahices) que han trasportado* 15 *pares de mulas en* 6 *dias*; multiplicaré los dos números del supuesto 15 y 6, y dividiré el producto 90 por el número de la pregunta, y sacaré que solo se necesitan 9 pares de mulas; ó si queremos escribir la proporcion será $10^{ds.}:6^{ds.}::15^{ps.}\ de^{ms.}:x=\frac{6\times15}{10}=\frac{90}{10}=9^{ps.}\ de^{ms.}$

Como la regla de tres inversa es la que mas suele detener á los principi[illegible]esolverémos varios ejemplos de ella.

1.º *Un comerciante ha ganado en* 6 *meses* 540 *doblones con un capital de* 3000 *doblones, para ganar los mismos* 540 *doblones con un capital de* 1200 *doblones, cuanto tiempo necesitará?*

Aquí la cantidad principal y su relativa son $3000^{ds.}$ y $6^{ms.}$, la principal de la pregunta 1200 doblones; por lo que ejecutando la operacion como aquí se ve: $1200^{ds.}:3000^{ds.}::6^{ms.}:x=\frac{3000\times6}{1200}=\frac{180}{12}=15$ meses, hallo que necesitará 15 meses.

2.º *Un General de trinchera tiene calculado que con poner* 5000 *hombres á trabajar, ya á la zapa, ya á la trinchera, llegará en* 8 *dias á hacer todas las obras que necesita para llegar al camino cubierto; tiene aviso de su mayor General que es indispensable tomar el camino cubierto dentro de* 5 *dias, cuantos hombres necesitará poner á trabajar?*

Aquí la cantidad principal y su relativa son 8 dias y 5000 hombres, que son las causas que han de concurrir para ejecutar todas las obras necesarias; y lo que se busca es cuantos han de ser los hombres que juntos con la causa conocida 5 dias han de poder obrar el mismo efecto; por lo cual plantearémos la cuestion en estos términos:

$$5^{ds.}:8^{ds.}::5000^{hs.}:x=\frac{5000\times8}{5}=1000\times8=8000 \text{ hombres,}$$

que son los que tendrá que poner á trabajar.

3.º *En una embarcacion hai víveres para tres meses: á causa de una borrasca se ha alejado del puerto adonde se dirigia, y por lo mismo han de durar los víveres* 5 *meses; se trata de saber que racion se ha de dar á cada uno de los que van embarcados.*

Aquí el efecto que se ha de producir es la manutencion de todos los que van embarcados; y lo que se sabe es que con los víveres que hai

se puede lograr esta manutencion durante tres meses, dando á cada uno su racion regular que se podrá llamar 1; ahora se quiere que esta manutencion se logre en 5 meses, y lo que se trata de averiguar es la otra causa que ha de producir dicha manutencion, á saber, la racion que se ha de dar á cada persona; y como aquí la cantidad principal de la pregunta es 5 meses, ejecutaré la operacion como aquí se ve:

$$5\ m.^s:3\ m.^s::1\ rac.^n:x=\tfrac{3}{5} \text{ de racion;}$$

y hallo que á cada uno de los que van embarcados se le ha de dar $\frac{3}{5}$ partes de la racion que se le daba; es decir, si se le daban 5 onzas de arroz, ahora se le deberán dar 3, y así de las demas cosas, como agua, vino, &c.

4.º *En una plaza sitiada hai víveres solo para* 15 *dias; el Gobernador ha recibido una órden de su Monarca en que le dice que de ninguna manera se entregue; porque á los* 20 *dias le embiará socorro;* en este caso debe el Gobernador disminuir la racion de cada soldado, y ejecutando la operacion como en el ejemplo anterior, se hallará que á cada soldado le debe dar $\frac{3}{4}$ partes de la racion de ántes.

5.º *La guarnicion de una plaza se compone de* 6000 *hombres: el Gobernador sospecha que le van á sitiar los enemigos, y no tiene víveres para mantener á dicha guarnicion sino dos meses y medio; y como debe prevenirse para tres meses lo ménos y no tiene de donde, el recurso que debe tomar es echar soldados de la plaza: porque si les disminuye la racion no estarian bastante robustos para resistir las fatigas de un sitio*; y así, para averiguar el número de soldados que deben quedar de guarnicion ejecutaré la operacion como aquí se ve:

$$3\ me.^s:2\tfrac{1}{2}\ me.^s::6000\ sold.^s:x=\frac{6000\times2\frac{1}{2}}{3}=5000 \text{ soldados,}$$

y hallaré que deben quedar solo 5000 soldados de guarnicion; los otros 1000 los embiará á otra plaza en que tengan necesidad de hombres y no de víveres.

278 Para resolver una regla de tres compuesta *se halla primero el resultado que corresponde á la pregunta, atendiendo á una sola circunstancia; despues el que corresponde á este resultado hallado, considerándole como pregunta, atendiendo á otra circunstancia; despues el que corresponde á este resultado hallado, atendiendo á otra circunstancia; y así sucesivamente.*

1.º ejemp. *Si quiero averiguar los cahices de trigo que podrán trasportar* 45 *pares de mulas en* 12 *dias, en el supuesto de haber traido* 15 *pares de mulas en* 5 *dias* 60 *cahices de trigo*: primero averiguaré los cahices que traherán los 45 pares de mulas en el mismo tiempo, esto es en 5 dias, lo que ejecutaré como aquí se ve:

$$15 \text{ pares de mulas}:45 \text{ pares de mulas}::60\ cah.^s:x=180\ cah.^s$$

y encuentro que traerán 180 cahices.

Ahora: *si en* 5 *dias traen* 45 *pares de mulas* 180 *cahices, en* 12 *dias* *cuantos traerán?* Ejecutaré la operacion como aquí se ve:

$$5\ d.^s : 12\ d.^s :: 180\ \text{cah.}^s : x = \frac{12 \times 180}{5} = 12 \times 36 = 432\ \text{cah.}^s$$

y saco que traerán 432 cahices.

2.º ejemp. *Sé que 8 hombres en 10 dias, trabajando en cada dia 6 horas, han segado 50 fanegas de trigo, 4 hombres en 12 dias, trabajando 9 horas al dia, cuantas fanegas segarán?*

Aquí tendré que hacer las tres reglas de tres simples siguientes:

$8\ \text{hom.}^s : 4\ \text{homb.}^s :: 50\ f.^s : 25\ f.^s$

$10\ d.^s : 12\ d.^s :: 25\ f.^s : 30\ f.^s$

$6\ \text{homb.}^s : 9\ \text{homb.}^s :: 30\ f.^s : 45\ f.^s$

Y saco que segarán 45 fanegas de trigo.

3.ᵉʳ ejemp. *Sé que 720 hombres en 5 dias, trabajando 6 horas al dia han hecho 600 varas de obra; para hacer las mismas varas 360 hombres, trabajando 9 horas al dia, cuantos dias necesitarán?*

Ejecutando la operacion como aquí se ve:

$360\ \text{homb.}^s : 720\ \text{homb.}^s :: 5^{ds.} : 10^{ds.}$

$9\ \text{hor.}^s : 6\ \text{hor.}^s :: 10^{ds.} : 6\frac{2}{3}^{ds.}$

Saco que necesitarán 6 dias y las dos terceras partes del trabajo de otro dia.

Esta regla de tres compuesta tambien se suele llamar *regla de tres con tiempo.*

Tambien se puede resolver una regla de tres compuesta por medio de una sola proporcion, á saber: *multiplicando entre sí las circunstancias del supuesto y pregunta, y hallando el resultado correspondiente por una sola proporcion*; en esta forma.

Para el segundo ejemplo multiplicaré 8 por 10 y por 6, que me darán 480: por lo que consideraré que 8 hombres en 10 dias trabajando 6 horas al dia, harán lo mismo que 480 hombres en una hora, ó que un hombre en 480 horas. Multiplicaré tambien los de la pregunta, diciendo: 4 por 12 son 48; 48 por 9 son 432, por lo que las circunstancias de la pregunta equivalen á estas: 432 hombres en una hora ó un hombre en 432 horas; y así diré:

$$480 : 432 :: 50\ \text{fan.}^s : x = \frac{432 \times 50}{480} = \frac{2160}{48} = 45 \text{ como ántes.}$$

Para el 3.ᵉʳ ejemplo multiplicaré el 720 por 6, y tendré 4320; ahora multiplicaré 360 por 9 lo que dará 3240; y estará reducida la cuestion á encontrar cuantos dias deberán trabajar 3240 hombres para hacer la misma obra que 4320 han hecho en 5 dias; y como esta regla de tres es inversa, plantearé la cuestion en estos términos:

$$3240 : 4320 :: 5 : x = \frac{4320 \times 5}{3240} = \frac{2160}{324} = 6\tfrac{2}{3} \text{ como ántes.}$$

4.º ejemp. *Se sabe que 90 hombres en 15 dias trabajando 7 horas al dia, con una fuerza representada por 3, en una tierra cuya dureza ó resistencia estaba espresada por 5, han abierto un foso de 56 varas de largo, 7 de ancho y 12 de profundidad. Se desea saber cuantos dias necesitarán 45 hombres, trabajando 6 horas al dia con una fuerza representada por 5 en una tierra cuya dureza ó resistencia estuviese espresada por 7, para abrir otro foso de 60 varas de largo, 4 de ancho y 8 de profundidad.*

Aquí se observa que el resultado que buscamos depende de 7 circunstancias ó condiciones: á saber: 1.ª de los hombres que han de trabajar; 2.ª de las horas que han de emplear al dia; 3.ª de la fuerza con que se les supone dotados, ó que se supone han de emplear; 4.ª del grado de dureza que tiene la tierra; y 5.ª, 6.ª y 7.ª de la longitud, ancho, y profundo que ha de tener el foso que se ha de abrir.

1.ª Para hallar el número de dias, atendiendo á la 1.ª circunstancia, prescindirémos de las demas, y quedará reducida la cuestion á la siguiente: *90 hombres han hecho en 15 dias una obra cualquiera; para hacer la misma obra 45 hombres ¿cuantos dias necesitarán?* En virtud de lo espuesto (277), será $45 : 90 :: 15 : x = 30$.

2.ª Atendiendo ahora á la circunstancia de las horas, queda reducida la cuestion á la siguiente: *en 30 dias trabajando 7 horas al dia se ha hecho una obra cualquiera; para hacer la misma obra, trabajando 6 horas al dia ¿cuantos dias se necesitarán?*; y hallarémos (277) $6 : 7 :: 30 : x' = 35$ dias.

3.ª Atendiendo ahora á la fuerza que emplean, queda reducida la cuestion á esta: *un cierto número de hombres empleando 3 grados de fuerza, necesitan 35 dias para hacer una obra cualquiera; empleando 5 grados de fuerza los mismos hombres ¿cuantos dias se necesitarán?*; y hallarémos (277) $5 : 3 :: 35 : x'' = 21$ dias.

4.ª Atendiendo ahora á la dureza, queda reducida la cuestion á esta: *en una tierra que opone una resistencia como 5, se ha hecho en 21 dias una cierta escavacion; cuando la tierra ofrece una resistencia como 7, ¿cuantos dias se necesitarán?*

Aunque aquí parece que se tiene una regla de tres inversa, por ser el mismo el efecto que se ha de conseguir, sin embargo no lo es, porque la resistencia que ofrece la tierra no es causa que coopera á abrirla, sino al contrario un obstáculo que se opone á la abertura: por consiguiente esta se halla mejor traducida del modo siguiente: *cuando la tierra resiste como 5 se han necesitado 21 dias para abrir una porcion determinada ¿cuantos dias se necesitarán cuando la tierra resiste como 7?*; y tendrémos $5 : 7 :: 21 : x''' = \frac{7 \cdot 21}{5}$.

5.ª Atendiendo ahora á la longitud del foso, queda reducida la cuestion á la siguiente: *en abrir 56 varas de foso se han gastado* $\frac{7.21}{5}$ *dias*; *en abrir 60 ¿cuantos se gastarán?*; y tendrémos $56:60::\frac{7.21}{5}:x^{IV}=\frac{63}{2}$ dias.

6.ª Atendiendo al ancho que ha de tener el foso, queda reducida la cuestion á esta: *teniendo 7 varas de ancho un foso, se han necesitado* $\frac{63}{2}$ *dias para abrirle; cuando el ancho sea 4 ¿cuantos dias se necesitarán?*; y se halla $7:4::\frac{63}{2}:x^{V}=18$ dias.

7.ª Y atendiendo á la última circunstancia que es la profundidad, queda reducida la cuestion á la siguiente: *un foso cuya profundidad es de 12 varas, se ha abierto en 18 dias; cuando la profundidad sea de 8 varas ¿cuantos dias se necesitarán?*; y se tendrá $12:8::18:x^{VI}=12$ dias. Luego se necesitarán 12 dias.

279 En muchas ocasiones no se conoce inmediatamente la relacion que tiene la causa con el efecto, sino que se conoce por medio de otras circunstancias; en este caso la regla de tres recibe el nombre de *regla conjunta*. Propongámonos, por ejemplo, la cuestion siguiente.

Se sabe que 50 metros franceses equivalen á 179 pies españoles, y que 699 pies españoles equivalen á 100 toesas antiguas francesas; si queremos averiguar 380 metros franceses á cuantas toesas francesas equivalen: advertirémos que aquí no se nos da inmediatamente la relacion que tienen entre sí el metro y la toesa, sino que se nos da por medio de la del pié español; y así, lo que se hace es averiguar primero los 380 metros cuantos pies españoles componen, lo que ejecutarémos por medio de esta proporcion: $50^{ms.}:380^{ms}::179^{ps.}:x=\frac{380^{ms.}\times179^{ps.}}{50^{ms.}}$ p.^{s} esp.^{s}

Ahora dirémos: si 699 pies españoles equivalen á 100 toesas francesas $x=\frac{380^{ms.}\times179^{ps.}}{50^{ms.}}$ pies á cuantas toesas equivaldrán? y obtendrémos por esta proporcion: $699\,p.^s:100\,toes.^s::\frac{380^{ms.}\times179^{ps.}}{50^{ms.}}\,p.^s:x'=\ldots\ldots$

$$\frac{100t^s\times\frac{380^{ms.}\times179^{ps.}}{50^{ms.}}p.^s}{699\,p.^s}=\frac{100\,t^s\times380\,m^s\times179\,p.^s}{50m^s\times699\,p.^s}.$$

Pero á este valor hubiéramos llegado por medio de esta proporcion
$$50^{ms.}\times699^{ps.}:100^{ts.}\times179^{ps.}::380^{ms.}:x';$$
y como la primera razon es una razon compuesta, la podrémos descomponer en estas dos $50^{ms.}:179^{ps.}$ y $699^{ps.}:100^{ts.}$

y por lo mismo escribirémos la cuestion de este modo:

$$\left.\begin{array}{l}50\text{ metros}:179\text{ pies}\\699\text{ pies}:120\text{ toesas}\end{array}\right\}::380\text{ metros}:x'.$$

Escrita esta cuestion vemos que en las razones componentes están comparados en la primera los metros con los pies, y en la segunda los pies con las toesas; aquí hai impropiedad porque no se pueden comparar cosas que no sean homogéneas; pero se escriben así todas las cuestiones semejantes, porque esto no altera de ningun modo el resultado; pues el valor de x depende de los números considerados en abstracto, y porque de este modo se tiene la ventaja de ir colocando los datos conforme se va enunciando la cuestion.

Ahora, para resolverla se tendrá cuidado, ántes de efectuar la multiplicacion de las razones, de simplificarlas si se puede; lo que vemos que aquí se puede conseguir suprimiendo ó borrando un cero en el 100 y en el 50, despues el 5 que queda del 50 le podrémos suprimir con el 5 que es factor del 10; y así, solo tendrémos que multiplicar el 179 por 2 y por 380, y dividir el producto por 699, lo que dará 194,6 &c. toesas.

Otra cuestion de regla conjunta: *Si tres libras tornesas de Francia valen 32 dineros esterlines de Inglaterra, 240 dineros esterlines de Inglaterra valen 408 dineros gros de Holanda, 50 dineros gros valen 190 maravedíses, cuantos maravedíses valen 60 libras tornesas?*

La colocacion de los términos la ejecutarémos conforme se va enunciando la cuestion del modo que aquí se ve:

$$\left.\begin{array}{lcl} & & 8\\ \cancel{3}\text{ lib. torn.}^s & : & \cancel{32}\text{ din.}^s\text{ esterl.}\\ \cancel{4} & & 136\\ \cancel{240}\text{ din.}^s\text{ esterl.} & : & \cancel{408}\text{ din.}^s\text{ gros}\\ 5\cancel{0}\text{ din.}^s\text{ gros} & : & 19\cancel{0}\text{ mrs.}\end{array}\right\}::\cancel{60}\text{ lib.}^s\text{ tor.}^s:x,$$

en la cual simplificando del modo que hemos dicho (271), vemos que el 60 se suprime con un 60, factor del 240, y por lo mismo pongo encima de este factor 4 que queda; ahora, este 4 se puede suprimir con un 4 factor del 32, del cual solo quedará el otro factor 8; el 0 del 50 con el 0 del 190, y el 3 con un 3 factor del 408 del cual quedará 136: y por consiguiente para hallar el resultado multiplicarémos 8 por 136 y por 19; el producto 20672 le dividirémos por 5, y el cociente 4134 serán los maravedíses que valdrán las 60 libras tornesas.

280 Se da el nombre *de regla de compañía á la que enseña á determinar cuanto corresponde de la ganancia ó pérdida á cada uno de muchos compañeros que han puesto su caudal en un fondo, con arreglo á lo que puso cada uno.* Esta suelen decir que es de dos modos: *simple* y con *tiempo*; la llaman *simple* cuando el caudal que pone cada uno permanece un mismo tiempo en el fondo; y con tiempo cuando no permanecen los caudales el mismo tiempo en el fondo. Esta se reduce á la sim-

ple multiplicando el tiempo por lo que puso cada uno; pues de este modo el tiempo es un factor comun, y por otra parte lo mismo es 15 doblones en dos años, que 30 en un año. Entendido esto pasarémos á su resolucion que depende de la siguiente

{ Cuestion. *Partir un número dado a en las partes que se quiera, v. g. en tres, que tengan entre sí la misma razon que las cantidades dadas* m, n, p, *esto es, que la primera tenga con la segunda la razon de* m : n, *y la primera con la tercera la razon de* m : p.

{ Sea x la primera parte y tendrémos

$m:n::x:\frac{nx}{m}$ que será lo que corresponde á la segunda,

$m:p::x:\frac{px}{m}$ que será lo que corresponde á la tercera,

y como todas juntas han de equivaler á a, se tendrá: $x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a$;

que quitando los divisores será $mx+nx+px=ma$,

y descomponiendo en factores tendrémos: $x(m+n+p)=ma$,

que da $x=\frac{ma}{m+n+p}=m\times\frac{a}{m+n+p}$ (*).

{ Si sustituimos este valor de x en lo que correspondia á la segunda, y simplificamos, se tendrá $\frac{xn}{m}=\frac{na}{m+n+p}$, y la tercera será $\frac{px}{m}=\frac{pa}{m+n+p}$: cuyos resultados manifiestan que podemos hallar cada una de estas partes por medio de la siguiente proporcion:

$m+n+p$ (suma de las puestas) : a (ganancia ó pérdida) :: *lo que puso cada uno : á la ganancia ó pérdida que le corresponde.*

{ Hagamos aplicacion á un caso particular: supongamos que tres sugetos han puesto en un fondo el primero 240 doblones, el segundo 320, y el tercero 400, cuya suma compone 960 doblones, y que hayan ganado 120 doblones; si se pregunta cuanto corresponde á cada uno, será $m=240$, $n=320$, $p=400$, y $m+n+p=960$:

luego será la parte del primero... $=\frac{240\times120}{960}=30$ doblones,

(*) *En este resultado, y lo mismo en los siguientes, se observa el factor comun* $\frac{a}{m+n+p}$, *el cual está multiplicado por la puesta de cada uno para hallar su parte respectiva; de donde se deduce para la práctica esta regla que es mui sencilla.* Divídase la ganancia ó pérdida por la suma de las puestas (*si dicha suma es mayor se convertirá en quebrado decimal*), multiplíquese el cociente por la puesta de cada uno y se tendrá la ganancia ó pérdida que le corresponde.

la del segundo . . . . $=\frac{320\times120}{960}=40$ doblones,

y la del tercero . . . . $=\frac{400\times120}{960}=50$ doblones,

cuyas partes componen la ganancia total. . . . . 120 doblones.

{ El no haber contado con el tiempo nos indica que las puestas permaneciéron uno mismo en el fondo; pero si el primero la hubiese puesto por 10 meses, el segundo por 15, y el tercero por 8, siendo la ganancia 120 doblones tambien como ántes, que parte corresponderia á cada uno?

{ Para determinar la parte de cada uno, observarémos que 240 doblones puestos por diez meses es lo mismo que 240×10 por un solo mes; 320 doblones puestos por 15 meses es lo mismo que 320×15 doblones por un solo mes; y 400 doblones puestos por 8 meses equivalen á 400×8 por un solo mes; de manera que las puestas serán 2400, 4800 y 3200 cuya suma es 10400; en cuyo caso al primero le corresponderá $\frac{120\times2400}{10400}=27\frac{72}{104}$; al 2.º $\frac{4800\times120}{10400}=55\frac{40}{104}$ y al 3.º $\frac{3200\times120}{10400}=36\frac{96}{104}$, cuya suma es igual con 120 como ántes.

{ 281 Cuestion. *Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de falsa posicion.*

Se da el nombre *de regla de falsa posicion á aquella en que suponiendo un número arbitrario, pero determinado, nos servimos despues de él para encontrar el verdadero.* Propongámonos resolver esta cuestion.

{ *Tres comerciantes pusieron en un fondo igual cantidad; pero no teniendo todos la misma ciencia convinieron en repartir su ganancia de modo que el segundo tuviese duplo que el primero, y el tercero el triplo del segundo, ganáron 9000 doblones, cuanto toca á cada uno?*

{ Supongamos que al primero le tocáron 12, el segundo tendria 24, y el tercero 72, y sumando tendré $12+24+72=108$; ahora diré: si 108 dan 12, los 9000 cuanto darán? sale 1000 para el 1.º, de donde resulta 2000 para el 2.º, y 6000 para el 3.º, cuya suma $=9000$ doblones.

{ La resolucion de esta cuestion está fundada en que dos números cualesquiera tienen la misma razon que cualquiera de sus partes alicotas, y que el conjunto de un número cualquiera de dichas partes; para demostrarlo en general sean a y b estos dos números; y como una razon no se altera aunque se dividan sus dos términos por una misma cantidad, tendrémos que $a:b::\frac{a}{m}:\frac{b}{m}::\frac{a}{m'}:\frac{b}{m'}::\frac{a}{m''}:\frac{b}{m''}::$ &c.

{ Y en virtud de lo dicho (268 teor. 5.º) será igualmente

$$a:b::\frac{a}{m}+\frac{a}{m'}+\frac{a}{m''}+\text{ \&c. }:\frac{b}{m}+\frac{b}{m'}+\frac{b}{m''}+\text{ \&c.}$$

que manifiesta la verdad que hemos asegurado.

Si nos propusiéramos esta otra: *Un padre deja á Juan la tercera parte de su dinero, á Pedro la cuarta parte y á Diego la quinta; la suma de estas partes asciende á 9400 doblones, en cuyo supuesto se quiere saber cuanto dinero tenia?*

Supongamos que su dinero era 60 doblones, y resultará que su tercera parte será 20, su cuarta 15 y su quinta 12; y tendrémos que entre todas ascienden á 47 doblones. Ahora diré: si 47 doblones provienen de 60 doblones, 9400 de cuanto provendrán? y encuentro que provienen de 12000.

282 Cuestion. *Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de dos falsas posiciones.*

Se llama *regla de dos falsas posiciones ó de falsa posicion doble*, aquella en que para hallar lo que se busca se hacen dos supuestos. Propongámonos, por ejemplo, hallar dos números cuya suma sea 25, y su diferencia 7; supondré que el número menor sea 4 y tendré que el mayor será $4+7=11$; sumando los dos resulta $11+4=15$, que para componer 25 faltan 10, y diré que la equivocacion es -10; supondré ahora que el número menor sea 8, y tendré que el mayor será 15, los cuales sumados dan $15+8=23$, que dan -2 de equivocacion.

Esto supuesto, la regla práctica que se sigue es la siguiente: *multiplíquese cada número supuesto por la equivocacion del otro; y divídase la diferencia de los productos por la diferencia de las equivocaciones*; de manera que aquí se colocará la operacion en esta forma (A): restaré un producto de otro y será $-80+8=-72$, que dividiré por $-10+2=-8$ diferencia de las equivocaciones y tendré $\frac{-72}{-8}=9$, luego el menor número será 9 y el mayor será 16.

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(A)} \\ 4 & 8 \\ -2 & -10 \\ \hline -8 & -80 \end{array}$$

Para no tener que atender á los signos se dice en general que *cuando los errores ó equivocaciones tienen un mismo signo, se resta el un producto del otro, y la resta se divide por la diferencia de las equivocaciones; y que cuando una equivocacion tiene el signo + y la otra el signo —, la suma de los productos se divide por la suma de los errores.* Así, si el segundo número supuesto hubiera sido 12 tendríamos que el mayor seria 19, y como $19+12=31$ habria $+6$ de equivocacion, en cuyo caso tendríamos (B):

Sumaríamos 24 con 120, y la suma 144 la dividiríamos por 16 suma de los errores, y tendríamos $\frac{144}{16}=9$ como ántes.

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(B)} \\ 4 & 12 \\ +6 & -10 \\ \hline 24 & -120 \end{array}$$

Para manifestar los fundamentos de esta regla observarémos que suponiendo x el número que buscamos, a y b los dos números supuestos, α y β las dos equivocaciones, la condicion que se ha de verificar la podrémos espresar por $\frac{m}{n}\times x$, siendo m y n números cualesquiera que su

relacion multiplicada por x espresará lo que exija la cuestion; ahora, como suponemos que de ser el número supuesto a resulta una equivocacion, espresándola por α se tendrá $\frac{m}{n}\times x=\frac{m}{n}\times a+\alpha$; y por la misma razon $\frac{m}{n}\times x=\frac{m}{n}\times b+\beta$; y pasando al primer miembro el término donde hai $\frac{m}{n}$, en ambas resulta $\frac{m}{n}\times x-\frac{m}{n}\times a=\alpha$, $\frac{m}{n}\times x-\frac{m}{n}\times b=\beta$, que formando proporcion tendrémos:

$$\alpha:\beta::\frac{m}{n}\times x-\frac{m}{n}\times a:\frac{m}{n}\times x-\frac{m}{n}\times b::\frac{m}{n}(x-a):\frac{m}{n}(x-b)::x-a:x-b,$$

que da $\alpha(x-b)=\beta(x-a)$ ó $\alpha x-\alpha b=\beta x-\beta a$,

que despejando x sale $x=\frac{\alpha b-\beta a}{\alpha-\beta}$, que da la regla práctica que hemos dicho.

Ahora, si suponemos que una de las equivocaciones sea negativa, por ejemplo la β, esta espresion se convertirá en $x=\frac{\alpha b+a\beta}{\alpha+\beta}$, que espresa la circunstancia dicha ántes; lo mismo hubiéramos obtenido haciendo negativa á α porque entónces hubiera sido

$$x=\frac{-\alpha b-\beta a}{-\alpha-\beta}=\frac{-(\alpha b+\beta a)}{-(\alpha+\beta)}=\frac{\alpha b+\beta a}{\alpha+\beta}.$$

Si llamamos δ la correccion que hai que hacer al número a para que se convierta en x, tendrémos $a+\delta=x$; donde δ será positiva si a fuese menor que x, y negativa si a fuese mayor que x. Despejando δ, se tendrá $\delta=x-a=\frac{\alpha b-\beta a}{\alpha-\beta}-a=\frac{\alpha b-\beta a-a\alpha+a\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha b-a\alpha}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha(b-a)}{\alpha-\beta}$; cuya espresion suministra la siguiente regla práctica. *Para hallar la correccion que debe hacerse á uno de los números supuestos para convertirse en el verdadero, se multiplica su equivocacion por la diferencia entre los dos números supuestos y el producto se divide por la diferencia de las equivocaciones, pero tomadas en sentido contrario al en que se tomó la diferencia de los números supuestos; es decir, que si en el numerador se tomó por minuendo el segundo número supuesto, y por sustraendo el primero, en el denominador, deberá hacer de minuendo la primera equivocacion, y de sustraendo la segunda.*

Tambien se podrá hallar δ por la siguiente proporcion $\alpha-\beta:b-a::\alpha:\delta$ que tambien podríamos traducir en regla.

Ejemplo 1.º Un padre con el fin de estimular á su hijo á que estudie, le dice: *por cada dia que sepas la leccion te doi 10 reales, pero por cada dia que no la sepas me has de dar 4; al cabo de 15 dias le tuvo que dar el padre 66 reales; se pregunta, cuantos dias estudió y cuantos no?*

Supongamos que estudió 7 dias: y entónces 7 por 10 son 70 rs., y esto será lo que habria ganado el hijo; y como dejó de estudiar 8, tuvo que dar el hijo $4\times8=32$; luego solo debió recibir del padre $70-32=38$, lo que da -28 de error. Suponiendo que estudió 13 habria ganado $13\times10=130$, y hubiera tenido que dar $2\times4=8$; luego deberia haber recibido 122 lo que da un error de $+56$; por lo que ejecutaré la operacion como aquí se presenta (A):

Sumaré 392 con 364, y la suma 756 la dividiré por 84, y hallaré que supo la leccion 9 dias, y la dejó de saber 6.

$$\text{(A)}\quad \begin{array}{rr} 7 & 13 \\ +\ 56- & 28 \\ \hline 392- & 364 \end{array}$$

Ejemplo 2.º *De dos jugadores el mas diestro pone 6 pesetas contra 4 pesetas cada juego; al cabo de 20 juegos el otro le tiene que dar 10 pesetas; cuantos juegos ganó el primero?*

Supongamos que ganó 11, con lo cual el otro ganaria 9; y la ganancia del primero será $11\times4-9\times6=-10$, por consiguiente este saldria perdiendo 10 pesetas; pero como la cuestion dice que las ganó hai -20 de error ó equivocacion; supongo ahora que ganó 14, el otro ganaria 6, y la ganancia del primero será $14\times4-6\times6=20$; hai pues ahora $+10$ de equivocacion. Dispongo los términos en esta forma:

Parto la suma $110+280=390$ por 30, suma de las equivocaciones, y sale 13, número de juegos que ganó el primero.

$$\begin{array}{rr} 11 & 14 \\ 10- & 20 \\ \hline 110- & 280 \end{array}$$

283 Cuestion. *Declarar los fundamentos y la práctica de la regla de aligacion.*

Se da el nombre de *regla de aligacion á la que enseña á determinar el precio á que se ha de vender la mezcla de dos generos, cuando se dan conocidas las cantidades que entran en ella y sus valores*; ó á la que enseña *á determinar en que razon se han de tomar las cantidades de la mezcla, dado que sea el precio medio y los precios de las cantidades que se han de mezclar.*

En esta regla de aligacion ocurren dos casos: 1.º cuando se mezclan varias cosas de diferentes precios; y se pregunta á como se ha de vender la mezcla; y 2.º cuando se pide la razon en que se han de mezclar para venderlas á un precio dado.

Supongamos, por ejemplo, que se haya mezclado una porcion A de un género cualquiera, cuyo precio es m, con otra porcion B del mismo género de inferior calidad, cuyo precio es n: y que se trata de averiguar á cuanto se ha de vender cada unidad de la mezcla para no perder ni ganar. Puesto que el precio de A es m tendrémos que Am será su valor, y por la misma razon Bn será el de B, luego el valor de toda la mezcla estará representado por $Am+Bn$; y como en toda la mezcla hai un número de unidades espresado por $A+B$, resulta que dividiendo el valor de todas las unidades por la suma de ellas nos vendrá el valor de cada una, que si le llamamos x será $x=\dfrac{Am+Bn}{A+B}$.

Ejemplo. *Habiendo 32 arrobas de vino de 22 rs. mezcladas con 24 de á 29, hallar el precio medio á que se debe vender dicha mezcla.* En este caso $A=32$, $m=22$, $B=24$, $n=29$, y por consiguiente

$$x=\frac{Am+Bn}{A+B}=\frac{32\times22+24\times29}{32+24}=25 \text{ precio medio.}$$

Para pasar al 2.º caso supongamos que nos den los precios de dos géneros A y B, y que se pida en que razon se han de mezclar para venderlos á un precio medio sin que se pierda ni se gane.

Si llamamos m el precio medio, tendrémos que el precio mayor le podrémos representar por $m+a$, y el menor por $m-d$; ahora, si llamamos x la porcion que se echa del de mayor valor, y z á la del menor, tendrémos que como despues de hecha la mezcla debe resultar el mismo valor que tenian separadamente las cantidades, será

$$(m+a)x+(m-d)z=m(x+z),$$

que efectuando las operaciones da $mx+ax+mz-dz=mx+mz$, que se reduce á $ax-dz=0$ ó á $ax=dz$, de donde sale $x:z::d:a$; y quiere decir *que las cantidades de estos géneros se han de tomar en razon inversa de la diferencia entre su valor y el precio medio.*

Esta regla se dispone de este modo: $m\begin{Bmatrix} m+a \\ m-d \end{Bmatrix}\begin{matrix} d \\ a \end{matrix}$

se pone el precio medio en una llave, y dentro de ella los precios de las cosas, poniendo superiores á m los que sean mayores que el precio medio, é inferiores los que sean menores; se resta el menor del precio medio, y esta resta que aquí es d se pone enfrente del precio mayor, algunas veces fuera de otra llave; se resta el precio medio del mayor, y su diferencia a se pone enfrente del precio inferior: y tenemos al lado de cada precio la cantidad que espresa la razon en que se debe tomar de ella.

Si quisiera saber, por ejemplo, que porciones de vino de á 16 rs. y de á 9 he de mezclar para vender la mezcla á 13 rs., tendria en este caso $m=13$, $m+a=16$ y $m-d=9$, que dan $a=3$, $d=4$, y disponiendo la operacion será (A):

y esto manifiesta que la razon en que debo tomar las cantidades de la mezcla de vino de á 16 y de á 9 es la de 4:3.

$$\text{(A)}\quad 13\begin{Bmatrix} 16\ldots \\ 9\ldots \end{Bmatrix}\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}$$

Si hubiese mas de dos clases, por ejemplo, tres, habria dos cuyo precio seria mayor ó menor que el medio; entónces el número que representaria la razon de la cantidad que se habia de tomar de la otra estaria espresado por la suma de las diferencias de los precios de las otras dos al precio medio.

Supongamos que hai tres clases de té: uno de á 80 reales la libra, otro de á 60 rs. y otro de á 57, y que se pregunte en que razon se han de mezclar paraque se pueda vender á 72 rs. la libra; dispondrémos los términos en esta forma (A):

y hallo que por cada 8 libras de á 60 y de á 57 que mezcle, deberé mezclar 27 del de á 80 rs.

(A)

72	80....	12+15=27
	60....	8
	57....	8

Estas cuestiones son susceptibles de una de estas dos determinaciones.

Se puede pedir ademas que se forme una cantidad determinada de mezcla, como aquí si ademas se dijese que la mezcla habia de componer 301 libras; en este caso se suman los números que espresan las razones lo que nos dará aquí $27+8+8=43$, y se dirá: si en 43 de mezcla entran 27 del de á 80, en 301 cuantas entrarán? y se encontrará por esta proporcion $43:27::301:x=\frac{301\times27}{43}=189$; número de libras que se han de tomar.

Para las otras clases dirémos $43:8::301:x=\frac{301\times8}{43}=56$; luego deberémos tomar de cada una de las otras clases 56 libras, y tendrémos: $56+56+189=301$ libras de la mezcla.

El otro modo con que puede determinarse la cuestion es diciendo que de uno de los géneros que se han de mezclar hai una cantidad fija; como si, por ejemplo, se dijese en esta cuestion que habia 243 libras de á 80, y que se queria saber la porcion de á 60 y de á 57 que se debia mezclar; para esto diríamos: si con 27 de á 80 se deben mezclar 8 de á 60 y de á 57, con 243 cuantas se deberán mezclar? y tendrémos $27:8::243:x=\frac{8\times243}{27}=72$, que nos dice que con las 243 libras de á 80 deberémos mezclar 72 del de á 60, y otras 72 del de á 57.

Si la cuestion incluyese cuatro cantidades, de las que tres fuesen de un precio inferior ó superior al precio medio, entónces de la otra se deberia tomar una cantidad, para término correspondiente de la razon, espresada por la suma de las diferencias de cada uno de los precios de las otras tres al medio; y del mismo modo se procederia si hubiese mas con esta circunstancia; si dos fuesen superiores al precio medio y dos inferiores, se combinarán cada una de las mayores con cada una de las menores de un modo cualquiera como vamos á manifestar.

Supongamos que hai trigo de á 30 rs., de á 25, de á 17 y de á 13, se pregunta en que razon se han de mezclar paraque la mezcla se pueda vender á 20 rs. sin perder ni ganar? ejecutaré la operacion como aquí se presenta (A):

de manera que por cada 3 de á 30 se deberán tomar 7 de á 25; 10 de á 17, y 5 de á 13: ó por cada 7 de á 30, tomaré 3 de á 25; 5 de á 17, y 10 de á 13.

(A)

20	30....	3		 7
	25....	7	ó	 3
	17....	10		 5
	13....	5		 10

284 Cuestion. *Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de interes.*

Se da el nombre de regla de interes á *la que determina lo que se debe pagar por alguna porcion de dinero prestado con ciertas condiciones.* Hai dos especies de interes, á saber, el *simple* y el *compuesto*: el primero es el que se paga solo por el principal ó capital, y el segundo es el que se paga por el principal y los intereses que dejan de pagarse.

Entendido esto, pasemos á resolver nuestra cuestion.

Supongamos que se nos dé el capital, el tiempo que está puesto á interes y el tanto por ciento que ha de ganar; para hallar la suma que componen al cabo de un tiempo determinado el capital y los intereses juntos, llamarémos p al capital, t al tiempo, r al interes que da un real cada año, y s á la suma que buscamos. Y dirémos: si un real da r interes en un año, cuanto dará el principal p? ó $1:r::p:pr$, luego pr será el interes que dará cada año el capital p.

Despues dirémos: si en un año p da el interes pr, cuanto dará al cabo del tiempo t? ó $1:pr::t:prt$, luego prt serán los intereses que dará el principal p al cabo del tiempo t; por consiguiente al cabo de dicho tiempo t habrá que cobrar $s=p+prt$.

Supongamos que un usurero ha prestado 15600 reales á 8 por 100 al año, y que queramos saber cuanto tendrá que cobrar al cabo de 5 años por el capital y los intereses caidos. Aquí $p=15600$; como el interes es á 8 por 100 será $r=0{,}08$ porque dirémos:

$$100:8::1:r=\tfrac{8}{100}=0{,}08 \text{ y } t=5,$$

luego será $s=15600+15600\times0{,}08\times5=21840$.

Si ahora dado un capital, el tiempo que queda puesto á ganancias y el interes anual, nos propusiéramos hallar cuanto monta al cabo de dicho tiempo el capital junto con los intereses á interes compuesto, llamaríamos a el capital, r el interes que da un real al año, t el tiempo, y haciendo $1+r=R$ tendríamos que R seria lo que se deberia cobrar al cabo de un año por un real y el interes que da. Para hallar lo que se deberá al cabo del segundo año por un real y sus intereses á interes compuesto, hemos de considerar que á principios de este segundo año el principal puesto á ganancias es $1+r$ ó R, pues siendo la cuestion de interes compuesto los intereses r han de ser parte del principal correspondiente al segundo año.

Dirémos pues: si 1 da $1+r$ ó R al cabo de un año, cuanto dará R en el mismo tiempo? ó $1:R::R:R^2$, cuyo cuarto término es lo que se deberá al cabo del segundo año por el capital y las ganancias á interes compuesto. Haciendo la misma consideracion hallarémos que en el mismo supuesto será R^3 lo que se deberá al cabo del tercer año, y por consiguiente que al cabo de t años la suma del capital, siendo este un real, y de los intereses á interes compuesto será R^t. Luego para hallar lo que importará la suma del capital a é interes al cabo de t años, á interes compuesto, esto es, en el supuesto de agregarse cada año los intereses al capital, dirémos: si al cabo de t años un real puesto á interes compuesto da R^t por el capital y los intereses, cuánto dará a en los mismos supuestos? ó $1:R^t::a:aR^t$, luego $s=aR^t$.

{ Supongamos que parte del caudal de un pupilo consiste en una suma de 20000 pesos que su tutor ha puesto á ganancias á 5 por 100. Al cabo de un año el sugeto que tenia esta suma la vuelve pagando el interes estipulado. El tutor halla en el instante proporcion de emplear dicha cantidad al mismo interes, forma un nuevo capital con los 20000 pesos y el interes que diéron el primer año, é impone este nuevo capital. Empléa del mismo modo á principios del tercer año todo lo que cobró á fines del segundo, y prosigue á este tenor por espacio de seis años; veamos lo que ha de cobrar al cabo de este tiempo.

{ En este caso $a=20000$; $t=6$; r es el interes simple de un peso; $R=1+r$, esto es, un peso con el interes que da en un año. Para sacar el valor de R hemos de sacar primero el de r diciendo:

$$100:5::1:0{,}05=r;\ \text{luego}\ R=1+r=1{,}05;$$

y haciendo las sustituciones correspondientes en la fórmula $aR^t=s$, saldrá $s=20000\times(1{,}05)^6=20000\times1{,}3401=26802$ pesos.

{ No insistirémos mas sobre este punto, porque los que se hayan impuesto medianamente en el artificio del cálculo se hallarán en disposicion de resolver todas estas cuestiones directamente por los métodos generales de la análisis. }

De las progresiones aritméticas y geométricas.

285 Se da el nombre de *progresion á una proporcion continua continuada ó á un conjunto de términos continuo-proporcionales.* Si los términos son continuo-proporcionales aritméticos la progresion será *aritmética*; y si son continuo-proporcionales geométricos la progresion será *geométrica.*

Como en una proporcion continua aritmética el primer término lleva al segundo tanto como el segundo al tercero, ó el segundo lleva al primero tanto como el tercero al segundo: se deduce que como progresion no es mas que la continuacion de la proporcion continua, una progresion aritmética es *una continuacion de términos tales que cada uno lleva al que le precede ó sigue un mismo esceso ó diferencia*; cuando lleva al que le precede la progresion se llama *creciente*, porque entónces los términos van aumentando; cuando lleva al que le sigue se llama *decreciente*, porque los términos van disminuyendo.

Aquí en la progresion aritmética se llama razon ó diferencia á aquello que se necesita añadir ó quitar al término antecedente paraque se convierta en el que le sigue; cuando se necesite quitar es lo mismo que añadir considerando como negativa á la diferencia; de donde resulta que llamarémos en general *razon* de la progresion aritmética á aquello que se necesita añadir á un término cualquiera paraque resulte el siguiente;

cuando la razon sea positiva, la progresion será *creciente*, y cuando negativa *decreciente.*

Una progresion aritmética se escribe poniendo ántes una raya con un punto encima y otro debajo, y poniendo un punto entre sus términos de esta manera: $\div 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.$&c.

Esta raya con el punto encima y debajo sirve para indicar que cada término del medio se ha de repetir; de manera que esta progresion no es sino un modo de abreviar la siguiente serie de razones aritméticas iguales: $1.3:3.5:5.7:7.9:9.11:11.13:13.15:15.17:17.19:$ &c.

Si al primer término le llamamos a, y d á la razon, la espresion

$$\div a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.a+5d.a+6d......a+(n-1)d$$

será una progresion aritmética general.

De la idéa que nos hemos formado de las progresiones aritméticas, resulta que el segundo término es igual al primero mas la razon; que el tercero es igual con el segundo mas la razon, pero como el segundo es igual al primero mas la razon, resulta que el tercero será igual con el primero mas dos veces la razon; el cuarto se compondrá del tercero mas la razon, ó como el tercero es igual al primero mas dos veces la razon el cuarto equivaldrá al primero mas tres veces la razon; el quinto se compondrá del cuarto mas la razon, ó del primero mas cuatro veces la razon; y en general un término cualquiera se compondrá del antecedente mas la razon, *ó del primero mas tantas veces la razon como términos hai ántes de él.*

Si llamamos u á un término cualquiera, a el primer término de la progresion, u á la razon ó diferencia, y n al lugar que dicho término u ocupa en la progresion, tendrémos traducida (215) la última regla de un término cualquiera en la ecuacion ó fórmula $u=a+(n-1)d$, con cuyo auxilio se puede calcular un término cualquiera de una progresion sin necesidad de los anteriores; para lo cual no hai mas que sustituir por a el primer término, por d la razon, y por n el lugar que ha de ocupar dicho término; y así, el término octavo de la progresion de arriba será $1+(8-1)2=1+7\times2=15$.

Esc. Cuando el primer término de la progresion sea cero, entónces un término cualquiera se compondrá de tantas veces la razon como términos hai ántes de él.

286 De la formacion de la progresion se deducen varias consecuencias.

1.ª *Cuatro términos consecutivos, tomados donde se quiera, forman proporcion discreta*; porque la razon entre los dos primeros es la misma que entre los dos últimos, así es que $7.9:11.13$.

2.ª *Tres términos consecutivos la forman continua*; porque la razon entre el primero y el segundo es la misma que entre el segundo y el tercero; así es que $\div 5.7.9$

3.ª *Dos términos consecutivos forman proporcion discreta con otros dos términos consecutivos, tómense donde se quieran*; porque la razon de los dos primeros siendo la de la progresion es la misma que la de los dos últimos; así es que 5.7:13.15.

4.ª *Dos términos cualesquiera están en proporcion discreta, con otros dos términos cualesquiera que disten entre sí tanto como los dos primeros distaban*; porque la razon en ambas equivale á tantas veces la de la progresion como términos hai en medio mas uno; así es que 3.11:7.15.

5.ª *Tres términos cualesquiera tales que los dos estremos disten igualmente del medio, forman proporcion continua*; porque la razon entre el primero y el medio es la misma que entre el medio y el estremo, pues ambas equivalen á tantas veces la de la progresion como términos hai entre ellos mas uno; así ÷5.11.17.

La 6.ª y principal consecuencia es: *que la suma del primer término y último es igual á la suma de dos términos cualesquiera equidistantes de los estremos; é igual al duplo del término que hai en medio si el número de términos es impar.* Para convencernos de esto observarémos que el primer término y el segundo formando proporcion con el penúltimo y el último (cons. 3.ª), el 2.º junto con el penúltimo serán iguales con el primero junto con el último; el primero y el tercero formando proporcion con el antepenúltimo y último, la suma del primero con el último equivaldrá á la del tercero y antepenúltimo, y así de los demas.

287 Hemos dicho que esta consecuencia es la principal, porque fundados en ella vamos á encontrar la suma de tantos términos como se quiera de una progresion.

Para esto sea la progresion general $\div a.b.c.d......r.s.t.u$ y llamando S la suma de los términos hasta u que considerarémos por ser inicial de último, y observando que la suma no se altera aunque se escriba al reves, tendrémos poniendo debajo de la suma ella misma escrita al reves. $\left\{\begin{array}{l} S=a+b+c+d...+r+s+t+u \\ S=u+t+s+r...+d+c+b+a \end{array}\right\}$ y sumando estas dos ecuaciones será

$$2S=(a+u)+(b+t)+(c+s)+(d+r)...+(r+d)+(s+c)+(t+b)+(u+a)$$

Ahora, como $a+u=b+t=c+s=$ &c. (cons. 6.ª) resulta que el duplo de la suma equivale á tantas veces la suma del primer término y último como términos hai en la progresion; luego si al número de términos le llamamos n tendrémos $2S=(a+u)\,n$, de donde $S=(a+u)\,\frac{n}{2}$; que nos dice que *la suma de los términos que se quieran de una progresion aritmética se halla sumando el primero con el último, y multiplicando esto por la mitad del número de los términos*; y así, la suma de ocho términos de la progresion (§ 285) será igual con $(1+15)\frac{8}{2}=16\times4=64$, como en efecto se verifica.

Como las dos ecuaciones $u=a+(n-1)d$, y $S=(a+u)\frac{n}{2}$, contienen

cinco incógnitas, á saber, a,d,n,u y S, con su auxilio se podrán determinar dos siempre que se tengan conocidas las otras tres. Si en la primera de estas ecuaciones despejamos d tendremos $d=\frac{u-a}{n-1}$, la cual nos servirá para hallar la razon cuando se tenga conocido el último término, el primero y el número de términos, y nos dice: que para esto *se resta del último el primero, y lo que queda se divide por el número de términos ménos uno, ó por el número de términos que hai ántes del último.*

En esta propiedad está fundada la interpolacion de un número cualquiera de medios aritméticos entre dos dados; y así, si nos proponemos interpolar entre 5 y 47 seis medios aritméticos, restarémos el 5 del 47, y la resta 42 la dividirémos por el número de términos que ha de haber ántes del 47; y como entre 5 y 47 ha de haber seis medios, habrá ántes del 47 un término mas, á saber, el primero 5; luego esta resta *la deberémos dividir por el número de medios que se han de interpolar mas* 1, esto es, por 7, y resultará que $\frac{42}{7}=6$; por lo cual tendrémos formados los términos en esta forma $\div5.11.17.23.29.35.41.47$.

Si entre todos los términos de una progresion aritmética considerados de dos en dos, se interpola un mismo número de medios, estos términos y los medios interpolados reunidos no forman sino una misma progresion.

En efecto, sea $\div a.b.c.d.e.f.g.$ &c. la progresion propuesta, y sea m el número de los medios que se quieren interpolar entre a y b, entre b y c, &c.; la razon de cada progresion parcial, estará espresada segun lo que acabamos de manifestar por $\frac{b-a}{m+1}$, $\frac{c-b}{m+1}$, $\frac{d-c}{m+1}$ &c.: espresiones que todas son iguales, pues a, b, c, &c., están en progresion; por lo que la razon es la misma en cada una de las progresiones parciales; y como por otra parte el último término de la 1.ª, forma el primer término de la 2.ª, y así sucesivamente, se deduce que todas estas progresiones parciales constituyen una progresion única.

Entendido esto, pasarémos ya á la progresion geométrica.

288 Como en una proporcion continua geométrica el primer término contiene ó está contenido en el segundo tantas veces como el segundo contiene ó está contenido en el tercero, resulta que como *progresion* no es mas que una proporcion continua continuada, una progresion geométrica será un conjunto de términos tales que cada uno quepa en el que le precede ó sigue un mismo número de veces: cuando quepa en el que le sigue la progresion será *creciente*, y cuando quepa en el que le precede será *decreciente*.

