



***SUPERFICIES MINIMALES  
DOBLEMENTE PERIÓDICAS  
CON GÉNERO UNO Y  
FINALES PARALELOS***

M<sup>a</sup> Magdalena Rodríguez Pérez

TESIS DOCTORAL

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

UNIVERSIDAD DE GRANADA



SUPERFICIES MINIMALES DOBLEMENTE PERIÓDICAS  
CON GÉNERO UNO Y FINALES PARALELOS



*Memoria realizada por M<sup>a</sup> Magdalena Rodríguez Pérez, en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de D. Joaquín Pérez Muñoz, profesor titular de dicho departamento, con objeto de aspirar al grado de doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.*

Fdo.: D. Joaquín Pérez Muñoz  
Director de la Memoria

Fdo.: M<sup>a</sup> Magdalena Rodríguez Pérez  
Aspirante a grado de doctor



*A mis padres y a mi hermana,  
sin la cual esta vida sería  
muchísimo más aburrida.*



Quisiera dedicarle también a Joaquín esta memoria de doctorado, por ser un director de tesis excelente. Le agradezco mucho, mucho, muchísimo su paciencia, sus consejos y su ayuda constante, y que me haya llevado de la mano por este mundo de las minimales, tan fascinante y complicado a la vez.

Quisiera darle las gracias a Antonio Ros, por haber creado esta escuela de minimales en Granada. Agradezco sus consejos, y su esfuerzo por ayudarnos a todos.

Bill, Laurent y Martin, muchas gracias, por lo mucho que he aprendido de vosotros, y porque gracias a vosotros guardo un muy grato recuerdo de mis estancias en el extranjero.

A Jose, Luis, Gabri y Javi, por esos cafés de amistad. Sin olvidar esas tostadas de tomate tan buenas de Alfredo.

Muchas gracias, Silvia, Regina, Mónica, Irene, Guada, Rosa y Jesús, por no haberme tachado de vuestras agendas.

A M<sup>a</sup> José, Juanjo, Oscar, Jose Luis y Pedro, por las cervezas de tertulia. Y a Antonio Ureña que, sin saberlo, me animó a seguir en esto que tanto me gusta.

También quiero darles las gracias, por los buenos momentos, a Isa y Ana (mi pack), y a César, Antonio Cañete, Antonio Alarcón, Jose Antonio, Jose María, Magdalena, Leonor y Paco. Sin todos ellos, los congresos serían muy aburridos.

A mis macetas de flores rojas, que me han acompañado en mis horas y horas de escritura.

Y muy especialmente a Periquín, y a un alma caritativa que hizo un sector conmigo.

Muchas gracias a todos.





# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Generalidades . . . . .	1
1.2. Representación de Weierstrass . . . . .	2
1.3. Superficies minimales con curvatura total finita . . . . .	7
1.4. Principios del máximo . . . . .	9
1.5. Límites de superficies minimales . . . . .	11
1.6. Grafos minimales . . . . .	12
1.7. Algunos resultados importantes . . . . .	14
1.8. Superficies minimales periódicas . . . . .	15
1.9. Superficies minimales doblemente periódicas . . . . .	18
1.10. Algunos resultados sobre el operador de Jacobi . . . . .	27
<b>2. Construcción de los ejemplos KMR</b>	<b>29</b>
2.1. Construcción de los ejemplos $M_{\theta,0,0}$ . . . . .	29
2.2. Construcción de los ejemplos $M_{\theta,\alpha,\beta}$ . . . . .	37
<b>3. El espacio <math>\mathcal{W}</math> de datos de Weierstrass</b>	<b>49</b>
3.1. Definición y propiedades de $\mathcal{W}$ . . . . .	50
3.2. Las aplicaciones ligadura y clasificadora . . . . .	53
<b>4. Límites y estimación de curvatura</b>	<b>59</b>
4.1. Límites de superficies marcadas en $\tilde{\mathcal{S}}$ . . . . .	60
4.2. Estimación de curvatura . . . . .	65
<b>5. Unicidad alrededor del límite Scherk simplemente periódico</b>	<b>75</b>
5.1. Datos de Weierstrass alrededor del límite Scherk simplemente periódico . . . . .	78
5.2. Extensión holomorfa y unicidad local . . . . .	81

<b>6. Unicidad alrededor de la catenoide</b>	<b>89</b>
6.1. Datos de Weierstrass para el límite catenoide . . . . .	91
6.2. Extensión holomorfa y unicidad local . . . . .	93
<b>7. Unicidad de los ejemplos KMR</b>	<b>101</b>
<b>8. Topología de <math>\mathcal{K}</math></b>	<b>105</b>
8.1. La aplicación clasificadora extendida . . . . .	110

# Introducción

El estudio de las superficies minimales en  $\mathbb{R}^3$  se remonta a los orígenes del Cálculo Variacional y de la Geometría Diferencial clásica, en tiempos de Euler y Lagrange, cuando las superficies minimales se veían como los puntos críticos del funcional área. En 1740, Euler [12] encontró la única superficie minimal de revolución, salvo el plano (Bonnet [3]): la catenoide, a la cual él llamó *alysseide*, que se genera por revolución de la catenaria (ver la Figura 1 izquierda). Ésta fue la primera superficie minimal conocida, distinta del plano. Lagrange [33] formuló la ecuación que ha de satisfacer una función  $u = u(x, y)$  para que su grafo sea minimal, e hizo esto desde su estudio del Cálculo de Variaciones. Explícitamente, la ecuación que se obtiene es la siguiente:

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0, \quad (1)$$

donde los subíndices  $x, y$  denotan las correspondientes derivadas parciales. Nos referiremos a la ecuación (1) como *ecuación de los grafos minimales*. Por tanto, una superficie es minimal si se puede expresar como grafo de una solución de (1) alrededor de cualquiera de sus puntos.

Fue Meusnier, en 1770, quien caracterizó geoméricamente las superficies minimales como aquellas cuya la curvatura media se anula constantemente, e históricamente, esta caracterización ha pasado a tomarse como definición de superficie minimal.

**Definición 0.0.1** *Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  se dice minimal si su curvatura media  $H$  es idénticamente cero.*

Además, Meusnier descubrió una nueva superficie minimal: el helicoides (ver la Figura 1 derecha). El helicoides, junto con el plano, son las únicas superficies minimales regladas (Catalan [5]) y son además las únicas superficies minimales propias, sin autointersecciones y simplemente conexas (Meeks y Rosenberg [45]).

La ecuación de los grafos minimales era demasiado complicada para las herramientas de las que se disponía a finales del s. XVIII. Matemáticos de la talla de Monge [46, 47], Legendre [36], Lacroix o Ampère integraron la ecuación (1), obteniendo

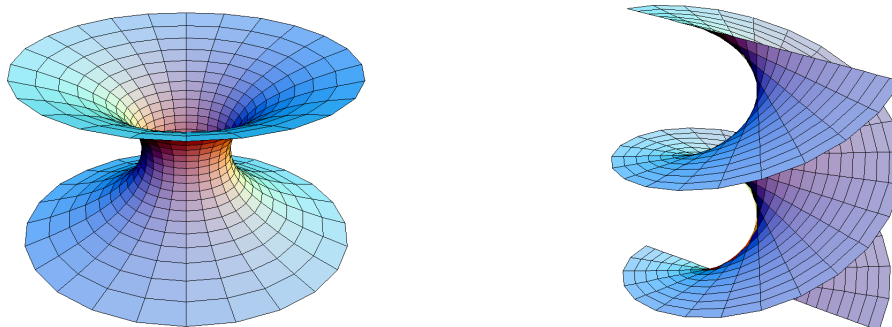


Figura 1: Catenoide (izquierda) y helicoide (derecha).

fórmulas para las funciones coordenadas de las superficies minimales en términos de funciones analíticas. Aunque hasta 1835 no se descubrieron nuevos ejemplos, debidos a Scherk [65]. Éste dio las ecuaciones explícitas de las superficies minimales simple y doblemente periódicas que llevan su nombre (ver la Figura 2). Por aquellas fechas, también se descubrió una importante relación entre la teoría de superficies minimales y la teoría de funciones armónicas (ver la Sección 1.1):

*Una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es minimal si, y sólo si, sus funciones coordenadas son armónicas, respecto de la estructura conforme asociada a la métrica inducida en  $M$  a partir de la métrica llana de  $\mathbb{R}^3$ .*

Plateau [57] dio una interpretación física de las superficies minimales: éstas se pueden obtener como la película creada por un alambre previamente sumergido en una disolución jabonosa. De ahí que el problema de determinar si existen superficies minimales (con cierta topología prefijada) bordeadas por una curva cerrada prescrita (o por un sistema de curvas de este tipo), se conozca en la literatura como *el problema de Plateau*. Este atractivo, pero complicado, problema atrajo la atención de muchos matemáticos importantes de la época. En 1865, Schwarz [67] obtuvo métodos para resolver el problema de Plateau con borde un cuadrilátero prefijado, lo cual llevó al descubrimiento de nuevas superficies minimales triplemente periódicas. También Riemann [59, 60] estudió el problema de Plateau para algunos sistemas de curvas frontera formados por rectas y/o circunferencias, y clasificó todas las superficies minimales foliadas por rectas y/o circunferencias. Éstas son: el plano, la catenoide, el helicoide, y los elementos de una nueva familia uniparamétrica de superficies minimales que obtuvo, y que en la actualidad se conocen como *ejemplos minimales de Riemann* (ver la Figura 3 izquierda). Los descubrimientos de estos nuevos ejemplos se basaron en las fórmulas de representación dadas por Weierstrass [72, 73] y Enneper [11], obtenidas a partir de funciones meromorfas

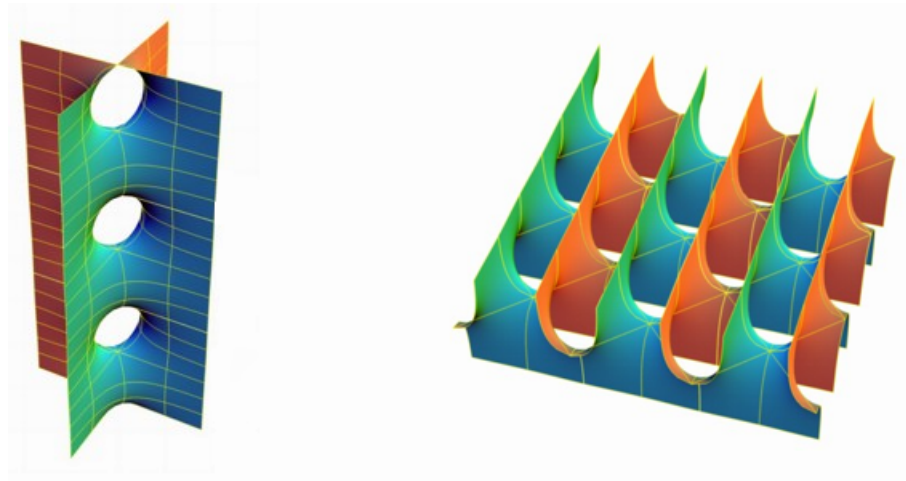


Figura 2: Superficies minimales de Scherk simple y doblemente periódicas.

definidas sobre una superficie de Riemann verificando ciertas condiciones de compatibilidad que daremos en la Sección 1.2 (esta representación permitió el uso de potentes técnicas del Análisis Complejo y de la emergente teoría de superficies de Riemann). Enneper [11] encontró, además, una nueva superficie minimal bordeada por una curva de Jordan (ver la Figura 3 derecha). El problema de Plateau (en su versión más sencilla, para discos) no fue resuelto hasta principios del siglo XX, entre los años 1929 y 1933, por Douglas [10] y Radó [58]. Gracias a estos trabajos sobre el problema de Plateau, Douglas ganó una de las dos primeras medallas Fields, en 1936 (la otra fue para el analista Ahlfors).

A principios del s. XX, Bernstein [1, 2] demostró que las únicas soluciones  $u$  de (1) definidas en todo  $\mathbb{R}^2$  son las afines; es decir, los únicos grafos minimales completos son los planos. Este resultado ha sido un vínculo de unión entre la teoría de superficies minimales con la teoría de ecuaciones en derivadas parciales (de tipo casilineal elíptico). Como la imagen por la aplicación de Gauss de un grafo está contenida en un hemisferio, podemos interpretar el teorema de Bernstein como una primera aproximación al problema de la imagen esférica, que consiste en encontrar el número máximo de puntos que puede omitir la aplicación de Gauss de una superficie minimal, completa y no llana de  $\mathbb{R}^3$ . Todas las superficies minimales completas y no llanas conocidas, tienen por imagen mediante la aplicación de Gauss a la esfera menos a lo más 4 puntos, en clara correspondencia con los teoremas de variable compleja de tipo Picard. Sobre el problema de la imagen esférica se obtuvieron resultados parciales (Osserman, Xavier, López, Ros), hasta que, en 1988, Fujimoto [14]

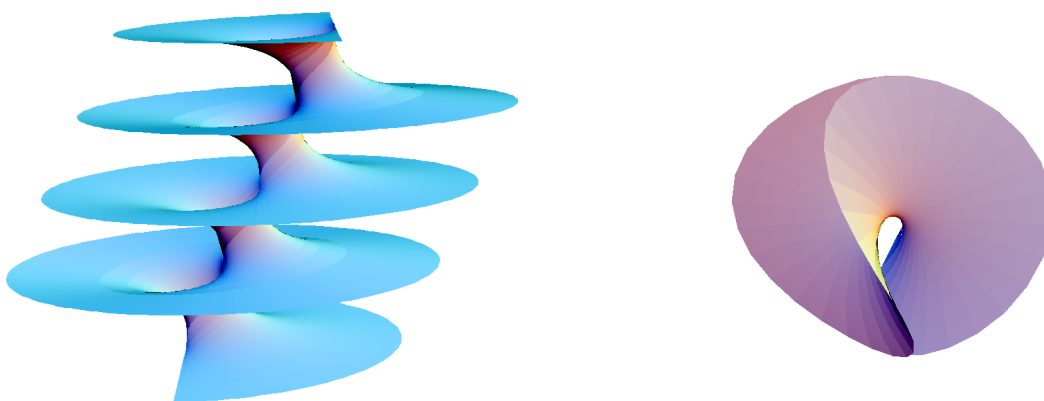


Figura 3: Una superficie minimal de Riemann (izquierda) y la superficie de Enneper (derecha).

cerró el problema obteniendo que

*la aplicación de Gauss de una superficie minimal completa y no llana en  $\mathbb{R}^3$  no puede omitir 5 puntos distintos de  $\mathbb{S}^2$ .*

En los años 60 del s. XX, Osserman dio un gran empuje a la teoría de superficies minimales completas, dando una versión más global de la representación para superficies minimales dada por Enneper y Weierstrass. Además, llamó la atención de la comunidad científica sobre la importante subfamilia formada por las superficies minimales completas con curvatura total finita, donde la curvatura total de una superficie se define como la integral sobre la superficie de su curvatura de Gauss (ver la Sección 1.3). Para ello, fue de gran importancia el siguiente resultado debido a Huber [26, 74].

