REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

High School Probabilistic Reasoning when Interpreting COVID-19 Data

Rocío Álvarez-Arroyo[1], José Fernando Lavela Jiménez[2] and Carmen Batanero Bernabeu[1]

1) Universidad de Granada, Spain
2) IES Marqués de Comares, Spain

Date of publication: June 24th, 2022
Edition period: June-October 2022

To cite this article: Álvarez-Arroyo, R., Lavela Jiménez, J.F., and Batanero, C. (2022). High School probabilistic reasoning when interpreting COVID-19 data. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *11(2)*, 117-139. doi: 10.17583/redimat.9741

To link this article: http://dx.doi.org/10.17583/redimat.9741

REDIMAT, Vol. 11 No. 2 June 2022 pp. 117-139

High School Probabilistic Reasoning when Interpreting COVID-19 Data

Rocío Álvarez-Arroyo
Universidad de Granada

José F. Lavela Jiménez
IES Marqués de Comares

Carmen Batanero
Universidad de Granada

(*Received: 16 January 2022; Accepted: 10 June 2022; Published: 24 June 2022)*

Abstract

The probabilistic reasoning of 76 high school students is analysed when interpreting a report on COVID-19 taken from the media. Based on the report, five questions are posed that involve computing or estimating simple, complementary and compound probabilities and making a decision based on the information presented. The results show that the students correctly calculate the simple probability and that of the complementary event, and many use their contextual knowledge to answer the questions. However, they have great difficulty in the composite probability calculation, and when making a decision, they do not take into account the previous results in order to propose measures to fight against infection, the general tendency being to follow the indications that are already suggested the health authorities. We conclude that it is important to educate the students' probabilistic reasoning in order to face extracurricular situations.

Keywords: probability, high school students, interpreting data, COVID, probabilistic reasoning.

2022 Hipatia Press
ISSN: 2014-3567
DOI: 10.17583/redimat.9741

REDIMAT, Vol. 11 No. 2 June 2022 pp. 117-139

Razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato al interpretar datos de la COVID-19

Rocío Álvarez-Arroyo
Universidad de Granada

José F. Lavela Jiménez
IES Marqués de Comares

Carmen Batanero
Universidad de Granada

(*Recibido: 16 Enero 2022; Aceptado: 10 Junio 2022; Publicado: 24 Junio 2022)*

Resumen

Se analiza el razonamiento probabilístico de 76 estudiantes de Bachillerato al interpretar una noticia sobre la COVID-19 tomada de los medios de comunicación. A partir de la noticia se plantean cinco preguntas que implican el cálculo o estimación de probabilidades simples, complementarias y compuestas y la toma de una decisión en función de la información presentada. Los resultados reflejan que los estudiantes calculan correctamente la probabilidad simple y la del suceso complementario, y muchos usan su conocimiento del contexto para dar respuesta a las preguntas, pero tienen grandes dificultades en el cálculo de la probabilidad compuesta. En la toma de decisión no se tienen en cuenta los cálculos anteriores para proponer medidas de lucha contra los contagios, siendo la tendencia general el seguir las indicaciones que ya se conocen por parte de las autoridades sanitarias. Concluimos la importancia de educar el razonamiento probabilístico de los estudiantes para enfrentarse a situaciones extraescolares.

Palabras clave: probabilidad, estudiantes de Bachillerato, interpretación de datos, COVID, razonamiento probabilístico.

2022 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.9741

Hoy día se incluye la enseñanza de la probabilidad a lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato para fundamentar el estudio posterior de la inferencia y complementar otras ramas de la matemática. Otro objetivo importante es proporcionar a los estudiantes una cultura probabilística suficiente (Gal, 2005) para enfrentarse a las situaciones aleatorias que le rodean en su vida personal y profesional, desarrollando así su razonamiento probabilístico, el cual es necesario en el estudio de diversas disciplinas (Franklin et al., 2007; Sharma, 2015). Como indica Devlin (2014), el poder de la probabilidad se debe a la naturaleza de los sucesos que nos rodean, que pueden ser analizados y en los que se precisa tomar decisiones que pueden afectar a la persona (Gigerenzer, 2002; Kochenderfer, 2015).

Para proporcionar a todos los estudiantes esta cultura probabilística, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato proponen contenidos de probabilidad que llegan hasta el teorema de Bayes y las distribuciones de probabilidad y, de manera particular en el Bachillerato de Ciencias Sociales (MECD, 2015), profundizan hasta el estudio de la inferencia. Sin embargo, la enseñanza en estos niveles educativos se basa casi en exclusiva en el aprendizaje de definiciones, propiedades y la resolución de problemas tomados de libros de texto (Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz, 2021), siendo poco habitual enfrentar a los estudiantes con problemas extraescolares reales en los que deban aplicar sus conocimientos y razonamiento sobre la probabilidad y tomar decisiones en base a ello (Sanabria y Núñez, 2017).

El objetivo de este trabajo ha sido evaluar el razonamiento probabilístico de un grupo de estudiantes de Bachillerato al interpretar una noticia sobre la COVID-19 tomada de los medios de comunicación y analizar si utilizan sus conocimientos probabilísticos en tareas extraescolares. El surgimiento de la pandemia ha hecho crecer la información estadística relacionada con la misma, que es utilizada por las autoridades sanitarias y el gobierno para tomar decisiones que afectan al ciudadano (Batanero et al., 2021; Muñiz et al., 2020). La comprensión y aceptación de estas decisiones depende en gran parte del razonamiento probabilístico que se trata de evaluar en este trabajo, siguiendo también la sugerencia de crear recursos educativos a partir de la COVID-19 (Alsina et al., 2020). En lo que sigue, se describen sus fundamentos y metodología, se analizan los resultados obtenidos y se añaden algunas recomendaciones para la enseñanza de la probabilidad.

Marco Teórico

Nos basamos en publicaciones que describen la cultura y el razonamiento probabilístico, cuyos componentes se describen a continuación.