De aquí se deduce que si llamamos razon al número por que se ha de multiplicar un término cualquiera paraque resulte el que le sigue en la progresion creciente, este número será entero ó fraccionario; y en la decreciente será quebrado propio.

Esta progresion se escribe poniendo una raya con dos puntos encima y dos debajo, y luego los términos separados con dos puntos, en esta forma $\div\div 2:4:8:16:32:64:128:256:512:1024:2048:4096:$&c.

La raya con los dos puntos encima y debajo indica que cada término se debe considerar repetido, por ser esta una espresion abreviada de

$2:4::4:8::8:16::16:32::32:64::64:128::128:256::256:512::$&c.

de donde se deduce que tanto en esta progresion como en la aritmética todos los términos son antecedentes ménos el último, y todos consecuentes ménos el primero. Si al primer término le llamamos a, y q á la razon tendrémos que $\div\div a:aq:aq^2:aq^3:aq^4:aq^5:aq^6...aq^{n-1}$, será una progresion geométrica general.

289 De la idéa que nos hemos formado de la progresion geométrica (288) resulta que el segundo término se compone del primero multiplicado por la razon; el tercero del segundo multiplicado por la razon; pero como el segundo equivale al primero multiplicado por la razon, resulta que el tercero equivale al primero multiplicado por el cuadrado de la razon; el cuarto se compone del tercero multiplicado por la razon, ó porque el tercero equivale al primero multiplicado por el cuadrado de la razon, resulta que el cuarto se compone del primero multiplicado por el cubo de la razon; y en general, un término cualquiera se compone del anterior multiplicado por la razon, *ó del primero multiplicado por una potencia de la razon espresada por el número de términos que hai ántes de él.*

Si esta última regla la traducimos al lenguage algebráico, llamando a al primer término, u al término que se considera, q á la razon, y n al lugar que ocupa en la progresion, tendrémos $u=aq^{n-1}$. De esta fórmula nos valdrémos para sacar un término cualquiera sin necesidad de los anteriores, sustituyendo en vez de a, q y n los valores correspondientes; de manera que el séptimo término de la progresion de arriba será igual con $2\times2^{7-1}=2\times2^6=2\times64=128$.

Esc. Si el primer término fuese la unidad, entónces un término cualquiera equivaldrá á una potencia de la razon espresada por el número de términos que hai ántes de él.

Por razones análogas á las de la progresion aritmética, tenemos en esta: *que cuatro términos consecutivos forman proporcion geométrica discreta; tres consecutivos la forman continua; que dos términos cualesquiera forman proporcion con otros dos términos cualesquiera, que disten igualmente entre sí, &c. &c.*

En toda progresion geométrica el cuadrado del primer término es al cuadrado del segundo como el primero al tercero, ó como un término cualquiera al que ocupa el tercer lugar respecto de él; porque cuadrando

los dos primeros términos obtenemos el cuadrado de la razon de la progresion; pero la razon entre el primero y tercero, ó entre un término cualquiera y el que ocupa respecto de él el tercer lugar, es tambien el cuadrado de dicha razon, luego se deduce la proporcion enunciada. Y como los tres primeros términos de una progresion son los de una proporcion continua, resulta que en esta se verifica igualmente dicha propiedad.

Del mismo modo demostraríamos que en toda progresion geométrica *el cubo del primer término es al cubo del segundo como el primero es al cuarto*; y en general que *la potencia* n *del primero es á la potencia* n *del segundo, como el primero al término que en la progresion ocupa el lugar espresado por* n+1; ó mas general aun, *que la potencia* n *de un término cualquiera es á la misma potencia del que le sigue como un término cualquiera es al que ocupa respecto de él un lugar espresado por* n+1.

290 Para encontrar la suma de una progresion geométrica observarémos que una progresion geométrica no es mas que una serie de razones iguales; y como en toda serie de razones iguales *la suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes como un antecedente es á su consecuente* (268 *teor.* 4.º), resulta que como en la progresion todos son antecedentes ménos el último, si llamamos s á la suma de todos los términos será $s-u$ la suma de antecedentes; y como todos son consecuentes ménos el primero, tendrémos que $s-a$ será la suma de los consecuentes; llamando a al primer término y suponiendo que q sea la razon, será aq el segundo término, y tendrémos $s-u:s-a::a:aq::1:q$; de donde multiplicando estremos y medios sale $(s-u)q=(s-a)1.....$ ó $sq-uq=s-a$, que da $sq-s=uq-a$, ó $s(q-1)=uq-a$ y por último $s=\frac{uq-a}{q-1}$.

Si en esta espresion sustituimos el valor de u hallado ántes, se nos convertirá en $\frac{aq^{n-1}q-a}{q-1}=\frac{aq^n-a}{q-1}=\frac{q^n-1}{q-1}\times a$.

Con esta fórmula y con la $u=aq^{n-1}$ podrémos determinar dos cualesquiera de las mismas cantidades a, q, n, u, s, con tal que se den conocidas las otras tres.

Si en esta última despejamos la q sacarémos $q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ la cual nos podrá servir para interpolar medios geométricos entre dos números dados; para *lo cual no hai mas que dividir el último término por el primero, y del cociente estraer una raiz del grado que espresa el número de términos que ha de haber en todos ménos uno; ó del grado que espresa el número de médios que se han de interpolar mas uno.*

Por un método análogo al espuesto (§ 287) podrémos demostrar que *si entre todos los términos de una progresion geométrica, considera-*

dos de dos en dos se interpola un mismo número de medios geométricos, todas las progresiones parciales que se formen continuarán una progresion única.

291 La espresion de la suma nos va á dar á conocer todos los términos de una progresion; porque si en primer lugar trastornamos los signos de ambos términos del quebrado $\frac{q^n-1}{q-1}\times a$, esto no altera en manera alguna ni su valor ni su signo, y así será:

$$s=\frac{q^n-1}{q-1}\times a=\frac{1-q^n}{1-q}\times a=(\S\ 186)\ (1+q+q^2+q^3\ldots q^{n-1})a=\ldots$$
$$a+aq+aq^2+aq^3+aq^4\ldots aq^{n-1},$$

y por lo mismo la progresion de que s es la suma será,

$$\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots\ldots aq^{n-1},$$

que es una progresion geométrica general.

292 Cuando las progresiones geométricas son decrecientes, continuadas indefinidamente tienen una suma finita y determinada; para encontrarla observarémos que siendo esta última una fórmula general de las progresiones geométricas, si queremos que esté continuada indefinidamente no deberémos suponer este último término; y así, su suma estará representada por $s=a+aq+aq^2+aq^3+\&c.$

Ahora, si multiplicamos esta ecuacion por q será

$$qs=aq+aq^2+aq^3+aq^4+\&c.$$

Pero observando que la progresion propuesta era indefinida, y que se le debian suponer cuantos términos se quisiesen, la actual ecuacion tambien debe ser indefinida; porque si por faltarle á esta la primera cantidad a se terminase, restituyendo dicha cantidad, se obtendria la primera, que en este caso no seria indefinida; lo que es contra la hipótesis; y restando de esta espresion la anterior tendrémos

$$qs-s=aq+aq^2+aq^3+\&c.\ -a-aq-aq^2-aq^3-\&c.$$

pero $+aq$ y $-aq$ se destruyen, $+aq^2$ y $-aq^2$ tambien, $+aq^3$ y $-aq^3$ tambien; y como lo que debe seguir que señalamos con el &c. debe ser igual con lo otro que señalamos con el $-$&c. resulta que $qs-s=-a$, de donde se saca $s(q-1)=-a$, ó mudando los signos $s(1-q)=a$, y por último será $s=\frac{a}{1-q}$;

lo cual nos da esta regla: *para hallar la suma de una progresion geométrica continuada indefinidamente, se dividirá el primer término por la diferencia que haya entre la unidad y la razon.* (*)

(*) *Podemos llegar tambien á esta conclusion, del modo siguiente: La espresion* $s=\frac{1-q^n}{1-q}\times a=\frac{a-aq^n}{1-q}$, *la podemos poner bajo esta forma* $s=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$; *mas puesto que la progresion es decreciente,* q *será una fraccion; luego* q^n *es tambien una fraccion que será tanto menor cuanto* n *sea mayor; así mientras mas términos se tomen en la progresion, mas disminuirá el valor de* $\frac{aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}\times q^n$; *y por consiguiente la suma parcial de estos términos se aproximará á ser igual con la primera parte de* s *ó* $\frac{a}{1-q}$.

En fin, si se toma para n *un número mayor que ninguna magnitud dada;* $\frac{a}{1-q}\times q^n$ *será menor que ninguna magnitud dada, es decir que la espresion* $\frac{a}{1-q}$ *representará en este caso un valor al que se podrá acercar tanto como se quiera la suma de toda la progresion, y que por lo mismo se toma por dicha suma.*

Para convencernos de la exactitud con que podemos suponer $s=\frac{a}{1-q}$, *no tenemos mas que hacer la division de* a *por* $1-q$ *por el método espuesto* (184), *y se tiene* $s=a+aq+aq^2+aq^3+\&c.$

Por esta causa la suma de la progresion $\div\div 1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\&c.$ es $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$

293 Hagamos ahora una observacion que nos será de la mayor importancia en lo sucesivo, y es que puesto que la suma de esta progresion es 2, si tomamos el primer término 1, como solo le falta 1 para llegar á 2, la suma de todos los términos que siguen al primero no valdrá mas de 1; si tomamos dos términos tendrémos que $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, por lo que la suma de todos los términos que siguen solo valdrá $\frac{1}{2}$; si tomamos tres términos será $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$ que solo le falta $\frac{1}{4}$ para 2 ú $\frac{8}{4}$; luego la suma de todos los términos que siguen al tercero, solo valdrá $\frac{1}{4}$: y en general podemos establecer que en una progresion de esta especie: *un término cualquiera es igual á la suma de todos los que le siguen.*

Ahora, como esta propiedad se verifica cuando los términos se van haciendo dos veces menores, resulta que cuando la razon sea menor que $\frac{1}{2}$, entónces un término cualquiera será mayor que la suma de todos los que le siguen.

Para comprobarlo elegirémos la progresion $\div\div 1:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}:\frac{1}{27}:\frac{1}{81}:\&c.$ cuya suma indefinida, si la queremos encontrar directamente sin auxilio de la fórmula, será: $s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\&c.$
y multiplicando por $\frac{1}{3}$ será: $\frac{1}{3}s=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\&c.$
como aquí vemos que $\frac{1}{3}s<s$, restarémos desde luego esta última de la primera y será $s-\frac{1}{3}s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\&c.-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}-\&c.=1$ lo que da $\frac{2}{3}s=1$, y $s=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$.

Ahora, si tomamos un término solo de la progresion, como es 1, vemos que solo le falta para $\frac{3}{2}$ un medio que es menor que 1; si tomamos dos términos será $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$, que le falta para $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$ solo $\frac{1}{6}$, que es menor que $\frac{1}{2}$; y como lo mismo nos resultaria en los demas términos, se deduce que aquí *un término cualquiera es mayor que la suma de todos los que le siguen.*

Si la progresion geométrica fuese $\div\!\div 1:-\frac{1}{3}:\frac{1}{9}:-\frac{1}{27}:$&c. se tendrá $a=1$, $q=-\frac{1}{3}$, y la fórmula $s=\frac{aq^n-a}{q-1}$, daria $s=\frac{1.(-\frac{1}{3})^n-1}{-\frac{1}{3}-1}$; que si deseamos hallar la suma de los cuatro términos escritos, haríamos $n=4$ y resultaria $s=\frac{\frac{1}{81}-1}{-\frac{4}{3}}=\frac{\frac{1-81}{81}}{-\frac{4}{3}}=\frac{80.3}{81.4}=\frac{20}{27}$; y si quisiéramos hallar la suma indefinida, sustituiríamos en la fórmula $s=\frac{a}{1-q}$, 1 en vez de a, y $-\frac{1}{3}$ en vez de q, lo que nos daria $s=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$.

Si la progresion fuese $\div\!\div 1:-\frac{1}{2}:+\frac{1}{4}:-\frac{1}{8}:$&c. haciendo $a=1$, y $q=-\frac{1}{2}$ tendríamos para la suma indefinida de toda la progresion,

$$s=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

294 Toda fraccion periódica decimal la podemos considerar como una progresion geométrica; sea, por ejemplo, la fraccion 0, *abc abc abc* &c. en la cual ponemos a, b, c en vez de los guarismos paraque las consecuencias resulten con la mayor generalidad. Esta fraccion la podrémos descomponer en las siguientes : $0{,}abc+0{,}000abc+0{,}000000abc+$&c. ó (§ 138) en $\frac{abc}{1000}+\frac{abc}{1000000}+\frac{abc}{1000000000}+$&c. que es la suma de una progresion geométrica cuyo primer término es $\frac{abc}{1000}$, y la razon $\frac{1}{1000}$; luego llamándola s tendrémos (§ 292)

$$s=\frac{\frac{abc}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{\frac{abc}{1000}}{\frac{1000-1}{1000}}=\frac{abc\times1000}{999\times1000}=\frac{abc}{999},$$ que da la regla (141).

De las ecuaciones de dos términos, nociones generales acerca de lo que los matemáticos llaman raices de las ecuaciones, y método de resolver las ecuaciones numéricas de segundo y tercer grado por procedimientos análogos á los de la estraccion de la raiz cuadrada y cúbica.

295 Si nos propusiéramos, por ejemplo, resolver la ecuacion $cx^m=b$, despojaríamos al primer miembro del coeficiente c, dividiendo toda

la ecuacion por c lo que nos daria $x^m=\frac{b}{c}$; y ahora estrayendo la raiz m de ambos miembros será $x=\sqrt[m]{\frac{b}{c}}$. Esto ya lo sabíamos; pero aquí lo volvemos á considerar con el objeto de manifestar que pueden ser tantos los valores de x como unidades tiene el esponente m.

Para hacerlo ver llamarémos a al valor $\sqrt[m]{\frac{b}{c}}$, lo que dará $\frac{b}{c}=a^m$; y la ecuacion $x^m=\frac{b}{c}$, será $x^m=a^m$. Ahora, si x^m es igual con a^m, quitando del primer miembro la cantidad a^m que hai en el segundo será $x^m-a^m=0$. Bajo este aspecto consideran los matemáticos las ecuaciones, y llaman *raiz de una ecuacion á todos los valores de* x *que pueden reducir á cero dicha ecuacion.*

Para manifestar que no solo cuando $x=a$ se reduce esta ecuacion á 0, descompondrémos el primer miembro en sus factores (186) de este modo : $(x-a)(x^{m-1}+x^{m-2}a+x^{m-3}a^2+\ldots. xa^{m-2}+a^{m-1})=0$, y tendrémos que esta ecuacion será cero cuando uno de los factores lo sea; luego serán raices de la ecuacion todos los valores que puedan hacer igual con cero al factor $x-a$, que es $x=a$, y al $x^{m-1}+x^{m-2}a+x^{m-3}a^2+\ldots. xa^{m-2}+a^{m-1}=0$.

Todos estos valores tienen con la unidad relaciones mui simples que vamos á descubrir haciendo $x=az$; pues en virtud de esta hipótesis la ecuacion $x^m-a^m=0$, será $a^mz^m-a^m=0$, ó dividiendo por a^m, tendrémos $z^m-1=0$ (A), de donde se obtendrán los valores de x multiplicando por a los de z.

La ecuacion $z^m-1=0$ da en 1.^{er} lugar $z^m=1$, de donde $z=\sqrt[m]{1}=1$; pero dividiendo z^m-1 por $z-1$ que sacamos del primer valor $z=1$, nos resulta (§ 186) $z^{m-1}+z^{m-2}+z^{m-3}\ldots. z^2+z+1$, que igualando con cero este cociente, tendrémos la ecuacion de donde dependen los otros valores de z, que tengan así como la unidad la propiedad de satisfacer á la ecuacion $z^m-1=0$ ó $z^m=1$, es decir, que su potencia del grado m sea la unidad.

De aquí resulta una consecuencia estraña al parecer, y es que la unidad puede tener muchas raices diferentes de ella misma.

Estas raices, aunque imaginárias, son de un uso mui frecuente en la análisis; y por lo mismo vamos á determinarlas en los casos que por ahora nos es posible hacerlo.

Supongamos 1.º $m=2$; y en este caso la ecuacion (A) será $z^2-1=0$, que da $z^2=1$, y $z=\pm1$, esto es, $z=1$ y $z=-1$.

2.º Haciendo $m=3$ resulta $z^3-1=0$, ó (§ 186) $(z-1)(z^2+z+1)=0$; de donde sale $z-1=0$, que da $z=1$, y $z^2+z+1=0$,

que da (§ 253) $z=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1-4}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$
$=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$,
que separando los valores da $z=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, y $z=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

Las dos últimas espresiones son imaginárias; pero elevándolas al cubo por medio de la multiplicacion, se halla que todas dan $z^3=1$.

Y pues que z tiene tres valores, hallarémos para x otros tres multiplicándolos por a, pues que $x=az$; y se tendrá que la ecuacion $x^3-a^3=0$, da para x

$$x'=a;\quad x''=a\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\quad x'''=a\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Si la ecuacion fuese $x^3+a^3=0$, entónces haciendo $x=-'x$, será $x^3=-'x^3$; y sustituyendo en la ecuacion anterior, tendríamos $-'x^3+a^3=0$, que mudando los signos se convierte en $'x^3-a^3=0$, que por lo acabado de demostrar dará para $'x$ los tres valores a, $a\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $a\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; y como $x=-'x$ mudando los signos tendrémos los tres valores de x que satisfacen á la ecuacion $x^3+a^3=0$, y son $x'=-a$; $x''=a.\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$; $x'''=a.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$; y suponiendo $a=1$, se tendrán los tres valores $x'=-1$; $x''=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$; $x'''=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ que satisfacen á la ecuacion $x^3+1=0$.

3.° Haciendo $m=4$, la ecuacion (A) se convierte en $z^4-1=0$, ó (§ 186) en $(z-1)(z^3+z^2+z+1)=0$; que da $z-1=0$ y $z^3+z^2+z+1=0$.

Pero como esta ecuacion es de tercer grado, resulta que no la podemos resolver aun; y así descompondrémos á la (A) en dos de segundo en virtud de la observacion hecha (§ 179), pues segun esto $z^4-1=0$ es lo mismo que $(z^2-1)(z^2+1)=0$, que da $z^2-1=0$, ó $z^2+1=0$; la 1.ª de estas da $z=\pm 1$, ó separando los valores $z=+1$, y $z=-1$; y la 2.ª $z=\pm\sqrt{-1}$ que separándolos da $z=+\sqrt{-1}$, y $z=-\sqrt{-1}$; donde tenemos que de los cuatro valores los dos primeros son reales, é imaginários los otros dos.

Y multiplicando por a estos valores, tendrémos los cuatro siguientes de x, á saber: a, $-a$, $a.\sqrt{-1}$, $a.-\sqrt{-1}$.

Si la ecuacion fuese $x^4+a^4=0$, la descompondríamos (213) en $(x^2+a^2\sqrt{-1})(x^2-a^2\sqrt{-1})=0$, que da
$x^2+a^2\sqrt{-1}=0$, $x^2-a^2\sqrt{-1}=0$; de donde

$x^2=-a^2\sqrt{-1}$, $x^2=a^2\sqrt{-1}$; de las que se saca
$x=\pm\sqrt{-a^2\sqrt{-1}}=\pm\sqrt{a^2\times-\sqrt{-1}}=\pm a\sqrt{-\sqrt{-1}}$
$x=\pm\sqrt{a^2\sqrt{-1}}=\pm a\sqrt{+\sqrt{-1}}$; que separando los valores y acentuándolos, dan $x'=+a\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x''=-a\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x'''=a\sqrt{+\sqrt{-1}}$; $x^{IV}=-a\sqrt{+\sqrt{-1}}$.

Y suponiendo $a=1$; se tienen los cuatro valores $x'=\sqrt{-\sqrt{-1}}$, $x''=-\sqrt{-\sqrt{-1}}$, $x'''=\sqrt{+\sqrt{-1}}$, $x^{IV}=-\sqrt{+\sqrt{-1}}$ que satisfacen á la ecuacion $x^4+1=0$.

4.° Si $m=6$, la ecuacion $x^m-a^m=0$, se convierte en $x^6-a^6=0$, ó (§ 179) en $(x^3-a^3)(x^3+a^3)=0$, que da $x^3-a^3=0$, ó $x^3+a^3=0$.

La 1.ª nos ha dado ya los tres valores siguientes:

$x'=a$, $x''=a.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $x'''=a.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; y la 2.ª

$x^{IV}=-a$, $x^V=-a.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=a.\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, $x^{VI}=-a.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$
$=a.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$.

Y suponiendo por último que $a=1$, en cuyo caso la ecuacion $x^6-a^6=0$, se convierte en $x^6-1=0$, estos seis valores nos darán las seis raices de la unidad á saber: $x'=1$, $x''=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $x'''=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$,

$x^{IV}=-1$, $x^V=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, $x^{VI}=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$.

Si la ecuacion fuese $x^6+a^6=0$, la podríamos descomponer (213) en $(x^3+a^3\sqrt{-1})(x^3-a^3\sqrt{-1})=0$, y espresando para mayor sencillez $a^3\sqrt{-1}$ por α^3, que da $\alpha=\sqrt[3]{a^3\sqrt{-1}}=a\sqrt[3]{\sqrt{-1}}=a\sqrt[6]{-1}$ se reduce á encontrar los valores de x que satisfacen á las $x^3-\alpha^3=0$, $x^3+\alpha^3=0$ que en virtud de lo que acabamos de esponer (2.°), será

$x'=\alpha=a\sqrt[6]{-1}$; $x''=\alpha.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=a\sqrt[6]{-1}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$;

$x'''=\alpha.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=a\sqrt[6]{-1}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; $x^{IV}=-\alpha=-a\sqrt[6]{-1}$;

$x^V=-\alpha.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=a\sqrt[6]{-1}.\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$; $x^{VI}=-\alpha.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=$

$a\sqrt[6]{-1}.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$; y si $a=1$, se tendrán los seis valores $x'=\sqrt[6]{-1}$;

$x''=\sqrt[6]{-1}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; $x'''=\sqrt[6]{-1}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; $x^{IV}=-\sqrt[6]{-1}$;

$x^{V}=\sqrt[6]{-1}.\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}$; $x^{VI}=\sqrt[6]{-1}.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, que satisfacen á la ecuacion $x^6+1=0$.

5.° Si la ecuacion fuese $x^8-a^8=0$, en virtud de lo espuesto (179) se tendria $(x^4-a^4)(x^4+a^4)=0$, que da $x^4-a^4=0$, y $x^4+a^4=0$.

Las que por lo demostrado (3.°) nos darán $x'=a$; $x''=-a$;

$x'''=a\sqrt{-1}$; $x^{IV}=a\times-\sqrt{-1}=-a\sqrt{-1}$; $x^{V}=a\sqrt{-\sqrt{-1}}$;

$x^{VI}=-a\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x^{VII}=a\sqrt{+\sqrt{-1}}$ y $x^{VIII}=-a\sqrt{+\sqrt{-1}}$;
y suponiendo $a=1$, se tendrán las ocho raices de la unidad correspondientes á la ecuacion $x^8-1=0$, á saber:

$x'=1$; $x''=-1$; $x'''=\sqrt{-1}$; $x^{IV}=-\sqrt{-1}$; $x^{V}=\sqrt{-\sqrt{-1}}$;

$x^{VI}=-\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x^{VII}=\sqrt{+\sqrt{-1}}$; y $x^{VIII}=-\sqrt{+\sqrt{-1}}$.

Cualquiera de estos valores elevado á la potencia 8.ª da 1; y trasladando todos los segundos miembros al primero y multiplicando los 8 factores que resultan se convierte el producto en $x^8-1=0$.

En efecto, $(x-1)(x+1)\left(x-\sqrt{-1}\right)\left(x+\sqrt{-1}\right)\left(x-\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$
$\left(x+\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x-\sqrt{+\sqrt{-1}}\right)\left(x+\sqrt{+\sqrt{-1}}\right)=0$.

Los dos primeros dan x^2-1, los dos segundos x^2+1, de manera que el producto de los cuatro primeros equivale á $(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1$.

El 5.° y 6.° dan $x^2-\sqrt{-1}$; el 7.° y 8.° dan $x^2+\sqrt{-1}$; por lo que el producto de los cuatro últimos equivaldrá á . . . .
$\left(x^2-\sqrt{-1}\right)\left(x^2+\sqrt{-1}\right)=x^4+1$; y el de los ocho será . . . . .
$(x^4-1)(x^4+1)=x^8-1$, lo que debia verificarse.

Si la ecuacion fuese $x^8+a^8=0$ la descompondríamos (213) en $\left(x^4+a^4\sqrt{-1}\right)\left(x^4-a^4\sqrt{-1}\right)$; y suponiendo $a^4\sqrt{-1}=\alpha^4$ que da $\alpha=\sqrt[4]{a^4\sqrt{-1}}=a\sqrt[8]{-1}$; para mayor sencillez, tendríamos $x^4-\alpha^4=0$ $x^4+\alpha^4=0$, las cuales nos darian en virtud de lo acabado de demostrar (3.°) $x'=\alpha=a\sqrt[8]{-1}$; $x''=-\alpha=-a\sqrt[8]{-1}$;

$x'''=\alpha\sqrt{-1}=a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-1}$; $x^{IV}=-\alpha\sqrt{-1}=-a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-1}$;

$x^{V}=\alpha\sqrt{-\sqrt{-1}}=a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-\sqrt{-1}}$;

$x^{VI}=-\alpha\sqrt{-\sqrt{-1}}=-a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-\sqrt{-1}}$;

$x^{VII}=\alpha\sqrt{+\sqrt{-1}}=a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{+\sqrt{-1}}$;

$x^{VIII}=-\alpha\sqrt{+\sqrt{-1}}=-a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{+\sqrt{-1}}$.

Y suponiendo $a=1$ se tendrán los ocho valores: $x'=\sqrt[8]{-1}$;

$x''=-\sqrt[8]{-1}$; $x'''=\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-1}$; $x^{IV}=-\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-1}$;

$x^{V}=\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x^{VI}=-\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-\sqrt{-1}}$;

$x^{VII}=\sqrt[8]{-1}.\sqrt{+\sqrt{-1}}$; $x^{VIII}=-\sqrt[8]{-1}.\sqrt{+\sqrt{-1}}$, que satisfacen á la $x^8+1=0$.

6.° Si la ecuacion fuese $x^{16}-a^{16}=0$, la descompondríamos de este modo $(x^8-a^8)(x^8+a^8)=0$; lo que da $x^8-a^8=0$, $x^8+a^8=0$.

De la 1.ª se sacan $x'=a$; $x''=-a$; $x'''=a\sqrt{-1}$; $x^{IV}=-a\sqrt{-1}$;

$x^{V}=a\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x^{VI}=-a\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x^{VII}=a\sqrt{+\sqrt{-1}}$;

$x^{VIII}=-a\sqrt{+\sqrt{-1}}$; y de la 2.ª $x^{IX}=a\sqrt[8]{-1}$; $x^{X}=-a\sqrt[8]{-1}$;

$x^{XI}=a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-1}$; $x^{XII}=-a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-1}$;

$x^{XIII}=a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x^{XIV}=-a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-\sqrt{-1}}$;

$x^{XV}=a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{+\sqrt{-1}}$; $x^{XVI}=-a\sqrt[8]{-1}.\sqrt{+\sqrt{-1}}$.

Y suponiendo $a=1$; se tendrian los diez y seis valores siguientes:

$x'=1$; $x''=-1$; $x'''=\sqrt{-1}$; $x^{IV}=-\sqrt{-1}$; $x^{V}=\sqrt{-\sqrt{-1}}$;

$x^{VI}=-\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x^{VII}=\sqrt{+\sqrt{-1}}$; $x^{VIII}=-\sqrt{+\sqrt{-1}}$;

$x^{IX}=\sqrt[8]{-1}$; $x^{X}=-\sqrt[8]{-1}$; $x^{XI}=\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-1}$; $x^{XII}=-\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-1}$;

$x^{XIII}=\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x^{XIV}=-\sqrt[8]{-1}.\sqrt{-\sqrt{-1}}$;

$x^{XV}=\sqrt[8]{-1}.\sqrt{+\sqrt{-1}}$; $x^{XVI}=-\sqrt[8]{-1}.\sqrt{+\sqrt{-1}}$, que satisfacen á la ecuacion $x^{16}-1=0$.

Por el mismo procedimiento, hallaríamos los 16 que satisfacen á la $x^{16}+1=0$, y se resolverian las $x^{32}\pm1=0$, $x^{64}\pm1=0$, y en general toda ecuacion de la forma $x^{2^n}\pm1=0$.

7.º Si la ecuacion fuese $x^{12}-a^{12}=0$, la descompondríamos en $(x^6-a^6)(x^6+a^6)=0$, que da $x^6-a^6=0$, $x^6+a^6=0$.

De la 1.ª resultarian (4.º) los seis valores siguientes: $x'=a$; $x''=a.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; $x'''=a.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; $x^{IV}=-a$; $x^{V}=a.\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$; $x^{VI}=a.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$; y de la 2.ª los $x^{VII}=a\sqrt[6]{-1}$; $x^{VIII}=a\sqrt[6]{-1}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; $x^{IX}=a\sqrt[6]{-1}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; $x^{X}=-a\sqrt[6]{-1}$; $x^{XI}=-a\sqrt[6]{-1}.\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$; $x^{XII}=a\sqrt[6]{-1}.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$.

Del mismo modo hallaríamos los doce valores de x en la ecuacion $x^{12}+1=0$, y nos elevaríamos á la resolucion de las $x^{24}\pm1=0$, $x^{48}\pm1=0$, $x^{96}\pm1=0$, y en general á la $x^{3.2^n}\pm1=0$. (*)

Esta multitud de raices de la unidad proviene de una lei general de las ecuaciones, por la cual una incógnita admite tantos valores como unidades hai en el esponente del grado de la ecuacion que la determina; y cuando la cuestion no admite este número de soluciones reales, está completada por símbolos puramente algebráicos, que sometiéndolos á las operaciones indicadas en la ecuacion, la verifican.

De aquí se sigue que las raices de los números tienen dos especies de espresiones ó valores: la primera, á la cual podrémos llamar *determinacion aritmética*, es el número que se encuentra por los procedimien-

(*) *Aunque hemos resuelto en el testo ecuaciones mucho mas elevadas que las que se hallan en los demas autores, teníamos ánimo sin embargo de añadir en un apéndice otras investigaciones útiles sobre este particular; pero habiendo encontrado que los autores que se han ocupado de esta clase de ecuaciones han cometido inexactitudes y aun errores al esponer esta doctrina, y no teniendo por ahora el tiempo necesario para aclarar este punto como corresponde; voi á ocuparme en esta nota de resolver la ecuacion* $x^5-1=0$ (1); *la que podrémos poner bajo esta forma* $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ (2).

La cual quedará satisfecha ó cuando $x-1=0$, *que da* $x=1$, *ó cuando* $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ (3).

Dos métodos se pueden seguir para resolver esta ecuacion, ó por las fórmulas del apéndice 7.º, ó por otro método que se llama de las ecuaciones recíprocas; *y siendo este mas breve y elegante, vamos á darle á conocer.*

Para esto, observarémos que se llama ecuacion recíproca *aquella en que, si* α *es raiz de la ecuacion, tambien lo es* $\frac{1}{\alpha}$; *y dichas ecuaciones se conocen á primera vista por el carácter de que son iguales los coeficientes de los términos equidistantes de los estremos, cosa que se verifica en la* (3), *porque todos los coeficientes son iguales con la unidad.*

Para convencernos de que si α *satisface á dicha ecuacion, satisface tambien* $\frac{1}{\alpha}$, *sustituirémos* α *en vez de* x, *y será* $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$; *y sustituyendo* $\frac{1}{\alpha}$ *en vez de* x, *será* $\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}+1=0$, *la cual multiplicada por* α^4 *da* $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$, *que es la anterior escrita en un sentido contrario.*

Las ecuaciones recíprocas tienen la propiedad de poderse reducir á otras de un grado igual á la mitad del suyo.

En efecto, si dividimos la anterior por x^2 *tendrémos* $x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$ (4); *que podrémos poner bajo esta forma*; $(x^2+\frac{1}{x^2})+(x+\frac{1}{x})+1=0$ (5).

Haciendo ahora $(x+\frac{1}{x})=u$ (6), *tendrémos* $x^2+2+\frac{1}{x^2}=u^2$ (7); *que da* $x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$ (8). *Haciendo estas sustituciones en la ecuacion* (5), *se tiene* $u^2-2+u+1=0$ (9), *ó* $u^2+u=1$ (10), *que da* $u=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1+4}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (11), *que separando los valores, tendrémos* $u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (12) *y* $u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (13).

Espresemos por β *y* β' *estos dos valores de* u; *y tendrémos que sustituyéndolos en la* (6) *será* $x+\frac{1}{x}=\beta$ (14) *y* $x+\frac{1}{x}=\beta'$ (15), *quitando el divisor en estas ecuaciones, se convertirán en* $x^2+1=\beta x$ (16) *y* $x^2+1=\beta' x$ (17), *ó en* $x^2-\beta x=-1$ (18) *y* $x^2-\beta' x=-1$ (19); *y dan* (253) $x=\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-1}$ (20), *y* $x=\frac{\beta'}{2}\pm\sqrt{\frac{\beta'^2}{4}-1}$ (21).

Sustituyendo en estas espresiones en vez de β *y* β' *los valores anteriores, tendrémos los cuatro valores de* x *que satisfacen á la ecua-*

tos espuestos (242 y 249), y que es única para cada caso particular; la segunda comprende los valores negativos y las espresiones imaginárias, á las cuales podrémos llamar *determinaciones algebráicas*, porque no deben su existencia sino á la combinacion de los signos del Álgebra.

De aquí resultan las modificaciones que padecen las reglas en los cálculos de los radicales cuando son espresiones ó símbolos puramente algebráicos, y principalmente cuando son espresiones imaginárias.

Por ejemplo, el producto de $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-a}$ es $\sqrt{+a^2}$ segun la regla (205); pero $\sqrt{a^2}$ es igual con $\pm a$. Luego hai aquí en apariencia, incertidumbre en el signo que debe afectar á la a para responder á la cuestion. Sin embargo la verdadera respuesta es $-a$; porque en general para elevar $\sqrt{m}$ al cuadrado, basta suprimir el radical; y así $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ viene á ser $(\sqrt{-a})^2$ y por consiguiente $=-a$.

---

cion (3), y que espresándolos con las letras acentuadas, y haciendo todas las simplificaciones, resultan

$$x'=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4} \quad (22);$$

$$x''=\frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4} \quad (23);$$

$$x'''=\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4} \quad (24);$$

$$x^{IV}=\frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4} \quad (25);$$

Por consiguiente estos cuatro valores y el de $x^{V}=1$, *son los cinco que satisfacen á la ecuacion* $x^5-1=0$.

Si se tuviese $x^5+1=0$ (26); *haciendo* $x=-'x$, *seria* $x^5=-'x^5$, *y sustituyendo este valor, se tendrá* $-'x^5+1=0$, $'x^5-1=0$ (27).

Esta ecuacion nos dará para $'x$ *los mismos cinco valores que acabamos de obtener, y mudándoles los signos tendrémos los de* x *que satisfacen á la* (26); *y son*

$$x'=\frac{1-\sqrt{5}-\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4}; \qquad x'''=\frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4};$$

$$x''=\frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4}; \qquad x^{IV}=\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4};$$

$$x^{V}=-1.$$

Si la ecuacion fuese $x^{10}-1=0$ (28); *la descompondríamos en* $(x^5-1)(x^5+1)=0$ (29); *que quedaria satisfecha ó cuando* $x^5-1=0$, *ó*

Supongamos ahora que se tengà que formar el producto $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$; en virtud de la regla (205) se tendria $\sqrt{+ab}$.

Ahora $\sqrt{ab}=\pm p$, espresando por p el valor aritmético de la raiz cuadrada de ab; pero el verdadero resultado debe ser $-p$, ó $-\sqrt{ab}$, en tanto que se consideren los dos radicales $\sqrt{-a}$ y $\sqrt{-b}$ como precedidos ambos del signo $+$ ó del signo $-$.

En efecto, se tiene $\sqrt{-a}=\sqrt{a}.\sqrt{-1}$; $\sqrt{-b}=\sqrt{b}.\sqrt{-1}$; luego $\sqrt{-a}.\sqrt{-b}=\sqrt{a}.\sqrt{-1}\times\sqrt{b}.\sqrt{-1}=\sqrt{ab}.(\sqrt{-1})^2=\ldots\ \sqrt{ab}.-1=-\sqrt{ab}$.

El producto de $\sqrt[4]{-a}$ por $\sqrt[4]{-b}$, seria en virtud de la regla (205) $\sqrt[4]{+ab}$; y por consiguiente podria ser en general uno de estos cuatro valores $+\sqrt[4]{ab}$, $-\sqrt[4]{ab}$, $\sqrt[4]{ab}.\sqrt{-1}$, $-\sqrt[4]{ab}.\sqrt{-1}$.

Para determinar el verdadero, observarémos que $\sqrt[4]{-a}=\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{-1}$; $\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{b}.\sqrt[4]{-1}$; pero $\sqrt[4]{-1}.\sqrt[4]{-1}=(\sqrt[4]{-1})^2=\ldots\ (\sqrt{\sqrt{-1}})^2=\sqrt{-1}$; luego $\sqrt[4]{-a}.\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{ab}.\sqrt{-1}$.

---

cuando $x^5+1=0$; *cada una de las cuales nos daria cinco valores, y resultarian los diez que satisfacen á la* (28); *y son los siguientes:*

$$x'=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4}; \qquad x^{VI}=\frac{1-\sqrt{5}-\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4};$$

$$x''=\frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4}; \qquad x^{VII}=\frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4};$$

$$x'''=\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4}; \qquad x^{VIII}=\frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4};$$

$$x^{IV}=\frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4}; \qquad x^{IX}=\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4};$$

$$x^{V}=1; \qquad x^{X}=-1.$$

Si la ecuacion fuese $x^{10}+1=0$ (30), *la descompondríamos en* $(x^5+\sqrt{-1})(x^5-\sqrt{-1})=0$, *la cual quedaria satisfecha cuando* $x^5+\sqrt{-1}=0$, *ó cuando* $x^5-\sqrt{-1}=0$; *y como cada una de estas nos daria cinco valores, obtendrémos los diez que satisfacen á la* (30).

Del mismo modo nos elevaríamos á la resolucion de la $x^{20}\pm1=0$, $x^{40}\pm1=0$, $x^{80}\pm1=0$, *y en general á la* $x^{5.2^n}\pm1=0$.

{ 296. Entre las obras de Vieta se halla un tratado con este título: *De numerosa potestatum affectarum resolutione*, que nos parece tan ingenioso que no podemos ménos de dar aquí una idéa de él. Está reducido á resolver las ecuaciones numéricas por el método de estraccion de raices; él llega por este medio hasta resolver las ecuaciones del sesto grado. Nosotros no presentarémos aquí sino las de segundo y tercer grado; porque esto bastará para nuestro objeto; no lo harémos como el mismo Vieta porque su método exige un artificio demasiado grande, sino que lo ejecutarémos de un modo que no parezca tan artificial.

{ Supongamos que se nos da la ecuacion $x^2+7x=60750$; si descomponemos el primer miembro en factores, tendrémos $x(x+7)=60750$; donde se ve que la cuestion está reducida *á encontrar un número tal que multiplicándole por la suma de dicho número con siete, resulte* 60750.

```
6,07,50 | 243
4       |-----
        | 2+7
 14
-------
193,50  | 4 primer divisor
16·
 16
  28
-------
01470   | 48 2.º divisor
 144
    9
   21
-------
 0000
```

{ Esto supuesto, dividirémos el número 60750 en períodos de dos en dos guarismos como si fuésemos á estraer la raiz cuadrada, y verémos cual es el mayor cuadrado que está contenido en el primer período; y como es 4 pondrémos 2 en la raiz, multiplicarémos este primer guarismo 2 por el mismo 2 junto con el 7; pero este 2 que hemos sacado ha de espresar centenas puesto que tenemos tres períodos (§ 239), y como el 2 por el 2 dará el cuadrado 4 de las centenas le colocarémos debajo del primer período 6; el guarismo 2 que ha de espresar centenas multiplicado por las unidades que son 7 dará 14 centenas, que deberémos colocar desde las centenas en adelante; por lo mismo colocarémos el 14 en un reglon mas abajo que el 4 de modo que caiga debajo de las centenas; sumarémos estas dos espresiones y al mismo tiempo efectuarémos la resta diciendo: 4 es 4, de 4 á 7 van 3; 1 es 1, de 1 á 10 van 9, y llevo 1; 4 es 4 y 1 que llevo son 5, de 5 á 6 va 1; saco por consiguiente la resta 193, á cuyo lado bajo todo lo que hai del número propuesto.

Ahora, para sacar el segundo guarismo debemos hacer lo mismo que en la raiz cuadrada, esto es, separar el último guarismo del período que sigue al primero de que se estrajo la raiz cuadrada, y dividir lo que quede á la izquierda por el duplo de la raiz hallada que es aquí 4; por consiguiente señalaré de un modo cualquiera por ejemplo con un punto puesto encima ó debajo, el guarismo 3 que es el que corresponde al segundo período, y dividiré lo demas, esto es el 19 que queda, por 4, y el cociente 4 le pondré al lado del 2 anterior; hallado este segundo guarismo tengo que formar las dos partes del cuadrado y ademas el producto de 7 por este guarismo; por lo mismo diré: 4 por 4 son 16 que pondré

debajo del 19, porque el duplo de la raiz hallada por el cociente debe ocupar este lugar; luego diré: el cuadrado del cociente 4 es 16 que pondré debajo del 16 anterior, corriéndole un lugar hácia la derecha; y finalmente multiplicaré el cociente 4 por el 7 y pondré el producto 28 debajo del anterior, corriéndole un lugar hácia la derecha, porque espresando el 4 de la raiz decenas, este producto tambien espresará decenas; sumaré estas tres partidas y al mismo tiempo las restaré de lo de arriba diciendo: 8 es 8, de 8 á 15 van 7; 6 y 2 son 8 y 1 que llevábamos son 9, de 9 á 13 van 4, y de 13 llevo 1; 6 y 1 que llevaba son 7, y 1 son 8, de 8 á 9 va 1, y de 9 no llevo nada, 1 es 1, de 1 á 1 no va nada, y por consiguiente nos resulta la resta 147, que agregándole el 0 del cual no se restó queda 1470.

En esta resta apuntarémos el último guarismo 0, dividirémos lo que quede á la izquierda por 48, duplo de la raiz hallada, y el cociente 3 le pondrémos en la raiz hallada. Multiplicarémos el 48 por dicho cociente, y el producto 144 le pondrémos debajo del 147; cuadrarémos el cociente y su cuadrado 9 le pondrémos debajo un lugar mas hácia la derecha, que será debajo del último guarismo; finalmente multiplicaré el 3 por el 7, y el producto 21 le colocaré debajo de las unidades, porque el producto de 3 que espresa unidades debe ser unidades; sumaré estas tres partidas, y restándolas al mismo tiempo veo que me sale por resta cero, lo que manifiesta que el número que buscaba es 243.

Si hubiera quedado resta se le podrian haber añadido dos ceros, y sacar un guarismo decimal, y así sucesivamente.

Si se nos propusiese resolver la ecuacion $x^2+6x=58155867$ procederíamos como aquí se presenta (A):

(A)

```
58,15,58,67 | 7623
49          |--------
            | 7.....+6
  42
-----------
0911,38,67  | 14  1.er divisor
 84·
  36
   36
-----------
 03502,67   | 152 2.º divisor
  304·
     4
    12
-----------
  045747    | 1524 3.er div.
   4572·
       9
      18
-----------
   00000
```

(B)

```
               43
14,356,197  | 25
 8          |--------
            | 2...+30
   60
-----------
06350,197   | 12  1.er divisor
 48·
  96
   64
   120
-----------
 0524997    | 1728 2.º divis.
  5184·
    648
      27
      90
-----------
  000000
```

297 Pasemos ya á las ecuaciones de tercer grado, y propongámonos por ejemplo, resolver la ecuacion $x^3+30x=14356197$.

Descompondrémos el primer miembro en $x(x^2+30)$, y tendrémos la cuestion reducida *á encontrar un número tal que si se multiplica por su cuadrado mas* 30, *resulte un producto igual con* 14356197.

Para esto estraerémos la raiz cúbica de este número por el método espuesto (249), y al mismo tiempo multiplicarémos los guarismos que váyamos sacando por el 30, colocando el producto donde corresponda, y restándole, junto con las partes del cubo, en la forma que se ve en (B).

Despues de dividido el número en períodos de tres en tres guarismos, veo que el mayor cubo contenido en 14 es 8 cubo de 2, pongo por consiguiente 2 en la raiz y el cubo 8 debajo del 14; el 2 de la raiz espresa centenas porque hemos sacado la raiz del tercer período, y por lo mismo multiplicándolas por 30 darán 60 centenas; luego deberé poner 60 en un renglon inferior al 8, y debajo del 1 que espresa las centenas; sumarémos y restarémos á un tiempo de este modo: 0 es 0, de 0 á 1 va 1; 6 es 6, de 6 á 6 no va nada; como en los otros lugares no hai guarismos que se deban restar, pondré los de arriba ó iré diciendo: de 0 á 5 van 5, de 0 á 3 van 3, de 8 á 14 van 6, y llevo 1, de 1 á 1 no va nada; bajo los otros dos guarismos 97 de que no resté, conservo la última coma en su lugar y apunto el 5 por lo dicho (249), y lo que queda á la izquierda lo dividiré por 12 triplo del cuadrado de la raiz hallada; encuentro por cociente 5 que pongo; pero como al formar las dos primeras partidas del cubo veo que la suma de los guarismos de especie superior da 7, que es mayor que 6, infiero que debo poner ménos en la raiz; por consiguiente borraré lo que tengo escrito y pondré 4; formaré las tres partes del cubo, y ademas multiplicaré el 4 por el 30, poniendo el producto 120 debajo de las decenas; sumo y resto, y en la resta 524997 apunto el primer 9, divido todo lo que queda á la izquierda por 1728 triplo del cuadrado de la raiz hallada 24, y el cociente 3 le pongo en la raiz; efectúo las tres partes del cubo y el producto de 3 por 30, sumo y resto, como no me sale diferencia infiero que el número que busco es 243.

Si nos propusiéramos resolver la ecuacion $x^3+531x=581351037462$, ejecutaríamos la operacion como aquí se presenta (C).

```
                                               (C)
581,351,037,462   | 8346
512               | 8......531
     4248         |
---------------   | 192 1.er div.
069346,789,462    |
 576·
  216
    27
     1593
---------------
 095596 30,162    | 20667 2.°
 82668·
   3984
     64
     2124
---------------
 1252904922       | 2086668 3.°
 12520008·
     90072
       216
      3186
---------------
 0000000000
```


De las permutaciones y combinaciones, y de la elevacion de un binomio á una potencia cualquiera.

298 Se llaman *permutaciones* á los diferentes modos que hai de disponer ó colocar muchas cosas ó cantidades las unas respecto de las otras; y se llaman *combinaciones* á los diferentes modos que hai de tomar muchas cantidades ó cosas de una en una, de dos en dos, de tres en tres, &c. sin atender al órden con que se han de colocar.

Principiarémos por las permutaciones, y elegirémos por signos de las cosas por permutar las letras del alfabeto por ser bastante conocidas. Si tuviéramos una sola letra tal como a, esta no admitiria nada mas que una permutacion, por cuanto, respecto de ella, de cualquiera manera que se coloque estará sola. Si tomamos ahora dos letras a y b se podrán colocar de dos maneras diferentes, porque la a se puede poner ántes de la b ó despues de la b, en esta forma ab, ba; luego dos letras se pueden permutar de 2×1 maneras. Si suponemos ahora otra tercera letra c, esta se podrá colocar ántes, en el medio y al fin de cada permutacion anterior, y tendrémos las seis siguientes cab, acb, abc, cba, bca, bac; luego tres cantidades ofrecen un número de permutaciones espresado por $3\times2\times1$. Y en general siguiendo el mismo raciocinio podríamos determinar que un número n de letras, cantidades ó cosas, ofrece un número de permutaciones que está espresado por $n(n-1)(n-2)(n-3)......2\times1$.

Hemos llegado á este resultado por la induccion, y estamos seguros de que nadie dudará de su exactitud; pero no obstante vamos á manifestar esto analíticamente, proponiéndonos la proposicion como

Problema. *Determinar de cuantas maneras se pueden permutar* n *letras, cantidades ó cosas.*

Supongamos que se tienen ya formadas todas las permutaciones de $n-1$ letras; y tendrémos que para obtener el de n letras será necesario introducir en cada permutacion la nueva letra en todos los lugares posibles; luego la podrémos colocar ántes de la primera, ántes de la segunda &c... ántes y despues de la última; luego un término compuesto de $n-1$ letras daria n compuestos de n letras. Así representando por x las permutaciones de que son susceptibles n letras, y por x' las que corresponden al número $n-1$ de letras, se tendria la ecuacion $x=nx'$.

Esta ecuacion se verifica en cualquier valor de n; luego si representamos por x'', x''', x^{IV},......$x^{(n-1)\prime}$ el número de permutaciones de que son susceptibles $n-2$, $n-3$.....$n-(n-1)$ letras, se tendrá: $x'=(n-1)x''$; $x''=(n-2)x'''$; &c. $x^{(n-1)\prime}=n-(n-1)=n-n+1=1$, porque una letra no es susceptible sino de una permutacion. Sustituyendo en vez de $x^{(n-1)\prime}$, $x^{(n-2)\prime}$, &c. sus valores en las ecuaciones precedentes se tendrá $x=n(n-1)(n-2)(n-3)....[n-(n-1)]$ como ántes.

Al intentar hallar las permutaciones puede suceder que se determine el número de cosas que han de entrar en cada permutacion; y así, nos propondrémos el siguiente

Problema. *Dadas* n *letras* a, b, c, d, &c. *determinar el número de permutaciones que pueden resultar, con tal que no entren sino* m *letras en cada permutacion.*

Res. y *Dem.* Sea z el número buscado, z' el número de las permutaciones de $n-1$ letras tomadas de $m-1$ en $m-1$ letras; é indaguemos, como en la cuestion precedente, el medio de hacer depender z de z'. Para esto observarémos que colocando la letra a delante de cada permutacion de las $n-1$ letras tomadas de $m-1$ en $m-1$, se tendrian todas las permutaciones de m letras, en las cuales la letra a ocuparia el primer lugar; y el número de estos términos seria z'; del mismo modo colocando la letra b delante de cada permutacion de las otras $n-1$ letras a, c, d, &c. tomadas tambien de $m-1$ en $m-1$, se tendrian todas las permutaciones de m letras, en las cuales la letra b ocuparia el primer lugar, lo que daria tambien z' términos. Haciendo el mismo raciocinio para cada una de las letras c, d, &c. se tendrian á cada vez z' términos; luego, pues que el número de las letras es n, se tendrian en todas nz' términos; y así resultaria como en la cuestion precedente $z=nz'$.

