



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO
**EL USO DE FIBRADOS
DIFERENCIABLES EN
LAS TEORÍAS DE
GAUGE**

Presentado por:
Pablo de la Torre Domínguez

Curso Académico 2021/2022

Resumen

Poniéndonos en contexto, esto es un trabajo de fin de grado del grado en física, pero realizado con el departamento de geometría y topología. Es por eso, que se hace especial atención a la correcta definición de cada concepto a nivel matemático, llegando a ocupar las secciones 2 y 3 que son las que están dedicadas a las matemáticas, dos tercios de la extensión del trabajo.

El orden ha sido primero definir todos los conceptos matemáticos, posteriormente introducir las teorías físicas de interés (entre las cuales destacan las teorías de gauge), y por último, interpretarlas según el formalismo de los fibrados diferenciables. Respecto a la parte de matemáticas, la sección 2 busca introducir los conceptos principales de la geometría diferencial, además, se ha visto como conceptos familiares para los físicos encuentran se entienden mejor como objetos de este campo. La sección 3 habla de los fibrados principales, que son los de mayor interés físico. Como ejemplo de estos, destacan los fibrados de Hopf. En cuanto a la parte física, se ha desarrollado la teoría gauge electromagnética y la de Yang-Mills. El formalismo de fibrados ha permitido ver estas teorías gauge desde un punto de vista geométrico, simple y nuevo. Además, se han interpretado el efecto Aharonov-Bohm junto a los monopolos magnéticos, y los instantones, como diferentes fibrados de Hopf. Por otro lado, el hecho de que haya un límite de 40 páginas, ha obligado a escribir todo de manera muy compacta y a suprimir cálculos y demostraciones de algunos teoremas. Aún así, el lector interesado en alguna de las mismas, puede recurrir a ellas mediante las referencias correctamente indicadas.

Abstract

To begin with, we have to put into context this work. This is a bachelor's physics degree final project, but it has been done with the geometry and topology department. For this reason, special attention is given to the correct definition of all mathematical concepts. The sections 2 and 3, the ones that deal with mathematics, have an extension of two thirds of the total project.

First, we have talked about mathematical concepts, after that, about the physical theories that interest us (among them, the gauge theories are the most significant). Finally, we have interpreted the theories within the framework of fiber bundles. Concerning to the mathematical part, section 2 seeks to introduce the most important concepts in differential geometry. Also, we have talked about some mathematical concepts that are familiar for the physics and, are better understood as objects of this field of mathematics. In section 2 we have defined principal bundles, that are the most interesting bundles for physics. As an example of these, they stand out the Hopf Bundles. Regarding the physics, electromagnetic and Yang-Mills gauge theories has been explained. Th fiber bundles theory has allowed us to explain these gauge theories from a geometrical, simple and new point of view. We have also seen Aharonov-Bohm with magnetic monopoles, and instantons, as different Hopf bundles. On the other hand, the fact that, ther is a maximum of 40 pages, has forced us to write in a very compact way, and not to write all calculations and demonstrations of theorems. Even so, the reader that is interested in any of them, can resort to them through the correctly indicated references.

Índice

Título	1
1 Introducción	4
2 Fundamentos de Geometría Diferencial	4
2.1 Variedades Diferenciables	4
2.2 Espacio Tangente	7
2.2.1 Espacio Tangente como ejemplo de Fibrado	8
2.3 Espacio Cotangente	9
2.4 Tensores	10
2.5 Formas diferenciales o r -formas	12
2.6 Métrica sobre una variedad	13
2.6.1 Elemento de Volumen	14
2.6.2 Estrella de Hodge	15
2.6.3 Integración	16
2.7 Operadores Geométricos Clásicos	16
3 Fibrados Principales	19
3.1 Grupos de Lie	19
3.2 Fibrados con grupo de estructura	22
3.3 Fibrados asociados a un Fibrado Principal	23
3.4 Conexión	24
3.5 Curvatura	25
3.6 Ejemplos: Fibrados De Hopf	26
4 Teorías abelianas: Electromagnetismo	29
4.1 Electromagnetismo Clásico	29
4.2 Electromagnetismo aplicado a la Ecuación de Schrödinger	30
4.2.1 Efecto Aharonov-Bohm	31
4.3 Electrodinámica Cuántica	33
4.4 Electromagnetismo aplicado a una partícula de spin 0	36
4.4.1 Monopolos Magnéticos de Dirac	37
5 Teorías no abelianas: Yang-Mills	38
5.1 Ecuaciones de Yang-Mills e Instantón BPST	40
6 Conclusiones	41
Referencias	43

1 Introducción

“He llegado a estar profundamente impregnado de un gran respeto a las matemáticas, cuya parte más sutil yo había despreciado, en mi ignorancia, como puro lujo.”

Einstein en una carta a Sommerfeld.[12]

Toda la teoría matemática en que se fundamenta este trabajo pertenece a la geometría diferencial. Es por eso, que, antes que nada, se pretende hacer una introducción a los principales conceptos de la misma. De esta forma, una vez empecemos a hablar de física solo tendremos que ir interpretando cada elemento matemático como un cierto objeto que dotamos de significado físico. A su vez, estos objetos físicos se relacionarán entre sí mediante las reglas que nos vendrán dadas por el formalismo de la geometría diferencial.

Por otro lado, puesto que el trabajo está enfocado a la aplicación física de este formalismo matemático, se intentará ir dando una interpretación geométrica e intuitiva de cada uno de los objetos matemáticos que vayan apareciendo, además de su correcta definición matemática. De esta manera, podremos interiorizar más el “mundo de la geometría diferencial”, de forma que obtengamos una cierta intuición de como se comportan cada uno de los objetos en “este mundo”. Así, podremos pasar luego más fácilmente a la interpretación de estos objetos matemáticos a objetos físicos, sabiendo lo que estamos haciendo, y sin perderse en el formalismo matemático.

2 Fundamentos de Geometría Diferencial

2.1 Variedades Diferenciables

Abordamos la definición de *variedad diferenciable* desde el punto de vista de los conjuntos. En primera instancia, partimos de un espacio M sin estructura alguna, ni siquiera la de espacio topológico. Únicamente consideramos a M como un conjunto de puntos. A continuación definimos una serie de *sistemas de coordenadas o mapas* que ponen en correspondencia biyectiva partes de M con abiertos de \mathbb{R}^n . Y viceversa, dado uno de estos mapas x_α , se pone en correspondencia los puntos de un conjunto abierto U_α de \mathbb{R}^n con cierto subconjunto de M de forma inyectiva, lo que nos da una parametrización de cierta región de M .

Definición 2.1.1. Una **variedad diferenciable** de dimensión n es un conjunto M y una familia de aplicaciones biyectivas, $x_\alpha : V_\alpha \subset M \longrightarrow U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, sobre conjuntos abiertos U_α de \mathbb{R}^n , que cumplen:

- (i) $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$
- (ii) Para cada par α, β , con $V_\alpha \cap V_\beta = W \neq \emptyset$, los conjuntos $x_\alpha(W)$ y $x_\beta(W)$ son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n y las aplicaciones $x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(W) \longrightarrow x_\beta(W)$ son difeomorfismos (de clase C^∞) entre abiertos de \mathbb{R}^n .
- (iii) La familia (V_α, x_α) es máxima relativa a las condiciones i) y ii).

A un (V_α, x_α) se le llama **sistema de coordenadas** de M y a $x_\alpha^{-1} : U_\alpha \rightarrow M$ se le llama **parametrización** de M . Si $p \in V_\alpha$, entonces V_α es denominado un **entorno coordinado** de p . Una familia (V_α, x_α) que satisfaga i) y ii), se llama un **atlas** de M y el atlas máximo es la llamada **estructura diferenciable** de M [4, p. 2]. Denotamos $\dim M = n$.

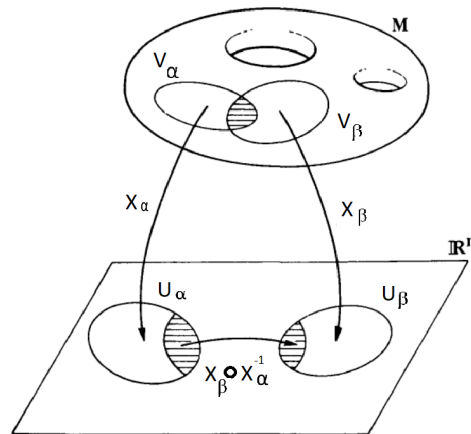


Figura 1: Ilustración de la definición 2.1.1 [2, p. 7]

Podemos decir que una variedad diferenciable es un conjunto equipado con una estructura diferenciable.

La propiedad (i) nos dice que podemos ir haciendo diferentes sistemas de coordenadas alrededor de diferentes puntos de M , asociando diferentes conjuntos de M a abiertos de \mathbb{R}^n , de forma que, uniendo todos los entornos coordinados, podemos llegar a cubrir todo M .

La propiedad (ii) nos dice que si tenemos dos sistemas de coordenadas, x_α y x_β , que cubren una misma región de M , la transformación de \mathbb{R}^n , $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$, que pasa de las coordenadas de un punto en un mapa a las coordenadas de ese mismo punto en el otro mapa es una función continua y diferenciable, existiendo las derivadas parciales de todos los órdenes. Se les llama funciones *de cambio de coordenadas*.

Otra cosa importante que nos dice (ii) es que la región máxima cubierta simultáneamente por dos sistemas de coordenadas, por intermedio de ambos, se corresponde con abiertos de \mathbb{R}^n y que la función de cambio de coordenadas entre dichos abiertos de \mathbb{R}^n es un *homeomorfismo*, es decir, una aplicación biyectiva, continua y con inversa continua.

Por último, la propiedad (iii) pone en pie de igualdad todas los mapas posibles siempre que verifiquen (ii).

Topología de la variedad diferenciable

Una estructura diferenciable en un conjunto M induce una topología en M . Para ello definamos $A \subset M$ como un conjunto abierto de M si y solo si $x_\alpha(A \cap V_\alpha)$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , para todo α . Es suficiente que se verifique esta propiedad en un atlas de M para que se verifique en toda la estructura diferenciable.

No es difícil verificar que M y el vacío son conjuntos abiertos, que la unión de conjuntos abiertos es abierto, y que la intersección finita de conjuntos abiertos es también abierto. En la topología de M , así definida, los conjuntos V_α son abiertos y cada mapa $x_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ es un *homeomorfismo* entre el abiertos V_α de M y el abierto U_α de \mathbb{R}^n .

Ahora podemos hablar de entornos en M : para cada punto $p \in M$, a cualquier abierto de M que contenga a dicho punto se le llamará *entorno de p* .

Por último, remarquemos que dada la estructura de variedad diferenciable a M , las aplicaciones de cambio de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ no son sólo homeomorfismos, sino que son difeomorfismos de clase C^∞ .

Comentario. En este trabajo designaremos por variedad una variedad diferenciable, C^∞ , cuya topología es Hausdorff y admite una base numerable.

Aplicaciones diferenciables entre variedades

Una aplicación f entre dos variedades M y N de dimensiones n y q , respectivamente, se puede escribir en coordenadas dando dos mapas x_α de M e y_β de N . Podemos decir que la función $y_\beta \circ f \circ x_\alpha^{-1}$ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^q , que asigna a las coordenadas de un punto de M las coordenadas de la imagen por f de dicho punto, es una *expresión de f en coordenadas*. Diremos que $f : M \rightarrow N$ es una *aplicación diferenciable* si lo es cada una de sus expresiones en coordenadas. Para que f sea diferenciable basta que, para los mapas x_α de un atlas de M e y_β de otro de N , las aplicaciones $y_\beta \circ f \circ x_\alpha^{-1}$ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^q sean diferenciables en los dominios donde están definidas.

En particular, una aplicación γ de \mathbb{R}^s en M se dice que es diferenciable si la composición $x_\alpha \circ \gamma$ es diferenciable para cualquier posible α . Igualmente, una aplicación f de M en \mathbb{R}^s es por definición diferenciable si son diferenciables las composiciones $f \circ x_\alpha^{-1}$.

Las funciones diferenciables de M en \mathbb{R} son las llamadas funciones escalares (también denominadas campos escalares). Una *función escalar* sobre una variedad M es una aplicación $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, que asocia a cada punto $p \in M$ un número real (también podemos definir funciones sobre escalares complejos; en este caso se diría que es diferenciable si lo es como función sobre \mathbb{R}^2 , identificado este con \mathbb{C}). Al conjunto de las funciones escalares sobre M lo llamaremos $\mathcal{F}(M)$. Como es de esperar, estas funciones escalares no cambian su valor al cambiar de sistema de coordenadas.

Una función diferenciable $\gamma : I \rightarrow M$, con I un intervalo abierto de \mathbb{R} , es llamada una *curva* (diferenciable) de M . En este caso, deben ser diferenciables las curvas $x_\alpha \circ \gamma$ de \mathbb{R}^n , con los dominios de los mapas cubriendo la imagen de la curva γ .

Comentario. Si no se advierte lo contrario, todas las aplicaciones (escalares, curvas, secciones, proyecciones, etc.) entre variedades las entenderemos como aplicaciones diferenciables de clase C^∞ .

Si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable, aunque la matriz jacobiana de la expresión de f en coordenadas es diferente según los mapas que se empleen, el rango que tiene su matriz jacobiana en cada $p \in M$ es independiente de los sistemas de coordenadas.

Diremos que f es una *inmersión* o una *submersión* si el rango de la matriz jacobiana en p es igual a $\dim M$ o a $\dim N$, respectivamente, $\forall p \in M$. Diremos que f es un *difeomorfismo local*, si $\dim M = \dim N$ e igual al rango de la matriz jacobiana en p , $\forall p \in M$. Si f es

una *inmersión inyectiva* diremos que se trata de una *subvariedad de N* ; si f es una *submersión sobreyectiva* diremos que es una *proyección*; por último, si f es un *difeomorfismo local biyectivo* entonces se trata de un *difeomorfismo*, es decir, que f es biyectiva, diferenciable y f^{-1} es diferenciable.

2.2 Espacio Tangente

Cada variedad diferenciable lleva asociada un espacio vectorial en cada punto llamado espacio tangente y puede ser definido de varias maneras equivalentes.

Definición 2.2.1. Sea M una variedad y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ una curva en M , con $\gamma(0) = p$. El *vector tangente a la curva γ en $t = 0$* es una función $\gamma'(0) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\gamma'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}, \quad \text{con } f \in \mathcal{F}(M) \quad (2.1)$$

Un *vector tangente de M en p* es un vector tangente a alguna curva γ en $t = 0$, con $\gamma(0) = p$. El conjunto de todos los vectores tangentes en p forman el *espacio tangente de M en p* y se denota como $T_p M$.

De esta definición se sigue fácilmente que un vector tangente de M en p es un operador lineal $\vec{v} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica

$$\vec{v}(fg) = \vec{v}(f)g(p) + f(p)\vec{v}(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(M). \quad (2.2)$$

Como definición alternativa, se puede decir que un vector tangente de M en p es un operador lineal sobre $\mathcal{F}(M)$ que verifica (2.2).

Claramente, dos vectores tangentes en p pueden sumarse para dar un tercero y un múltiplo real de un vector tangente da otro vector. Por lo tanto, podemos ver que:

Teorema 2.1. El espacio tangente $T_p M$ tiene estructura de espacio vectorial real con dimensión finita $\dim T_p M = \dim M$.

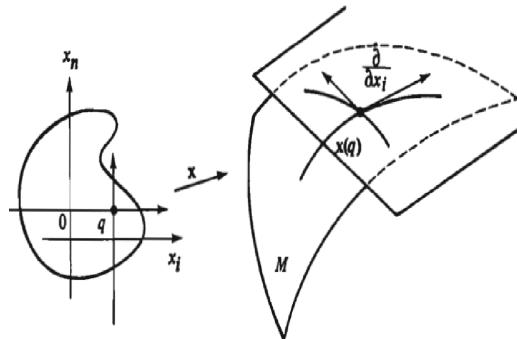


Figura 2: Espacio tangente en el sistema de coordenadas de x . [4, p. 8]

Observación 2.2.1. Hemos visto cómo, **una curva** que pase por un punto p , **induce un vector** en dicho punto. Este vector tendrá su origen en p , su dirección será aquella

tangente a la curva en p , y su magnitud dependerá de la “velocidad de la curva en dicho punto”. De esta manera, diferenciando todas las curvas posibles que pasen por p , podemos obtener todos los posibles vectores tangentes a la variedad en p , es decir, así obtenemos todo el espacio T_pM (ver figura 2).