Cultura Probabilística

Según Gal (2005), una persona con cultura probabilística es capaz de comprender los enunciados de probabilidad y tomar una decisión fundamentada en el contexto de situaciones cotidianas, tales como la interpretación de noticias tomadas de los medios de comunicación o de un diagnóstico médico. Su modelo de cultura probabilística (Gal, 2005) incluye, en primer lugar, las siguientes competencias:

- *Comprender las ideas fundamentales de probabilidad*, entre las que el autor destaca las de variabilidad, aleatoriedad, independencia, y predictibilidad/incertidumbre, es decir, que la probabilidad puede predecir el comportamiento de distribuciones completas, pero no de casos particulares.
- *Capacidad de calcular o estimar probabilidades* de los sucesos, en situaciones aleatorias cotidianas, incluyendo las probabilidades simples, compuestas o condicionales.
- *Utilizar adecuadamente el lenguaje del azar*, tanto los términos matemáticos (por ejemplo: espacio muestral, dispersión o muestreo), como los empleados para referirse a los sucesos aleatorios en la vida diaria o los medios de comunicación.
- *Reconocer el papel de la probabilidad en diferentes contextos* y en el discurso personal y público.
- *Conocer las preguntas críticas* que pueden plantearse sobre la información relacionada con el azar, el tipo de conclusiones que se pueden obtener con la información disponible, la relación de la fiabilidad de una predicción con el tamaño de una muestra y el posible sesgo en los datos.

El modelo de Gal (2005) también tiene en cuenta algunas disposiciones, pues el conocimiento por sí solo no llevará a utilizar la probabilidad correctamente en la vida cotidiana. Algunas de ellas son la actitud crítica ante la información probabilística, el control de las creencias sesgadas sobre la probabilidad y la valoración de la probabilidad como instrumento para trabajar en situaciones aleatorias en las que se ve implicada la persona.

Razonamiento Probabilístico

Otros autores añaden a la cultura probabilística la necesidad de desarrollar un razonamiento probabilístico suficiente para solucionar problemas de probabilidad y utilizar argumentos para probar la verdad de una afirmación probabilística o la validez de la solución al problema (Sánchez y Valdez, 2017). Schum (2001) analiza la especificidad del razonamiento probabilístico, que requiere juicios para establecer la credibilidad de la evidencia, en función de su relevancia para el problema analizado, su credibilidad (si la información es suficiente y válida) y su fuerza inferencial (si dicha información se puede generalizar a otra población o contexto).

Borovcnik (2016) definió el razonamiento probabilístico como el tipo de razonamiento que se aplica al resolver problemas de probabilidad, identificando los datos requeridos, indicando que requiere las siguientes componentes:

1. Capacidad para equilibrar los elementos psicológicos (creencias o concepciones personales sobre la aleatoriedad) y formales (elementos matemáticos que intervienen en la situación) cuando se utiliza la probabilidad.
2. Comprender que no existen criterios directos o algoritmos para lograr un resultado seguro en situaciones aleatorias.
3. Capacidad de discriminar aleatoriedad y causalidad, pues tendemos a buscar una relación de causa y efecto cuando encontramos dos variables asociadas.
4. Comprensión de la diferencia entre solucionar un problema y tomar una decisión, en la cual, no sólo pesa la información matemática, sino criterios como la utilidad.

Otras componentes del razonamiento probabilístico descritas en Batanero y Borovcnik (2016) son las siguientes: a) tomar conciencia de la influencia de las probabilidades previas para realizar un juicio de probabilidad; por ejemplo la probabilidad de desarrollar un tipo de cáncer depende de la edad o el género; b) comprender la asimetría de las probabilidades condicionales, pues en ellas no pueden intercambiarse el suceso condicionado y el condicionante; c) reconocer el carácter teórico de la independencia, que se exige para aplicar muchos métodos estadísticos, pero no siempre es fácil de determinar; d) interpretar correctamente las probabilidades muy pequeñas o muy grandes, que no son equivalentes a la imposibilidad y la seguridad; y e) interpretar correctamente la correlación y asociación.

Antecedentes

Aunque encontramos escasos antecedentes que evalúen el razonamiento probabilístico de los estudiantes en contextos extraescolares o la interpretación de enunciados de probabilidad en noticias tomadas de la prensa, algunos trabajos evalúan el razonamiento probabilístico de adolescentes. No tendremos en cuenta las investigaciones sobre desarrollo del razonamiento probabilístico de los niños, una síntesis de las cuáles puede consultarse en Hernández-Solís et al. (2021).

Sánchez y Valdez (2017) analizan este razonamiento en 30 estudiantes de Bachillerato en tareas de comparación de probabilidades usando urnas y muestreo, indicando que apoyan su razonamiento en ideas de variabilidad, independencia y aleatoriedad, citadas por Gal (2005). Sánchez y Carrasco (2018), por su parte, analizan el razonamiento probabilístico de 34 estudiantes de Bachillerato en la construcción de la distribución binomial y su uso en la predicción de la probabilidad de un suceso, indicando que el éxito en el primer punto no asegura la competencia en el segundo.

Puesto que en la tarea planteada a los estudiantes en este trabajo se presentan probabilidades compuestas, cuyo cálculo depende de la dependencia o independencia de los sucesos, nos basamos también en investigaciones relacionadas con la independencia y la probabilidad condicionada. Estos problemas han sido investigados por distintos autores, que los han clasificado identificando en ellos algunas variables que afectan a su resolución (ej., Huerta y Bresó, 2017). Otros trabajos describen sesgos de razonamiento como no comprender la asimetría de las probabilidades condicionadas (Borovcnik, 2016) o confundir condicionamiento y causación (Díaz y de la Fuente, 2007).

Tendremos también en cuenta los trabajos que analizan la interpretación de probabilidades pequeñas. Por ejemplo, Burns et al. (2010) sugieren que tienden a ser sobreestimadas o considerarse nulas. Es también difícil estimar la probabilidad de que aparezca un suceso de probabilidad pequeña cuando se repite muchas veces un experimento (Santos y Díaz, 2015).