Y representando por z'', z''' &c. el número de permutaciones de $n-2$ letras tomadas de $m-2$ en $m-2$, de $n-3$ letras tomadas de $m-3$ en $m-3$, &c. tendrémos estas ecuaciones $z'=(n-1)z''$, $z''=(n-2)z'''$ &c.

Y si señalamos con $z^{(m-1)\prime}$ el número de permutaciones que dan $n-(m-1)$ letras tomadas de $m-(m-1)$ en $m-(m-1)$ ó de una en una, se tendrá $z^{(m-1)\prime}=n-(m-1)$, por lo que sustituyendo en las ecuaciones precedentes estos valores hasta la primera se hallará $z=n(n-1)(n-2)(n-3)....[n-(m-)]$.

De esta fórmula se puede deducir el número de permutaciones de n letras, haciéndolas entrar todas ellas en cada una, para lo cual basta hacer $n=m$, lo que nos dará: $z=x=n(n-1)(n-2)(n-3)....2\times1$.

299 Finalmente, para determinar el número de combinaciones nos propondrémos el siguiente

Problema. *Dado un número cualquiera* n *de letras, determinar cuantas combinaciones diferentes dan tomándolas de* m *en* m *letras.*

Res. y Dem. Si estos productos fuesen conocidos, dando á las letras que entran en cada término todas las permutaciones posibles, se tendrian todas las diferentes disposiciones de n letras tomadas de m en m. Y pues que cada combinacion ha de estar compuesta de m letras, para cada término se tendrian $1.2.3....m$ permutaciones: luego si se representa por C el número de las combinaciones, se tendrá:

$$C.1.2.3.....m=(\S\ 298)n(n-1)(n-2)(n-3).....[n-(m-1)]$$

de donde sale $C=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)....[n-(m-1)]}{1.2.3.4......m}$

Todos los casos particulares se deducen fácilmente de esta fórmula. Haciendo en ella $m=1$ se tiene la espresion $C=n$. Haciendo $m=2$, la espresion se convierte en $\dfrac{n(n-1)}{2}$; y si suponemos ahora que $n=5$ se tendrá $C=\dfrac{5.4}{2}=\dfrac{20}{2}=10$, que son los diez ambos que se pueden sacar á la lotería, en el supuesto de acertar los cinco números que salen. Haciendo $m=3$ tendrémos $C=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$; que suponiendo $n=5$ se convierte en $C=\dfrac{5.4.3}{2.3}=5.2=10$, que son tambien los diez ternos que se pueden sacar á la lotería en el mismo supuesto.

300 Entendido esto, pasemos á determinar la espresion $x+a$ elevada á una potencia cualquiera. Ya hemos visto que

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,\ \text{que}\ (x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3,$$

y tambien por la multiplicacion sucesiva nos cercioramos de que

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4,\ \&c.$$

pero esta multiplicacion no hace percibir claramente la lei de los coeficientes numéricos de estos resultados. Reflexionando acerca del procedimiento de la multiplicacion, se echará de ver que los coeficientes numéricos nacen de las reducciones que trae consigo la igualdad de los factores que forman una potencia, y que impidiendo estas reducciones se hará mas perceptible la composicion de estos productos.

Para conseguir el efecto que deseamos basta dar á todos los binomios que se multiplican, segundos términos diferentes entre sí, esto es, que bastará tomar, v. g. $x+a, x+b, x+c, x+d$, &c.

y efectuando las multiplicaciones, y colocando en columna todos los términos donde se halle x con un mismo esponente, tendrémos:

$$\begin{array}{ll}
1.^{\circ}\ (x+a)(x+b)= & x^2+ax+ab \\
 & \quad\ +bx \\
2.^{\circ}\ (x+a)(x+b)(x+c)= & x^3+ax^2+abx+abc \\
 & \quad\ +bx^2+acx \\
 & \quad\ +cx^2+bcx \\
3.^{\circ}(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)= & x^4+ax^3+abx^2+abcx+abcd \\
 & \quad\ +bx^3+acx^2+abdx \\
 & \quad\ +cx^3+adx^2+acdx \\
 & \quad\ +dx^3+bcx^2+bcdx \\
 & \qquad\qquad +bdx^2 \\
 & \qquad\qquad +cdx^2
\end{array}$$

&c.

Sin efectuar mas productos que estos se puede ya reconocer la lei de su formacion: y concibiendo que todos los términos afectos de la misma potencia de x, y colocados en la misma columna, no forman sino uno solo, como por ejemplo: $ax^3+bx^3+cx^3+dx^3=(a+b+c+d)x^3$, y así de los demas, tendrémos:

1.º *Que en cada producto se halla un término mas que unidades hai en el número de sus factores.*

2.º *Que el esponente de* x *en el primer término es el mismo que el número de los factores; y va disminuyendo una unidad de un término al otro, hasta que en el último ya no se halla ó está con el esponente cero, que entónces siendo igual con la unidad desaparece enteramente.*

3.º *Que en el primer término no tiene coeficiente la* x; *en el segundo tiene por coeficiente á la suma de los segundos términos de los binomios; en el tercero tiene por coeficiente á la suma de los diferentes productos que se obtienen multiplicando de dos en dos los segundos términos de los binomios; en el cuarto el coeficiente de* x *es la suma de los diversos productos que se obtienen, multiplicando de tres en tres los segundos términos de los binomios, y así sucesivamente; de manera que el último término que no contiene á* x, *ó la contiene elevada á cero que equivale por lo mismo á la unidad, está representado por el producto, de todos los segundos términos de los binomios.*

301 La analogía nos manifiesta que la forma de estos productos debe ser la misma cualquiera que sea el número de factores; pero siguiendo la máxima de Laplace (*), para asegurarnos de si esta lei de composicion es general, supongamos que se haya reconocido ya por verdadera para el producto de un número n de binomios, el cual esté representado por $x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+Rx^{n-3}\ldots+Y$; espresion en que no pudiéndose escribir sino los primeros y últimos términos mientras no se determine n, señalamos con puntos todos los que pueden faltar.

Ahora, multiplicando este resultado por un nuevo factor $x+l$, tendrémos $\left\{\begin{array}{l} x^{n+1}+Px^n+Qx^{n-1}+Rx^{n-2}\ldots+Yx \\ \qquad +lx^n+Plx^{n-1}+Qlx^{n-2}\ldots\ldots+lY \end{array}\right.$

en cuya espresion observarémos:

1.º *Que si* P *es la suma de los* n *segundos términos* a, b, c, d &c. P+l *será la de los* n+1 *segundos términos* a, b, c, d &c. l, *y por consiguiente la composicion señalada á este coeficiente será verdadera para el producto del grado* n+1 *si es verdadera para el grado* n.

2.º *Si* Q *es la suma de los productos de las* n *cantidades* a, b, c, d &c. *tomadas de dos en dos*, Q+lP *espresará la de los productos de* n+1 *cantidades* a, b, c, d &c. l, *tomadas tambien de dos en dos*; porque siendo P la suma de las primeras, lP será la suma de sus productos por la nueva cantidad introducida l; luego la composicion señalada será verdadera para el grado $n+1$ si lo es para el grado n.

3.º *Si* R *es la suma de los productos de* n *cantidades ó letras* a, b, c, d &c. *tomadas de tres en tres*, R+lQ *será la de los productos de* n+1 *cantidades* a, b, c, d &c., l, *tomadas tambien de tres en tres*; pues siendo Q la suma de los productos de las primeras tomadas de dos en dos, multiplicada por la nueva cantidad introducida l dará los diferentes productos de las letras tomadas de tres en tres, luego la composicion señalada será verdadera para el grado $n+1$ si lo es para el grado n.

(*) *Véase la nota del* § 200.

Donde se ve que este modo de discurrir se estiende á todos los términos, y que el último lY será el producto de los $n+1$ segundos términos de los binomios.

Luego queda demostrado que la lei de composicion que se supuso verdadera para el producto de n factores binomios, lo será igualmente para el número $n+1$ de binomios; y puesto que habíamos reconocido dicha lei hasta el número de cuatro binomios, será exacta para cinco, para seis y en general para un número cualquiera de ellos.

302 Ahora, suponiendo que los segundos términos de los n factores $x+a$, $x+b$, &c. son iguales entre sí, el producto se convertirá en la potencia n del binomio $x+a$, y tomará por consiguiente esta forma:

$$x^n+nax^{n-1}+Aa^2x^{n-2}+Ba^3x^{n-3}+Ca^4x^{n-4}+\text{\&c.}$$

Los coeficientes A, B, C, &c. representan el número de productos diferentes que se pueden formar con n letras, tomadas de dos en dos, de tres en tres, &c.

Pero los productos diferentes que se pueden formar con un número cualquiera de cosas, letras ó cantidades, tomadas de dos en dos, de tres en tres, &c. es lo mismo que el número de combinaciones que se pueden formar con dichas cantidades, porque en los productos no altera en nada la permutacion de los factores; luego A tendrá esta forma $\frac{n(n-1)}{2}$, por ser el número que espresa los productos diferentes ó combinaciones que se pueden formar con n letras tomadas de dos en dos; B tendrá esta forma $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}$, porque es el número de combinaciones de n letras de tres en tres; C será igual á $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3\times4}$ y así sucesivamente; luego $(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times3}a^3x^{n-3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times3\times4}a^4x^{n-4}+\text{\&c.}$ y un término cualquiera del desarrollo, ó el término general suponiendo que m esprese el número de términos que hai ántes de él, estará representado por $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(m-1)]}{1.2.3.4\ldots\ldots m}$,

ó resolviendo en factores, por $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\ldots\frac{n-(m-1)}{m}a^mx^{n-m}$.

Si en vez de m suponemos $m+1$, tendrémos en esta espresion el término que ocupa el lugar $m+2$, y será

$$\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\dots\frac{n-(m-1)}{m}\times\frac{n-m}{m+1}a^{m+1}x^{n-(m+1)};$$

y dividiendo esta espresion por la anterior, como convienen en todos los factores del divisor ménos en el último, los podrémos suprimir, y tendremos solamente $\dfrac{\frac{n-m}{m+1}a^{m+1}x^{n-m-1}}{a^m x^{n-m}}=\dfrac{n-m}{m+1}\times\dfrac{a}{x}$.

Luego despues de sacado un término cualquiera, para sacar el siguiente no hai mas que multiplicar el último por $\dfrac{n-m}{m+1}\times\dfrac{a}{x}$; pero como $n-m$ es el esponente de la primera parte en el término anterior, y $m+1$ el lugar que dicho término anterior ocupa en la fórmula, resulta esta regla sencilla para la práctica: *multiplíquese el término anterior ó últimamente formado por el esponente que en él lleva la primera parte del binomio; divídase este resultado por el número que espresa el lugar que ocupa dicho término anterior en la espresion; y multiplíquese tambien por el cociente de dividir la segunda parte del binomio por la primera, lo que se ejecuta disminuyendo una unidad al esponente de la primera parte y aumentándola en el de la segunda.*

Conviene mucho acostumbrarse á ejecutar operaciones de estas, y así nos propondrémos elevar á la 7.ª potencia la cantidad $c+d$, y se tendrá: $(c+d)^7=c^7+7c^6d+21c^5d^2+35c^4d^3+35c^3d^4+21c^2d^5+7cd^6+d^7$.

Diciendo: el primer término es el primero del binomio, elevado á la potencia que indica el esponente; y así será c^7. Ahora, para hallar el segundo nos podemos valer desde luego de que su coeficiente es el esponente de la potencia, ó sacarle por la regla general diciendo: 7, esponente de c en el término anterior, por 1, su coeficiente, y dividido por 1, lugar que ocupa dicho término anterior, da 7; disminuirémos el esponente de la c en una unidad, y harémos que aparezca la d con la unidad por esponente; despues dirémos: 7 por 6 son 42; 42 dividido por 2 son 21, y por consiguiente el tercer término será $21c^5d^2$; para el siguiente dirémos: 21 por 5 son 105, que dividido por 3 da 35; por lo que dicho término será $35c^4d^3$; el coeficiente del siguiente será $\frac{35\cdot4}{4}=35$; el del otro $\frac{35\cdot3}{5}=\frac{5\cdot7\cdot3}{5}=7\cdot3=21$;

el del otro será $\frac{21.2}{6}=\frac{3\cdot7\cdot2}{3\cdot2}=7$; el del otro será $\frac{7\cdot1}{7}=1$;

y como en este ya no se halla la primera parte ó se halla con un esponente 0, aplicando la regla para el coeficiente del término siguiente daria $\frac{1.0}{8}=\frac{0}{8}=0$; luego el coeficiente de este término y por consiguiente el

mismo término sería 0; y todos los demas que han de resultar de la multiplicacion de este tambien lo serán.

Esto tambien nos lo manifiesta la espresion del término general porque como en él se hallan los factores n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, &c. en llegando á $n-n$, que aquí es $7-7$, debe ser 0 este término, y todos los que le siguen, porque contienen este factor.

Esta fórmula que hemos obtenido se conoce con el nombre de fórmula del *binomio de Neuton*; este admirable geómetra la dió sin demostracion, y la aplicó para cuando n era un número entero, quebrado, positivo ó negativo. Con los conocimientos que tenemos hasta ahora no la podemos demostrar sino para cuando n es un número entero, como lo acabamos de ejecutar; en adelante la manifestarémos en los demas casos, y por dos métodos mui diversos.

Esc. Si en la fórmula del binomio se hace $a=1$, y $x=1$, se tiene

$(1+1)^n=2^n=1+\dfrac{n(n-1)}{1.2}+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2.3}+\dots\dots+1$; que nos dice que *la suma de los coeficientes del binomio elevado á una potencia entera y positiva, es constantemente igual á la misma potencia del número 2.*

Así, la suma $1+7+21+35+35+21+7+1$ de los coeficientes de la 7.ª potencia es 128 que es la 7.ª potencia de 2.

303 Cuando el esponente es un número entero, la espresion tiene un número finito de términos; y en habiendo formado la mitad de ellos, los coeficientes son los mismos que los de los anteriores como se ha podido observar en $(c+d)^7$, y en todas las (300); pero no obstante demostrarémos esta propiedad enunciándola en el siguiente

Teor. *Dos términos del desarrollo de $(x+a)^n$, equidistantes de los estremos, tienen un mismo coeficiente numérico.*

Dem. Para demostrarlo, supongamos que los términos se hallen m lugares distantes, tanto del primero como del último. El que dista m lugares del primero, ocupará el lugar $m+1$ en dicho desarrollo, ó lo que es lo mismo, tendrá m términos ántes de él; luego su coeficiente será (§ 302) $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots[n-(m-1)]}{1.2.3.4\dots m}$ (A).

Llamemos r al lugar que ocupa despues del primero el término que dista m lugares del último; ó lo que es lo mismo, sea r el número de términos que hai ántes del que dista m lugares del último, y tendrémos que su coeficiente será $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots[n-(r-1)]}{1.2.3.4\dots r}$ (B).

Luego todo está reducido á probar que las espresiones (A) y (B) son iguales: con cuyo objeto observarémos que siendo n el esponente de la potencia, el número total de términos (§ 300, 1.º) será $n+1$; y como ántes del término que tiene á (B) por coeficiente hai r términos, y despues de él hai m términos, resulta que si sumamos r con m, y añadimos la unidad por el mismo término cuyo coeficiente es (B), tendrémos el número total de términos del desarrollo; luego será $r+m+1=n+1$, de donde resulta $r=n-m$.

Luego si sustituimos en vez de r este valor en (B), tendrémos:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(n-m-1)]}{1.2.3.4\ldots(n-m)};$$

y como $n-(n-m-1)=n-n+m+1=m+1$, esta espresion se nos convertirá en $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(m+1)}{1.2.3.4\ldots(n-m)}$(C), y todo está reducido á probar que esta espresion (C) es igual con la (A); para lo cual nos basta manifestar que reducidas á un comun denominador, tienen iguales sus numeradores; pero efectuando esta operacion se obtienen los numeradores

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(m-1)].1.2.3\ldots(n-m) \quad (A')$$
$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(m+1).1.2.3\ldots m \quad (C').$$

Pero (A′) es el producto de los números naturales desde n hasta $n-(m-1)$ multiplicado por los números naturales que hai desde $n-m$ hasta la unidad, ó el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n inclusive; y como el (C′) ofrece el mismo producto queda demostrada la proposicion.

Esc. 1.º Hubiéramos podido dar esta demostracion con mas brevedad, observando: 1.º que el desarrollo del binomio $(x+a)$ debe permanecer el mismo, aunque se mude x en a y a en x, y se obtenga v. gr. $(a+x)^n$; y 2.º que los coeficientes no dependen sino del esponente y de números que espresan los lugares; de donde resulta que partiendo de los dos términos estremos, los coeficientes de los términos que ocupan el mismo lugar deben ser los mismos.

Esc. 2.º De la fórmula del binomio de Neuton, y haciendo observaciones análogas á las hechas respecto del cuadrado y cubo, podemos sacar la siguiente regla para estraer una raiz cualquiera de una cantidad numérica: *divídase el número propuesto en períodos de tantos guarismos como unidades tiene el esponente de la raiz que se quiere sacar; véase cual es la mayor potencia de aquel grado contenida en el primer período de la izquierda, póngase en la raiz, y dicha potencia réstese de dicho período; al lado de la resta bájese el período siguiente, sepárense tantos guarismos ménos uno como unidades tiene el esponente de la raiz que se quiere estraer; elévese la raiz hallada á una potencia una unidad ménos que el grado de la raiz que se estrae, multiplíquese esto por el esponente de dicha raiz, y este será el número por que se deberá dividir lo que queda á la izquierda de la coma; despues se formarán las partes de dicha potencia, y se continuará del mismo modo.*

Propongámonos para hacer aplicacion de esta regla, estraer la raiz 6.ª del número 18014398509481984; y procederémos del modo siguiente: le dividirémos en períodos de á seis guarismos; verémos cual es la mayor sesta potencia contenida en el primero 18014; y observando que la sesta potencia de 5 es 15625 y la de 6 es 46656; pondrémos desde luego 5 en la raiz; y su sesta potencia la restarémos del primer período. Al lado de la resta 2389, bajo el período siguiente, y separo cinco guarismos con una coma; lo que queda á la izquierda, lo divido por el séstuplo de la quinta potencia de 5, esto es, por 18750, y saco 1 por cociente, que pongo en la raiz. Multiplico el divisor por el cociente 1 y el producto, que es el mismo divisor, le coloco debajo de lo separado con la coma. Ahora debemos formar las otras cinco partes de la sesta potencia, que son *quince veces la cuarta potencia de* 5 *por el cuadrado del cociente* 1, lo que da 9375 que pondrémos debajo corriéndole un lugar hácia la derecha. Ahora debe seguir *veinte veces el cubo de* 5 *por el cubo de* 1; lo que da 2500, que coloco debajo corriéndole un lugar hácia la derecha. Despues debe seguir *quince veces el cuadrado de* 5 *por la cuarta potencia de* 1, lo que da 375. Luego debe seguir *seis veces* 5 *multiplicado por la quinta potencia de* 1, lo que da 30, que coloco debajo un lugar mas á la derecha. Y finalmente la sesta potencia de 1 que es 1, que pongo debajo un lugar mas hácia la derecha; sumo todas estas partidas, y resto.

```
18014,398509,481984 |512
15625
023893,98509            |18750
  18750
    9375
     2500
      375
       30
        1
0418110708 4,81984 |2070151506
  414030301 2
    4059120 60
      21224 160
        6242 40
         9792
           64
  0000000000000000
```

Al lado de la resta 418110708, bajo el otro período; separo los cinco guarismos últimos. Divido lo que queda á la izquierda por 6 veces la quinta potencia de 51, esto es, por 2070151506, y saco 2 por cociente, que pongo en la raiz. Multiplico el divisor por el cociente 2, y coloco el producto 4140303012 debajo de lo separado con la coma. Ahora multiplico 15 veces la cuarta potencia de 51 por el cuadrado del cociente 2; lo que da 4059120060 que coloco debajo corriéndole un lugar á la derecha. Despues multiplico 20 veces la tercera potencia de 51 por el cubo del cociente 2; lo que da 21224160 que pongo debajo corriéndole un lugar hácia la derecha. Despues multiplico 15 veces la segunda potencia de 51 por la cuarta potencia de 2; lo que da 624240 que coloco debajo un lugar mas hácia la derecha. Multiplico luego 6 veces la raiz por la quinta potencia de 2; lo que da 9792 que coloco debajo un lugar mas hácia la derecha. Y por último formo la sesta potencia de 2; lo que da 64 que pongo debajo corriéndole un lugar mas á la derecha. Sumo todas estas partidas y resto; y como sale cero por resta, infiero que la raiz sesta del número propuesto es 512.

A este mismo resultado se hubiera llegado sacando primero la raiz cuadrada del número propuesto; y de lo que sacásemos volviendo á estraer la raiz cúbica.

Si del 512 estrajésemos la raiz tercera sacaríamos 8; que será la raiz del grado 18 del número propuesto.

De los Logaritmos.

304 En general se llaman *logaritmos* los términos de una progresion aritmética correspondientes á los de una progresion geométrica que se llaman números; de manera que si reunimos las dos progresiones

$$\div 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot \&c.$$
$$\div\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : \&c.$$

los términos 3, 5, &c. de la primera son los logaritmos de sus correspondientes 2, 4, 8, &c. de la segunda que se llaman números. Si la progresion aritmética tiene por primer término cero y la geométrica por primer término la unidad, entónces estas dos progresiones suministran los medios mas espeditos para abreviar las operaciones; y si á esto se agrega el que la razon de la progresion aritmética sea la unidad, entónces dichas progresiones formarán un *sistema* de logaritmos; por ejemplo: las dos progresiones

$$\left.\begin{array}{l}\div 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \&c. \\ \div\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : \&c.\end{array}\right\} \text{(P) forman un sistema.}$$

Y como en este caso los términos de la progresion geométrica están formados (289 esc.) por una potencia de la razon, á la progresion geométrica que espresa los números la podemos representar por $\div\div 3^0 : 3^1 : 3^2 : 3^3 : \&c.$ y como en esta el esponente de la razon es el término de la progresion aritmética ó el logaritmo, resulta que á dicha razon se le llama *base del sistema*, y que en todo sistema *el logaritmo de un número es igual al esponente de una potencia de la base igual con dicho número.*

En todo sistema se conoce cual es la base, porque es el número que tiene por logaritmo la unidad.

Reunidas dos progresiones en que la aritmética empiece por *cero* y la geométrica por *uno* tales como las (P), se tendrá que un término cualquiera de la progresion aritmética se compondrá de tantas veces la razon como términos hai ántes de él (285 esc.); y uno cualquiera de la geométrica se compondrá de una potencia de la razon espresada por el número de términos que hai ántes de él (289 esc.); y como estas dos progresiones

se corresponden el primer término de la una con el primer término de la otra, el segundo con el segundo, el tercero con el tercero, &c. resulta que *en un término cualquiera de la progresion aritmética será la razon tantas veces sumando como en el término correspondiente de la geométrica sea factor la razon de esta.*

Luego si se suman dos términos de la progresion aritmética, en la suma estará contenida tantas veces por sumando la razon cuantas esté por factor en el término correspondiente de la progresion geométrica; y por consiguiente este término de la geométrica será el producto de los dos correspondientes á aquellos dos de la aritmética que se sumáron.

Esto quiere decir que *para multiplicar por logaritmos se suma el logaritmo del multiplicando con el logaritmo del multiplicador, se busca en las tablas del sistema el número que corresponde á este logaritmo y este será el producto*; así, para multiplicar el 9 por el 81 sumarémos el 2 logaritmo de 9 con el 4 logaritmo de 81, y verémos que la suma 6 corresponde al número 729, que es el producto verdadero de 9 por 81.

Para dividir por logaritmos se resta el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo, se busca en las tablas el número que corresponde á este logaritmo y este será el cociente; cuyo procedimiento está fundado en que siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, el logaritmo del dividendo ha de ser igual á la suma del logaritmo del divisor con el del cociente; y por consiguiente el logaritmo del cociente igual á la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el del divisor; y así, para dividir 243 por 27 restarémos de 5 logaritmo de 243 el 3 logaritmo de 27, y como la diferencia 2 corresponde al número 9, digo que 9 es el cociente de dividir 243 por 27.

Para elevar á potencias se multiplica el logaritmo de la cantidad por el esponente de la potencia, se busca en las tablas el número que corresponde á este logaritmo, y esta será la potencia; cuyo procedimiento está fundado en que en la potencia está contenida por factor tantas veces la raiz como unidades tiene el esponente de la potencia: y de consiguiente se habrá de sumar consigo mismo el logaritmo de la raiz tantas veces como unidades tiene dicho esponente. Y así, para elevar el 9 á la tercera potencia multiplicarémos el 2 que es el logaritmo de 9, por 3, y el producto 6 verémos que corresponde al 729, que es en efecto la tercera potencia del 9.

Para estraer raices se divide el logaritmo de la cantidad por el esponente de la raiz, se busca en la tabla el número á que corresponde este logaritmo, y esta será la raiz que se deseaba; cuyo procedimiento está fundado en que estraer raices es lo contrario de elevar á potencias, y por lo mismo se ha de seguir la regla opuesta; por lo que si se quisiera estraer la raiz segunda de 729 dividiríamos el 6 logaritmo de 729 por 2 esponente de la raiz cuadrada, y el cociente 3 veríamos que corresponde á 27, que es la raiz cuadrada de 729.

Si las progresiones no tuviesen la circunstancia espresada arriba, se deberian añadir algunas otras reglas para encontrar estos resultados, que no espondrémos por no traer utilidad alguna.

305 Puesto que las operaciones de multiplicar se reducen por logaritmos á operaciones de sumar, las de dividir á restar, las de elevar á potencias á simples multiplicaciones, y la estraccion de raices á simples divisiones, resulta que con el auxilio de los logaritmos se abrevian considerablemente todas estas operaciones complicadas. Por lo cual es un asunto de la mayor importancia el dar á conocer los métodos con que se tienen calculados los logaritmos de los números.

Para la formacion de las tablas se ha elegido por base el número 10, por ser la raiz de la escala aritmética que nos sirve en nuestro sistema de numeracion; de manera que se han reunido las progresiones siguientes.

$$\div 0 \;.\; 1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4 \;.\; 5 \;.\; 6 \;.\; 7 \;.\; \&c.$$
$$\div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : 10000000\ \&c.$$
$$\div\!\div 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 : 10^7\ \&c.$$

donde se ve que las dos últimas son una misma, solo que en la tercera están indicadas las operaciones y en la segunda están efectuadas; y tambien se advierte que los logaritmos no son sino los esponentes á que se ha de elevar la base para producir los números.

Estas progresiones aunque se continuasen todo lo que se quisiese, no nos suministrarian unas grandes ventajas; pues las operaciones de multiplicar, dividir, &c. por 10, por 100, &c. no cuestan ningun trabajo. Y así, todo el mérito consiste en hacer que los números 2, 3, 4, 5, &c. formen parte de esta progresion geométrica, y que se tengan sus términos correspondientes en la aritmética. Para esto lo primero que se presentó á los primeros calculadores de logaritmos fué que si entre 1 y 10 interpolaban un número considerable de medios geométricos, por ejemplo 10000000, la diferencia entre ellos seria mui corta, y por consiguiente entre estos términos los habrá que se diferencien mui poco de los números 2, 3, &c. y ejecutando lo mismo entre 10 y 100 se tendrian tambien términos mui próximos á 11, 12, &c. Si se ejecutaba la misma interpolacion en la progresion aritmética se podrian entresacar de esta los términos que correspondiesen á los números que en la geométrica se aproximasen mas á 2, 3, 4, &c. y se tendrian de este modo, colocando en una columna estos números y en otra á su lado los logaritmos, construidas nuestras tablas.

Pero el hacer esta interpolacion exigia (290) que se dividiese el 10 por 1, y que del cociente 10 se estrajese una raiz cuyo esponente fuese 10000001, cosa que no pudiéndose ejecutar porque no habria papel ni cabeza para ello, aunque el método general de practicarlo se conoce (303 esc. 2.°), se abandonó este medio y se eligió el siguiente.

En primer lugar entre 1 y 10 se interpoló un medio geométrico y se

halló el 3,1622 &c. que en la tabla adjunta está señalado con C, y se hizo igual interpolacion entre 0 y 1 de la progresion aritmética, y se halló el correspondiente 0,5000000 &c. Ahora, si entre 1 y 3,1622 &c. que están representados por A y C en la tabla, interpolamos otro medio geométrico, tendrémos 1,778 &c. que está representado en la tabla por D; continuando la misma operacion interpolando medios entre los términos mas próximos entre que se halle el 2, y ejecutando la misma operacion con los correspondientes en la aritmética, al cabo de la 24.ª operacion sacamos por término medio, como se ve en la tabla de la página siguiente, el Δ que es 2,0000000, que solo se diferenciaria del valor 2 en guarismos decimales que se hallasen en el octavo lugar; y como en ninguna de las operaciones comunes ocurre el necesitar una exactitud mayor, nos podemos ya contentar con este, y tomar el término 0,3010300 correspondiente en la aritmética por el verdadero logaritmo de 2.

Ahora, para el de 3 hallaríamos primero un medio proporcional entre E y C de la tabla, que son los mas próximos entre que se halla, y continuaríamos la operacion del mismo modo que se ve en la tabla respecto del 2; despues para hallar el de 4 no tendrémos mas que duplicar el logaritmo de 2; para el de 5 tampoco teníamos necesidad de calcularle directamente; pues como 5 es igual con $\frac{10}{2}$ restando del logaritmo de 10 que es 1,0000000 el logaritmo de 2 que es 0,3010300 obtendríamos 0,6989700 para el logaritmo de 5. Para hallar el de 6 sumaríamos el logaritmo de 3 con el de 2 porque $6=3\times2$; para el de 7 le tendríamos que calcular directamente interpolando medios; para el de 8 nos bastará triplicar el de 2; para el de 9 duplicar el de 3; y en una palabra solo tendríamos que calcular interpolando medios los logaritmos de los números primeros.

{ Debemos observar que las diferencias entre los términos consecutivos de la progresion geométrica son 9, 90, 900, 9000 &c., mientras que la que tienen los términos consecutivos de la aritmética están todos espresados por 1. De manera que la primera unidad de aumento de los logaritmos se repartirá entre los logaritmos de nueve números; la segunda entre los logaritmos de 90 números, la tercera entre los de 900 &c. Donde se ve que suponiendo que esta reparticion fuese igual, los logaritmos de los números desde 2 hasta 10 ámbos inclusive, recibirian $\frac{1}{9}$ de incremento por cada unidad que aumentase el número; que los de los números comprendidos entre 10 y 101 recibirian un aumento de $\frac{1}{90}$; los comprendidos entre 100 y 1001, le recibirian de $\frac{1}{900}$ &c. Luego resulta en general *que el acrecentamiento que recibe el logaritmo de un número, cuando este aumenta una unidad, es tanto menor cuanto el número es mayor.* }

306 Habiendo manifestado ya como se pueden formar estas tablas por los métodos que conocemos hasta ahora, debemos pasar á esplicar

	MEDIOS geométricos.	Logaritmos		MEDIOS geométricos.	Logaritmos
A	1.0000000	0,0000000	*O*	1.9999786	0,3010253
C	3.1622777	0,5000000	*P*	2.0005408	0,3011474
B	10.0000000	1,0000000	*N*	2.0011032	0,3012695
A	1.0000000	0,0000000	*O*	1.9999786	0,3010253
D	1.7782794	0,2500000	*Q*	2.0002596	0,3010864
C	3.1622777	0,5000000	*P*	2.0005408	0,3011474
D	1.7782794	0,2500000	*O*	1.9999786	0,3010253
E	2.3713737	0,3750000	*R*	2.0001190	0,3010558
C	3.1622777	0,5000000	*Q*	2.0002596	0,3010864
D	1.7782794	0,2500000	*O*	1.9999786	0,3010253
F	2.0535249	0,3125000	*S*	2.0000489	0,3010406
E	2.3713737	0,3750000	*R*	2.0001190	0,3010558
D	1.7782794	0,2500000	*O*	1.9999786	0,3010253
G	1.9109529	0,2812500	*T*	2.0000137	0,3010329
F	2.0535249	0,3125000	*S*	2.0000489	0,3010406
G	1.9109529	0,2812500	*O*	1.9999786	0,3010253
H	1.9809566	0,2968750	*V*	1.9999961	0,3010291
F	2.0535249	0,3125000	*T*	2.0000137	0,3010329
H	1.9809566	0,2968750	*V*	1.9999961	0,3010291
I	2.0169144	0,3046875	*X*	2.0000048	0,3010310
F	2.0535249	0,3125000	*T*	2.0000137	0,3010329
H	1.9809566	0,2968750	*V*	1.9999961	0,3010291
K	1.9988546	0,3007812	*Y*	2.0000004	0,3010301
I	2.0169144	0,3046875	*X*	2.0000048	0,3010310
K	1.9988546	0,3007812	*V*	1.9999961	0,3010291
L	2.0078642	0,3027344	*Z*	1.9999982	0,3010296
I	2.0169144	0,3046875	*Y*	2.0000004	0,3010301
K	1.9988546	0,3007812	*Z*	1.9999982	0,3010296
M	2.0033543	0,3017578	*W*	1.9999993	0,3010298
L	2.0078642	0,3027344	*Y*	2.0000004	0,3010301
K	1.9988546	0,3007812	*W*	1.9999993	0,3010298
N	2.0011032	0,3012695	π	1.9999998	0,3010299
M	2.0033543	0,3017578	*Y*	2.0000004	0,3010301
K	1.9988546	0,3007812	π	1.9999998	0,3010299
O	1.9999786	0,3010253	Δ	2.0000000	0,3010300
N	2.0011032	0,3012695	*Y*	2.0000004	0,3010301

su disposicion. Las tablas que hasta ahora se han calculado con mas estension y exactitud son las que se han formado bajo la direccion de Mr. Prony; estas abrazan hasta los logaritmos de 200000 y están calculados con diez guarismos decimales; pero aun no se han publicado (*); por lo que aquí manifestarémos en el ínterin la disposicion de las publicadas en castellano por nuestro antecesor D. Tadeo Lope y Aguilar, que contienen los logaritmos de los números hasta 107500; las cuales solo se diferencian de la última edicion estereotipa de Didot en 500 logaritmos que nada influye en unas tablas; y ademas se tienen en castellano por la mitad del precio que las citadas.

En primer lugar debemos advertir que la parte entera de que se compone el logaritmo de un número, se llama *característica*; y se llama *mantisa* á la fraccion decimal que acompaña á la característica. Ahora, como los logaritmos de 10, 100, 1000, &c. no tienen mantisa por ser los términos enteros de la progresion primitiva, resulta que *los logaritmos de los términos que crezcan en progresion décupla tienen una misma mantisa*; porque han de resultar de la suma del logaritmo del menor con el de 10, 100, 1000, &c. cuyos logaritmos son 1, 2, 3, &c. sin mantisa. Tambien se verifica otra propiedad, y es que *todos los números que convienen en tener igual número de guarismos tienen una misma característica, y que esta tiene tantas unidades ménos una como guarismos el número propuesto*; porque los logaritmos de los números comprendidos entre 10 y 100, por ejemplo, han de ser mayores que 1 y menores que 2, luego tendrán 1 de característica, que es una unidad ménos que el número de guarismos; lo cual es sumamente importante, porque dado un número sabemos inmediatamente cual es la característica de su logaritmo, y dada la característica conocerémos los guarismos del número, que han de ser uno mas que unidades tiene dicha característica. Por cuyo motivo la primera abreviacion que hai en las tablas es el no hallarse la característica.

Esto supuesto, ábranse dichas tablas y se observará que la primera columna de la izquierda tiene encima de sí la letra *N*, inicial de *números*, porque estos se hallan debajo de ella; á su lado se ve una columna en que dice Logar., espresion abreviada de *Logaritmos*. Despues sigue otra columna de números y al lado otra en que se hallan sus logaritmos, siendo cada uno el logaritmo del número que tiene á su izquierda; y continúa del mismo modo hasta concluir la cuarta llana con 1000 y su logaritmo. Se advierte que ántes del logaritmo hai una coma, la cual indica que á su izquierda se debe colocar la característica que corresponda al número segun los guarismos que contenga.

Desde la 3.ª columna de la primera llana se ve que el logaritmo de 102 no tiene enfrente de sí mas de los cinco guarismos 86002, y que hai dos

(*) *Se están ya imprimiendo.*

lugares huecos; lo cual quiere decir que los guarismos que debia haber allí son los que hai encima en el de arriba; de manera que poniendo los términos de la mantisa ,0086002, y poniendo tambien la característica 2 que nosotros sabemos que corresponde al 102, será su logaritmo completo 2,0086002. Del mismo modo tendrémos que el logaritmo de 829 es despues de puesta la característica 2,9185545; y que el de 943 es igual con 2,9745117.

Los logaritmos inmediatos de los números que son mayores que 1000 tienen ya tres guarismos comunes; por lo cual se presentan de aquí en adelante las tablas con otra disposicion mui importante é ingeniosa, que es como aparecen desde la segunda llana de la hoja tercera; y que sirven para encontrar el logaritmo de todo número que no contenga mas de seis cifras, lo que se consigue del modo siguiente. *Se buscan las cuatro primeras cifras en la columna de los números que es la que tiene* N *encima, y los tres primeros guarismos que en la columna que tiene encima cero se hallan enfrente ó por la parte superior de dicho número, serán los tres primeros guarismos de la mantisa; para hallar los restantes, observarémos que si el número propuesto no tiene mas de cuatro guarismos, los otros cuatro guarismos de la mantisa serán los que en la columna que encima tiene cero se correspondan enfrente del número propuesto; si tiene cinco guarismos se buscará en la columna que tenga encima el quinto guarismo, que cuatro guarismos son los que corresponden enfrente de los cuatro primeros guarismos del número propuesto, y estos serán los cuatro últimos guarismos de la mantisa. Si tiene seis guarismos el número propuesto, despues de hallado el logaritmo que corresponde á los cinco primeros guarismos, se verá cual de las tablitas que hai en la última columna que encima tiene un número, y luego á la izquierda de una raya los nueve guarismos* 1, 2, *&c., corresponde enfrente del número propuesto ó la mas próxima superior, y se tomará el número que esté á la derecha del que espresa el sesto guarismo, lo cual se sumará con las últimas cifras de la mantisa hallada: con lo que se tendrá el logaritmo pedido.*

Propongámonos, por ejemplo, hallar el logaritmo de 1046, y lo primero que ejecutaré será poner la característica que aquí es 3; buscaré estos cuatro guarismos en la columna de los números, que aquí se encuentran en la primera llana, y veo tambien que aun en los números hai abreviacion pues se omiten de cinco en cinco los dos primeros guarismos; de manera que busco primero los de 10, y veo luego donde se hallan los otros dos 46, y como á su lado no hai tres guarismos, sino un hueco, veo cuales son los que están encima; y como son ,019 los pondré despues de la característica, y á continuacion los cuatro guarismos 5317 que se hallan enfrente de 46 en la misma columna donde arriba hai cero, porque aquí solo consta el número de cuatro guarismos; con lo cual tendrémos que logar. 1046=3,0195317; del mismo

modo hallaria que log. 1389=3,1427022, y que log. 6874=3,8372095.

Propongámonos ahora hallar el logaritmo de 10374, primero pondré la característica que aquí corresponde ser 4, porque tiene cinco guarismos el número; despues buscaré los tres primeros guarismos que hai separados en la columna que tiene cero encima, y que corresponden enfrente ó encima del 1037 que se halla en la primera llana, y hallo que son ,015; luego, veo en la columna que por arriba tiene 4 cuales son los cuatro guarismos que corresponden enfrente del 1037, y hallo ser 9462; por lo que me resulta que log. 10374=4,0159462.

Del mismo modo hallaria que log. 13738=4,1379235, y que log. 48376=4,6846300.

Podria ocurrir que enfrente de los cuatro primeros guarismos no correspondiese exactamente ningun número en la columna del quinto; por ejemplo, si me propusiera hallar el logaritmo de 40837, despues de puesta la característica 4 buscaria los tres primeros guarismos de la mantisa, y hallaria que eran por la regla general 610; pero bajando despues por la columna que encima tiene el quinto guarismo 7, hallo hueco el lugar que corresponde enfrente de 4083; en este caso se toman los tres primeros guarismos de la mantisa que estén próximamente inferiores, y hallo aquí que son 611, luego veré enfrente de estos guarismos que es lo que corresponde en la columna que tiene 7 encima, y hallo ser 0538; por lo que log. 40837=4,6110538.

Pasemos ya á los logaritmos de números de seis guarismos, y nos pondrémos primero hallar el de 134685; ante todas cosas pondré la característica que sé que es 5, despues hallaré el logaritmo correspondiente al número 13468 como si tuviese solo estos cinco guarismos, y encuentro ser 5,1293031; ahora para hallar lo que le corresponde por el sesto guarismo veré cual de las tablitas que hai en la última columna corresponde mas enfrente del número de solos cuatro guarismos, y hallo ser aquí la que encima tiene 323; veo á la derecha del último guarismo que es 5 que número hai, y como hallo 162 añado esto á los últimos guarismos de la mantisa hallada, como aquí se ve (A):

Y encuentro por último que el logaritmo de 134685 es 5,1293193.

(A)

$$\begin{array}{r} 5{,}1293031 \\ 162 \\ \hline 5{,}1293193 \end{array}$$

Del mismo modo hallaria que

$$\log.468328=\left\{\begin{array}{r}5{,}6705427\\74\end{array}\right\}=5{,}6705501$$

$$\log.783472=\left\{\begin{array}{r}5{,}8940224\\11\end{array}\right\}=5{,}8940235,$$

y finalmente $\log.349035=\left\{\begin{array}{r}5{,}5428628\\63\end{array}\right\}=5{,}5428691.$

Cuando el número tenga mas de seis guarismos, despues de puesta la característica correspondiente, se halla primero la mantisa como si solo tuviese cinco, y luego se multiplican los restantes por la diferencia

Zz

que se halla en las tablas de diferencias y productos; en el producto se separan tantos guarismos decimales con la coma como guarismos habia ademas de los cinco, y lo que quede á la izquierda se añade á la mantisa del logaritmo hallado. Por ejemplo: si quisiéramos hallar el logaritmo de 34892863, pondríamos desde luego la característica correspondiente que es 7; despues veríamos que la mantisa que pertenece á los cinco primeros guarismos es 5427259, á la cual añadiendo el producto de multiplicar 125 por los otros tres guarismos restantes 863, despues de separados tres guarismos con la coma que da 107,875 ó 108 (§ 151), obtendrémos que el log. $34892863=\left\{\begin{matrix}7{,}5427259\\ 108\end{matrix}\right\}=7{,}5427367$.

Del mismo modo hallaríamos que

$$\log.\ 5984032=\left\{\begin{matrix}6{,}7769916\\ 23\end{matrix}\right\}=6{,}7769939.$$

Esta práctica está fundada en que como la mantisa de un logaritmo es la misma que la de todos los números que estén en progresion décupla, resulta que la mantisa del 34892863 será la misma que la del logaritmo de 34892,863; ahora, hallada ya la mantisa del 34892, para encontrar lo que le corresponde por la parte decimal 0,863 podrémos formar esta proporcion:

1 (diferencia entre los números 34892 y 34893): 125 (diferencia entre sus logaritmos)::0,863 (diferencia entre el número propuesto y el 34892) :x(diferencia entre los logaritmos del número propuesto y el de 34892)$=\dfrac{125\times 0{,}863}{1}=125\times 0{,}863$, lo que conduce á establecer la regla practicada ántes.

En esto se funda la construccion de las tablitas de diferencias y productos que se hallan en la última columna de cada llana, y en que están calculadas las partes que corresponde añadir por un guarismo cualquiera que tenga demas el número; en efecto, fijándonos en la que se halla enfrente del 783472, verémos que la diferencia es 56, y multiplicando esta diferencia por los nueve números dígitos, tendrémos la tabla (A); y como en virtud de la regla que acabamos de demostrar se debe separar en cada producto un guarismo, si lo ejecutamos y añadimos una unidad al último cuando el que se desprecie sea 5 ó mayor que 5, se nos convertirá esta tabla en la (B) que es la que se halla en el libro.

(A)		(B)	
			56
1	56	1	6
2	112	2	11
3	168	3	17
4	224	4	22
5	280	5	28
6	336	6	34
7	392	7	39
8	448	8	45
9	504	9	50

Debemos observar que en estas tablas que están dispuestas por el método abreviado, y que empiezan verdaderamente desde 1000 en adelante, se pueden hallar los logaritmos de los números menores que 1000;

pues si quisiéramos hallar el logaritmo de 47, despues de puesta la característica 1, pondríamos la mantisa del 470 ó del 4700; lo que es mui importante en muchas ocasiones.

307 La cuestion inversa, á saber, *encontrar el número correspondiente á un logaritmo dado*, es tambien de la mayor importancia. Estas tablas nos dan directamente medios para hallar los números hasta de seis cifras, para lo cual se practicará lo siguiente. *Búsquense primero los tres primeros guarismos de la mantisa en los que están separados en la columna que tiene cero encima y debajo; despues véase si alguno de los números de cuatro guarismos de la misma columna es igual con los otros del logaritmo propuesto, en cuyo caso el número buscado será el de cuatro cifras, que en la columna de los números está enfrente de los cuatro últimos guarismos de la mantisa. Si los cuatro últimos guarismos de la mantisa dada, no se hallan exactamente en la columna que tiene cero encima, véase entre cuales está y continúese hácia la derecha del menor de ellos hasta llegar á uno que sea igual; en cuyo caso el número que se busca será igual á los cuatro guarismos que en la columna de los números están enfrente de estos cuatro de la mantisa, junto con el guarismo que tenga sobre sí la columna en que se hallan dichos cuatro guarismos, y tendrémos el número que constará de estos cinco guarismos. Ahora, sino se hallasen los últimos cuatro guarismos exactamente, veria entre que dos columnas se hallaban; se pondria el número correspondiente al menor de ellos, y luego se hallaria la diferencia entre los últimos guarismos de la mantisa propuesta y el menor de ellos; y esta diferencia se veria en las tablas de los productos á que múltiplo se aproximaba mas, y se pondria por sesto guarismo del número el que espresa este múltiplo.*

Solo falta ahora que sepamos cuantos guarismos enteros debe tener este número: para lo cual *se separan con la coma de izquierda á derecha tantos guarismos mas uno como unidades tenia la característica.* Y si por la característica debiese tener mas de seis guarismos, entónces *si el logaritmo se encontró exactamente se pondrán los ceros que se necesiten á continuacion del número hallado*; y sino, *la diferencia entre la mantisa del logaritmo propuesto y el menor de aquellos dos entre que se halla en las tablas, la dividiríamos por la diferencia de la tablita que se halla mas enfrente; y el cociente decimal le pondríamos despues de los cinco primeros guarismos hallados*; con lo cual se tendria el número con los guarismos que se desease, y se colocaria la coma donde conviniese.

Propongámonos ahora hallar el número á que corresponde el logaritmo 2,5352941: primero buscaré los tres primeros guarismos de la mantisa que son 535; hallados estos, veo si los otros cuatro se hallan en esta columna; y como en efecto se verifica, digo que el número es 3430 que está enfrente, junto con el 0 de la columna; de manera que el número será 34300; pero como la característica es 2, nos indica que el número ha de tener solo tres guarismos enteros; luego los separarémos con la coma y será el número 343,00 ó solamente 343.

Si el logaritmo fuese 3,5984075 hallaria primero los tres primeros guarismos en la columna del cero, y despues bajaria por ella viendo si los otros cuatro se hallaban en ella ó buscando el menor de ellos, y hallaria que era el 3527; continúo viendo en las demas columnas de la derecha cual de los que están enfrente del 3527 es igual con los cuatro guarismos 4075 últimos de la mantisa propuesta; y como le he encontrado tomo los guarismos 3966 que están en la columna de los números; á esto se agregará el guarismo 5 de la columna en que se hallan los cuatro últimos guarismos de la mantisa, y diré que el número es 39665; pero como la característica dice que solo ha de haber cuatro guarismos en enteros, separaré el último con la coma, y el número pedido será 3966,5.

Si el logaritmo fuese 3,6597593 hallaria ser 4568 los cuatro primeros guarismos, y veria que lo demas de la mantisa se hallaba entre las columnas 3 y 4, por lo que el número será mayor que 45683 y menor que 45684; como aquí solo ha de tener en enteros cuatro guarismos, sino queremos mas aproximacion que un guarismo decimal, tomarémos el número menor 45683 y tendrémos, despues de puesta nuestra coma, que es el número 4568,3; si quisiéramos una aproximacion mayor, por ejemplo, de dos guarismos, hallaríamos la diferencia entre 7546 últimos guarismos de la mantisa de las tablas y 7593 de la mantisa propuesta; y la diferencia 47 veríamos en la tabla de los productos de la diferencia anterior á que múltiplo corresponde, y veo que aquí al que mas se aproxima es al 48, y por lo mismo pongo el 5 que está á la izquierda del 48 despues del último guarismo 3, y el número será 4568,35. Si hubiéramos querido mayor aproximacion, hubiéramos dividido la diferencia 47 por 95, ó hubiéramos reducido á quebrado decimal el $\frac{47}{95}$ que da 0,49473 &c. por lo que digo que el número correspondiente al logaritmo dado 3,6597593 es 4568,349473 &c.

Si el logaritmo fuese 6,8715352, veria que se hallaba entre la mantisa del 74393 y la del 74394; pero como aquí la característica me dice que el número ha de tener siete guarismos, no me contentaré con estos cinco guarismos primeros, sino que la diferencia 31 que hai entre la mantisa del propuesto y la del menor entre que se halla, la dividiré por 59, diferencia que se halla en las tablas, y el cociente decimal 0,52542 &c. le pondré á continuacion del menor; y tomando siete guarismos enteros saco que el número correspondiente al logaritmo dado es 7439352,542 &c.

Finalmente, si se me propusiese hallar el número á que corresponde el logaritmo 7,8914371, hallaria que era exactamente al 77882; pero como la característica me dice que ha de tener ocho guarismos en en-

teros, supliré con ceros los guarismos que me faltan, y hallaré que el número es 77882000.