*Una superficie minimal completa  $M \subset \mathbb{R}^3$ , con curvatura total finita y  $\partial M = \emptyset$ , tiene la estructura conforme de una superficie de Riemann compacta  $\mathbb{M}$  menos una cantidad finita de puntos, a los que llamaremos finales de  $M$ .*

(Dichos finales, como veremos en la Sección 1.3, se corresponden con los finales topológicos de  $M$ , como espacio topológico no compacto). Osserman [49] también observó que la aplicación de Gauss (proyectada estereográficamente) de una tal superficie minimal  $M$ , se extiende a una función meromorfa sobre la compactificación

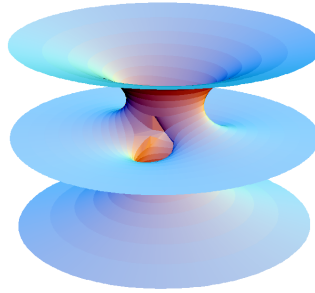


Figura 4: Superficie minimal de Costa.

conforme  $\mathbb{M}$  de  $M$ . Estos resultados nos dicen que a  $M$  se le puede asociar un *género* (el de su compactificación conforme  $\mathbb{M}$ ), un número de finales, y el grado de su aplicación de Gauss extendida. En algunos casos, algunas de estas tres cantidades determinan la superficie (ver por ejemplo los Teoremas 1.7.1 y 1.7.2). Schoen [66] probó que los finales minimales, completos, con curvatura total finita y sin autointersecciones de  $M$  han de ser asintóticos a medias catenoides o a planos. Las únicas superficies minimales completas, sin autointersecciones y con curvatura total finita que se conocían entonces eran el plano y la catenoide. Como en más de dos siglos no se habían encontrado más de estos ejemplos, se empezaron a perseguir teoremas de unicidad para el plano y la catenoide, en este sentido. De ahí la revolución que supuso el sorprendente descubrimiento por Costa [7], en 1984, de una nueva superficie minimal completa, sin autointersecciones, con género 1 y 3 finales (ver la Figura 4). En realidad, Costa produjo la superficie, pero fueron Hoffman y Meeks [22, 23] los que probaron que la superficie de Costa no tenía autointersecciones, y la generalizaron para género arbitrario. A partir de entonces, se ha encontrado una enorme cantidad de nuevas superficies minimales completas y sin autointersecciones [4, 21, 31]. Dada esta abundancia de ejemplos, en la actualidad uno de los principales objetivos es obtener resultados de clasificación o de no existencia para superficies minimales sin autointersecciones con ciertos tipos topológicos o comportamiento asintótico prefijado en los finales; y otro objetivo importante es describir la estructura de espacios de moduli de superficies minimales con topología y geometría prescritas [6, 18, 37, 41].

Un tipo destacado de superficies minimales  $M \subset \mathbb{R}^3$  sin autointersecciones y propias son las periódicas, que se definen como aquellas invariantes por un grupo (no trivial)  $\mathcal{P}$  de isometrías de  $\mathbb{R}^3$ , que actúa propia y discontinuamente. Una tal  $M$  se puede ver en la 3-variedad llana, completa y no simplemente conexa  $M/\mathcal{P}$ . Dicha variedad se puede recubrir (con un número finito de hojas) por  $\mathbb{R}^3/S(\theta)$  (en

cuyo caso diremos que  $M$  es *simplemente periódica*),  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  ( $M$  es *doblemente periódica*) o  $\mathbb{T}^3$  ( $M$  es *triplemente periódica*), donde  $S(\theta)$  denota un movimiento helicoidal de ángulo  $\theta \in [0, \pi]$  alrededor del eje  $x_3$ , y  $\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^3$  son toros llanos de dimensión 2, 3 respectivamente (nótese que  $T = S(0)$  es una traslación). Por tanto, el estudio de las superficies minimales periódicas se puede reducir al estudio de las superficies minimales propias y sin autointersecciones de  $\mathbb{R}^3/S(\theta), \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{T}^3$ . En los espacios ambiente  $\mathbb{R}^3/S(\theta)$  y  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ , al igual que ocurre en  $\mathbb{R}^3$ , no existen superficies minimales compactas y sin borde. El caso del espacio ambiente  $\mathbb{T}^3$  es completamente opuesto: todas las superficies minimales propias en  $\mathbb{T}^3$  son compactas, y por esa razón las técnicas en su estudio son distintas (Meeks [38, 39] y Pirola [56]).

Meeks y Rosenberg [42, 44] obtuvieron propiedades generales de las superficies minimales simple y doblemente periódicas que tienen topología finita en el cociente, estudiando su geometría, estructura conforme y comportamiento asintótico en el infinito (ver las Secciones 1.8 y 1.9). En concreto, probaron (Teorema 1.8.1) que si  $M$  es una superficie minimal propia y sin autointersecciones de  $\mathbb{R}^3/S(\theta)$  o  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ , equivalen que  $M$  tenga curvatura total finita y que  $M$  tenga topología finita (esta propiedad no se da en  $\mathbb{R}^3$ , como pone de manifiesto el helicoides); y si  $M$  tiene curvatura total finita, entonces su estructura conforme es la de una superficie de Riemann compacta  $\mathbb{M}$  menos una cantidad finita de puntos, que se corresponden con los finales de  $M$ . En particular, podemos definir el *género* de  $M$  como el género de su compactificación conforme  $\mathbb{M}$ . Además, cuando  $M$  es simplemente periódica, sus finales sólo pueden ser asintóticos a planos (en cuyo caso se dice que los finales son *planos*), a anillos llanos (finales *de tipo Scherk*) o a helicoides (finales *helicoidales*), ver el Teorema 1.8.2. Y si el espacio ambiente es  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ , entonces sólo es posible un número finito de finales de tipo Scherk para  $M$  (Teoremas 1.8.3 y 1.9.4). En el espacio ambiente  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , destacaremos las siguientes cuatro familias de ejemplos de superficies minimales propias:

★ La familia uniparamétrica de superficies doblemente periódicas de Scherk [65] (ver la Figura 2 derecha), con género 0 y 4 finales en el cociente por su retículo de periodos más fino\*. Estas superficies se pueden construir a partir de grafos de Jenkins y Serrin sobre cuadrados o rombos (ver la Sección 1.6 para la definición de dichos grafos), tomando valores frontera  $+\infty$  sobre dos lados opuestos, y  $-\infty$  sobre los dos lados restantes. La superficie que se obtiene, contiene 4 rectas en su borde, correspondientes a los vértices del cuadrilátero. Por el Principio de reflexión de Schwarz (Teorema 1.1.1), rotando la superficie un ángulo  $\pi$  alrededor de dichas rectas, se obtiene una superficie minimal doblemente periódica, llamada superficie

---

\*Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una superficie minimal doblemente periódica. Dados dos retículos  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  de periodos de  $\Sigma$ , diremos que  $\mathcal{P}_1$  es más fino que  $\mathcal{P}_2$  si  $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$ .



de Scherk. El parámetro de la familia es el ángulo que forman los lados consecutivos del paralelogramo; o equivalentemente, el ángulo que forman los finales superiores de la superficie obtenida (los correspondientes al valor frontera  $+\infty$ ) con sus finales inferiores (correspondientes a  $-\infty$ ).

★ Karcher [30, 31] definió en 1988 otra familia uniparamétrica de superficies minimales doblemente periódicas, a las que llamó *toroidal halfplane layers*. Para ello, consideró el grafo  $G$  conjugado de un cierto grafo de Jenkins y Serrin definido sobre un rectángulo (ver el Teorema 1.6.3). El borde  $\partial G$  del grafo (no acotado) que obtuvo, consistía en la unión de 3 curvas contenidas en los planos coordenados de  $\mathbb{R}^3$  y una recta  $r$ . Mediante simetrías respecto de los 3 planos coordenados y la rotación de ángulo  $\pi$  alrededor de  $r$ , obtuvo una superficie doblemente periódica, con género 1 y 4 finales paralelos en el cociente por su retículo de periodos más fino. Además, expuso dos deformaciones independientes, obteniendo nuevas superficies minimales doblemente periódicas.

★ En 1989, Meeks y Rosenberg [42] obtuvieron superficies minimales doblemente periódicas, por argumentos totalmente distintos a los anteriores. Previamente, Meeks [38, 39] había descrito analíticamente el espacio de moduli de las superficies minimales triplemente periódicas, no orientables en el cociente y con característica de Euler  $-2$ ; y había dado una construcción, usando un método de minimax, que prueba que todo toro llano  $\mathbb{T}^3$ , contiene un número infinito de superficies minimales propias, sin autointersecciones y no orientables. Meeks y Rosenberg tomaron límites de algunas de dichas superficies triplemente periódicas, hasta obtener superficies minimales doblemente periódicas, que admiten como cocientes a botellas de Klein con 2 finales paralelos. Como recubridores de dichas botellas de Klein, obtuvieron toros con 4 finales paralelos en  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ .

★ Hoffman, Karcher y Wei [20, 21] afirmaban la existencia de una familia uniparamétrica de superficies minimales doblemente periódicas con género 1 y 4 finales no horizontales en su retículo de periodos más fino, de las que se servían para tomar límites, y con ello construir un helicoides de género 1 en el cociente. Estas superficies se pueden considerar como la desingularización de dos familias de semiplanos (de forma análoga a las superficies de Scherk doblemente periódicas, pero con asas). El parámetro, al igual que en la familia de superficies de Scherk doblemente periódicas, es el ángulo entre los finales no paralelos. Realmente, sólo hay una demostración matemática de la existencia de esta superficie para ángulo  $\pi/2$ . La evidencia de la existencia del resto de las superficies de la familia es tan sólo gráfica.

Existen otros ejemplos de superficies minimales doblemente periódicas con género más alto, que no vamos a tratar aquí (consultar [69, 71]).

En este trabajo, nosotros construimos una familia triparamétrica  $\mathcal{K} = \{M_{\theta,\alpha,\beta}\}$  de superficies minimales doblemente periódicas, con género 1 y 4 finales paralelos en el cociente por su retículo de periodos más fino. Dicha familia incluirá los ejemplos dados por Karcher y por Meeks y Rosenberg descritos anteriormente; de ahí que llamemos a las superficies  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  *ejemplos KMR*. Obtenemos dichos ejemplos como recubridor ramificado de la esfera  $\mathbb{S}^2$  por su aplicación de Gauss. La *configuración esférica* de un ejemplo KMR, definida como la posición de los valores de ramificación de su aplicación de Gauss en  $\mathbb{S}^2$ , nos permitirá dar explícitamente los datos de Weierstrass de la superficie; y a partir de ellos, obtendremos información detallada de la superficie en cuestión. Esto será a lo que dedicaremos el Capítulo 2.

**Teorema 1 ([61])** *Existe una familia 3-paramétrica  $\mathcal{K} = \{M_{\theta,\alpha,\beta}\}$  de superficies minimales doblemente periódicas de  $\mathbb{R}^3$ , con género 1 y 4 finales paralelos en el cociente. Se puede dotar a esta familia con una estructura de variedad analítica real de dimensión 3, con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Además,*

1. *Los posibles límites (no triviales) de las superficies en  $\mathcal{K}$  son: la catenoide, el helicoido, cualquier superficie minimal de Riemann, y todas las superficies minimales simple y doblemente periódicas de Scherk.*
2. *El grupo de isometrías de cada  $M_{\theta,\alpha,\beta} \in \mathcal{K}$  es isomorfo a  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ , a  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  o a  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$  (hay ejemplos KMR con cada una de estas opciones), y siempre contiene una involución sin puntos fijos que invierte la orientación. En particular, todas las superficies de  $\mathcal{K}$  admiten un cociente a una botella de Klein, con 2 finales paralelos.*
3. *La familia  $\mathcal{K}$  es autoconjugada, en el sentido de que la superficie conjugada\* de un elemento de  $\mathcal{K}$  pertenece de nuevo a  $\mathcal{K}$ .*

Claramente, podemos considerar cocientes de cada superficie de Scherk doblemente periódica por ciertos retículos de periodos menos finos, obteniendo una superficie minimal con género 0 y  $2k$  finales en  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  (siendo  $\mathbb{T}$  un toro llano 2-dimensional), para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ . Y análogamente, podemos obtener ejemplos KMR con género 1 y  $4k$  finales en  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Veremos más adelante que estas son las únicas posibilidades en estos ambientes.

---

\*Dos superficies minimales  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$  se dicen *conjugadas* si las funciones coordenadas de  $M_1$  son las conjugadas armónicas de las funciones coordenadas de  $M_2$ .

Como antes comentábamos, los teoremas de no existencia y de clasificación de superficies minimales tienen una gran importancia en esta teoría. Para obtener tales resultados en ambientes simplemente periódicos (resp. doblemente periódicos), se suele fijar un género y un comportamiento asintótico en los finales para superficies minimales propias y sin autointersecciones en  $\mathbb{R}^3/S(\theta)$ , con  $\theta \in [0, \pi]$  (resp. en  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , con  $\mathbb{T}$  un toro llano de dimensión 2). Uno de los teoremas de clasificación más importantes en esta línea, es el dado en 1998 por Meeks, Pérez y Ros [41], que nos dice que las únicas superficies propias y sin autointersecciones en  $\mathbb{R}^3/T$ , donde  $T = S(0)$  es una traslación no trivial, con género 1 y un número finito de finales planos, son las superficies minimales de Riemann (Teorema 1.8.4). Previamente, Pérez y Ros [52] habían demostrado que, cuando  $\theta \neq 0$ , no existen superficies minimales propias y sin autointersecciones en  $\mathbb{R}^3/S(\theta)$ , con género 1 y un número finito de finales planos. Estos dos resultados nos permiten concluir que:

*Los ejemplos minimales de Riemann son las únicas superficies simplemente periódicas que tienen género 1 y un número finito de finales planos en el cociente.*

Además de en el enunciado, la importancia del teorema de unicidad de los ejemplos minimales de Riemann obtenido por Meeks, Pérez y Ros [41] radica en la técnica desarrollada en su demostración. Modificaciones de dicha técnica (la cual explicaremos a continuación) han permitido obtener nuevos teoremas de clasificación, como son el Teorema 1.8.6, el Teorema 1.8.7 o el siguiente teorema, que es el resultado central en esta memoria:

**Teorema 2 ([51])** *Supongamos que  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie doblemente periódica con finales paralelos. Si  $M$  tiene género 1 en el cociente, entonces  $M$  coincide con un ejemplo KMR.*

Con la notación que introduciremos para los ejemplos KMR,  $M_{\theta, \alpha, \beta}$ , los toroidal halfplane layers de Karcher coinciden con la familia uniparamétrica de ejemplos KMR  $\{M_{\theta, 0, 0}\}$ , y las deformaciones que este mismo autor dio de estos ejemplos son  $\{M_{\theta, \alpha, 0}\}$  y  $\{M_{\theta, 0, \beta}\}$ ; y la familia 2-paramétrica de ejemplos dados por Meeks y Rosenberg no es otra que  $\{M_{\theta, 0, \beta}\}$ . Éstas son dos de las subfamilias más simétricas de ejemplos KMR. Además, como el Teorema 1 nos dice que todos los ejemplos KMR admiten un cociente a una botella de Klein, el Teorema 2 se puede ver también como un teorema de clasificación de todas las botellas de Klein minimales, propias, sin autointersecciones y con finales paralelos en cocientes doblemente periódicos de  $\mathbb{R}^3$ .