Observación 2.2.2. Hay que decir que no podemos hablar todavía del “módulo del vector” que hemos inducido en el punto p , dado que el módulo del vector de \mathbb{R}^n

$$\left(\left. \frac{dx^1(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0}, \dots, \left. \frac{dx^n(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} \right) \tag{2.3}$$

depende del sistema de coordenadas que hayamos usado. Para obtener el concepto de módulo debemos introducir una métrica en T_pM , como veremos más adelante.

Observación 2.2.3. Una curva induce un vector en un punto, y dicho vector es una aplicación sobre las funciones escalares diferenciables en dicho punto, que actúa de manera similar a una derivada direccional de una función según un vector.

2.2.1 Espacio Tangente como ejemplo de Fibrado

En este trabajo un **fibrado** será entendido como una submersión suprayectiva (proyección) $\pi : P \rightarrow M$ que es localmente trivializable; esto es: existe una variedad (fibra típica) F tal que, $\forall m \in M$, existe un entorno U de m y existe un difeomorfismo (trivialización local de P) $\Psi : P|_U \rightarrow U \times F$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P|_U & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ \downarrow \pi & \swarrow pr_1 & \\ U & & \end{array}$$

Definición 2.2.2. Definiremos una sección local de un fibrado como el mapa $\sigma : U \rightarrow P$ (U abierto de M) de forma que $\pi \circ \sigma = I_u$ (siendo I_u la identidad en U) [2, p.27].

Definición 2.2.3. Sea $\Psi : P|_U \rightarrow U \times G$ una trivialización local con $U=M$, llamaremos a Ψ una **trivialización global**, y el fibrado principal se llamará **trivial** si dicho Ψ existe. Una sección local $\sigma : U \rightarrow P$ se llamará **sección global** si $U = M$ [2, p.27].

Teorema 2.2. *Un fibrado principal es trivial si y solo si posee una sección global (ver demostración en [5, p.230])*

Un fibrado $P(M, F, \pi)$ con fibra típica F , base M , espacio total P , y proyección π , será denotado por $P(M, F)$ o $P \rightarrow M$ o, simplemente, por P , según lo que se dé por sobrentendido.

Como hemos dicho, dada una variedad M y $p \in M$, T_pM es el espacio tangente a M en p . Podemos ahora crear un espacio más grande uniendo los espacios tangentes a cada punto de la variedad. Este es el espacio tangente de la variedad:

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM = \{ \vec{v} \in T_pM : p \in M \}. \tag{2.4}$$

Podemos elegir un sistema de coordenadas para TM mediante $\vec{v} \mapsto (p, (a^1, \dots, a^n))$, siendo $\vec{v} = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M$. A partir de estas coordenadas se obtiene un atlas, por lo que TM es una variedad. Por lo tanto, la fibra típica será \mathbb{R}^n . Definimos la proyección π como la aplicación $\pi : TM \rightarrow M$ tal que $\pi(\vec{v}) = p, \forall \vec{v} \in T_p M$. Es decir, π lleva cada vector al punto de su origen. Sea U un abierto de M , obtendremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} TM|_U & \xrightarrow{\Psi} & U \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & \swarrow pr_1 & \\ U & & \end{array}$$

En concreto, TM será un fibrado vectorial [5, p.249, ejemplo 2].

Campos de Vectores

El conjunto $\mathfrak{X}(M)$ de campos de vectores sobre M . Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, escribiremos $X|_p \in T_p M$.

Definición 2.2.4. Definiremos una **sección local** de un fibrado como la aplicación $\sigma : U \rightarrow P$ (U abierto de M) de forma que $\pi \circ \sigma = I_U$ (siendo I_U la identidad en U). Sea una sección local con $U=M$, llamaremos a σ una **sección global**.

De esta manera, los campos de vectores pueden verse como una sección global del espacio fibrado TM , dado por la función $Y : M \rightarrow TM$, de forma que $Y_x \in T_x M$ y la función $x \rightarrow Y_x(f)$ son C^∞ . Denotaremos a esta función como $Y(f)$, y a los campos vectoriales en M como $Sec(TM)$.

Definición 2.2.5. Sean $Y, Z \in Sec(TM)$, entonces $[Y, Z]$ es un campo vectorial dado por $[Y, Z]_x(f) = Y_x[Z(f)] - Z_x[Y(f)]$. Omitimos la prueba de la existencia y unicidad de $[Y, Z]$ (ver [6]). Llamaremos a esta operación $[,]$ como **conmutación**. Puede observarse que ésta es antisimétrica ($[Y, Z] = -[Z, Y]$), y cumple la propiedad cíclica $[Y, [Z, W]] + [W, [Y, Z]] + [Z, [W, Y]] = 0$ (**identidad de Jacobi**) [2, p.8].

Definición 2.2.6. Sea $Y \in Sec(TM)$ de forma que (para cada $x \in M$) hay una curva $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow M$ que pase por x , y que cumple $\gamma'_x(t) = Y_{\gamma_x(t)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Un campo Y con dichas propiedades se dice que es **completo**. Para $t \in \mathbb{R}$, definimos $\phi_t : M \rightarrow M$, mediante $\phi_t(x) = \gamma_x(t)$. Podemos probar que ϕ_t es un difeomorfismo, y que $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$. El conjunto $\{\phi_t / t \in \mathbb{R}\}$ se llama **grupos a un parámetro generados por Y** [2, p.9].

2.3 Espacio Cotangente

Para cada espacio vectorial (como puede ser $T_p M$), hay un **espacio dual** asociado. Este viene definido según:

Definición 2.3.1. Sea V un espacio vectorial:

- (i) Su espacio dual asociado V^* , es el conjunto de todas las aplicaciones lineales $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$, también llamadas *formas lineales* o *covectores*. El valor $\varphi(\vec{v})$ se puede denotar también como $\langle \varphi, \vec{v} \rangle$ o (φ, \vec{v}) , pero nosotros no lo usaremos.
- (ii) El espacio V^* tiene la estructura de espacio vectorial. Si V es de dimensión finita entonces $\dim V^* = \dim V$. Si V tiene una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, podemos definir la base dual de B como la base del espacio dual V^* , $B^* = \{\phi^1, \dots, \phi^n\}$, con aquellas formas lineales que cumplen $\phi^i(e_j) = \delta_j^i$, para todo $i, j = 1, \dots, n$.
- (iii) Si $A : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales V y W , la *aplicación dual* o *traspuesta* de A , $A^t : W^* \rightarrow V^*$, está definida actuando sobre $\varphi \in W^*$ por $A^t(\varphi)(\vec{v}) := \varphi(A(\vec{v}))$. Podemos también decir que $A^t(\varphi) = \varphi \circ A$. Notamos que la aplicación A^t es lineal con respecto a las estructuras de espacio vectorial de los espacios duales W^* y V^* .

Comentario. Obsérvese en (iii) que la función $A : V \rightarrow W$ va del espacio vectorial V al W mientras que la función $A^t : W^* \rightarrow V^*$ va de W^* a V^* (y no de V^* a W^*). No es de extrañar que muchas veces a $A^t(\varphi)$ se le llame el “pull-back” de φ respecto a A . Es decir, estamos “trayendo de vuelta” la aplicación φ de W^* a V^* . Posteriormente usaremos esto para definir el pull-back de la diferencial de una aplicación entre variedades (ver la ecuación (2.11)).

El espacio $T_p M$ tangente de M en p es un espacio vectorial y, por tanto, tiene un espacio dual al que llamamos el *espacio cotangente* de M en p , y lo denotamos por $T_p^* M$. Este es pues al conjunto de todas las formas lineales $\phi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$.

Siguiendo con las bases de vectores coordenados $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$, podemos ahora definir su base dual

$$\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}, \quad (2.5)$$

caracterizada por $dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i$. Posteriormente, cuando introduzcamos la diferencial exterior de una función, veremos que dx^i es, en efecto, la diferencial exterior de la función coordenada x^i .

En analogía con la sección 2.2.1, se puede demostrar que T^*M tiene estructura de fibrado. E igualmente que para los campos de vectores en 2.2.1, los campos de formas lineales son secciones de T^*M .

2.4 Tensores

Sea \otimes el símbolo para el producto tensorial (para la definición formal del producto tensorial de espacios vectoriales referimos a [5, p.132]). Denotemos por $\otimes^r V$ al espacio vectorial formado al tomar el producto tensorial de V consigo mismo r veces.

Definición 2.4.1. Un tensor de tipo (r, s) en un punto p es un elemento, μ , del espacio del producto tensorial:

$$T_p^{r,s} M := [\otimes^r T_p M] \otimes [\otimes^s T_p^* M]. \quad (2.6)$$

Se puede considerar μ como una aplicación multilinear del tipo [5, p.133]:

$$\mu : T_p^* M \times \cdots \times T_p^* M \times T_p M \times \cdots \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La operación de producto tensorial entre tensores de M se define de la siguiente manera:

Definición 2.4.2. Sean $\mu \in T_p^{r,s} M$ y $\nu \in T_p^{t,l} M$. Se define el producto tensorial de μ y ν , denotado por $\mu \otimes \nu \in T_p^{r+t, s+l} M$, como la aplicación multilinear

$$\begin{aligned} \mu \otimes \nu : T_p^* M \times \cdots \times T_p^* M \times T_p M \times \cdots \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mu \otimes \nu (\varphi^1, \dots, \varphi^{r+t}, u_1, \dots, u_{s+l}) &:= \\ \mu (\varphi^1, \dots, \varphi^r, u_1, \dots, u_s) \nu (\varphi^{r+1}, \dots, \varphi^{r+t}, u_{s+1}, \dots, u_{s+l}) \end{aligned}$$

Observación 2.4.1. Sea el espacio $T = \otimes^r V$. Para el caso en que $r = 0$, identificamos (por convenio) dicho espacio T con \mathbb{R} . De esta manera existe un isomorfismo canónico $W \otimes \mathbb{R} \cong W$ para cualquier espacio vectorial real W .

Observación 2.4.2. Los tensores de tipo (r, s) incluyen los siguientes casos particulares: $T_p^{0,1} M = T_p^* M$, que es simplemente el espacio dual de $T_p M$. Nótese que, para cualquier espacio vectorial de dimensión finita V , hay un isomorfismo $\chi : V \rightarrow (V^*)^* = V^{**}$, dado por $\chi(v)(\phi) := \phi(v)$; por esto, $T_p^{1,0} M = (T_p^* M)^* \cong T_p M$. Al espacio $T_p^{r,0} M$ le llamaremos el espacio de tensores r -contravariantes y al espacio $T_p^{0,s} M$ le llamaremos el espacio de tensores s -covariantes.

Tanto en Geometría como en Física se trabaja más comúnmente con “**campos de tensores**”, es decir, con “**secciones**” $\mu : M \rightarrow T^{r,s} M$ que aplica p en $\mu(p) \equiv \mu|_p \in T_p^{r,s} M$. Las coordenadas del campo de tensores son ahora funciones escalares; y diremos que el campo de tensores es diferenciable si sus funciones coordenadas lo son en uno y, por tanto, en cualquier sistema de coordenadas. Utilizaremos también la palabra tensor para referirnos a un campo de tensores.

Tensores V -valuados

Análogamente a un tensor de tipo (r, s) , podemos definir los tensores V -valuados de tipo (r, s) :

Definición 2.4.3. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Definimos $T_p^{r,s}(M, V)$ como el espacio de aplicaciones multilineales (**tensores V -valuados**), μ de la forma

$$\mu : T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M \times T_pM \times \cdots \times T_pM \longrightarrow V. \quad (2.7)$$

En particular, al espacio de tensores r -covariantes antisimétricos V -valuados lo denotaremos por $A_p^r(M, V)$.

Comentario. Resulta, pues, equivalente $T_p^{r,s}(M, \mathbb{R})$, con $T_p^{r,s}(M)$

2.5 Formas diferenciales o r -formas

Si del conjunto de tensores r -covariantes $T_p^{0,r}M \equiv \otimes^r T_p^*M$, nos quedamos con los antisimétricos, obtenemos el espacio A_p^rM . Una sección consistente en elegir diferenciablemente un tensor de A_p^rM , $\forall p \in M$, es lo que se llama una **formas diferencial de grado r** (o **r -forma**) sobre M . Denotamos por $\Lambda^r(M)$ al espacio de r -formas. Dado un elemento $\mu \in \Lambda^r(M)$, denotaremos por $\mu|_p \equiv \mu(p)$ a la aplicación r -lineal antisimétrica $\mu|_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Si $v_1, \dots, v_r \in T_pM$, escribiremos $\mu(v_1, \dots, v_r) \equiv \mu|_p(v_1, \dots, v_r)$. Entenderemos que $\Lambda^0(M) \equiv \mathcal{F}(M)$.

Producto Exterior de r -formas

Dadas una r -forma μ y una s -forma β , definimos su producto exterior como [7, p.8]:

$$\mu \wedge \beta := \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathcal{A}(\mu \otimes \beta), \quad (2.8)$$

donde $\mathcal{A}(T)$ denota el antisimetrizado de un tensor p veces covariante, T , dado por:

$$\mathcal{A}(T)(v_1 \dots v_r) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \pm^\sigma T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}),$$

siendo S_r el conjunto de las permutaciones de $\{1, \dots, r\}$, y donde \pm^σ es el signo de la permutación σ .

Una r -forma μ se expresará en el dominio de un sistema de coordenadas como:

$$\mu = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \mu_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \quad (2.9)$$

donde $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} : i_1 < \dots < i_r\}$ forman la base de r -formas correspondiente a un sistema de coordenadas y las componentes $\mu_{i_1 \dots i_r}$ son funciones escalares diferenciables.

Diferencial Exterior

La **diferencial exterior** d es un operador \mathbb{R} -lineal sobre las r -formas para dar lugar a $r+1$ -formas. Sea $f \in \mathcal{F}(M) \equiv \Lambda^0(M)$, la diferencial exterior de f es $df \in \Lambda^1(M)$, definida por $df(Y) = Y(f)$, para un vector arbitrario $Y \in T_pM$. Si $\mu \in \Lambda^r(M)$, se define

$d\mu$ como la $(r+1)$ -forma que, en el dominio $V \subset M$ del sistema de coordenadas, viene dada por:

$$\begin{aligned} d\mu &= \frac{1}{r!} \sum d(\mu_{i_1 \dots i_r}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \\ &= \frac{1}{r!} \sum \frac{\partial}{\partial x^i} (\mu_{i_1 \dots i_r}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Hemos expresado directamente el producto exterior en función de un sistema de coordenadas, porque es como más nos convendrá cuando la usemos. Aún así, no es difícil demostrar que $d\mu$ no depende del sistema de coordenadas elegido.

La diferencial exterior verifica las siguientes propiedades:

$$(i) d \circ d = 0; \quad (ii) d(\mu \wedge \beta) = d\mu \wedge \beta + (-1)^r \mu \wedge d\beta, \quad \text{con } \mu \in \Lambda^r(M).$$

Sea N otra variedad y sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación. Denotaremos por $f_* : TM \rightarrow TN$ la **aplicación tangente** (o **derivada**) de f y por $f_*|_p$ la restricción de f_* a T_pM . Si $X \in T_pM$, escribiremos $f_*X \equiv f_*(X)$.

Equivalentemente para las formas diferenciales, sea N otra variedad y sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación, denotaremos por $f^* : T^*N \rightarrow T^*M$ el **pull-back** de la aplicación. Sea $x \in M$ y $\phi \in T^*_{f(p)}N$ se define el pull-back de ϕ por f mediante $f^*(\phi)|_x = \phi|_{f(x)}$.

Generalizando, podemos describir el pull-back para un tensor s -covariante $\omega \in T_p^{0,s}M$. Sean $v_1, \dots, v_s \in T_xM$, el pull-back vendrá entonces definido por

$$(f^*\omega)|_x(v_1, \dots, v_s) = \omega|_{f(x)}(f_*(v_1), \dots, f_*(v_s)) \quad (2.11)$$

Para el caso en que $s = 0$, se puede probar que $df^*\omega = f^*d\omega$, $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*(\beta)$, y $(f \circ g)^*\omega = g^*f^*\omega$.