El método que hemos seguido para encontrar desde el quinto guarismo en adelante, está fundado en que si llamamos d á la diferencia que hai entre la mantisa del logaritmo propuesto y la del menor entre que se halla en las tablas, y D la diferencia que se halla en las tablas, podemos poner aproximadamente (*) esta proporcion $D:1::d:x=\frac{d}{D}$ que da la regla que hemos practicado.

Resolucion de algunas cuestiones por logaritmos.

308 Supongamos que se nos pide hallar por logaritmos el cuarto término de esta proporcion $11526:27829::34578:x=\frac{27829\times34578}{11526}$, donde la primera operacion que hallo indicada es la multiplicacion; para ejecutar esta por logaritmos busco primeramente el logaritmo que corresponde á 27829 y hallo ser 4,4444976; despues busco el de 34578 y hallo que es 4,5387999, sumándolos como se ve (A), resulta 8,9832975; y como veo indicada la division del producto 27829×34578 por 11526, para ejecutarla por logaritmos restaré el logaritmo 4,0616786 que corresponde al 11526 de 8,9832975; y ejecutándolo como allí se ve, sale por resta 4,9216189; busco el número que corresponde á este logaritmo y hallo ser 83487, con lo que queda resuelto el problema propuesto. Aquí se ve que para hallar este cuarto término he tenido que hacer primero una suma y despues una resta; y como los matemáticos deben conciliar con la exactitud la brevedad lo mas que sea posible, se ha ideado un medio que es mui socorrido por cuanto el mayor uso que se hace de los logaritmos es para hallar cuartos términos de proporciones; lo cual se ejecuta por medio del *complemento aritmético*, del cual ya hemos insinuado algo (100), y darémos á conocer ahora suficientemente.

$$\begin{array}{r} (A) \\ 4,4444976 \\ \underline{4,5387999} \\ 8,9832975 \\ \underline{4,0616786} \\ 4,9216189 \end{array}$$

Se llama *complemento aritmético de un número á la diferencia que hai entre dicho número y la unidad seguida de tantos ceros como guarismos tiene dicho número*; y se llama *complemento logarítmico de un*

(*) *Decimos que este resultado es aproximado, porque las diferencias de los logaritmos no son proporcionales con las de los números; pero el error que resulta de esta suposicion no influye en los guarismos que comunmente se necesitan. En adelante darémos medios para calcular directamente los logaritmos por medio de los números, y al contrario, con toda la exactitud que deseemos.*

número al complemento aritmético de su logaritmo. Para hallar el complemento aritmético de un número se resta el primer guarismo de la derecha de 10 y todos los demas de 9. Por medio del complemento aritmético se convierten las operaciones de restar en operaciones de sumar. Por ejemplo: si quisiéramos restar 453 del número 827, hallaria el complemento de 453, restándole de 1000 y sacaria 547, que sumado con 827 me daria 1374; ahora, aquí en vez de haber quitado de 827 el 453 le he añadido 547, luego en la suma 1374 no solo tengo los 453 demas sino los 547; y como entre los dos componen 1000, resulta que debo rebajar una unidad al guarismo de los millares, y tendré que la diferencia pedida es 374.

En este ejemplo se ve que el ejecutar la resta por el complemento es mas complicado que sin hacer uso de él; por lo que á primera vista parece que no es de la mayor importancia; sin embargo observando que el complemento se halla directamente restando el último guarismo de la derecha de 10 y todos los demas de 9, podrémos ir poniendo debajo del minuendo con la misma facilidad el complemento que el mismo sustraendo; pues el mismo trabajo nos costará poner un guarismo que su diferencia á 9, sino es el último que entónces será su diferencia á 10. Y entónces, en el caso que acabamos de resolver será tan sencillo lo uno como lo otro.

Pero cuando ocurra hallar un cuarto término de una proporcion geométrica por logaritmos, ó cuando hai muchas multiplicaciones y divisiones á un tiempo, es sumamente ventajoso el hacer uso del complemento; en cuyo caso *se ponen los logaritmos de todos los factores los unos debajo de los otros, despues los complementos logarítmicos de los divisores, se suma todo, y en la suma se rebajan tantas unidades en los lugares correspondientes como divisores habia, y el número á que corresponde este logaritmo será el resultado que se buscaba.*

Con la misma facilidad se pone un complemento logarítmico que el logaritmo; porque si quiero hallar el complemento logarítmico de 53427, como su característica ha de ser 4, diré: de 4 á 9 van 5 que es la característica del complemento; ahora iré á buscar la mantisa, y como los tres primeros guarismos son 727 iré diciendo: de 7 á 9 van 2 que pongo al lado de la característica; de 2 á 9 van 7 que pongo al lado del 2; de 7 á 9 van 2 que pongo tambien; veo despues que los otros cuatro guarismos de la mantisa son 7608; pero al tiempo de escribirlos voi diciendo: de 7 á 9 van 2 que pongo; de 6 á 9 van 3 que pongo; de 0 á 9 que pongo; de 8 á 10 (porque es el último) van 2 que pongo; y van 9 que pongo; de 8 á 10 (porque es el último) van 2 que pongo; y tengo que el complemento logarítmico de 53427 es 5, 2722392. Si el número terminare por ceros, se deberia restar de 10 el último guarismo significativo del número y los demas de 9, poniendo despues los ceros convenientes. Tambien se pudiera empezar por lo último diciendo: de 8 á 10 van 2, de 0 á 9 van 9, &c. pero yo lo encuentro mas cómodo

del modo que hemos espuesto; cada uno podrá elegir el que mejor le parezca.

Ahora, para hallar por medio del complemento el cuarto término de la proporcion de arriba, pondré los logaritmos 4,4444976 y 4,5387999 de los factores 27829 y 34578 los unos debajo de los otros, y luego el complemento logarítmico del 11526; y sumándolo todo y borrando la decena que sale en la característica por causa del complemento, saco como se ve en (A) el mismo logaritmo que ántes.

(A)

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 27829 = & 4,4444976 \\ \text{Log. } 34578 = & 4,5387999 \\ \text{C.Log. } 11526 = & 5,9383214 \\ \hline & \cancel{1}4,9216189 \end{array}$$

309 En las tablas cuyo manejo hemos esplicado solo se hallan los logaritmos de los números enteros comprendidos entre 1 y 102500; pero en el 2.º tomo de dichas tablas donde se hallan las trigonométricas que es la 2.ª parte del tomo 3.º se hallan los logaritmos desde 102500 hasta 107500. Por medio de ellas podemos tambien calcular, aunque no con toda exactitud, los logaritmos de los números mayores como ya lo hemos ejecutado; pero ahora es necesario que veamos como se han de encontrar los logaritmos de los quebrados, de los números mistos y de los quebrados decimales.

Supongamos 1.º que se quiera encontrar el logaritmo de un número misto; para esto *reducirémos el entero á la especie del quebrado que le acompaña, hallarémos el logaritmo del denominador, le restarémos del logaritmo del numerador, y la diferencia será el logaritmo pedido.* Sea el número $57\frac{32}{67}$ que reduciendo el entero á la especie del quebrado es $\frac{3851}{67}$, y tendrémos. . . . .

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 3851 = & 3,5855735 \\ \text{Log. } 67 \;\; = & 1,8260748 \\ \hline \text{Log. } 57\frac{32}{67} = & 1,7594987 \end{array}$$

Para hallar el logaritmo de un quebrado deberémos restar el logaritmo del denominador del logaritmo del numerador; pero si el quebrado es propio la resta será negativa, lo que indica que el logaritmo de un quebrado es *negativo*; tambien se llama *defectivo*.

Esto tambien resulta de las progresiones primitivas, porque si las suponemos continuadas hácia la izquierda, serán:

$$\&c. -3 \;.\; -2 \;.\; -1 \;.\; 0 \;.\; 1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; \&c.$$

$$\&c. : \tfrac{1}{1000} : \tfrac{1}{100} : \tfrac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : \&c.$$

las que nos manifiestan que los logaritmos de todos los números menores que 1 han de ser negativos ó defectivos; así si quisiéramos hallar el logaritmo de $\frac{37}{85}$, buscaríamos el logaritmo del numerador y el del denominador, y como este no le prodríamos restar de aquel, lo haríamos al contrario y pondríamos á la resta el signo —, de manera que tendrémos. . . . .

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 85 = & 1,9294189 \\ \text{Log. } 37 = & 1,5682017 \\ \hline \text{Log. } \frac{37}{85} = & -0,3612172 \end{array}$$

Si nos propusiéramos ahora resolver la cuestion inversa, esto es, hallar el número correspondiente á un logaritmo defectivo ó negativo, cual es el —0,3612172, lo que ejecutaríamos seria añadirle un número cualquiera de unidades, por ejemplo 4, lo que equivaldria á restarle de 4, como se ve en (A): buscaríamos ahora á qué número corresponde este logaritmo, y hallaríamos que era á 4352,9 &c.; pero con añadir cuatro unidades que es el logaritmo de 10000 al logaritmo propuesto, nos resulta un número 10000 veces mayor; luego para tener el verdadero, le deberémos hacer este número de veces menor, lo que conseguirémos corriendo la coma cuatro lugares hácia la izquierda; de manera que el número á que corresponde el logaritmo propuesto es 0,43529, que es el quebrado $\frac{37}{85}$ reducido á decimales como en efecto debe verificarse.

$$\begin{array}{r} \text{(A)} \\ 4 \\ -0,3612172 \\ \hline 3,6387828 \end{array}$$

Si el número cuyo logaritmo quisiésemos hallar tuviese enteros y decimales, pondríamos la característica que corresponde al entero, y buscaríamos la mantisa que correspondia á todos los demas guarismos como sino tuviese la coma; y así, para hallar el logaritmo de 385,72, despues de puesta la característica 2 buscaré la mantisa correspondiente al 38572 como sino hubiese coma, y hallaré que L.285,72=2,5862722.

Si el número propuesto fuese un quebrado decimal, entónces le pondríamos en forma de quebrado comun y hallaríamos su logaritmo, que seria defectivo, por el método anterior; pero usando del complemento logarítmico llegamos á tener esta regla sencilla: *el logaritmo de un quebrado decimal tiene por característica 9, ó un número con tantas unidades ménos de 9 cuantos ceros hai entre la coma y los guarismos significativos; y por mantisa la misma que la del número si fuese entero.*

Por esta regla tendrémos que el logaritmo de 0,47 es 9,6720979; este logaritmo segun lo dicho (306) deberia corresponder á un número de diez guarismos; y así, para no equivocarle, aunque no es fácil porque un calculador jamas se puede equivocar en tomar un número por otro que es 1000000000 ménor, no obstante nosotros distinguirémos á los logaritmos de los quebrados decimales poniendo la coma por la parte de arriba é inversa, ó tambien se podrian diferenciar poniendo un punto entre la característica y la mantisa como practican algunos.

Tambien hallaríamos por la regla { que log.0,59624=9'7754211 / y que log.0,00483=7'6839471.

Para demostrar esta regla propongámonos un quebrado cualquiera tal como 0,532: este puesto en forma de quebrado comun será $\frac{532}{1000}$. Para hallar su logaritmo deberíamos restar el logaritmo de 1000 del logaritmo de 532; pero si queremos hacer uso del complemento logarítmico, con el logaritmo del 532 sumarémos el complemento logarítmico de 1000 en esta forma (A): que en efecto tiene la misma mantisa que el logaritmo de la parte decimal considerada como entero; porque en el complemento logarítmico del denomi-

$$\begin{array}{r} \text{(A)} \\ \text{log. } 532=2,7259116 \\ \text{compl. log.}1000=7 \\ \hline \text{log.}0,532=9'7259116 \end{array}$$

nador no hai mantisa; y tiene 9 de característica, porque no habiendo cero alguno entre la coma y los guarismos significativos, la característica del número considerado como entero debe tener tantas unidades ménos una como guarismos; ahora, como el denominador tiene un guarismo mas que el numerador, la característica de su logaritmo debe tener una unidad mas; por consiguiente su complemento será una unidad ménos que el complemento de la característica del numerador, y añadido á la característica de este dará una unidad ménos que 10, esto es 9.

Ahora, por cada cero que hubiese entre la coma y los guarismos significativos, aumentaria una unidad la característica de su denominador, por consiguiente disminuiria la de su complemento; luego disminuiria esta misma unidad la característica del número total. Así, si el número fuese 0,000532 le pondríamos bajo esta forma $\frac{532}{1000000}$, cuyo logaritmo se hallaria usando del complemento como aquí se ve, y compruebra la regla dada.

$$\begin{array}{r} \text{Log.}532=2,7259116 \\ \text{C.Log.}1000000=4, \\ \hline \text{Log.}0,000532=6'7259116 \end{array}$$

Si nos propusiéramos elevar el número 0,532 á una potencia cualquiera tal como la tercera, multiplicaríamos su logaritmo por 3 en la forma que aquí se ve (A): y sacaríamos que el logaritmo de su tercera potencia era 29'1777348; pero como una potencia cualquiera de un quebrado decimal tendrá 9 de característica ó ménos de 9, borrarémos las dos decenas que nos resultan, á causa de haber triplicado la decena del complemento, y será Log.$(0,532)^3$=9'1777348. Al contrario, si quisiéramos estraer una raiz cualquiera de un quebrado decimal, á la característica que le correspondiese, le deberíamos anteponer tantas decenas demas como unidades tuviese el esponente de la raiz ménos una, y despues dividiríamos por el esponente de dicha raiz. Esta regla tendria alguna escepcion si la característica del quebrado decimal fuese 7 ó menor que 7.

$$\begin{array}{r} \text{(A)} \\ 9'7259116 \\ 3 \\ \hline 29'1777348 \end{array}$$

310 Las propiedades de los logaritmos las podemos demostrar directamente, sin la consideracion de las progresiones, del modo siguiente:

Supongamos que a sea la base del sistema, z el número y x el logaritmo, y tendrémos $a^x=z$; y como x en este caso es el logaritmo de z, podrémos poner $z=a^{\log.z}$; y respecto de otro número z', tendrémos $z'=a^{\log.z'}$; y multiplicando estas cantidades será $zz'=a^{\log.z}a^{\log.z'}=a^{\log.z+\log.z'}$; por lo que resultará que: $\text{Log.}zz'=\log.(a^{\log.z+\log.z'})=\log.a.(\log.z+\log.z')=\log.z+\log.z'$, porque el logaritmo de la base es siempre la unidad; de donde se deduce que *el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

Si dividiéramos dichas espresiones, sacaríamos . . . .

$$\frac{z}{z'}=\frac{a^{\log.z}}{a^{\log.z'}}=a^{\log.z-\log.z'},$$

de donde deduciríamos que $\log.\frac{z}{z'}=\log.z-\log.z'$,

y quiere decir que *el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo ménos el logaritmo del divisor.*

{ Si la primera $z=a^{\log.z}$ la elevásemos á la potencia n, seria $z^n=(a^{\log.z})^n=a^{n\log.z}$; de donde $\log.\ z^n=n\times\log.z$,

y quiere decir que *el logaritmo de una potencia es igual al logaritmo de la cantidad multiplicado por el esponente de la potencia.*

{ Si estraemos la raiz del grado n, será

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{a^{\log.z}}=(a^{\log.z})^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}\times\log.z}=a^{\frac{\log.z}{n}};$$

de donde $\log.\sqrt[n]{z}=\frac{\log.z}{n}\times\log.\ a=\frac{\log.z}{n}$,

y quiere decir que *el logaritmo de una raiz es igual al logaritmo de la cantidad dividido por el esponente radical*, cuyas consecuencias son las mismas que se dedujeron por las consideraciones hechas sobre las progresiones.

{ Puesto que ya sabemos la teoría de los logaritmos, tenemos ya medios para despejar la incógnita x en la ecuacion en que se halla ella misma por esponente, y que por lo mismo se llama *ecuacion esponencial*; y así, si nos proponemos despejar x en la $a^x=b$, observarémos que á una misma cantidad ó á cantidades iguales debe corresponder un mismo logaritmo; luego tomando los logaritmos de ambos miembros, que señalarémos con $l.$ se tendrá $l.a^x=l.b$; pero el logaritmo de una potencia es igual al logaritmo de la cantidad multiplicado por el esponente de la potencia, luego se tendrá $xl.a=l.b$, de donde (221) sale $x=\frac{l.b}{l.a}$.

{ Si se tuviese la ecuacion esponencial de 2.º órden $a^{c^x}=b$, se tendria $c^x l.a=l.b$, de donde $l.c^x+l.(l.a)=l.(l.b)$, $xl.c=l.(l.b)-l.(l.a)$, que da $x=\frac{l.(l.b)-l.(l.a)}{l.c}=\frac{l.l.b-l.l.a}{l.c}$ (*).

{ Si se tuviese $a^x=b^u$, seria $xl.a=ul.b$, que da $\frac{x}{u}=\frac{l.b}{l.a}$; cuya ecua-

(*) l.l.b *significa en esta espresion que se ha de tomar el logaritmo de* b; *y despues el logaritmo de este logaritmo: de manera que si* b=100, *se tendria* l.b=2; y l.l.b.=l.2=0,3010300.

Análogamente se deben interpretar las espresiones semejantes.

cion aunque no basta para conocer los valores de x y de u, indica que la relacion de estas cantidades es constante.

{ Si se tuviese la esponencial de 3.er órden $a^{b^{c^x}}=d$, seria $b^{c^x}l.a=l.d$; de donde $b^{c^x}=\frac{l.d}{l.a}$, que da $c^x l.b=l.\frac{l.d}{l.a}=l.l.d-l.l.a$, y $c^x=\frac{l.l.d-l.l.a}{l.b}$; que da $xl.c=l.\frac{l.l.d-l.l.a}{l.b}=l.(l.l.d-l.l.a)-l.l.b$; y por último

$$x=\frac{l.(l.l.d-l.l.a)-l.l.b}{l.c}.$$

{ Si la ecuacion fuese $2^{2x}-2^x-1=0$, haríamos $2^x=u$, y tendríamos $u^2-u-1=0$; que da (253) $u=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; que separando los valores, y poniendo en vez de u, su valor 2^x, se tendrá $2^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ... $2^x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, que dan por lo que acabamos de demostrar $x=\frac{l.(1+\sqrt{5})-l.2}{l.2}$, $x=\frac{l.(1-\sqrt{5})-l.2}{l.2}$.

{ Si se tuviese $2^{2x}-2^{2x-2}-1=0$, observaríamos que el 2.º término -2^{2x-2} es lo mismo que $-\frac{2^{2x}}{2^2}=-\frac{2^{2x}}{4}$; y haciendo $2^{2x}=u$, resultaria $u-\frac{u}{4}=1$; que da $3u=4$, y $u=\frac{4}{3}$; por lo que $2^{2x}=\frac{4}{3}$; y $2xl.2=l.\frac{4}{3}=l.4-l.3$, que da $x=\frac{l.4-l.3}{2l.2}$.

{ Si se tuviese $a.m^x-b.n^x=0$, tendríamos $a.m^x=b.n^x$, ó $\frac{m^x}{n^x}=\frac{b}{a}$, ó $\left(\frac{m}{n}\right)^x=\frac{b}{a}$, que da $xl.\frac{m}{n}=l.\frac{b}{a}$, y

$$x=\frac{l.\frac{b}{a}}{l.\frac{m}{n}}=\frac{l.b-l.a}{lm-l.n}.$$

{ Si fuese $a^{mx}=cb^{nx-1}$, tendríamos $mx.l.a=l.cb^{nx-1}=l.c+(nx-1)\,l.b=l.c+nxl.b-l.b$, que da $x=\frac{l.c-l.b}{m.l.a-n.l.b}$.

{ Si fuese $\frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{nx}}=d^{x-p}$, seria (182) $\frac{b^n}{b^{\frac{a}{x}}c^{nx}}=d^{x-p}$; de donde

$$l.b^n-\frac{a}{x}l.b-nxl.c=(x-p)\,l.d,\ \text{ó}\ nl.b-\frac{a}{x}l.b-nxl.c-(x-p)\,l.d=0$$

ó $x^2(nl.c+l.d)-x(nl.b+pl.d)+al.b=0$; la cual siendo de 2.º grado quedará resuelta por lo espuesto (253).

{ Si se tuviese la ecuacion $m^{\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}=n$; seria $\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}.l.m=l.n$ de donde $\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}=\frac{l.n}{l.m}$.

{ Si multiplicamos los dos términos del primer miembro por $a+\sqrt{x}$, no se alterará su valor y se convertirá en $\frac{a^2+2a\sqrt{x}+x}{a^2-x}=\frac{l.n}{l.m}$; en la cual quitando el divisor y trasladando al primer miembro todos los términos donde hai incógnita se tendrá $x\left(1+\frac{l.n}{l.m}\right)+2a\sqrt{x}=a^2\left(\frac{l.n}{l.m}-1\right)$, la cual quedará resuelta como la cuestion 4.ª del § 255.

{ Si se tuviese la espresion $m^{\frac{a+\sqrt{-x}}{a-\sqrt{-x}}}=n$; multiplicaríamos los dos términos de la fraccion que sirve de esponente por $a+\sqrt{-x}$; y se nos convertiria en $m^{\frac{a^2+2a\sqrt{-x}-x}{a^2+x}}=n$; y tomando los logaritmos será $\frac{a^2+2a\sqrt{-x}-x}{a^2+x}l.m=l.n$, ó
$a^2l.m+2al.m.\sqrt{-x}-xl.m=a^2l.n+xl.n$; que trasladando da
$2al.m.\sqrt{-x}=x(l.m+l.n)+a^2(l.n-l.m)$; y elevando al cuadrado para hacer desaparecer el radical, y haciendo las simplificaciones convenientes quedará reducida á una ecuacion de la forma $x^2+px+q=0$ que se resolverá por lo espuesto (253) (*). }

(*) *Para completar la discusion de las ecuaciones esponenciales, necesitamos resolver la ecuacion* $x^x=a$; *y como para ello es indispensable hacer uso de una fórmula demostrada en el tomo del cálculo diferencial, lo harémos por nota.*

Á la ecuacion $x^x=a$ *conduce la siguiente cuestion:*

Hallar un número que elevado á una potencia designada por el mismo número, sea igual á un número dado tal como *a*.

Con pocos tantéos, que se hagan, podrá encontrarse para x *un número que no difiera en una unidad del buscado; llamándole* p, *y* z *á lo que le falte para convertirse en* x, *tendrémos que* $x=p+z$, *siendo* p *un número entero y* z *una fraccion; y la ecuacion* $x^x=a$, *se nos*

De las ecuaciones indeterminadas de primer grado.

311 Hemos dicho (215) que cuestiones indeterminadas son aquellas que tienen ménos ecuaciones que incógnitas, y que la parte de la análisis que tiene por objeto la resolucion de estas cuestiones se llama *análisis indeterminada*. Cuando despues de haber eliminado tantas incógnitas ménos una como ecuaciones tiene la cuestion, se llega por último

convertirá en $(p+z)^{p+z}=a$; *que nos dará* $(p+z)l.(p+z)=l.a$;
pero $l.(p+z)=l.(p+\frac{pz}{p})=l.p(1+\frac{z}{p})=l.p+l.(1+\frac{z}{p})$;
luego $l.a=[l.p+l.(1+\frac{z}{p})](p+z)$.

Atendiendo á que en el cálculo diferencial (§ 546) se demuestra que $l.(1+u)=M(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\&c.)$ *siendo* $M=0,43429$; *si ponemos* $\frac{z}{p}$, *en vez de* u, *se tendrá* $l.(1+\frac{z}{p})=M[\frac{z}{p}-\frac{1}{2}(\frac{z}{p})^2+\frac{1}{3}(\frac{z}{p})^3-\&c.]$ *y si atendemos á que siendo* z *una fraccion y* p *un número entero,* $\frac{z}{p}$ *será con mas razon una fraccion, su cuadrado* $(\frac{z}{p})^2$ *y las demas potencias serán otras fracciones mucho mas pequeñas; y por lo mismo si solo deseamos un valor aproximado, podrémos despreciar todos los términos que siguen al primero, lo que nos dará* $l.(1+\frac{z}{p})=M.\frac{z}{p}$; *y será* $l.a=(p+z)(l.p+M.\frac{z}{p})=p.l.p+zl.p+Mz+M\frac{z^2}{p}$, *ó despreciando el término en que entra* z^2 *por la misma razon de ántes se tendrá* $l.a=p.l.p+z(l.p+M)$; *lo que da* $z=\frac{l.a-p.l.p}{l.p+M}$.

Aplicando esta fórmula al caso en que $a=2000$, *con mui pocas tentativas hallarémos que* $p=4$; *por lo cual sustituyendo por* M *su valor* 0,43429; *será tomando solo* 5 *guarismos en el logaritmo* $z=\frac{3,30103-2,40824}{0,6021+0,4343}=0,8$.

Luego tendrémos $x=p+z=4+0,8=4,8$; *tomando por valor aproximado de* p *este valor hallado* 4,8, *y llamando* z' *á lo que le falte para el valor verdadero, tendrémos* $z'=\frac{l.2000-4,8\,l.4,8}{l.4,8+0,4343}=0,027$.

Por consiguiente se tendrá para x *otro valor mas aproximado é igual con* 4,827.

á una ecuacion tal como esta $ax \pm bz = c$: no hai otro medio para determinar una cualquiera de las incógnitas x, z, que dar valores á la otra; y como por cada valor que se dé á z, por ejemplo, resultará uno

---

Suponiendo ahora que p=4,827, *y llamando* z″ *á lo que le falte para convertirse en* x, *será* $z'' = \frac{l.2000 - 4{,}827\, l.4{,}827}{l.4{,}827 + 0{,}4343} = 0{,}0009$.

Por lo que tendrémos para x *el valor* 4,8279.

Si quisiéramos mayor aproximacion, supondríamos z=4,8279 *y continuaríamos del mismo modo.*

Hutton *en su curso de Matemáticas resuelve las ecuaciones numéricas de* 3.º, 4.º, 5.º *&c. grado y las ecuaciones esponenciales por una especie de regla de falsa posicion doble; y que él dice se llama algunas veces* Trial-and-Error; *y para no dejar nada que desear, resolverémos por su método la ecuacion* $x^x = 100$, *que da* x l.x = l.100 = 2; *por medio de algunos tantéos se halla que el valor de* x *está comprendido entre* 3,5 *y* 3,6.

Supongamos primero que x=3,5, *y será* x l.x=3,5×l.3,5=3,5×0,544068=1,904238, *que le faltan* 0,095762 *para* 2,000000, *que es el logaritmo de* 100; *por consiguiente la equivocacion es* —0,095762.

Supongamos x=3,6; *y será* x l.x=3,6×l.3,6=2,002689; *lo que da* +0,002689 *de equivocacion.*

Ahora, la regla que él establece para todo género de ecuaciones (y que no demuestra), es la proporcion (M) *que hemos deducido* (§ 282) *y que enuncia en estos términos:*

La suma de los errores (cuando ambos tienen diferente signo), ó su diferencia (cuando tienen el mismo signo), es á la diferencia de los dos números, como uno de los errores es á la correccion que se debe hacer al número de que proviene.

Por lo que aquí sumarémos los errores porque tienen diferente signo, lo que nos dará 0,098451, *y dirémos* 0,098451 : 0,1 :: 0,002689: *á la correccion que se debe hacer al* 3,6; *que resulta ser* 0,00273; *que restada del* 3,6 *queda en* 3,59727.

Si se quiere mayor aproximacion, continuarémos suponiendo x=3,59728 *del modo siguiente:*

De suponer x=3,59727, *resulta* —0,0000148 *de error; de suponer* x=3,59728 *resulta* —0,0000477 *de error; y como ahora los errores tienen un mismo signo, hallarémos su diferencia, y dirémos* 0,00001003 : 0,00001 :: 0,00000477: *á la correccion que se debe hacer al* 3,59728, *que resulta ser* 0,00000476; *la cual añadida al* 3,59728 *resulta* x=3,59728476; *valor suficientemente aproximado, pues que sustituido en* x.l.x = 2, *da ya el error en el séptimo guarismo decimal.*

diferente para x, se deduce que en una ecuacion de esta especie las cantidades que se señalan con las últimas letras del alfabeto reciben el nombre de *variables*, porque en una misma cuestion pueden tener todos los valores que se quieran; y las que se señalan con las primeras letras el de *constantes* porque solo pueden tener un valor.

Tambien hemos dicho que despues que Descártes, aplicando el Álgebra á la Geometría, usó de las últimas letras del alfabeto para señalar las variables, siguiéron los algebristas señalando tambien las incógnitas con las mismas letras; no por esto ha resultado una gran confusion, pues para conocer si la cantidad señalada con x,z,&c. es incógnita ó es variable, basta saber si la ecuacion es determinada ó indeterminada.

312 Para resolver la cuestion indeterminada $ax \pm bz = c$ en todas sus partes, nos propondrémos ahora algunas cuestiones que conduzcan á ella, principiando por la mas sencilla que es la de ser $a=1$ y $b=1$.

Cuestion 1.ª *Hallar dos números cuya suma sea* 10.

Si suponemos que los dos números sean x y z, tendrémos $x+z=10$, de donde resulta $x=10-z$. Ahora, como puede haber muchos números cuya suma sea 10, tales como 3 y 7, 4 y 6, $7\frac{1}{2}$ y $2\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, y 13 y —3, &c. para determinar la x no hai mas que dar un valor cualquiera á z, y por cada valor que le demos nos resultará uno para x; pero el número de los valores se limita mucho si se añade la circunstancia de que los números sean enteros y positivos; por lo que si en vez de z sustituimos la serie de los números naturales 1, 2, 3, &c. tendrémos las resoluciones siguientes: $\begin{cases} \text{Si } z=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 \\ \text{Será } x=9,8,7,6,5,4,3,2,1,\ 0,-1. \end{cases}$

que dice la 1.ª que cuando $z=1$ la ecuacion $x=10-z$ da $x=10-1=9$; cuando $z=2$ la misma ecuacion da $x=10-2=8$,&c. hasta que de hacer $z=10$, veo que me resulta $x=10-10=0$, que como no es número no da la resolucion pedida; de hacer $z=11$ resulta $x=10-11=-1$; y como de suponer valores mayores á z resultarian siempre valores negativos de x, tenemos que la cuestion no admite en números enteros positivos nada mas que nueve resoluciones, ó porque las cuatro últimas no se diferencian de las cuatro primeras, no admite la cuestion sino cinco resoluciones.

313 Cuestion 2.ª *Dividir el número* 37 *en dos partes tales que la una sea divisible por* 2 *y la otra por* 5.

Siguiendo siempre con el espíritu analítico supondrémos conocidas las dos partes, y llamarémos x' á la una y z' á la otra, lo que nos dará $x'+z'=37$. Ahora, como la una de estas partes tal como la x' ha de ser divisible por 2, tendrémos que $\frac{x'}{2}$ dará un cociente exacto; y como no le conocemos, le llamarémos x y tendrémos $\frac{x'}{2}=x$, lo que da $x'=2x$. Como la otra ha de ser divisible por 5 la espresion $\frac{z'}{5}$ dará cociente exacto, que llamándole z tendrémos $\frac{z'}{5}=z$, lo que da $z'=5z$. Sustituyendo estos valores de x' y de z' en la ecuacion primitiva se nos convertirá en $2x+5z=37$.

Á esta ecuacion hubiéramos llegado desde luego si hubiéramos hecho este raciocinio: *pues que la una parte ha de ser divisible por* 2, *llamando* x *al cociente que resulte, una de estas partes será* 2x; *y puesto que la otra lo ha de ser por* 5, *llamando* z *al cociente que resulte será* $5z$, lo cual nos hubiera dado inmediatamente la ecuacion $2x+5z=37$.

Y tambien pudiéramos decir solamente como se suele ejecutar: *sea* 2x *una parte y* 5z *la otra, y tendrémos* $2x+5z=37$.

Pero como es esta la primera cuestion de esta especie que planteamos hemos querido manifestar á los principiantes los raciocinios que deben hacer para percibir el espíritu que conduce á semejante plantéo.

Planteada ya una cuestion de esta especie, para resolverla se ejecuta lo siguiente: *se despeja la incógnita que tiene menor coeficiente, sacando de su espresion todos los enteros que se puedan; despues si resulta quebrado, se iguala este con otra nueva incógnita ó variable que para mayor sencillez convendrá ponerle el mismo signo que tenga en el quebrado la incógnita. De esta ecuacion se despeja la incógnita del quebrado; y si en su espresion resultase por último quebrado, se igualará este con otra nueva incógnita, y así se procederá hasta llegar á una incógnita, en cuyo valor no haya quebrado. Entónces este valor se va sustituyendo en todas las antecedentes, y para hallar las resoluciones de la cuestion se van dando valores á la última incógnita ó variable, y los que resulten para las que entran en el plantéo de la cuestion son los que la resuelven.*

Por esta causa despejarémos x en la ecuacion $2x+5z=37$, lo que dará

1.° $2x=37-5z$, y $x=\frac{37-5z}{2}=18-2z+\frac{1-z}{2}$.

Igualaré ahora este quebrado (*) con la incógnita u que lleve el signo —; lo que me dará $\frac{1-z}{2}=-u$, de donde $1-z=-2u$, $-z=-2u-1$, y mudando los signos á toda la ecuacion, será $z=2u+1$.

(*) *Hemos dicho que todo quebrado que vaya resultando se iguale con una nueva variable, porque como llevamos el objeto de sacar los valores enteros de las variables que satisfacen á la cuestion, paraque* x, *por ejemplo, sea número entero, lo deberá ser* $\frac{1-z}{2}$.

Á las incógnitas ó variables que no entran en la ecuacion principal, y que sirven para facilitar la resolucion de las ecuaciones se les caracteriza con el nombre de auxiliares *ó* intermedias.

Como en este valor de z no entra ya quebrado, le sustituirémos en el de x, y tendrémos

$$x=18-2z+\frac{1-z}{2}=18-2(2u+1)-u=18-4u-2-u=16-5u.$$

Ahora irémos dando valores á u y viendo en lo que se nos convierten los de z y de x, como se ve en (A).

(A)	(B)
Si $u=0,\ 1,2,3,\ 4$	$x'=2x=32,22,12,\ 2$
$z=1,\ 3,5,7,\ 9$	$z'=5z=5,15,25,35$
$x=16,11,6,1,-4$	

Como de suponer $u=4$ resultan ya valores negativos, no tenemos mas de cuatro resoluciones, y sustituyendo estos valores de z y de x en los de x' y z' se tendrán los valores que se ven en (B); y sumando estas espresiones en columna, verémos que la suma de cada dos equivale á 37 como lo exigia la cuestion.

314 Cuestion 3.ª *Dividir el número* 100 *en dos partes tales que partiendo la una por* 5 *deje el residuo* 2, *y partiendo la otra por* 7 *deje el residuo* 4.

Si la primera parte dividida por 5 deja el residuo 2 la podrémos hacer $=5x+2$; y por la misma razon la segunda será $7=z+4$; y como la suma de las dos partes ha de componer 100, tendrémos

$$5x+2+7z+4=100 \text{ ó } 5x=94-7z,$$

de donde sale $x=\frac{94-7z}{5}=18-z+\frac{4-2z}{5}$; harémos ahora $\frac{4-2z}{5}=-u$, que da $4-2z=-5u$, de donde $-2z=-5u-4$ y $z=\frac{5u+4}{2}=2u+2+\frac{u}{2}$, que haciendo $\frac{u}{2}=t$ tendrémos $u=2t$, cuyo valor sustituido en las ecuaciones anteriores dará: $\begin{cases} z=4t+2+t=5t+2 \\ x=18-5t-2-2t=16-7t; \end{cases}$

paraque la x no sea negativa es preciso que $7t$ sea menor que 16, esto es, que la t no puede pasar de 2. No admite pues la cuestion propuesta mas de tres soluciones:

1.ª $t=0$ que da $x=16$, $z=2$, y las dos partes $5x+2$, y $7z+4$ serán 82 y 18, cuya suma $=100$;

2.ª $t=1$ que da $x=9$, $z=7$, y las dos partes $47+53=100$;

3.ª $t=2$, que da $x=2$, $z=12$, y las dos partes $12+88=100$.

315 Cuestion 4.ª *Dos soldados tenian guardados entre los dos* 100 *cartuchos, y el uno le dice al otro: si cuento mis cartuchos de* 8 *en* 8 *me sobran* 7, *y el otro le responde si yo cuento los mios de* 10 *en* 10 *me sobran tambien* 7, *¿cuantos tenia cada uno?*

Ya que el número de cartuchos del primero dividido por 8 deja el residuo 7, el número que tenia el segundo dividido por 10 deja el residuo 7, y el número del primero será $8x+7$, y el del segundo $10z+7$, con lo cual tendrémos $8x+10z+14=100$, ú $8x=86-10z$ ó $4x=43-5z$,

que da $x=\frac{43-5z}{4}=10-z+\frac{3-z}{4}$, y haciendo ahora $\frac{3-z}{4}=-u$

se tendrá $3-z=-4u$ que da $z=3+4u$;
y sustituyendo este valor en el de x sacarémos $x=7-5u$,
de donde resulta que $5u$ ha de ser menor que 7 y por consiguiente u menor que 2, esto es, que no hai mas que las dos soluciones siguientes:

1.ª $u=0$, que da $x=7$, y $z=3$, que manifiesta que el primer soldado podia tener 63 cartuchos y el segundo 37 cuya suma $=100$.

2.ª $u=1$, que da $x=2$, $z=7$, y el primero podria tener en este caso 23, y el segundo 77 cuya suma tambien es $=100$.

316 Todas las cuestiones resueltas hasta aquí se han hallado comprendidas en una ecuacion de esta forma $ax+bz=c$, en la cual a, b y c representan números enteros y positivos, y de las cuales tambien se han de sacar números enteros y positivos para los valores de x y z. Pero cuando b es negativa, toma la ecuacion esta forma $ax=bz+c$, las cuestiones son en este caso de mui distinta naturaleza, y admiten una infinidad de soluciones. Vamos á resolver algunas.

Aquí pueden ocurrir tres casos: 1.º cuando la ecuacion tiene todos sus términos y las incógnitas x y z no tienen mas coeficiente que la unidad, *v. g.* $x-z=c$. Á una ecuacion de esta forma conduce la siguiente cuestion y todas las que se le parecen.

Cuestion. *Hallar dos números cuya diferencia sea* 6.

Llamo x al número menor y z al mayor, y tendré $z-x=6$, y $z=x+6$.

Puedo poner en lugar de x todos los números enteros posibles, y z será siempre seis unidades mayor que x; de modo que si $x=100$ será $z=106$, luego admite una infinidad de soluciones.

317 El segundo caso es cuando la ecuacion no tiene mas términos que los que llevan incógnita siendo $c=0$, en cuyo caso será

$$ax-bz=0 \text{ ó } ax=bz,$$

y los coeficientes de las incógnitas son números enteros mayores que la unidad. Á ecuaciones de esta forma conduce la siguiente cuestion, y todas las que se le parecen.

Cuestion. *Hallar un número que sea divisible por 7 y por 13.*

Llamando N el número que busco, tendré que como ha de ser divisible por 7, $\frac{N}{7}$ dará un cociente exacto, que como no le conocemos le llamarémos x y será $\frac{N}{7}=x$, lo que da $N=7x$; como dicho número tambien ha de ser divisible por 13 tendrémos igualmente que $\frac{N}{13}$ dará

cociente exacto, que como tampoco conocemos y será diferente del anterior, le llamarémos z y será $\frac{N}{13}=z$, lo que da $N=13z$; igualando estas dos espresiones de N tendrémos $7x=13z$ que da $x=\frac{13z}{7}=z+\frac{6z}{7}$.

haciendo $\frac{6z}{7}=u$ será $6z=7u$ y $z=\frac{7u}{6}=u+\frac{u}{6}$, que haciendo $\frac{u}{6}=t$ será $u=6t$; y sustituyendo este valor de u en las anteriores, tendrémos $z=u+\frac{u}{6}=6t+t=7t$, y $x=z+\frac{6z}{7}=7t+6t=13t$,

lo que da $N=7x=7\times13t=91t$, que dando á t diferentes valores, tendrémos las resoluciones siguientes: $\left\{\begin{array}{l}\text{Si } t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ \&c.\\ N=0, 91, 182, 273, 364 \ \&c.\end{array}\right.$

Á la espresion $N=91t$ pudiéramos haber llegado inmediatamente por este raciocinio. Puesto que $x=\frac{13z}{7}$ y x ha de ser un número entero, $13z$ será divisible por 7; pero como 13 no lo es deberá serlo z, luego z tendrá esta forma $7t$, y por lo mismo $x=\frac{13\times7t}{7}=13t$,
cuyo valor sustituido en el de N dará $N=7x=7\times13t=91t$.

Si ademas se añadiese la circunstancia de que el número propuesto debiese ser divisible por 11, tendríamos tambien $N=11r$, que igualando este valor de N con el que habíamos ya obtenido por las primeras circunstancias, será $11r=91t$ que da $r=\frac{91t}{11}$, y como ha de ser un número entero y 91 no es divisible por 11, lo será el t que tendrá esta forma $11s$ y dará $r=\frac{91\times11s}{11}=91s$, y por lo mismo $N=11r=11\times91s=1001s$.

318 En el tercer caso, que es cuando c no es 0, la ecuacion tiene todos sus términos, y las incógnitas coeficientes mayores que la unidad, tal como la $ax-bz=c$. La resolucion de las cuestiones que conducen á ecuaciones de esta forma, tiene alguna mas dificultad que la de los casos anteriores, como lo darán á conocer los ejemplos siguientes:

Cuestion 1.ª *Hallar un número tal que sea divisible por 7, pero que si se le parte por 13 deje el residuo 4.*

Sea N este número, con lo cual tendrémos $N=7x$, y tambien $N=13z+4$, luego $7x=13z+4$ que nos da $x=\frac{13z+4}{7}=z+\frac{6z+4}{7}$,

haciendo $\frac{6z+4}{7}=u$ obtendré $6z=7u-4$, que da $z=\frac{7u-4}{6}=u+\frac{u-4}{6}$;

ahora haciendo $\frac{u-4}{6}=t$, será $u-4=6t$ y $u=6t+4$;

y sustituyendo este valor en las anteriores, tendrémos

$$z=u+\frac{u-4}{6}=6t+4+t=7t+4,\ x=z+\frac{6z+4}{7}=7t+4+6t+4=13t+8,$$

y $N=7x=7(13t+8)=91t+56$,
que, dando valores á t, resultan las soluciones siguientes:

Si $t=$ 0, 1, 2, 3, 4, &c.
$N=$ 56, 147, 238, 329, 420, &c.

319 Cuestion 2.ª *Hallar un número tal que dividido por 6 deje el residuo 2, y dividido por 13 deje el residuo 3.*

Sea N el número, y tendré $N=6x+2$ y $N=13z+3$;

luego $6x+2=13z+3$ ó $6x=13z+1$, que da $x=\frac{13z+1}{6}=2z+\frac{z+1}{6}$,

haré $\frac{z+1}{6}=t$ lo que da $z=6t-1$;

luego $N=13z+3=13(6t-1)+3=78t-13+3=78t-10$,

y dando valores á t resulta $\begin{cases} \text{Si } t= 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \&c. \\ N=68,\ 146,\ 224,\ 302,\ 380,\ \&c. \end{cases}$

320 Cuestion 3.ª *Una cuadrilla de hombres y mugeres van á merendar á escote; cada hombre paga 25 reales, y cada muger 16; al repasar la cuenta se halla que el gasto de todas las mugeres juntas monta un real mas que el gasto de todos los hombres, ¿cuantos eran los hombres y cuantas las mugeres?*

Sea el número de las mugeres $=x$, el de los hombres $=z$, y tendrémos que el gasto de las mugeres será $16x$, y el de los hombres $25z$;

luego $16x=25z+1$, y $x=\frac{25z+1}{16}=z+\frac{9z+1}{16}$.

Sea $\frac{9z+1}{16}=u$, lo que da $9z+1=16u$ y $z=\frac{16u-1}{9}=u+\frac{7u-1}{9}$,

que haciendo $\frac{7u-1}{9}=t$ será $7u=9t+1$, y $u=\frac{9t+1}{7}=t+\frac{2t+1}{7}$,

y haciendo ahora $\frac{2t+1}{7}=s$ será $2t=7s-1$, y $t=\frac{7s-1}{2}=3s+\frac{s-1}{2}$;

continuando las igualaciones sacarémos $s-1=2r$, y $s=2r+1$.

Sustituyendo ahora sucesivamente, tendrémos;

$$t=3s+\frac{s-1}{2}=3(2r+1)+r=6r+3+r=7r+3,$$

$$u=t+\frac{2t+1}{7}=7r+3+2r+1=9r+4,$$

$$z=u+\frac{7u-1}{9}=9r+4+7r+3=16r+7,$$

$$x=z+\frac{9z+1}{16}=16r+7+9r+4=25r+11.$$

Por consiguiente el número de las mugeres era $25r+11$ y el de los hombres $16r+7$, en cuyas fórmulas se puede sustituir en lugar de r todos los números enteros que se quiera, y se tendrá

Si $r=$ 0, 1, 2, 3, 4, &c.
Número de las mugeres $=$ 11, 36, 61, 86, 111, &c.
Id. de los hombres $=$ 7, 23, 39, 55, 71, &c.

Por la primera solucion que consta de los números menores, las mugeres gastáron 176 reales y los hombres 175, esto es, 1 real ménos.

321 Cuestion 4.ª *Un chalan compra caballos y bueyes: por cada caballo da 31 doblones, y 20 doblones por cada buei; al ajustar su cuenta halla que los bueyes le han costado 7 doblones mas que los caballos: ¿cuantos bueyes ha comprado y cuantos caballos?*

Sea x el número de los bueyes, z el de los caballos, y tendrémos

$20x=31z+7$, que da $x=\frac{31z+7}{20}=z+\frac{11z+7}{20}=z+u$,

llamando u á la fraccion $\frac{11z+7}{20}$, en la cual quitando el divisor se tendrá

$11z+7=20u$ y $z=\frac{20u-7}{11}=u+\frac{9u-7}{11}=u+t$, haciendo $\frac{9u-7}{11}=t$;

luego $9u=11t+7$, y $u=\frac{11t+7}{9}=t+\frac{2t+7}{9}=t+s$ haciendo $\frac{2t+7}{9}=s$,

que da $t=\frac{9s-7}{2}=4s+\frac{s-7}{2}=4s+r$, haciendo $\frac{s-7}{2}=r$, que da $s=2r+7$,

luego $t=4s+r=9r+28$
$u=t+s=11r+35$
$z=u+t=20r+63$ número de caballos,
$x=z+u=31r+98$ número de bueyes.

Luego los menores valores positivos de x y z se sacan con hacer $r=-3$, porque haciendo $r=-4$ ya salen valores negativos para z y x; los valores mayores siguen formando una progresion aritmética conforme aquí manifestamos $\begin{cases} \text{N.º de bueyes } x=5,36,67,98,129,160,191,222\ \&c. \\ \text{N.º de caballos } z=3,23,43,63,83,103,123,143,\ \&c. \end{cases}$

Si reflexionamos acerca del modo con que el valor de las primeras variables se determina por medio del valor de las siguientes, observarémos 1.º que el número 7 se halla con signo positivo en las ecuaciones de número ímpar, esto es, tales como en la primera

$x=\frac{31z+7}{20}$ y en la tercera $u=\frac{11t+7}{9}$ &c. y con signo negativo en las ecuaciones de número par, como en la segunda $z=\frac{20u-7}{11}$, y en la cuarta $t=\frac{9s-7}{2}$; 2.º que en el segundo miembro de la ecuacion que espresa el valor de cada incógnita se halla un número procedente de la relacion que hai entre 31 y 20, ó uno de los cocientes que salen si se busca el máximo comun divisor de estos dos números, sirviendo de coeficiente á la primera incógnita de dicho miembro, y no teniendo la otra letra mas coeficiente que la unidad. Estos coeficientes siguen el órden de las divisiones de que salen, es decir, que en la quinta ecuacion $s=2r+7$ el coeficiente de la primera letra r del segundo miembro es 2, quinto cociente; en la cuarta ecuacion $t=4s+r$, la primera letra s del segundo miembro lleva el coeficiente 4, cuarto cociente, y r la unidad. En las ecuaciones tercera, segunda y primera, la primera letra del segundo miembro lleva por coeficiente la unidad, porque las divisiones á que da motivo la investigacion del máximo comun divisor de 31 y 20 dan estos cocientes.

De donde se deduce que para resolver una cuestion de esta especie no hai mas que *hallar el máximo comun divisor, é igualar la incógnita que tiene el menor coeficiente con la otra multiplicada por el primer cociente, acompañada de la incógnita que sigue; despues la primera del segundo miembro de esta ecuacion igualarla con la segunda multiplicada por el segundo cociente acompañada de la otra; luego la que sigue y así sucesivamente, hasta que habiendo llegado al último cociente, se agrega al múltiplo de la incógnita correspondiente el término constante con un signo positivo si el número de ecuaciones es impar, y negativo si par; despues se va sustituyendo el valor de la última incógnita en los de las anteriores, hasta que se hayan determinado las que entran en la cuestion.*

De manera que hallando el máximo comun divisor del 31 y 20, como aquí se presenta (A):

(A)

31	20	11	9	2	1
	1)	1)	1)	4)	2
11	9	2	1	0	

y practicando la regla tendrémos inmediatamente (suponiendo que las incógnitas empiecen por p y q, para que se sucedan sin interrupcion, y por consiguiente que la ecuacion de que se trata sea $20p=31q+7$) las adjuntas ecuaciones:

$p=1\times q+r, q=1\times r+s, r=1\times s+t, s=4\times t+u, t=2\times u+7$.

Y sustituyendo este valor de t en las anteriores, tendrémos:
$s=8u+28+u=9u+28$, $r=9u+28+2u+7=11u+35$,
$q=11u+35+9u+28=20u+63$, $p=20u+63+11u+35=31u+98$;
donde vemos que los valores de p y q son los mismos que hallamos ántes para x y z que hacian de incógnitas.

322 Resolverémos por este método aun la siguiente

Cuestion. *Hallar un número tal que si se le divide por 13 deje el residuo 7, y si se le divide por 31 deje el residuo 15.*

Llamo N el número, y será $N=13p+7$, y $N=31q+15$; de donde $13p+7=31q+15$, ó $13p=31q+8$.

Ahora, hallando el máximo comun divisor del 13 y 31 será:

31	13	5	3	2	1
	2)	2)	1)	1)	2
5	3	2	1	0	

por lo que tendré: $p=2q+r$, $q=2r+s$, $r=s+t$, $s=t+u$, $t=2u+8$; lo que da sustituyendo este valor de t en el anterior y demas:

$s=2u+8+u=3u+8$,
$r=3u+8+2u+8=5u+16$,
$q=10u+32+3u+8=13u+40$,
$p=26u+80+5u+16=31u+96$.