A continuación, demos una idea de la demostración del Teorema 2. Por un resultado previo de Meeks y Rosenberg [42] (Teorema 1.9.2), si superficie minimal  $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  propia y sin autointersecciones tiene finales paralelos, entonces el número de finales de  $M$  ha de ser un múltiplo de 4. Para  $k \in \mathbb{N}$  fijo, denotamos por  $\mathcal{S}$  el espacio formado por todas las superficies minimales doblemente periódicas, con género 1 y  $4k$  finales en el cociente; y sea  $\mathcal{K}$  la familia de ejemplos KMR, con género 1 y  $4k$  finales en el cociente. Obtendremos que  $\mathcal{K}$  es una componente conexa de  $\mathcal{S}$  (ver la Observación 2.2.5). Nuestro objetivo es probar que  $\mathcal{S} = \mathcal{K}$ , lo cual haremos por reducción al absurdo. Supongamos que  $\mathcal{S} - \mathcal{K} = \emptyset$ . La idea principal consiste en asociarle a cada superficie en  $\mathcal{S}$  unos invariantes geométricos, y estudiar propiedades de la aplicación que asocia a cada  $M \in \mathcal{S}$  esos invariantes. Desgraciadamente, para poder definir rigurosamente estos invariantes geométricos, debemos no sólo considerar superficies en  $\mathcal{S}$ , sino superficies marcadas; es decir, parejas  $(M, [\gamma])$ , siendo  $M$  una superficie de  $\mathcal{S}$  y  $[\gamma]$  una clase de homología de  $M$  no nula en la compactificación de  $M$  y con vector periodo  $\vec{0}$ . Consideramos el espacio  $\tilde{\mathcal{S}}$  de superficies marcadas, y sea  $\tilde{\mathcal{K}}$  la familia de *ejemplos KMR marcados*,  $\tilde{\mathcal{K}} \subset \tilde{\mathcal{S}}$ . Definimos la aplicación  $C : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  (a la que llamaremos *aplicación clasificadora*) que, a grandes rasgos, le hace corresponder a cada  $(M, [\gamma]) \in \tilde{\mathcal{S}}$  la longitud del periodo en los finales de  $M$  y la parte horizontal del flujo de  $M$  a lo largo de  $\gamma$ , que dependerá de la clase de homología de  $\gamma$  en  $M$  (consultar la Sección 1.2 para la definición de periodo y flujo de  $M$  a lo largo de una curva). La demostración consta de tres puntos importantes:

- (1)  $C|_{\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}}$  es una aplicación propia (Teorema 7.0.7). Es decir, si  $\{M_n, [\gamma_n]\}_n$  es una sucesión de superficies marcadas en  $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}$  tales que los periodos de las  $M_n$  convergen a un vector no nulo de  $\mathbb{R}^3$ , y los flujos de las  $M_n$  a lo largo de las  $\gamma_n$  convergen, entonces existe una parcial de  $\{M_n, [\gamma_n]\}_n$  convergiendo en  $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}$ . Para ello, necesitaremos obtener estimaciones locales del área y de la curvatura de Gauss de las superficies  $M_n$ .
- (2)  $C|_{\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}}$  es una aplicación abierta (Teorema 7.0.8). Esto nos dice que cada superficie en  $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}$  se puede deformar localmente en  $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}$ , moviendo su periodo en los finales y su flujo a lo largo de la clase de homología destacada. De estos puntos (1) y (2), se puede deducir que moviendo el valor de  $C$ , podemos deformar cualquier superficie marcada en  $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}$  hasta llegar a cualquier punto del borde de su componente conexa en  $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}$ .
- (3) *Unicidad de ejemplos KMR alrededor de un cierto punto de  $\partial\tilde{\mathcal{S}}$* : Identificaremos qué posibles límites tienen las sucesiones divergentes  $\{M_n, [\gamma_n]\}_n$  en  $\tilde{\mathcal{S}}$ , viendo tales límites como puntos del borde de  $\tilde{\mathcal{S}}$ ; y estudiaremos dichos

límites en función del comportamiento de  $C$ . Uno de estos puntos de  $\partial\tilde{\mathcal{S}}$  es la catenoide, que corresponde al caso en el que  $C(M_n, [\gamma_n]) \rightarrow (0, \infty)$  (llamaremos a este caso el *límite catenoide*). En esta situación, probaremos que si  $\{(M_n, [\gamma_n])\}_n$  es una sucesión en  $\tilde{\mathcal{S}}$ , con  $C(M_n, [\gamma_n]) \rightarrow (0, \infty)$ , entonces  $M_n$  ha de pertenecer a  $\tilde{\mathcal{K}}$ , para  $n$  suficientemente grande (Capítulo 6).

A partir de los dos primeros puntos, se obtiene fácilmente que  $C|_{\tilde{\mathcal{S}}-\tilde{\mathcal{K}}}$  es una aplicación sobreyectiva, lo que contradice (3). Y esta contradicción prueba el teorema.

El punto (1) anterior es sin duda el de mayor dificultad en el esquema de la demostración del Teorema 2. Para probarlo, estudiaremos todos los posibles límites de superficies marcadas en  $\tilde{\mathcal{S}}$  con curvatura de Gauss acotada (Sección 4.2), daremos una estimación de curvatura bajo ciertas condiciones en términos de  $C$  (Sección 4.2), y también necesitaremos una nueva unicidad de ejemplos KMR, esta vez alrededor de las superficies de Scherk simplemente periódicas, vistas como elementos de  $\partial\tilde{\mathcal{S}}$  (dicha unicidad se probará en el Capítulo 5). Este último ingrediente se debe a que dada una sucesión  $\{(M_n, [\gamma_n])\}_n$  en  $\tilde{\mathcal{S}}$  convergiendo a una superficie de Scherk simplemente periódica, se tiene que  $\{C(M_n, [\gamma_n])\}_n$  converge en  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$ , luego la aplicación  $C : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  no es propia (ésta es una diferencia fundamental con respecto a la situación que se da en [41]).

Para conseguir el punto (2) del esquema, veremos  $\tilde{\mathcal{S}}$  como un subconjunto analítico dentro de una variedad compleja  $\mathcal{W}$  de dimensión  $4k$ , consistente esencialmente en todos los posibles datos de Weierstrass en este ambiente. Este espacio  $\mathcal{W}$  lo estudiaremos en el Capítulo 3, donde definiremos también una aplicación holomorfa  $L : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}^{4k}$  (nos referiremos a  $L$  como *aplicación ligadura*), siendo  $L|_{\tilde{\mathcal{S}}} \equiv C$ . Usando (1) y el Teorema de la aplicación abierta para varias variables (Teorema 3.1.4), llegaremos a que  $L$  es una aplicación abierta; de donde deduciremos (2) de la relación entre  $C$  y  $L$ .

En cuanto al punto (3), su consecución está basada en una modificación de las técnicas usadas para la unicidad de ejemplos KMR alrededor del límite Scherk simplemente periódico que habíamos usado en el punto (1) anterior, y que explicamos a continuación. En primer lugar, buscaremos una carta local de  $\mathcal{W}$  alrededor de  $S_\rho$ . Como las imágenes por  $L$  de las superficies marcadas en  $\tilde{\mathcal{S}}$  próximas al límite Scherk  $S_\rho$  están acotadas, podemos aplicar el Teorema de extensión de Riemann para varias variables (Teorema 3.1.1), obteniendo así una extensión holomorfa de la aplicación ligadura  $L$  a  $S_\rho$ . La unicidad la obtendremos como consecuencia del Teorema de la función inversa aplicado a  $L$ . Sin embargo, este planteamiento no es aplicable paso a paso para probar la unicidad de los ejemplos KMR alrededor del límite catenoide, ya

que su imagen por la aplicación ligadura no está acotada, propiedad imprescindible para aplicar el Teorema de extensión de Riemann. Por tanto, modificaremos la aplicación ligadura, definiendo una nueva aplicación holomorfa definida en un entorno del límite catenoide en  $\mathcal{W}$  a la que aplicaremos el razonamiento anterior en este caso (esto lo haremos en el Capítulo 6).

Una vez demostrado el teorema de unicidad (Teorema 2), el siguiente paso natural es preguntarse por la estructura topológica de la variedad analítica real  $\mathcal{K}$  formada por los ejemplos KMR. Claramente, podemos reducir dicho estudio al caso en el que  $k = 1$ , siendo  $4k$  el número de finales de cada superficie en  $\mathcal{K}$ . El Capítulo 8 estará dedicado a este problema. En concreto, demostraremos el siguiente teorema.

**Teorema 3 ([61])** *El espacio  $\tilde{\mathcal{K}}$  de ejemplos KMR marcados es difeomorfo a  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 - \{(\pm 1, 0)\})$ .*

La demostración de este resultado, que sigue una técnica parecida a la explicada anteriormente, puede verse como una continuación de la demostración del Teorema 2, ya que usamos todas las herramientas allí definidas. Como se dijo anteriormente, la aplicación ligadura  $L$  se extiende de forma holomorfa a los límites Scherk simplemente periódicos  $S_\rho \in \partial\mathcal{W}$ . Sea  $\mathcal{S}$  el espacio formado por todos estos límites Scherk, y dotaremos a  $\tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \cup \mathcal{S}$  de estructura de variedad compleja de dimensión  $4k$  ( $L$  es una carta holomorfa alrededor de cada  $S_\rho$ ). La correspondencia entre  $L$  y la aplicación clasificadora  $C$ , nos asegurará la extensión diferenciable de  $C$  al espacio  $\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{K}} \cup \mathcal{S}$ , al que se puede dotar de estructura de variedad analítica real de dimensión 3. A partir de aquí, cabe destacar dos pasos importantes en la demostración del Teorema 3:

- (i)  $C : \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$  es una aplicación propia.
- (ii)  $C : \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$  es un difeomorfismo local.

Como  $C(\mathcal{S})$  consistirá en dos curvas divergentes, disjuntas y difeomorfas a  $\mathbb{R}$ , el Teorema 3 es una simple consecuencia de (i) y (ii).

Con esto, se acaba la exposición de los contenidos de esta memoria. Quisiéramos concluir esta introducción enunciando algunos de los problemas abiertos relacionados con los resultados obtenidos en la tesis.

PROBLEMA 1: El ejemplo KMR  $M_{\theta,0,\frac{\pi}{2}}$  (resp.  $M_{\theta,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$ ) se puede obtener por simetrías a partir de un grafo  $G$  de Jenkins y Serrin definido sobre un rectángulo, con valores frontera consecutivos  $0, +\infty, 0, +\infty$  (resp.  $0, +\infty, 0, -\infty$ ), ver [31]. Por el principio de reflexión de Schwarz, podemos extender  $G$  a un grafo definido sobre una banda del plano, con valores frontera alternados  $\pm\infty$  sobre segmentos de igual longitud en el borde de dicha banda. Cabe pensar que los ejemplos KMR de la subfamilia  $\{M_{\theta,\alpha,\frac{\pi}{2}}\}_\alpha$ , son grafos de Jenkins y Serrin definidos sobre bandas del plano (evidencias gráficas lo avalan), y que dependen de forma continua de los parámetros  $\theta, \alpha$  (el parámetro  $\alpha$  indicaría la posición relativa de segmentos sobre los que se toman valores frontera  $+\infty$ , y  $\theta$  nos daría información sobre la anchura de la banda). En caso de demostrar que lo anterior es cierto, dichos grafos definidos sobre la banda podrían usarse como barrera en arguments que usen principios del máximo.

PROBLEMA 2: Actualmente, se ha despertado el interés por la construcción de superficies minimales completas y sin autointersecciones de  $\mathbb{R}^3$  con curvatura total infinita en el cociente por su retículo de periodos más fino (dada una superficie minimal no periódica  $M \subset \mathbb{R}^3$ , convendremos en decir que  $M$  es periódica, con retículo de periodos asociado  $\{\vec{0}\}$ ). En 1993, Hoffman, Karcher y Wei [20, 21] descubrieron un helicoides (no periódico) de género 1, que tiene curvatura total infinita. Aunque ha sido en 2001 cuando Hoffman, Weber y Wolf [25] han demostrado que existe una superficie de este tipo sin autointersecciones, usando herramientas sofisticadas de espacios de Teichmüller. Recientemente, Hauswirth y Pacard [32] han construido el primer ejemplo de superficie minimal completa y sin autointersecciones, con topología infinita y no periódica, pegando convenientemente una deformación de la superficie de Costa con dos medias superficies minimales de Riemann. Esta superficie de Hauswirth y Pacard tiene género 1 y dos finales límite (correspondientes a los medios ejemplos minimales de Riemann). También han obtenido, en el mismo trabajo, ejemplos de género más alto. Usando esta técnica de “pegar” superficies, esperamos conseguir en colaboración con Hauswirth, superficies minimales con género finito y dos finales límite en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ , a partir de ejemplos KMR. Usando técnicas completamente distintas, hemos construido en colaboración con Traizet [62], una superficie minimal simplemente periódica, con género 0 y un final límite en el cociente por su retículo de periodos más fino. Para ello, hemos adaptado los argumentos que Sa Earp y Rosenberg [64] usan para resolver el problema de Dirichlet en dominios no acotados (también se puede seguir un razonamiento similar al original de Jenkins y Serrin [28]).

PROBLEMA 3: Estudiar la existencia y posible unicidad de los toros doblemente periódicos de Hoffman, Karcher y Wei [20] con finales no paralelos, para ángulo ar-

bitrario entre sus finales no paralelos.

PROBLEMA 4: Un problema más ambicioso es la clasificación de las superficies minimales propias, sin autointersecciones y con género 0 de la 3-variedad completa y llana  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Por el Principio del máximo, excepto los ejemplos llanos (i.e. los planos y los cilindros llanos contenidos en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ ), todos los finales (simples) de una superficie minimal  $M \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  propia, sin autointersecciones y con género 0, son helicoidales o de tipo Scherk. Además, se sabe que si una tal  $M$  tiene topología finita, entonces  $M$  ha de tener un número par de finales. En el caso en el que los finales de  $M$  sean helicoidales, un teorema de Pérez y Ros [52] (Teorema 1.8.8) nos dice que  $M$  ha de ser un helicoido. Y si  $M$  tiene un número finito de finales de tipo Scherk, entonces  $M$  es una superficie de Scherk simplemente periódica o un “saddle tower” de Karcher (Pérez y Traizet [55], Teorema 1.8.6). Los Teoremas de unicidad de las superficies de Scherk doblemente periódicas de Lazard-Holly y Meeks [35] (Teorema 1.8.4) y de los ejemplos KMR [51] (Teorema 2), nos dicen que las únicas superficies  $M$  en las condiciones anteriores que proceden de superficies minimales doblemente periódicas son levantamientos de superficies de Scherk doblemente periódicas y los levantamientos de ejemplos KMR. Además, como hemos citado en el Problema 2 anterior, existen ejemplos de superficies minimales  $M \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  propias, sin autointersecciones, con género 0 y un final límite, que no proceden de ejemplos doblemente periódicos. Luego la familia a considerar en este ambiente es más rica que en el caso del ambiente de  $\mathbb{R}^3$ .