Claramente, esto aplica igualmente para las s -formas, que no son otra cosa que tensores de este tipo, pero antisimétricos.

El pull-back de una aplicación diferenciable conmuta con la diferencial exterior, esto es, $d \circ f^* = f^* \circ d$.

2.6 Métrica sobre una variedad

Una **métrica** en T_pM es un tensor $g \in T_p^{0,2}M$, de forma que g es simétrico y no degenerado (es decir, $g(u, v) = g(v, u)$, $\forall u, v$, y si $g(u, v) = 0$, $\forall v$, entonces $u = 0$). Una base coordenada **ortonormal** en p es una base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ de forma que $g_{ij} := g(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = \pm \delta_{ij}$.

Sea una aplicación lineal $\phi \in T_p^*(M)$, y sea una métrica g , podemos establecer una correspondencia de uno a uno con los vectores, pasando por la métrica. Es decir, estableceremos un par de isomorfismos, que llamaremos **isomorfismos musicales** $\sharp : T_p^*M \rightarrow T_pM$ y $\flat : T_pM \rightarrow T_p^*M$.

Sea la métrica $g \in T_p^{0,2}M$, podemos decidir que actúe solo sobre un vector $x \in T_pM$, dejando la actuación sobre el segundo vector pendiente (como si todavía no supiésemos sobre que segundo vector vamos a actuar), como un hueco, es decir, $g_x(x, *)$. Esta operación se define formalmente como producto interior.

Definición 2.6.1. Sea $x \in T_p M$, el **producto interior por un vector x** es una aplicación:

$$\begin{aligned} i(x) : T_p^{o,k} &\rightarrow T_p^{o,(k-1)} \\ \alpha &\mapsto \alpha(x, *, \dots, *) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Observación 2.6.1. En el caso de $k=1$ (para una forma lineal), tenemos que $i(x)$ es la actuación de la forma sobre el vector x , $\alpha \mapsto \alpha(x)$.

Sea la métrica un tensor $g : T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, el producto interior de la métrica por x mandará solo un vector a \mathbb{R} , es decir, $g_x(x, *) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Y esto, es equivalente a una forma lineal $\phi \in T_p^*(M)$. De esta manera, podemos asociar el vector $x \in T_p M$ con la forma lineal $\phi \in T_p^*(M)$ que actúa sobre los vectores de igual forma que lo hace $g_x(x, *)$. Es decir, $x^\flat = \phi$.

Usualmente, las coordenadas del vector x en la base $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, se denotan como x^i . Igualmente, sea la base dual dx^i , las coordenadas de x^\flat en esta base dual se denotarán como x_i . Por lo tanto, se suele decir, que al actuar con \flat , estamos “**bajando índices**”, mientras, que al actuar con \sharp lo que hacemos es “**subir índices**”. Si denotamos por $g(e_i, e_j) = g_{ij}$, esto suele denotarse como $x_i = g(e_i, x) = g(e_i, e_j)x^j = g_{ij}x^j$. Equivalentemente, sea la métrica inducida en el espacio $T_p^*(M)$, \tilde{g} , y sea $\tilde{g}^{ij} = \tilde{g}(dx^i, dx^j)$, podemos ver que $x_i \tilde{g}^{ij} = x^j$.

Observación 2.6.2. Usando estas dos últimas expresiones en forma matricial, no es difícil ver que $(\tilde{g}^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Observación 2.6.3. Obsérvese que actuar con y^\flat sobre x , $y^\flat(x)$, no es más que hacer el producto escalar de los vectores x e y , $g(x, y)$. A la vez, por ser el producto escalar simétrico $y^\flat(x) = x^\flat(y)$.

Podemos generalizar esto para tensores, con, $T_{\beta_1, \dots, \beta_r}^{\alpha_1, \dots, \alpha_s} g_{\alpha_1, \mu} = T_{\mu, \beta_1, \dots, \beta_r}^{\alpha_2, \dots, \alpha_s}$, donde $T_{\beta_1, \dots, \beta_r}^{\alpha_1, \dots, \alpha_s}$ son las coordenadas de un tensor $T_p^{r,s} M$, y $T_{\mu, \beta_1, \dots, \beta_r}^{\alpha_2, \dots, \alpha_s}$ son las de un tensor $T_p^{(r+1), (s-1)} M$. De esta forma, se pueden ir “**subiendo y bajando índices mediante la métrica**”.

2.6.1 Elemento de Volumen

Un **elemento de volumen** de $T_p M$ es una n -forma $\omega \in A_p^n M$ y no nula. Dada una métrica g y la base dual $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$ de una base coordenada ortonormal en p , entonces $\omega = dx^1|_p \wedge \dots \wedge dx^n|_p$ es el llamado elemento de volumen métrico. Notar que $\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\right) = 1$. En realidad, ω depende de la orientación de la base ortonormal, pero solo en un factor ± 1 . Una elección de los dos posibles elementos de volumen métricos sirve para determinar una **orientación** de $T_p M$. Si ω está elegido, diremos que una base $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_p\right\}$ es **orientada positivamente** si $\omega\left(\frac{\partial}{\partial y^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_p\right) > 0$ [2, p. 3]. La expresión del elemento de volumen métrico ω en esta base, será:

$$\omega = |\det(g_{ij})|^{\frac{1}{2}} dy^1|_p \wedge \dots \wedge dy^n|_p, \quad (2.13)$$

aquí es: $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial y^i} |_{p'}, \frac{\partial}{\partial y^j} |_{p'})$. Obsérvese que la expresión (2.13) es consistente con el comportamiento de un tensor ante los cambios de coordenadas [7].

Métrica inducida en el espacio de las r -formas

Si g es una métrica en $T_p M$, entonces, hay una métrica inducida $\tilde{g} \in T^{0,2}(A_p^r M)$ definida de la siguiente manera. Sea $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$ una base de $T_p M$, y sea $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j})$. Tomaremos g^{ij} como la entrada (i, j) de la matriz inversa a la matriz (g_{ij}) . Para $\alpha, \beta \in A_p^r M$, definimos $\tilde{g}(\alpha, \beta)$ en términos de las componentes (relativas a $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}$; ver (2.9)) mediante:

$$\tilde{g}(\alpha, \beta) = \frac{1}{k!} \sum g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_k j_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} \beta_{j_1 \dots j_k} \quad (2.14)$$

Se puede demostrar que $\tilde{g}(\alpha, \beta)$ es independiente de la elección de la base.

Sea g una métrica en $T_p M$, y otra métrica h en un espacio vectorial V . Entonces, hay una métrica (gh) en $A_p^r(M, V)$ definida de la siguiente manera. Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base de V , podemos escribir $\alpha \in A_p^r(M, V)$ como $\alpha = \alpha^i v_i$, con $\alpha^i \in A_p^r M$. Entonces, para $\alpha, \beta \in A_p^r(M, V)$, definimos $(gh)(\alpha, \beta) := \sum h_{ij} \tilde{g}(\alpha^i, \beta^j)$, donde $h_{ij} = h(v_i, v_j)$ [2, p. 4]. Igualmente, $(gh)(\alpha, \beta)$ es independiente de la elección de base.

2.6.2 Estrella de Hodge

Supondremos que la variedad M es orientable (este aspecto se discutirá más adelante en el apartado sobre Integración). Pasamos a definir el operador \star_g de Hodge, relativo a la métrica g y a la forma de volumen métrico ω que define la orientación de M

Sea μ es una r -forma en $\Lambda^r(M)$ con componentes $\mu_{i_1 \dots i_r}$ en un sistema de coordenadas $x = (x^1, \dots, x^n)$, es decir:

$$\mu = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \mu_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \mu_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r};$$

en el último término se sobreentiende la suma de 1 a n en todos los índices i_k y que los $\mu_{i_1 \dots i_r}$ son antisimétricos en cada par de índices. Definimos $\star_g(\mu) = \nu$ como la $(n-r)$ -forma de componentes en un sistema de coordenadas:

$$\star_g(\mu)_{i_{r+1} \dots i_n} \equiv \nu_{i_{r+1} \dots i_n} := \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_n} \mu^{i_1 \dots i_r} = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_n} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_r j_r} \mu_{j_1 \dots j_r}.$$

Como definición equivalente, $\star_g(\mu)$ es la única $(n-r)$ -forma que verifica, para cualquier r -forma α ,

$$\alpha \wedge \star_g(\mu) = \tilde{g}(\alpha, \mu) \omega, \quad (2.15)$$

donde $\tilde{g}(\alpha, \mu)$ denota el producto escalar en cada punto inducido en el espacio de p -formas sobre ese punto por la métrica g definida con la fórmula (2.14).

Operador Codiferencial

Definimos el operador codiferencial $\delta : \Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{r-1}(M)$ mediante

$$\delta \alpha = \epsilon(-1)^{n(r+1)} \star_g d \star_g \alpha,$$

con $\epsilon = 1$ en el caso euclídeo y $\epsilon = -1$ en el caso lorentziano de dimensión 4. Si $f \in \mathcal{F}(M) \equiv \Lambda^0(M)$, decimos que $\delta f = 0$. Por otro lado, se prueba que $\delta \circ \delta = 0$.

2.6.3 Integración

Una forma ν que es distinta de 0 en toda la variedad M (de dimensión n), se llama una **orientación**. El par (M, ν) se llama **variedad orientable**. Sea α una n -forma en (M, ν) de forma que $K \equiv \text{soporte}(\alpha)$ sea compacto. La compacidad de K nos asegura que hay un número finito de aplicaciones $\phi_i : U_i \rightarrow M$, $i = 1, \dots, N$, de forma que $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_N$, y $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ está acotado, y (ver [6]) existen funciones $\rho \in C^{\text{inf}}(M)$ tales que $\text{soporte}(\rho_i) \subset U_i$, $0 \leq \rho_i \leq 1$, y $\sum_1^N \rho_i(x) = 1$ para todo $x \in K$. Si β es una n -forma definida sobre un subconjunto abierto acotado D de \mathbb{R}^n de forma que $\text{soporte}(\beta) \subset D$ es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^n , entonces definimos [2, p.12]:

$$\int_D \beta = \int_D b$$

Donde b es la función evaluada en los reales definida por $\beta = b dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Mediante un intercambio de las componentes de ϕ_i (si fuese necesario), podemos asumir que (en U_i) $\phi_i^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$ es un múltiplo positivo de la orientación ν para todo $i = 1, \dots, N$. Entonces, definimos:

$$\int_M \alpha = \sum_{i=1}^N \int_{\phi(U_i)} \phi_i^{-1*}(\rho_i \alpha)$$

Omitimos la prueba de que $\int_M \alpha$ es independiente del sistema de coordenadas [8].

Teorema 2.3 (Teorema de Stokes). *Sea M una variedad de dimensión n orientada, y suponiendo que $\alpha \in \Lambda^{n-1}(M)$ tiene soporte compacto. Entonces tenemos que:*

$$\int_M d\alpha = 0$$

Para la demostración, referimos a [2, p.12].

Pero, la versión usual del Teorema de Stokes, es la siguiente. Sea ∂M la variedad de dimensión $(n-1)$, que es frontera de M (de dimensión n):

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha \tag{2.16}$$

Siendo α $(n-1)$ -formas con soporte compacto. Y donde ∂M tiene una orientación inducida por aquella en M . Para la demostración, referimos a [8].

2.7 Operadores Geométricos Clásicos

Operadores Geométricos Clásicos para \mathbb{R}^3

Los isomorfismos musicales serán una herramienta poderosa a la hora de poder visualizar de forma intuitiva como actúan el operador derivada exterior, el producto exterior, el operador codiferencial y la estrella de Hodge. Usando la ecuación (2.10), podemos ver que para $M = \mathbb{R}^3$ con métrica euclídea, d actuará según:

r-formas	Actuación de d
$f(x, y, z) \in \Lambda^0 = \mathcal{F}(M)$	$(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz) \in \Lambda^1$
$(\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz) \in \Lambda^1$	$[(\partial_y \omega_z - \partial_z \omega_y) dy \wedge dz + (\partial_z \omega_x - \partial_x \omega_z) dz \wedge dx + (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x) dx \wedge dy] \in \Lambda^2$
$(\omega_{yz} dy \wedge dz + \omega_{zx} dz \wedge dx + \omega_{xy} dx \wedge dy) \in \Lambda^2$	$(\frac{\partial \omega_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial z}) dx \wedge dy \wedge dz \in \Lambda^3$
$(\omega_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz) \in \Lambda^3$	0

Tabla 1: Actuación de d en diferentes r-formas

Si nos fijamos en las coordenadas de cada r-forma, podemos ver el claro paralelismo entre la actuación de d y, respectivamente, la actuación del gradiente, rotacional y divergencia. De esta manera, y añadiendo el producto exterior, podemos elaborar la siguiente tabla:

Operador clásico para \mathbb{R}^3	Actuación de d
Gradiente de una función escalar f : $\vec{\nabla} f$	$(df)^\sharp$
Rotacional de un campo vectorial ω^\sharp : $\nabla \times (\omega^\sharp)$	$(\sharp \circ \star_g)(d\omega)$
Divergencia de un campo vectorial ω^\sharp : $\vec{\nabla} \cdot \omega^\sharp$	$\delta(\omega)$
Laplaciano de una función escalar f : $\nabla^2 f$	δdf
Producto vectorial de ω^\sharp y η^\sharp : $\omega^\sharp \times \eta^\sharp$	$(\sharp \circ \star_g)(\omega \wedge \eta)$

Tabla 2: Equivalencia entre la actuación de d y los operadores clásicos para \mathbb{R}^3

Comentario. Obsérvese que esto solo es válido si tenemos métrica Euclídea. De esta manera, la coordenada $x_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ transforma en $x^1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, porque $g^{11} = 1$. Si se diese, por ejemplo el caso en que $g^{11} = 2$, obtendríamos $x^1 = 2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

Vemos que para el rotacional, al hacer $d\omega$, obtenemos una 2-forma. Hemos convertido las 2-formas en 1-formas mediante la estrella de Hodge. Pero, esto hará que perdamos información sobre la orientación del sistema de coordenadas, ya que si cambiamos los ejes $y \leftrightarrow z$, la 2-forma $dy \wedge dz$ pasará a ser $dz \wedge dy = -(dy \wedge dz)$. En cambio, el cambio de ejes afectará a $\star_g(dy \wedge dz) = dx$ dejándolo igual (dx). Como vemos, este cambio de ejes induce un cambio de signo en la 2-forma mientras que no lo hace en la 1-forma asociada a su estrella de Hodge. Por lo tanto, con el objetivo de ganar intuición, podemos hacer actuar el operador estrella de Hodge, pero sin dejar de darnos cuenta, de que una 2-forma no es una 1-forma, y viceversa. Esto mismo ocurre para el producto exterior.

Observación 2.7.1. El pasaje de la 2-forma a un vector mediante $(\sharp \circ \star_g)$, es lo que clásicamente se ha llamado *pseudo-vector*. Estos cambian de signo bajo rotaciones impropias como la paridad $P : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$.

Ejemplo 2.7.1. Sea una espira por la que circula una corriente I , esta crea un campo magnético B , por la ley de Biot-Savart. Si reflejamos la situación respecto a un plano, la posición y la corriente son, a su vez, reflejados. En cambio, B es reflejado, e invertido (toma un signo “-” respecto a los otros). Esto se debe a que la posición y la corriente I son vectores reales, mientras que B es un pseudo-vector, por provenir de un rotacional (de la ley de Biot-Savart).

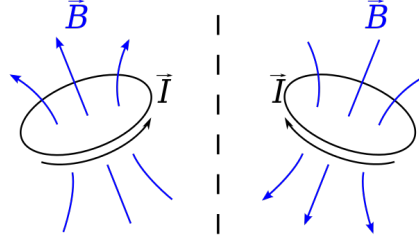


Figura 3: \vec{B} generado por una espira como ejemplo de un pseudo-vector (ejemplo 2.7.1).

Observación 2.7.2. Las coordenadas de una r-forma, al aplicar \star_g cambian según $X_\alpha \rightarrow \epsilon_{\beta\gamma}^\alpha X_\alpha$. Se puede comprobar que de esta manera se cumple la ecuación (2.15). A su vez, la propiedad de los pseudo-vectores, proviene de aquí. En la bibliografía física a veces se usa el signo de Levi-civita sin darse cuenta de que, lo que realmente se está haciendo, es actuar con \star_g .