Y saldrá $N=13(31u+96)+7=403u+1248+7=403u+1255$; y ahora el menor valor que u pueda tener para satisfacer á la cuestion es -3 porque -4 ya da valores negativos, y así tendrémos las soluciones siguientes $\begin{cases} \text{Si } u=-3 & \text{si } u=-2 & \text{si } u=-1 & \text{si } u=0 \\ N=46, & N=449, & N=852, & N=1255. \end{cases}$

Y así sucesivamente dando valores á u tendrémos un conjunto de términos que cumplirán con las condiciones del problema.

Esc. Antes de concluir este asunto harémos una prevencion mui necesaria, y es *que la ecuacion* $ax=bz+c$ *solo se puede resolver cuando los dos números* a *y* b *no tienen mas divisor comun que* 1; *y en no concurriendo esta circunstancia, la cuestion será imposible á no ser que el divisor comun de* a *y* b *lo sea tambien de* c.

Si se supusiese, por ejemplo, que $9x=15z+2$: como 3 divisor comun de 9 y 15 no lo es de 2, no se puede resolver la cuestion; porque como $9x-15z$ siempre es divisible por 3 nunca puede llegar á ser $=2$. Mas si en el caso actual fuese $c=3$ ó $c=6$ &c. la cuestion seria posible; porque dividiendo por el factor comun 3 tendríamos $3x=5z+1$. Luego los números a y b no pueden tener mas comun divisor que la unidad, y en todos los demas casos no tendrá aplicacion la regla dada (321).

Esto se hará mas claro resolviendo la ecuacion $9x=15z+2$ por el método comun; pues sacarémos $x=\frac{15z+2}{9}=z+\frac{6z+2}{9}=z+u$ haciendo $\frac{6z+2}{9}=u$, de donde $9u=6z+2$ ó $6z=9u-2$, luego $z=\frac{9u-2}{6}=u+\frac{3u-2}{6}=u+r$ haciendo $\frac{3u-2}{6}=r$, lo que da $3u-2=6r$ ó $3u=6r+2$, por consiguiente $u=\frac{6r+2}{3}=2r+\frac{2}{3}$;

donde se ve claramente que esta espresion jamas podrá ser un número entero, por ser indispensablemente r número entero.

Demostracion de algunas proposiciones acerca de las cantidades constantes y variables, y de los límites.

323 Hemos dicho (311) que *cantidad constante* es aquella que en una misma cuestion no puede tener mas de un solo valor; y que *cantidad variable* es la que en una misma cuestion puede tener todos los valores que se quieran; pues ahora vamos á demostrar algunas proposiciones que nos serán de la mayor utilidad en lo sucesivo.

Teorema 1.° *Si de dos cantidades* X,B, *una variable y la otra constante, la variable* X *al paso que crece se acerca á la constante* B, *la cantidad constante* B *será mayor que la variable* X.

Dem. Una cantidad con relacion á otra solo puede ser mayor, igual, ó menor que ella; luego quedará probado que es una de las tres cosas, demostrando que no puede ser ninguna de las otras dos; cuyo método de demostrar se llama (Introd.) *método de exhaucion.* Luego quedará demostrado que $B>X$, si hacemos ver que no puede ser igual ni menor. En efecto, B no puede ser igual con X, pues siendo $B=X$, si X crece se separa del valor de B; y si vuelve á crecer se volverá á separar mas, y á cada paso que vaya creciendo se irá separando mas del valor de B; que no cumple con la circunstancia que exige lo enunciado en el teorema, que es el aproximarse mas á B al tiempo que crece X; luego paraque esta circunstancia se verifique, B no ha de ser igual con X. Tampoco puede ser menor, pues si $B<X$, al paso que X crezca se diferenciará mas de B; y por lo mismo no puede cumplir con la circunstancia de que X al crecer se acerque á B, siendo $B<X$, luego si dicha circunstancia no se puede verificar en ninguno de los casos de $B=X$, $B<X$, indispensablemente se verificará en el otro, á saber, cuando $B>X$, que era *L. Q. D. D.*

324 Teorema 2.° *Si de dos cantidades* X,B, *una variable y la otra constante, la variable* X *al paso que mengua se acerca al valor de* B, *esta cantidad* B *será menor que la cantidad* X.

Dem. En efecto, sino es $B<X$ será igual ó mayor. Si es $B=X$ y X mengua, se diferenciará de B: y si vuelve á menguar se diferenciará mas, y al paso que vaya menguando se irá diferenciando mas de B; lo que no puede ser, pues la condicion exige que se vaya aproximando. Tampoco puede ser $B>X$, pues al paso que X mengue se irá diferenciando mas de B, que tampoco cumple con lo enunciado. Luego si B no puede ser igual ni mayor que X, será forzosamente menor. *L.Q.D.D.*

325 Teorema 3.° *Dadas dos cantidades desiguales, digo que si de la mayor se quita la mitad, y de lo que quede la mitad, y así sucesivamente, llegaré á tener un resultado que será menor que la otra cantidad por pequeña que sea.*

Espl. Sean B y K estas dos cantidades: digo que si de la mayor se quita la mitad, y de lo que quede la mitad, y así sucesivamente, llegaré á tener un residuo menor que la cantidad K por pequeña que esta sea.

Dem. Multiplíquese K por un número n tal que el producto $n{\times}K$ sea mayor que B, y al mismo tiempo sea el múltiplo mayor mas aproximado al valor de B; en cuyo caso será $B<n{\times}K$. Ahora, estas cantidades que son desiguales tambien tendrán desiguales sus mitades; y por lo mismo si á cada una de ellas le quitamos su mitad, las otras mitades que queden serán desiguales, es decir que $\frac{B}{2}<\frac{n{\times}K}{2}$; pero si de $n{\times}K$ se quita solamente K (que será igual con la mitad de $n{\times}K$ solo cuando $n=2$, y en todos los demas casos será menor que la mitad de $n.K$) con mayor razon quedarán desiguales; luego $\frac{B}{2}<n{\times}K-K=(n-1)K$. Si de estas cantidades que son desiguales quitamos la mitad, tambien quedarán desiguales; y si de la mayor quitamos ménos de la mitad (como será quitar K en el caso de que $(n-1)$ sea mayor que 2) con mas razon quedarán desiguales; y como prosiguiendo quitando á la menor la mitad, y á la mayor la cantidad K, (que solo será igual con la mitad, en el caso de que el múltiplo que reste de K sea el duplo y en todos los demas casos será menor), los resultados quedarán siempre desiguales: tendrémos que al haber hecho un número de restas espresado por $n-1$, los resultados quedarán aun desiguales; pero si de $n{\times}K$ se quita $(n-1)$ veces la K queda en $n{\times}K-(n-1){\times}K=n{\times}K-n{\times}K+K=K$. Luego K será mayor que el residuo que quede de haber quitado á B la mitad, y al residuo la mitad, y así sucesivamente hasta las $n-1$ veces; luego por pequeña que sea la cantidad K, podemos hacer menor la cantidad B, quitándole su mitad, y á lo que quede su mitad y así sucesivamente.

Esc. En esta proposicion se supone que haya un número n que multiplicado por K haga que el producto $n{\times}K$ sea mayor que B. Para concebir un número de esta especie bastará notar que el caso ménos favorable á la cuestion es cuando B sea mui grande, y K mui pequeña; pero por pequeña que sea K la podrémos concebir representada por un quebrado $\frac{1}{p}$, cuyo numerador sea la unidad, y el denominador p tan grande como se desée; en cuyo caso multiplicando p por $B+1$, tendrémos el número n tal que $n{\times}K$ ó $n{\times}\frac{1}{p}>B$.

Cor. 1.° De aquí resulta que *si de dos cantidades desiguales, de la mayor se quita mas de la mitad, y de lo que quede mas de la mitad, y así sucesivamente, con mas razon podemos decir que lo que resulte* *será menor que una cantidad dada por pequeña que sea*; pues si esto se podia conseguir quitando solo la mitad, y luego la mitad, &c. con mas razon se conseguirá quitando mas de la mitad, y de lo que quede mas de la mitad, y así sucesivamente.

Cor. 2.º Tambien resulta de esta proposicion que *podemos concebir á toda variable un valor menor que cualquiera otra cantidad dada por pequeña que sea.* Porque si suponemos que K sea dicha cantidad, por ser variable puede tener todos los valores que queramos; y como aquí la consideramos sola, esto es, sin que las variaciones estén sujetas á ninguna lei mas que á nuestro arbitrio, podrémos hacer que á cada paso la variacion que le resulte sea el quitarle la mitad ó mas de la mitad, que es lo mismo que hacerla dos veces menor ó mas de dos veces menor; y de este modo, por el teorema antecedente, tendrémos un resultado al cabo de cierto tiempo que será menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Cor. 3.º De aquí se deduce tambien que como un producto disminuye al paso que mengua uno cualquiera de sus factores, cuando queramos hacerle menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, *no hai mas que hacer á uno de los factores dos veces ó mas de dos veces menor, y luego dos veces ó mas de dos veces menor*, &c. y como en este caso el producto á cada paso va siendo dos veces ó mas de dos veces menor, este producto (teor. ant.) podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea. Y al contrario si vemos que uno de los factores de un producto va siendo á cada paso dos veces ó mas de dos veces menor, como en el mismo caso el producto irá siendo dos veces ó mas de dos veces menor, llegará (teor. ant.) á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Esc. No basta que una cantidad vaya disminuyendo continuamente para deducir que puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada; pues si tuviésemos la espresion $\frac{4}{3}$, y concibiésemos que á sus dos términos se les iba añadiendo sucesiva y continuamente una unidad, tendríamos las espresiones $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{7}$, &c. que en virtud de lo espuesto (108 teor. 1.º) iria siendo cada vez menor; y sin embargo, conservándose siempre el numerador mayor que el denominador, siempre será la espresion (25) mayor que la unidad: luego por ningun título podria llegar á ser menor que la unidad. Y así *para deducir que una cantidad puede llegar á ser menor que cualquiera otra dada, es preciso demostrar que decrece del modo espresado en la proposicion anterior*; y de lo contrario quedan en el aire todas las demostraciones que carezcan de este esencial requisito.

326 Teor. 4.º *Si dos cantidades invariables* A y B *son tales que su diferencia* A—B *sea menor que una tercera cantidad* K, *por pequeña que esta pueda ser, dichas cantidades son iguales entre sí.*

Dem. En efecto, si fuesen desiguales se tendria necesariamente que

$A-B=d$, señalando d su diferencia; luego no seria posible que K tuviese un valor menor que d, y por consiguiente tan pequeño como se quisiese; y como por el supuesto K puede ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, se sigue que no puede haber la diferencia d entre dichas cantidades; luego serán iguales. L. Q. D. D.

Esc. Aquí decimos que las cantidades son invariables, porque se puede encontrar una espresion de $\sqrt{3}$, tal que se diferencie de la verdadera una cantidad menor que cualquier cantidad dada, sin que llegue jamas al valor exacto de $\sqrt{3}$; pero estos resultados mudan á cada nueva aproximacion, mientras que las cantidades A y B no son susceptibles la una ni la otra sino de una sola determinacion.

327 Teor. 5.º *Si tres cantidades* X,A,B *son tales que la primera* X, *que se supone variable (pero siempre mayor ó menor que las otras dos* A,B *que son constantes) se pueda aproximar á ambas al mismo tiempo tanto como se quiera, dichas dos cantidades* A y B *serán iguales.*

Dem. Sino es $A=B$ será porque la una tal como A lleve á la otra una cantidad cualquiera K, lo que dará $A=B+K$; y entónces acercándose X á A tanto como se quiera, no se podrá acercar á B al mismo tiempo tanto como se desée por impedirlo la cantidad K; y como por el supuesto se puede X acercar á ambas á un mismo tiempo tanto como se desée, se sigue que no puede haber ninguna diferencia entre A y B, luego serán iguales. L.Q.D.D.

328 Teor. 6.º *Si dos cantidades variables* X,Z *se pueden acercar tanto como se quiera á dos constantes* A y B, *y ademas la relacion* $\frac{X}{Z}$ *de las dos primeras es constante, digo que la relacion* $\frac{A}{B}$ *que tienen las dos constantes es la misma que la* $\frac{X}{Z}$ *de las variables.*

Dem. Por poderse acercar X á A tanto como se quiera y Z á B, tenemos que las relaciones $\frac{X}{A}$, $\frac{Z}{B}$ se podrán diferenciar de la unidad tan poco como se desée; y por lo mismo estas relaciones si tienen alguna diferencia no se podrá espresar por ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea. En efecto, si supusiésemos que su diferencia se podia señalar por la cantidad d, vendríamos á tener, por ejemplo, $\frac{X}{A}-\frac{Z}{B}=d$, ó $\frac{X}{A}=\frac{Z}{B}+d$; pero en este caso, pudiéndose acercar $\frac{Z}{B}$ á la unidad tanto como se quiera, no lo podria hacer la cantidad $\frac{X}{A}$ por impedirlo la cantidad d, contra lo dicho ántes; luego la diferencia entre $\frac{X}{A}$ y $\frac{Z}{B}$ si es que la tienen, no se puede espresar. Ahora, por ser constante la relacion $\frac{X}{Z}$ llamándola C tendrémos $\frac{X}{Z}=C$, de donde $X=C\times Z$. Sustituyendo en vez de X este valor en $\frac{X}{A}$ tendrémos las relaciones $\frac{Z\times C}{A}$ y $\frac{Z}{B}$, que sino se puede espresar su diferencia por ninguna cantidad dada, tampoco se podrá espresar la de las cantidades $\frac{C}{A}$ y $\frac{1}{B}$ que es la que debia constituir dicha diferencia, por ser comun la cantidad Z; y como estas dos cantidades $\frac{C}{A}$ y $\frac{1}{B}$ son constantes, inferimos por el teorema 4.º que $\frac{C}{A}=\frac{1}{B}$, ó multiplicando por A será $C=\frac{A}{B}$; pero C es igual con $\frac{X}{Z}$, luego $\frac{X}{Z}=\frac{A}{B}$; luego *si dos cantidades &c.*

Cor. De aquí resulta que si la segunda razon fuese de igualdad, *la primera tambien lo seria*, es decir que si las variaciones de X y Z, *fuesen tales que en todos los casos se verificase que* $X=Z$, *se tendria* $A=B$; es decir, *que las constantes tambien serian iguales.*

Esc. No hai una necesidad absoluta, para demostrar esta proposicion de suponer que la razon de las variables sea constante; porque se puede demostrar en general, que *si dos variables* X, Z *creciendo ó menguando se pueden acercar tanto como se quiera á dos constantes* A, B, *la relacion de las constantes será la misma que la de las variables*; y se tendrá $A:B::X:Z$.

En efecto, si esta proporcion no se verifica se tendrá $A:B::X:Z\pm K$; que alternando é igualando las razones será $\frac{A}{X}=\frac{B}{Z\pm K}$. Ahora, por poderse acercar X á A todo lo que se quiera, la primera razon se podrá acercar á la unidad tanto como se desée; y para que la segunda razon sea igual con la primera, será preciso que $Z\pm K$ se pueda acercar á B tanto como se quiera; pero como por el supuesto Z se puede acercar á B todo lo que se desée, no lo podrá hacer $Z\pm K$, por impedirlo la cantidad K; luego para que se verifique la igualdad de las dos razones sin contradiccion del supuesto, es indispensable que K no exista, ó que su valor sea cero; en cuyo caso se tiene

$$A:B::X:Z. \ (*)$$

Cuando una cantidad variable se puede acercar á otra constante tanto

(*) *En el (§ 231) de mi compendio se halla otra demostracion de esta proposicion, que es digna de conocerse.*

como se quiera, de manera que la diferencia entre ellas pueda llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, pero sin que jamas puedan llegar á ser iguales, se llama á la constante *límite* de la variable.

En la idéa de límite están comprendidas esencialmente dos: la 1.ª que la cantidad se pueda acercar al límite tanto como se quiera, y la 2.ª que jamas pueda llegar á serle igual.

Por esta causa resulta que A y B en el teor. 5.º son el límite de X, y quiere decir en general que *si dos cantidades son el límite de una tercera son iguales entre sí.* Tambien en el teor. 6.º resulta que A es el límite de X, y B el de Z; y dicho teorema quiere decir que *si dos cantidades variables al paso que se acercan á sus límites conservan siempre una relacion constante, la relacion de los límites es la misma que la de las variables.*

Á toda cantidad variable le podemos concebir dos límites: uno verdadero, real y efectivo que es el 0; y el otro que no es mas que un límite considerado, y se le representa por $\frac{1}{0}$.

En efecto, si suponemos que X sea dicha variable, y que á cada variacion se vaya convirtiendo en ser la mitad ó ménos que la mitad, al cabo de cierto tiempo llegará á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea; y por lo mismo la diferencia entre x, y 0 podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada. Por otra parte x jamas llegará á ser 0 mientras permanezca cantidad, luego el 0 tiene las dos circunstancias esenciales al límite; y por lo mismo es el límite de las cantidades que decrecen.

Ahora, si concebimos que en la espresion $\frac{a}{x}$ ó $\frac{1}{x}$, la x vaya disminuyendo, la espresion $\frac{a}{x}$ ó $\frac{1}{x}$ irá aumentando; y como x puede disminuir tanto como se desée, resulta que $\frac{a}{x}$ ó $\frac{1}{x}$ podrá aumentar tanto como se quiera; pero x al disminuir se va acercando continuamente á su límite 0, luego la espresion $\frac{a}{x}$ se irá acercando continuamente á $\frac{a}{0}$ ó $\frac{1}{0}$, y será por consiguiente una especie de límite de las cantidades que crecen (*).

(*) *Hemos dicho que* $\frac{1}{0}$ *es una especie de límite, porque no contiene el segundo carácter esencial de esta idéa, á saber, que la diferencia entre la cantidad y* $\frac{1}{0}$ *pueda ser menor que cualquier cantidad dada; en efecto, no se puede suponer que siendo* Z *una variable que va creciendo, le falta la cantidad* K *para llegar á ser* $\frac{1}{0}$; *porque entónces añadiendo á* Z *la* K *deberia ser igual con* $\frac{1}{0}$ *y por consiguiente* $\frac{1}{0}$ *no podria ser mayor que* Z+K *contra el supuesto; porque nosotros podemos concebir que*

329 A toda espresion cuyo denominador es o se le suele dar el nombre de *infinito*, que se señala con este signo ∞; de manera que $\frac{1}{0}$ y ∞ representan una misma cosa. Se le da el nombre de infinito porque las cantidades que toman esta forma pueden llegar á ser mayores que cualquiera otra dada.

Para convencernos de esto, observarémos que si en vez de o ponemos una espresion cualquiera que le sea igual tal como $1-1$, y hacemos la division (184) de 1 por $1-1$, tendrémos $\frac{1}{1-1}=1+1+1+1+\&c.$ que quiere decir que para obtener el valor de esta espresion se ha de añadir sucesivamente la unidad á ella misma, continuamente ó sin fin; con lo cual llegará á ser mayor que cualquier cantidad dada por grande que sea.

Del mismo modo $\frac{a}{1-1}=a+a+a+\&c. \ldots\ldots$

Puesto que $\frac{1}{0}$ ó $\frac{a}{0}=\infty$, si quitamos el divisor será $a=0\times\infty$, ó $1=0\times\infty$, y dividiendo por ∞, será $\frac{a}{\infty}$ ó $\frac{1}{\infty}=0$; lo que suministra otro medio de representar el cero, límite de las cantidades que decrecen.

Si tenemos en consideracion la resta de la division, será con mas exactitud $\frac{a}{1-1}=a+a+a+\ldots\ldots\frac{a}{1-1}$; de manera que á la espresion $\frac{a}{1-1}$ que es $\frac{a}{0}=\infty$, no le aumenta el que se le añada un número cualquiera de veces la cantidad a; pero tambien se puede demostrar esto, directamente y con mas generalidad por este sencillo cálculo:
$$\infty\pm a=\frac{1}{0}\pm a=\frac{1\pm 0.a}{0}=\frac{1\pm 0}{0}=\frac{1}{0}=\infty.$$

330 Si una cantidad variable X tiene dos valores diferentes A y B, podrémos suponer que para pasar de A á B ha de haber tenido todos los valores que están comprendidos entre A y B; esto quiere decir que cualquiera que sea la cantidad C (cuyo valor sea $>A$ y $<B$) podrémos suponer que esta cantidad C ha resultado de una variacion de X. En efecto, si llamamos D á la diferencia entre A y B, tendrémos que $B-A=D$; y hallando tambien la diferencia entre A y C, tendrémos, llamándola d, $C-A=d$.

Ahora, suponiendo que la variacion primitiva que le resulte á X sea el convertirse en $A+\frac{1d}{D}$, la segunda el convertirse en $A+\frac{2d}{D}$, la

á una cantidad cualquiera, por grande que sea, se le añade una unidad, 2 unidades, 1000 unidades, &c. y siempre resultará una mayor (8 esc.).

tercera en $A+\frac{3d}{D}$, &c., á la variacion espresada por D, se habrá convertido en $A+D\times\frac{d}{D}=A+d=C$; luego toda cantidad cuyo valor se halle entre los valores A y B de X se podrá considerar originada de un valor de la variable X. De aquí se deduce que si *la una de estas cantidades fuese positiva, y la otra negativa, podíamos inferir que habia un valor de la variable que seria cero*; pues cero se halla entre las cantidades positivas y negativas.

Ahora, si en la espresion estuviese la variable enlazada con constantes, no siempre podríamos decir que tendria un valor o; pues si se hallase la variable en el denominador, cuando esta hiciese que el denominador se acercase á cero, la espresion se acercaria á $\frac{1}{0}$; y cuando hiciese que el denominador mudase de signo, tambien mudaria de signo la espresion; en cuyo caso no podríamos afirmar que la espresion habia tenido un valor cero, porque habria pasado por $\frac{1}{0}$; de donde se deduce que pues una espresion no puede variar de signo si el numerador ó el denominador no le muda, y cuando el numerador le muda pasa por o, y cuando su denominador le muda pasa por $\frac{1}{0}$ ó ∞, podrémos establecer que *cuando una cantidad pasa de positiva á negativa, ha de haber un valor intermedio en el cual ha de ser o ó $\frac{1}{0}=\infty$* (*).

(*) *He hecho las mayores diligencias para ver esta proposicion bien demostrada: lo mas que he encontrado es que algunos autores, viéndola verificada en algunos casos particulares, la han establecido como verdadera. Todo lo que he dicho acerca de este punto es fruto de mis investigaciones, lo que advierto paraque se reflexione bien, y se vea si se halla otra demostracion mas directa. Aun me parece que se puede establecer que así como o es $<+1$ y >-1, así tambien $\frac{1}{0}$ ó ∞ es $>+1$ y <-1. La análisis que me ha conducido á esta conclusion es la siguiente: puesto que $0>-1$, si una misma cantidad tal como 1 la dividimos por o y por -1, tendrémos que el primer resultado será menor que el segundo; luego será $\frac{1}{0}<-\frac{1}{1}=-1$, luego $\frac{1}{0}$ es menor que -1, ó que cualquier cantidad negativa; pero como $\frac{1}{0}$ es mayor que cualquier cantidad positiva, resulta que estando el valor de $\frac{1}{0}$ entre los valores negativos y positivos, podrémos hacer que al pasar una cantidad de positiva á negativa, pase por uno de estos dos grados ó por o ó por $\frac{1}{0}$.*

Esto tambien va conforme con este otro principio: sea $\frac{a}{a-x}$ y supongamos que siendo $x<a$ vaya creciendo x; en este caso $a-x$ disminuirá y por lo mismo $\frac{a}{a-x}$ aumentará siempre que crezca x; luego si

La espresion $a=0\times\infty$ nos da á conocer que una cantidad cualquiera la podemos suponer representada por cero multiplicado por el infinito; ahora, si en vez de ∞ ponemos su valor $\frac{a}{0}$ ó $\frac{1}{0}$; será $a=0\times\frac{a}{0}=\frac{a\times0}{0}=\frac{0}{0}$; y si en vez de 0 sustituimos en la misma espresion su igual $\frac{1}{\infty}$, tendrémos que $a=0\times\infty=\frac{1}{\infty}\times\infty=\frac{\infty}{\infty}$; donde se ve que tambien es símbolo de una cantidad cualquiera la espresion $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

331 Todos estos símbolos nos sirven para indicarnos cuando las circunstancias con que tratamos de determinar una cantidad, son insuficientes para este objeto, por convenir á cualquier cantidad en general.

Propongámonos, por ejemplo, resolver esta cuestion: *Hallar un número tal que si á su cuádruplo se le añaden 7 unidades, resulte el cociente de dividir 15 por 3, junto con la suma de dos veces la tercera parte del séstuplo de dicho número con 2.*

Si llamamos x á dicho número, tendrémos planteada la cuestion en la siguiente ecuacion $4x+7=\frac{15}{3}+2\times\frac{1}{3}\times6x+2$;
y practicando las reglas establecidas (223) tendré:
1.° $4x-2\times\frac{1}{3}\times6x=\frac{15}{3}+2-7$, ó $x(4-2\times\frac{1}{3}\times6)=\frac{15}{3}+2-7$
que da $x=\frac{\frac{15}{3}+2-7}{4-2\times\frac{1}{3}\times6}$,
que despues de ejecutadas las operaciones indicadas, será
$x=\frac{5+2-7}{4-\frac{12}{3}}=\frac{7-7}{4-4}=\frac{0}{0}$, por lo que inferimos que la cantidad x puede

suponemos á x un valor cualquiera tal como a, para todos los valores de x mayores que a, la espresion dará un valor mayor que $\frac{a}{a-a}$; *y para todos los valores menores le dará menor; pero cuando* $x=a$: *la espresion* $\frac{a}{a-x}$ *se convierte en* $\frac{a}{a-a}=\frac{a}{0}=\infty$, *y cuando* $x>a$ *se convierte en una espresion negativa; luego* $\frac{a}{0}$ *ó* ∞ *es menor que cualquier cantidad negativa.*

Tambien se verifica que toda cantidad que de real pasa á ser imaginária, ó recíprocamente, pasa por cero ó por el infinito. Lo que se puede deducir de las espresiones $z=\sqrt{a^2-x^2}$, $z=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ *consideradas en estas tres relaciones* $x^2<a^2$, $x^2=a^2$ y $x^2>a^2$.

tener un valor cualquiera; sin embargo hasta aquí causará alguna admiracion el que una ecuacion no nos sirva para determinar una incógnita; pero si ejecutamos las operaciones indicadas en el segundo miembro de la ecuacion primitiva, tendrémos:
$$4x+7=\frac{15}{3}+2\times\frac{1}{3}\times6x+2=5+2\times\frac{6}{3}x+2=2\times2x+7=4x+7,$$
ecuacion que no espresa ninguna circunstancia para poder determinar la x, pues la sola circunstancia es que *el cuádruplo de dicho número mas siete sea igual con el mismo cuádruplo mas siete*; y como cualquier cantidad es igual con ella misma resulta que toda ecuacion en que los dos miembros estén representados por una misma cantidad, no puede servir para determinarla; y por lo mismo el cálculo nos debe indicar en el último resultado que cualquier cantidad cumple con la circunstancia exigida.

Á esta clase de ecuaciones se les da el nombre de *ecuaciones idénticas*, y solo sirven para dar á conocer que se verifica una verdad; pero de ningun modo para determinar una cantidad. Así $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$ es una ecuacion idéntica, y solo sirve para dar á conocer que siempre se verifica que la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia da la diferencia entre los cuadrados de dichas cantidades; y como esta es una propiedad general de todas las cantidades, la ecuacion en que esté cifrada de ninguna manera nos ha de poder determinar dichas cantidades.

De mui distinta naturaleza es cualquiera de estas ecuaciones
$$(a+x)(a-x)=a^2, (a+x)(a-x)=x^2, (a+x)(a-x)=b^2 \text{ \&c.}$$
pues cualquiera de ellas nos daria un valor particular para x.

Sin embargo de todo lo espuesto, es necesario convenir en que no toda espresion que se reduce á $\frac{0}{0}$ espresa una cantidad cualquiera; pues en muchos casos esto proviene de que en su numerador y denominador se halla un factor comun, que reduciéndose á cero hace tomar á la espresion la forma de $\frac{0}{0}$. Así, esta por ejemplo, $\frac{a^2-x^2}{ba-bx}$ se reduce á $\frac{0}{0}$ cuando $x=a$, porque entónces se convierte en $\frac{a^2-a^2}{ba-ba}=\frac{0}{0}$; y no obstante tiene un valor particular en este supuesto, á saber, $\frac{2a}{b}$; porque si descomponemos arriba, y abajo en factores se tendrá $\frac{(a+x)(a-x)}{b(a-x)}$, que suprimiendo arriba y abajo $a-x$ se tendrá $\frac{a+x}{b}$, que en el supuesto de $x=a$ será $\frac{2a}{b}$.

La fórmula $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ que espresa la suma de una progresion geométrica, se convierte en $S=\frac{0}{0}$ cuando $q=1$; pero como el numerador en virtud de lo espuesto (186) es divisible por $q-1$, dando por cociente $aq^{n-1}+aq^{n-2}+aq^{n-3}\ldots\ldots aq+a$, resulta que haciendo $q=1$, se tiene $S=a+a+a+\&c.\ldots\ldots+a=na$, lo que en efecto debe verificarse, pues en este caso la progresion se convierte en $\div\!\!\div a:a:a:a:a:\&c.$

El resultado $\frac{0}{0}$ que hemos obtenido parece da á conocer la insuficiencia de dicha fórmula para hallar la espresion de la suma en este caso particular.

En efecto, componiéndose entónces la progresion de términos iguales entre sí, no hai razon ninguna para caracterizar á dicha progresion mas bien como geométrica que como aritmética. Así, al buscar la suma de un cierto número de términos, no hai mas razon para valerse de la fórmula $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$, que de la $S=\frac{(a+u).n}{2}$ relativa á la progresion aritmética; en la cual siendo $u=a$, da $S=\frac{2a.n}{2}=na$, que es el verdadero resultado.

DIGRESION

En que se demuestran con toda generalidad algunas proposiciones anteriores, y de que se hace uso en los libros sin demostracion.

332 Puesto que ya hemos dado á conocer la existencia de las cantidades incomensurables ó irracionales, vamos á manifestar que aun cuando los factores sean irracionales no altera el producto su diferente colocacion, como lo prometimos (180).

Supongamos que las dos cantidades sean A y B, de las cuales la una sea irracional; si sacamos el valor aproximado de B por decimales, llamamos b al número n de guarismos decimales, y β á la suma de todos los que faltan, será $B=b+\beta$, y si llamamos b' á la parte b junta con una unidad decimal que ocupe el lugar n, tendrémos $b'>B>b$, y llamando β' á lo que b' lleva á B será $b'=B+\beta'$ (p).

Ahora, b' se diferenciaba de b en una unidad decimal del órden n: y como B ha de estar entre el valor de b' y de b, resultará que la diferencia entre b' y B ó entre B y b será menor que una unidad decimal del órden n; y como si suponemos que n se convierta en $n+1$, la unidad que ocupe el lugar $n+1$ será diez veces menor que la del órden n, resulta que la diferencia entre b' y b se habrá hecho con esto diez veces menor; y por lo mismo la diferencia entre b' y B ó entre B y b se habrá hecho mas de diez veces menor. Ahora, si concebimos que $n+1$ se convierte en $n+2$, la diferencia entre b' y b se habrá hecho otras diez veces menor, y la de entre b' y B ó entre B y b mas de diez veces menor; luego con suponer que la n vaya aumentando una unidad, ó

que el valor de b sea el de un guarismo decimal mas, vamos haciendo que la diferencia entre b' y b vaya siendo diez veces menor, y la de entre b' y B ó entre B y b mas de diez veces menor; y como en cualquiera de estos casos (325) la diferencia podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, resulta que la diferencia β' podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Ahora, multiplicando por A los dos miembros de la ecuacion (p) tendrémos $b'A=B\times A+\beta'A$, por lo que $b'A>B\times A$; pero (325 cor. 3.º) el producto $\beta'A$ podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, y como este es el esceso que $b'A$ llevará á $B\times A$ tendrémos que la diferencia entre $b'A$ y $A\times B$ podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada. Puesto que b' es una fraccion será lo mismo $b'A$ (§180) que $A\times b'$, luego tendrémos que $A\times b'>B\times A$, pero su diferencia podrá ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Ahora, $b'\times A$ se puede acercar tanto como se quiera á $B\times A$, y por la misma razon $A\times b'$ se podrá acercar á $A\times B$ tanto como se quiera; pero al acercarse $b'\times A$ á $B\times A$ y $A\times b'$ á $A\times B$ conservan siempre una misma relacion, á saber, la de igualdad, luego (328, teor. 6.º) tendrémos que esta misma relacion será la de las constantes; luego tambien resultará $\frac{A\times B}{B\times A}=1$, ó $A\times B=B\times A$.

Supongamos ahora que ambos factores A y B sean irracionales, y tendrémos que sino son iguales los productos $A\times B$ y $B\times A$, el uno llevará al otro una diferencia D, y resultará, por ejemplo, $AB-BA=D$.

Si suponemos $B=b+\beta$ como ántes, y sustituimos este valor será $A(b+\beta)-(b+\beta)A=D$, ó $Ab+A\beta-bA-\beta A=D$; que como en virtud de lo espuesto (§180) $A\times b=b\times A$, quedará $A\beta-\beta A=D$ (q). Esta diferencia siendo independiente del número de guarismos que tiene n, resulta que será la misma aunque β fuese no solo lo que sigue despues del guarismo decimal n, sino lo que sigue despues del guarismo decimal $n+1, n+2, n+3, n+4$, &c. pero en este caso β irá siendo menor; si llamamos δ al número que espresa las veces que β se hace menor al considerar que es el valor de las figuras que siguen á $n+1$, tendrémos $\frac{A\beta}{\delta}-\frac{\beta A}{\delta}=D$, ó sustituyendo por D su valor (q) $\frac{A\beta}{\delta}-\frac{\beta A}{\delta}=A\beta-\beta A$ que da $A\beta-\frac{A\beta}{\delta}=\beta A-\frac{\beta A}{\delta}$ ó quitando los divisores $A\beta\delta-A\beta=\ldots\ldots\beta A\delta-\beta A$ ó $A\beta\times(\delta-1)=\beta A\times(\delta-1)$ que suprimiendo el factor $\delta-1$ queda $A\beta=\beta A$, y por lo mismo $A\beta-\beta A=0$; pero $A\beta-\beta A=D$, luego $D=0$, y por lo mismo $A\times B-B\times A=0$, ó $AB=BA$.

333 Tambien hemos visto que la multiplicacion de las cantidades que

tenian esponentes se hacia sumando los esponentes, y que esta demostracion es verdadera cuando el esponente es entero, cuando es quebrado y cuando es negativo; ahora vamos á demostrar que tambien lo es cuando los esponentes son irracionales ó incomensurables.

Supongamos que se quiera multiplicar a^x por a^z, vamos á demostrar que el producto es a^{x+z}, ya se suponga que x ó z ó ambas sean irracionales.

Supongamos primero que x sea comensurable, y que no lo sea z. Si á z la espresamos en fraccion decimal y llamamos z' á los n guarismos primeros decimales, será $z'<z$; pero si á z' se le añade una unidad en el guarismo que espresa el lugar n, se tendrá otra nueva fraccion z'' que será $>z$, y siendo z' y z'' fracciones, se tendrá demostrado (205) que $a^xa^{z'}=a^{x+z'}$ y que $a^xa^{z''}=a^{x+z''}$; pero el producto a^xa^z debe estar entre $a^xa^{z'}$ y $a^xa^{z''}$, ó entre $a^{x+z'}$ y $a^{x+z''}$, luego si la cantidad a^{x+z} fuese mayor ó menor que a^xa^z será necesario para igualarla, disminuir ó aumentar su esponente $x+z$ en una cierta cantidad u, lo que daria $a^{x+z+u}=a^xa^z$, ó $a^{x+z-u}=a^xa^z$.

Ahora debemos distinguir los dos casos de cuando $a>1$ y $a<1$; en el primero las cantidades a^xa^z crecen con su esponente, y en el segundo decrecen cuando su esponente aumenta; de donde se sigue que en el primer caso $a^xa^{z''}$ ó $a^{x+z''}$ escede á a^xa^z. Sin embargo el esceso de z'' sobre z pudiéndose hacer menor que cualquier cantidad dada por consideraciones idénticas á las (332), resulta que se podrá hacer menor que u; por consiguiente se podrá hacer $a^{x+z''}<a^{x+z+u}$, de manera que si se supusiese que $a^{x+z+u}=a^xa^z$ se tendria al mismo tiempo $a^{x+z+u}=a^xa^z$, $a^{x+z''}<a^{x+z+u}$, y $a^{x+z''}>a^xa^z=a^{x+z+u}$; pero esto es un absurdo, porque la cantidad $a^{x+z''}$ no puede ser al mismo tiempo menor y mayor que una misma cantidad a^{x+z+u}, luego el supuesto que nos ha conducido á él tambien lo será.

Al contrario, si se supusiese que $a^{x+z-u}=a^xa^z$, resultaria que siendo $z'<z$ se tendrá $a^xa^{z'}$ ó $a^{x+z'}<a^xa^z$; y que la diferencia entre z' y z pudiendo ser menor que cualquier cantidad dada u seria $z'>z-u$, y tendríamos $a^{x+z'}>a^{x+z-u}$; de manera que se verificaria á un mismo tiempo $a^{x+z-u}=a^xa^z$, $a^{x+z'}<a^xa^z=a^{x+z-u}$, y $a^{x+z'}>a^{x+z-u}$; lo cual tambien es un absurdo, luego en este caso tambien resulta $a^xa^z=a^{x+z}$, pues de suponer lo contrario caemos en un absurdo.

Ahora, cuando $a<1$, se hace $a^xa^{z''}$ ó $a^{x+z''}$ mas pequeña que a^xa^z, y el esceso de z'' sobre z pudiéndose hacer menor que cualquier cantidad dada, podrémos hacer que sea menor que u, de modo que $z''<z+u$; por lo que $a^{x+z''}>a^{x+z+u}$, de manera que si se supusiese que $a^{x+z+u}=a^xa^z$ se tendria á un mismo tiempo $a^{x+z+u}=a^xa^z$, $a^{x+z''}>a^{x+z+u}$, $a^{x+z''}<a^xa^z=a^{x+z+u}$, lo que tambien es absurdo.

Al contrario, si se sostuviese que $a^{x+z-u}=a^xa^z$, se convendria igualmente en que a^xa^z ó $a^{x+z'}$, escederia á a^xa^z, y que la diferencia en-

tre z' y z pudiendo llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, se podrá hacer que $a^{x+z'}<a^{x+z-u}$, y que así tendríamos á un tiempo $a^{x+z'}<a^{x+z-u}=a^xa^z$, $a^{x+z'}>a^xa^z$, lo cual tambien es un absurdo; pues deberíamos tener á un mismo tiempo $a^xa^z>a^{x+z'}$ y $<a^{x+z'}$; luego en ambos casos se verifica que $a^xa^z=a^{x+z}$.

Ahora, solo nos falta probar que la proposicion tambien es verdadera cuando x es tambien irracional. Para esto observarémos que si en vez de z sustituimos z', z'', esto es, los mismos valores de que acabamos de hacer uso, no habrá desde luego ninguna duda acerca de las dos ecuaciones $a^xa^{z'}=a^{x+z'}$, $a^xa^{z''}=a^{x+z''}$, porque acabamos de demostrar que la multiplicacion de las cantidades esponenciales de la misma base se hace por la suma de sus esponentes, cuando uno solo de los esponentes es irracional; pero el producto a^xa^z es medio entre los productos $a^xa^{z'}$ y $a^xa^{z''}$ ó entre $a^{x+z'}$ y $a^{x+z''}$, y por consiguiente nos hallamos en el mismo caso que ántes para demostrar que hai absurdo en suponer que a^xa^z no sea igual á a^{x+z}; luego se puede considerar como cierto el que la multiplicacion de una misma cantidad con diferentes esponentes se hace por la suma de estos, tanto siendo racionales, como en el caso de no serlo.

334 Puesto que la multiplicacion de las potencias de una misma cantidad se hace por la suma de sus esponentes, cualquiera que sea la naturaleza de estos, se sigue que *la division de las potencias de una misma cantidad, cualquiera que sea la naturaleza de sus esponentes, debe hacerse por la sustraccion de ellos.*

Para demostrarlo, supongamos que $\frac{a^x}{a^z}=a^u$, señalando con u una cantidad cualquiera; ahora, como el divisor por el cociente ha de dar el dividendo, tendrémos $a^x=a^z\times a^u=a^{z+u}$, para lo cual es indispensable que $z+u=x$; lo que da $u=x-z$ y por consiguiente $\frac{a^x}{a^z}=a^u=a^{x-z}$.

335 *La elevacion á potencias de estas cantidades se debe hacer en todos los casos, multiplicando el esponente de la cantidad por el de la potencia á que se debe elevar*; principiarémos por el caso en que la potencia ha de ser entera, y tendrémos que siendo x racional ó irracional, será $(a^x)^2=a^x\times a^x=a^{x+x}=a^{2x}$, $(a^x)^3=a^x\times a^x\times a^x=a^{x+x+x}=a^{3x}$, y en general cuando n un número entero $(a^x)^n=a^x\times a^x\times a^x\times a^x.....=a^{x+x+x+x...}=a^{nx}$.

De aquí se deduce la regla inversa, á saber, que la raiz cuadrada de a^x es $a^{\frac{x}{2}}$, la cúbica $a^{\frac{x}{3}}$, y en general su raiz de grado n será $a^{\frac{x}{n}}$; para hallar esta regla analíticamente supondríamos que siendo n un número entero $\sqrt[n]{a^x}=a^u$, siendo u una cantidad indeterminada; elevando á la potencia n será $a^x = a^{n.u}$, y como para que se verifique esta ecuacion ha de tener la a en ambos miembros un mismo esponente, será $x = nu$, lo que da $u = \frac{x}{n}$, y por lo mismo $\sqrt[n]{a^x} = a^u = a^{\frac{x}{n}}$.

Pero si por una parte la elevacion á una potencia entera de una cantidad esponencial cualquiera se hace multiplicando el esponente de esta cantidad por el de la potencia á que se quiere elevar, y si por otra la estraccion de una raiz entera de una cantidad esponencial a^x se hace dividiendo el esponente de esta cantidad por el esponente de la raiz que se quiere estraer; se sigue que a^x elevado á una potencia de esponente fraccionario cualquiera $\frac{p}{q}$ será $a^{\frac{px}{q}}$ y por tanto que la elevacion de las cantidades esponenciales á potencias fraccionarias se hace multiplicando el esponente de estas cantidades por el de la potencia á que se las quiere elevar.

Ahora, para demostrar que la elevacion de una cantidad esponencial cualquiera a^x á una potencia de esponente irracional z, se debe hacer dando á a por esponente xz, harémos estas dos observaciones: 1.ª que sustituyendo por z los valores fraccionarios z', z'' (§ 333), a^x elevado á z' será $= a^{xz'}$ y a^x elevado á z'' será $= a^{xz''}$. La 2.ª que a^x elevado á z será mayor que $a^{xz'}$ y menor que $a^{xz''}$ cuando $a > 1$; pero que será menor que $a^{xz'}$ y mayor que $a^{xz''}$ cuando $a < 1$.

Esto supuesto, sea primero $a > 1$, y si a^{xz} no fuese igual á la potencia z de a^x, será mayor ó menor que esta potencia, es decir, que en el primer caso seria $a^{x(z-u)}$ y en el segundo $a^{x(z+u)}$ lo que fuese igual á la potencia z de a^x; pero la diferencia entre z y z' por una parte, y la de z'' y z por otra, se puede hacer menor que u, de donde resultará que $z' > z - u$, y $z'' < z + u$; luego si se pretendiese que $a^{x(z-u)}$ fuese igual con $(a^x)^z$, se convendria al mismo tiempo en que $a^{xz'} > a^{x(z-u)} = (a^x)^z$, y en que $a^{xz'} < (a^x)^z$, por la segunda observacion anterior, lo cual es un absurdo porque $a^{xz'}$, no puede ser á un mismo tiempo mayor y menor que $(a^x)^z$. Si se quisiese que $a^{x(z+u)}$ fuese igual con $(a^x)^z$, como nos veríamos precisados á convenir al mismo tiempo en que $a^{xz''} < a^{x(z+u)} = (a^x)^z$, y en que $a^{xz''} > (a^x)^z$, por dicha observacion, caeríamos aun en absurdo; y como en el caso de $a < 1$ tambien se verifica un absurdo semejante de suponer que la potencia z de a^x es mayor ó menor que a^{xz}, se sigue que la elevacion á potencias de las cantidades esponenciales se debe hacer multiplicando su esponente por el de la potencia á que es necesario elevarla, y esto cualquiera que sea la naturaleza del esponente.

Esta conclusion conduce á esta otra, á saber, que la estraccion de una raiz cualquiera de una cantidad esponencial se debe hacer dividiendo el esponente de esta cantidad por el esponente de la raiz que se quiere estraer; y así la raiz z de a^x es $a^{\frac{x}{z}}$; porque elevando $a^{\frac{x}{z}}$ á la potencia z se obtiene $a^{\frac{xz}{z}} = a^x$; por lo que las proposiciones sentadas por verdaderas en la multiplicacion algebráica lo son efectivamente en todos los casos, y no puede quedar ninguna duda acerca de su certidumbre.

Terminemos estas investigaciones demostrando directamente la regla dada (213) para descomponer en factores imaginários.

Sea, por ejemplo, la espresion $a^2 + b^2$, y cuyos factores supondrémos que sean $a + \alpha b$ y $a + \beta b$; por lo cual será

$$a^2 + b^2 = (a + \alpha b)(a + \beta b) = a^2 + a\alpha b + a\beta b + \alpha\beta b^2;$$

y como estos dos miembros han de ser iguales, se tendrá que para cumplir con esta circunstancia deberá ser $a\alpha b + a\beta b = 0$ y $\alpha\beta = 1$; la primera da, suprimiendo el factor comun ab, $\alpha + \beta = 0$ ó $\alpha = -\beta$, cuyo valor sustituido en la segunda da $-\beta^2 = 1$, de donde $\beta^2 = -1$ y $\beta = \pm\sqrt{-1}$, de donde sale por último $\alpha = -\beta = \mp\sqrt{-1}$; luego los dos factores tendrán esta forma: $a \mp b\sqrt{-1}$ y $a \pm b\sqrt{-1}$; que suministran la regla que allí dedujimos por observacion.

Fin de la parte primera del tomo primero.

APÉNDICE 1.°

Sobre el modo de conocer cuando un número es divisible por 2, por 3, por 4, por 5, por 6, por 7, por 8, por 9, por 10, por 11, por 12, por 13 &c; y en que se demuestran algunas proposiciones relativas á los divisores de los números.

En la nota del (§ 79) hemos dado todas las reglas que hai para conocer si un número es divisible por otros, deduciéndolas del problema de Pascal, con el fin de llenar un hueco, que se notaba en los libros elementales, de no manifestarse con la debida generalidad y exactitud el modo de deducir dichas reglas; pero ahora no podemos ménos de añadir lo que sobre este particular manifiesta Suzanne; porque aunque es mas científico y general lo que ponemos en la espresada nota, sin embargo, es tambien mui digno de conocerse este otro método, que por otra parte presenta la ventaja de estar mas á los alcances del principiante.

Para darle á conocer, observarémos que un número compuesto de muchas cifras es la suma de un cierto número de veces 1, de un cierto número de veces 10, de un cierto número de veces 100, y así sucesivamente; por lo que inferimos desde luego, que si se divide sucesivamente 1, 10, 100, 1000 &c., por el divisor dado, se tendrán restas, que multiplicadas por las cifras correspondientes del número propuesto y sumando estos productos, darán la resta total de los divisores del número primitivo por el divisor; de manera que si la suma de todas estas restas parciales fuese divisible por dicho divisor, el número dado lo seria tambien.

En virtud de esto escribamos en columna las diversas unidades de que un número puede estar compuesto, es decir, 1, 10, 100 &c.; dividámoslas sucesivamente por cada divisor, y escribamos las restas en otra columna á la derecha y tendrémos:

Dividendos.	*Divisores.*	*Restas.*
1	2	1
10	»	0
100	»	0
1000	»	0
&c.		&c.
1	3	1
10	»	1
100	»	1
1000	»	1
&c.		&c.
1	4	1
10	»	2
100	»	0
&c.		&c.
1	5	1
10	»	0
&c.		&c.
1	6	1
10	»	4, *ó ménos* 2
100	»	4, *ó ménos* 2
&c.		&c.
1	7	1
10	»	3
100	»	2
1000	»	6, *ó ménos* 1
10000	»	4, *ó ménos* 3
100000	»	5, *ó ménos* 2
1000000	»	1
&c.		&c.
1	8	1
10	»	2
100	»	4
1000	»	0
&c.		&c.
1	9	1
10	»	1
&c.		&c.
1	10	1
10	»	0
&c.		&c.

Dividendos.	*Divisores.*	*Restas.*
1	11	1
10	»	10, *ó ménos* 1
100	»	1
&c.		&c.
1	12	1
10	»	10, *ó ménos* 2
100	»	4
1000	»	4
&c.		&c.
1	13	1
10	»	10, *ó ménos* 3
100	»	9, *ó ménos* 4
1000	»	12, *ó ménos* 1
10000	»	3
100000	»	4
1000000	»	1
&c.		&c.

Observando esta tabla, se advertirá que para el divisor 7 se han tenido las restas 1, 3, 2, 6, 4, 5, tales que la 1.ª y la 4.ª, la 2.ª y la 5.ª, la 3.ª y la 6.ª, dan tres sumas iguales cada una con 7; y que relativamente al divisor 13, se verifica lo mismo entre la 1.ª y la 4.ª resta, entre la 2.ª y la 5.ª y entre la 3.ª y la 6.ª: se advertirá tambien que las restas han venido á ser *complementos* de las precedentes con relacion al divisor, es decir, que ellas contienen las unidades que faltaban á las restas precedentes para ser iguales al divisor, desde que una de ellas no ha diferido de este sino en 1.

En cuanto á la lei de continuidad de las restas, debemos notar que componiéndose el dividendo de un múltiplo del divisor y de una resta, bastará para tener el dividendo siguiente, multiplicar la resta por 10 y hacer la division. Por lo que, luego que vuelva á aparecer una de las restas precedentes, se tendrá el mismo dividendo, el mismo divisor que ántes, y por consiguiente la misma resta.

Si se quisiesen simplificar las restas halladas, se observaria, que poniendo una unidad mas en el cociente, desde que la resta exceda á la mitad del divisor, se tendria el producto del divisor por el cociente, mayor que el dividendo; de manera que este último seria igual al producto del divisor por el cociente, ménos la resta.