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Generalidades

Sea  $M$  una superficie diferenciable, y  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ . Consideramos en  $M$  la métrica riemanniana  $ds^2$  inducida por  $X$  a partir de la métrica llana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^3$  (así,  $X$  es una inmersión isométrica). Diremos que la inmersión es *completa* cuando el espacio métrico  $(M, ds^2)$  sea completo, y que  $X$  es *propia* si la preimagen por  $X$  de un compacto cualquiera de  $\mathbb{R}^3$ , es un subconjunto compacto de  $M$ .

Dada una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ , denotaremos por  $\Delta f$  su laplaciano respecto de la métrica  $ds^2$ . Y definimos el laplaciano de  $X$  asociado a  $ds^2$  como  $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ , siendo  $(x_1, x_2, x_3)$  las funciones coordenadas de  $X$ . Supongamos que la superficie diferenciable  $M$  es además orientada, y sea  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  su aplicación de Gauss. Es bien sabido que

$$\Delta X = 2HN, \tag{1.1}$$

donde  $H$  es la curvatura media asociada a  $N$  (consultar, por ejemplo, [50] pág. 28, o [8] pág. 204).

Una inmersión  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  se dice *minimal* si su curvatura media  $H$  se anula idénticamente. Luego deducimos de (1.1) que una inmersión  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es minimal si, y sólo si, sus tres funciones coordenadas son armónicas. Otra consecuencia de la minimalidad de  $X$  es que la curvatura de Gauss  $K$  de  $(M, ds^2)$  no puede tomar valores positivos, y que su aplicación de Gauss  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación conforme. De hecho, esta última propiedad caracteriza a las inmersiones minimales y a la esfera.

Lo anterior es un ejemplo de la estrecha relación que existe entre la teoría de superficies minimales y el Análisis. Otra muestra de ello es la siguiente versión del

Principio de reflexión de Schwarz para superficies minimales.

**Teorema 1.1.1 (Principio de reflexión de Schwarz [19])** *Si una superficie minimal  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  contiene un segmento rectilíneo  $r$ , entonces  $M$  es invariante por la rotación de ángulo  $\pi$  alrededor de la recta que contiene a  $r$ . Además, si  $M$  contiene en su frontera un segmento rectilíneo  $r$ , entonces  $M$  se puede extender por la rotación de ángulo  $\pi$  alrededor de la recta que contiene a  $r$ , obteniendo así una superficie minimal que contiene a  $r$  en su interior.*

**Observación 1.1.2** *Dada una inmersión minimal  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , estamos abusando de la notación identificando  $M$  con su imagen en  $\mathbb{R}^3$ , y hablaremos de una superficie minimal inmersa  $M \subset \mathbb{R}^3$ .*

Como dijimos anteriormente, las funciones coordenadas de una inmersión minimal  $X = (x_1, x_2, x_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  son armónicas. Para cada  $j = 1, 2, 3$ , denotamos por  $x_j^*$  la conjugada armónica de  $x_j$ , definida en un recubridor  $\widetilde{M}$  de  $M$  ( $x_j^*$  está bien definida en  $M$  salvo constantes aditivas). Definimos la *inmersión minimal conjugada*  $X^* : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $X$  como aquella cuyas funciones coordenadas son las conjugadas armónicas de las  $x_j$ ,  $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ . Por lo general,  $X^*$  es una inmersión multivaluada sobre  $M$  (está bien definida salvo traslaciones), por lo que, aunque  $X + iX^*$  es una curva holomorfa definida de  $\widetilde{M}$  en  $\mathbb{C}^3$ , su diferencial  $\Phi = d(X + iX^*)$  está globalmente bien definida en  $M$ . Esta 1-forma holomorfa  $\Phi$  es la que recibe el nombre de *forma de Weierstrass*; y su tercera componente, que unas veces denotaremos por  $\phi_3$  y otras por  $dh$ , es a lo que llamaremos *diferencial altura*. Claramente,  $\operatorname{Re} \int \Phi = X$  salvo constante aditiva. En particular,  $\operatorname{Re} \int \phi_3 = x_3$ , de ahí el nombre de diferencial altura para  $dh$ .

## 1.2. Representación de Weierstrass

En esta sección vamos a presentar una herramienta muy poderosa en la teoría de superficies minimales de  $\mathbb{R}^3$ : la representación de Weierstrass (o de Enneper-Weierstrass). Ésta fue obtenida por Weierstrass [72, 73] en 1860, e independientemente por Enneper [11] en 1864, y nos permite representar superficies minimales, usando líneas de curvatura como líneas de parámetros. Éstas fórmulas cayeron en un letargo, hasta que fueron recuperadas por Osserman [49] un siglo más tarde, dando así un gran impulso al estudio de las superficies minimales completas. Como veremos, la representación de Weierstrass es un vínculo entre la teoría de superficies minimales de  $\mathbb{R}^3$  y el Análisis Complejo (de una variable). Los resultados que siguen se pueden encontrar en [50].

Dada una inmersión minimal e isométrica  $X = (x_1, x_2, x_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , denotamos por  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  la forma de Weierstrass asociada a  $X$ . Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann para cada  $\phi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), llegamos a que  $\phi_j = \left( \frac{\partial x_j}{\partial x} - i \frac{\partial x_j}{\partial y} \right) dz$ , donde  $z = x + iy$  es una coordenada local holomorfa (i.e.  $(x, y)$  son parámetros isotermos); luego

$$d\Phi = d(X + iX^*) = \left( \frac{\partial X}{\partial x} - i \frac{\partial X}{\partial y} \right) dz.$$

A partir de esta expresión, y teniendo en cuenta que  $X$  es una inmersión conforme, es fácil comprobar que

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial X}{\partial y} \right|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

$$\text{y} \quad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial X}{\partial y} \right|^2 \neq 0.$$

Tomando  $g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$ , que es una función meromorfa sobre  $M$ , llegamos a la expresión

$$\Phi = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g} - g \right) \phi_3, \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g} + g \right) \phi_3, \phi_3 \right). \quad (1.2)$$

Y por tanto, podemos recuperar la inmersión  $X$  como sigue:

$$X(z) = \text{Re} \int_{z_0}^z \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g} - g \right) \phi_3, \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g} + g \right) \phi_3, \phi_3 \right) + C, \quad (1.3)$$

para ciertos  $z_0 \in M$ ,  $C \in \mathbb{R}^3$ . Usando (1.3), un cálculo directo nos lleva a que la métrica inducida por  $X$  en  $M$  a partir de la métrica llana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^3$ , viene dada por

$$ds^2 = \frac{1}{2} (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2) = \frac{|\phi_3|^2}{4} \left( \frac{1}{|g|} + |g| \right)^2. \quad (1.4)$$

De aquí deducimos que  $X$  definida como en (1.3) es una inmersión si, y sólo si, se cumple:

$$z_0 \in M \text{ es un cero o un polo de } g \text{ de orden } m \Leftrightarrow z_0 \text{ es un cero de } \phi_3 \text{ de orden } m. \quad (1.5)$$

Por otra parte,  $\frac{\partial X}{\partial x} \wedge \frac{\partial X}{\partial y}$  es un campo normal a la superficie. Luego una aplicación de Gauss para  $M$  viene dada por

$$N = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} \wedge \frac{\partial X}{\partial y}}{\left| \frac{\partial X}{\partial x} \wedge \frac{\partial X}{\partial y} \right|} = \left( \frac{2 \text{Re}(g)}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \text{Im}(g)}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right), \quad (1.6)$$

que no es más que la imagen inversa por la proyección estereográfica desde el Polo Norte de  $g$ . Por tanto, identificando por la proyección estereográfica,  $g$  es la aplicación de Gauss de la superficie. Además, las curvaturas principales asociadas a la aplicación de Gauss  $N$  obtenida en (1.6) vienen dadas por

$$k_1 = \frac{4|dg|}{|f|(1+|g|^2)^2}, \quad k_2 = \frac{-4|dg|}{|f|(1+|g|^2)^2},$$

de donde llegamos a que la curvatura de Gauss de  $M$  es igual a

$$K = - \left( \frac{|\phi_3||dg|}{ds^2} \right)^2 = - \frac{16|\phi_3|^4|dg|^2}{\left(\frac{1}{|g|} + |g|\right)^4}. \quad (1.7)$$

El siguiente teorema nos da, además, condiciones para que, a partir de una función meromorfa  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  y una 1-forma holomorfa  $\phi_3$  definidas sobre una superficie de Riemann  $M$ , construyamos una inmersión minimal y conforme  $X$ , definida como en (1.3).

### Teorema 1.2.1 ([50])

1. Sea  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión minimal isométrica,  $g$  su aplicación de Gauss (proyectada estereográficamente) y  $\phi_3$  su diferencial altura. Entonces, podemos expresar  $X$  como en (1.3).
2. Recíprocamente, sea  $M$  una superficie de Riemann,  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación meromorfa,  $\phi_3$  una 1-forma holomorfa sobre  $M$  cumpliendo (1.5), y  $\Phi$  la forma de Weierstrass definida en (1.2). Si se cumple que

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \Phi = 0, \quad \text{para toda curva cerrada } \Gamma \subset M, \quad (1.8)$$

entonces  $X = \operatorname{Re} \int \Phi$  define una inmersión minimal y conforme, cuyas aplicación de Gauss y diferencial altura son, respectivamente,  $g$  y  $\phi_3$ .

### Observación 1.2.2

- (i) La condición (1.5), que equivale a que sea  $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0$ , nos asegura que  $X$  es una inmersión (no ramificada). Una inmersión ramificada es una aplicación diferenciable  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida sobre una superficie diferenciable, que es una inmersión salvo en un conjunto discreto de puntos, donde se anula  $dX$ . En general, dada una aplicación meromorfa  $g$  y una 1-forma holomorfa sobre una superficie de Riemann  $M$  cumpliendo (1.8), la expresión (1.3) define una inmersión minimal ramificada de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ .

(ii) La condición (1.8) nos dice que  $X$  es univaluada sobre  $M$ . Por tanto, si no se cumple (1.8), entonces (1.3) define una inmersión minimal (posiblemente ramificada) sobre algún recubridor de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 1.2.3** Llamaremos *datos de Weierstrass* asociados a  $X$ , al par  $(g, \phi_3)$  que aparece en el enunciado del Teorema 1.2.1 para  $X$ . Y se dice que unos datos de Weierstrass  $(g, \phi_3)$  *cierran periodos* cuando cumplen la condición (1.8).

Es inmediato comprobar que los datos de Weierstrass asociados a la inmersión (multivaluada) conjugada  $X^*$  de  $X$  vienen dados por  $(g, i\phi_3)$ .

Sea  $M$  una superficie de Riemann,  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación meromorfa,  $\phi_3$  una 1-forma holomorfa sobre  $M$ , y  $\Phi$  la forma de Weierstrass asociada a los datos de Weierstrass  $(g, \phi_3)$ . Se definen, respectivamente, el *vector periodo* y el *vector flujo* de  $X$  (o de  $(g, \phi_3)$ ) a lo largo de una curva cerrada y orientada  $\Gamma \subset M$  como

$$P_\Gamma = \operatorname{Re} \int_\Gamma \Phi \quad \text{y} \quad F_\Gamma = \operatorname{Im} \int_\Gamma \Phi. \quad (1.9)$$

El vector flujo  $F_\Gamma$  a lo largo de  $\Gamma$  coincide con la integral sobre  $\Gamma$  del conormal unitario interior  $\nu$  a lo largo de la curva:  $F_\Gamma = \int_\Gamma \nu ds$ , donde  $ds$  denota el elemento de longitud. Por supuesto, el signo de  $F_\Gamma$  depende de la elección del conormal  $\nu$ . No es difícil ver que el vector periodo (resp. el vector flujo) de  $X^*$  a lo largo de una curva cerrada y orientada  $\Gamma \subset M$ , coincide con el opuesto del vector flujo (resp. el vector periodo) de  $X$  a lo largo de  $\Gamma$ .

Claramente,  $\int_\Gamma \Phi$  sólo depende de la clase de homología de  $\Gamma$  en  $M$  (Teorema de la Divergencia). Así, si denotamos por  $H_1(M, \mathbb{Z})$  al primer grupo de homología de  $M$ , entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc} H_1(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Upsilon} & \mathbb{R}^3 \\ [\Gamma] & \longmapsto & P_\Gamma \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos. Sea  $G = \Upsilon(H_1(M, \mathbb{Z}))$ . La condición (1.8) se corresponde con el caso  $G = \{\vec{0}\}$ . Supongamos ahora que  $G$  está generado por 1, 2 o 3 vectores linealmente independientes. Denotaremos por  $\mathcal{P}$  al grupo de isometrías de  $\mathbb{R}^3$  formado por las traslaciones de vectores en  $G$ . Entonces, (1.3), que define una inmersión minimal multivaluada de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ , la podemos ver como una inmersión univaluada y minimal de  $M$  en la 3-variedad completa, llana y no simplemente conexa  $\mathbb{R}^3/\mathcal{P}$ . Esta superficie minimal  $M \subset \mathbb{R}^3/\mathcal{P}$  se levanta en  $\mathbb{R}^3$  a una superficie minimal  $\widetilde{M}$  invariante por las traslaciones de  $\mathcal{P}$ . Dependiendo de si el rango de  $\mathcal{P}$  es 1, 2 o 3,  $\widetilde{M}$  será simple, doble o triplemente periódica, respectivamente (ver Sección 1.8 para la definición de superficie minimal periódica).

Recíprocamente, si una superficie minimal inmersa  $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3$  es invariante por un grupo de traslaciones  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  que actúa propia y discontinuamente, entonces su aplicación de Gauss induce una aplicación de Gauss en el cociente  $M = \widetilde{M}/\mathcal{P}$ , y la diferencial altura está bien definida sobre  $M$ . Con todo esto, no es difícil comprobar que el Teorema 1.2.1 sigue siendo cierto, cambiando el espacio ambiente  $\mathbb{R}^3$  por  $\mathbb{R}^3/\mathcal{P}$  (i.e. tomando  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\mathcal{P}$ ), y cambiando la condición (1.8) por que  $G = \Upsilon(H_1(M, \mathbb{Z}))$  sea un subgrupo de  $\mathcal{P}$ ; y siguen siendo válidas las expresiones (1.4), (1.6) y (1.7), respectivamente, para la métrica inducida por  $X$  en  $M$ , la aplicación de Gauss  $N$  de  $M$  y la curvatura de Gauss asociada a  $M$ .