Observación 2.7.3. Equivalentemente, obtendremos “pseudo-escalares” y “pseudo-tensores” al aplicar la estrella de Hodge a diferentes r-formas.

Comentario. Aunque pueda parecer irrelevante, esto es de gran importancia física. En el modelo estándar, el pion viene descrito por un pseudo-escalar, ya que tiene paridad -1 (para el operador paridad $P : (t, x, y, z) \rightarrow (t, -x, -y, -z)$).

Observación 2.7.4. Además, la propiedad $d^2 = 0$ de la diferencial exterior se traduce en $\text{rot}(\text{grad}()) = 0$, y en $\text{div}(\text{rot}()) = 0$.

Observación 2.7.5. Usando los isomorfismos musicales para las 1-formas (con $M = \mathbb{R}^3$), no es difícil llegar a la expresión geométrica clásica (para un campo vectorial $\vec{F} \in \text{Sec}(TM)$, y una superficie S):

$$\int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (2.17)$$

Operadores en \mathbb{R}^4 con Métrica de Lorentz

En las aplicaciones a la física, el espacio base M normalmente será el espacio tiempo. Es decir, \mathbb{R}^4 con una métrica de Lorentz. Todo lo visto para \mathbb{R}^3 se puede generalizar a este caso, sabiendo que $g_{11} = -1$. Destacan:

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t'}, \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right), \quad \partial^\mu = \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(-\frac{\partial}{\partial t'}, \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right) \quad (2.18)$$

$$(df)^\sharp = \left(-\frac{\partial f}{\partial t'}, \frac{\partial f}{\partial x'}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial z'} \right) = \partial^\mu f, \quad (\delta\omega)^\sharp = \left(-\partial_t \omega_0, \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \right) = \partial^\mu \cdot \omega_\mu \quad (2.19)$$

$$\delta df = \left(-(\partial_t)^2 f, \nabla^2 f \right) = \partial^\mu \partial_\mu f = \square f \quad (2.20)$$

3 Fibrados Principales

Un fibrado principal es un fibrado $P(M, G)$ cuya fibra típica es un grupo de Lie, G , concepto que veremos a continuación. El grupo actúa sobre el fibrado moviendo sus elementos a largo de las fibras. Podemos imaginar que la fibra de un fibrado principal, sobre cada punto de la variedad de base, M , la forman cierta clase de sistemas de referencia que cambian entre sí por la acción de un grupo. La idea es que la identidad del grupo no mueve la referencia, y que si hacemos actuar un elemento del grupo cambiamos la referencia en otra distinta; con el inverso del elemento del grupo volvemos a la referencia de partida; y hay tantas referencias distintas ligadas a cada punto como elementos en el grupo.

Ejemplo 3.0.1. Dada una variedad M con una métrica, en cada punto $p \in M$ podemos considerar las bases ortonormales de $T_p M$. Los posibles cambios de base los realizamos con las matrices del grupo ortogonal, $O(n)$. En este ejemplo, el fibrado principal sería el conjunto de todas las bases ortonormales posibles en todos y cada uno de los puntos de M .

3.1 Grupos de Lie

Un grupo es un conjunto con una operación “multiplicación” con la propiedad asociativa, que tiene un elemento identidad y que cada elemento tiene su inverso. Se dice que el grupo es abeliano si además tiene la propiedad conmutativa.

Definición 3.1.1. Un **grupo de Lie** es un grupo, G , que tiene una estructura diferenciable verificándose que la operación del grupo $G \times G \rightarrow G$, dada por $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$, y la función $G \rightarrow G$, dada por $g \mapsto g^{-1}$, son aplicaciones diferenciables.

La multiplicación de $g \in G$ por la izquierda da lugar a la aplicación $L_g : G \rightarrow G$, definida por $L_g(g') = gg'$. Resulta que L_g es un difeomorfismo.

Definición 3.1.2. Sea e el elemento identidad del grupo G y sea $A \in T_e G$. Definimos $\bar{A} \in \mathcal{G}$ mediante $\bar{A}_g := L_{g*}(A)$. El campo de vectores \bar{A} se denominará como el **campo vectorial invariante por la izquierda** determinado por A (ver [2, p. 18]).

Igualmente, para $\omega \in T_e^* G$, definimos $\bar{\omega} \in \Lambda^1 G$ por $\bar{\omega}_g := L_{g^{-1}}^*(\omega)$ que se denominará como la **1-forma invariante por la izquierda** determinada por ω (ver [5, p. 171]).

El **álgebra de Lie** del grupo G , denotada por \mathfrak{g} , no es otra cosa que el espacio tangente de G en la identidad e (es decir, $T_e G$), dotado con la operación definida por $[A, B] := [\bar{A}, \bar{B}]_e$, siendo $A, B \in \mathfrak{g}$. Recuérdese que la operación conmutación es antisimétrica y cumple la identidad de Jacobi (ver la definición 2.2.5). Por otro lado, para $A \in \mathfrak{g}$, se puede probar que \bar{A} es un campo vectorial completo [2, p.18].

Teorema 3.1. Si X es un campo vectorial invariante por la izquierda en un grupo de Lie G , entonces, X es completo. [5, p.163]

Sean G y G' dos grupos de Lie; una aplicación $f : G \rightarrow G'$ que es un homomorfismo de grupos y es diferenciable se dice que es un **homomorfismo de grupos de Lie**. Si e y e' son los elementos identidad de G y G' , respectivamente, entonces $f(e) = e'$ y podemos denotar, equivalentemente, $f_*|_e : T_e G \rightarrow T_{e'} G'$ por $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$. Se obtiene el siguiente resultado (para la demostración, referimos a [2, p.20]):

Teorema 3.2. Sea $f : G \rightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ es una aplicación lineal que cumple $f_*([A, B]) = [f_*A, f_*B]$; es decir, f_* es un **homomorfismo de álgebras de Lie**.

Un **subgrupo de Lie** H de un grupo de Lie G es una subvariedad de G que también es un subgrupo de G . Un subgrupo de Lie es en sí mismo un grupo de Lie.

La llamada *aplicación exponencial*, que definimos a continuación, pone en correspondencia el álgebra de Lie del del grupo con un entorno de la identidad del grupo.

Definición 3.1.3 (Aplicación exponencial). [5, p.165]

- i) La única curva integral $t \mapsto \sigma^{\bar{A}}(t)$, $A = \sigma_*^{\bar{A}}(t) \left(\frac{d}{dt} \right)_0$, del campo invariante por la izquierda \bar{A} (con $\sigma^{\bar{A}}(0) = e$) definido para todo $t \in \mathbb{R}$, en virtud del Teorema 3.1, es $t \mapsto \exp(t \cdot A)$, donde $A \in T_e G \equiv \mathfrak{g}$.
- ii) De esta manera, podemos definir la **aplicación exponencial** $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ entre el álgebra de Lie, y su respectivo grupo, como $\exp(A) := \exp(t \cdot A)|_{t=1}$.
- iii) Un **subgrupo a un parámetro** de un grupo de Lie G es un homomorfismo Ξ entre el grupo aditivo de \mathbb{R} y el multiplicativo de G . De esta forma, la exponencial es un homomorfismo pues $(t + s) \mapsto \exp(tA) \cdot \exp(sA)$.

Ya que los isomorfismos $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$ (siendo \mathfrak{h} el álgebra de Lie de H) son también homomorfismos en G , tenemos que $\exp : \mathfrak{h} \rightarrow H$ es la exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ restringida a \mathfrak{h} . El siguiente teorema implica que $[\cdot, \cdot]$ en \mathfrak{h} es simplemente $[\cdot, \cdot]$ en \mathfrak{g} restringido a \mathfrak{h} [2, p.19].

Definición 3.1.4. Para $g \in G$, definimos el automorfismo interno de G $int : G \rightarrow G$, dado por $int_a : b \mapsto a \cdot b \cdot a^{-1}$. A su vez, definimos Ad_a diferenciando int en la identidad, de forma que $Ad_a = int_{a*}|_e : T_e G (= \mathfrak{g}) \rightarrow T_{int_a e} G = T_e G = \mathfrak{g}$. Es decir, $Ad_a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Sea $X \in \mathfrak{g}$, $Ad_a(X) = \left. \frac{d}{dt} (a \cdot \exp(tX) a^{-1}) \right|_{t=0}$.

Conjuntos de aplicaciones lineales: Sea E un álgebra:

- $End(E)$ es el álgebra de Lie de endomorfismos del álgebra E (endomorfismos del espacio vectorial que preservan el producto o corchete).

- $Aut(E)$ es el grupo de Lie de automorfismos del álgebra E (automorfismos del espacio vectorial que preservan el producto o corchete). $Aut(E)$ es un subgrupo de Lie cerrado de $GL(E)$.

Definición 3.1.5. Definimos $Ad : G \rightarrow Aut(\mathfrak{g})$ como la **representación adjunta** del grupo G en su álgebra de Lie \mathfrak{g} . A su vez, si diferenciamos ésta, obtendremos otra representación adjunta, que denotaremos como ad . Ésta última será una representación $ad : \mathfrak{g} \rightarrow End(\mathfrak{g})$ adjunta del álgebra de Lie en sí misma. [11, p.113]

Teorema 3.3. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces $ad_X Y = [X, Y]$. [11, p.115]

Forma de Maurer-Cartan

Las **constantes de estructura** con respecto a una base $\{E_1, \dots, E_n\}$ de \mathfrak{g} son los $C_{\alpha, \beta}^\gamma$ dados por $[\bar{E}_\alpha, \bar{E}_\beta] = \sum_\gamma C_{\alpha, \beta}^\gamma \bar{E}_\gamma$. Siendo $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ una base dual para \mathfrak{g} puede definirse de forma que $\omega^\alpha(E_\beta) = \delta_\beta^\alpha$.

Si buscamos una ecuación análoga a la de las constantes de estructura pero para la base dual, debemos que saber que, mientras el conmutador de dos campos vectoriales nos da un campo vectorial, la combinación natural de dos 1-formas (mediante el producto exterior), nos da una 2-forma. A su vez, la diferencial exterior de una 1-forma nos dará una 2-forma. Podemos relacionar entonces ambas expresiones, para obtener una relación similar con las constantes de estructura.

Podemos obtener una ecuación análoga a la de las constantes de estructura pero para las 1-formas. Esta será la **ecuación de Maurer-Cartan** para 1-formas invariantes por la derecha:

$$d\omega^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^n C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma = 0 \quad (3.1)$$

Para la demostración, ver [5, p.172].

Definición 3.1.6. La **forma de Maurer-Cartan**, o forma canónica, Ξ es la 1-forma \mathfrak{g} -valuada en G , que asocia a cada $v \in T_g G$ el campo vectorial invariante por la izquierda en G cuyo valor en $g \in G$ es precisamente el vector $v \in T_g G$ dado.

Comentario. Ya que $\mathfrak{g} \cong T_e G$, es posible ver la forma de Maurer-Cartan como una forma $T_e G$ -valuada. Con esta interpretación $\Xi(L_g^A) = A$, lo que de hecho, define Ξ de forma precisa.

Observación 3.1.1. Sea $h : M \rightarrow G$ una función diferenciable sobre una variedad de dimensión m (por ejemplo la función de transición de la Definición 3.2.2). Entonces $h^* \Xi$ es una forma \mathfrak{g} -valuada en M . Cuando G es un grupo de matrices, $h^* \Xi$ puede escribirse (para $m \in M$) como:

$$\begin{aligned} (h^* \Xi)_m^{ij} &= \sum_{\mu=1}^m \sum_{k=1}^n \left((h(m))^{-1} \right)^{ik} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (h(m))^{kj} (dx^\mu)_p \\ &\equiv h^{-1} dh \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.2 Fibrados con grupo de estructura

Definición 3.2.1. Un **fibrado principal** P con **grupo de estructura** G es un fibrado $P(M, G, \pi)$ con fibra típica un grupo de Lie G , donde hay definida una acción por la derecha de G sobre P , que se denotará por $R_a z \equiv za, \forall z \in P, \forall a \in G$, y que admite, para cada $m \in M$, una trivialización local $\Psi : P|_U \longrightarrow U \times G$, con $m \in U$, verificando la propiedad

$$\Psi(za) = \Psi(z) \cdot a \quad (\text{entendiéndose } (m, a) \cdot a' \equiv (m, aa') \in U \times G).$$

Ψ será de la forma $\Psi(z) = (\pi(z), s_U(z))$, donde $s : P \longrightarrow G$, obviamente, debe cumplir la propiedad $s_U(zg) = s_U(z)g$. Se denominará **trivialización local en un fibrado principal** P , o (en lenguaje físico) **elección de Gauge**, a una Ψ que cumpla esta propiedad.

M se identificará canónicamente con P/G , es decir, la fibra sobre p es la **órbita** de p dada por G ($\pi^{-1}(\pi(p)) = \{pg : g \in G\}$).

Comentario. Se suele también suponer que el único elemento g que cumple $pg = p$ es e , por lo que G **actúa libre (y diferenciablemente) en P por la derecha**. Por lo tanto, para cada $p \in \pi^{-1}(x)$ hay una aplicación $G \rightarrow \pi^{-1}$ dada por $g \mapsto pg$. Esta aplicación es un difeomorfismo, pero depende de p . Por lo tanto, las fibras $\pi^{-1}(x)$ son difeomorfas a G , pero no hay identificación canónica entre ambas (pues no hay identificación canónica entre el elemento identidad de G y un punto dado en $\pi^{-1}(x)$), por lo que no hay estructura natural de grupo en

Definición 3.2.2. Sean $\Psi : P|_U \longrightarrow U \times G$ y $\Phi : P|_V \longrightarrow V \times G$ dos trivializaciones locales, la **función de transición** de Ψ a Φ es la aplicación $h_{uv} : U \cap V \longrightarrow G$ definida de la siguiente manera. Sea $x = \pi(p \in U \cap V)$, tenemos $h_{uv}(x) = s_U(p)s_V(p)^{-1}$ [2, p.27].

Observación 3.2.1. Notar que $h_{uv}(x)$ es independiente de la elección de $p \in \pi^{-1}$ porque $s_U(pg)s_V(pg)^{-1} = s_U(p)gg^{-1}s_V(p)^{-1} = s_U(p)s_V(p)^{-1}$.

Observación 3.2.2. P puede ser considerado como la unión disjunta de $(U \times G) \cup (V \times G) \cup \dots$, identificando los puntos $(x, g) \in U \times G$ y $(x, g') \in V \times G$ si $h = h_{uv}(x)g'$.

Definición 3.2.3. Definiremos una sección local de un fibrado principal como el mapa $\sigma : U \longrightarrow P$ (U abierto de M) de forma que $\pi \circ \sigma = I_u$ (siendo I_u la identidad en U) [2, p.27].

Teorema 3.4. Hay una correspondencia natural entre secciones locales y trivializaciones locales

Demostración: Sea $\sigma : U \longrightarrow P$ una sección local, definimos $\Psi : P|_U \longrightarrow U \times G$ mediante $\Psi(\sigma(x)g) = (x, g)$. Alternativamente, sea $\Psi : P|_U \longrightarrow U \times G$, definimos la sección local $\sigma : U \longrightarrow P$ mediante $\sigma(x) = \Psi^{-1}(x, e)$ [2, p.27].