En un trabajo previo (Lavela et al., 2021), analizamos el razonamiento probabilístico de estudiantes de Bachillerato al interpretar una noticia sobre accidentes de tráfico. Los resultados indicaron que la mayor parte de los estudiantes de la muestra fueron capaces de calcular la probabilidad del complementario de un suceso, pero más de la mitad confundieron una probabilidad condicional con su transpuesta y sólo la cuarta parte identificaron la información faltante para responder una pregunta sobre probabilidad condicional. En este trabajo completamos el anterior añadiendo, además del cálculo de probabilidades simples y complementarias, el cálculo de la probabilidad compuesta, una pregunta sobre el efecto del tamaño del número de experimentos en la probabilidad compuesta, otra sobre interpretación de probabilidades pequeñas y una situación de toma de decisión. La competencia en responder este tipo de preguntas forma parte de las componentes del razonamiento probabilístico descrito por Borovcnik (2016) y Batanero y Borovcnik (2016).

Método

La muestra estuvo formada por 76 estudiantes de segundo curso de Bachillerato (39 de la especialidad de Ciencias y 37 de la de Ciencias Sociales) del mismo instituto en la localidad de Lucena, provincia de Córdoba. La evaluación se llevó a cabo como actividad inicial al estudio de la probabilidad condicionada, que los estudiantes ya habían estudiado en cursos anteriores, según información del centro.

En la Figura 1 se presenta el cuestionario propuesto, que parte de una noticia sobre la pandemia publicada en los medios de comunicación poco antes de la recogida de datos y se diseñó para hacer partícipe al alumnado de las decisiones que las autoridades sanitarias toman sobre restricciones en las fiestas de Navidad, así como fomentar su propia responsabilidad tanto en casa como en reuniones familiares.

Consideremos el suceso “+” ser positivo en COVID. La información proporcionada en la noticia indica que en la localidad de Lucena la incidencia acumulada era de 723 casos diagnosticados por cada 100.000 habitantes en los 14 días anteriores a la fecha de la publicación. Para responder las preguntas planteadas, el estudiante primeramente debe leer y comprender el enunciado identificando los datos aportados y dependiendo de la pregunta, calcular la probabilidad o porcentaje pedido, dar un argumento o tomar una decisión que muestre su razonamiento probabilístico.

En la siguiente tabla aparecen el número de casos diagnosticados de coronavirus de los últimos 14 días por cada 100.000 habitantes. En el momento de la publicación (El Diario, 24 de noviembre), los españoles se estaban preguntando si podrán celebrar la Navidad y reunirse con sus seres queridos.

elDiario.es — Hazte socio/a — Inicia sesión

Las 100 grandes ciudades con más casos por habitante

Ranking de los municipios con más casos diagnosticados en los últimos 14 días por cada 100.000 habitantes y la variación de los casos respecto a los 14 días anteriores. Solo se incluyen las ciudades con más de 40.000 residentes

**Datos actualizados según las últimas cifras disponibles a 24 de noviembre. La fecha de publicación de los datos varía dependiendo de la comunidad*

	Municipio	IA (14 días)	Tendencia	
1	Burgos (Burgos)	1.750	-1%	=
2	Cuenca (Cuenca)	1.247	-21%	▼
3	Zamora (Zamora)	1.127	+2%	=
4	León (León)	994	+8%	=
5	Valladolid (Valladolid)	966	-15%	▼
6	Talavera de la Reina (Toledo)	845	-45%	▼▼
7	Gijón (Asturias)	837	-5%	=
8	Granada (Granada)	835	-35%	▼▼
9	Palencia (Palencia)	825	-17%	▼
10	Donostia/San Sebastián (Gipuzkoa)	780	-18%	▼
11	Siero (Asturias)	749	+169%	▲▲
12	Jaén (Jaén)	747	-26%	▼
13	Irun (Gipuzkoa)	729	-6%	=
14	Lucena (Córdoba)	723	+35%	▲▲
15	Basauri (Bizkaia)	685	-24%	▼

Contesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de Lucena esté infectada?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de Lucena no esté infectada? ¿Te parece grande o pequeña?
3. Si en Lucena coinciden dos personas en una reunión, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna esté infectada?
4. Si en vez de dos personas coinciden tres, la probabilidad de que ninguna esté infectada ¿será mayor o menor que en el caso anterior? ¿Crece o disminuye la probabilidad de que nadie esté infectado si aumentamos el número de personas? Explica por qué.

Analiza la situación:

5. En vista de los datos, si tuvieras que decidir el número máximo de personas en las cenas de Nochebuena o Navidad, ¿qué número recomendarías y por qué?

Figura 1. Tarea propuesta a los estudiantes

En la Pregunta 1 se pide calcular una probabilidad simple que puede obtenerse mediante la regla de Laplace, utilizando los datos de incidencia:

P(+) = 723/100000 = 0,0073. En la Pregunta 2 se pide el complementario de la probabilidad anterior y, por tanto, la respuesta esperada de 1 – P (+) = 1 – 0,00723 = 0,99277, que es una probabilidad grande.

Para responder a la Pregunta 3, si las dos personas son independientes, se calcula la probabilidad compuesta de la siguiente forma: P(ningún +) = $0{,}99277^2$ = 0,985592273, que sigue siendo grande. Por tanto, la probabilidad de que alguna de las dos personas reunidas estuviera infectada (es la complementaria de la anterior: 0,014407727), aún muy pequeña, pero ya es mayor que la obtenida en la Pregunta 2.

En la Pregunta 4 se pretende que el estudiante razone que la probabilidad de no tener casos positivos en las reuniones disminuye al aumentar el número de reunidos. Para tres personas, la probabilidad pedida será P(ningún +) = $0{,}99277^3$ = 0,9784644, lo que implica que en aproximadamente el 2% de los grupos de tres personas se esperaría al menos un infectado. Se prevé que el estudiante indique que, al ir multiplicando números menores que 1 para calcular la probabilidad de que 2, 3, 4 personas estén sanas, el producto sea cada vez más pequeño y, por tanto, el complementario (probabilidad de al menos un positivo) más grande.