Cuando una curva cerrada  $\Gamma \subset M$  satisface  $P_\Gamma = \vec{0}$ , diremos que  $\Gamma$  *cierra periodos*. Al estudio de si todas las curvas cerradas contenidas en  $M$  cierran periodos, o bien los periodos de dichas curvas cerradas generan un grupo generado por 1, 2 o 3 traslaciones, es a lo que se suele llamar *resolver el problema de periodos*.

### Algunos ejemplos clásicos:

- ★ Los datos de Weierstrass  $g = 1$  y  $\phi_3 = dz$  definidos sobre  $M = \mathbb{C}$ , definen un **plano** vertical.
- ★ Si  $M = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $g(z) = z$  y  $\phi_3 = \frac{dz}{z}$ , obtenemos una **catenoide** vertical, ver la Figura 1 izquierda. El **helicoides** es la superficie minimal (multivaluada en  $\mathbb{C}^*$ ) conjugada de la catenoide, luego sus datos de Weierstrass son  $g(z) = z$  y  $\phi_3 = i \frac{dz}{z}$  sobre  $\mathbb{C}^*$ , ver la Figura 1 derecha. Si queremos representar el helicoides de forma univaluada, basta levantar al recubridor universal de  $\mathbb{C}^*$ , obteniendo  $g(w) = e^{iw}$  y  $\phi_3 = i dw$ .
- ★ Si  $M = \mathbb{C}$ ,  $g(z) = z$  y  $\phi_3 = z dz$ , obtenemos la superficie de **Enneper**, ver la Figura 3 derecha (ésta es una superficie con autointersecciones, aunque no se aprecien en la Figura 3 por ser la porción de superficie representada demasiado pequeña).
- ★ Para cada  $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$ , a partir de los datos de Weierstrass  $g(z) = z$  y  $\phi_3 = \frac{z dz}{(z^2 - e^{2i\theta})(z^2 - e^{-2i\theta})}$ , definidos sobre  $M = \overline{\mathbb{C}} - \{\pm e^{\pm i\theta}\}$ , obtenemos la superficie de **Scherk** doblemente periódica de ángulo\*  $\theta$ , ver la Figura 2 derecha. La superficie de Scherk simplemente periódica de ángulo  $\theta$  (ver la Figura 2 izquierda) es la superficie minimal obtenida al conjugar la superficie de Scherk doblemente periódica de ángulo  $\theta$ . Por tanto, sus datos de Weierstrass asociados son  $g(z) = z$  y  $\phi_3 = \frac{iz dz}{(z^2 - e^{2i\theta})(z^2 - e^{-2i\theta})}$ , definidos sobre  $M = \overline{\mathbb{C}} - \{\pm e^{\pm i\theta}\}$ .

---

\*Llamaremos *ángulo* de una superficie de Scherk simple o doblemente periódica al ángulo formado entre sus finales no paralelos.

- ★ Los ejemplos minimales de **Riemann**, que forman una familia uniparamétrica  $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ , son superficies minimales simplemente periódicas, definidas sobre toros doblemente punteados. Para cada  $\lambda > 0$ , la superficie minimal de Riemann  $R_\lambda$  se define sobre el toro doblemente punteado  $T_\lambda = \{(z, w) \mid w^2 = z(z - \lambda)(\lambda z + 1)\} - \{(0, 0), (\infty, \infty)\}$  mediante  $g(z) = z$  y  $\phi_3 = \frac{dz}{zw}$ , ver la Figura 3 izquierda. La familia de superficies minimales de Riemann es autoconjugada; es decir, al conjugar un ejemplo minimal de Riemann obtenemos otro ejemplo de la familia (salvo congruencias).

La representación (1.3) nos permite construir y representar superficies minimales (ver, por ejemplo, el Capítulo 2). Para resolver el problema de periodos correspondiente a unos datos de Weierstrass  $(g, \phi_3)$  dados, es útil conocer las isometrías de la métrica  $ds^2$  asociada a  $(g, \phi_3)$ , como ocurrirá en el Capítulo 2. También es útil conocer dichas isometrías al representar la superficie, ya que puede que sólo baste representar un “trozo conveniente” de ésta, y obtener el resto como imagen de dicho trozo por las isometrías de la superficie. La proposición siguiente, junto con el Principio de reflexión de Schwarz, nos ayuda a descubrir las isometrías asociadas a  $ds^2$ .

**Proposición 1.2.4** Denotaremos por  $\dot{\Gamma}$  al vector tangente de la curva  $\Gamma \subset M$ .

1. Si  $\frac{dg}{g}(\dot{\Gamma}) \phi_3(\dot{\Gamma}) \in i\mathbb{R} \Rightarrow \Gamma$  está contenida en una recta.
2. Si  $\frac{dg}{g}(\dot{\Gamma}) \phi_3(\dot{\Gamma}) \in \mathbb{R} \Rightarrow \Gamma$  está contenida en una geodésica plana (de simetría).

Con esto, se puede comprobar que la conjugación lleva líneas rectas en curvas planas de simetría, y viceversa.

### 1.3. Superficies minimales con curvatura total finita

Entre las superficies minimales completas de  $\mathbb{R}^3$ , las que mejor se conocen son aquellas con curvatura total finita. Fue Osserman [50] quien descubrió la importancia de la curvatura total en la familia de superficies minimales completas.

Diremos que  $M$  es *propia* cuando la inmersión  $X$  sea propia, que es *embebida* cuando no tenga autointersecciones, y que es *propia y embebida* (resp. *propia y embebida*) cuando además de ser propia es inmersa (resp. embebida).

Se define la *curvatura total* de una superficie minimal  $M$  como

$$C(M) = \int_M K dA,$$

donde estamos denotando por  $K$  la curvatura de Gauss de  $M$ , y  $dA$  es el elemento de área asociado a la métrica  $ds^2$  inducida en  $M$  de la de  $\mathbb{R}^3$ . La minimalidad de  $M$  implica que  $K \leq 0$ , luego siempre se cumple  $C(M) \leq 0$ . Se dice que  $M$  tiene *curvatura total finita* si  $C(M) > -\infty$ . El siguiente resultado reduce, vía la representación de Weierstrass, el estudio de las superficies minimales completas con curvatura total finita a la teoría de superficies de Riemann compactas.

**Teorema 1.3.1** ([16, 26, 29, 50]) *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie minimal inmersa, completa, y con curvatura total finita. Entonces, se cumple:*

1.  $M$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$ , siendo  $\mathbb{M}$  una superficie de Riemann compacta y  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{M}$ ,  $r \geq 1$ , una cantidad finita de puntos a los que llamamos finales de  $M$ . En particular, la característica de Euler  $\chi(M)$  de  $M$  viene dada por

$$\chi(M) = 2 - 2 \text{género}(\mathbb{M}) - r.$$

2.  $M$  es propia.
3. La aplicación de Gauss  $g$  de  $M$  (compuesta con la proyección estereográfica) extiende a una aplicación meromorfa sobre  $\mathbb{M}$ ; y su diferencial altura  $dh$  extiende a una 1- forma meromorfa sobre  $\mathbb{M}$ . Seguiremos denotando por  $g$ ,  $dh$  a dichas extensiones.
4. Si  $M$  tiene  $r$  finales, entonces

$$C(M) \leq 2\pi (\chi(M) - r).$$

Además, cuando  $M$  es embebida en entornos de sus finales, entonces se da la igualdad en la desigualdad anterior.

**Observación 1.3.2** *Sea  $\Sigma$  una superficie no compacta, y consideremos el conjunto  $\Lambda = \{\gamma : [0, \infty) \rightarrow \Sigma \mid \gamma \text{ es un arco propio}\}$ . Definimos en  $\Lambda$  la siguiente relación de equivalencia:  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  si para cualquier compacto  $C \subset \Sigma$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  caen eventualmente (i.e. salvo un trozo compacto) en la misma componente conexa de  $\Sigma - C$ . Llamamos final de  $\Sigma$  a cada clase de equivalencia en  $\Lambda / \sim$ . Los puntos  $p_j$  de los que habla el apartado 1 del teorema anterior se pueden identificar con los finales (topológicos) de  $M$  como espacio no compacto.*



Llamaremos *género* de una superficie minimal  $M$  en las condiciones del Teorema 1.3.1, al genero de su compactificación  $\mathbb{M}$ . Además, como la aplicación de Gauss  $g$  de  $M$  extiende a una aplicación meromorfa sobre  $\mathbb{M}$ , podemos definir el *grado* de  $g$  como el grado de dicha extensión. Es fácil comprobar que  $|C(M)|$  coincide con el área esférica de la imagen de la aplicación de Gauss  $N$  de  $M$ , contando multiplicidad (ya que  $K = \det(dN)$ ). Así,

$$C(M) = -4\pi \text{grado}(g). \quad (1.10)$$

**Corolario 1.3.3** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie minimal e inmersa. Se cumple:*

(i) *Si  $M$  tiene curvatura total finita, se tiene que*

$$M \text{ es completa} \Leftrightarrow M \text{ es propia.}$$

(ii) *Si  $M$  es propia, embebida en entornos de sus finales y tiene curvatura total finita, entonces*

$$\text{grado}(g) = \text{género}(M) + \#(\text{finales}) - 1.$$

Otra consecuencia importante de la condición de curvatura total finita, es que nos permite conocer el comportamiento asintótico de los finales de una superficie minimal completa e inmersa en  $\mathbb{R}^3$  (es decir, el comportamiento de la superficie en el infinito). El caso más sencillo es cuando dichos finales son embebidos, y queda recogido por el siguiente resultado.

**Proposición 1.3.4** [50, 66] *Los finales embebidos de una superficie minimal de  $\mathbb{R}^3$  completa, inmersa y con curvatura total finita, deben ser asintóticos a medias catenoides o a planos.*

Decimos que un final de una superficie minimal es *catenoidal* (o de tipo *catenoide*) si es asintótico a media catenoide, y que es *plano* si es asintótico a un plano.

## 1.4. Principios del máximo

Muchos argumentos de los que usaremos a lo largo de la tesis se fundamentarán en los principios del máximo que enunciamos a continuación. La obtención de dichos principios se debe a que, localmente, podemos expresar una superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  como grafo de una solución de (1), que es una ecuación en derivadas parciales

de segundo orden, casilineal y elíptica. Este hecho nos permite usar trasladar herramientas de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales a la teoría de superficies minimales de  $\mathbb{R}^3$ .

Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos superficies minimales de  $\mathbb{R}^3$  para las cuales existe un punto  $p \in M_1 \cap M_2$  donde ambas superficies son tangentes (i.e.  $T_p M_1 = T_p M_2$ ). Supongamos que  $M_1, M_2$  vienen dadas alrededor de  $p$  como grafos de respectivas soluciones  $u_1, u_2$  de (1) definidas sobre un entorno del plano tangente común en  $p$ . Diremos que  $M_1$  se queda a un lado de  $M_2$  alrededor de  $p$  si se cumple que  $u_1 \leq u_2$  (y escribiremos  $M_1 \leq M_2$ ), o bien  $u_1 \geq u_2$  ( $M_1 \geq M_2$ ). Una demostración del siguiente teorema, debido a Hopf, se puede encontrar en [66].

**Teorema 1.4.1 (Principio del máximo)** *Dadas dos superficies minimales  $M_1, M_2$  de  $\mathbb{R}^3$ , supongamos que se da una de las dos siguientes situaciones:*

1.  $p$  es un punto interior de  $M_1$  y  $M_2$ , con  $T_p M_1 = T_p M_2$ .
2.  $p$  es un punto interior de  $\partial M_1 \cap \partial M_2$ , con  $T_p M_1 = T_p M_2$  y  $T_p \partial M_1 = T_p \partial M_2$ .

Entonces,  $M_1 \geq M_2$  en un entorno de  $p$  si, y sólo si,  $M_1 = M_2$  en dicho entorno.

Es un ejercicio comprobar que el siguiente resultado se obtiene por una aplicación directa del Principio del máximo (a menudo, nos referiremos al Corolario 1.4.2 como Principio del Máximo).

**Corolario 1.4.2** *Sean  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$  dos superficies minimales (conexas) cerradas y posiblemente con borde. Supongamos que  $M_1 \cap M_2$  contiene un conjunto con interior no vacío. Si la intersección de  $\partial M_1$  con el interior de  $M_2$  es vacía (lo cual se produce, en particular, cuando  $\partial M_1 = \emptyset$ ), entonces  $M_2 \subset M_1$ .*

Existe una versión más general del Principio del máximo debida a Meeks y Rosenberg [43], y a Langevin y Rosenberg [34], que nos dice que dos superficies minimales propiamente inmersas en  $\mathbb{R}^3$ , nunca pueden ser asintóticas.

**Teorema 1.4.3 (Principio del máximo en el infinito)** *Sea  $M_1, M_2$  dos superficies minimales disjuntas, propiamente inmersas en  $\mathbb{R}^3$ , y con frontera compacta (posiblemente vacía). Entonces,*

1. Si  $\partial M_1 \neq \emptyset$ , entonces existen  $p \in \partial M_1$  y  $q \in \overline{M_2}$  tales que  $\text{dist}_{\mathbb{R}^3}(M_1, M_2) = |p - q|$  (donde estamos denotando por  $|\cdot|$  la norma usual de  $\mathbb{R}^3$ ).
2. Si  $\partial M_1 = \partial M_2 = \emptyset$ , entonces  $M_1$  y  $M_2$  son dos planos paralelos.

## 1.5. Límites de superficies minimales

En esta sección vamos a dar condiciones para que converja una sucesión  $\{M_n\}_n$  de superficies minimales propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ . Primero, vamos a ver qué queremos decir con que una tal sucesión converja. Para ello, necesitamos introducir cierta notación. Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie minimal propiamente embebida y con aplicación de Gauss  $N$ , y  $p$  un punto de  $M$ . Dados  $r, \varepsilon > 0$ , denotaremos

$$D(p, r) = \{p + v \mid v \in T_p M, |v| < r\},$$

$$W(p, r, \varepsilon) = \{q + tN(p) \mid q \in D(p, r), |t| < \varepsilon\}.$$

Es decir,  $D(p, r)$  es el disco tangente afín a  $M$  en  $p$  de radio  $r$ , y  $W(p, r, \varepsilon)$  es un entorno tubular de  $D(p, r)$  de radio  $\varepsilon$ .

**Definición 1.5.1** Decimos que una sucesión de superficies minimales  $\{M_n\}_n$  propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$  *converge (uniformemente sobre compactos) con multiplicidad finita* a una superficie minimal  $M \subset \mathbb{R}^3$  propiamente embebida (y no necesariamente conexa), y escribiremos  $M_n \rightarrow M$ , si  $M$  es el conjunto de puntos de acumulación de las  $M_n$ , y para cada  $p \in M$ , existen  $r, \varepsilon > 0$  y  $m \in \mathbb{N}$  tales que

- (•)  $M \cap W(p, r, \varepsilon)$  se puede expresar como grafo de una solución  $u : D(p, r) \rightarrow \mathbb{R}$  de (1).
- (••) Para cada  $n$  suficientemente grande,  $M_n \cap W(p, r, \varepsilon)$  consiste en  $m$  grafos sobre  $D(p, r)$  de funciones que convergen a  $u$  uniformemente en  $D(p, r)$ .