3.3 Fibrados asociados a un Fibrado Principal

Sea $P(M, G, \pi)$ un fibrado principal. Sea una variedad F y una acción por la izquierda de G sobre F :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : G \times F &\longrightarrow F \\ (a, \xi) &\longmapsto \mathcal{A}_a(\xi) \equiv a\xi. \end{aligned}$$

Se define el *fibrado asociado a P y a \mathcal{A}* , $\mathcal{A}P \equiv P \times_G F$, como el fibrado sobre M con:

- (i) espacio total el conjunto de clases de equivalencia obtenido definiendo en la variedad producto $P \times F$ la relación de equivalencia:

$$(p, \xi) \sim (p', \xi') \text{ sii } \exists a \in G : (p', \xi') = (pa, a^{-1}\xi).$$

Denotamos por $[p, \xi]$ la clase de equivalencia con representante (p, ξ) (nótese que $[pa, \xi] = [p, a\xi]$),

- (ii) proyección

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{A}P &\longrightarrow M \\ [p, \xi] &\longmapsto \pi(p), \end{aligned}$$

- (iii) fibra típica F ,

- (iv) y trivializaciones locales obtenidas del siguiente modo: para cada trivialización local de P

$$\begin{aligned} \Psi : P|_U &\longrightarrow U \times G \\ p &\longmapsto (\pi(p), \psi(p)), \end{aligned}$$

se define la trivialización local de $\mathcal{A}P$

$$\begin{aligned} \Psi^{\mathcal{A}P} : \mathcal{A}P|_U &\longrightarrow U \times F \\ [p, \xi] &\longmapsto (\pi(p), \psi(p)\xi). \end{aligned}$$

Definición 3.3.1. Definimos $C(P, F)$ como el espacio de todas las aplicaciones $\tau : P \longrightarrow F$ de forma que $\tau(pg) = g^{-1}\tau(p)$. $C(P, F)$ es naturalmente isomorfo al espacio de secciones del fibrado asociado $P \times_G F \longrightarrow M$ con fibra F . Todo lo que sigue puede formularse en función de fibrados asociados, pero, dado que los físicos suelen usar este tipo de aplicaciones, tomaremos el punto de vista de las funciones τ [2, p.43].

Comentario. En el caso en que la acción de G define una representación, $G \longrightarrow GL(V)$, los elementos de $C(P, F)$ se llamarán *campos de partículas*.

Definición 3.3.2. Un automorfismo de un fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ es un difeomorfismo $f : P \longrightarrow P$ de forma que $f(pg) = f(p)g$ para todo $g \in G, p \in P$. Sea $\bar{f} : M \longrightarrow M$, dado por $\bar{f}(\pi(p)) = \pi(f(p))$. Una **transformación de gauge** será un automorfismo f que cumpla $\bar{f} = 1_M$, donde 1_M es la identidad en M . Es decir, manda puntos de una fibra en puntos de su misma fibra. Denotaremos $GA(P) \equiv$ grupo de las transformaciones de gauge [2, p.46].

Teorema 3.5. Sea $C(P, G)$, donde G actúa en sí mismo mediante la representación adjunta Ad ($Ad_g(g') = g \cdot g' \cdot g$). Hay un isomorfismo natural $GA(P) \cong C(P, G)$. Sea $\tau \in C(P, G)$, $f(p) = p\tau(p)$, será una transformación de Gauge. Y sea $f \in GA(P)$, se define $\tau : P \longrightarrow G$, mediante $f(p) = p\tau(p)$, de forma que se cumple que $\tau \in C(P, G)$. [2, p.46]

3.4 Conexión

Una vez hemos visto como es la fibra sobre cada punto, ahora nos gustaría establecer una cierta relación entre fibras sobre diversos puntos de la variedad, de forma que esto no dependa de ninguna trivialización dada. Esto sugiere buscar vectores en el espacio total P , que “apunten” de una fibra a otra (los cuales llamaremos horizontales). Para ello necesitamos definir la conexión, lo haremos de 3 formas equivalentes para entender su significado completo:

Definición 3.4.1. Una **conexión** asigna a cada punto $p \in P$ un **subespacio horizontal** $H_p \subset T_p P$ de forma que $V_p \equiv \{X \in T_p P / \pi_*(X) = 0\}$. Además, le pedimos a éste, que cumpla, $R_{g^*}(H_p) = H_{pg}$. Tenemos que $T_p P = H_p \oplus V_p$, donde denominaremos a V_p como el **subespacio vertical** de $T_p P$ [2, p.29].

Observación 3.4.1. Los vectores de un campo vectorial invariante por la izquierda generado por $A \in T_e G = \mathfrak{g}$ (ver la Definición 3.1.2) son verticales.

Definición 3.4.2. Sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie de G . Una **conexión** es una 1-forma \mathfrak{g} -valuada definida en P , que cumple:

i) Sea $A \in \mathfrak{g}$ y sea A^* el campo de vectores en P definido mediante:

$$A_p^* = \left. \frac{d}{dt} (p \cdot \exp(tA)) \right|_{t=0} \quad (3.3)$$

Entonces llamaremos a A^* **campo fundamental**, y ω deberá cumplir $\omega(A_p^*) = A$.

ii) Para $g \in G$, sea $Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por (). Se requiere que $\omega_{pg}(R_{g^*}X) = Ad_{g^{-1}}\omega_p(X)$ para todo $g \in G$, $p \in P$, y $X \in T_p P$. Es decir, $R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}}\omega$.

Llamaremos a ω una **1-forma de conexión** [2, p.29].

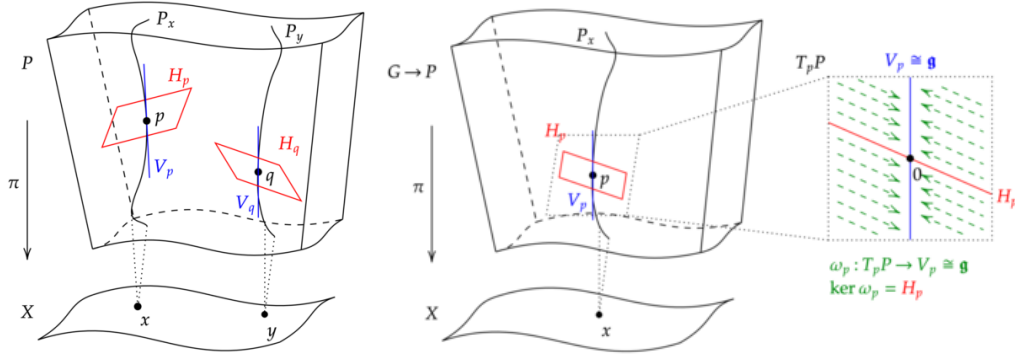
Definición 3.4.3. Una **conexión** asigna a cada $\Psi : P|_U \rightarrow U \times G$ una 1-forma \mathfrak{g} -evaluada ω_U en U . Llamaremos a ω_U **U-representante local** de ω . Si $\Phi : P|_V \rightarrow V \times G$ es otra trivialización local, y h_{uv} la función transición de Ψ a Φ , entonces, requerimos que se cumpla:

$$\omega_v(Y_x) = L_{h_{uv}^{-1}(x)^*} (h_{uv^*}(Y_x)) + Ad_{h_{uv}^{-1}(x)} (\omega_u(Y_x)) \quad (3.4)$$

para todo $Y_x \in T_x M$ y $x \in U \cup V$ [2, p.30].

Teorema 3.6. Las definiciones, Definición 3.4.1, Definición 3.4.2 y Definición 3.4.3 son equivalentes [2, p.31]. Es decir, podemos definir una conexión (que al fin y al cabo es decir la asignación de los subespacios horizontales) con cualquiera de las 3 definiciones anteriores.

Teorema 3.7. *Cualquier fibrado principal admite una conexión [6].*



(a) Conexión como asignación de un subespacio horizontal a cada punto (definición (3.4.1))

(b) Conexión como una 1-forma ω (definición (3.4.2))

Figura 4: Definiciones equivalentes para una conexión [14].

Dada una 1-forma de conexión ω , siguiendo con la Definición 3.4.1, podemos escribir cada $X \in T_p P$ como $X = X^V + X^H$ donde X^V es vertical ($\pi_*(X^V) = 0$) y X^H horizontal ($\omega(X^H) = 0$).

Definición 3.4.4. Si $\phi \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$, entonces definimos $\phi^H \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$ como $\phi^H(X_1, \dots, X_k) = \phi(X_1^H, \dots, X_k^H)$ [2, p.37].

Definición 3.4.5. La **diferencial exterior covariante** de $\phi \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$ es $D^\omega \phi \equiv (d\phi)^H \in \Lambda^{k+1}(P, \mathfrak{g})$, donde $d\phi$ es la derivada exterior usual de ϕ . Aunque D^ω depende de ω , normalmente lo obviaremos, y diremos simplemente D [2, p.37].

3.5 Curvatura

Definición 3.5.1. La **curvatura** de una conexión $\omega \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ es $\Omega^\omega = D^\omega \omega = d\omega \circ \text{hor} \in \Lambda^2(P, \mathfrak{g})$. Aplicada a $X, Y \in T_p P$, será $\Omega^\omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H)$. En el lenguaje físico, si ω es un potencial, denominaremos a Ω^ω como la fuerza de campo o “field strength” de ω [2, p.37].

Teorema 3.8 (Ecuación de Estructura). Sea $\Omega = D\omega$, y sean $X, Y \in T_p P$, la curvatura actúa sobre ellos según:

$$\Omega_p(X, Y) = d\omega_p(X, Y) + [\omega_p(X), \omega_p(Y)] \quad (3.5)$$

donde $[\omega_p(X), \omega_p(Y)]$ denota el corchete de Lie en \mathfrak{g} entre los elementos $\omega_p(X), \omega_p(Y) \in \mathfrak{g}$. Para la demostración, se refiere a [5, p.272]. En general, esto se suele denotar como $D^\omega \omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$.

Observación 3.5.1 (Interpretación geométrica de la curvatura). Si tenemos un espacio plano, podemos transportar mediante $L_{g^{-1}}^*(\omega)$ una 1-forma de manera unívoca de un punto a otro sin que dependa del camino. De esta forma podemos definir un campo de 1-formas tal como lo hicimos en la definición 3.1.2. Por definición, un campo de 1-formas invariante deberá cumplir la ecuación de Maurer-Cartan (3.1). Por lo tanto, si se cumple, estamos en un espacio plano. Comparando la ecuación (3.5) con la (3.1), vemos que si la 1-forma de curvatura cumple la ecuación de Maurer-Cartan, la curvatura será 0 en dicho punto. Y si esto se da para todo el espacio, tendremos un subespacio horizontal plano. Por lo tanto, la curvatura puede verse como cuánto de lejos está la 1-forma de conexión de cumplir la ecuación de Maurer-Cartan en dicho punto.

Teorema 3.9 (Identidad de Bianchi). Si ω es una 1-forma de conexión en P con curvatura Ω^ω , entonces $D^\omega \Omega^\omega = 0$. De hecho, $d\Omega^\omega = [\Omega^\omega, \omega]$. Ver demostración en [2, p.39]

Observación 3.5.2. Uniendo el Teorema 3.8 y el Teorema 3.9, vemos que $D^\omega D^\omega \Omega^\omega = 0$. Que es una propiedad similar a la que se da para la diferencial exterior ordinaria, $d^2 = 0$. En cambio, esta expresión para la derivada covariante, solo se cumple (en general) aplicada a una 1-forma de conexión.

Definición 3.5.2. Siguiendo con la Definición 3.4.3, y aplicando el Teorema 3.4, podemos ver ω_U y ω están relacionados mediante $\omega_U = \sigma_u^* \omega \in \Lambda^1(U, \mathfrak{g})$. Igualmente podemos definir el **U-representante local** de Ω como $\Omega_u \equiv \sigma_u^* \Omega$.

Teorema 3.10. En términos de ω_u , $\Omega_u = d\omega_u + \frac{1}{2}[\omega_u, \omega_u]$. Ver demostración en [2, p.39]

Análogamente a la ecuación (3.4) para la conexión, podemos ver que la 2-forma de curvatura transformará de forma más sencilla de acuerdo al siguiente teorema:

Teorema 3.11. Sean Φ y Ψ dos trivializaciones locales, con función de transición $h_{uv} : U \cap V \rightarrow G$. Entonces, en $U \cap V$, $\Omega_v = Ad_{g_{uv}^{-1}} \Omega_u$. En el caso de ser un grupo de matrices:

$$\Omega_v = g_{uv}^{-1} \Omega_u g_{uv} \quad (3.6)$$

Ver demostración en [2, p.40].

Teorema 3.12. Equivalentemente, la identidad de Bianchi para los representantes locales será $d\Omega_u = [\Omega_u, \omega_u]$.

3.6 Ejemplos: Fibrados De Hopf

Entre los fibrados principales destaca el llamado **fibrado de Hopf**. Este permite describir la esfera S^3 como una fibración no trivial con espacio base S^2 , y fibra típica S^1 . Para nuestros objetivos, veremos S^3 como un fibrado en sí, de forma que, a partir de este, surja un segundo fibrado. Es decir, haremos el doble fibrado $U(2) \rightarrow U(2)/U(1) = S^3 \rightarrow S^3/U(1) = S^2$. Hay más fibrados de Hopf, como el de $S^7 \rightarrow S^4$ con fibra típica S^3 , pero, para nuestros propósitos nos centraremos en el primero.

Acción de $U(2)$ sobre S^3 .

Consideremos el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^2 dotado del producto escalar hermítico usual:

$$\langle (w^1, w^2), (z^1, z^2) \rangle = \bar{w}^1 z^1 + \bar{w}^2 z^2;$$

entonces $\langle (z^1, z^2), (z^1, z^2) \rangle = |z^1|^2 + |z^2|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2$, siendo $z^1 = x^1 + ix^2$ y $z^2 = x^3 + ix^4$. Identificamos la esfera con

$$S^3 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 : |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1\} \quad (3.7)$$

Las matrices de $A \in GL(2, \mathbb{C})$ se identifican con los automorfismos de \mathbb{C}^2 :

$$A: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} & \longmapsto & AZ = \begin{pmatrix} w_1^1 & w_2^1 \\ w_1^2 & w_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

En particular, las matrices unitarias se definen como

$$\begin{aligned} U(2) &= \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \langle Z, Z' \rangle = \langle AZ, AZ' \rangle, \forall Z, Z' \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \bar{A}^t A = I_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}; \end{aligned}$$

y es un subgrupo de Lie de $GL(2, \mathbb{C})$. Veamos la estructura de estas matrices. Sea $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in U(2)$:

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}a + \bar{b}b & \bar{a}c + \bar{b}d \\ \bar{c}a + \bar{d}b & \bar{c}c + \bar{d}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \bar{a}a + \bar{b}b = 1 \\ \bar{c}c + \bar{d}d = 1 \\ \bar{a}c + \bar{b}d = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

La última ecuación nos dice:

$$\begin{vmatrix} \bar{a} & d \\ \bar{b} & -c \end{vmatrix} = 0 \implies \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } \begin{cases} d = \lambda \bar{a} \\ c = -\lambda \bar{b} \end{cases} \quad (3.9)$$

(ya que por la primera ecuación a y b no pueden ser ambos nulos); sustituyendo c y d en la matriz A y usando la segunda ecuación de (3.8) se obtiene que $\det(A) = \lambda$. Puesto que $\det(\bar{A}^t) \det(A) = \overline{\det(A)} \det(A) = 1 \implies |\det(A)| = 1$, por lo tanto, $|\lambda| = 1$.

Con lo cual resulta que

$$U(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : A = \begin{pmatrix} a & -\lambda \bar{b} \\ b & \lambda \bar{a} \end{pmatrix} \text{ tal que } |a|^2 + |b|^2 = 1, |\lambda| = 1\} \quad (3.10)$$

Fácilmente se puede ver que es equivalente a decir:

$$U(2) = \{\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : \det(A) = 1, |\lambda| = 1\} \quad (3.11)$$

El grupo multiplicativo $U(1) = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in \mathbb{R}\}$ se puede considerar un subgrupo de $U(2)$ mediante el monomorfismo:

$$U(1) \longrightarrow U(2), \quad e^{i\theta} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}; \quad (3.12)$$

aunque hay otros monomorfismos posibles, por ejemplo.

$$U(1) \longrightarrow U(2), \quad e^{i\theta} \longmapsto e^{i\theta} I_2. \quad (3.13)$$

Un subgrupo de $U(2)$ es el *grupo unitario especial*:

$$SU(2) = \{A \in U(2) : \det A = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} w & -\bar{z} \\ z & \bar{w} \end{pmatrix} : \bar{w}w + \bar{z}z = 1 \right\}. \quad (3.14)$$

De esta manera resulta que el grupo $U(2)$ se identifica con el producto directo de $U(1)$ con $SU(2)$, según el monomorfismo elegido, (3.12) o (3.13), para ver $U(1)$ como subgrupo de $U(2)$ y queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & -\bar{z} \\ z & \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & -e^{i\theta}\bar{z} \\ z & e^{i\theta}\bar{w} \end{pmatrix} \in U(1) \cdot SU(2) = U(2) \quad (3.15)$$

Fibrando S^3 sobre S^2 .