Tabla 1

Contenidos evaluados en cada pregunta de la tarea propuesta

Contenido	P1	P2	P3	P4	P5
Probabilidad simple (Laplace)	x				
Probabilidad del suceso complementario		x	x	x	
Probabilidad compuesta			x	x	x
Interpretar una probabilidad pequeña o grande		x		x	x
Efecto del número de casos sobre la probabilidad compuesta				x	
Toma de decisión					x

La Pregunta 5 evalúa la toma de decisiones. El estudiante debe concluir que la probabilidad de que haya al menos un contagiado crece con el número de personas reunidas. De hecho, con 10 personas la probabilidad es 0,07, es decir, el 7% de las reuniones de 10 personas acabarían con nuevos contagios si no se siguiesen las medidas de seguridad, con la incidencia indicada hasta la fecha. Considerando la gran cantidad de grupos familiares que se reunirían para celebrar la Navidad y que cada integrante de estos grupos mantiene, a su vez, otras reuniones, lo prudente en aquel momento era reducir el número de personas en cada grupo. En resumen, el ejercicio pretendía que el alumnado analizase la situación de la pandemia en su entorno en la fecha dada y tomase una decisión apoyada en el cálculo de probabilidades. El análisis realizado se resume en la Tabla 1.

Recogidas las respuestas, se llevó a cabo un análisis de contenido de las mismas (Neuendorf, 2016) con los siguientes pasos:

1. Elección de la unidad de análisis, que fueron las respuestas individuales de los estudiantes a la totalidad de preguntas del cuestionario. Cada estudiante fue codificado como una fila en un fichero de datos, asignándole un número y especialidad de Bachillerato.
2. Crear un sistema de variables y categorías de análisis para codificar la información. Cada variable fue la respuesta de una pregunta. Dentro de ellas se categorizaron las respuestas en correctas o no, clasificando cada uno de estos tipos según el conocimiento utilizado o los errores detectados.
3. Esta codificación fue depurada de manera cíclica e inductiva mediante la lectura detallada de cada respuesta para dar coherencia y sentido a las categorías definidas. La fiabilidad de este proceso se asegura con la continua revisión y consulta entre los participantes de la investigación.

A continuación, se describen los resultados, detallando para cada pregunta planteada las categorías de respuestas, con ejemplos de respuestas literales, donde los estudiantes del Bachillerato de Ciencias se han codificado como Cx y los de Ciencias Sociales como Sx.

Resultados

Cálculo de una Probabilidad Simple (P1)

Las respuestas a la primera pregunta, que pide la probabilidad de que una persona de Lucena estuviese infectada la fecha de publicación de la noticia, se clasificaron de la siguiente forma:

1. *Respuesta correcta*, identificando los datos a partir del enunciado de la tarea y aplicando la regla de Laplace para calcular la probabilidad de que una persona esté infectada: P(+) = 0,00723.

2. *Respuesta correcta, expresada en porcentaje*, realizando los mismos pasos que en el caso anterior, obteniendo como resultado el valor 0,723%. En las dos respuestas se muestra la habilidad de cálculo de probabilidades sencillas, que es parte de la cultura probabilística (Gal, 2005).
3. *Error de identificación de los datos del problema*, fallando en un elemento de razonamiento probabilístico (Borovcnik, 2016). En lugar de dividir el número de afectados por el virus entre 100.000 habitantes, como indica la parte superior del gráfico, usa como denominador para aplicar la regla de Laplace el número aproximado de habitantes de Lucena (40.000).
   S22: 723/40.000 = 0,018 → 18% de probabilidad.
4. *Lectura incorrecta del gráfico*: en lugar de leer en el gráfico la incidencia acumulada en la ciudad de Lucena, lee la tendencia de los datos en dicha ciudad, representada en una segunda columna que indica el porcentaje de variación de la incidencia respecto a la anterior toma de datos (35% según el gráfico). Además de ser incorrecta, la respuesta muestra falta de lectura crítica y desconocimiento del contexto, ya que una probabilidad de infección del 35% no había ocurrido hasta aquella fecha en la pandemia. Todo ello indica falta de cultura probabilística (Gal, 2005).
   S1: El porcentaje es del 35%.
5. *Otros errores* de cálculo o de interpretación incorrecta del enunciado. Por ejemplo, S31 divide el número de infectados entre la suma de todas las incidencias de las 15 ciudades representadas en el gráfico que acompaña la noticia, interpretando la pregunta como la probabilidad de que una persona infectada sea de Lucena.
   S31: Total de infectados: 13.134. Probabilidad de que una persona de Lucena esté infectada 723/13134 = 0,05.

En la Tabla 2 se presentan los resultados de esta pregunta, donde una mayoría de los estudiantes (56,5%) da una respuesta correcta. Destaca también el número de estudiantes (casi una quinta parte) que leen incorrectamente los datos del gráfico e interpretan la tendencia como probabilidad de estar contagiado de COVID, mostrando desconocimiento del contexto.

Tabla 2
Resultados en la pregunta 1: cálculo de probabilidad simple

	Ciencias (n=39)		CC. Sociales (n=37)		Total (n=76)	
Respuesta	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Correcta, probabilidad	4	10,2	11	29,7	15	19,7
Correcta, porcentaje	16	41,0	12	32,4	28	36,8
Interpretación incorrecta de datos			1	2,7	1	1,3
Lectura incorrecta del gráfico	12	30,8	3	8,1	15	19,7
Otros errores	4	10,2	6	16,2	10	13,1
No contesta	3	7,7	4	10,8	7	9,2

Al comparar los resultados en las dos modalidades de Bachillerato, se observa que el 30% del alumnado de Ciencias lee el gráfico incorrectamente frente al 8% del alumnado de Ciencias Sociales. Dicha interpretación incorrecta de gráficos de la prensa se ha encontrado en otros trabajos, como los de Garzón y Jiménez-Castro (2021) y Salcedo et al. (2021).

Cálculo e Interpretación de la Probabilidad Complementaria (P2)

En la Pregunta 2 se pide la probabilidad de que una persona no estuviese infectada por la COVID en Lucena en la fecha dada. Es el complementario de la probabilidad calculada en la Pregunta 1, siendo la interpretación de su valor un componente del razonamiento probabilístico según Borovcnik (2016). La codificación para esta pregunta ha sido la siguiente:

1. *Respuesta correcta* donde se calcula e interpreta la probabilidad pedida: P(–) = 1 – P(+) = 1 – 0,00723 = 0,99277. Además, se indica que hay alta probabilidad de no estar contagiado.
2. *Respuesta correcta* realizando los mismos pasos y *expresando la solución en porcentaje* (99,2 %) e interpretando la probabilidad. En estos dos primeros casos se interpretan correctamente las probabilidades pequeñas y sus contrarias, mostrando un componente del razonamiento probabilístico, según Borovcnick (2016).