Sobre cada componente conexa  $\Omega \subset M$ , el natural  $m$  que cumple (••) en la definición anterior, es común a todos sus puntos. Llamamos *multiplicidad* del límite sobre  $\Omega$  a dicho natural.

**Teorema 1.5.2** ([54]) *Sea  $\{M_n\}_n$  una sucesión de superficies minimales propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ . Supongamos que existe un punto de acumulación de las  $M_n$  y que, para cualquier bola  $B \subset \mathbb{R}^3$ , se tiene que tanto el área de  $M_n \cap B$  como la restricción de la curvatura de Gauss de  $M_n$  a  $M_n \cap B$ , están acotadas por una constante que no depende de  $n$  (abreviaremos diciendo que se tienen cotas locales uniformes del área y de la curvatura de Gauss). Entonces, existe una subsecuencia de  $\{M_n\}_n$  que converge con multiplicidad finita a una superficie minimal propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  (no necesariamente conexa), siendo la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^3$ .*

Una superficie minimal  $M \subset \mathbb{R}^3$ , se dice *estable* si cada compacto contenido en  $M$  es un mínimo del área en el conjunto de superficies minimales “cercanas” con igual frontera. El siguiente resultado nos dice que la multiplicidad del límite de una sucesión de superficies minimales propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ , es uno cuando dicho límite no sea estable.

**Proposición 1.5.3** ([54]) *Sea  $\{M_n\}_n$  una sucesión de superficies minimales propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ , convergiendo con multiplicidad finita a una superficie minimal  $M$  (conexa y orientable) propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$ . Si esta convergencia tiene multiplicidad  $m \geq 2$ , entonces  $M$  es estable.*

Por un Teorema de Carmo y Peng [9], o de Fischer-Colbrie y Schoen [13], saber que dicho límite no es estable es tanto como saber que no es un plano (ver el Teorema 1.5.4).

**Teorema 1.5.4** ([9, 13]) *La única superficie minimal (orientable) completa, estable y sin borde de  $\mathbb{R}^3$  es el plano.*

## 1.6. Grafos minimales

Sean  $\Omega$  un dominio del plano y  $u \in C^2(\Omega)$ . El grafo de  $u$  es una superficie minimal si, y sólo si,  $u$  cumple la ecuación casilineal elíptica de segundo orden (1). En la teoría de superficies minimales, el Problema de Dirichlet consiste en encontrar soluciones  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  de la ecuación (1) con valores frontera prefijados  $u|_{\partial\Omega} = f$ , siendo  $f$  una función continua sobre  $\partial\Omega$ , y estudiar la unicidad de solución. Una versión geométrica del Problema de Dirichlet es el llamado *Problema de Plateau*, que consiste en encontrar superficies minimales cuya frontera es una curva de Jordan prefijada.

Volvamos a nuestro dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , que supondremos acotado. Sea  $f$  una función continua a trozos en  $\partial\Omega$  (es decir, continua en  $\partial\Omega$  salvo en un subconjunto finito) y acotada. Podemos considerar el Problema de Plateau asociado a la curva de Jordan  $\Gamma$  formada por  $f(\partial\Omega)$  más convenientes segmentos verticales sobre los puntos de  $\partial\Omega$  donde  $f$  no es continua. Sabemos que admite solución  $M$  (Teorema 1.6.1). Si  $M$  es el grafo de una función  $u$  definida sobre  $\Omega$ , entonces  $u$  es una solución al Problema de Dirichlet sobre  $\Omega$  con valores frontera  $f$ .

**Teorema 1.6.1** (Douglas [10] y Radó [58]) *Dada una curva de Jordan  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ , existe un disco minimal cuya frontera es  $\Gamma$ . Además, si la proyección de  $\Gamma$  sobre algún plano bordea un dominio convexo (acotado)  $\Omega$ , y  $\Gamma$  se puede escribir como grafo de una función continua sobre  $\partial\Omega$ , entonces existe una única superficie minimal  $M$  con  $\partial M = \Gamma$ , y ésta se puede escribir como grafo sobre  $\Omega$ .*

Existe una generalización del Problema de Dirichlet, consistente en admitir valores frontera infinitos en segmentos contenidos en  $\partial\Omega$ . El siguiente teorema resuelve dicho problema en casos particulares.

**Teorema 1.6.2 (Jenkins-Serrin, [28])** *Sea  $\Omega$  un dominio convexo y acotado, cuya frontera  $\partial\Omega$  consiste en una cantidad finita de segmentos rectos  $\{A_i\}_i$ ,  $\{B_j\}_j$  y un número finito de arcos  $\{C_k\}_k$ , tales que ningún par de segmentos  $A_i$  (resp.  $B_j$ ) tienen un extremo común. Sea  $\mathcal{P}$  el conjunto formado por todas las poligonales cerradas y simples  $P$  cuyos vértices son extremos de los  $A_i, B_j$ . Para cada  $P \in \mathcal{P}$ , denotamos por  $\gamma(P)$  al perímetro de  $P$ ,  $\alpha(P) = \sum_{A_i \subset P} |A_i|$  y  $\beta(P) = \sum_{B_j \subset P} |B_j|$ , siendo  $|A_i|, |B_j|$  las longitudes de los segmentos  $A_i, B_j$ , respectivamente. Consideremos los valores frontera  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dados por  $f|_{\cup_i A_i} = +\infty$ ,  $f|_{\cup_j B_j} = -\infty$ , y  $f|_{\cup_k C_k}$  una función continua y acotada prescrita.*

1. *Si  $\{C_k\}_k \neq \emptyset$ , entonces existe una solución de la ecuación (1) definida sobre  $\Omega$  y con valores frontera  $f$  si y sólo si*

$$2\alpha(P) < \gamma(P) \quad \text{y} \quad 2\beta(P) < \gamma(P), \quad \text{para todo } P \in \mathcal{P}. \quad (1.11)$$

*Y en caso de existir, dicha solución es única.*

2. *Si  $\cup_k C_k = \emptyset$ , entonces existe una solución de la ecuación (1) en  $\Omega$  si y sólo si  $\alpha(\partial\Omega) = \beta(\partial\Omega)$  y además se cumple (1.11) para cualquier otro polígono (propio) de  $\mathcal{P}$ . Si existe dicha solución, es única salvo constante aditiva.*
3. *Si  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  son dos soluciones del Problema de Dirichlet planteado en el apartado anterior y cumplen  $u \geq v$  sobre los arcos  $C_k$ , entonces  $u \geq v$  sobre todo  $\Omega$ .*

Acabamos esta sección con un resultado que nos dice que, al conjugar un grafo minimal que está definido sobre un convexo, obtenemos un nuevo grafo minimal. Este resultado se debe a Krust, y se puede encontrar demostrado en [31]. Este teorema permite la obtención de nuevas superficies minimales por conjugación (ver, por ejemplo, [30]).

**Teorema 1.6.3** *Si  $M$  es una superficie minimal que se obtiene como grafo sobre un dominio convexo de un plano, entonces la superficie minimal conjugada  $M^*$  existe, y además se puede expresar como grafo sobre otro dominio del mismo plano.*

## 1.7. Algunos resultados importantes

A continuación, enunciemos algunos resultados destacables que han usado en su demostración como herramientas fundamentales lo presentado hasta ahora. A partir de la Proposición 1.3.4, no es difícil deducir que la única superficie minimal de  $\mathbb{R}^3$  propiamente embebida, con curvatura total finita y un único final, es el plano. Por tanto, el estudio de las superficies minimales  $M \subset \mathbb{R}^3$  propiamente embebidas y con curvatura total finita, se reduce al estudio de aquellas que tienen dos o más finales. Si  $M$  tiene exactamente 2 finales, Schoen [66] probó que  $M$  ha de ser la catenoide, aplicando el método de Alexandrov y usando el Principio del máximo.

**Teorema 1.7.1 (Schoen, [66])** *Si  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie minimal propiamente inmersa, con curvatura total finita y 2 finales embebidos, entonces  $M$  es una catenoide.*

Otra caracterización de la catenoide, fue dada por López y Ros [37]. En su demostración, estudiaron una deformación uniparamétrica de la superficie minimal en términos de los datos de Weierstrass asociados a la superficie, deformación que existe si todas las curvas cerradas de la superficie tienen vector flujo apuntando en una sola dirección, digamos vertical. Esta deformación, que actualmente se conoce con el nombre de *deformación de López-Ros*, conserva la estructura conforme y la diferencial altura.

**Teorema 1.7.2 (López y Ros, [37])** *Si  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie minimal completa, embebida, con curvatura total finita y género 0, entonces  $M$  es un plano o una catenoide.*

Además, un importante teorema de Collin [6] reduce el estudio de las superficies minimales propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ , con topología finita y al menos 2 finales, al caso mejor conocido en el que las superficies tienen curvatura total finita.

**Teorema 1.7.3 (Collin, [6])** *Si  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie minimal propiamente embebida, con al menos dos finales, entonces  $M$  tiene topología finita si, y sólo si,  $M$  tiene curvatura total finita.*

Otras aplicaciones más o menos sofisticadas de los principios del máximo dados en la Sección 1.4, derivan en los siguientes resultados.

**Teorema 1.7.4 (Teorema del semiespacio, [24])** *Si una superficie minimal  $M$  propiamente inmersa en  $\mathbb{R}^3$  está contenida en un semiespacio, entonces  $M$  ha de ser un plano.*

A partir del Teorema 1.7.4 se obtiene el siguiente

**Teorema 1.7.5 (Teorema fuerte del semiespacio, [24])** *Dos superficies minimales propiamente inmersas de  $\mathbb{R}^3$  o bien son dos planos paralelos o bien se cortan.*

## 1.8. Superficies minimales periódicas

Las superficies minimales periódicas surgen de forma natural en el estudio de las superficies minimales propiamente embebidas de  $\mathbb{R}^3$  y, en diversas ocasiones, modelizan fenómenos de la naturaleza. Meeks y Rosenberg propiciaron un gran avance en la teoría de superficies minimales periódicas, como se pondrá de manifiesto en esta y en la próxima sección.

Una superficie minimal conexa y propiamente embebida se dice *periódica* cuando es invariante por la acción de un grupo discreto  $G$  de isometrías de  $\mathbb{R}^3$ , que actúa propia y discontinuamente. Dichos grupos están clasificados, y pueden tener 1, 2 o 3 generadores. Cuando  $G$  tiene 1 generador (resp. 2 o 3 generadores), se dice que la superficie es *simplemente periódica* (resp. *doble o triplemente periódica*). Las superficies periódicas se pueden considerar en el cociente  $\mathbb{R}^3/G$ , que es una variedad completa, llana y no simplemente conexa, de dimensión 3. De la clasificación de variedades completas y llanas de dimensión 3 que no son simplemente conexas (ver [75]), llegamos a que un recubridor finito de  $\mathbb{R}^3/G$  es isométrico a  $\mathbb{R}^3/S(\theta)$ ,  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  o  $\mathbb{T}^3$ , siendo  $S(\theta)$  un movimiento helicoidal de ángulo  $\theta \in [0, \pi]$  (es decir, la composición de una rotación de ángulo  $\theta$  alrededor de un eje con una traslación no trivial en la dirección de dicho eje),  $\mathbb{T}^2$  un toro llano de dimensión 2, y  $\mathbb{T}^3$  un toro llano de dimensión 3. No perdemos generalidad suponiendo que el eje  $r$  del posible movimiento helicoidal  $S(\theta)$  coincide con el eje  $x_3$ . Nótese que cuando  $\theta = 0$ ,  $T = S(0)$  no es más que una traslación vertical.

Recíprocamente, dado un grupo  $G$  y una superficie minimal propiamente embebida y no llana  $M \subset \mathbb{R}^3/G$ , el levantamiento  $\widetilde{M}$  de  $M$  a  $\mathbb{R}^3$  es una superficie minimal doblemente periódica, gracias al Teorema fuerte del semiespacio (dicho teorema nos asegura que el levantamiento  $\widetilde{M}$  es conexo, supuesto que  $M$  no es llana). Por tanto, equivale estudiar superficies minimales periódicas de  $\mathbb{R}^3$  y superficies minimales propiamente embebidas en los espacios cociente  $\mathbb{R}^3/G$  descritos anteriormente.

Sea  $M$  una superficie minimal propiamente embebida y no llana en uno de los espacios ambiente  $\mathbb{R}^3/T$ ,  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  o  $\mathbb{T}^3$ , y sea  $\widetilde{M}$  su levantamiento a  $\mathbb{R}^3$ . Como puntos homólogos en  $\widetilde{M}$  tienen el mismo plano tangente y el mismo vector normal, se induce una aplicación de Gauss bien definida en el cociente. De hecho, como comentamos en

la Sección 1.2, en estos espacios ambiente se tiene una representación de Weierstrass bien definida.

Observemos que toda superficie minimal  $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3$  periódica y no llana, tiene curvatura total infinita. Aunque al verla en  $\mathbb{R}^3/G$ , puede que  $M = \widetilde{M}/G$  sí tenga curvatura total finita, en cuyo caso sabemos por un Teorema de Huber [26] que la estructura conforme de  $M$  es la de una superficie de Riemann compacta y finitamente punteada. El recíproco, que no es cierto en  $\mathbb{R}^3$  (como pone de manifiesto el helicoides), fue probado en  $\mathbb{R}^3/G$  por Meeks y Rosenberg [44].

**Teorema 1.8.1** ([44]) *Sea  $M$  una superficie minimal propiamente embebida en una 3-variedad completa, llana y no simplemente conexa. Entonces,*

$$M \text{ tiene curvatura total finita} \Leftrightarrow M \text{ tiene topología finita.}$$

Como  $\mathbb{T}^3$  es un espacio compacto, todas las superficies minimales de  $\mathbb{T}^3$  serán también compactas, y por tanto no tienen finales. A partir de ahora, suponemos que no se da este caso; es decir, supondremos que  $\mathbb{R}^3/G$  es de la forma  $\mathbb{R}^3/S(\theta)$  o  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ . Sea  $M \subset \mathbb{R}^3/G$  una superficie minimal propiamente embebida y con topología finita. La estructura conforme de  $M$  es, por Huber, la de una superficie de Riemann compacta finitamente punteada,  $\mathbb{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$ ,  $r \geq 1$ . A esos puntos  $p_i$  (o, en ocasiones, a entornos de dichos puntos) los llamamos *finales* de  $M$ , como en la Sección 1.3. Meeks y Rosenberg [44, 42] han estudiado la geometría de  $M$  en sus finales (es decir, el comportamiento asintótico de  $M$ ).