Usando la ecuación (3.7), la ecuación (3.14) y la ecuación (3.15), identificamos $U(2)/U(1) = SU(2)$ y S^3 , mediante:

$$a = \begin{pmatrix} w & \cdot \\ z & \cdot \end{pmatrix} \mapsto (\omega, z) \quad (3.16)$$

Para fibrar S^3 sobre S^2 usaremos la aplicación $(\omega, z) \mapsto \frac{\omega}{z}$, y posteriormente la proyección estereográfica, para pasar de \mathbb{C} a S^2 (esfera de Riemann).

Sea la forma canónica (ecuación (3.2)) en $U(2)$:

$$\tilde{\omega} = a^{-1}da = a^\dagger da = \begin{pmatrix} \bar{z}dz + \bar{w}d\omega & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Esto define una 1-forma en S^3 , $\omega = \bar{z}dz + \bar{w}d\omega$, que expresada en función de los ángulos de Euler será $\omega = \frac{i}{2}(d\zeta + \cos(\theta)d\phi) = iA$.

A su vez, esto es una conexión en el fibrado de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$. Además, esta conexión, no solo es invariante al moverse por una fibra (Definición 3.4.1), sino también al moverse entre fibras [6, Teorema 11.1, p.103]. Su respectiva curvatura (Definición 3.5.1) será [10, p.110]:

$$\Omega = \frac{i}{2} \sin(\theta) d\phi \wedge d\theta = iF \quad (3.18)$$

$U(n)$ como producto directo de $U(1)$ y $SU(n)$.

Para nuestros intereses como físicos, no convendrá generalizar la ecuación (3.15) para $U(n)$. Podemos ver que si $A \in U(n)$, $\det(A) = e^{i\theta}$, por lo que, podemos expresar A como multiplicación de dos matrices $A = B \cdot C$, siendo $B = e^{i\frac{\theta}{n}} \cdot I_n$, con $I_n \in U(n)$ la identidad del grupo $U(n)$. De esta manera, $B = AC^{-1} \in U(n)$. Calculando el determinante a ambos lados $\det(B) = \det(A) \cdot [\det(c)]^{-1} = e^{i\theta} \cdot \left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^{-1 \cdot n} = 1$, y como consecuencia, $B \in SU(n)$. Por lo que, se demuestra que $U(n)$ se identifica con el producto directo de $SU(n)$ y $U(1)$, de la siguiente forma: $A = e^{i\frac{\theta}{n}} \cdot B \in U(1) \cdot SU(n) = U(n)$.

4 Teorías abelianas: Electromagnetismo

4.1 Electromagnetismo Clásico

Sea un campo electromagnético caracterizado por los campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$, estos están gobernados por las ecuaciones de Maxwell (donde $\vec{J}(\vec{r}, t)$ es la densidad de corriente, y $\rho(\vec{r}, t)$ es la densidad de carga):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Comentario. Tal como en estas ecuaciones, en todo el trabajo se usarán las coordenadas naturales: $c = \hbar = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$.

Por otro lado, la fuerza electromagnética que experimenta una partícula de carga q , en el seno de un campo electromagnético viene dada por la **fuerza de Lorentz**:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.5)$$

El observable que es la fuerza, viene expresado en función de \vec{E} y \vec{B} . A su vez, las ecuaciones de Maxwell nos dicen la dinámica de \vec{E} y \vec{B} . Es por eso, que los campos \vec{E} y \vec{B} , serán los observables.

Pero a su vez, operando, se pueden expresar los campos \vec{E} y \vec{B} en función de los potenciales ϕ y \vec{A} :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (4.6)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.7)$$

Hemos pasado de 6 variables E_x, E_y, E_z, B_x, B_y y B_z a 4 variables A_x, A_y, A_z y ϕ . Aún así estas 4 son redundantes, porque \vec{E} y \vec{B} son invariantes bajo **transformación de Gauge**. Esto quiere decir que dados \vec{A} y ϕ , existen otros \vec{A}' y ϕ' que describen a los mismos campos \vec{E} y \vec{B} y, por lo tanto, obedecen a las mismas ecuaciones de Maxwell y Lorentz. Es decir, describirán la misma física. Estas transformaciones de Gauge vienen dadas por:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi(\vec{x}, t) \quad (4.8)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (4.9)$$

Podemos ver que sustituyendo la ecuación (4.8) y la ecuación (4.9), en la ecuación (4.6) y en la ecuación (4.7) llegamos a los mismos valores de \vec{E} y \vec{B} , y por lo tanto a la misma física. Cuando se elige un par de potenciales \vec{A} y ϕ , se dice que se está **fijando el Gauge**.

Podemos ahora escribir la ecuación de movimiento de una partícula cargada (que no es otra cosa que la ecuación (4.5)) en función de los potenciales: $m\ddot{x} = q[-\partial_i\phi - \partial_t A_i + \dot{x}_j(\partial_i A_j - \partial_j A_i)]$. A su vez, esta ecuación de movimiento desciende del siguiente lagrangiano (mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_i)^2 + qA_i\dot{x}_i - q\phi \quad (4.10)$$

Si ahora efectuamos las transformaciones de Gauge (dadas por la ecuación (4.8) y la ecuación (4.9)) en la lagrangiana, vemos que esta no es invariante, si no que nos aparece un término de más en función de la función χ que elijamos para la transformación de Gauge: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + q\left(\vec{\nabla}\chi \cdot \dot{\mathbf{x}} + \partial_t\chi\right) = \mathcal{L} + q\left(\frac{d\chi(\vec{x},t)}{dt}\right)$

4.2 Electromagnetismo aplicado a la Ecuación de Schrödinger

Sea ahora una partícula cuántica en presencia de un campo electromagnético, esta se comportará según la ecuación de Schrödinger: $i\partial_t\psi = \hat{H}\psi$. Donde el hamiltoniano descenderá del lagrangiano de la ecuación (4.10) mediante:

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\phi \quad (4.11)$$

Por lo tanto, la ecuación de Schrödinger será:

$$i(\partial_t + iq\phi)\psi + \frac{1}{2m} \left(\vec{\nabla} - iq\vec{A}\right)\psi = 0 \quad (4.12)$$

Introducimos ahora las llamadas **derivadas covariantes**:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t &= \partial_t + iq\phi \\ \mathcal{D}_i &= \partial_i - iqA_i \end{aligned} \quad (4.13)$$

De esta manera, podemos escribir la ecuación de Schrödinger para el electromagnetismo como:

$$i\mathcal{D}_t\psi + \frac{1}{2m}\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i\psi = 0 \quad (4.14)$$

Que no es más que la ecuación de Schrödinger para partícula libre, pero cambiando la derivada ordinaria por la derivada covariante. Como paso inmediato, la pregunta que uno debería hacerse es:

¿Es esta ecuación invariante bajo transformaciones de Gauge?

Puesto que esta es la ecuación de movimiento para una partícula cuántica, un cambio de Gauge en los potenciales (lo que en electromagnetismo clásico hemos visto que no cambia la física), no debería modificar la ecuación. Si esto pasara, obtendríamos una ecuación de movimiento para cada posible Gauge, lo que no tiene sentido.

Pero, efectivamente, la ecuación depende explícitamente de los potenciales, y bajo transformada de Gauge de los mismos, no se mantiene invariante. En cambio, si acompañamos las transformadas de Gauge de los potenciales con una transformada de la función de onda de cierta forma, la ecuación se mantendrá invariante. Por lo tanto, a las

transformadas de Gauge de los potenciales (ecuación (4.8) y ecuación (4.9)), debemos de agregarle la siguiente:

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t) \cdot e^{iq\chi(\vec{x}, t)} \quad (4.15)$$

Esta transformación no supone un cambio en cuanto a la física que observaremos, pues, según la regla de Born, la probabilidad de encontrar la partícula en (\vec{x}, t) , viene dada por $|\psi(\vec{x}, t)|^2$. En cambio, esta cantidad no se modifica mediante la transformada $|\psi(\vec{x}, t)|^2 \rightarrow |\psi'(\vec{x}, t)|^2 = |\psi(\vec{x}, t)e^{iq\chi(\vec{x}, t)}|^2 = |\psi(\vec{x}, t)|^2$. De acuerdo con la ecuación (4.15), diremos que las **transformaciones de Gauge para electromagnetismo forman el grupo U(1)**.

Después de todas estas transformaciones de Gauge, llegamos a pensar que toda la física es invariante bajo estas. En cambio, si observamos la ecuación del hamiltoniano (ecuación (4.11)), podemos comprobar que este no es invariante. Como consecuencia, hemos de decir que **los estados físicos no están en concordancia con un valor del hamiltoniano sino con las órbitas**, donde con órbita nos referimos a un conjunto de valores Gauge equivalentes.

El lector atento se habrá extrañado de volver a escuchar la palabra "órbita", ahora en un contexto aparentemente lejano al de fibrados principales (ver definición 3.2.1)). Para explicar al completo esta aparente coincidencia, deberemos pasar todo esto a \mathbb{R}^4 con métrica lorentziana, lo que haremos posteriormente en 4.4.

4.2.1 Efecto Aharonov-Bohm

Comentario. Para explicar este efecto nos serviremos del formalismo de integrales de camino de Feynman. En este formalismo, el operador de evolución temporal vendrá dado por:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \mathcal{D}^3x \cdot e^{i \cdot S}$$

Consideramos el problema de las dos rendijas, para partícula cargada en un campo magnético \vec{B} (constante en el tiempo) creado por un solenoide de grosor despreciable, y perpendicular al plano del experimento. La distancia entre el punto donde se aplica \vec{B} , y las rendijas se considera muy grande.

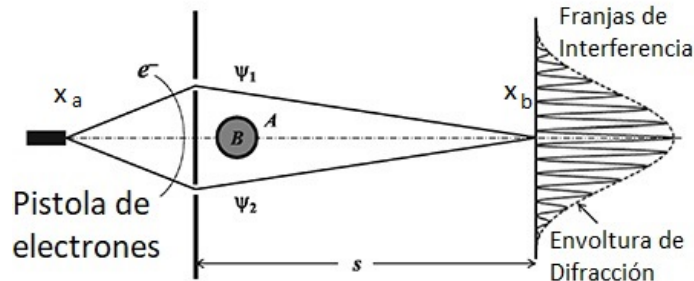


Figura 5: Ilustración del montaje experimental para la observación del efecto Aharonov-Bohm [13]

Como vimos para electromagnetismo clásico, la presencia del solenoide no debería afectar a la partícula, pues ésta pasa por la zona donde \vec{B} es 0.

Elegimos un Gauge en el cual $\phi = 0$ y $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x})$, que depende solo de \vec{x} , porque \vec{B} es independiente del tiempo. Y, siendo \mathcal{L}_0 el lagrangiano para partícula libre, S_0 , su respectiva acción, y Γ el camino $x(t)$; calculamos la acción total: $\mathcal{S} = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\mathcal{L}_0 + q\vec{A} \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = s_0 + q \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{x}$.

Los caminos que clásicamente minimizan la acción son 2, uno el que pasa por una rendija, y otro el que pasa por la otra. Y la integral vendrá dominada por los caminos “vecinos” a estos. Por lo tanto, $K(x_b, t_b; x_a, t_a) = K_1(x_b, t_b; x_a, t_a) + K_2(x_b, t_b; x_a, t_a)$, y la función de onda en la pantalla (x_b), vendrá dada por: $\psi(x_b, t_b) = \int d^3x_a K(x_b, t_b; x_a, t_a) \psi(x_a, t_a) = \psi_1(x_b, t_b) + \psi_2(x_b, t_b)$.

Por lo tanto, tenemos interferencia entre la función de onda del camino que pasa por la rendija 1 ($\psi_1(x_b, t_b)$), y el que pasa por la rendija 2 ($\psi_2(x_b, t_b)$). Puesto que, uniendo ambos caminos Γ_1 y Γ_2 obtenemos un camino cerrado Γ (cuya superficie denotaremos por S), podemos aplicar el teorema de Stokes (2.17) (en la segunda igualdad):

$$\int_{\Gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{x} - \int_{\Gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = \phi_b \quad (4.16)$$

Donde, por ϕ_b hemos denotado el flujo de \vec{B} por la superficie S .

Observación 4.2.1. Vemos que el resultado varía solo si nuestro camino da una vuelta entorno al punto B , o no. De esta forma **el solenoide actúa como una singularidad para una función analítica**.

De esta manera, podemos sacar este término $\int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{x}$ de la integral del operador evolución, y obtenemos: $K_{p_1}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \exp\left(iq \int_{\Gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{x}\right) \cdot K_{0,p_1}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ y $K_{p_2}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \exp\left(iq \int_{\Gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{x}\right) \cdot K_{0,p_2}(x_b, t_b; x_a, t_a)$.

Así, sacando factor común $\exp\left(iq \int_{\Gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{x}\right)$ y usando la ecuación (4.16) en la segunda igualdad, obtendremos la siguiente función de onda para un punto de la pantalla:

$$\begin{aligned} \psi(x_b, t_b) &= \exp\left(iq \int_{\Gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{x}\right) \cdot \psi_1(x_b) + \exp\left(iq \int_{\Gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{x}\right) \cdot \psi_2(x_b) \\ &= \exp\left(iq \int_{\Gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{x}\right) [\psi_1(x_b) + \exp(iq\phi_b) \cdot \psi_2(x_b)] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Vemos que la variación de \vec{B} cambia la fase relativa entre los dos términos, y, por lo tanto, varía el término de interferencia. A su vez, esto cambiará nuestras franjas de interferencia en la pantalla. Visto esto, podríamos pensar que los potenciales tienen un significado físico, pues, pese a no haber un campo \vec{B} en el camino, si que hay un \vec{A} distinto de 0. En cambio, si nos damos cuenta, el potencial \vec{A} debe cumplir la ecuación (4.16), por lo que, al final, su circulación a lo largo del camino vendrá determinada por el campo \vec{B} que estemos rodeando. Mediante transformación de Gauge podemos hacer que \vec{A} valga 0 en un punto, pero no en todos, ya que su circulación completa debe ser ϕ_B .

A partir de aquí, vemos que el significado físico, en última instancia, vuelve a ser desarrollado por los campos. Lo que se manifiesta en este experimento, es la **no localidad** de la mecánica cuántica, pues, aunque creemos un camino muy distante de B , si este lo rodea, sentirá su efecto magnético.

4.3 Electrodinámica Cuántica

Ahora consideramos una teoría cuántico relativista (pasamos a 4 dimensiones con métrica de Minkowski) como es la electrodinámica cuántica. Partimos de la ecuación de Dirac para partículas de spin $\frac{1}{2}$ (como el electrón) $(i\partial - m)\psi = 0$. Donde ψ es el spinor de Dirac, y ∂ se define como $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$. Siendo γ^μ las llamadas matrices gamma o matrices de Dirac, que son 4×4 . Puede verse que esta es la ecuación de movimiento que descende del siguiente lagrangiano: $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi$.