3. *Da la respuesta correcta en probabilidad o porcentaje sin interpretar* lo grande o pequeña que es dicha probabilidad, mostrando carencia de una de las componentes del razonamiento probabilístico (Borovcnik, 2016).
4. *Identifica incorrectamente los datos* del gráfico y da la probabilidad o porcentaje del suceso correspondiente a dividir entre una cantidad comprendida entre 40.000 y 45.000 habitantes. Por tanto, se observa carencia de un elemento de cultura probabilística (Gal, 2005).
5. *Lee incorrectamente el gráfico* y toma la tendencia como probabilidad de que una persona esté contagiada (35%), por lo que la respuesta es el contrario de esa cantidad (100-35 = 65%). La lectura incorrecta de gráficos de la prensa ha sido descrita en Garzón y Jiménez-Castro (2021) y Salcedo et al. (2021).
   S8: El porcentaje de que una persona no esté infectada es de 65%.
6. *Otros errores* no categorizados anteriormente: por ejemplo, S34 utiliza la regla de tres para calcular la probabilidad, obteniendo un valor mayor al 100% sin ser consciente de su error.
   S34: Si el 35% son 723, x son 100.000; la respuesta es 4840,94. Me parece una cantidad grande.

Tabla 3
Resultados en la pregunta 2: cálculo e interpretación de la probabilidad complementaria

	Ciencias (n=39)		Sociales (n=37)		Total (n=76)	
Respuesta	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Correcta, probabilidad	2	5,1	3	8,1	5	6,6
Correcta, porcentaje	13	33,3	13	35,1	26	34,2
Correcta, sin interpretación	4	10,2	6	16,2	10	13,1
Error interpretación datos			1	2,7	1	1,3
Lectura incorrecta gráfico	12	30,8	5	13,5	17	22,3
Otros errores	4	10,2	5	13,5	9	11,8
No contesta	4	10,2	4	10,8	8	10,5

En esta pregunta, 41 estudiantes dan una respuesta correcta (Tabla 3), cantidad similar a los 43 que respondieron adecuadamente a la pregunta anterior, mostrando cultura y razonamiento probabilístico adecuado (Borovcnik, 2016; Gal, 2005). También aumenta el número de estudiantes que hacen una lectura incorrecta del gráfico.

El número de estudiantes que consiguen interpretar el significado de una probabilidad grande no llega a la mitad (40,8%), lo que evidencia una alta proporción de estudiantes que carecen de este componente del razonamiento probabilístico señalado por Borovcnik (2016). Se mantiene la diferencia entre las dos modalidades de Bachillerato en la lectura de datos del gráfico, aunque se ve ligeramente aumentada en la de Ciencias Sociales, que sube al 13,5%.

Cálculo de una Probabilidad Compuesta (P3)

Para calcular la probabilidad de que, dada dos personas, ninguna de las dos esté enferma, se debe aplicar la independencia entre sucesos, cuya comprensión es parte de la cultura probabilística (Gal, 2005) y del razonamiento probabilístico, según Sánchez y Valdez (2017). La clasificación de las respuestas ha sido la siguiente:

1. *Respuesta correcta*. El estudiante calcula la probabilidad, aplicando la regla del producto y mostrando comprensión de la independencia de los sucesos. Calcula la probabilidad mediante la fórmula: P(ningún +) = $0{,}99277^2$ = 0,9856. Esto implica una habilidad de cálculo de probabilidades (Gal, 2005).
2. *Calcula la probabilidad del suceso compuesto, usando la regla de la suma* (probabilidad de la unión) en vez de la del producto. El estudiante confunde el suceso compuesto con su unión y aplica la fórmula de la unión, que también es incorrecta en este caso porque no se trata de sucesos excluyentes. En el ejemplo que sigue, además, la probabilidad calculada para cada suceso es la de estar contagiado, por lo que confunde una probabilidad con su complementaria.
   S2: La probabilidad es del 0,7%+0,7%=1,4%.
3. *Multiplica por dos la probabilidad de estar infectado* que ha calculado en la pregunta anterior. Por tanto, asume que la probabilidad del suceso compuesto es el doble que la del suceso simple, dotando a la probabilidad de la propiedad de linealidad, que no se aplica en este caso. Así, en el ejemplo que sigue, comienza calculando la

probabilidad de que dos personas estén contagiadas duplicando la probabilidad de que una lo esté. A continuación, calcula la probabilidad de que ninguna persona esté contagiada con la complementaria de que las dos personas lo estén, lo que es otro error, pues olvida restar la probabilidad de que una de las dos esté contagiada.

C45: Como en vez de una, hablamos de dos personas, la probabilidad de que una esté infectada se duplica. 0,724% x 2 = 1,448%. 100% - 1,448% = 98,552% de probabilidad de que ninguna esté infectada.

4. *Divide el número de personas (2) por 100.000*, considerando el valor 100.000 sobre el que se ha calculado la incidencia. Hay una aplicación incorrecta de la regla de Laplace, sin tener en cuenta los datos de incidencia, y calculando la probabilidad de tomar dos personas concretas al azar entre 100000.

   S21: 2/100.000 = 0,00002.
5. *Calcula la probabilidad como la diferencia de los resultados obtenidos en las dos preguntas anteriores.* Así, S3 resta su respuesta correcta a la Pregunta 1 (7,23%; probabilidad de que una persona esté contagiada) al 99,277% (probabilidad de una persona sana). Aplica incorrectamente la idea de complementario, pues, aunque los sucesos estar sano y estar contagiados son complementarios, se aplica a un solo caso, no al de dos sujetos independientes uno de otro. En consecuencia, se comprende incorrectamente, tanto la idea de complementario, como la de independencia.