**Teorema 1.8.2** ([44]) *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3/S(\theta)$  una superficie minimal propiamente embebida con topología finita, para cierto  $\theta \in [0, \pi]$ . Entonces, se da una de las siguientes alternativas:*

1. *Todos los finales de  $M$  son asintóticos a planos paralelos (se dice que los finales son planos), y se levantan a finales minimales planos en  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\theta \neq 0$ , entonces dichos planos han de ser horizontales (recordemos que estamos suponiendo que  $S(\theta)$  es un movimiento helicoidal alrededor del eje  $x_3$ ).*
2. *Todos los finales de  $M$  son asintóticos a anillos llanos verticales, y se levantan a finales minimales asintóticos a semiplanos de  $\mathbb{R}^3$  (en este caso, se dice que los finales son de tipo Scherk). Este caso sólo puede darse cuando  $\theta/\pi$  es un número racional.*
3. *Todos los finales de  $M$  son asintóticos a finales de helicoides verticales (y diremos que los finales de  $M$  son helicoidales o de tipo helicoides).*



**Teorema 1.8.3** ([42]) *Si  $M \subset \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  es una superficie minimal propiamente embebida, no llana y con topología finita, entonces sus finales son asintóticos a anillos llanos que se levantan a semiplanos de  $\mathbb{R}^3$  (diremos que los finales de  $M$  son de tipo Scherk).*

A continuación, damos algunos ejemplos de superficies minimales periódicas con los distintos comportamientos asintóticos descritos en los dos teoremas anteriores.

- ★ Los ejemplos minimales de Riemann, que son superficies minimales simplemente periódicas con finales planos (apartado 1 del Teorema 1.8.2, para  $\theta = 0$ ), ver la Figura 3 izquierda.
- ★ Las superficies de Scherk simplemente periódicas, que tienen finales de tipo Scherk (apartado 2 del Teorema 1.8.2), ver la Figura 2 izquierda. De aquí el nombre que se le da a los finales con este comportamiento.
- ★ El helicoides (apartado 3 del Teorema 1.8.2), ver la Figura 1 derecha.
- ★ Las superficies de Scherk doblemente periódicas (Teorema 1.8.2), ver la Figura 2 derecha.

Conocida la estructura conforme y la geometría de los cocientes de las superficies simple y doblemente periódicas de  $\mathbb{R}^3$ , el siguiente paso natural consiste en caracterizar los ejemplos conocidos. Hay importantes teoremas de unicidad de los ejemplos simple y doblemente periódicos nombrados en los puntos anteriores, algunos de los cuales enunciamos a continuación. Los Teoremas 1.8.4, 1.8.6 y 1.8.7 se han probado siguiendo la técnica descrita en la introducción, con ciertas modificaciones. Dicha técnica, original de Meeks, Pérez y Ros [41], es también la que usamos nosotros para probar el Teorema 2 de unicidad que enunciábamos en la introducción.

**Teorema 1.8.4** ([41]) *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3/T$ , siendo  $T$  una traslación de vector no nulo, una superficie minimal propiamente embebida, con género 1 y un número finito de finales planos. Entonces,  $M$  es un cociente de un ejemplo minimal de Riemann.*

**Teorema 1.8.5** ([52, 70]) *Para cualquier traslación no trivial  $T$ , la única superficie minimal propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3/T$ , con género 0 y un número finito de finales helicoidales, es el helicoides.*

**Teorema 1.8.6** ([55]) *Sea  $M$  una superficie minimal completa y embebida en  $\mathbb{R}^3/T$ , con género 0 y un número finito de finales de tipo Scherk, donde  $T = (0, 0, 1)$ . Entonces,  $M$  es una superficie de Scherk simplemente periódica o un “saddle tower” de Karcher (ver [30, 31] para la definición de los “saddle towers”).*

**Teorema 1.8.7 ([35])** *Sea  $M \subset \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  una superficie minimal propiamente embebida y con género 0, para algún toro llano  $\mathbb{T}^2$  de dimensión 2. Entonces,  $M$  es un cociente de una superficie de Scherk doblemente periódica. Además, la aplicación que le hace corresponder a cada superficie doblemente periódica de Scherk el ángulo  $\theta \in (0, \pi)$  entre sus finales no paralelos, es un difeomorfismo.*

Aunque no vamos a usar el siguiente resultado a lo largo de esta memoria, no nos resistimos a incluirlo en esta sección de teoremas de clasificación, ya que es uno de los teoremas más importantes de los últimos veinte años en la teoría de las superficies minimales. El caso periódico del resultado que sigue fue probado por Meeks y Rosenberg [44] en 1993. Recientemente, los mismos autores han demostrado el mismo resultado sin la hipótesis de periodicidad.

**Teorema 1.8.8 ([45])** *La única superficie minimal simplemente conexa, propiamente embebida y no llana de  $\mathbb{R}^3$  es el helicoides.*

Acabamos esta sección de superficies periódicas con el siguiente resultado de existencia de entornos tubulares para superficies minimales periódicas, cuya demostración es idéntica a la prueba del Lema 4 en [63].

**Lema 1.8.9** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie minimal periódica, con curvatura acotada y finales planos o de tipo Scherk, y sea  $c = \max |K|$ . Entonces, existe un entorno tubular de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  de radio  $1/\sqrt{c}$ .*

## 1.9. Superficies minimales doblemente periódicas

Recordemos que una superficie minimal  $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3$  es *doblemente periódica* si es propiamente embebida e invariante por dos traslaciones de vectores  $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^3$  linealmente independientes. Las traslaciones  $T_1$  y  $T_2$  generan un grupo  $\mathcal{P}$  de isometrías de  $\mathbb{R}^3$ , que actúa propia y discontinuamente, y que  $\widetilde{M}$  induce una superficie minimal  $M = \widetilde{M}/\mathcal{P}$  propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3/\mathcal{P} \equiv \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{T}$  denota un toro llano 2-dimensional. A los vectores  $T_1, T_2$  se les suele llamar *periodos* de  $\widetilde{M}$ , y a  $\mathcal{P}$  *retículo de periodos* de la superficie. Como dijimos en las Secciones 1.2 y 1.8, estudiar superficies minimales doblemente periódicas de  $\mathbb{R}^3$  equivale a estudiar superficies minimales propiamente embebidas en cocientes  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , donde se tiene definida una representación de Weierstrass. Recordemos que la estructura conforme de una superficie  $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  propiamente embebida y con topología finita, es la de una superficie de Riemann compacta finitamente punteada (Teorema 1.8.1). En este espacio ambiente  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , tenemos además un teorema para superficies propiamente

embebidas con curvatura total finita, análogo al Teorema 1.3.1 para superficies minimales completas con curvatura total finita. Denotaremos por  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  a la función meromorfa obtenida al componer la aplicación de Gauss  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  de  $M$  con la proyección estereográfica, a la cual seguiremos llamando aplicación de Gauss de  $M$  (recordemos que la aplicación de Gauss del levantamiento  $\widetilde{M}$  de  $M$  a  $\mathbb{R}^3$  inducía en el cociente una aplicación de Gauss bien definida para  $M$ ).

**Teorema 1.9.1 ([42])** *Sea  $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  una superficie minimal propiamente embebida y con curvatura total finita (o equivalentemente, con topología finita). Entonces,*

1.  *$M$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$ , siendo  $\mathbb{M}$  una superficie de Riemann compacta y  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{M}$ ,  $r \geq 1$  (a los puntos  $p_i$  se les suele llamar finales de  $M$ ). En particular, la característica de Euler  $\chi(M)$  de  $M$  viene dada por*

$$\chi(M) = 2 - 2 \text{género}(M) - r,$$

*donde se define el género de  $M$  como el género de  $\mathbb{M}$ .*

2. *Tanto la aplicación de Gauss  $g$  como la diferencial altura  $dh$  extienden de forma meromorfa a todo  $\mathbb{M}$ . Además,*

$$C(M) = -4\pi \text{grado}(g),$$

*donde definimos el grado de  $g$  como el grado de su extensión a  $\mathbb{M}$  (seguimos denotando por  $g$  a dicha extensión).*

En la situación del Teorema 1.9.1, supongamos que el retículo de periodos  $\mathcal{P}$  de  $M$  es horizontal. Denotaremos por  $x_3 : M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a la proyección de la inclusión  $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  sobre el factor  $\mathbb{R}$  (y la llamaremos *tercera función coordenada* de  $M$ ), que es una función armónica univaluada sobre  $M$ . Como  $\mathbb{T}$  es compacto y  $M$  propia,  $x_3$  diverge a  $\pm\infty$  en cada final de  $M$ . Podemos distinguir dos tipos de finales: *finales superiores* y *finales inferiores*, dependiendo respectivamente de si  $x_3$  tiende a  $+\infty$  o  $-\infty$  en el final. Todos los finales superiores (resp. inferiores) son paralelos entre sí, ya que  $M$  es embebida y éstos son finales de tipo Scherk (ver el Teorema 1.8.3). Además, como estamos suponiendo la superficie orientable, debe haber un número de par de finales superiores (resp. inferiores). En particular, la superficie tiene un número par de finales mayor o igual a 4 (por el Principio del máximo,  $M$  tiene que tener al menos un final superior y uno inferior). El siguiente teorema recoge información adicional sobre la geometría global de una superficie minimal propiamente embebida en  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  y con curvatura total finita.

**Teorema 1.9.2** ([42]) *Sea  $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  una superficie minimal propiamente embebida con curvatura total finita. Entonces,*

1. *La curvatura total de  $M$  viene dada por*

$$C(M) = 2\pi \chi(M),$$

*donde  $\chi(M)$  denota la característica de Euler de  $M$ .*

2. *Se puede parametrizar conformemente  $M$  alrededor de cada uno de sus finales por el disco unidad punteado  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\}$ , de forma que  $x_3(z) = c \ln |z| + c'$ , con  $c, c' \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ .*
3. *Los finales superiores (resp. inferiores) de  $M$ , que sabemos que son de tipo Scherk, son asintóticos a anillos llanos paralelos, todos ellos distintos.*
4. *Si los finales superiores son paralelos a los inferiores, entonces el número de finales superiores coincide con el número de finales inferiores; en particular, el número de finales de  $M$  es un múltiplo de 4.*
5. *Si los finales de  $M$  no son paralelos, entonces los normales límite de  $M$  en sus finales son horizontales. Además, el cociente de las longitudes de dos generadores del retículo de periodos de  $M$  es un número racional.*

**Observación 1.9.3** *Sea  $M$  una superficie minimal en las condiciones del Teorema 1.9.2. En la parametrización alrededor de los finales de  $M$  descrita en el apartado 2 de dicho teorema, la diferencial altura se escribe como  $dh = c \frac{dz}{z}$ . Usando la expresión de la métrica (1.4), y teniendo en cuenta que los finales no son ni ceros ni polos de  $g$  (ya que estamos suponiendo que  $\mathcal{P}$  es horizontal), llegamos a que  $ds^2$  tiene un polo doble en el final.*

El siguiente nos dice que si  $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  es una superficie minimal propiamente embebida, entonces tiene un número finito de finales.

**Teorema 1.9.4** ([40]) *Toda superficie minimal propiamente embebida en  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  tiene un número finito de finales.*

Por lo tanto, si  $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  es una superficie minimal propiamente embebida,

$M$  tiene curvatura total finita  $\Leftrightarrow M$  tiene topología finita  $\Leftrightarrow M$  tiene género finito.

El caso más sencillo que aparece en este ambiente es, por tanto, el de una superficie minimal  $M$  de  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  propiamente embebida y con género cero. El Teorema 1.8.7 nos dice que la única posibilidad para una tal  $M$  es que sea un cociente de una superficie de Scherk doblemente periódica. Nos planteamos, por tanto, qué sucede cuando  $M$  tiene género 1. Aquí se conocen algunos ejemplos, tanto con finales paralelos ([30, 42]) como con finales no paralelos ([21]). Nosotros nos vamos a centrar en el caso en el que los finales de  $M$  son paralelos, e intentaremos describir todas las superficies minimales  $M$  en estas condiciones. Por el apartado 4 del Teorema 1.9.2, sabemos que  $M$  tiene un número de finales que es múltiplo de 4.

Ahora que hemos descrito el problema que nos interesa, vamos a hacer ciertas normalizaciones sobre las superficies a considerar. Para  $k \in \mathbb{N}$  fijo, denotaremos por  $\mathcal{S}$  el espacio de las superficies minimales propiamente embebidas en cocientes doblemente periódicos de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^3/\mathcal{P} \equiv \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  para cierto toro 2-dimensional  $\mathbb{T}$  (que depende de la superficie), con género 1 y  $4k$  finales horizontales de tipo Scherk. Nótese que al tomar los finales horizontales,  $\mathcal{P}$  no puede ser un retículo horizontal, y por tanto el factor  $\mathbb{R}$  en la 3-variedad ambiente  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  no es ya vertical; esto es,  $x_3$  no es univaluada sobre  $M$  (pero la función altura de  $\mathbb{R}^3$  ortogonal al retículo  $\mathcal{P}$  sí que induce una función univaluada sobre  $M$ ). Normalizamos las superficies en  $\mathcal{S}$  para que uno de los generadores de sus retículos de periodos  $\mathcal{P}$  apunte en la dirección del eje  $x_2$ .

Dada  $M \in \mathcal{S}$ , recordemos que estamos denotando respectivamente por  $P_\Gamma \in \mathcal{P}$  y  $F_\Gamma$  a los vectores periodo y flujo de  $M$  a lo largo de una curva cerrada y orientada  $\Gamma \subset M$  (ver la Sección 1.2), que sabemos dependen de la clase de homología de  $\Gamma$  en  $M$ . Los vectores periodo  $H$  y flujo  $F$  en un final de  $M$  (definidos como los vectores periodo y flujo a lo largo de pequeños lazos alrededor del final, con el conormal interior al disco que contiene el final) son horizontales y están relacionados por la ecuación  $F = H \wedge N_0$ , donde  $N_0$  es el normal límite (vertical) en el final. En particular,  $H$  es horizontal. Como hemos normalizado para que uno de los generadores de  $\mathcal{P}$  apunte en la dirección del eje  $x_2$ , deducimos que  $H$  es de la forma  $H = \pm(0, \pi a, 0)$ , para cierto  $a > 0$ ; y por tanto,  $F = \pm(\pi a, 0, 0)$ . Decimos que el final de  $M$  es un *final izquierda* si  $F = (-\pi a, 0, 0)$ , y es un *final derecha* si  $F = (\pi a, 0, 0)$  (observemos que estos nuevos conceptos de finales izquierda y derecha sustituyen a los que teníamos anteriormente de finales superiores e inferiores). Como  $M$  es una superficie embebida, cada familia de finales izquierda (resp. finales derecha) se puede ordenar de forma natural por alturas. De hecho, la distancia entre dos finales izquierda (resp. derecha) consecutivos es estrictamente positiva por el Principio del máximo en el infinito (Teorema 1.4.3), y un argumento de separación nos dice además que sus normales límite son opuestos.

Denotaremos por  $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  a la aplicación de Gauss de  $M$  (proyectada estereográficamente). Como  $M$  tiene curvatura total finita, el Teorema 1.9.1 nos asegura que  $g$  se extiende de forma holomorfa (meromorfa, si consideramos  $g$  valuada en  $\mathbb{C}$ ) al toro conforme  $\mathbb{M}$  obtenido al unirle a  $M$  sus finales. Claramente,  $g$  toma los valores  $0, \infty$  en los finales de  $M$ . Por otro lado, como el retículo de periodos  $\mathcal{P}$  no es horizontal, la tercera función coordenada  $x_3$  del levantamiento  $\widetilde{M}$  de  $M$  a  $\mathbb{R}^3$ , es una función multivaluada sobre  $M$ , aunque la *diferencial altura*  $dh = \frac{\partial x_3}{\partial z} dz$  define una diferencial meromorfa univaluada sobre  $M$  (aquí,  $z$  es una coordenada holomorfa sobre  $M$ ). Como  $M$  tiene curvatura total finita y finales horizontales,  $dh$  se extiende a una diferencial holomorfa sobre  $\mathbb{M}$ .