Vemos que si efectuamos las transformaciones $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ y $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha}$, con $\alpha \neq \alpha(x^\mu)$, el lagrangiano se mantiene invariante. Es decir, tenemos una simetría global (pues el parámetro α no depende del espacio tiempo). Por lo tanto, por el teorema de Noether, tendremos una corriente y una carga asociada a esta simetría. La corriente asociada es:

$$j_{global}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (4.18)$$

Ya que la corriente asociada a dicha transformación se mantiene invariante, ya sea global o local, la designaremos como j^μ . Si, en cambio, ahora efectuamos la misma transformación, pero de manera local ($\alpha = \alpha(x^\mu)$), vemos que la lagrangiana no es invariante, sino que, ésta transforma como $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - e \cdot \partial_\mu \alpha \cdot \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, es decir, $\delta\mathcal{L} = -e \cdot \partial_\mu \alpha \cdot \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = -e \cdot \partial_\mu \alpha \cdot j^\mu$. Si queremos mantener esta simetría de forma local, hemos de introducir un término en la lagrangiana que la mantenga invariante bajo esta transformación. Para ello, introducimos el nuevo término $eA_\mu j^\mu$, resultando la lagrangiana como: $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi + eA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

En él, hemos introducido un nuevo campo A_μ , al cual le exigimos que se transforme a la par que lo hacen los spinores, y de la siguiente forma $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$. De esta forma, $\delta A_\mu = -\partial_\mu \alpha$, y por tanto $\delta(A_\mu j_{global}^\mu) = e \cdot \partial_\mu \alpha \cdot j^\mu$. Y de esta manera, tenemos $\delta\mathcal{L} = -e \cdot \partial_\mu \alpha \cdot j^\mu + e \cdot \partial_\mu \alpha \cdot j^\mu = 0$. Podemos ahora agrupar los términos de la nueva lagrangiana para llegar a la siguiente expresión $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - e\mathcal{A} - m)\psi$, donde hemos definido $\mathcal{A} = A_\mu \gamma^\mu$. Definiendo ahora la derivada covariante:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ie \cdot A_\mu \quad (4.19)$$

Y siendo $\mathcal{D} = \partial - ie \cdot \mathcal{A}$ llegamos a la siguiente expresión del lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\mathcal{D}\psi + e\gamma^\mu \bar{\psi}A_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi \end{aligned} \quad (4.20)$$

Una vez más, tenemos el mismo lagrangiano que en principio, pero hemos sustituido la derivada ordinaria por la derivada covariante. Si comparamos la nueva derivada covariante (ecuación (4.19)), con las dos de la ecuación de Schrödinger con electromagnetismo (ecuaciones (4.13)), vemos que la primera es una generalización de las dos segundas si definimos A^μ como $A^\mu = (\phi, \vec{A})$. Vemos entonces que **la imposición de la invarianza gauge U(1) local ha introducido el electromagnetismo** en esta teoría. A su vez, podemos ver que la corriente de Noether asociada a la simetría (ecuación (4.18)), multiplicada

por la carga e , es el 4-vector corriente $J^\mu = ej^\mu = (\rho, \vec{J})$. Y, el operador carga asociado a esta simetría no será otra cosa que el operador carga eléctrica.

El nuevo vector A^μ que hemos añadido se traduce en que hemos introducido un nuevo tipo de partícula en nuestra teoría (que, no es difícil ver que al estar relacionada con el electromagnetismo, será el fotón). Si queremos ahora, darle cierta dinámica a esta nueva partícula (ecuaciones de Maxwell), hemos de introducir también un término dinámico para dicho vector. Éste debe ser lineal respecto a las primeras derivadas de los campos, pero no debe contener órdenes superiores para mantener la causalidad en la teoría. Normalmente, para ello se define el “field strength” como $F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g}[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$ [9, p. 418, ecuación (69.14)]. Este $F_{\mu\nu}$ no es otra cosa que el tensor de Faraday o de campo electromagnético.

Por lo tanto, del lagrangiano debemos de poder sacar la ecuación de movimiento para el campo electromagnético. Estas no serán otra cosa que las ecuaciones de Maxwell. Podemos ver que las ecuaciones no homogéneas (4.3) y (4.4) descienden del lagrangiano $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu$. A partir de aquí, fácilmente obtendremos la ecuación de movimiento $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$. Las otras dos ecuaciones de Maxwell (4.1) y (4.2) las impondremos.

Observación 4.3.1. Si hacemos $J = 0$, obtenemos las ecuaciones de Maxwell para el vacío. El lagrangiano en este caso, será únicamente $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. En cambio, al término asociado a J se le suele llamar término de interacción $\mathcal{L}_{int} = A_\mu J^\mu$ (el mismo que aparecía en la ecuación (4.20)).

Observación 4.3.2. Para la lagrangiana electromagnética se podría haber pensado en los términos lorentz invariantes $A_\mu A^\mu$, y $A_\mu A^\nu F^{\mu\nu}$, pero estos no son invariantes bajo las transformaciones gauge. En cambio, el término $A_\mu J^\mu$, aunque no es invariante gauge, ya que transforma según $A_\mu J^\mu \rightarrow A_\mu J^\mu - \partial_\mu(\chi)J^\mu$, no modificará la acción. Podemos expresar esta última parte como $\partial_\mu(\chi)J^\mu = \partial_\mu(\chi J^\mu) - \chi\partial_\mu(J^\mu)$. El primer término da una contribución a la acción dada por $S_1 = \int_\Sigma d^4x \cdot \partial_\mu(\chi J^\mu)$, que va a 0 para $\Sigma \rightarrow \infty$. En cambio, el segundo término es 0 por la conservación de la carga. Al no variar la acción, la ecuación de movimiento permanece invariante.

Finalmente, uniendo todos los términos, hemos llegado al *lagrangiano de la electrodinámica cuántica (QED)*:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + e\gamma^\mu\bar{\psi}A_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\not{\mathcal{D}} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}\tag{4.21}$$

A partir del lagrangiano de una teoría, desciende toda la física que describe dicha teoría. En particular, para la teoría de campos, hay cierta información sobre la misma que podemos obtener simplemente echando un vistazo a sus términos:

- i) El escalar que acompaña a un término cuadrático es m , que es la masa asociada a dicho campo.
- ii) Cuando hay más de 2 campos multiplicándose entre sí, esto describe un vértice de interacción entre dichos campos.

iii) El campo complejo conjugado a otro, describe su antipartícula.

Observación 4.3.3. Por lo tanto, según *ii*) y *iii*), suponiendo que ψ describe a un electrón, tenemos una interacción entre fotones, electrones y positrones dada por el término $e\gamma^\mu \bar{\psi} A_\mu \psi$.

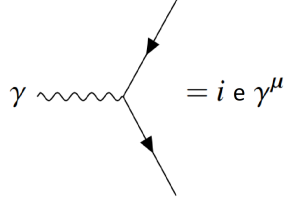


Figura 6: Diagrama de Feynman del vértice entre un fotón, un fermión y un antifermión

Observación 4.3.4. Por otro lado, como consecuencia de no poder usar en el lagrangiano un término proporcional a $A_\mu A^\mu$ (observación 4.3.2), y usando *i*), la masa del fotón será 0, como bien cabría esperar. A su vez, por *ii*), el fotón no tendrá interacción consigo mismo.

Interpretación en términos de Geometría Diferencial

Vemos que el campo A^μ transforma bajo cambio de gauge como el representante local de una 1-forma de conexión (según la ecuación (3.4)), para el caso en que el grupo G sea abeliano (tal como lo es $U(1)$). Podemos calcular entonces, cuál sería el representante local de la curvatura aplicando el teorema 3.4. Puesto que $U(1)$ es abeliano, simplemente tenemos $F = dA$. Si identificamos cada coordenada de F respecto al elemento $dx^i \otimes dx^j$ como la entrada ij de un tensor F^{ij} (obviamente antisimétrico), vemos que obtenemos el tensor de Faraday o de campo electromagnético.

Mientras, antes hemos impuesto las ecuaciones de Maxwell (4.1) y (4.2), estas aparecerán de manera natural en este formalismo. Aplicamos ahora la identidad de Bianchi (Teorema 3.9). Sabiendo que el grupo es abeliano, el conmutador entre curvatura y conexión se hace 0, y esto se simplifica en $dF = 0$. Aplicando la ecuación (2.10) para el cálculo de la diferencial exterior en coordenadas, llegamos a las 2 ecuaciones de Maxwell homogéneas (ecuación (4.2) y ecuación (4.3)).

Para las ecuaciones no homogéneas, pasamos el 4-vector $J = J^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ al lenguaje de las 1-formas mediante $J^\flat = -\rho dt + \vec{J} \cdot d\vec{r} = J_\mu dx^\mu$. De esta manera, las dos ecuaciones restantes no homogéneas se resumen en $\delta F = J$. Por tanto, podemos escribir las ecuaciones de Maxwell de manera extremadamente simplificada en el lenguaje de las 1-formas únicamente como (donde viene implícita la ecuación $dF = 0$ por ser una identidad para la 2-forma de curvatura):

$$\delta F = J \tag{4.22}$$

A su vez, si volvemos a aplicar δ llegamos a $\delta^2 F = \delta J = 0$. Esto es igual a 0 por la condición $\delta^2 = 0$ (ver 2.6.2). Esta última ecuación no es otra cosa que la conservación de la carga $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

En última instancia, la invarianza gauge local $U(1)$, nos da el acoplamiento mínimo, que genera la interacción entre fermiones y fotones. A su vez, ésta implica que el fotón no tenga masa.

4.4 Electromagnetismo aplicado a una partícula de spin 0

Tratamos ahora con partículas de spin 0. Será más fácil tratar con ellas, pues su función de onda será una función escalar, en vez de un espinor (como teníamos para los electrones en la QED). Para una partícula con carga e de spin 0 (como los piones π^\pm), su ecuación de movimiento, será la ecuación de Klein-Gordon $(\square + m^2)\psi = 0$ (“versión relativista de la ecuación de Schrödinger”). No es difícil ver que esta es la ecuación de movimiento asociada al lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi^* - \frac{1}{2}m^2\psi\psi^*$. Análogamente a lo visto para QED, con el fin de hacer el lagrangiano invariante bajo transformaciones de gauge locales, pasamos de la derivada ordinaria a la covariante mediante $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Finalmente, llegamos a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu\psi\mathcal{D}^\mu\psi^* - \frac{1}{2}m^2\psi\psi^* \quad (4.23)$$

A su vez, la ecuación de Klein-Gordon quedará como $(\mathcal{D}^\mu\mathcal{D}_\mu + m^2)\psi = 0$.

Interpretación en términos de Geometría Diferencial

Podemos ahora interpretar al completo el electromagnetismo en función de los fibrados principales y los fibrados asociados (sección 3.3). Todo esto será para grupo de estructura $U(1)$. La función de onda, puede verse como una función escalar $\tau : P \rightarrow \mathbb{C} \in C(P, \mathbb{C})$ (que también puede ser vista como la sección de un fibrado asociado) bajo alguna representación $\rho : U(1) \rightarrow GL(\mathbb{C})$. Ya que todas las representaciones irreducibles de $U(1)$ son del tipo $\rho(e^{i\alpha}) = e^{i\cdot n\cdot\alpha}$, podemos ver que n está en clara correspondencia con la carga de la partícula. De esta manera, la carga de ésta será la representación en la que vive la misma ($n=q$).

Si ahora efectuamos una transformación de gauge f , pasamos de un punto p a otro punto $q = p \cdot e^{i\alpha}$. De esta manera, $\tau(pe^{i\alpha}) = e^{-in\alpha} \cdot \tau(p)$, que es la transformación de gauge para la función de onda (ecuación 4.15). A su vez, podemos “bajar” la función de onda al espacio base mediante una sección $\psi = \sigma^*\tau$. De esta manera, la transformación de gauge es equivalente a un cambio de trivialización $\sigma'(x) = \sigma(x)h(x)$, donde h es la función de transición de la definición 3.2.2. Por lo tanto, $\psi' = e^{-in\alpha}\psi$. El representante local de la conexión transformará según $\omega'_U = h^{-1}\omega_U h + h^{-1}dh$ (ecuación 3.4), tal como el potencial A^μ (pero para caso abeliano esta expresión se simplifica notablemente) y el representante local de la curvatura según $F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger$ (teorema 3.11), donde para caso abeliano $F_{\mu\nu}$ no varía.

De esta manera, podemos ver el electromagnetismo de forma totalmente geométrica. Un cambio de gauge, cambia cada punto dentro de su misma fibra (cambio de sección), lo que induce una transformación en la función de onda. A su vez, cambia la conexión, modificando así la distribución de espacios horizontales, pero de forma que no se altere la curvatura. La verdadera física, viene dada por $F_{\mu\nu}$ (pues contiene los campos) que se mantiene invariante, y \mathcal{D}_μ , que nos habla de la relación entre la sección y el subespacio

horizontal. Un cambio de gauge, por lo tanto, modifica ambos de manera complementaria, manteniendo $\mathcal{D}_\mu \psi \mathcal{D}^\mu \psi^*$ invariante. Esto se traduce en que la física no cambia bajo este tipo de transformaciones.

4.4.1 Monopolos Magnéticos de Dirac

Imaginamos ahora el mismo montaje de la figura 4.2.1 para el efecto Aharonov-Bohm, pero con $\vec{B} = \frac{2\pi}{e}$. Para este valor de \vec{B} , podemos hacer que la interferencia no sea observada por las partículas cargadas que rodean dicho \vec{B} , si dichas partículas tienen una carga que sea múltiplo de e . Es decir, la consecuencia de que no veamos estos solenoides infinitamente finos de \vec{B} sería la **cuantización de la carga**. Esto da paso a los monopolos magnéticos. Consideramos el teorema asociado a C.N. Yang [10, p.109]:

Teorema 4.1. *Si $P \rightarrow M$ es un fibrado trivial con fibra típica $U(1)$, Σ una superficie cerrada de dimensión 2 en M , y F cualquier campos electromagnético en M correspondiente a una conexión ω en P , entonces el flujo del campo magnético es 0: $\int_\Sigma F = 0$.*

Demostración: Ya que $P \rightarrow M$ es trivial, tenemos una sección $f : M \rightarrow P$, y $iF = f^*\Omega = f^*d\omega = d(f^*\omega)$, por lo que, por el teorema de Stokes (teorema 2.3):

$$\int_\Sigma iF = \int_\Sigma d(f^*\omega) = \int_{\partial\Sigma} f^*\omega = 0 \quad (4.24)$$

La última igualdad se da porque Σ es cerrado, es decir, compacto y sin frontera (no confundir con el concepto de topología, que define un cerrado como el complementario de un abierto), por lo que $\partial\Sigma = \emptyset$.

Un teorema clásico en topología dice que si M es contráctil, entonces $P \rightarrow M$ es trivial. Por lo tanto, si queremos seguir con nuestro formalismo matemático de fibrados (el cual hasta ahora ha resultado muy satisfactorio) para describir ahora un monopolo magnético, hemos de decir que el espacio tiempo no es contractible. Si queremos describir un monopolo magnético en este formalismo de fibrados, hemos de trabajar sobre un fibrado no trivial sobre el espacio-tiempo.

Siguiendo con la idea de que el solenoide actúa como una singularidad (4.2.1), consideramos que nuestro espacio base M es el espacio-tiempo pero quitándole el eje temporal $M = \mathbb{R}^4 - \text{eje } x^0$. El haber quitado este eje x^0 , actúa como una singularidad. Esto es lo que comúnmente se conoce como **cuerda de Dirac**. Para describir el electromagnetismo, deberemos fibrar $U(1)$ sobre este espacio base. Al igual que $\mathbb{R}^3 - \text{eje } x^1$ es homeomorfo a $S^1 \cdot \mathbb{R}^2$, tenemos que $M = \mathbb{R}^4 - \text{eje } x^0$ es homeomorfo a $S^2 \cdot \mathbb{R}^2$. Puesto que la parte de \mathbb{R}^2 es contráctil, nos centramos en la parte de S^2 . Nos damos ahora cuenta que construir el fibrado con base S^2 y fibra típica $U(1)$ no es otra cosa que el fibrado de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$. A continuación, recuperamos los resultados obtenidos en 3.6 para este fibrado de Hopf, y, los interpretamos en función de la física del monopolo magnético:

Interpretación como fibrado de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$

Las singularidades de los potenciales electromagnéticos correspondientes al monopolo magnético se deben al carácter no trivial del fibrado $S^3 \rightarrow S^2$. Elegimos una sección, cubriendo todo S^2 menos el polo norte ($\theta = 0$), ya que no podemos escoger una sección global (teorema 2.2): $(\theta, \phi) \mapsto (z = e^{i\phi} \cos(\frac{\theta}{2}), \omega = \sin(\frac{\theta}{2})) \in S^3$.

Entonces, calculamos el representante local de la 1-forma de conexión mediante esta sección $f^* \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos(\theta) d\phi) = A$, cuya componente esencial es:

$$A_\phi = \frac{1 + \cos(\theta)}{2r \sin(\theta)} \quad (4.25)$$

Podemos ver, que, claramente es singular para $\theta = 0$. Calculando ahora la divergencia

$$\begin{aligned} \iiint_{\Sigma} \nabla \cdot \vec{B} &= \iint_{\partial\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial\Sigma} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\partial\Sigma} dA = \int_{\partial\Sigma} F = \int_{\partial\Sigma} \frac{1}{2} \sin(\theta) d\phi \wedge d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\phi d\theta = 2\pi \end{aligned} \quad (4.26)$$

Sea la constante de estructura fina $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi}$ en unidades naturales. Si igualamos la carga elemental a esta, obtenemos $e = 4\pi$, por lo que la carga del monopolo magnético será $g = \frac{1}{2}e$ [10, p.111].