   S3: 92,77 - 7,23 = 85,54 → Una probabilidad de 85,54 de que no estén infectados.
6. *Indica que la probabilidad de contagio es pequeña* o que la probabilidad de no contagio es grande, sin hacer referencia a los cálculos realizados en las preguntas anteriores. En el caso de S4 hay una estimación a la baja de la probabilidad de contagio, pues no se considera el número de reuniones totales que puede haber en una ciudad como Lucena en un periodo determinado. Este fenómeno de subestimación de una probabilidad pequeña cuando se tiene una experiencia próxima del fenómeno fue descrito por Burns et al. (2010).

   S4: La probabilidad de que se contagien es mínima ya que solo hay una probabilidad del 0,723% de que alguien esté contagiado por tanto lo más seguro es que no estén contagiados.
7. *Otros errores.* Son estudiantes que indican valores de la probabilidad

sin explicar por qué se obtienen esos resultados o calculan la probabilidad pedida en forma incorrecta y sin ningún criterio especificado.

S1: La posibilidad es el 7,8%.

Los resultados obtenidos en esta pregunta se muestran en la Tabla 4, en la que podemos ver que el alumnado tiene dificultad al aplicar correctamente la probabilidad en experimentos compuestos que sería parte de la cultura probabilística (Gal, 2005). Este hecho es causa de preocupación, especialmente para los estudiantes de Ciencias Sociales, por ser un tema sobre el cual se suele proponer un problema en las pruebas de acceso a la universidad (López-Martín et al., 2016). Únicamente un estudiante da la respuesta correcta a esta pregunta. El resto comete distintos tipos de errores, siendo el más numeroso el de creer que la probabilidad de que dos personas estén contagiadas es el doble de la probabilidad de que una sola lo esté (28,9%); a este error le sigue muy de cerca del número de estudiantes que no contesta (27,6%). No hay apenas diferencias en las respuestas de los dos grupos de estudiantes.

Tabla 4

Resultados en la pregunta 3: cálculo de la probabilidad compuesta

	Ciencias (n=39)		CC. Sociales (n=37)		Total (n=76)	
Respuesta	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Correcta, probabilidad			1	2,7	1	1,3
Regla de la suma	1	2,6	1	2,7	2	2,6
Multiplica por 2	10	25,6	12	32,4	22	28,9
Regla de Laplace incorrecta			2	5,4	2	2,6
Resta resultados anteriores	3	7,7	5	13,5	8	10,5
Argumenta sin operar	2	5,1	1	2.7	3	3,9
Otros errores	8	20,5	9	24,3	17	22,3
No contesta	15	38,5	6	16,2	21	27,6

Efecto del Tamaño de Muestra sobre la Probabilidad Compuesta (P4)

En esta pregunta se pide una reflexión por parte del alumnado, y se espera que los estudiantes se guíen y apoyen en los cálculos anteriores para argumentar sus respuestas en cuanto a la tendencia del contagio en función del número de personas reunidas. Las respuestas se han codificado con el siguiente criterio:

1. *Respuesta correcta.* El estudiante indica que, al aumentar el número de personas reunidas, la probabilidad de que no haya ningún contagio es cada vez menor, pues para calcular esa probabilidad hay que elevar una cantidad menor que 1 a un exponente natural, por lo que va a decrecer progresivamente. Es decir, P(ningún +) = $0{,}99277^n$, siendo n el número de personas reunidas. Esto denota una aplicación adecuada del cálculo de probabilidades (probabilidad compuesta en este caso), además de una interpretación correcta de probabilidades pequeñas (Borovcnik, 2011; 2016).
   S24: Según los habitantes de Lucena (5,4%) hay un 94,6% de no estar infectado. Por cada 100.000 habitantes hay un 97,9% de no estar infectado. Es menor respecto al caso anterior, por lo tanto, crece la probabilidad de estar infectado en relación directa al número de personas que se juntan. Si aumentan las personas, aumenta la probabilidad de infección.
2. *Correcta, sin justificar.* Indica que la probabilidad es menor, pero sin justificarlo con cálculos matemáticos. Muestra un conocimiento del contexto y una capacidad de lectura crítica y de interpretación de probabilidades pequeñas (Borovcnik, 2011; 2016).
   S20: Menor probabilidad de que ninguna esté infectada; disminuye la probabilidad de que nadie esté infectado mientras aumenta el número de personas ya que las escasas probabilidades de que alguien en particular lo tenga se suma con otras personas y si el grupo llega a ser amplio existiría una probabilidad alta de que alguien tuviera el virus.
3. *No es capaz de identificar correctamente la pregunta* e indica que la probabilidad de que no haya contagiados es mayor, en contra de la realidad. Estos estudiantes fallan en una componente de su razonamiento probabilístico (Borovcnik, 2016), así como tampoco son capaces de deducir la respuesta correcta por conocimiento del contexto.

S17: La probabilidad es mayor porque cuantas más personas, más probabilidad.

4. *Realiza los cálculos de probabilidad mediante una regla de tres* en lugar de elevar al cubo o calcular potencias sucesivas. Por ello, obtiene un resultado incorrecto al aplicar proporcionalidad a una situación que no lo es.

   S7: $\left.\begin{array}{l} 723 \rightarrow 100.000 \\ \;\;x \;\rightarrow \;\;\;\;3 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 0{,}021\%$

5. *Aplicación incorrecta de la regla de Laplace*. Divide el número de personas (3) por 100.000, considerando el valor 100.000 sobre el que se ha calculado la incidencia. Considera entonces que se está calculando una probabilidad simple cuando realmente es compuesta.

   S18: 3/100.000 = 0,00003. La probabilidad aumenta ya que se tiene que tener en cuenta más gente.

6. *Otros errores*. Por ejemplo, S3 resta a 92,77%, que es la probabilidad que da como respuesta en la Pregunta 2, dos veces 7,23% (respuesta a la Pregunta 1).

   S3: 92,77 – 2(7,23) → Una probabilidad del 78,31%. Disminuye ya que hay más personas y hay probabilidad de que puedan estar infectadas.