En virtud de esto, las restas dadas por el divisor 7, serán 1, 3, 2, *ménos* 1, *ménos* 3, y *ménos* 2; las dadas por 6, serán 1 y *ménos* 2; las por 11 serán 1 y *ménos* 1; las por 12 serán 1, *ménos* 2 y 4; las por 13 serán 1, *ménos* 3, *ménos* 4, *ménos* 1, 3, 4 y 1: y así sucesivamente.

Luego se concluirá de la lei que se observa entre las restas de estas divisiones, que todo *número está compuesto*: 1.° *de un múltiplo de 2 y de la cifra de sus unidades*; 2.° *de un múltiplo de 3 y de la suma de sus cifras*; 3.° *de un múltiplo de 4 mas sus unidades, mas el duplo de sus decenas*; 4.° *de un múltiplo de 5 mas sus unidades*; 5.° *de un múltiplo de 6 mas sus unidades, ménos el duplo de todas sus otras cifras*; 6.° *de un múltiplo de 7 mas la suma de su primera, de su 7.ª, de su 14.ª &c. cifra, mas el triplo de la suma de su 2.ª, de su 9.ª &c. cifra, mas el duplo de su 3.ª, 10.ª &c. cifra, ménos su 4.ª, 11.ª &c. cifra, ménos el triplo de su 5.ª, 12.ª &c. cifra, ménos el duplo de su 6.ª, de su 13.ª &c. cifra*; 7.° *de un múltiplo de 8 mas su primera cifra, mas el duplo de su 2.ª, y mas el cuádruplo de su 3.ª*; 8.° *de un múltiplo de 9 mas la suma de todas sus cifras*; 9.° *de un múltiplo de 10 mas la cifra de las unidades*; 10.° *de un múltiplo de 11, mas la suma de todas sus cifras, que ocupan lugares impares, ménos la de las cifras que ocupan lugares pares &c.*

En virtud de esto, 1.° un número es divisible por 2, cuando la cifra de sus unidades, es cero ó par, es decir, cuando es ó 0, ó 2, ó 4, ó 6, ú 8.

2.° Es divisible por 3, cuando la suma de todas sus cifras es un múltiplo de 3.

3.° Es divisible por 4, si la cifra de sus unidades añadida al duplo de sus decenas, da un múltiplo de 4.

4.° Es divisible por 5 cuando la cifra de sus unidades es 0 ó 5.

5.° Es divisible por 6 cuando la cifra de sus unidades, ménos el duplo de todas sus otras cifras, da 0 ó un múltiplo de 6.

6.° Para reconocer si un número es divisible por 7, es necesario dividir este número de derecha á izquierda en porciones de tres guarismos cada una, multiplicar despues por 1 la cifra de las menores unidades de cada porcion, por 3 la segunda, por 2 la tercera, y hacer dos sumas, la una de los productos dados por las porciones de lugar ímpar, y la otra por las de lugar par; si la diferencia entre estas dos sumas es cero ó un múltiplo de 7, el mismo número será divisible por 7.

7.° Un número es múltiplo de 8 cuando la cifra de sus unidades aumentada del duplo de sus decenas y del cuádruplo de sus centenas da un número divisible por 8.

8.° Todo número es divisible por 9, si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.

9.° Un número es divisible por 10, cuando la cifra de sus unidades es cero.

10.° Un número es múltiplo de 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras de lugar ímpar y las de lugar par es cero, ó un múltiplo de 11.

11.° Un número es divisible por 12 cuando la cifra de sus unidades estando aumentada del cuádruplo de todas las otras cifras, fuera de la segunda, y disminuido del duplo de dicha segunda cifra, se tiene por resultado 0 ó un múltiplo de 12.

12.° Para verificar si un número es divisible por 13, es necesario contando desde la 2.ª cifra, dividir este número en porciones de tres cifras cada una, multiplicar de derecha á izquierda la 1.ª cifra de cada porcion por 3, la 2.ª por 4, y la 3.ª por 1; sumar los productos de las porciones de lugar par, y los de lugar impar, añadir la cifra de las unidades á la primera suma, y si la diferencia entre las dos sumas es cero ó un múltiplo de 13, el número propuesto será divisible por 13.

Semejantemente se hallarian las condiciones de divisibilidad para los números mayores que 13.

Si ahora se observa que un número de muchas cifras se puede considerar como la suma de un cierto número de decenas y de unidades, ó de un cierto número de centenas, decenas y unidades; ó de un cierto número de millares, centenas, decenas y unidades; y ademas que las decenas son divisibles por 2, por 5 y por 10; que las centenas lo son por 4, que los millares lo son por 8 &c., se verá que un número es divisible: 1.° por 2 cuando su primera cifra es 0 ó 2, ó un múltiplo de 2; 2.° que lo es por 5 cuando está terminado á la derecha por un 0 ó por un 5; 3.° que lo es por 4 cuando el número que espresan sus dos cifras á la derecha es un múltiplo de 4; 4.° que lo es por 8 cuando el número que espresan las tres últimas cifras es divisible por 8.

En fin examinando atentamente la tabla precedente y la lei de las restas, se notará aun que 1000 dividido por 7, ó por 11, ó por 13, da siempre *ménos* 1 por resta, de manera que *un número es la suma de un múltiplo de 7, ó de 11 ó de 13, mas la parte que espresa las unidades, decenas y centenas, ménos el número de los millares.*

Tambien se verifica que *si la diferencia entre la parte que espresan las centenas, decenas y unidades, y el número que espresan las cifras desde los millares hácia la izquierda es cero, el número propuesto será divisible por 7, por 11 y por 13; y si esta diferencia es un múltiplo de 7, de 11 ó de 13, el mismo número podrá dividirse exactamente por 7 ó por 11 ó por 13.*

Para aclarar esto, propongámonos verificar si el número 39614442 es divisible por 7.

Para esto, le dividiré en porciones de á tres guarismos del modo siguiente: 39,614,442 y pondré en una columna de arriba abajo (A) pág. sig. todas las cifras de las de á tres guarismos de lugar ímpar, y procediendo de derecha á izquierda; hago lo mismo respecto de las porciones de lugar par. Multiplico despues las cifras de cada columna sucesivamente por 1, por 3 y por 2; sumo en cada columna los productos que me resultan, y obtengo las sumas 40 y 19 cuya diferencia es 21; y como 21 es divisible por 7, infiero que tambien lo es el 39614442.

Si se quisiera investigar dicha divisibilidad por la regla, que es comun al 7, al 11 y al 13, quitaríamos primero la porcion 442 (B) de lo que tiene esta á la izquierda, y se tendria por diferencia el número 39172 sobre el cual se obraria del mismo modo; pero como la porcion de los tres guarismos últimos es aquí mayor que lo que tiene á su izquierda, se quitaria al contrario esta de la otra, es decir, 39 de 172, y se tendrá *ménos* 133 por resta; de modo que el número propuesto se compondria de un múltiplo de 7 *ménos* 133; pero dividiendo 133 por 7 se obtiene 19 por cociente y 0 por resta; de donde se infiere que el número dado es divisible por 7.

Análogamente se procederia para reconocer la divisibilidad de los números por otros divisores.

(A)

$$\begin{array}{r} 2.1 = 2 \\ 4.3 = 12 \\ 4.2 = 8 \\ 9.1 = 9 \\ 3.3 = \underline{9} \\ 40 \\ \underline{19} \\ 21 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4.1 = 4 \\ 1.3 = 3 \\ 6.2 = \underline{12} \\ 19 \end{array}$$

(B)

$$\begin{array}{r} 39614\ldots442 \\ \underline{442} \\ 39.172 \\ \underline{39} \\ 133 \end{array}$$

Entendido esto, pasarémos á demostrar algunos teoremas importantes.

1.° *El producto de dos números pares es divisible por* 4; porque siendo (2.ª nota del § 79) este producto de la forma $2n\times2n'=4nn'$, está manifiesto el factor 4.

2.° *El producto de un número par por otro impar es necesariamente un número par*; porque en este caso se tiene $2n\,(2n'+1)=4nn'+2n=2(2nn'+n)$.

3.° *El producto de dos números impares, es un número impar*; porque estará espresado por $(2n+1)(2n'+1)=4nn'+2n'+2n+1=2(2nn'+n'+n)+1$; y siendo la primera parte un número par, de añadirle 1 ha de resultar precisamente un número impar.

Cor.° *Cuando todos los factores de un producto son números impares, este producto es un número impar.*

4.° *Cuando uno de los factores de un producto, es un número par; el producto tambien es par*; porque este producto es de la forma $n'\times2n=2nn'$.

5.° *Para que un producto sea un número impar, es necesario que todos sus factores sean impares*; porque si uno de ellos fuese par, el producto lo seria tambien (4.°).

6.° *Para que un producto sea un número par, es necesario que uno de los factores sea par*; porque el producto de muchos números impares es (3.° cor.°) un número impar.

7.° *En los números naturales* 1, 2, 3, 4, *&c. el producto de dos números consecutivos* es divisible por 2; el producto de tres consecutivos es divisible por 2.3 y así sucesivamente. En efecto, 1.° el producto de dos números enteros consecutivos es divisible por 2; porque uno de los factores es un número *par*; 2.° el producto de tres números enteros consecutivos es divisible por 2.3; porque este producto es divisible por 2 (1.°); y la division del mayor factor por 3, no pudiendo

dar sino una de las restas 0, 1, 2, suponiendo que el último sea el que dé la mayor resta 2, el anterior dará por resta 1, y el otro dará por resta 0; luego este será divisible por 3, puesto que no deja resta; si el mayor dejase la resta 1, el anterior dejaria la resta 0 y seria divisible por 3; luego en todos los casos se verifica. 3.° el producto de cuatro números consecutivos es divisible por 2.3.4; porque este producto es divisible por 2.3 (2.°); y la division del mayor factor por 4, dando una de las restas 0, 1, 2, 3, por la razon acabada de espresar, uno de dichos cuatro factores será divisible por 4; y como podríamos estender este raciocinio á tantos factores como se desease, resulta la proposicion.

8.° *La resta de una division no se altera cuando al dividendo se añade ó quita un múltiplo cualquiera del divisor.*

En efecto, si la division de a por b da el cociente c y la resta r, se tendrá $a=bc+r$ siendo $r<b$; y $a\pm mb=bc\pm mb+r$; y dividiendo por b, será $\dfrac{a\pm mb}{b}=c\pm m+\dfrac{r}{b}$; es decir que queda la misma resta r.

APÉNDICE 2.°

Sobre el modo de hallar el máximo comun divisor algebráico.

La denominacion de *máximo comun divisor algebráico* de dos ó mas cantidades se da á aquella espresion que tenga mas términos y mas factores en cada término, ó que sea de grado mas elevado, comprendiendo por otra parte los mayores coeficientes posibles.

Para que dos cantidades algebráicas admitan un divisor comun es indispensable, que tengan comun alguna letra; porque dicho divisor les dará á ambas cantidades las letras que él contenga: por lo cual supondrémos que A y B sean dos polinomios ordenados por las potencias decrecientes de una misma letra, a por ejemplo, hallándose elevada á la potencia mas alta en A; lo primero que debemos hacer es, verificar si A y B tienen algun factor comun que comprenda á la letra a, con relacion á la cual se ha ordenado, elevada á la mas alta potencia posible, y que por esta misma razon le llamarémos el *mayor comun divisor en* a.

Esto supuesto, el mayor comun divisor no podrá contener á a con un esponente mayor que el que dicha letra tiene en B; pero podrá suceder que el polinomio B sea el divisor comun; por lo cual se dividirá A por B, hasta que la division se haga sin resta, ó hasta que se haya llegado á una resta en que la letra comun a se halle con un esponente menor que el de dicha letra en el divisor.

En el primer caso, el divisor buscado será B; y en el segundo, si representamos por q el cociente entero hallado, y por R la resta, se tendrá ..... $A = qB + R$.

Pero hemos demostrado (80 cor.) que si dos espresiones tienen un divisor comun, este tambien dividirá á la resta. Luego el mayor comun divisor en a entre A y B, será el que existe entre B y R, por lo que no podrá ser superior á R.

Si se divide B por R sin dejar resta, R será el divisor buscado; y en el caso contrario, si llamamos q' al cociente y R' á la resta, será $B = q'R + R'$; donde se admite que la investigacion del mayor comun divisor entre B y R, y por consiguiente entre A y B se referirá al de R y R'.

Sin pasar mas adelante, se ve ya que continuando esta operacion

se hará siempre depender el mayor comun divisor en a entre A y B, del que existe entre dos restas consecutivas; y como los esponentes de a en las restas van siempre disminuyendo, será necesario, ó que una de las restas divida á la precedente, ó que se llegue á una resta que no contenga ya á la letra a. En el primer caso, la resta que divida á la precedente será el divisor buscado; en el segundo, el divisor no tendrá ya la letra a que aun se hallará en el dividendo; lo cual indicará que las cantidades A y B no tienen divisor comun en que entre a. Pero si la division se términa, obtendrémos un divisor con relacion á otra letra.

Ahora, si D es divisor comun entre A y B, resulta que no conteniendo ya á la letra a, debe ser divisor exacto de los coeficientes de sus potencias en las cantidades A y B; porque entónces estas cantidades que suponemos estar representadas por

$$Pa^m + Qa^{m-1} + Ra^{m-2} + \ldots\ldots Ta + U$$
$$P'a^n + Q'a^{n-1} + R'a^{n-2} + \ldots\ldots T'a + U'$$

podrán tomar la forma siguiente:

$$Dga^m + Dha^{m-1} + Dka^{m-2} \ldots\ldots Dta + Dv$$
$$Dg'a^n + Dh'a^{n-1} + Dk'a^{n-2} \ldots\ldots Dt'a + Dv'$$

En virtud de la cual es fácil de ver que para determinar en este caso el comun divisor, es necesario buscar el que existe entre todos los coeficientes.

Luego por este medio se puede obtener el divisor comun entre A y B cuando este divisor no debe encerrar á la letra a con relacion á la cual se ha ordenado. Y si se principia por esta operacion y se halla despues que A y B no tienen ningun divisor con la letra a, estarémos seguros de que no habia ningun otro divisor comun.

Si se examinan todas las circunstancias de la division de A por B, de B por R, de R por R' &c., se verá que puede suceder que el coeficiente del primer término del dividendo no sea múltiplo del coeficiente del primer término del divisor, de modo que los cocientes en vez de ser

q, q', q'', &c. sean $\frac{q}{n}$, $\frac{q'}{n'}$, $\frac{q''}{n''}$, &c.

Para evitar estos cocientes fraccionarios, se pueden multiplicar todos los términos del dividendo por un número que haga al coeficiente del primer término de este dividendo, múltiplo del primer término del divisor; de modo que si n, n', n'', &c. fuesen las cantidades por las cuales se hubiese multiplicado cada dividendo, se tendrian las operaciones siguientes.

$$\begin{array}{c|c} nA & B \\ \hline R & q \end{array},\quad \begin{array}{c|c} n'B & R \\ \hline R' & q' \end{array},\quad \begin{array}{c|c} n''R & R' \\ \hline R'' & q'' \end{array},\quad \begin{array}{c|c} n'''R' & R'' \\ \hline 0 & q''' \end{array}$$

Examinemos si estas multiplicaciones alterarán el máximo comun divisor buscado; y tendrémos ....

$$nA = qB + R$$
$$n'B = q'R + R'$$
$$n''R = q''R' + R''$$
$$n'''R' = q'''R''$$

Pero el mayor comun divisor de A y B no puede esceder á R; el de B y R no debe ser superior á R'; y en fin el de R y R' no puede ser mayor que R''; por consiguiente R'' será este divisor, si divide á R'; y como R'' divide á $n'''R'$, se sigue que será divisor de R', sino lo es de n'''.

Ahora si se observa que n''' es la cantidad por la cual se ha multiplicado el penúltimo divisor para hacer al primer término del dividendo divisible por el primer término de este divisor, se advertirá que n''' no comprende á a, mientras que R' y R'' la contienen; por consiguiente R'' no tendrá ningun divisor comun con n'''; pero R'' es menor que R', y ademas divide á $n'''R'$; luego dividirá á R'.

Se debe tener presente que en ninguna de las divisiones se puede multiplicar ni dividir por una misma cantidad el dividendo y el divisor; pues que esto equivaldria á hacer el comun divisor buscado un cierto número de veces mayor ó menor. Pero en virtud de lo que precede, se puede multiplicar ó dividir al dividendo ó al divisor, ó á la resta de una division por una misma cantidad sin temer alterar el comun divisor.

De todo lo cual resulta que *para hallar entre dos cantidades ordenadas con relacion á una misma letra, un divisor comun que comprenda esta letra con el mayor esponente posible, se dividirá aquella cantidad, que contenga á esta letra comun con el mayor esponente por la otra cantidad. Si la division se hace exactamente, el divisor de la operacion será el máximo divisor comun buscado; si no, se dividirá sucesivamente el divisor por su resta, y cada resta por la siguiente teniendo cuidado de continuar cada division hasta que se tenga una resta en la que el esponente de la letra comun sea menor, que lo es en el divisor ó en la resta precedente; y de este modo se llegará, ó á una division exacta, ó á una resta que no comprenda ya á la letra comun. En el primer caso, el último divisor, será el que se busca; en el segundo, se busca el máximo comun divisor de todos los coeficientes de ambos polinomios.*

En todas estas operaciones, se tendrá cuidado de suprimir los factores que sean comunes á todos los términos de un dividendo ó de una resta, sin serlo á los del divisor y recíprocamente. Ademas se hará siempre posible la division del primer término del dividendo por el primero del divisor, multiplicando todo el dividendo ó todo el divisor por el número que convenga, con tal que este número no sea un factor comun á todos los términos que no se multiplican.

Se podrá principiar por asegurarse si existe un factor comun á todos los coeficientes de las dos cantidades dadas, ántes de proceder á la investigacion del divisor que debe contener la letra con relacion á la cual se ha ordenado; y este procedimiento será por lo general mas corto.

Sean A y B las dos cantidades cuyo máximo comun divisor buscamos. Si descubrimos desde luego en A factores que no sean comunes á B, y en B factores estraños á A, se podrán borrar unos y otros sin recelo de que el máximo comun divisor se altere. En efecto, si A tiene la forma de mna, y B la de pqa, se puede suprimir en el primer factor mn y en el segundo pq, y a será el máximo comun divisor. Si las espresiones tuviesen la forma de $mncN$, $pqcN'$, se podria aun, para simplificar la operacion suprimir c, aunque factor comun, observando sin embargo, despues de haber hallado el mayor comun divisor a entre los dos cocientes N y N', de multiplicar por este factor c que debe formar parte del mayor comun divisor total. Si se introdujese un nuevo factor d en las dos cantidades, seria necesario dividir el máximo comun divisor por este factor introducido.

Cuando A y B son polinomios compuestos de muchos términos se hace ménos penosa la investigacion del máximo comun divisor procediendo del modo siguiente: 1.° *se busca el máximo comun divisor entre los coeficientes numéricos, y se dividen los dos polinomios por este número, lo que dará otros dos polinomios* A′ *y* B′; 2.° *se busca el máximo comun divisor entre los coeficientes algebráicos de la letra con relacion á la cual se ordena, que supondrémos ser la* a *y se divide por este mayor comun divisor, de donde resultarian* A″ *y* B″; *y* 3.° *En fin se busca la parte del mayor comun divisor, dependiente de la letra* a *que se obtiene por el método dado anteriormente. El mayor comun divisor pedido será el producto de todos estos comunes divisores parciales.*

1.° Propongámonos hallar el máximo comun divisor de los dos polinomios. $A=36b^2a^6-18b^2a^5-27b^2a^4+9b^2a^3$, $B=27b^2a^5-18b^2a^4-9b^2a^3$

Aquí observarémos que el mayor comun divisor numérico es 9, y que A y B son ademas divisibles por b^2a^3; de manera que haciendo la division por $9b^2a^3$ se tiene

$$A'=4a^3-2a^2-3a+1 \quad B'=3a^2-2a-1.$$

Para hacer la division de A' por B', evitando los coeficientes fraccionarios, multiplicarémos A' por 3, lo que le convertirá en $12a^3-6a^2-9a+3$; y haciendo la division, se halla por primer cociente $4a$ y la resta $2a^2-5a+3$; y para hallar el segundo término del cociente sin que resulten fracciones, multiplicarémos esta resta por 3, lo que nos dará $6a^2-15a+9$, que dividida por el divisor, da 2 por cociente; y hecha la multiplicacion y resta queda $-11a+11$; Ahora ya no se pueden sacar mas términos del cociente, porque resultaria la a en el denominador; y así se dividirá el $3a^2-2a-1$ por esta resta $-11a+11$; pero como en esta es factor comun el 11; y este no lo es del que ha de hacer de dividendo, se podrá dividir por 11, ó para mayor comodidad y sencillez por -11, lo que dará $a-1$; y como dividiendo $3a^2-2a-1$

por $a-1$ resulta el cociente exacto $3a+1$, tenemos que $a-1$ es el máximo comun divisor de los dos polinomios A' y B'; y multiplicando por $9b^2a^3$ resulta que el máximo comun divisor de A y B será $9b^2a^4-9b^2a^3$, y haciendo la division se obtienen los cocientes $4a^2+2a-1$ y $3a+1$.

2.° Propongámonos ahora los polinomios

$A=(9b^2-18bc)a^3+(21b^3-42b^2c)a^2+(36b^3c-18b^4)a$;

$B=(15b^2-30bc)a^2+(18b^2c-9b^3)a$;

se halla desde luego que $3ab$ es el mayor comun divisor parcial; el cual suprimido se tiene

$A'=(3b-6c)a^2+(7b^2-14bc)a+12b^2c-6b^3$;

$B'=(5b-10c)a+6bc-3b^2$;

los que se pueden poner bajo la forma

$A'=(b-2c)3a^2+(b-2c)7ba-(b-2c)6b^2$

$B'=(b-2c)5a-(b-2c)3b$.

En los cuales aparece en todos los términos el factor comun $b-2c$, por lo que este formará tambien parte del comun divisor; y dividiendo por él, tendrémos

$$A''=3a^2+7ba-6b^2 \qquad B''=5a-3b$$

Para continuar la operacion se divide A'' por B''; y para poder efectuarla sin quebrados, se multiplicará A'' por 5, y se obtiene el cociente $3a$, y la resta $44ba-30b^2$.

En esta resta suprimirémos el factor comun $2b$ que no lo es del divisor, y se reducirá á $22a-15b$; y para continuar la division, multiplicarémos por 5, y se nos convertirá en $110a-75b$; que dividida por el divisor $5a-3b$, da 22 por cociente; y como no se llega á tener cociente exacto, pues queda $-9b$ por resta, se infiere que A'' y B'' no tienen comun divisor; por lo que el de A y B será $3ab(b-2c)=3ab^2-6abc$.

Propongámonos por último hallar el máximo comun divisor de

$$A=6a^3-6a^2b+2ab^2-2b^3 \qquad B=12a^2-15ab+3b^2$$

Si multiplicamos A por 2 y dividimos B por 3 tendrémos

$$A'=12a^3-12a^2b+4ab^2-4b^3 \qquad B'=4a^2-5ab+b^2$$

que podrémos ya dividir A' por B', de modo que no resulten quebrados, y haciendo la division se tiene $3a$ por cociente, y $3a^2b+ab^2-4b^3$ por resta.

Multiplicando dicha resta por 4 y dividiendo por b, se tiene $12a^2+4ab-16b^2$, que dividida por el divisor da 3 por cociente y $19ab-19b^2$ por resta.

Ahora se deberá dividir $4a^2-5ab+b^2$ por la resta $19ab-19b^2$; pero ántes se suprimirá el factor comun $19b$; y hecha la division resulta $4a-b$ por cociente; que, como no queda resta, manifiesta que el máximo comun divisor de los dos polinomios propuestos es $a-b$.

Para no dejar nada que desear, comprobarémos con un ejemplo, no solo que el suprimir factores comunes en una de las cantidades cuyo máximo comun divisor se busca, con tal que esta no sea comun á la otra cantidad, ni el multiplicar por una cantidad cualquiera, que no

sea factor de la otra, altera el máximo comun divisor, nos propondrémos el ejemplo siguiente:

$$A=6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1$$
$$B=4x^4+2x^3-18x^2+3x-5$$

Para hacer la division de A por B, necesitamos multiplicar á A por 2; y dividiendo luego por B, se halla el cociente $3x$, y por primera resta $-14x^4+32x^3-15x^2+9x-2$, que para poderse dividir por el primer término del divisor B, es preciso multiplicar por 2; y hecho esto y verificada la division, se obtiene por segundo término del cociente -7 y la resta es $78x^3-156x^2+39x-39$.

Ahora se debe dividir el polinomio B por esta resta; pero como en esta se halla el factor comun 39 en todos sus términos, despues de suprimido, se reducirá á $2x^3-4x^2+x-1$; que dividiendo por esta cantidad dicho polinomio, resulta por cociente exacto $2x+5$. Lo que nos da á entender que el máximo comun divisor es $2x^3-4x^2+x-1$.

Mas si ejecutásemos la operacion sin hacer ninguna modificacion en las cantidades, esto es, sin multiplicar las dos veces por 2, ni suprimir por último el factor 39, hallaríamos, que de dividir A por B resultaba el cociente $\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}$, quedando por resta $\frac{39}{2}x^3-39x^2+\frac{39}{4}x-\frac{39}{4}$; y dividiendo por ella el polinomio B, resulta por cociente exacto $\frac{8}{39}x+\frac{20}{39}$; y pues no queda resta, es señal de que la cantidad $\frac{39}{2}x^3-39x^2+\frac{39}{4}x-\frac{39}{4}$ es el máximo comun divisor, el cual equivale al hallado por el otro método, multiplicado por $\frac{39}{4}$. Para hacer ver que este $\frac{39}{4}$ no forma parte del máximo comun divisor, y que es un factor que le es estraño, dividamos por las reglas ordinarias el polinomio A por ...... $\frac{39}{4}x^3-39x^2+\frac{39}{4}x-\frac{39}{4}$; y tendrémos por cociente exacto $\frac{12}{39}x^2+\frac{16}{39}x+\frac{4}{39}$, que equivale á $\frac{4}{39}(3x^2+4x+1)$; y dividiendo por la misma cantidad el polinomio B, se obtiene por cociente exacto $\frac{8}{39}x+\frac{20}{39}$, que equivale á $\frac{4}{39}(2x+5)$: de manera que el polinomio

$$A=\tfrac{39}{4}(2x^3-4x^2+x-1).\tfrac{4}{39}(3x^2+4x+1)=\ldots\ldots\ldots (2x^3-4x^2+x-1)(3x^2+4x+1)$$

y el $B=\frac{39}{4}(2x^3-4x^2+x-1).\frac{4}{39}(2x+5)=\ldots\ldots\ldots\ldots (2x^3-4x^2+x-1)(2x+5)$.

Donde se ve que no hai mas factor comun que el $2x^3-4x^2+x-1$, y que por lo mismo la regla dada no solo nos simplifica el cálculo, sino que nos evita el hallar factores estraños, que compliquen los resultados.

Cuando la letra por la cual se ordena se halla en varios términos con un mismo esponente, es preciso encerrar dentro de un paréntesis lo que la multiplica, para que no resulte ningun otro embarazo; por lo demas, terminarémos este punto manifestando que cuando el polinomio contiene muchas letras es indiferente ordenarle con relacion á una ú á otra; porque siempre se obtiene el mismo resultado.

En efecto, sean los polinomios

$$A=a^2d^2-c^2d^2-a^2c^2+c^4 \qquad B=2a^2d-ac^2+c^3-2acd$$

Si ordenamos con relacion á la letra d, serán

$$A=(a^2-c^2)d^2-a^2c^2+c^4 \qquad B=(2a^2-2ac)d-ac^2+c^3$$

y si observamos que la parte que en A no tiene d ó en que se halla la potencia d^0, es $-a^2c^2+c^4=-c^2(a^2-c^2)$, se tendrá que en A es factor comun a^2-c^2; y si observamos que $a^2-c^2=(a+c)(a-c)$, tendrémos que $A=(a+c)(a-c)(d^2-c^2)$.

En el polinomio B, observamos tambien que el coeficiente de d es $2a^2-2ac=2a(a-c)$; y que la otra parte $-ac^2+c^3=-c^2(a-c)$; por lo que $B=(a-c)(2ad-c^2)$.

Donde vemos que $a-c$ es factor comun de A y B; pero independiente de la letra d; y dividiendo por dicho factor comun, se tiene

$$A'=(a+c)(d^2-c^2) \qquad B'=2ad-c^2.$$

Ahora, en A' podrémos suprimir el factor $a+c$ que no es comun en B', y tendrémos reducida la cuestion á encontrar el máximo comun divisor de d^2-c^2 y de $2ad-c^2$; y dividiendo d^2-c^2 despues de multiplicado por $4a^2$, se obtiene el cociente $2ad+c^2$, dejando por resta $-4a^2c^2+c^4$; y como esta ya es independiente de la letra d por la cual se ha ordenado, resulta que A' y B' son primeros entre sí.

Luego el máximo comun divisor es $a-c$.

Si ordenamos con relacion á a, se tiene

$$A=a^2(d^2-c^2)-c^2d^2+c^4 \qquad B=a^2.2d-a(c^2+2dc)+c^3$$

Pero la parte independiente de a en el primero es
$-c^3d^2+c^4=-c^2(d^2-c^2)$; luego $A=a^2(d^2-c^2)-c^2(d^2-c^2)=\ldots\ldots$
$(d^2-c^2)(a^2-c^2)$; y como d^2-c^2, no es factor de B, podrémos suprimirle en A, y quedará reducida la operacion á encontrar el máximo comun divisor de $A'=a^2-c^2$, y de B; que dividiendo este por A' se obtiene por cociente $2d$, y la resta $-a(c^2+2dc)+2dc^2+c^3=\ldots$
$-a(c^2+2dc)+c(c^2+2dc)=(c-a)(c^2+2dc)$; en la cual podrémos suprimir el factor comun c^2+2dc; y dividiendo despues a^2-c^2 por $a-c$, resulta el cociente exacto $a+c$; por lo que inferirémos que la cantidad $a-c$, que últimamente nos sirvió de divisor es el máximo comun divisor, lo mismo que ántes.

Si ordenásemos con relacion á c, tendríamos

$$A=c^4-c^2(d^2+a^2)+a^2d^2 \qquad B=c^3-ac^2-2acd+2a^2d$$

que dividiendo A por B se saca el cociente $c+a$, quedando por resta $-c^2(d^2-2ad)+a^2(d^2-2ad)=(-c^2+a^2)(d^2-2ad)$; y como el factor d^2-2ad no es comun en B, podrémos suprimirle, y continuar la operacion dividiendo B por $-c^2+a^2$, lo que nos da por cociente $-c$, dejando por resta $a^2c-ac^2-2acd+2a^2d=(ac+2ad)(-c+a)$; en la cual podrémos suprimir el $ac+2ad$, y continuar dividiendo $-c^2+a^2$ por $-c+a$, lo que nos da por cociente $c+a$, dejando cero por resta; lo cual es un indicio de que la cantidad $-c+a=a-c$, que nos ha servido de último divisor, es el máximo comun divisor que se busca.

Luego hemos hallado el mismo resultado ordenando por las tres diferentes letras, que contenian los polinomios propuestos.

APÉNDICE 3.°

Demostracion algebráica de la teoría de los quebrados literales, prescindiendo de las demostraciones dadas en la Aritmética.

Supongamos que se tenga $a=b.c$ (1); si dividimos ambos miembros por b, y suponemos que b no tenga ningun factor comun con a, será $\frac{a}{b}=c$ (2).

En esta espresion, c representa el quebrado $\frac{a}{b}$; y como todo quebrado se puede considerar como una division de su numerador por su denominador, le representamos por c inicial de cociente.

Multiplicando por m los dos miembros de la ecuacion (1), se tendrá $ma=mbc$ (3), y dividiendo por mb, resulta $\frac{ma}{bm}=c=\frac{a}{b}$ (4); y como m puede ser un número entero ó fraccionario, se deduce que *no se altera el valor de un quebrado multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número.*

Si se dividen por b los dos miembros de la ecuacion (3), se tendrá $\frac{ma}{b}=mc$ (5).

La ecuacion (1) no se alterará multiplicando su segundo miembro por $\frac{m}{m}$; por lo que se tendrá $a=b.c.\frac{m}{m}=\frac{1}{m}b.m.c$ (6); y dividiendo ambos miembros por $\frac{1}{m}b$, resulta $\frac{a}{\frac{1}{m}b}=m.c$ (7).

Las ecuaciones (5 y 7) demuestran *que se multiplica una fraccion por un número cualquiera* m, *ya sea multiplicando su numerador, ó ya dividiendo su denominador por* m.

Dividiendo por m los dos miembros de la ecuacion (1), resulta $\frac{a}{m}=b.\frac{c}{m}$ (8), y como la (ec. 6) se puede poner bajo la forma $a=mb.\frac{c}{m}$ (9), si dividimos la (8) por b, y la (9) por mb, se tendrá $\frac{\frac{a}{m}}{b}=\frac{c}{m}$ (10), $\frac{a}{mb}=\frac{c}{m}$ (11).

Las cuales dan á conocer que *para dividir una fraccion por* m *es necesario ó dividir su numerador por* m, *ó multiplicar su denominador por* m.

Supongamos ahora que se tengan las dos ecuaciones $a=b.c$ (12), $a'=b.c'$ (13) que corresponden á las fracciones $\frac{a}{b}=c$, $\frac{a'}{b}=c'$; las cuales tienen un mismo denominador; y si dichas ecuaciones se suman, se tendrá $a+a'=bc+bc'=b(c+c')$; y dividiendo por b, será $\frac{a+a'}{b}=c+c'=\frac{a}{b}+\frac{a'}{b}$ (14).

Luego *para sumar dos fracciones que tienen el mismo denominador es necesario sumar los numeradores, y dividir la suma que se obtenga por el denominador comun.*

Si se restan las ecuaciones (12 y 13), se divide despues por b, y se pone en vez de c y c' sus valores, se tendrá $\frac{a-a'}{b}=\frac{a}{b}-\frac{a'}{b}$ (15), que nos dice que *para restar quebrados cuando tienen un mismo denominador, se restan los numeradores, y á la resta se le pone por denominador el comun.*

Supongamos que las dos fracciones tengan denominadores diferentes, y que sea $a=b.c$ (16), $a'=b'.c'$ (17), que corresponden á $\frac{a}{b}=c$, $\frac{a'}{b'}=c'$.

Si los dos miembros de la (16) se multiplican por b' y los de la (17) por b, será $b'a=bb'.c$, $ba'=bb'.c'$; las cuales sumadas dan $b'a+ba'=bb'.c+bb'.c'=bb'(c+c')$; ó dividiendo por bb' será $\frac{b'a+ba'}{bb'}=c+c'=\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}$; lo que nos dice que *para sumar quebrados se deben reducir á un mismo denominador, sumar los numeradores y poner por denominador á la suma, el denominador comun.*

Si en vez de sumarlas las hubiéramos restado, hubiéramos tenido $\frac{ab'-a'b}{bb'}=\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}$, que nos dice que *para restar quebrados se reduzcan á un mismo denominador, se resten los numeradores, y á la diferencia se le ponga por denominador el comun.*

Si se multiplican las (ecuac.[s] 16 y 17) será $aa'=bb'.cc'$; y dividiendo por bb' será $\frac{aa'}{bb'}=cc'=\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}$ (18), que nos dice que *para multiplicar quebrados se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.*

Si los dos miembros de la ecuacion $m=m$, los dividimos por los de la (1), será $\frac{m}{a}=\frac{m}{b.c}$; y multiplicando por b, será $\frac{mb}{a}=\frac{m}{c}=\frac{m}{\frac{a}{b}}$ (19), que nos dice que *para dividir un entero por un quebrado se multiplica el entero por el denominador del quebrado y el producto se divide por el numerador.*

Si se dividen las (16 y 17), se tiene $\frac{a}{a'}=\frac{b.c}{b'.c'}$, que multiplicando por b', será $\frac{b'a}{a'}=\frac{b.c}{c'}$; y dividiendo por b será $\frac{b'a}{ba'}=\frac{c}{c'}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a'}{b'}}$, que nos dice que *para dividir un quebrado por otro se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor y esto forma el numerador del cociente; y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, lo que forma el denominador del cociente.*

Esc. Estas propiedades son independientes de los valores que puedan tener a y b esto es, ya sean monomias, polinomias &c.

Supongamos que se tenga la espresion $\frac{a}{b}=c$ (20); si á ambos términos del quebrado se les añade un mismo número m, la fraccion c variará, ó permanecerá la misma; supongamos que δ esprese la variacion que padece el quebrado, la cual será cero, si el quebrado no se altera; de manera que tendríamos $\frac{a+m}{b+m}=c+\delta=\frac{a}{b}+\delta$.

Si de ambos miembros quitamos $\frac{a}{b}$, tendrémos $\delta=\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}$, que reduciendo á un mismo denominador y efectuando la resta, será $\delta=\frac{ab+bm-ba-am}{b(b+m)}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)}=\frac{m}{b}\times\frac{b-a}{b+m}$ (21).

Ahora a respecto de b no puede ser sino $a<b$, $a=b$, $a>b$: en el primer caso $b-a$ tendrá un valor positivo; por consiguiente δ será positiva, y nos dice *que añadiendo una misma cantidad al numerador y denominador de un quebrado propio, resulta un quebrado mayor que el primitivo.*

En el 2.º caso $b-a=0$; por lo que $\delta=0$, y en efecto entónces $\frac{a}{b}=\frac{a}{a}=\frac{a+m}{a+m}=1$.

En el tercer caso $b-a$ será una cantidad negativa, por consiguiente δ será negativa; y nos dice, *que si á los dos términos de un quebrado impropio se les añade una misma cantidad, el quebrado disminuye.*

Si quitamos á ambos términos del quebrado de la (ecuacion 20) la cantidad m, será $\frac{a-m}{b-m}=c+\delta=\frac{a}{b}+\delta$; y del mismo modo que ántes sacarémos

$$\delta=\frac{a-m}{b-m}-\frac{a}{b}=\frac{ab-bm-ab+am}{b(b-m)}=\frac{am-bm}{b(b-m)}=\frac{m(a-b)}{b(b-m)}\ (22).$$

Supongamos primero que se verifique $b>m$ con $a>b$, y δ será positiva; si se tiene $b>m$ con $a=b$, $\delta=0$; si $b>m$ con $a<b$ es δ negativa; luego se verifica que *cuando á los dos términos de una fraccion se les quita una misma cantidad, que sea menor que su denominador, su valor aumenta si la fraccion es impropia, no muda si la fraccion equivale á la unidad, y disminuye si es un quebrado propio.*

Supongamos en 2.º lugar que se tenga: $b=m$ con $a>b$; y será $\delta=\frac{1}{0}=\infty$. Si se verifica $b=m$ con $a=b$, se tiene $\delta=\frac{0}{0}$; y si $b=m$ con $a<b$, $\delta=-\infty$.

Si se verificase $b<m$ con $a>b$, seria δ negativa; si $b<m$ con $a=b$ seria $\delta=-0$; si $b<m$ con $a<b$, δ seria positiva.

Supongamos por último que al numerador se le añade una cierta cantidad m, y al denominador otra n, llamando δ la alteracion que padezca el quebrado será, $\frac{a+m}{b+n}=c+\delta=\frac{a}{b}+\delta$ que da ....

$$\delta=\frac{a+m}{b+n}-\frac{a}{b}=\frac{ab+bm-ab-an}{b(b+n)}=\frac{bm-an}{b(b+n)}.$$

Si suponemos ahora que $m=\alpha a$, esto es, que la cantidad añadida al numerador sea un múltiplo del mismo numerador; y $n=\alpha b$, esto es, que la cantidad añadida al denominador sea el mismo múltiplo del denominador se tendrá haciendo las sustituciones $\delta=\frac{b\alpha a-a\alpha b}{b(b+\alpha b)}=\frac{0}{b(b+\alpha b)}=0$, lo cual nos da á conocer que *un quebrado no se altera aun cuando á su numerador se le añada un múltiplo cualquiera del mismo numerador, con tal que al denominador se le añada el mismo múltiplo del denominador; y lo mismo sucederia si se les quitase.*

Y como en este caso $\frac{m}{n}=\frac{\alpha a}{\alpha b}=\frac{a}{b}$, se deduce que *si dos quebrados son iguales, los que resultan de sumar ó restar sus numeradores y denominadores son tambien iguales.*

APÉNDICE 4.º

Teoría general de los quebrados continuos.

Las reglas que dimos en la Aritmética para convertir en quebrado continuo un quebrado numérico reciben mayor grado de claridad y generalidad tratando esta cuestion algebráicamente; lo que nos proporcionará al mismo tiempo el demostrar algunas propiedades importantes acerca de estas fracciones.

Supongamos que se tenga la espresion $\frac{M}{N}$, y que se quiera desenvolver en fraccion continua. Si suponemos $M>N$, y practicamos la division de M por N, de N por la primera resta, de esta primera resta por la segunda &c. y espresamos por q, q', q'', q''', &c., los cocientes, y por r, r', r'', r''', &c. las restas; la espresion $\frac{M}{N}$ tomará las formas siguientes:

$$\frac{M}{N}=q+\frac{r}{N},\ \text{ó}\ q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{r'}{r}},\ \text{ó}\ q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{r''}{r'}}}.$$

$$\text{ó}\ q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{1}{q'''+\cfrac{r'''}{r''}+\ \&c.}}}$$

En estas espresiones se llaman *fracciones integrantes* á las $\frac{1}{q'}$, $\frac{1}{q''}$, $\frac{1}{q'''}$ &c., cuyo conjunto constituye la fraccion continua; y *cocientes incompletos* á los denominadores q', q'', q''' &c. Y pues lo que se busca son espresiones simplificadas de $\frac{M}{N}$, si despreciamos en cada fraccion de estas la última de ellas, y las ponemos en forma de un solo quebrado comun por el método espuesto (127), tendrémos por valores aproximados de $\frac{M}{N}$, las fracciones

$$\frac{q}{1},\ \frac{qq'+1}{q'},\ \frac{(qq'+1)q''+q}{q'q''+1},\ \frac{[(qq'+1)q''+q]q'''+qq'+1}{(q'q''+1)q'''+q'},$$

que reciben el nombre de *reducidas*, y en las cuales se advierte exactísimamente la regla espuesta (131); de manera que si suponemos que estas fracciones sucesivas sean $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$ &c.; se tendrá

$$\begin{array}{ll} A=q & A'=1 \\ B=Aq'+1 & B'=A'q'+0 \\ C=Bq''+A & C'=B'q''+A' \\ D=Cq'''+B & D'=C'q'''+B' \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

Pero nos falta hacer ver que se verifica esta lei en general.

Para esto nos propondrémos demostrar, que *si esta lei es verdadera para una fraccion que ocupa el lugar* n, *lo será igualmente para la que ocupa el lugar* n+1.

Con este objeto supongamos que $q^{(n)\prime}$ sea el denominador en que nos detengamos en la fraccion continua para obtener la fraccion del lugar (n) que representarémos por $\frac{R}{R'}$; y sean $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, las fracciones que preceden á $\frac{R}{R'}$.

Si suponemos verdadera esta lei para la fraccion $\frac{R}{R'}$, se tendrá

$$R=Qq^{(n)\prime}+P;\ R'=Q'q^{(n)\prime}+P';\ \text{y}\ \frac{R}{R'}=\frac{Qq^{(n)\prime}+P}{Q'q^{(n)\prime}+P'}.$$

Para formar la fraccion siguiente, observarémos que para pasar de una fraccion á su inmediata, se ha remplazado el denominador en que nos habíamos detenido, por este mismo denominador aumentado del cociente 1 dividido por el denominador siguiente; por lo que para pasar de la fraccion $\frac{R}{R'}$, á la que la sigue, bastará en $\frac{R}{R'}$ poner $q^{(n)\prime}+\frac{1}{q^{(n+1)\prime}}$ en vez de $q^{(n)\prime}$, siendo $q^{(n+1)\prime}$ el denominador siguiente ó el cociente que ocupa el lugar $n+1$; de manera que se tendrá

$$\frac{Q\left(q^{(n)\prime}+\frac{1}{q^{(n+1)\prime}}\right)+P}{Q'\left(q^{(n)\prime}+\frac{1}{q^{(n+1)\prime}}\right)+P'}=\frac{(Qq^{(n)\prime}+P)q^{(n+1)\prime}+Q}{(Q'q^{(n)\prime}+P')q^{(n+1)\prime}+Q'}=\frac{Rq^{(n+1)\prime}+Q}{R'q^{(n+1)\prime}+Q'}.$$

Así, la lei anterior teniendo lugar para la del lugar n, le tendrá para la del $n+1$; pero hemos visto, que se verificaba para la 4.ª fraccion; luego se verificará tambien para la 5.ª, 6.ª, &c., y en general para la que ocupa un lugar cualquiera.

Puesto que cada numerador de las reducidas es igual al de la fraccion precedente multiplicado por el denominador de la fraccion en que uno se ha detenido en la fraccion continua, mas el numerador de la fraccion que precede dos lugares, y que lo mismo sucede con los denominadores; se sigue que los términos de las fracciones aproximativas ó reducidas irán siempre creciendo.

Veamos ahora hasta que punto se aproximan estas fracciones á la cantidad desenvuelta en fraccion continua; y así nos propondrémos *determinar* 1.° *la diferencia que existe entre estas fracciones y* 2.° *la que se halla entre cada una de estas fracciones y la primitiva.*

Sean $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$........ $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ las reducidas de la continua, tomando sucesivamente un término mas de esta. Antes de buscar la diferencia entre estas fracciones, es necesario saber cual de las dos fracciones consecutivas es mayor. Para esto recurrirémos á su formacion, observando el modo con que se han sacado de la fraccion continua $q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{1}{q'''+\&c.}}}$

Pero la primera $\frac{A}{A'}$ no representa de $\frac{M}{N}$ sino la parte q, por lo que no hai duda que será menor que $\frac{M}{N}$.

Ahora $\frac{B}{B'}=q+\frac{1}{q'}$; y como q' es un denominador menor que el verdadero, la fraccion $\frac{1}{q'}$ será mayor que la primitiva; por consiguiente se tendrá $\frac{B}{B'}>\frac{M}{N}$ y con mayor razon $\frac{B}{B'}>\frac{A}{A'}$.

Semejantemente $\frac{C}{C'}=q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''}}$. Pero siendo q'' un denominador menor de lo que corresponde, la fraccion $\frac{1}{q''}$ será mayor de lo que debe; y el denominador $q'+\frac{1}{q''}$ será mayor; por lo que la fraccion $\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''}}$ será menor; y la espresion total $q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''}}$ lo será tambien; luego se tiene $\frac{C}{C'}<\frac{M}{N}$; y con mayor razon $\frac{C}{C'}<\frac{B}{B'}$.

Continuando del mismo modo se verá que $\frac{D}{D'}$ ó ....

$q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{1}{q'''}}}$ seria mayor; por lo que $\frac{D}{D'}>\frac{M}{N}$, y $\frac{D}{D'}>\frac{C}{C'}$.

Donde vemos, que tomando siempre una fraccion mas en el desarrollo se tendrán fracciones alternativamente menores y mayores que la primitiva. De donde se sigue *que las fracciones que ocupan lugar impar son menores que la propuesta* $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, *y las que ocupan lugares pares, son mayores* (*).

Luego todas se podrian escribir como sigue:

$$\frac{A}{A'},\ \frac{C}{C'},\ \frac{E}{E'}\ldots\ldots\frac{M}{N}\ldots\ldots\frac{D}{D'},\ \frac{B}{B'}.$$

Nos falta ahora *determinar la diferencia que hai realmente entre las fracciones reducidas ó aproximativas, y hasta que punto estas se acercan á la primitiva.*

Se tendrá primero $\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}=\frac{BA'-B'A}{B'A'}$; espresion cuyo numerador puede ser susceptible de simplificacion; sustituyendo en ella en vez de A, A', B y B' sus valores.

Pero $A=q$, $A'=1$, $B=Aq'+1=qq'+1$, y $B'=A'q'=q'$

Luego $A'B-AB'=1$, y $\frac{B}{B'}-\frac{A}{A'}=\frac{1}{A'B'}$.

Del mismo modo se tendrá

$$\frac{C}{C'}-\frac{B}{B'}=\frac{CB'-BC'}{B'C'}=-\frac{1}{B'C'},\ \text{y}\ CB'-BC'.=-1.$$

Para asegurarnos de la generalidad de la lei que existe entre las diferencias de dos fracciones consecutivas, raciocinarémos como ántes y supondrémos que esta lei se verifique para dos fracciones consecutivas $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, y veamos si se estiende á las dos fracciones $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$, igualmente consecutivas.

Pues que se supone verdadera la lei para las fracciones $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, tendrémos $\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\pm\frac{1}{Q'P'}$, y $P'Q-PQ'=\pm 1$, correspondiendo el

(*) *En el* § 131 *sacamos la consecuencia contraria; pero era porque suponíamos que la fraccion primitiva era propia; y que empezaba por* $\frac{1}{q'+\&c.}$ *y lo hemos hecho ahora de intento suponiendo que era impropia para que se tenga en todos los casos.*

signo $+$ cuando la fraccion que se resta es de lugar ímpar, y el $-$ cuando es de lugar par.

Pero las fracciones $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$ dan $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{RQ'-R'Q}{Q'R'}$; por lo que solo necesitamos investigar si $RQ'-QR'=\mp 1$; y como esta verificacion debe depender de la suposicion hecha de ser $QP'-PQ'=\pm 1$, sustituyamos los valores de R y R' dados en P, Q y en P', Q'.

Pero $R=Qq^{(n)\prime}+P$, y $R'=Q'q^{(n)\prime}+P'$; luego se tendrá $RQ'=QQ'q^{(n)\prime}+PQ'$, $QR'=QQ'q^{(n)\prime}+QP'$; y por consiguiente $RQ'-QR'=PQ'-QP'=\mp 1$.

Luego se tendrá generalmente $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\mp\frac{1}{Q'R'}$; *correspondiendo el signo* $+$ *cuando la fraccion restada ocupa lugar ímpar, y* $-$ *cuando par, observando ademas que es necesario siempre sustraer una fraccion de la que le sigue inmediatamente, y que los signos de las diferencias mudarian, si se quitase al contrario cada fraccion de la que le precede un lugar.*

Pues que en virtud de la lei que guardan las fracciones resultantes de una fraccion continua, los denominadores van creciendo, se sigue que la diferencia $\frac{1}{Q'R'}$ entre dos fracciones consecutivas irá siempre menguando; y como el valor de la primitiva se ha de hallar siempre entre dos fracciones consecutivas, la diferencia entre la primitiva y cualquiera de ellas será menor que $\frac{1}{Q'R'}$, y con mas razon menor que $\frac{1}{Q'^2}$, pues que $Q'<R'$.