5 Teorías no abelianas: Yang-Mills

Sea ahora la misma lagrangiana que antes, pero para n campos fermiónicos: $\mathcal{L} = \sum_{a=1}^n \bar{\psi}^a (i\partial - m)\psi^a$. Podemos expresar los n espinores como un vector con n entradas, de forma que cada entrada es uno de estos espinores:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \begin{pmatrix} \bar{\psi}^1 \\ \dots \\ \bar{\psi}^n \end{pmatrix} (i\partial - m) \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \dots \\ \psi^n \end{pmatrix} \\ &= \bar{\psi} (i\partial - m) \psi \end{aligned} \quad (5.1)$$

Donde, **por ψ ahora nos referiremos al vector dado por los n espinores**. Podemos ver fácilmente, que el orden de cada espinor en este vector no tiene ningún significado. De esta manera, podemos ir “barajando” el orden de los espinores mediante la multiplicación de ψ por una matriz M . Además, siguiendo con la simetría $U(1)$, podremos multiplicar a cada espinor ψ^a por una fase, que, además puede ser diferente, de la fase por la que multiplicaremos a ψ^b . Por lo tanto, M será una matriz $n \times n$ con entradas complejas, que, además, habrá de ser unitaria (pues estamos “barajando los índices” y multiplicando las fases, operaciones que no cambian el módulo total). Según demostramos en 3.6, podemos descomponer M como $M = e^{i\alpha} U$, con $U \in SU(n)$. Todo esto nos lleva a que, la transformación $\psi \rightarrow e^{i\alpha} U\psi$ y $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} U^\dagger e^{-i\alpha}$, debería de dejar la lagrangiana invariante.

Puesto que ya sabemos que la simetría para la fase $U(1)$ es la asociada al electromagnetismo, nos centramos solo en la transformación dada por la matriz $U \in SU(n)$ ($\psi \rightarrow U\psi$ y $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} U^\dagger$). Si efectuamos esta transformación de forma global, vemos que la lagrangiana se mantiene invariante. En cambio, si ahora la hacemos de forma global ($U = U(x^\mu)$), perdemos la invarianza.

Igual que antes, definimos la derivada covariante para esta lagrangiana como $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig \cdot B_\mu$, donde ahora B_μ será una matriz $B_\mu \in SU(n)$. De esta manera, podemos

expresar B_μ en una base de $SU(n)$, como $B_\mu = B_\mu^A \cdot E^A$. Finalmente introduciendo el nuevo término $\bar{\psi} B_\mu \gamma^\mu \psi$, y ordenando, llegamos a: $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi$. Que formalmente parece la misma que la ecuación (4.20), pero, no olvidar que aquí ahora ψ es un vector, y la derivada covariante es con $B_\mu \in SU(n)$ en vez de con A_μ .

Si queremos mantener este lagrangiano invariante bajo la transformación local, la derivada covariante deberá transformar de forma que $i\bar{\psi}U^\dagger \mathcal{D}' U\psi = i\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$, es decir:

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}' = U\mathcal{D}U^\dagger \quad (5.2)$$

Sabiendo que $\mathcal{D}' = U(\partial_\mu - i \cdot B_\mu)U^\dagger = U\partial_\mu U^\dagger - iUB_\mu U^\dagger + \partial_\mu$, entonces, B_μ deberá transformar de la siguiente manera:

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = iU\partial_\mu U^\dagger + UB_\mu U^\dagger \quad (5.3)$$

Para obtener la field strength, realizamos el mismo procedimiento que en electromagnetismo, calculamos la field strength según $F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g}[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$ [9, p. 418, ecuación (69.14)]. Aplicando la regla de transformación dada por la ecuación 5.2, llegamos a que $\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \rightarrow U(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu)U^\dagger$. Por lo tanto, la field strength transformará según:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow UF_{\mu\nu}U^\dagger \quad (5.4)$$

Siendo E^a los elementos de la base del álgebra de Lie de $SU(n)$, pediremos la siguiente relación de normalización $Tr(E^a E^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ [9, p. 417, ecuación (69.8)]. Por ejemplo para $SU(2)$ tenemos $E^a = \frac{1}{2}\sigma^a$, con σ^a las matrices de Pauli.

Podemos expresar A_μ , su derivada covariante, y $F_{\mu\nu}$ en función de los elementos de la base del álgebra de Lie como $A_\mu = A_\mu^a E^a$, $\mathcal{D}_\mu = i\partial_\mu - igE^a A_\mu^a$, y para $F_{\mu\nu}$ [9, p. 419, ecuación (69.22)]:

$$F_{\mu\nu}^c = \partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c + gC^{abc} A_\mu^a A_\nu^b \quad (5.5)$$

Con C^{abc} las constantes de estructura definidas en 3.1. Buscamos ahora dar una dinámica, de la misma forma que hicimos con el electromagnetismo. Pero ahora hemos de darnos cuenta, de que el término $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ no es invariante de gauge, pues transforma según $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \rightarrow UF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}U^\dagger$. Podemos arreglar esto, metiendo este término en un determinante o en una traza, ya que por las propiedades de estas, obtendremos $\det(UF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}U^\dagger) = \det(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ y $\text{tr}(UF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}U^\dagger) = \text{tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$. Pero, dado que el determinante multiplica a las diferentes coordenadas entre sí, esto multiplicaría entre sí a las derivadas y nos daría un orden elevado de las mismas, lo que nos hará llegar a una teoría no local (que en función de la Teoría de la Relatividad Especial nos haría perder la causalidad). Por lo tanto, elegimos la traza, y nos quedamos con el término $-\frac{1}{2}Tr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$.

De esta manera, usando la condición de normalización, podemos escribir su correspondiente término cinético del lagrangiano como [9, p. 419, ecuación (69.23)]:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^{c\mu\nu}F_{\mu\nu}^c \quad (5.6)$$

Este término es análogo al término cinético del electromagnetismo. A este lagrangiano también se le denomina a veces como **lagrangiano de Yang-Mills**.

De esta ecuación, vemos que \mathcal{L}_{YM} incluye términos de interacción entre los campos de gauge, lo cual no pasaba para las teorías abelianas (observación 4.3.4). Una teoría de este tipo se llama *teoría de gauge no abeliano* o *teoría de Yang-Mills* [9, p. 419].

Ejemplo 5.0.1. Un ejemplo de esto es la *cromodinámica cuántica (QCD)*, donde el grupo de estructura es $SU(3)$.

Ejemplo 5.0.2. Otro ejemplo es el propio modelo estándar, que es una teoría gauge con grupo de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ [9, p. 543].

Interpretación en términos de geometría diferencial

Si la interpretación de A_μ como las coordenadas de una 1-forma de un representante local de una conexión pudo parecer algo arbitrario para el caso abeliano, para el caso no abeliano con B_μ , vemos que la transformación (5.3) es exactamente coincidente con (3.4).

A su vez, el field strength $F^{\mu\nu}$ transforma según la ecuación (5.4), que es como lo hace el representante local de una curvatura (tal como se vio en el teorema 3.11).

En última instancia, el que $SU(n)$ no sea abeliano es la causa por la que los bosones interactúan entre ellos.

5.1 Ecuaciones de Yang-Mills e Instantón BPST

Para obtener la autoacción de este campo, hemos de integrar este término para todo el espacio tiempo, (donde tratamos con acción Euclídea) [3, p.354]:

$$S[B] = +\frac{1}{4} \int_M F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a g^{\frac{1}{2}} d^4x = -\frac{1}{2} \int_M \text{Tr} F \wedge \star_g F \geq 0 \quad (5.7)$$

Buscaremos las soluciones con mínima acción. Las ecuaciones de campo de Yang-Mills encontradas variando la acción son $d \star_g F + A \wedge \star_g F - \star_g F \wedge A = 0$. En cambio, la identidad de Bianchi (teorema 3.9) es $dF + A \wedge F - F \wedge A = 0$. Para encontrar el mínimo de la acción, consideramos la siguiente desigualdad:

$$\int_M \left(F_{\mu\nu}^a \pm F_{\mu\nu}^a \right)^2 g^{\frac{1}{2}} d^4x \geq 0 \quad (5.8)$$

El mínimo será para la condición autodual $F = \pm \star_g F$. Esta configuración resuelve las ecuaciones de campo de Yang-Mills, ya que las identidades de Bianchi implican las ecuaciones de campo. La acción entonces se convierte en:

$$S = -\frac{1}{2} \int_M \text{Tr} F \wedge \star_g F = \pm \frac{1}{2} \int_M \text{Tr} F \wedge F = 4\pi |k| \quad (5.9)$$

Donde $C_2 = k = -\frac{1}{8\pi} \int_M \text{Tr} F \wedge F$ es la integral de la llamada segunda clase de Chern. 't Hooft llamó a estas configuraciones de campo especiales "instantones", ya que, en el caso $|k| = 1$ su field strength está centrada entorno a un punto e el espacio tiempo y por lo tanto, alcanza su máximo valor para un "instante de tiempo". Físicamente, esto

se puede interpretar como una especie de efecto túnel entre diferentes estados de vacío para las teorías de gauge Yang-Mills [9, p.590].

La contribución dominante a la integral de camino Euclídea viene de las soluciones a instantón que cumplen la condición de auto-dualidad $F = \pm \star_g F$. La solución más importante en la teoría de Yang-Mills es el instantón BPST [1].

El instantón de Belavin, Polyakov, Schwartz y Tyupkin resuelve las ecuaciones de Yang-Mills con $k = \pm 1$. Aunque el espacio tiempo de la solución es aparentemente \mathbb{R}^4 , las condiciones de contorno al ∞ nos permiten hacer el espacio de manera compacta transformándolo en S^4 . Entonces, el instantón BPST es una conexión con curvatura auto-dual en un $SU(2) = S^3$ fibrado principal sobre S^4 con segundo número de Chern $C_2 = -1$. Ya que la acción del instantón BPST es $S = 4\pi$, tiene la mínima acción posible para una topología no trivial, lo que la convierte en la solución más importante para la teoría de Yan-Mills. Notamos que el instantón BPST es una conexión en el fibrado de Hopf $\pi : S^7 \rightarrow S^4$ [10, p.111], por esta razón, puede obtenerse a partir de la combinación autodual de conexiones de Riemann estándar en S^4 [3, p.356].

Instantón interpretado como un Fibrado de Hopf

Partimos del fibrado de Hopf descrito en 3.6. Si reemplazamos en las fórmulas (3.7) y (3.17) los números complejos z y ω por cuaterniones, llegamos al siguiente doble fibrado $Sp(2) \rightarrow Sp(2)/Sp(1) = S^7 \rightarrow S^4$ (con $Sp(n)$ denotando el grupo simpléctico compacto de orden n). La ecuación (3.7) ahora define S^7 . En vez de los ángulos de Euler, ahora introducimos un cuaternión unitario $u \in Sp(1)$ ($\bar{u} = u^{-1}$), y otro cuaternión definido como $\epsilon = \omega z^{-1}$, entonces: $z = \rho u$, $\omega = \rho \epsilon u$, donde $\rho^2 = \frac{1}{1+|\epsilon|^2}$, y la forma de conexión (3.17) se transforma en $\omega = u^{-1} du + \frac{u^{-1}}{2} \rho^2 (\bar{\epsilon} d\epsilon - (d\bar{\epsilon})\epsilon) u$. La correspondiente forma de curvatura $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ viene dada por $u\Omega u^{-1} = \rho^4 d\bar{\epsilon} \wedge d\epsilon$, que describe el instantón BPST en S^4 con elemento de línea dado por $ds^2 = \rho^4 d\bar{\epsilon} d\epsilon$ [10, p.111].

Ya que las ecuaciones de Yang-Mills son invariantes conformes para $dim(M) = 4$, la solución en S^4 puede ser transformada, mediante proyección estereográfica en una solución en \mathbb{R}^4 [10, p.112].

6 Conclusiones

Examinando el título de este trabajo, podemos claramente ver que, el objetivo del mismo, ha sido entender las teorías de gauge en física, pero desde el formalismo matemático de los fibrados.

A primera vista, puede parecer una curiosidad matemática carente de importancia a nivel físico. Pero, en realidad, un formalismo adecuado para una teoría física puede impulsar a la misma en gran medida. Solo hay que imaginar la dificultad de hacer ciertos cálculos en teoría de la relatividad, en termodinámica, o en física cuántica sin usar los formalismos matemáticos desarrollados a posteriori. Por eso, este nuevo formalismo dará un nuevo punto de vista, más simple, geométrico y nuevo, desde el cual el futuro desarrollo de la teoría podría resultar más obvio.

Además, los fibrados parecen encajar de forma muy natural, aunque esto se hace más notable para los fibrados con grupo de estructura no abeliano y los no triviales.

Destaca la coincidencia entre como transforman los potenciales físicos y como lo hacen las 1-formas de conexión, pese a no ser esta expresión nada trivial. Recapitulando y para concluir, podemos pintar el siguiente paisaje matemático, que responde al título de este trabajo:

Matemáticas	Física
Espacio Total P .	Espacio de los factores de fase.
Espacio Base M .	Espacio-tiempo.
Grupo de estructura G .	Grupo de gauge.
Sección local del fibrado principal σ .	Gauge local.
U-representante local de la conexión: $\omega_U = \sigma_U^* \omega$	Potencial de gauge A en el gauge σ .
U-representante local de la curvatura: $\Omega_U = \sigma_U^* \Omega$	Field Strength F en el gauge σ .
Sección de fibrado asociado $\tau \in C(P, V)$ de tipo ρ , con $\rho : G \rightarrow GL(V)$.	Función de onda de una partícula de tipo ρ (representación relacionada con la carga).
Pull-back de τ por σ , $\psi = \sigma^* \tau$	Función de onda en el gauge σ .
Conexión inducida un fibrado asociado.	Acoplamiento mínimo.
$h : U \rightarrow G$, con $U \in M$, define un cambio de sección de σ a σ' : $\sigma'(x) = \sigma(x)h(x)$	Transformaciones de gauge: $\psi' = \rho_{h(x)}^{-1} \circ \psi$, $B'_\mu = iU\partial_\mu U^\dagger + UB_\mu U^\dagger$ y $F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu} U^\dagger$
Identidad de Bianchi Ω^ω (teorema 3.9).	Parte de las ecuaciones de campo.

Tabla 3: Interpretación de las teorías gauge en términos de fibrados diferenciables [10, p.103].

Finalmente, se ha visto como, ciertas herramientas que los físicos usan de manera cotidiana son en realidad conceptos de geometría diferencial. Destacan los operadores geométricos clásicos, el teorema de Stokes, los pseudovectores, o el tensor de Levi-Civita. Por tanto, en cierta manera, este trabajo busca también realzar la importancia de la geometría diferencial, y en especial, su uso en física. A pesar de que en la mayoría de grados en física, en incluso en matemáticas, no se enseña nada sobre este campo.

Referencias

- [1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwarz and Y. S. Tyupkin, *Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mill Equations*, Landau Institute for Theoretical Physics, Academy of Sciences, Moscow, USSR, 1975.
- [2] D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison Wesley, 1981.
- [3] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, *Gravitation, gauge theories and differential geometry*, North-Holland Publishing Company, 1980.
- [4] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, 1992.
- [5] C. J. Isham, *Model Differential Geometry for Physicists*, World Scientific, 1999.
- [6] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol.I, John Wiley & Sons, New York, 1963.
- [7] I. Sánchez Rodríguez, *Conexiones en el Fibrado de Referencias de Segundo Orden. Conexiones Conformes*, PhD Thesis, Universidad Complutense de Madrid, 1994.
<https://www.ugr.es/~ignacios/tesis.pdf>
- [8] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, 5 vols., Publish or Perish, 1971.
- [9] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge, 2007.
- [10] A. Trautman, *Differentiable Geometry for Physicists*. Bibliopolis, 1984.
- [11] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott-Foresman, Glenview, Illinois, 1971.
- [12] W. Isaacson, *Einstein: his life and universe*, Simon & Schuster, 2007.
(También en: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol5-trans/346>)
- [13] American Journal of Physics, *Magnetic Aharonov-Bohm effects and the quantum phase shift: A heuristic interpretation*,
<https://aapt.scitation.org/doi/full/10.1119/1.5115499>
- [14] Wikipedia, *Connection (principal bundle)*,
[https://en.wikipedia.org/wiki/Connection_\(principal_bundle\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Connection_(principal_bundle))