Tabla 5

Resultados en la pregunta 4: efecto del tamaño de la muestra

	Ciencias (n=39)		CC. Sociales (n=37)		Total (n=76)	
Respuesta	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Correcta, argumentada			1	2,7	1	1,3
Correcta, sin cálculos	24	61,5	14	37,8	38	50
No identifica la pregunta	2	5,1	3	8,1	5	6,6
Aplica la regla de tres	3	7,7	7	18,9	10	13,2
Regla de Laplace incorrecta			3	8,1	3	3,9
Otros errores			4	10,8	4	5,3
No contesta	10	25,6	5	13,5	15	19,7

En esta pregunta un único estudiante realiza los cálculos correctos para responderla con argumentos matemáticos. Adicionalmente, el 50% de los estudiantes da una respuesta correcta sin usar las operaciones y con su conocimiento del contexto, mostrando elementos de cultura y razonamiento probabilístico. Del resto, 17 alumnos intentan realizar operaciones para calcular la probabilidad de tres contagios, pero no son capaces de llegar al resultado correcto, mientras que los demás alumnos que contestan no son capaces de identificar correctamente la pregunta. En ambos casos se evidencia que no se alcanza esta componente de cultura probabilística (Gal, 2005).

En la comparativa por modalidades, se observa cómo el 61,5% del alumnado de Ciencias dan una respuesta correcta, frente al 40,5% del alumnado de Ciencias Sociales, aunque careciendo de argumentación matemática prácticamente en la totalidad de los casos. El único estudiante que da una respuesta argumentada matemáticamente es de Ciencias Sociales. A esta diferencia se le une que casi el doble del alumnado de Ciencias (25,6% frente a 13,5%) deja sin contestar la pregunta.

Toma de Decisión (P5)

Las respuestas a la pregunta 5, donde se pide tomar una decisión en base a la información disponible (también considerando la obtenida en sus respuestas anteriores), se han codificado con el siguiente criterio:

1. *Asume como válido el número de personas recomendado por las autoridades* sanitarias en el momento en que se pasó el cuestionario (un poco antes de Navidad), ya difundido reiteradamente a través de los medios de comunicación, añadiendo en ocasiones reflexiones personales.
   S4: El número máximo que yo pondría sería de 10 personas, ya que no son pocas personas y tampoco muchas, pero se podrían cumplir las medidas.
   C65: Yo creo que 10 porque la familia es muy importante y pienso que si todos los que se reúnen son de la misma familia no importaría.
2. *Asume como válido el número de personas recomendado por las autoridades* sanitarias *e indica que es poco probable la infección*. En este caso se está estimando a la baja la probabilidad pequeña, debido a la experiencia con la situación, como sugieren Burns et al. (2010).

S19: Yo lo pondría en 10 personas, porque no es mucha la probabilidad de infectarse y son menos personas de lo normal.

3. *Indica que recomendaría pocas personas*, dando algunas razones, pero *sin sugerir un número concreto*. No se llegan a utilizar los cálculos anteriores para la toma de decisiones.
   S21: Con los datos recogidos en la tabla, reduciría el número al mínimo posible, es decir, las personas que vivan solas sí podrían moverse, las demás no.
4. *Indica una cantidad en función de sus creencias personales* sin tener en cuenta los cálculos previos o las recomendaciones de las autoridades sanitarias. En los casos en que se recomienda un número pequeño, se observa una interpretación correcta de la probabilidad pequeña, componente del razonamiento probabilístico (Batanero y Borovcnik, 2016), pues no se estima a la baja.
   C52: Para tener 100% seguro que no va a haber contagio con nadie, pero un porcentaje más o menos seguro entre 10 - 15 personas, siendo también de varios núcleos familiares.
5. *Otras respuestas*, generalmente con errores de tipo probabilístico.
   S2: 10 personas. Habría una probabilidad del 7%.
   S24: Considero que un 8% de probabilidades de estar infectado será un buen número de personas el cual equivale a 11 personas por cada 100.000 habitantes.

El objetivo de la pregunta es que el alumnado use los resultados de las preguntas anteriores para tomar una decisión argumentada basada en ellos. Tras analizar las respuestas, se puede ver que el 27,6% de los estudiantes responden con las mismas medidas que han dado las autoridades, de los que el 17,1% no dan más explicaciones y el otro 10,5% indican que la probabilidad de que exista un contagiado en grupos de esas cantidades es pequeña. En ningún caso esto muestra una actitud crítica ante la información analizada.

El resultado más relevante de esta pregunta es ese 50% de estudiantes que dan una respuesta basada en sus creencias personales y no tienen en cuenta los cálculos anteriores. Sin embargo, muchos de ellos deciden un número menor que el propuesto por las autoridades sanitarias, mostrando una estimación correcta de la probabilidad pequeña, que es una componente del razonamiento probabilístico (Borovcnik, 2016). No se encuentran diferencias reseñables entre el alumnado de ambas modalidades.

Tabla 6
Resultados en la pregunta 5: toma de decisión

Respuesta	Ciencias (n=39) Frec.	%	CC. Sociales (n=37) Frec.	%	Total (n=76) Frec.	%
Principio de autoridad	6	15,4	7	18,9	13	17,1
Principio de autoridad, baja probabilidad.	4	7,7	5	13,5	8	10,5
No indica número concreto	2	5,1	2	5,4	4	5,3
Otros valores en función de creencias personales	19	48,7	19	51,3	38	50
Respuestas con errores probabilísticos			2	5,4	2	2,6
No contesta	9	23,1	2	5,4	11	14,5

Discusión y Conclusiones

Aunque no se puede generalizar a otros estudiantes al trabajar con una muestra no aleatoria, los resultados del estudio señalan que una parte de los estudiantes participantes presentan una cultura probabilística adecuada (Gal, 2005), mostrando su conocimiento del lenguaje probabilístico y competencia para identificar los datos del problema y calcular probabilidades en las dos primeras preguntas. También se puso en práctica su razonamiento probabilístico, interpretando correctamente enunciados probabilísticos y eligiendo el modelo probabilístico correcto que debe aplicarse en la situación concreta (Borovcnik, 2016). De hecho, y de acuerdo con Sánchez y Valdez (2017), este razonamiento probabilístico se evidencia al resolver un problema de probabilidad no rutinario y al utilizar argumentos para probar la verdad de una afirmación probabilística.