Luego se puede concluir, *que dos fracciones aproximativas, y consecutivas de una fraccion continua difieren tanto ménos la una de la otra, cuantos mas términos se toman de la fraccion continua; y que entre la cantidad desenvuelta en fraccion y una de las fracciones aproximativas sacadas de este desarrollo, la diferencia en mas ó en ménos es siempre menor que la unidad dividida por el cuadrado del denominador en la fraccion aproximativa.*

Se debe notar que en la ecuacion $RQ'-QR'=\mp 1$ los términos R y R', Q y Q' no pueden tener ningun divisor comun; porque si le tuviesen seria preciso que 1 fuese divisible por este divisor, lo que es imposible.

Así, las *fracciones reducidas ó aproximativas de una fraccion continua son siempre irreducibles, y se hallan por consiguiente bajo la forma mas simple.*

De donde resulta que *si se desenvuelve en fraccion continua una fraccion cuyos dos términos no son primeros entre sí, y despues se for-*

man todas las reducidas hasta la última inclusive, no se volverá á encontrar la fraccion propuesta bajo su forma primitiva, sino esta misma fraccion reducida á su mas simple espresion, es decir, *desembarazada del mayor comun divisor entre sus dos términos.*

En efecto, desenvolviendo la $\frac{348}{924}$, se tiene $\frac{348}{924}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9}}}}}$

y las reducidas son $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{29}{77}$.

Donde se ve que la $\frac{29}{77}$ equivale á $\frac{348}{924}$ despojada del mayor comun divisor 12 que tienen sus dos términos.

Propongámonos ahora *determinar la diferencia que existe entre las fracciones alternativas de las* $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}\ldots\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ &c.

Es decir, propongámonos hallar la espresion de $\frac{R}{R'}-\frac{P}{P'}$; y pues que $R=Qq^{(n)\prime}+P$ y $R'=Q'q^{(n)\prime}+P'$, si sustituimos se tendrá $\frac{R}{R'}-\frac{P}{P'}=$

$$\frac{Qq^{(n)\prime}+P}{Q'q^{(n)\prime}+P'}-\frac{P}{P'}=\frac{q^{(n)\prime}}{P'(Q'q^{(n)\prime}+P')}=\frac{q^{(n)\prime}}{P'R'}.$$

Propongámonos ahora *investigar si entre las reducidas es posible intercalar algunas fracciones mas simples y tan aproximadas como las primeras á la cantidad desenvuelta.*

Para esto, supongamos que $\frac{r}{r'}$, sea una fraccion intercalada entre $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$, tal que se tenga $r<R$ y $r'<R'$; y pues que suponemos que $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{r}{r'}$, $\frac{R}{R'}$ sean tres fracciones que han provenido de la fraccion continua, se tendrá en virtud de lo que precede $\frac{Q}{Q'}-\frac{r}{r'}=\frac{1}{Q'r'}$, $\frac{r}{r'}-\frac{R}{R'}=\frac{1}{r'R'}$, y $\frac{Q}{Q'}-\frac{R}{R'}=\frac{1}{Q'R'}$ y será $\frac{1}{Q'r'}<\frac{1}{Q'R'}$ ó $Q'R'<Q'r'$ ó $R'<r'$.

Mas para que la fraccion $\frac{r}{r'}$ se aproxime mas á $\frac{M}{N}$ que $\frac{R}{R'}$, es preciso que se tenga $\frac{r}{r'}>\frac{R}{R'}$, ó $\frac{rR'}{r'R'}>\frac{r'R}{r'R'}$ y $rR'>r'R$; y pues acabamos de ver que $R'<r'$, se deberá verificar que $r>R$.

Así, los términos de la fraccion $\frac{r}{r'}$ mas próxima á $\frac{M}{N}$ que $\frac{R}{R'}$, no podrian ser ambos menores que los de esta última fraccion.

Propongámonos por último *investigar si entre todas las fracciones de las que las unas son mayores que* $\frac{M}{N}$ *y las otras menores, se podria hacer una intercalacion semejante*, es decir, que nos proponemos intercalar entre dos fracciones alternativas cualesquiera $\frac{P}{P'}$ y $\frac{R}{R'}$ una fraccion mas próxima de $\frac{M}{N}$ que lo es $\frac{P}{P'}$, y que sin embargo se componga de términos mas sencillos que los de la fraccion $\frac{P}{P'}$.

Hemos hallado ántes $\frac{R}{R'}-\frac{P}{P'}=\frac{q^{(n)\prime}}{R'P'}$; y como cualquiera otra fraccion cuya diferencia con una de estas fracciones fuese $\frac{h}{R'P'}$, teniendo $h<q^{(n)\prime}$, caeria necesariamente entre las fracciones $\frac{P}{P'}$ y $\frac{R}{R'}$; resulta que todos los valores inferiores á $q^{(n)\prime}$ deben dar lugar á fracciones intermedias. Pero siendo $\frac{R}{R'}=\frac{Qq^{(n)\prime}+P}{Q'q^{(n)\prime}+P'}$, si hacemos sucesivamente $q^{(n)\prime}=1$, $=2$, $=3$, $=4\ldots=q^{(n)\prime}-1$, se tendrán las fracciones intermedias $\frac{Q+P}{Q'+P'}$, $\frac{2Q+P}{2Q'+P'}$, $\frac{3Q+P}{3Q'+P'}$, $\frac{(q^{(n)\prime}-1)Q+P}{(q^{(n)\prime}-1)Q'+P'}$, cuyos términos van creciendo.

No nos falta mas que *buscar la diferencia entre dos de estas fracciones consecutivas*, para asegurarnos de si no se podrian aun intercalar otras mas simples.

Pero esto será verdadero para dos fracciones consecutivas cualesquiera, si lo es para estas $\frac{(q^{(n)\prime}-1)Q+P}{(q^{(n)\prime}-1)Q'+P'}$, $\frac{q^{(n)\prime}Q+P}{q^{(n)\prime}Q'+P'}$.

Luego buscando la diferencia de estas se tendrá despues de la reduccion de los términos semejantes.

$$\frac{P'Q-PQ'}{[(q^{(n)\prime}-1)Q'+P'][(q^{(n)\prime}Q'+P')]}=\frac{\mp 1}{[(q^{(n)\prime}-1)Q'+P'][(q^{(n)\prime}Q'+P')]}$$

De donde concluirémos que las fracciones intermedias así determinadas, espresarán con la mayor sencillez los valores aproximados de la cantidad propuesta $\frac{M}{N}$.

APÉNDICE 5.°

Deduccion de las fórmulas generales para el despejo de las incógnitas en las ecuaciones determinadas de primer grado; y resolucion del problema de los corréos.

Aunque hemos dado á conocer los métodos que hai para el despejo de las incógnitas, no será inoportuno el manifestar las fórmulas generales de que se puede hacer uso en la resolucion de las cuestiones.

La ecuacion mas general del primer grado entre dos incógnitas es $ax+bz=c$ (1).

Con esta sola ecuacion no podemos determinar las dos incógnitas. Pero si tuviésemos tambien $a'x+b'z=c'$ (2), se podria entónces sustituir en esta el valor de x sacado de la 1.ª; y la ecuacion resultante, no teniendo ya mas de una incógnita, podria resolverse por el método espuesto (223).

Efectuando el cálculo, se tiene primero $x=\frac{c-bz}{a}$ (3); cuyo valor sustituido en la segunda, dará despues de la simplificacion $z=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$ (4).

Sustituyendo este valor en la (3) se halla

$$x=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\times\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \quad (5).$$

De manera que las espresiones de las incógnitas son

$$z=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'} \text{ y } x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

Examinando las ecuaciones (1 y 2) es fácil ver que si una de las incógnitas hubiese tenido en cada ecuacion la unidad por coeficiente, ó coeficientes iguales, se hubieran podido restar las dos ecuaciones una de otra; lo que hubiera dado una sola incógnita. La dificultad se reduce á hacer de modo que una de las incógnitas tenga un mismo coeficiente sin alterar la ecuacion.

Pero dividiendo todos los términos de la (1) por a y los de la (2) por a', se tendrá

$x+\frac{b}{a}z=\frac{c}{a}$ (6); $x+\frac{b'}{a'}z=\frac{c'}{a'}$ (7); y restando la (7) de la (6) será $\left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)z=\frac{c}{a}-\frac{c'}{a'}$, ó $(ba'-ab')z=ca'-ac'$ (8).

Haciendo lo mismo con relacion á z, se hallará $(ab'-ba')x=cb'-bc'$ (9); que da $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$ (10), que es el mismo valor hallado ántes por la sustitucion; pero la (8) da $z=\frac{ca'-ac'}{ba'-ab'}$ valor que solo difiere del encontrado ya por los signos de cada término.

Pero es fácil de hacer que estos signos resulten los mismos observando que si se hubiese restado al contrario la (6) de la (7), se hubiera obtenido $(ab'-ba')z=ac'-ca'$; de donde $z=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$ (11) que es igual en todo á la (4).

Tambien se pudieran haber hecho iguales los coeficientes de una de las incógnitas, multiplicando todos los términos de cada ecuacion por el coeficiente de la misma incógnita en la otra ecuacion; y entónces se hubiera encontrado

$$\begin{array}{ll|ll} aa'x+ba'z=ca' & (12) & ab'x+bb'z=cb' & (14) \\ aa'x+ab'z=ac' & (13) & ba'x+b'bz=bc' & (15) \end{array}$$

y restando cada una de su precedente, se hallará el mismo resultado que ántes.

Este último método es mas simple que el primero, porque hace desaparecer al mismo tiempo los términos fraccionarios.

Si se observan con atencion los valores hallados de x y de z *se verá que para obtenerlos, basta tomar las letras* a *y* b *que forman los coeficientes de las incógnitas; multiplicar estas letras una por otra, lo que da* ab; *hacer mudar de lugar á dichas letras; escribir esta permutacion* ba *con el signo — á continuacion del primero* y *poner un acento á cada segunda letra; de donde resulta el denominador que entra en el valor de cada incógnita.*

En cuanto al numerador, se deduce del denominador remplazando en este último la letra del coeficiente de la incógnita con la letra que en las ecuaciones propuestas no está multiplicada por ninguna incógnita.

Supongamos que se tengan ahora las tres incógnitas en las tres ecuaciones siguientes.

$ax+bz+cu=d$ (16), $a'x+b'z+c'u=d'$ (17), y $a''x+b''z+c''u=d''$ (18).

Aquí, se podrian emplear los mismos métodos de que hemos hecho uso en el caso anterior; pero nos valdrémos del último por ser mas breve; y así para eliminar u multiplicarémos la (16) por c', y la (17) por c y quitando este producto del primero tendrémos

$$(ac'-ca')x+(bc'-cb')z=dc'-cd' \quad (19).$$

Multiplicando la (17) por c'', y la (18) por c', y restando este producto del anterior, será

$$(a'c''-c'a'')x+(b'c''-c'b'')z=d'c''-c'd'' \quad (20).$$

Actualmente para eliminar z es necesario multiplicar la ecuacion (19) por $b'c''-c'b''$, y la (20) por $bc'-cb'$, y restar este segundo producto de su anterior, lo que da

$$[(ac'-ca')(b'c''-c'b'')-(a'c''-c'a'')(bc'-cb')]x= \ldots .$$
$$(dc'-cd')(b'c''-c'b'')-(d'c''-c'd'')(bc'-cb') \quad (21),$$

ó efectuando los cálculos, reduciendo y dividiendo todos los términos por c', será $(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')x=db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''$ que da

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''} \quad (22).$$

Efectuando cálculos análogos para eliminar x y z, x y u, se hallará

$$z=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''} \quad (23)$$

$$u=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''} \quad (24).$$

Observando el modo regular de que se forman las espresiones de las incógnitas, se sacará la regla siguiente.

Para tener el denominador comun á los valores de las tres incógnitas, tómense primero las dos letras a *y* b *que forman los coeficientes de dos de las incógnitas, y háganse las dos permutaciones, de las que la segunda se restará de la primera, y tendrémos* ab—ba. *Tomando despues la primera permutacion* ab, *escríbase á su derecha la letra* c *coeficiente de la tercera incógnita, y tendrémos* abc. *Hágase pasar sucesivamente la letra* c *al segundo y al primer lugar: lo que dará* abc, acb, cab. *Hágase lo mismo con relacion á* ba *y se tendrá* bac, bca, cba. *Escríbanse estas espresiones á continuacion de las primeras, déseles alternativamente el signo + y el signo —; aféctese cada segunda letra de un acento y cada tercera de dos, y tendrémos el denominador buscado.*

En cuanto al numerador, bastará mudar en el denominador la letra del coeficiente de la incógnita que se quiere determinar poniendo la letra que en las ecuaciones no multiplica á ninguna de las incógnitas.

Si de estas fórmulas hiciéramos aplicacion al problema 12.º (§ 336), hallaríamos los mismos resultados que allí pusimos.

Por este mismo método podríamos sacar fórmulas generales para cuando fuesen mas las ecuaciones y las incógnitas; pero los resultados van siendo mui complicados.

Mr. *Desnanot* ha publicado en el año de 1819 un complemento de la teoría de las ecuaciones de primer grado: y su objeto es el manifestar que este método que acabamos de esponer suministra unas fórmulas que aunque preciosas para la análisis, son sin embargo casi inútiles cuando se quieren aplicar á la resolucion de las ecuaciones por lo complicado de las operaciones que hai que practicar; pues en el caso de que fuesen seis las ecuaciones, se tendrian que calcular 5040 términos de á seis factores cada uno, ántes de hallar los valores de las incógnitas.

Dicho autor presenta un medio mas sencillo que el que usan los demas autores para calcular los términos, y usa de un artificio particular para señalar de un modo ménos complicado los numeradores y denominadores; así es que los valores generales de x, z, u, que hemos deducido ántes, los indica de este modo, que es mucho mas sencillo.

$$x=\frac{\overset{0}{d}\,\overset{1}{b}\,\overset{2}{c}}{\overset{0}{a}\,\overset{1}{b}\,\overset{2}{c}},\quad z=\frac{\overset{0}{a}\,\overset{1}{d}\,\overset{2}{c}}{\overset{0}{a}\,\overset{1}{b}\,\overset{2}{c}},\quad u=\frac{\overset{0}{a}\,\overset{1}{b}\,\overset{2}{d}}{\overset{0}{a}\,\overset{1}{b}\,\overset{2}{c}}$$

en los cuales el número que hai encima de cada letra, señala el de los acentos que tiene.

En esta obrita hace algunas observaciones importantes y deduce en general que el número de casos en que el denominador es cero cuando haya n ecuaciones, está espresado por

$$2n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 4}+\&c.\ldots-1.$$

Terminarémos este asunto resolviendo el problema que se conoce con el nombre de los *corréos*, el cual se halla en la mayor parte de los libros elementales, y le ponen sus autores con el objeto de deducir varias consecuencias. Pero nosotros que hemos manifestado en el prólogo que el deducir de ejemplos particulares las reglas generales, es sumamente vicioso, y está impugnado con mucho fundamento por Laplace, Suzanne, Reynaud, &c.; y que por otra parte estamos convencidos de que de este modo se confunde el objeto del problema, y de que el presentar unas cuestiones subordinadas á otras es sumamente embarazoso para los principiantes, y en realidad lo que se consigue únicamente es eludir las dificultades, y no ocuparse directamente de la cuestion; le resolverémos del modo que lo hace Mr. *Bois-Bertrand*, que es en nuestro concepto el que le trae de un modo mas adecuado en el tomo 1.º de su obra página 219; y es como sigue:

» *Dos corréos están á una distancia* d *uno de otro; sus velocidades* *están designadas por* v′ *y* v″ ; *el primero parte* h *horas ántes que el segundo y se supone que siguen el mismo camino: se pregunta* 1.° *cuales son las condiciones necesarias para que se encuentren*; 2.° *cuanto tiempo pasará ántes de que esto se haya verificado*; *y* 3.° *el espacio corrido por cada uno de ellos en la época de la reunion.*

» Es visible que se encontrarán en las circunstancias siguientes: 1.° Si ellos marchan en el mismo sentido, si el primero va delante y su velocidad es menor que la del segundo. 2.° Si marchando en el mismo sentido, el primero está detras, y su velocidad sin ser mayor que la del segundo, es sin embargo bastante grande para que pueda correr la distancia d en el tiempo h. 3.° En fin, si los dos van al encuentro el uno del otro, cualesquiera que sean sus velocidades.

» Verémos como la análisis responde á estas circunstancias. Ocupémonos de la investigacion de las dos cantidades que se piden, y ensayemos primero determinar el tiempo que se debe pasar ántes que los corréos se reunan.

» Representemos por t esta cantidad de tiempo; el primer corréo teniendo una velocidad espresada por v', es decir, corriendo un espacio v' en la unidad de tiempo, habrá corrido entónces un camino tv'; y si se supone que llevase la delantera d, habrá llegado á una distancia $tv'+d$ del punto de partida del segundo corréo.

» El segundo corréo teniendo una velocidad v'' hubiera corrido una distancia tv'' si hubiese partido al mismo tiempo que el primero; pero como sale h horas despues que él, no habrá caminado sino durante un tiempo igual con $t-h$, cuando este haya caminado durante el tiempo t; así, el camino que habrá corrido será $(t-h)v''$. Luego se tendrá:

$$tv'+d=(t-h)v'', \text{ de donde } t=\frac{d+hv''}{v''-v'}.$$

» Si se quiere conocer actualmente el espacio corrido por el primer corréo, se observará que este espacio es tv', y que por consiguiente representándole por E', se tiene $E'=\dfrac{(d+hv'')v'}{v''-v'}$.

» En cuanto al que haya corrido el segundo corréo, es igual con $(t-h)v''$, es decir, que designándole por E'', se tendrá $E''=\dfrac{(d+hv')v''}{v''-v'}$ despues de hecha la reduccion: tales son las espresiones generales de las cantidades pedidas, en la hipótesis de que el primer corréo lleve de delantera la cantidad d.

» Examinemos ahora las diversas circunstancias que pueden presentarse, y veamos en que se convierten estas espresiones generales en estas diversas hipótesis. Verémos despues lo que dicen estas mismas fórmulas cuando los corréos no se pueden encontrar.

» Si al principio se supone que el primer corréo, en vez de ir delante la cantidad d, esté al contrario atrasado la misma cantidad, será necesario mudar su signo en la espresion de t, y por consiguiente tambien en los valores de E' y de E''; porque si este primer corréo está detras la cantidad d, en lugar de haber llegado á una distancia $tv'+d$ del punto de partida del segundo corréo en el momento de la reunion, no habrá llegado sino á una distancia $tv'-d$. Luego se tendrá la ecuacion $tv'-d=(t-h)v''$ en lugar de la $tv'+d=(t-h)v''$; así, el signo de d debe mudar en la espresion de t, y por consiguiente tambien en las de E' y E'', es decir, que estas espresiones se convertirán en

$$t=\frac{hv''-d}{v''-v'},\quad E'=\frac{(hv''-d)v'}{v''-v'},\quad E''=\frac{(hv'-d)v''}{v''-v'}.$$

» Esto nos conduce á una nota importante y general sobre la naturaleza de los signos: consiste en que el signo de una cantidad destinada á representar la magnitud numérica de una distancia debe mudar siempre que esta distancia toma una direccion contraria. Esto es precisamente lo que sucede aquí, porque la distancia d, en los dos casos que acabamos de considerar, está tomada en sentidos opuestos. Supongamos, para fijar las idéas, que los dos corréos caminen del norte al medio dia; el primer corréo estando delante en el primer caso, la distancia d principia en el punto de partida del segundo corréo, y va del norte al medio dia. En el segundo caso, al contrario, el primer corréo estando detras, la distancia d principiando siempre en el punto de partida del segundo corréo, va del medio dia al norte; luego se halla entónces en un sentido directamente opuesto. La análisis espresa esta oposicion de circunstancias por una oposicion de signos. Recíprocamente, la oposicion de signos anuncia la oposicion de direcciones. Porque si la cantidad muda de signo en las espresiones en que entra, ella muda igualmente en la ecuacion de que estas espresiones han sido deducidas; de donde es necesario concluir que el enunciado de que esta ecuacion es la traduccion algebráica ha padecido una modificacion en virtud de la cual d, en vez de ser añadida á tal ó tal distancia, debe ser quitada de ella, y *vice-versa*; lo que no puede ser sino en tanto que esté referida en un sentido de todo punto contrario.

» Veamos ahora como la análisis responde á las diversas circunstancias de que hemos hablado ántes de pasar á la solucion del problema.

1.° Supongamos que los corréos vayan en el mismo sentido, que el primero lleve la delantera, y camine ménos velozmente que el segundo.

» Para espresar analíticamente estas circunstancias, es necesario conservar al principio á d el signo $+$, es decir, tomar los valores

$$t=\frac{hv''+d}{v''-v'},\quad E'=\frac{(hv''+d)v''}{v''-v'},\quad E''=\frac{(hv'+d)v''}{v''-v'},$$

y suponer en estas fórmulas que $v''>v'$, es decir, que $v''-v'$ es una cantidad positiva; entónces los tres valores son positivos y finitos; espresan las tres cosas pedidas y el problema es posible.

» Si se supusiese, al contrario, que la velocidad del primer corréo fuese mayor que la del segundo, teniendo aquel la delantera y partiendo ántes, así como lo espresa el enunciado del problema, es claro, que el segundo corréo léjos de poderle alcanzar, permaneceria á una distancia cada vez mayor. En esta hipótesis en que d permanece positiva, y en que v'' es $< v'$, la diferencia $v''-v'$ que sirve de denominador á las tres espresiones viene á ser negativa, de modo que estas tres espresiones lo vienen á ser igualmente. Así, la análisis anuncia la imposibilidad de la cuestion por valores negativos; ella manifiesta al mismo tiempo que esta misma cuestion vendria á ser posible, si se mudase el signo de la cantidad $v''-v'$, es decir, si fuese $v''>v'$ en lugar de $v''<v'$, como lo hemos visto en los problemas precedentes.

» Si fuese en fin $v''=v'$, suponiendo siempre d positiva, es claro que los dos corréos no podrian jamas encontrarse; y la análisis anuncia esta imposibilidad por los valores infinitos

$$t=\frac{hv''+d}{0},\quad E'=\frac{(hv''+d)v'}{0},\quad E''=\frac{(hv'+d)v''}{0},$$

de las cuales la primera dice que los corréos caminarán durante un tiempo infinito sin reunirse, y las otras dos manifiestan, que andarán un camino infinito. Pero aquí la imposibilidad no viene ya de un enunciado puesto en sentido contrario; ella no puede dejar de tener lugar suponiendo que estas cantidades mudan de algun modo sus funciones respectivas, como se verificaba ántes; y se reconoce por esto que diferencia se debe establecer entre las soluciones negativas, que en los problemas de primer grado no anuncian sino una imposibilidad dependiente del oficio, que hacen las cantidades dadas, es decir, de sus valores relativos, y los valores infinitos que anuncian una imposibilidad dependiente de las magnitudes absolutas de estas mismas cantidades.

2.° »Si los corréos caminan siempre en el mismo sentido, y el primero está detras, las espresiones serán como hemos dicho

$$t=\frac{hv''-d}{v''-v'},\quad E'=\frac{(hv''-d)v'}{v''-v'},\quad E''=\frac{(hv''-d)v''}{v''-v'}.$$

» Si se supone que la distancia hv' que el primer corréo anda en el tiempo h durante el cual el segundo corréo, aun no camina, sea mayor que d ó aun igual con d, este primer corréo se habrá reunido con el segundo ántes que este haya partido. La análisis da un resultado siempre positivo en este caso; en efecto, en ambas hipótesis, la cantidad v'' debe ser considerada como igual con cero, pues que el primer corréo habrá alcanzado al segundo al cabo del tiempo t, ántes que este haya podido partir; de donde se sigue que la velocidad v'' de este segundo corréo es nula durante este tiempo t; luego la espresion de t se reduce á $t=\frac{-d}{-v'}=\frac{d}{v'}$, cantidad positiva igual con h en la hipótesis de $hv'=d$, y menor que h en la de $hv'>d$.

» Si los dos corréos caminan al encuentro el uno del otro, la espresion del camino andado por el primero en la unidad de tiempo estará afecta de un signo contrario; así los valores de t, E' y E'' vendrán á ser

$$t=\frac{hv''+d}{v''+v'},\quad E'=\frac{-(hv''-d)v'}{v''+v'},\quad E''=\frac{v''(d-hv')}{v''+v'}.$$

» La espresion de t es positiva; así la análisis anuncia que los corréos se encontrarán: la de E' es negativa, por lo mismo que ella era positiva en el primer caso en que el primer corréo marchaba en el sentido opuesto. En fin, la espresion de E'' es positiva, igual con 0, ó negativa segun sea $d>hv'$ ó $d=hv'$, ó $d<hv'$; y esto debia suceder; porque si $d=hv'$, el primer corréo ha corrido en el tiempo h que tiene de delantera, todo el camino d que le separa del segundo; si d es $>hv'$, no habrá tenido bastante tiempo para correr todo este espacio y quedará camino que andar al segundo corréo; pero si d es $< hv'$, el espacio corrido por el primer corréo durante el tiempo de delantera h será mayor que la distancia d, que le separaba del segundo; luego le habrá pasado; y la reunion estará ya verificada cuando $t=h$ lo que corresponde á $v''=0$, $dv'=h$, $E'=d$ y $E''=0$; pero podria verificarse otra vez si el segundo corréo tomase en el instante de su partida una direccion contraria á la que se le supone, y para esta segunda reunion es para la que el valor de E'' es negativo.

» Habria todavía un gran número de circunstancias particulares que examinar; pero este exámen, por otra parte minucioso, es bastante fácil al presente para que sea necesario entrar en mayores detalles. Yo no hablaré mas que de un solo caso que presenta un resultado interesante; es aquel en que se supone que los corréos parten del mismo punto, caminan en el mismo sentido y con la misma velocidad. Entónces se tiene $d=0$, $h=0$, $v''=v'$, y la espresion $t=\frac{hv''+d}{v''-v'}$ se reduce á $\frac{0}{0}$. La razon de esto es que los dos corréos caminan siempre juntos, su punto de reunion se verifica en todos los parages, y el problema queda resuelto entónces por cualquier valor que tenga t.

» El método que acabamos de seguir en el exámen de estas diversas circunstancias no es hablando propiamente el analítico. Este consistiria en hacer hipótesis particulares sobre las cantidades d, h, v' y v'', y ver lo que vienen á ser las espresiones de t, de E' y de E'' en estas mismas hipótesis, y deducir de ellas las diversas modificaciones correspondientes que el enunciado de la cuestion debe padecer. Hemos hecho precisamente lo contrario; pero hemos dicho lo suficiente para que el lector pueda ejercitarse por sí en este género de consideraciones.

» Resumiendo lo dicho sobre las ecuaciones de primer grado de una sola incógnita, se reconoce: 1.° Que una ecuacion del primer grado de una sola incógnita no puede admitir sino una sola raiz. 2.° Que si esta raiz es positiva, y el enunciado del problema no encierra otra condicion que la que se ha escrito algebráicamente en la ecuacion (verémos porque se ha de poner esta restriccion), el problema es posible, y el valor hallado satisface á él. 3.° Que si este valor es negativo, el enunciado del problema está mal espresado, y la condicion que encierra no es posible sino en tanto que se toman los datos ó algunos de ellos en la acepcion contraria ó que cambian de algun modo sus funciones. 4.° Que si este valor se presenta bajo la forma $\frac{1}{0}$, la imposibilidad del problema no se refiere al papel que ejercen las cantidades dadas en el enunciado, sino á los valores absolutos. 5.° Que si este valor se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$ el problema es indeterminado.

» Acabamos de decir que el valor de la incógnita satisfaria al problema si su enunciado no encerrase otra condicion, que la que se hubiese escrito algebráicamente en el enunciado de la cuestion. Es fácil de ver que esta restriccion es en efecto necesaria; porque el enunciado de un problema impone algunas veces á la incógnita una cierta condicion que no se sabria escribir algebráicamente y que no puede por consiguiente estar comprendida en la ecuacion. El valor de la incógnita que se haya sacado de la ecuacion satisfará á la condicion que espresa esta ecuacion; pero no satisfará siempre á la condicion que no estaba comprendida en ella.

» Supongamos por ejemplo que se pide dividir el 11 en dos números enteros cuya diferencia sea 8. Representando la primera parte por x, la segunda será $11-x$ y la diferencia de estas dos cantidades siendo $11-2x$, se tendrá $11-2x=8$, que da $2x=3$ ó $x=\frac{3}{2}$. Este valor satisface á la ecuacion de que se ha deducido; pero no á las dos condiciones del problema, pues que es fraccionario. Esto proviene de que no se ha podido escribir en la ecuacion la condicion de que x fuese un número entero: con esta segunda condicion el problema viene á ser imposible; pero la condicion espresada en la ecuacion puede quedar satisfecha, y he aquí porque el Álgebra da un valor positivo.

» Es necesario concluir de aquí *que un problema imposible del primer grado conduce frecuentemente á una ecuacion de la cual se deduce un valor positivo para la incógnita*; pero este valor no satiface sino á la condicion posible que está espresada por la ecuacion. No se hubiera hallado si se hubiesen podido escribir en la ecuacion todas las condiciones del enunciado."

APÉNDICE 6.°

Resolucion de las ecuaciones de 3.^er grado, y de las que, siendo de un grado mas elevado, pueden resolverse por el método de ellas.

Toda ecuacion de 3.^er grado ha de estar comprendida en una de las cuatro formas siguientes:

$$x^3+p=0\ldots\ldots\ldots(1)\qquad x^3+px^2+q=0\ldots\ldots(3)$$
$$x^3+px+q=0\ldots\ldots(2)\qquad x^3+px^2+qx+r=0\ldots(4)$$

Si en la 1.ª pasamos la p al segundo miembro y estraemos la raiz 3.ª tendrémos $x=\sqrt[3]{-p}$; y como hemos visto (295) que todo radical de 3.^er grado tiene tres valores, y que los otros dos se sacan multiplicando este valor por $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, resultará que los tres valores de x en esta ecuacion son

$$\sqrt[3]{-p},\quad \sqrt[3]{-p}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \sqrt[3]{-p}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Pasemos ahora á la $x^3+px+q=0$.

De los diferentes métodos que se han inventado para resolver esta ecuacion, el mas adecuado es el siguiente: hagamos $x=u+z$, y sustituyendo este valor en ella tendrémos

$$u^3+3u^2z+3uz^2+z^3+pu+pz+q=0,$$

que podrémos poner bajo esta forma

$$u^3+z^3+q+(3zu+p)(u+z)=0\ (5).$$

Esta ecuacion quedará satisfecha si se verifica que

$$u^3+z^3+q=0\quad(6)\qquad 3zu+p=0\quad(7);$$

luego si determinamos los valores de u y de z de modo que satisfagan á estas dos ecuaciones, reuniendo luego estos valores, tendrémos los de x que satisfacen á la propuesta.

La última nos da $z=-\frac{p}{3u}$ (8); y sustituyendo este valor en la (6), se tiene $u^3-\frac{p^3}{27u^3}+q=0$ (9), que multiplicando por u^3 da

$u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0$ (10), y en virtud de lo espuesto (254) se tiene

$u^3=-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ (11); pero la ecuacion $u^3+z^3+q=0$, da

$z^3=-u^3-q=\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}-q=-\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ (12).

Donde observamos que el valor de z^3 no se diferencia del de u^3 sino en el signo del radical; por consiguiente cuando el uno deba tener el signo $+$, el otro deberá tener el signo $-$. En virtud de esta consideracion, podemos prescindir del signo de ambigüedad, con tal que tomemos el radical en u^3 con diferente signo que en z^3; luego si para u^3 tomamos el signo $+$, y para z^3 el signo $-$, y estraemos la raiz tercera de las ecuaciones (11 y 12) se tendrá

$$u=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\ \ (13)\qquad z=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\ \ (14)$$

y sustituyendo estos valores en el de x, será

$$x=u+z=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\ \ (15)$$

Para encontrar el valor de las otras dos raices, observarémos que de las ecuaciones (7 y 6) se saca $p=-3zu$, $q=-u^3-z^3$, cuyos valores sustituidos en la primitiva dan $x^3-3zux-u^3-z^3=0$; y dividiendo por $x-u-z$, se tiene $x^2+(u+z)x+u^2-zu+z^2=0$, que da (253)

$x=-\frac{u+z}{2}\pm\frac{(u-z)\sqrt{-3}}{2}$; ó separando los valores

$$x=-\frac{u}{2}-\frac{z}{2}+\frac{u}{2}\sqrt{-3}-\frac{z}{2}\sqrt{-3}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}u+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}z$$

$$x=-\frac{u}{2}-\frac{z}{2}-\frac{u}{2}\sqrt{-3}+\frac{z}{2}\sqrt{-3}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}u+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}z$$

De manera que espresando por x', x'', x''' las tres raices de la propuesta y sustituyendo en estos valores los de u y z, se tendrá

$$x'=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\ \ (16)$$

$$x''=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\ \ldots\ldots$$

$$+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\ \ (17)$$

$$x'''=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\ \ldots\ldots$$

$$+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\ \ (18)$$

Solo nos falta ya el resolver las dos ecuaciones

$$x^3+px^2+q=0,\qquad x^3+px^2+qx+r=0$$

Y para conseguirlo, no tenemos que hacer otra cosa mas que hacer desaparecer su segundo término, lo que se consigue en virtud de lo que se demuestra (T. II. § 368), sustituyendo en vez de x otra nueva incógnita z acompañada de la tercera parte del coeficiente del segundo término con el signo contrario al que lleva. Luego si hacemos $x=z-\frac{p}{3}$, tendrémos una ecuacion donde no se hallará el término donde esté x^2, y se encontrarán las tres raices por las ecuaciones (16, 17 y 18).

Si observamos la forma de los valores de x', x'', x''', notarémos, que si p es positiva, cualquiera que sea el signo de q, no se tendrá mas que la raiz x' que sea real, y las otras dos x'', x''' serán imaginárias; porque como el radical del tercer grado que hai por ejemplo en x''' no comprende una misma cantidad, no podrán destruirse enteramente los productos que resulten de ellos por $-\sqrt{-3}$ y $+\sqrt{-3}$, y quedará siempre alguna cantidad multiplicada por $\sqrt{-3}$; lo que hará (212) imaginária toda la espresion.

Pero si se tuviese $x^3-px+q=0$, esto es, que p fuese negativa, entónces el radical de segundo grado estaria espresado por $\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}$; el cual seria todavia real si $\frac{1}{4}q^2>\frac{1}{27}p^3$; y por lo mismo en este caso seria aun real el valor de x', é imaginários los de x'', y x'''; pero aparecerá tambien imaginário el valor de x' cuando $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$.

Así, en la ecuacion $x^3-px+q=0$, hai una raiz real y dos imaginárias si se tiene $\frac{1}{4}q^2>\frac{1}{27}p^3$; pero las tres raices se presentan al ménos esplícitamente bajo una forma imaginária, en el caso en que se tiene $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$.

Teniendo aquí imaginárias, que desenvolver en potencias fraccionarias, é imaginárias multiplicadas por raices en parte reales y en parte imaginárias, no podemos asegurar que los resultados serán reales ó imaginários; pero efectuando el desarrollo se halla por último que las raices solo contienen cantidades reales. Mas como los valores vienen espresados por un número indefinido de términos, solo se pueden hallar dichas raices por aproximacion. Por lo cual se llama *caso irreducible* á este caso singular en que las tres raices, aunque reales, no son susceptibles de tomar una forma finita.

Para hacer ver esta verdad, nos vemos precisados á buscar el desarrollo de las potencias fraccionarias; con cuyo objeto harémos $\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2=b^2$ y $-\frac{1}{2}q=a$; con lo cual quitando los radicales por medio de los esponentes fraccionarios, tendrémos que desenvolver estos valores.

$$x'=(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

$$x''=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

$$x'''=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

Lo que conseguirémos haciendo $n=\frac{1}{3}$, $x=a$, y $a=b\sqrt{-1}$, en la fórmula del binomio de Neuton hallada (302); pues aunque allí no la hemos demostrada sino para cuando n es un número entero positivo; sin embargo, se verifica tambien como demostrarémos por las series y por el cálculo infinitesimal cuando n es negativo, y cuando es fraccionario ya positivo, ya negativo: en este supuesto tendrémos sacando nueve términos del desarrollo, haciendo todas las reducciones, y sacando $a^{\frac{1}{3}}$ fuera de un paréntesis

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\Big(1+\tfrac{1}{3}.\frac{b}{a}.\sqrt{-1}+\frac{1}{9}.\frac{b^2}{a^2}-\frac{5}{3^4}.\frac{b^3}{a^3}.\sqrt{-1}-\frac{10}{3^5}.\frac{b^4}{a^4}$$
$$+\frac{22}{3^6}.\frac{b^5}{a^5}.\sqrt{-1}+\frac{154}{3^8}.\frac{b^6}{a^6}-\frac{374}{3^9}.\frac{b^7}{a^7}.\sqrt{-1}-\frac{935}{3^{10}}.\frac{b^8}{a^8}+\text{\&c.}\Big)\ (19).$$

Pero hemos visto que cuando el segundo término del binomio de Neuton era negativo, los términos que ocupan lugares pares son los que únicamente mudan de signo; por lo que

$$(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\Big(1-\tfrac{1}{3}.\frac{b}{a}.\sqrt{-1}+\frac{1}{9}.\frac{b^2}{a^2}+\frac{5}{3^4}.\frac{b^3}{a^3}.\sqrt{-1}-\frac{10}{3^5}.\frac{b^4}{a^4}$$
$$-\frac{22}{3^6}.\frac{b^5}{a^5}.\sqrt{-1}+\frac{154}{3^8}.\frac{b^6}{a^6}+\frac{374}{3^9}.\frac{b^7}{a^7}.\sqrt{-1}-\frac{935}{3^{10}}.\frac{b^8}{a^8}-\text{\&c.}\Big)\ (20).$$

Como para obtener el valor de x' es necesario sumar estas dos espresiones, y los términos todos son iguales en ambos escepto los que ocupan lugares pares que en cada uno tiene signo diferente, resulta que el valor de x' se compondrá solamente del duplo de los términos que ocupan lugares impares, y se tendrá

$$x'=a^{\frac{1}{3}}\Big(2+\frac{2}{9}.\frac{b^2}{a^2}-\frac{20}{243}.\frac{b^4}{a^4}+\frac{308}{6561}.\frac{b^6}{a^6}-\frac{1870}{59049}.\frac{b^8}{a^8}+\text{\&c.}\Big)\ldots$$

$$=a^{\frac{1}{3}}\Big(2+0{,}222222\frac{b^2}{a^2}-0{,}082304\frac{b^4}{a^4}+0{,}046944\frac{b^6}{a^6}\ldots\ldots$$
$$-0{,}031669\frac{b^8}{a^8}+\text{\&c.}\Big)\ (21).$$

donde vemos que el valor de x' es real por haberse destruido las imaginárias del un término con las del otro.

Veamos si en los valores de x'' y de x''' se verifica lo mismo, para esto efectuarémos las multiplicaciones indicadas en sus valores, y despues las pondrémos bajo la forma, que aquí se vé:

$$x''=-\tfrac{1}{2}\Big(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\Big)^{\frac{1}{3}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\Big(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\Big)^{\frac{1}{3}}-$$
$$\tfrac{1}{2}\Big(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\Big)^{\frac{1}{3}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\Big(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\Big)^{\frac{1}{3}}=$$
$$-\tfrac{1}{2}\Big(\Big(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\Big)^{\frac{1}{3}}+\Big(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\Big)^{\frac{1}{3}}\Big)+\ldots\ldots$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\Big(\Big(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\Big)^{\frac{1}{3}}-\Big(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\Big)^{\frac{1}{3}}\Big)=\ldots$$
$$-\tfrac{1}{2}\Big((a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\Big)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\Big((a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}-(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\Big)\ (22).$$

Ahora, lo que hai dentro del primer paréntesis es igual con el valor (21); y lo que hai dentro del segundo, es la diferencia de las espresiones 19 y 20, que equivale á tomar duplicados los términos pares de la primera; lo que nos dará despues de hechas todas las simplificaciones

$$a^{\frac{1}{3}}\sqrt{-1}.\tfrac{2}{3}\Big(\frac{b}{a}-\frac{5}{3^3}.\frac{b^3}{a^3}+\frac{22}{3^5}.\frac{b^5}{a^5}-\frac{374}{3^8}.\frac{b^7}{a^7}+\text{\&c.}\Big)=\ldots\ldots$$
$$a^{\frac{1}{3}}\sqrt{-1}.\tfrac{2}{3}\Big(\frac{b}{a}-\frac{5}{27}.\frac{b^3}{a^3}+\frac{22}{243}.\frac{b^5}{a^5}-\frac{374}{6561}.\frac{b^7}{a^7}+\text{\&c.}\Big)=\ldots\ldots$$
$$a^{\frac{1}{3}}\sqrt{-1}.\tfrac{2}{3}\Big(\frac{b}{a}-0{,}185185\frac{b^3}{a^3}+0{,}090534\frac{b^5}{a^5}-\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0{,}057003\frac{b^7}{a^7}+\text{\&c.}\Big)\ (23).$$

Pero esto se ha multiplicar por $\frac{1}{2}\sqrt{-3}$; y como

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{-1}.\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}=\tfrac{1}{3}\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{3}=\tfrac{1}{3}.-1.\sqrt{3}=-\tfrac{1}{3}.\sqrt{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

tendrémos $x''=-a^{\frac{1}{3}}\Big(1+\frac{1}{9}.\frac{b^2}{a^2}-\frac{10}{243}.\frac{b^4}{a^4}+\frac{154}{6561}.\frac{b^6}{a^6}-\frac{935}{59049}.\frac{b^8}{a^8}+\text{\&c.}\Big)$

$$-\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}\Big(\frac{b}{a}-\frac{5}{27}.\frac{b^3}{a^3}+\frac{22}{243}.\frac{b^5}{a^5}-\frac{374}{6561}.\frac{b^7}{a^7}+\text{\&c.}\Big)=-\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{\frac{1}{3}}\Big(1+0{,}111111\frac{b^2}{a^2}-0{,}041152\frac{b^4}{a^4}+0{,}023472\frac{b^6}{a^6}-0{,}015834\frac{b^8}{a^8}+\text{\&c.}\Big)$$

$$-\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a}-0{,}185185\frac{b^3}{a^3}+0{,}090534\frac{b^5}{a^5}-0{,}057003\frac{b^7}{a^7}+\&c.\right)\quad(24).$$

que es un valor tambien real.

Del mismo modo hallaríamos que

$$x''' = -\tfrac{1}{2}\left(\left(a+b\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(a-b\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\left(\left(a+b\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(a-b\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\quad(25),$$

la cual no diferenciándose de la (22) sino en el signo del segundo término, haciendo las mismas sustituciones, nos dará

$$x''' = -a^{\frac{1}{3}}\left(1+0{,}111111\frac{b^2}{a^2}+0{,}041152\frac{b^4}{a^4}+0{,}023472\frac{b^6}{a^6}-\ldots\right.$$

$$\left.0{,}015834\frac{b^8}{a^8}+\&c.\right)+\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a}-0{,}185185\frac{b^3}{a^3}+0{,}090534\frac{b^5}{a^5}-\ldots\right.$$

$$\left.0{,}057003\frac{b^7}{a^7}+\&c.\right)\quad(26).$$

Valor que tambien es real; luego no solo hemos demostrado todo lo que hemos asegurado, sino que hemos hallado las espresiones que en este caso singular, raro á la verdad, dan los valores de las tres raices. Sin embargo, estas espresiones no pueden sernos útiles sino cuando sean *convergentes*, es decir, cuando sus términos van siendo menores, lo que exige el que $\frac{b}{a}$ sea menor que la unidad, pues de otro modo sus potencias $\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{b^3}{a^3}$, &c., irian creciendo.

Con el fin de aclarar cuanto llevamos espuesto, supongamos que se trate de resolver la cuestion siguiente:

Hallar un número tal que el esceso de su cubo sobre el triplo de su cuadrado dé el duplo del esceso del mismo número sobre 3.

Sea t el número buscado, y tendrémos planteada la cuestion en la siguiente ecuacion.

$$t^3-3t^2=2(t-3)\ (27).\quad ó\quad t^3-3t^2-2t+6=0\ (28).$$

La primera operacion que se debe hacer para resolverla es quitarle el 2.º término: para lo cual harémos (T. II § 368) $t=x+\frac{3}{3}=x+1$; lo que dará $t^2=x^2+2x+1$; $t^3=x^3+3x^2+3x+1$; y sustituyendo en la ecuacion (28) y simplificando se tiene
$x^3+3x^2+3x+1-3x^2-6x-3-2x-2+6=0$; ó $x^3-5x+2=0$ (29); la cual comparada con la $x^3+px+q=0$, da $p=-5$ y $q=2$; lo que nos da $\frac{1}{27}p^3=-\frac{125}{27}$, y $\frac{1}{4}q^2=1$; luego se verifica que $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$; y por lo mismo la ecuacion propuesta se halla en el caso *irreducible*.

Por lo que para hallar sus raices deberémos hacer uso de las fórmulas (21, 24 y 26); en las cuales sustituirémos en vez de a y de b sus valores. Pero el supuesto era que

$$b^2=\tfrac{1}{27}p^3-\tfrac{1}{4}q^2=\tfrac{125}{27}-1=\frac{125-27}{27}=\tfrac{98}{27},\ y\ a=-\tfrac{1}{2}q=-\tfrac{1}{2}.2=-1;$$

luego $\frac{b^2}{a^2}=\frac{\frac{98}{27}}{1}=\frac{98}{27}$, y siendo este valor mucho mayor que la unidad, dichas fórmulas son divergentes, y es mas ventajoso el recurrir á los procedimientos de la resolucion de las ecuaciones numéricas.

Así es, que observando que los divisores del último término de la ecuacion (29) son 1 y 2, si en virtud de lo que se demuestra (T. II § 371) se sustituyen en dicha ecuacion, ya con el signo $+$, y ya con el signo $-$, resulta que solo el $+2$ sustituido por x en dicha ecuacion reduce su primer miembro á 0; por consiguiente una de sus raices es 2.

Ahora, dividiendo dicha ecuacion (29) par $x-2$, se obtiene
$x^2+2x-1=0$, la cual da (253) $x=-1\pm\sqrt{1+1}=-1\pm\sqrt{2}$, que separando los valores, resulta $x=-1+\sqrt{2}=-1+1{,}4142=0{,}4142$; y $x=-1-\sqrt{2}=-1-1{,}4142=-2{,}4142$; por lo que acentuando la x convenientemente, se tendrán las tres raices de la ecuacion (29), á saber $x'=0{,}4142$ (30), $x''=-2{,}4142$ (31), $x'''=2$ (32); y llamando t', t'', t''', á los tres valores que resultan para t, de sustituir estos en vez de x en la ecuacion $t=x+1$, resulta $t'=1{,}4142$ (33), $t''=-1{,}4142$ (34), y $t'''=3$ (35).

Algunas veces se puede llegar al objeto por un medio mas corto; y la ecuacion (28) nos va á suministrar un ejemplo.

En efecto, dicha ecuacion se puede escribir del modo siguiente $t^3-3t^2=2t-6$; y descomponiendo en factores será $t^2(t-3)=2(t-3)$, ó $(t^2-2)(t-3)=0$ (36).

Esta se puede verificar ó cuando $t-3=0$, ó cuando $t^2-2=0$; de donde se sacará $t=3$, y $t=\pm\sqrt{2}=\pm1{,}4142$; que llamando t', t'', t''', á los tres valores que resultan, se tiene

$$t'=1{,}4142\quad(37),\quad t''=-1{,}4142\quad(38),\quad t'''=3\ (39);$$

que son los mismos valores que ántes.

Demostrémos ahora que toda ecuacion de tercer grado no puede tener mas de tres valores para la incógnita.

Para esto, supongamos que se tenga la ecuacion general de tercer grado

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0\quad(40)$$

Si suponemos que α, β, γ, sean tres cantidades que satisfagan á dicha ecuacion, sustituyéndolas en vez de x se tendrá

$$A\alpha^3+B\alpha^2+C\alpha+D=0\quad(41)$$

$$A\beta^3 + B\beta^2 + C\beta + D = 0 \quad (42)$$
$$A\gamma^3 + B\gamma^2 + C\gamma + D = 0 \quad (43)$$

y lo que nos proponemos demostrar es que ninguna otra cantidad δ puede satisfacer á ella; porque si esto se verificase tendríamos tambien

$$A\delta^3 + B\delta^2 + C\delta + D = 0 \quad (44)$$

Restando de la (41), las (42, 43 y 44), se tendrá

$$A(\alpha^3-\beta^3) + B(\alpha^2-\beta^2) + C(\alpha-\beta) = 0 \quad (45)$$
$$A(\alpha^3-\gamma^3) + B(\alpha^2-\gamma^2) + C(\alpha-\gamma) = 0 \quad (46)$$
$$A(\alpha^3-\delta^3) + B(\alpha^2-\delta^2) + C(\alpha-\delta) = 0 \quad (47)$$

que dividiendo la (45) por $\alpha-\beta$, la (46) por $\alpha-\gamma$, y la (47) por $\alpha-\delta$, se tendrá

$$A(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) + B(\alpha+\beta) + C = 0 \quad (48)$$
$$A(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2) + B(\alpha+\gamma) + C = 0 \quad (49)$$
$$A(\alpha^2+\alpha\delta+\delta^2) + B(\alpha+\delta) + C = 0 \quad (50)$$

Restando de la (48) las (49 y 50), será

$$A[\alpha(\beta-\gamma) + (\beta^2-\gamma^2)] + B(\beta-\gamma) = 0 \quad (51)$$
$$A[\alpha(\beta-\delta) + (\beta^2-\delta^2)] + B(\beta-\delta) = 0 \quad (52)$$

que dividiendo la (51) por $\beta-\gamma$ y la (52) por $\beta-\delta$, será

$$A(\alpha+\beta+\gamma) + B = 0 \quad (53)$$
$$A(\alpha+\beta+\delta) + B = 0 \quad (54)$$

que restando la (54) de la (53) se tendrá $A(\gamma-\delta)=0$ (55); pero A no puede ser 0; porque entónces la (ecuac. 54) daria $B=0$, la (50) se convertiria en $C=0$, y la primitiva en $D=0$, y entónces no habria ecuacion por ser cero todos sus coeficientes; luego será preciso que el otro factor de la (ecuac. 55) sea cero; esto es que se tenga $\gamma-\delta=0$, que da $\gamma=\delta$; luego la cantidad δ que se supuso diferente, resulta que por precision ha de ser igual á uno de los valores anteriores.