Es importante también el porcentaje de estudiantes que se guían por la autoridad de la fuente de la información, sin adoptar una postura crítica ante los datos (elemento de la cultura probabilística, según Gal, 2005) y fallando en establecer la credibilidad de la misma (Schum, 2001). Por otro lado, en algunas preguntas los estudiantes hacen un uso eficiente de su conocimiento del contexto, que utilizan para paliar la falta de datos o sus propias carencias de conocimiento sobre contenido probabilístico.

Los estudiantes estuvieron muy motivados por la actividad y su contexto. Pensamos que se abre una línea de investigación para el desarrollo de este tipo de tareas que podrían complementar adecuadamente la resolución de problemas tradicionales en la clase de Matemáticas por dos motivos: por un lado, hacen ver a los estudiantes una utilidad realista de la probabilidad en la vida diaria, al tiempo que se refuerza su razonamiento probabilístico en contexto (Alsina et al., 2020; Borovcnick, 2016); y por otro, los conciencia de algunos de sus sesgos de razonamiento. Adicionalmente, este tipo de actividades permite introducir a los estudiantes en la noción de riesgo que, de acuerdo con Borovcnik y Kapadia (2018), constituye un concepto paralelo al de probabilidad y debe ser tenido en cuenta en la enseñanza de la misma.

La comprensión de los estudiantes se puede mejorar utilizando recursos de comunicación de riesgos, como los descritos por Spiegelhalter y Gage (2015); por ejemplo, diagramas en árbol de frecuencias esperadas, de modo que se facilite la comprensión de la probabilidad compuesta, que fue el punto donde se mostraron mayores carencias.

Agradecimientos

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Alsina, Á., Vásquez Ortiz, C. A., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez Muñiz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Epsilon, 104*, 99-128.

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8.

Batanero, C., Garzón, J. A. y Valenzuela, S. (2021). Sentido gráfico y su importancia en la comprensión de la Información sobre la COVID. *Paradigma, 42*(2), 206-244. https://doi.org/10.23925/983-

3156.2021v23i4p054-077.

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 71-83). Springer.

Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(3), 1491-1516.

Borovcnik M. y Kapadia R. (2018) Reasoning with risk: Teaching Probability and risk as twin concepts. En Batanero C., Chernoff E. (Eds.), *Teaching and learning stochastics*. ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_1.

Burns, Z., Chiu, A. y Wu, G. (2010). Overweighting of small probabilities. En J. Cochran, L. A. Cox, P. Keskinocak, J. Kharoufeh y J. C. SmithWiley (Eds.), *Encyclopedia of operations research and management science*. Jonh Wiley: https://doi.org/10.1002/9780470400531.eorms0634.

Devlin, K. (2014). The most common misconception about probability? En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. ix–xiii). Springer.

Díaz, C. y De La Fuente, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and Bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*(3), 128-148. https://doi.org/10.29333/iejme/180.

Franklin, C., Kader. G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework*. American Statistical Association.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer.

Garzón, J. A. y Jiménez-Castro, M. (2021). Un estudio exploratorio de la competencia gráfica de futuros profesores de Portugal e Italia a través de la interpretación de diagramas estadísticos de barras y sectores extraídos de la prensa escrita. *Números, 106*, 33-42.

Gigerenzer, G. (2002). *Reckoning with risk*. Penguin Books.

Hernández-Solís, L.A., Álvarez-Arroyo, R., Batanero, C. y Gea, M.M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA 15*(4), 267-288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349.

Huerta, M. P. y Bresó, J. A. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11,* 87-106. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.188.

Kochenderfer, M. J. (2015). *Decision making under uncertainty: theory and application.* MIT press.

Lavela, J. F., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2021). Razonamiento probabilístico de estudiantes de Bachillerato en la interpretación de noticias. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 359 – 366). SEIEM.

López-Martín, M.M, Contreras, J. M., Carretero, M y Serrano, L. (2016). Análisis de los problemas de probabilidad propuestos en las pruebas de acceso a la Universidad en Andalucía. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *9*, 65-84.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Análisis de la práctica docente en el ámbito de la educación estadística en educación secundaria. *Paradigma, 42*(e1), 191-220. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p191-220.id1023.

Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J., & Alsina, Á. (2020). Deficits in the statistical and probabilistic literacy of citizens: Effects in a world in crisis. *Mathematics, 8*(11), 1872. https://doi.org/10.3390/math8111872.

Neuendorf, K. (2016). *The content analysis guidebook.* Sage.

Salcedo, A. González, J. y González, J. (2021). Lectura e interpretación de gráficos estadísticos, ¿cómo lo hace el ciudadano? *Paradigma, XLII*, 42(Extra1), 61-88.

Sanabria, G., & Núñez, F. (2017). La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *17*(2), 1-13.

Sánchez, E. y Carrasco, G. (2018). El razonamiento probabilístico de estudiantes de Bachillerato en actividades de distribución binomial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en*

Educación Matemática XXII (pp. 535-543). SEIEM.
Sánchez, E. y Valdez, J.C. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de Bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *11*, 127-143. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.180.
Santos, C. y Dias, C. (2015). A probabilistic approach to coincidences: the birthday paradox. *Pensamiento Matemático*, *5*(2), 55-60.
Schum, D. A. (2001). *The evidential foundations of probabilistic reasoning*. Illinois: Northwestern University Press.
Sharma, S. (2015). Teaching probability: a socio-constructivist perspective. *Teaching Statistics*, *37*(3), 78-84. https://doi.org/10.1111/test.12075.
Spiegelhalter, D., & Gage, J. (2015). What can education learn from real-world communication of risk and uncertainty? *The Mathematics Enthusiast*, *12*(1), 4-10.

Rocío Álvarez-Arroyo es Profesora Ayudante Doctora e investigadora en el grupo de investigación FQM-126, en la Universidad de Granada, España.
José Fernando Lavela Jiménez es Profesor de Matemáticas en el IES Marqués de Comares, España.
Carmen Batanero Bernabeu fue Catedrática de Didáctica de las Matemáticas, y actualmente es investigadora en el grupo de investigación FQM-126, en la Universidad de Granada, España.

Dirección de contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. **Dirección Postal:** Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación. Campus Universitario Cartuja, s/n, 18071, Granada (España). **Email:** rocioarroyo@ugr.es