De las ecuaciones que pueden resolverse por el método de las de tercer grado.

Las ecuaciones de la forma $x^{3n}+px^n+q=0$ (56), $x^{3n}+px^{2n}+q=0$ (57), $x^{3n}+px^{2n}+qx^n+r=0$ (58); haciendo $x^n=t$, se reducen á las (2, 3 y 4); y si llamamos t', t'', t''', á los valores que darán para cada una de estas tres raices; se tendrá

$x=\sqrt[n]{t'}$ (59); $x=\sqrt[n]{t''}$ (60); $x=\sqrt[n]{t'''}$ (61); y como cada una de estas suministraria n valores para x, resulta que el número total de raices será $3n$.

Para hacer una aplicacion de este caso, supongamos que se tenga $u^{24}-5u^{16}+11u^8-7=0$ (62); haciendo $u^8=t$, se tendrá $u^{16}=t^2$; $u^{24}=t^3$, y la ecuacion anterior se nos convertirá en

$$t^3-5t^2+11t-7=0 \quad (63).$$

Para quitarle el segundo término, harémos $t=x+\frac{5}{3}$ (64), lo que nos dará $t^2=(x+\frac{5}{3})^2=x^2+\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}$; $t^3=x^3+5x^2+\frac{25}{3}x+\frac{125}{27}$.

Y sustituyendo estos valores en la (63), se tendrá

$$x^3+\frac{8}{3}x+\frac{56}{27}=0 \quad (65)$$

La cual comparada con la $x^3+px+q=0$, da $p=\frac{8}{3}$, $q=\frac{56}{27}$; cuyos valores sustituidos en la ecuacion (15), dan

$$x'=\sqrt[3]{-\frac{28}{27}+\sqrt{\left(\frac{28}{27}\right)^2+\frac{1}{27}\left(\frac{8}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{28}{27}-\sqrt{\left(\frac{28}{27}\right)^2+\frac{1}{27}\left(\frac{8}{3}\right)^3}};$$

que despues de hechas todas las reducciones se convierte en

$$x'=\sqrt[3]{+\frac{8}{27}}+\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3} \quad (66).$$

Las ecuaciones (17 y 18) darán

$$x''=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{\frac{8}{27}}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.\frac{2}{3}-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.-\frac{4}{3}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{3}+\frac{1+\sqrt{-3}}{3}.2=$$
$$\frac{-1+\sqrt{-3}+2+2\sqrt{-3}}{3}=\frac{1+3\sqrt{-3}}{3}=\frac{1}{3}+\sqrt{-3} \quad (67).$$

$$x'''=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.\frac{2}{3}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.-\frac{4}{3}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{3}-\ldots\ldots$$
$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{3}.2=\frac{-1-\sqrt{-3}+2-2\sqrt{-3}}{3}=\frac{1-3\sqrt{-3}}{3}=\ldots$$
$$\frac{1}{3}-\sqrt{-3} \quad (68).$$

Sustituyendo cada uno de estos valores en el de $t=x+\frac{5}{3}$, y espresándolos por t', t'', t'''; resultará $t'=-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{3}{3}=1$ (69).

$$t''=\frac{1}{3}+\sqrt{-3}+\frac{5}{3}=\frac{6}{3}+\sqrt{-3}=2+\sqrt{-3} \quad (70)$$
$$t'''=\frac{1}{3}-\sqrt{-3}+\frac{5}{3}=\frac{6}{3}-\sqrt{-3}=2-\sqrt{-3} \quad (71).$$

é igualando u^8 con cada uno de estos valores se tendrá

$u^8=1$ (72); $u^8=2+\sqrt{-3}$ (73); $u^8=2-\sqrt{-3}$ (74), que dan

$u=\sqrt[8]{1}=1$ (75), $u=\sqrt[8]{2+\sqrt{-3}}$ (76), $u=\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}$ (77).

Ahora en virtud de lo espuesto (295. §.) cada uno de estos radicales nos dará ocho valores, que son los que resultan de multiplicarlos por los ocho valores de x en la ecuacion $x^8-1=0$; luego acentuando como corresponde la u, tendrémos los 24 valores siguientes:

$u'=1$

$u''=-1$

$u'''=+\sqrt{-1}$

$u^{IV}=-\sqrt{-1}$

$u^{V}=+\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{VI}=-\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{VII}=\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{VIII}=-\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{IX}=\sqrt[8]{2+\sqrt{-3}}\,.\,1$

$u^{X}=\sqrt[8]{2+\sqrt{-3}}\,.-1$

$u^{XI}=\sqrt[8]{2+\sqrt{-3}}\,.\sqrt{-1}$

$u^{XII}=\sqrt[8]{2+\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{-1}$

$u^{XIII}=\sqrt[8]{2+\sqrt{-3}}\,.\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{XIV}=\sqrt[8]{2+\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{XV}=\sqrt[8]{2+\sqrt{-3}}\,.\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{XVI}=\sqrt[8]{2+\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{XVII}=\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\,.\,1$

$u^{XVIII}=\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\,.-1$

$u^{XIX}=\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\,.\sqrt{-1}$

$u^{XX}=\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{-1}$

$u^{XXI}=\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\,.\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{XXII}=\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{XXIII}=\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\,.\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{XXIV}=\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{+\sqrt{-1}}$

Cualquiera de estos valores satisface á la ecuacion (62); y para convencernos de ello, nos propondrémos verificarlo respecto del que parece mas complicado que es $u^{XXII}=\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{-\sqrt{-1}}$.

Para esto, formarémos su 8.ª potencia; y se tendrá

$$(u^{XXII})^8=\left(\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)^8=\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left(\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\right)^8\left(-\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)^8.$$

Pero $\left(\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\right)^8=\left(2-\sqrt{-3}\right)^{\frac{8}{8}}=2-\sqrt{-3}$

y en virtud de lo espuesto (295) $\left(-\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)^8=1;$

luego $(u^{XXII})^8=2-\sqrt{-3}$

y elevando esta ecuacion al cuadrado, se tendrá

$(u^{XXII})^{16}=4-4\sqrt{-3}-3=1-4\sqrt{-3}$

y multiplicando estas dos, será

$(u^{XXII})^{24}=\left(1-4\sqrt{-3}\right)\left(2-\sqrt{-3}\right)=2-8\sqrt{-3}-\sqrt{-3}+4.(-3)$
$=2-9\sqrt{-3}-12=-10-9\sqrt{-3}$.

Sustituyendo estos valores en la ecuacion (62), se tiene

$$-10-9\sqrt{-3}-5\left(1-4\sqrt{-3}\right)+11\left(2-\sqrt{-3}\right)-7=-10-9\sqrt{-3}$$
$$-5+20\sqrt{-3}+22-11\sqrt{-3}-7=-22-20\sqrt{-3}\ldots\ldots$$
$$+22+20\sqrt{-3}=0;$$ como debia verificarse; pues el segundo miembro de la ecuacion (62) es cero.

Si trasladásemos al primer miembro, el segundo de cada una de estas 24 ecuaciones, y las multiplicásemos todas, el producto despues de hechas las reducciones convenientes se nos convertirá en la misma ecuacion (62).

Si la ecuacion fuese

$$u^{36}-5u^{12}+2=0 \quad (78)$$

haríamos $u^{12}=x$ (79); lo que dará $u^{36}=x^3$; y sustituyendo en la anterior, se tendrá

$$x^3-5x+2=0 \quad (80)$$

que siendo la misma que la (29), nos dará (ecuaciones 30, 31 y 32)

$x'=0{,}4142$ (81), $x''=-2{,}4142$ (82), $x'''=2$ (83),

é igualando con u^{12} cada uno de estos valores de x y estrayendo la raiz del grado 12 tendrémos

$$u=\sqrt[12]{0{,}4142} \quad u=\sqrt[12]{-2{,}4142} \quad u=\sqrt[12]{1{,}9989}$$

Ahora, multiplicando cada uno de estos valores, por los 12 de x que satisfacen á la ecuacion $x^{12}-1=0$ (§ 295. 7.º), se tendrán los treinta y seis valores que satisfacen á la ecuacion (78).

Si la ecuacion fuese

$$t^{48}+3t^{32}+3t^{16}+126=0 \quad (84),$$

haríamos $t^{16}=u$ (85), lo que nos daria $t^{32}=u^2$ (86), $t^{48}=u^3$ (87), y la ecuacion (84) se convertiria en

$$u^3+3u^2+3u+126=0 \quad (88).$$

Para quitarle el segundo término harémos $u=x-\frac{3}{3}=x-1$ (89) cuyo valor sustituido en la (88) la reduce á $x^3+125=0$ (90); que da

$$x=\sqrt[3]{-125}=-5.$$

Para hallar los otros dos valores de x se dividirá la (90) por $x+5$ y se tendrá

$$x^2-5x+25=0 \ (91), \text{ que da } (253)$$

$$x=\tfrac{5}{2}\pm\sqrt{\tfrac{25}{4}-25}=\frac{5\pm\sqrt{-75}}{2};$$ y separando los valores, se tiene

$$x=\frac{5+\sqrt{-75}}{2},\quad x=\frac{5-\sqrt{-75}}{2}.$$

Sustituyendo estos tres valores de x en la ecuacion (89) y acentuando los valores que resultan para u, será

$$u'=x-1=-5-1=-6,\ u''=\frac{5+\sqrt{-75}}{2}-1=\frac{3+\sqrt{-75}}{2},$$

$$u'''=\frac{3-\sqrt{-75}}{2}.$$

Y como la ecuacion (85) da $t=\sqrt[16]{u}$, sustituyendo en vez de u cada uno de estos tres valores, se tendrá

$$t=\sqrt[16]{-6},\quad t=\sqrt[16]{\frac{3+\sqrt{-75}}{2}},\quad t=\sqrt[16]{\frac{3-\sqrt{-75}}{2}}.$$

Si multiplicamos cada uno de estos radicales por las 16 raices de la unidad, ó lo que es lo mismo por los 16 valores de x que satisfacen á la ecuacion $x^{16}-1=0$, tendrémos los 48 valores de t que satisfacen á la ecuacion (84).

APÉNDICE 7.°

Resolucion de las ecuaciones de 4.° grado; de las que, siendo de un grado mas elevado, pueden resolverse por el método de ellas; y observacion general acerca de la resolucion de las ecuaciones superiores á las de 4.° grado.

Ante todas cosas demostrarémos que una ecuacion de cuarto grado no puede dar mas de cuatro valores para la incógnita.

Supongamos en efecto que se tenga la ecuacion

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0\quad(a).$$

Vamos á demostrar que solo hai cuatro valores α, β, γ, δ, que satisfacen á ella; y pues por el supuesto dichas cantidades verifican la ecuacion propuesta se tendrá

$$A\alpha^4+B\alpha^3+C\alpha^2+D\alpha+E=0\quad(b)$$
$$A\beta^4+B\beta^3+C\beta^2+D\beta+E=0\quad(c)$$
$$A\gamma^4+B\gamma^3+C\gamma^2+D\gamma+E=0\quad(d)$$
$$A\delta^4+B\delta^3+C\delta^2+D\delta+E=0\quad(e)$$

Y lo que nos proponemos demostrar es que cualquiera otra cantidad ε que satisfaga á ella, será por precision igual á una de las anteriores.

En efecto, si esto pudiese ser, se tendria

$$A\varepsilon^4+B\varepsilon^3+C\varepsilon^2+D\varepsilon+E=0\quad(f)$$

Restando de la (b) las demas, será

$$A(\alpha^4-\beta^4)+B(\alpha^3-\beta^3)+C(\alpha^2-\beta^2)+D(\alpha-\beta)=0\quad(g).$$
$$A(\alpha^4-\gamma^4)+B(\alpha^3-\gamma^3)+C(\alpha^2-\gamma^2)+D(\alpha-\gamma)=0\quad(h).$$
$$A(\alpha^4-\delta^4)+B(\alpha^3-\delta^3)+C(\alpha^2-\delta^2)+D(\alpha-\delta)=0\quad(i).$$
$$A(\alpha^4-\varepsilon^4)+B(\alpha^3-\varepsilon^3)+C(\alpha^2-\varepsilon^2)+D(\alpha-\varepsilon)=0\quad(k).$$

que dividiendo la (g) por $\alpha-\beta$, la (h) por $\alpha-\gamma$, la (i) por $\alpha-\delta$ y la (k) por $\alpha-\varepsilon$, se tendrá

$$A(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)+B(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+C(\alpha+\beta)+D=0\quad(l)$$
$$A(\alpha^3+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\gamma^3)+B(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)+C(\alpha+\gamma)+D=0\quad(m)$$
$$A(\alpha^3+\alpha^2\delta+\alpha\delta^2+\delta^3)+B(\alpha^2+\alpha\delta+\delta^2)+C(\alpha+\delta)+D=0\quad(n)$$
$$A(\alpha^3+\alpha^2\varepsilon+\alpha\varepsilon^2+\varepsilon^3)+B(\alpha^2+\alpha\varepsilon+\varepsilon^2)+C(\alpha+\varepsilon)+D=0\quad(o).$$

Restando de la (l), las (m, n, o) será

$$A[\alpha^2(\beta-\gamma)+\alpha(\beta^2-\gamma^2)+(\beta^3-\gamma^3)]+B[\alpha(\beta-\gamma)+(\beta^2-\gamma^2)]+C(\beta-\gamma)=0\,(p)$$
$$A[\alpha^2(\beta-\delta)+\alpha(\beta^2-\delta^2)+(\beta^3-\delta^3)]+B[\alpha(\beta-\delta)+(\beta^2-\delta^2)]+C(\beta-\delta)=0\,(q)$$

$$A[\alpha^2(\beta-\varepsilon)+\alpha(\beta^2-\varepsilon^2)+(\beta^3-\varepsilon^3)]+B[\alpha(\beta-\varepsilon)+(\beta^2-\varepsilon^2)]+C(\beta-\varepsilon)=0 \quad (r)$$

que dividiendo la (p) por $\beta-\gamma$, la (q) por $\beta-\delta$, y la (r) por $\beta-\varepsilon$ se tiene

$$A[\alpha^2+\alpha(\beta+\gamma)+(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)]+B(\alpha+\beta+\gamma)+C=0 \quad (s).$$
$$A[\alpha^2+\alpha(\beta+\delta)+(\beta^2+\beta\delta+\delta^2)]+B(\alpha+\beta+\delta)+C=0 \quad (t).$$
$$A[\alpha^2+\alpha(\beta+\varepsilon)+(\beta^2+\beta\varepsilon+\varepsilon^2)]+B(\alpha+\beta+\varepsilon)+C=0 \quad (u).$$

Restando de la (s), las (t, u) será

$$A[\alpha(\gamma-\delta)+\beta(\gamma-\delta)+(\gamma^2-\delta^2)]+B(\gamma-\delta)=0 \quad (v).$$
$$A[\alpha(\gamma-\varepsilon)+\beta(\gamma-\varepsilon)+(\gamma^2-\varepsilon^2)]+B(\gamma-\varepsilon)=0 \quad (x)$$

que dividiendo la (v) por $\gamma-\delta$, y la (x) por $\gamma-\varepsilon$, será

$$A(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+B=0 \quad (y)$$
$$A(\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon)+B=0 \quad (z)$$

que restando la (z) de la (y) será

$A(\delta-\varepsilon)=0$; pero A no puede ser cero, porque entónces la ecuacion (z) daria $B=0$; la (u) daria $C=0$; la (o) daria $D=0$; y la (f) daria $E=0$, y no habria ecuacion; luego deberá ser $\delta-\varepsilon=0$, que da $\delta=\varepsilon$; luego para que ε satisfaga á la ecuacion primitiva ha de tener por precision uno de los valores anteriores; y por lo mismo solo los cuatro valores α, β, γ, δ, pueden verificar dicha ecuacion.

Para considerar todos los casos que pueden ofrecer las ecuaciones de cuarto grado; pondrémos aquí las diversas formas que puede tener una ecuacion de dicho grado, y son

$x^4=p$	(1)	$x^4+px^2+qx+r=0$	(5)
$x^4+px^2+q=0$	(2)	$x^4+px^3+qx^2+r=0$	(6)
$x^4+px^3+q=0$	(3)	$x^4+px^3+qx+r=0$	(7)
$x^4+px+q=0$	(4)	$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$	(8)

La primera queda ya resuelta por lo espuesto (295.... 3.°); y la segunda por lo demostrado (254).

Pasemos á la (5) ecuacion, que es $x^4+px^2+qx+r=0$; y supongamos que esta provenga de la multiplicacion de estos dos factores de segundo grado x^2+Ax+B (9), $x^2+A'x+B'$ (10); de modo que haciendo la multiplicacion se tenga

$$x^4+px^2+qx+r=\left\{\begin{array}{l|l|l|l} x^4+A & x^3+B & x^2+A'B & x+BB' \\ \quad +A' & \quad +AA' & \quad +AB' & \\ & \quad +B' & & \end{array}\right. \quad (11)$$

y comparando los coeficientes, se tendrá $A+A'=0$ (12), $AA'+B+B'=p$ (13), $AB'+BA'=q$ (14), $BB'=r$ (15).

La (12) da $A'=-A$ (16), y sustituyendo en la (13 y 14) este valor y despejando B y B', se tendrá

$$B=\tfrac{1}{2}\left(A^2+p-\frac{q}{A}\right) \ (17), \text{ y } B'=\tfrac{1}{2}\left(A^2+p+\frac{q}{A}\right) \ (18).$$

La sustitucion de estos dos valores en la (15) dará

$$A^6+2pA^4+(p^2-4r)A^2-q^2=0 \quad (19).$$

Pero si se supone $A^2=z$, esta ecuacion se reducirá á

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0 \quad (20).$$

De manera que la determinacion de A dependerá de esta ecuacion de tercer grado; la cual recibe el nombre de *reducida*; y como B y B' están espresadas en valores de A, se sigue que el conocimiento de esta última cantidad acabará de determinar los coeficientes de los factores de segundo grado.

Podrémos pues considerar como conocidos los coeficientes A, B, A' y B'.

Mas pues que la propuesta es susceptible de esta forma $(x^2+Ax+B).(x^2+A'x+B')=0$ (21), se podrá satisfacer á ella haciendo $x^2+Ax+B=0$ (22), ó $x^2+A'x+B'=0$ (23); luego se tendrá (253) $x=-\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}$ (24), $x=-\frac{1}{2}A'\pm\frac{1}{2}\sqrt{A'^2-4B'}$ (25) ó á causa de $A'=-A$, y $B'=\frac{1}{2}\left(A^2+p+\frac{q}{A}\right)$, y de $B=\frac{1}{2}\left(A^2+p-\frac{q}{A}\right)$, resultará

$$x=-\tfrac{1}{2}A\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-A^2-2p+\frac{2q}{A}} \quad (26)$$

$$\text{y } x=\tfrac{1}{2}A\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-A^2-2p-\frac{2q}{A}} \quad (27).$$

Pero como se ha supuesto $A^2=z$; se tendrá $A=\pm\sqrt{z}$, y por consiguiente

$$x=\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{z}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-z-2p\pm\frac{2q}{\sqrt{z}}} \quad (28)$$

$$x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{z}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-z-2p\pm\frac{2q}{\sqrt{z}}} \quad (29).$$

De manera, que si se supone para abreviar

$\frac{1}{2}\sqrt{z}=m$, $\frac{1}{2}\sqrt{-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}}=k$ y $\frac{1}{2}\sqrt{-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}}=k'$;

las espresiones precedentes se referirán á una de estas formas

$$\left.\begin{array}{ll} x=\mp m\pm k & x=\pm m\pm k \\ x=\mp m\pm k' & x=\pm m\pm k' \end{array}\right\} \quad (30)$$

de donde se deducirán las diez y seis siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} x=-m\pm k & x=+m\pm k \\ x=+m\pm k & x=-m\pm k \\ x=-m\pm k' & x=+m\pm k' \\ x=+m\pm k' & x=-m\pm k' \end{array}\right\} \quad (31)$$

donde observamos que las ocho, que dan las cuatro últimas, se reducen á las ocho que dan las cuatro primeras.

Ahora, como con estos ocho valores de x se pueden formar tantos sistemas de raices como combinaciones se pueden hacer con ocho cantidades, tomadas de cuatro en cuatro, que son 70, la dificultad está aquí en reconocer cual de los sistemas es admisible.

Pero teniendo presente la lei de relacion entre las raices y coeficientes de una ecuacion, se verá que en este caso, si se espresan por x', x'', x''', x^{IV}, las raices de la propuesta, se debe tener en virtud de la lei que demostramos en la teoría general de las ecuaciones (T. II § 367),

$$\begin{aligned}&x'+x''+x'''+x^{IV}=0.\\&x'x''+x'x'''+x'x^{IV}+x''x'''+x''x^{IV}+x'''x^{IV}=p.\\&x'x''x'''+x'x''x^{IV}+x'x'''x^{IV}+x''x'''x^{IV}=-q.\\&x'x''x'''x^{IV}=r.\end{aligned}$$

De manera que entre los setenta sistemas de raices que se podrán formar con las ocho raices precedentes, se ve desde luego que la primera condicion no deja subsistir, sino los cuatro siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}x'=-m+k\\x''=-m-k\\x'''=m+k'\\x^{IV}=m-k'\end{array}\right\}(32)\quad\begin{array}{l}x'=-m+k'\\x''=-m-k'\\x'''=m+k\\x^{IV}=m-k\end{array}\left\}\begin{array}{l}x'=-m+k\\x''=m-k\\x'''=-m+k'\\x^{IV}=m-k'\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}x'=-m-k\\x''=m+k\\x'''=-m-k'\\x^{IV}=m+k'\end{array}\right\}$$

Entre las cuales solo el primer sistema satisface á todas las condiciones, pues que es él solo que, ademas de la primera condicion, da

$$\begin{aligned}&x'x''+x'x'''+x'x^{IV}+x''x'''+x''x^{IV}+x'''x^{IV}=-(2m^2+k^2+k'^2)=p\\&x'x''x'''+x'x''x^{IV}+x'x'''x^{IV}+x''x'''x^{IV}=2m(k'^2-k^2)=-q\\&x'x''x'''x^{IV}=m^4(k^2+k'^2)+k^2k'^2=BB'=r.\end{aligned}$$

Así los cuatro valores siguientes:
$x'=-m+k$, $x''=-m-k$, $x'''=m+k'$, $x^{IV}=m-k'$ satisfacen á todas las condiciones que se requieren para ser raices de la ecuacion ..... $x^4+px^2+qx+r=0$.

Ahora importa observar que las raices halladas están espresadas en valores de z, y que z es susceptible de tres valores diferentes; pues que la reducida que la determina, que es la (20) es de tercer grado; y así para fijar las idéas representarémos por z', z'', z''', estos valores de z.

Pero si la sustitucion sucesiva de estos tres valores, en vez de z diese espresiones diferentes para x', x'', x''', x^{V}, resultarian doce raices para una ecuacion de cuarto grado; lo que es contrario á lo que demostramos al principio de este apéndice. Y así, para que esto no suceda, es necesario que sea indiferente sustituir z', z'', ó z''' en lugar de z en las cuatro raices precedentes; ó lo que viene á ser lo mismo, que basta sustituir en las ecuaciones (32) cualquier valor que la (20) dé para z; luego tendrémos.

$$\left.\begin{aligned}x'&=-\tfrac{1}{2}\sqrt{z}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}}\\x''&=-\tfrac{1}{2}\sqrt{z}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}}\\x'''&=\tfrac{1}{2}\sqrt{z}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}}\\x^{IV}&=\tfrac{1}{2}\sqrt{z}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}}\end{aligned}\right\}(33)$$

que espresarán las cuatro raices de la ecuacion $x^4+px^2+qx+r=0$.

Para resolver las (3), (6), (7) y (8), no tenemos que hacer otra cosa sino quitarles el término donde se halla x^3 por el método espuesto (T. II § 368); y quedando reducida cada una de ellas á otra de la misma forma que la (5), se resolverá por las fórmulas (33). La (4) se resolverá suponiendo en las mismas fórmulas $p=0$, y sustituyendo p en vez de q, y q en vez de r.

Ya no tenemos que hacer otra cosa mas que examinar la naturaleza de las raices halladas, segun los signos que afectan á los coeficientes p, q, r, y segun la magnitud de estos coeficientes.

Para juzgar de la naturaleza de los valores de x', x'', x''' y x^{IV}, es necesario examinar de que especie pueden ser los valores de z que suministre la ecuacion reducida (20).

Y como una ecuacion de tercer grado, puede tener (apéndice 6.º) una raiz real y dos imaginárias, ó bien sus tres raices reales, se tendrá siempre la facultad de tomar para z un valor real; solamente importa saber si este valor real de z será positivo ó negativo, á fin de poder decidir si $\sqrt{z}$ será una cantidad real ó imaginária.

Pero se debe notar que la ecuacion *reducida* tiene por último término $-q^2$; de manera que este término permanecerá negativo, cualquiera que sea el signo de q; y como el último término de una ecuacion es el producto (T. II. 367) de todas las raices tomadas con un signo contrario, resulta que no ha podido estar formado aquí sino por tres factores negativos, ó por dos positivos y uno negativo, lo que supone que todas las raices son positivas, ó que dos son negativas, siendo una sola positiva.

Así en el caso de que z sea una cantidad positiva, el valor de $\sqrt{z}$ será una cantidad real; en cuanto á la otra parte radical $\sqrt{-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}}$ no hai duda de que es imaginária mientras que p y q sean positivas en la propuesta.

Pero si p fuese negativa, se tendrá $\sqrt{-z+2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}}$, espresion que será real ó imaginária segun se tenga $2p>$ ó $<z+\frac{2q}{\sqrt{z}}$.

Si fuese q negativa y p positiva, entónces $\sqrt{-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}}$, vendria á ser $\sqrt{-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}}$; de manera que esta última cantidad seria real ó imaginária segun se tuviese $\frac{2q}{\sqrt{z}}>$ ó $<z+2p$.

En fin si p y q fuesen negativas, el radical vendria á ser......... $\sqrt{-z+2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}}$; y seria real ó imaginário segun fuese $z<$ ó $>2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}$, mientras que $\sqrt{-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}}$, se mudaria en $\sqrt{-z+2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}}$: cantidad que es real ó imaginária segun se tenga $2p>$ ó $<z+\frac{2q}{\sqrt{z}}$.

Ahora, si z es una raiz negativa de la *reducida*, las cuatro raices x', x'', x''', x^{IV} serán todas imaginárias.

En fin puede suceder que se tenga $-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}=0$, $-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}=0$; entónces las raices de la propuesta serán iguales de dos en dos.

Concluyamos de lo que precede: 1.° *que una ecuacion de cuarto grado puede tener todas sus raices reales ó imaginárias, ó bien tener dos reales y dos imaginárias.*

2.° *Que tiene dos raices reales y dos imaginárias cuando la reducida no tiene sino una raiz real.*

3.° *Que tiene sus raices todas reales ó todas imaginárias; si la reducida teniendo sus tres raices reales y cayendo en el caso irreducible no tiene sino raices positivas, ó bien si esta misma reducida no tiene sino una raiz positiva.*

Hagamos aplicacion al ejemplo siguiente: sea la ecuacion $x^4-x^2+2x-1=0$ (34) cuyas raices se buscan.

La primera operacion que hai que hacer es formar la ecuacion reducida de la propuesta. Pero siendo (ecuac. 20) la reducida de $x^4+px^2+qx+r=0$, la $z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$ resulta, comparando los coeficientes, $p=-1$, $q=2$ y $r=-1$; de manera, que la reducida buscada será $z^3-2z^2+5z-4=0$ (35).

Para resolver esta ecuacion necesitamos que desaparezca su segundo término; lo que conseguirémos haciendo $z=u+\frac{2}{3}$; despues de la sustitucion, se tendrá

$$u^3+\frac{11}{3}u-\frac{34}{27}=0.$$

Comparando esta con la (2. ap.^{e} 6.°), resulta $p=\frac{11}{3}$ y $q=-\frac{34}{27}$; y la fórmula (15 ap. 6.°) nos dará

$$u=\frac{1}{3}\sqrt[3]{17+\sqrt{1620}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{17-\sqrt{1620}};$$ y efectuando las operaciones se tiene por último $u=0,333$; y como $z=u+\frac{2}{3}=0,333+\frac{2}{3}=1$.

Sustituyendo en las ecuaciones (33), en vez de z este valor 1; en vez de p, su valor -1, y en vez de q el suyo 2 se halla

$$x'=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1+2+\frac{4}{\sqrt{1}}}=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5};\quad x''=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x'''=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1+2-\frac{4}{\sqrt{1}}}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3};\quad x^{IV}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Si se tuviese la ecuacion $x^4-12x^2-8x+2=0$ (36), en la cual falta ya el 2.° término; comparándola con la (5), se tiene $p=-12$, $q=-8$, $r=2$; y la ecuacion reducida (20) será $z^3-24z^2+136z-64=0$ (37).

Esta ecuacion es la que se trata de resolver; para conseguirlo, hagamos primero desaparecer el 2.° término por medio de la sustitucion de $z=u+8$, y despues de hechas las reducciones, se tendrá

$$u^3-56u=0 \quad (38).$$

Aquí viene á ser inútil aplicar las fórmulas generales del tercer grado, porque esta ecuacion se puede poner bajo la forma $(u^2-56)u=0$, y queda satisfecha por las condiciones $u=0$, y $u^2-56=0$, que da $u=\pm\sqrt{56}$.

Resulta de ella despues de la relacion

$$z=u+8,\quad z'=8,\quad z''=8+\sqrt{56},\quad z'''=8-\sqrt{56}.$$

Sustituyendo en las fórmulas (33) en vez de z, el valor 8, que es el mas sencillo de los que acabamos de encontrar, se tiene despues de hechas todas las simplificaciones.

$$x'=-\sqrt{2}+\sqrt{4-\sqrt{2}};\qquad x'''=\sqrt{2}+\sqrt{4+\sqrt{2}}$$

$$x''=-\sqrt{2}-\sqrt{4-\sqrt{2}};\qquad x^{IV}=\sqrt{2}-\sqrt{4+\sqrt{2}}.$$

Los cuatro valores son reales, pues que 4 es mayor que $\sqrt{2}$, lo que entra en el caso en que los tres valores z', z'', z''' son positivos como aquí se verifica.

De las ecuaciones que pueden resolverse por el método de las de cuarto grado.

Las ecuaciones $x^{4n}+px^{3n}+q=0$, $x^{4n}+px^{n}+q=0$, ... $x^{4n}+px^{2n}+qx^{n}+r=0$, $x^{4n}+px^{3n}+qx^{2n}+r=0$, ... $x^{4n}+px^{3n}+qx^{n}+r=0$, $x^{4n}+px^{3n}+qx^{2n}+rx^{n}+s=0$, haciendo en ellas $x^{n}=t$, se convierten en otras de la misma forma que las (3), (4), (5), (6), (7) y (8), y llamando t', t'', t''', t^{IV} los cuatro valores que cada una daria para t, nos resultaria despues $x=\sqrt[n]{t'}$, $x=\sqrt[n]{t''}$, $x=\sqrt[n]{t'''}$, $x=\sqrt[n]{t^{IV}}$; y como cada uno de estos radicales nos daria n valores para x, obtendríamos $4n$ valores, que satisfarian á cada una de dichas ecuaciones.

Para hacer aplicacion de cuanto hemos manifestado acerca de la teoría de las ecuaciones, y al mismo tiempo presentar tòdos los pormenores que ocurren en una teoría de suyo complicada, vamos á proponernos dos ejemplos en que se pueda hacer uso de todo lo que se ha esplicado, para que se vea la utilidad de cuanto hemos espuesto; á fin de que, á imitacion de estos, se puedan resolver los que ocurran, que sin duda serán mas sencillos que los que vamos á proponer, con el objeto de que acostumbrados los jóvenes á resolver estos adquieran el ejercicio conveniente para resolver los demas.

Supongamos que se tenga $u^{40}-6u^{30}+7u^{20}+6u^{10}-8=0$ (39); y propongámonos averiguar los 40 valores de u que satisfacen á dicha ecuacion.

Haciendo $u^{10}=t$ (40), resulta $u^{20}=t^2$, $u^{30}=t^3$, $u^{40}=t^4$, cuyos valores sustituidos en la (39), la reducen á $t^4-6t^3+7t^2+6t-8=0$ (41).

Ante todas cosas, quitarémos el segundo término, sustituyendo (T. II § 368) en vez de t otra incógnita x acompañada de la cuarta parte del coeficiente del segundo término con un signo contrario; es decir que harémos $t=x+\frac{6}{4}=x+\frac{3}{2}$ (42); y sustituyendo este valor en la ecuacion (41) tendrémos, despues de hechas todas las operaciones y simplificando, $x^4-\frac{13}{2}x^2+\frac{25}{16}=0$ (43), que en virtud de lo espuesto (254), da

$$x=\pm\sqrt{\frac{13}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^2-\frac{25}{16}}}=\pm\sqrt{\frac{13}{4}\pm\sqrt{\frac{144}{16}}}=\pm\sqrt{\frac{13}{4}\pm\frac{12}{4}}$$

que, separando los valores, se tiene $x=+\sqrt{\dfrac{13+12}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$; $x=-\frac{5}{2}$; $x=+\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$; $x=-\frac{1}{2}$; por lo que la (ecuac. 42), nos dará estos cuatro valores $t'=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{8}{2}=4$; $t''=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=-\frac{2}{2}=-1$; $t'''=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2$; $t^{IV}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{2}{2}=1$.

Ahora, como de la (ecuac. 40) se saca $u=\sqrt[10]{t}$; sustituyendo en vez de t estos cuatro valores que acabamos de sacar, se tendrá

$$u=\sqrt[10]{4};\quad u=\sqrt[10]{-1};\quad u=\sqrt[10]{2};\quad u=\sqrt[10]{1}=1.$$

Pero todo radical de 10.º grado tiene diez valores (295) que se sacan multiplicando el valor numérico del radical por las diez raices de la unidad; luego si multiplicamos cada uno de estos valores por los diez que se sacan de la ecuacion $x^{10}-1=0$ en la nota de la página 340; se tendrán los cuarenta valores de u que satisfacen á la (ecuac. 39).

Si la ecuacion fuese

$$u^{64}-7u^{48}+21u^{32}-29u^{16}+14=0\ (44)$$

haríamos $u^{16}=t$ (45); lo que da $u^{32}=t^2$, $u^{48}=t^3$, $u^{64}=t^4$; por lo que sustituyendo tendrémos

$$t^4-7t^3+21t^2-29t+14=0\ (46).$$

Para quitarle el segundo término, harémos $t=x+\frac{7}{4}$ (47), y sustituyendo este valor, y haciendo todas las operaciones y reducciones se tiene

$$x^4+\frac{21}{8}x^2+\frac{13}{8}x-\frac{147}{256}=0\ (48).$$

Comparando esta ecuacion con la (ecuac. 5), se tiene $p=\frac{21}{8}$, $q=\frac{13}{8}$ y $r=-\frac{147}{256}$; y haciendo estas sustituciones en la (20), se tendrá

$$z^3+\frac{21}{4}z^2+\left(\frac{21^2}{8^2}+\frac{147}{64}\right)z-\left(\frac{13}{8}\right)^2=0\ (49),$$

que es la reducida de la (48).

Para quitar á esta su segundo término, harémos $z=s-\dfrac{\frac{21}{4}}{3}=s-\frac{7}{4}$ (50); y haciendo la sustitucion resulta despues de hechas todas la simplificaciones.

$$s^3-8=0,\ \text{que da}\ s^3=8,\ \text{y}\ s=\sqrt[3]{8}=2.$$

Ahora, sustituyendo este valor en el de z (ecuac. 50), se tiene $z=\frac{1}{4}$.

Y sustituyendo en las fórmulas (33) este valor de z, será

$$x'=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{4}-\frac{21}{4}+\frac{\frac{13}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{11}{2}+\frac{13}{2}}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2}}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4};\quad x''=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2}}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4};$$

$$x'''=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{4}-\frac{21}{4}-\frac{\frac{13}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{22}{4}-\frac{26}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{48}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{-12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{-3}=\frac{1}{4}+\sqrt{-3};$$

$$x^{IV}=\frac{1}{4}-\sqrt{-3};$$

y como $t=x+\frac{7}{4}$, si á cada uno de estos valores, añadimos $\frac{7}{4}$, se tendrán los cuatro valores siguientes que satisfacen á la (ecuac. 46);

$$t'=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=\frac{8}{4}=2;\qquad t'''=\frac{1}{4}+\sqrt{-3}+\frac{7}{4}=2+\sqrt{-3};$$

$$t''=-\frac{3}{4}+\frac{7}{4}=\frac{4}{4}=1;\qquad t^{IV}=\frac{1}{4}-\sqrt{-3}+\frac{7}{4}=2-\sqrt{-3}.$$

Pero como $u^{16}=t$, que da $u=\sqrt[16]{t}$, si sustituimos en esta ecuacion estos cuatro valores de t, resultará

$u=\sqrt[16]{2}$; $u=\sqrt[16]{1}=1$; $u=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}$; $u=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}$; y como cada una de estas espresiones multiplicada por las 16 raices de la unidad (295...6.º), nos dará los 16 valores que satisfacen á cada una de las espresiones $u=\sqrt[16]{2}$, $u=\sqrt[16]{1}=1$ &c., resulta que si acentuamos los valores correspondientes de u, obtendrémos los 64 que satisfacen á la ecuacion (44) y los siguientes:

$u^{\mathrm{I}}=\sqrt[16]{2}\,.\,1$

$u^{\mathrm{II}}=\sqrt[16]{2}\,.-1$

$u^{\mathrm{III}}=\sqrt[16]{2}\,.\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{IV}}=\sqrt[16]{2}\,.-\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{V}}=\sqrt[16]{2}\,.\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{VI}}=\sqrt[16]{2}\,.-\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{VII}}=\sqrt[16]{2}\,.\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{VIII}}=\sqrt[16]{2}\,.-\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{IX}}=\sqrt[16]{2}\,.\sqrt[8]{-1}$

$u^{\mathrm{X}}=\sqrt[16]{2}\,.-\sqrt[8]{-1}$

$u^{\mathrm{XI}}=\sqrt[16]{2}\,.\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{XII}}=\sqrt[16]{2}\,.-\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{XIII}}=\sqrt[16]{2}\,.\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XIV}}=\sqrt[16]{2}\,.-\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XV}}=\sqrt[16]{2}\,.\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XVI}}=\sqrt[16]{2}\,.-\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XVII}}=1$

$u^{\mathrm{XVIII}}=-1$

$u^{\mathrm{XIX}}=\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{XX}}=-\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{XXI}}=\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXII}}=-\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXIII}}=\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXIV}}=-\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXV}}=\sqrt[8]{-1}$

$u^{\mathrm{XXVI}}=-\sqrt[8]{-1}$

$u^{\mathrm{XXVII}}=\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{XXVIII}}=-\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{XXIX}}=\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXX}}=-\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXXI}}=\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXXII}}=-\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXXIII}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.\,1$

$u^{\mathrm{XXXIV}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.-1$

$u^{\mathrm{XXXV}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{XXXVI}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{XXXVII}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXXVIII}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXXIX}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXXX}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXXXI}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.\sqrt[8]{-1}$

$u^{\mathrm{XXXXII}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.-\sqrt[8]{-1}$

$u^{\mathrm{XXXXIII}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{XXXXIV}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.-\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{XXXXV}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXXXVI}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.-\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXXXVII}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{XXXXVIII}}=\sqrt[16]{2+\sqrt{-3}}\,.-\sqrt[8]{-1}\,.\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{IL}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\,1$

$u^{\mathrm{L}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.-1$

$u^{\mathrm{LI}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{LII}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{-1}$

$u^{\mathrm{LIII}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{LIV}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{-\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{LV}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$u^{\mathrm{LVI}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.-\sqrt{+\sqrt{-1}}$

$$u^{\mathrm{LVII}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\,\sqrt[8]{-1}$$
$$u^{\mathrm{LVIII}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\,-\sqrt[8]{-1}$$
$$u^{\mathrm{LIX}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\,\sqrt[8]{-1}\,.\,\sqrt{-1}$$
$$u^{\mathrm{LX}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\,-\sqrt[8]{-1}\,.\,\sqrt{-1}$$
$$u^{\mathrm{LXI}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\,\sqrt[8]{-1}\,.\,\sqrt{-\sqrt{-1}}$$
$$u^{\mathrm{LXII}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\,-\sqrt[8]{-1}\,.\,\sqrt{-\sqrt{-1}}$$
$$u^{\mathrm{LXIII}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\,\sqrt[8]{-1}\,.\,\sqrt{+\sqrt{-1}}$$
$$u^{\mathrm{LXIV}}=\sqrt[16]{2-\sqrt{-3}}\,.\,-\sqrt[8]{-1}\,.\,\sqrt{+\sqrt{-1}}.$$

Y cualquiera de ellos que se sustituya en vez de u en dicha ecuacion (44), reducirá su primer miembro á cero.

Observacion general acerca de la resolucion de las ecuaciones superiores á las del 4.° grado.

Los métodos precedentes, y todos los hallados hasta el dia, cuando se aplican á la descomposicion de las ecuaciones de un grado superior al 4.°, conducen ordinariamente á ecuaciones que aun no se saben resolver. Sin embargo, es posible que los coeficientes de la propuesta sean tales que la ecuacion que se obtenga y de que depende la determinacion de los coeficientes indeterminados, con los cuales se han compuesto los factores de la propuesta, se pueda resolver por los medios ya empleados. En caso de que no sucediese, no habia otro recurso que buscar por aproximacion las raices de la ecuacion; y para esto seria necesario conocer los diferentes límites de estas raices. Pero como las cantidades literales no tienen ningun valor determinado, no se pueden encontrar sus límites. Así, la aplicacion del método de los límites á la resolucion de las ecuaciones supone que los coeficientes de estas sean numéricos. Por lo cual en el tercer volúmen nos ocupamos con toda estension de la resolucion de las ecuaciones numéricas.

APÉNDICE 8.°

CUADRO ARQUITECTÓNICO DE LAS MATEMÁTICAS.

- MATEMÁTICAS. Objeto general. *Leyes de la forma del mundo físico,* ó *Leyes del tiempo y del espacio.*
  - Deduccion filosófica. (*por conceptos*). FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS.
    - *Saber,* Leyes subjetivas. =
      - *Contenido* del saber, ARQUITECTÓNICO DE LAS MATEMÁTICAS (cuyo producto es este cuadro).
      - *Forma* del saber, METODOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS.
    - *Ciencia,* Leyes objetivas. = METAFÍSICA DE LAS MATEMÁTICAS.
  - Deduccion matemática. (*por intuicion*). MATEMÁTICAS PROPIAMENTE DICHAS.
    - *En abstracto.* MATEMÁTICAS PURAS.
      - *Tiempo.* (Sucesion de los instantes). *Números.* ALGORÍTMIA.
        - *Leyes de los números.* ÁLGEBRA.
          - *Lo que es,* (Objeto del entendimiento). TEORÍA DEL ÁLGEBRA.
            - *Generacion.* (Punto de vista trascendental). CONSTITUCION ALGORÍTMICA.
              - Parte elemental.
                - Algoritmos teóricos *primitivos.*
                  - Generacion *descontinua,* SUMACION.
                    - Progresiva = ADICION.
                    - Regresiva = SUSTRACCION.
                  - *Neutralizacion* de la sumacion y de la graduacion. REPRODUCCION.
                    - Progresiva = MULTIPLICACION.
                    - Regresiva = DIVISION.
                  - Generacion *continua,* GRADUACION.
                    - Progresiva = POTENCIAS.
                    - Regresiva = RAICES.
                - Algoritmos teóricos *derivados.*
                  - Inmediatos. . . . .
                    - Reproduccion con sumacion. . . .
                      - General = NUMERACION.
                      - Particular = NUMERALES.
                    - Reproduccion con graduacion. . .
                      - General = FACULTADES.
                      - Particular = FACTORIALES.
                  - Mediatos. . . . .
                    - Transicion de la numeracion á las facultades. = LOGARITMOS.
                    - Transicion de las facultades á la numeracion. = SENOS.
              - Parte sistemática.
                - *Diversidad* sistemática en la reunion de los algoritmos elementales.
                  - Influencia *parcial.*
                    - De la sumacion en la graduacion, DIFERENCIAS.
                      - Reales = DIFERENCIAS (estrictamente dichas).
                      - Ideales = DIFERENCIALES.
                    - De la graduacion en la sumacion, GRADOS.
                      - Reales = GRADOS (estrictamente dichos).
                      - Ideales = GRÁDULOS.
                  - Influencia *recíproca* de la sumacion en la graduacion, y de la graduacion en la sumacion. = NÚMEROS.
                - *Identidad* sistemática en la reunion de los algoritmos elementales. = EQUIVALENCIAS.
            - *Relacion.* (Punto de vista lógico). COMPARACION ALGORÍTMICA.
              - Parte elemental.
                - Relacion de igualdad. = IGUALDAD.
                - Relacion de desigualdad, RAZONES.
                  - Razon de SUMACION (aritmética).
                  - Razon de REPRODUCCION (geométrica).
                  - Razon de GRADUACION (de saltacion).
              - Parte sistemática.
                - Relacion de igualdad, ECUACIONES.
                  - Dependiente de la *identidad* sistemática. . . . . = ECUACIONES DE EQUIVALENCIA.
                  - Dependiente de la *diversidad* sistemática.
                    - *Parcial.* . . . . = ECUACIONES DE DIFERENCIAS. ECUACIONES DE GRADOS.
                    - *Recíproca.* . . . . = ECUACIONES DE CONGRUENCIA.
                - Relacion de desigualdad. = DESIGUALDADES.
          - *Lo que es necesario hacer,* (Objet de la voluntad). TECNIA DEL ÁLGEBRA.
            - *Generacion.* (Preponderancia del entendimiento). MEDIOS ALGORÍTMICOS.
              - Parte elemental. VALORES.
                - Algoritmos técnicos *primitivos.*
                  - Generacion técnica *por sumacion.*
                    - General. . . . . = SERIES.
                    - Particular. . . . . = FRACCIONES CONTINUAS.
                  - Generacion técnica *por graduacion.*
                    - General. . . . . = FACULTADES (estrictamente dichas).
                    - Particular. . . . . = PRODUCIDAS CONTINUAS.
                - Algoritmos técnicos *derivados.* = INTERPOLACION.
              - Parte sistemática. DESARROLLOS. = LEI ALGORÍTMICA ABSOLUTA.
            - *Relacion.* (Preponderancia de la voluntad). = FINES ALGORÍTMICOS.
        - *Hechos de los números.* = ARITMÉTICA.
      - *Espacio.* (Conjunto de puntos). *Estension.* GEOMETRÍA.
        - *Leyes de la estension.* GEOMETRÍA GENERAL.
          - *Lo que es,* (Objeto del entendimiento). TEORÍA DE LA GEOMETRÍA.
            - *Generacion.* (Punto de vista trascendental). CONSTITUCION GEOMÉTRICA.
              - Parte elemental.
                - Estension elemental *primitiva.*
                  - Generacion *descontinua* (en los límites de la estension). . . . = LÍNEAS RECTAS.
                  - Transicion de las lineas rectas á las curvas. . . = ÁNGULOS.
                  - Generacion *continua* (en los límites de la estension). . . . . = LÍNEAS CURVAS.
                - Estension elemental *derivada.* = SUPERFICIES.
              - Parte sistemática. = SÓLIDOS.
            - *Relacion.* (Punto de vista lógico.) = COMPARACION GEOMÉTRICA (*semejanza*).
          - *Lo que es necesario hacer,* (Objet de la voluntad). TECNIA DE LA GEOMETRÍA.
            - *Generacion.* (Preponderancia del entendimiento). MEDIOS GEOMÉTRICOS.
              - Parte elemental, LUGARES.
                - Geométricos ó *primitivos,* INTERSECCION.
                  - Generacion técnica por *lineas rectas.* . . . . = INTERSECCION INMANENTE.
                  - Generacion técnica por *lineas curvas.* . . . . = INTERSECCION TRASCENDENTE.
                - Algorítmicos ó *derivados.* = RAZONES. (Aplicacion del Algoritmo á la Geometría, sin coordenadas).
              - Parte sistemática, COORDENADAS.
                - Geométricas, = PROYECCIONES. (GEOMETRÍA DESCRIPTIVA).
                - Algorítmicas. = ECUACIONES. (GEOMETRÍA ALGORÍTMICA, llamada inexactamente *Geometria analítica*).
            - *Relacion.* (Preponderancia de la voluntad). = FINES GEOMÉTRICOS.
        - *Hechos de la estension.* = GEOMTRÍA PARTICULAR.
    - *En concreto.* MATEMÁTICAS MISTAS.

ERRATAS

que se deberán corregir ántes de estudiar esta obra.

Página.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
21	2	175435	175434
34	37	por o	pongo o
37	34	8658	9658
42	43	166320	169320
66	9	,4,4·4,4,1;	,4,4,+,4,1;
98	39	cociente 4721	cociente es 4721
101	ejemplo	$4620054 \mid \underline{78306}$	$462005{,}4 \mid \underline{78306}$
146	37	la entera	los enteros
146	ejemplo	246,325 7	$246{,}325 \mid \underline{7}$
164	ejemplo	$\frac{41}{51}$	$\frac{41}{50}$
185	11	$+3b^3$	$+3b^2$
193	18	$\begin{cases} -a \\ -1 \end{cases}$	$\left\{\frac{-a}{-1}\right.$
202	nota	$\begin{cases} x' \\ a_o \end{cases}$	$\left\{\frac{x'}{a^o}\right.$
222	8	$\sqrt{a^r b^s}$	$\sqrt[n]{a^r b^s}$
226	19	$(1-)^{\frac{1}{2}}$	$(-1)^{\frac{1}{2}}$
228	3	$+=1$	$=+1$
245	40	$x=\frac{6000}{25}2=40$	$x=\frac{6000}{25}=240$
280	5	$=14-4x$	$=15-4x$
280	34	$(p+a)\ (p+a)$	$(p+a)\ (p+b)$
304	14	el primero	al primero
310	8	por ejemplos	por ejemplo
314	25	francesas	francesas,
315	3	120 toesas	100 toesas
360	44	dei	del
375	17	10 z	$10-z$
396	44	$a^x a^z$	$a^x a^{z'}$
401	22	los divisores	la division
408	32	admite	advierte
409	31	$\begin{cases} q'' \\ n'' \end{cases}$	$\left\{\frac{q''}{n''}\right.$
419	19	$\begin{cases} M \\ N \end{cases}$	$\left\{\frac{M}{N}\right.$
431	40	$E'=\frac{(hv''+d)v''}{v''-v'}$	$E'=\frac{(hv''+d)v'}{v''-v'}$
432	33	$E''=\frac{(hv''-d)v''}{v''-v'}$	$E''=\frac{(hv'-d)v''}{v''-v'}$