El siguiente resultado recoge propiedades elementales de cada superficie  $M \in \mathcal{S}$ . Denotaremos por  $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3$  a la superficie minimal (conexa) doblemente periódica obtenida al levantar  $M$ . Y dado  $v \in \mathcal{P} - \{\vec{0}\}$ ,  $\widetilde{M}/v$  será la superficie simplemente periódica obtenida al hacer cociente de  $\widetilde{M}$  por la traslación de vector  $v$ . En la siguiente proposición,  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  denotará un plano horizontal.

**Proposición 1.9.5** *Dada  $M \in \mathcal{S}$ , se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *La aplicación de Gauss  $g : \mathbb{M} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  tiene grado  $2k$  y número total de ramificación  $4k$ . Además,  $g$  no toma direcciones verticales sobre  $M$ , y no es ramificada en los finales de  $M$ .*
2. *Los vectores periodo en los finales de  $M$  coinciden salvo signo. Denotamos por  $H = \pm(0, \pi a, 0)$ , con  $a > 0$ , a dicho periodo en los finales. Entonces, el retículo de periodos  $\mathcal{P}$  de  $\widetilde{M}$  está generado por  $H$  y por otro vector  $T \in \mathbb{R}^3$  no horizontal, siendo  $T$  el periodo de  $M$  a lo largo de una curva cerrada  $\gamma_1 \subset M$  cuya clase de homología es no nula en  $H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$ .*
3. *Si denotamos por  $\mathcal{E}$  al conjunto de finales de tipo Scherk de  $\widetilde{M}/H$ , entonces  $(\widetilde{M}/H) \cup \mathcal{E}$  es conforme a  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ , y su diferencial altura puede escribirse sobre  $\mathbb{C}^*$  como  $dh = c \frac{dz}{z}$ , para cierto  $c \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ .*
4. *Si  $\Pi/H$  no es asintótico a ningún final en  $\mathcal{E}$ , entonces el corte  $(\widetilde{M} \cap \Pi)/H$  es transversal y conexo. Además, el vector periodo de  $\widetilde{M}/H$  a lo largo de  $(\widetilde{M} \cap \Pi)/H$  vale  $\vec{0}$  o  $\pm H$ .*
5. *Dividimos los finales de  $\mathcal{E}$  en finales izquierda y finales derecha, dependiendo de si el flujo en el correspondiente final (con el conormal interior al disco que contiene al final) es  $(a, 0, 0)$  o  $(-a, 0, 0)$ , respectivamente. Si  $\Pi/H$  es asintótico a un final en  $\mathcal{E}$ , entonces  $(\widetilde{M} \cap \Pi)/H$  consiste o bien en un arco  $\Gamma$  propiamente*

embebido, en cuyo caso los dos extremos de  $\Gamma$  divergen al mismo final en  $\mathcal{E}$ ; o bien en dos arcos propiamente embebidos, ambos uniendo un final izquierda con un final derecha de  $\mathcal{E}$ .

6. Existe una curva  $\gamma_2 \subset M$  embebida y cerrada tal que  $\{[\gamma_1], [\gamma_2]\}$  forman una base de homología de  $H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$ , y además  $P_{\gamma_2} = \vec{0}$ . Salvo orientación,  $\gamma_2$  representa la única clase de homología no trivial en  $H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$  con periodo cero y un representante embebido.
7. Sea  $[\gamma] \in H_1(M, \mathbb{Z})$  la clase de homología con un representante embebido que genera el grupo de homología de  $(\widetilde{M}/H) \cup \mathcal{E}$ . Entonces, la tercera componente  $(F_\gamma)_3$  del flujo de  $M$  a lo largo de  $[\gamma]$  ni se anula ni depende de  $[\gamma]$  (salvo orientación).

*Demostración.* Estamos suponiendo que los finales son horizontales, luego son ceros y/o polos de la aplicación de Gauss  $g$  de  $M$ . Como  $dh$  no tiene polos en el toro  $\mathbb{M}$ , entonces no puede tener tampoco ceros (ya que sobre un toro, una 1-forma meromorfa tiene el mismo número de ceros que de polos). Teniendo en cuenta la expresión (1.4) de la métrica de  $M$  en función de sus datos de Weierstrass, deducimos que los únicos ceros y polos de  $g$  son los finales; y por la Observación 1.9.3,  $g$  no puede ser ramificada en los finales (ya que éstos no son ceros de la diferencial altura). Finalmente, como  $M$  tiene  $4k$  finales, deducimos que el grado de  $g$  es  $2k$ , y por la fórmula de Riemann-Hurwitz, el número total de ramificación de  $g$  es  $4k$ . Esto prueba 1.

Denotemos por  $T_1, T_2$  dos generadores de  $\mathcal{P}$ , siendo  $T_2$  horizontal. Como los finales de  $M$  son horizontales,  $T_1$  no puede ser horizontal. Por tanto,  $T_1$  es el vector periodo de  $M$  a lo largo de una curva cerrada  $\gamma_1 \subset M$  con  $[\gamma_1] \neq 0$  en  $H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$ , y el vector periodo en cada final  $E$  de  $M$  es de la forma  $H = nT_2$ , para cierto  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Si probamos que  $n = \pm 1$ , habremos acabado la demostración del apartado 2, tomando  $T = T_1$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $|n| \geq 2$ , y sea  $\Omega$  el levantamiento a  $\mathbb{R}^3$  de un representante del final  $E$ . Para cada  $d \in \mathbb{R}$ , podemos considerar un plano vertical  $P = \{x_1 = d\} \subset \mathbb{R}^3$  que contenga un vector paralelo a  $H$ . Tomando  $|d|$  suficientemente grande, podemos asegurar que  $P/H$  corta transversalmente a  $\Omega/H$ , y que  $(P \cap \Omega)/H$  consiste en una curva cerrada y embebida  $\Lambda$  que genera el grupo de homología de  $P/H$ . Es más,  $\Lambda$  se puede ver como el cociente por  $H$  de una curva arbitrariamente próxima una recta horizontal contenida en  $P$ , de la forma  $\widetilde{\Lambda}(x) = (d, x, f(x))$ , siendo  $f = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función periódica, de periodo  $|H|$ . Supongamos que  $f(x) \neq f(x - |T_2|)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . No perdemos generalidad suponiendo que  $f(x) < f(x - |T_2|)$  siempre. Tomamos  $x_0 \in \mathbb{R}$  cumpliendo que  $f(x_0 - |T_2|) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x - |T_2|) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ . Pero entonces,

llegamos a que  $f(x_0) < \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ , contradicción. Por tanto, existe cierto  $x \in \mathbb{R}$  para el cual  $f(x - |T_2|) = f(x)$ . Como  $M$  es una superficie embebida, deducimos que  $f(x - |T_2|) = f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Es decir, que  $|T_2|$  es un periodo de  $f$ , luego  $\Lambda + T_2 = \Lambda$ . Así, la restricción a  $\Omega$  de aplicación de Gauss de  $\widetilde{M}$  induce una aplicación bien definida en el cociente por  $T_2$ ,  $g : \Omega/T_2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ . Nótese que  $\Omega/T_2$  es conformemente un disco menos su centro, al que llamaremos  $q$ , y que  $g(q) \in \{0, \infty\}$ . Como  $|n| \geq 2$ , esto implica que la aplicación de Gauss de  $E = \widetilde{E}/H$  tiene número de ramificación mayor o igual que  $|n| - 1 > 0$  en el final  $E$ . Pero esto no es posible, ya que la aplicación de Gauss  $g$  de  $M$  no es ramificada en los finales. Esta contradicción prueba el apartado 2 de la proposición.

Como  $M$  es conformemente un toro finitamente punteado, la superficie simplemente periódica  $\widetilde{M}/H$  es conformemente un cilindro infinitamente punteado. La tercera función coordenada  $x_3$  es una función armónica bien definida sobre  $\widetilde{M}/H$ , que se extiende de forma diferenciable a  $\mathcal{E}$ . Así, obtenemos una función armónica y propia sobre  $(\widetilde{M}/H) \cup \mathcal{E}$ . Por tanto,  $(\widetilde{M}/H) \cup \mathcal{E}$  es conformemente  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ , y  $x_3(z) = c \ln |z| + c'$  sobre  $\mathbb{C}^*$ , donde  $c \in \mathbb{R}^*$  y  $c' \in \mathbb{R}$ . Esto acaba el tercer apartado de la proposición.

La anterior descripción de  $x_3$  implica que  $(\widetilde{M} \cap \Pi)/H$  se corresponde en  $\mathbb{C}^*$  con un círculo  $C_r = \{|z| = r\}$  posiblemente punteado, para cierto  $r > 0$ . Las hipótesis en el apartado 4 de la proposición se corresponden con el caso en el que  $C_r$  no contiene finales en  $\mathcal{E}$ . De aquí, se deduce inmediatamente 4. Bajo las hipótesis de 5,  $C_r$  contiene a lo más dos finales en  $\mathcal{E}$ : uno izquierda y/o uno derecha, ya que los finales izquierda (resp. derecha) está separados por una distancia estrictamente positiva. De esto, se deduce directamente 5.

Para probar 6, tomemos una curva cerrada  $\beta \subset M$  a altura constante. Sabemos que  $\beta$  genera el grupo de homología de  $(\widetilde{M}/H) \cup \mathcal{E} = \mathbb{C}^*$ . Como el vector periodo  $T = P_{\gamma_1}$  no es horizontal, concluimos que  $\{[\gamma_1], [\beta]\}$  es base de  $H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$ . Si  $P_\beta = \vec{0}$ , entonces se cumple la primera afirmación del apartado 6 de la proposición, con  $\gamma_2 = \beta$ . Si  $P_\beta \neq \vec{0}$ , entonces  $P_\beta = \pm H$  por el apartado 4 anteriormente probado, y entonces elegimos como  $\gamma_2$  una curva cerrada embebida en  $M$  que sea homóloga a  $\beta$  en  $\mathbb{C}^*$ , y tal que el dominio acotado de  $\mathbb{C}^*$  encerrado por  $\beta \cup \gamma_2$  contenga sólo un final de  $M$ , y que el vector periodo en dicho final sea  $-P_\beta$ . Finalmente, probemos la unicidad que aparece en el apartado 6. Supongamos que  $[\Gamma] \in H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z}) - \{0\}$  tiene un representante  $\Gamma$  embebido (que podemos asumir contenido en  $M$ ), con  $P_\Gamma = \vec{0}$ . Como  $H_1(M, \mathbb{Z})$  está generado por  $\gamma_1, \gamma_2$  y pequeños lazos  $\alpha_1, \dots, \alpha_{4k}$  alrededor de los finales, entonces

$$[\Gamma] = a_1[\gamma_1] + a_2[\gamma_2] + \sum_{j=1}^{4k} b_j[\alpha_j] \quad \text{en } H_1(M, \mathbb{Z}) \quad (1.12)$$



para ciertos  $a_1, a_2, b_1, \dots, b_{4k} \in \mathbb{Z}$ . Tomando periodos en (1.12), y teniendo en cuenta que  $P_{\gamma_1} = T$  y que el vector periodo en los finales es  $\pm H$ , obtenemos que  $\vec{0} = a_1 T + bH$ , donde  $b \in \mathbb{Z}$ . Como  $T, H$  son linealmente independientes, deducimos que  $a_1 = 0$ . Ahora, (1.12) implica que  $[\Gamma] = a_2[\gamma_2]$  en  $H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$ ; y como estamos suponiendo que  $\Gamma$  es embebida, entonces  $a_2 = \pm 1$ , lo cual prueba 6.

Finalmente, recordemos que anteriormente hemos probado que cualquier sección horizontal compacta  $\beta$  de  $M$  es una curva cerrada embebida tal que  $\{[\gamma_1], [\beta]\}$  forma una base de  $H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$ . Como la tercera coordenada del conormal de  $M$  a lo largo de  $\beta$  tiene signo constante (ya que  $M$  no contiene puntos con normal vertical), entonces  $(F_\beta)_3 \neq 0$ . Nótese que si  $\gamma \subset M$  es una curva cerrada, embebida y homóloga a  $\beta$  en  $(\widetilde{M}/H) \cup \mathcal{E}$ , entonces  $\gamma \cup \beta$  encierra un número finito de finales en  $\mathcal{E}$ , cuyos flujos son todos horizontales. De aquí deducimos que  $(F_\gamma)_3 = (F_\beta)_3$ , y la proposición queda probada.  $\square$

### Observación 1.9.6

- (i) *En general, no podemos esperar que la curva  $\gamma_2$  que aparece en el apartado 6 de la proposición anterior sea una sección horizontal compacta de  $M$ , como pone de manifiesto el ejemplo KMR  $M_{\theta, \frac{\pi}{2}, 0}$  que se estudiará en el Capítulo 2, cuyas secciones horizontales son todas arcos abiertos cuando las vemos en  $\mathbb{R}^3$  (ver Figura 2.7 derecha).*
- (ii) *Con la notación de la Proposición 1.9.5, el hecho de que todos los flujos en los finales de  $M \in \mathcal{S}$  apunten en la dirección del eje  $x_1$ , implica que la segunda componente  $(F_\gamma)_2$  del flujo de  $M$  a lo largo de  $\gamma$  no dependa (salvo orientación) de la clase de homología  $[\gamma] \in H_1(M, \mathbb{Z})$  en las hipótesis del apartado 7 de la Proposición 1.9.5.*

Dada una superficie  $M$  en  $\mathcal{S}$ , la Proposición 1.9.5 destaca una clase de homología no trivial en  $H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$  con un representante embebido  $\gamma_2 \subset M$ , tal que  $P_{\gamma_2} = \vec{0}$  y  $(F_{\gamma_2})_3 > 0$ . En lo que sigue, normalizaremos las superficies en  $\mathcal{S}$  para que sea  $(F_{\gamma_2})_3 = 2\pi$ , lo cual se puede conseguir tras una homotecia. Observemos que dicha normalización no depende de la clase de homología  $[\gamma_2] \in H_1(M, \mathbb{Z})$  (salvo orientación), ver apartado 7 de la Proposición 1.9.5.

**Definición 1.9.7** Denotamos por  $\widetilde{\mathcal{S}}$  el conjunto de *superficies marcadas*, que son listas de la forma  $(M, p_1, \dots, p_{2k}, q_1, \dots, q_{2k}, [\gamma_2])$ , donde

1.  $M$  es una superficie en  $\mathcal{S}$  cuyo retículo de periodos está generado por  $H, T \in \mathbb{R}^3$ , con  $H = (0, a, 0)$  y  $T = (T_1, T_2, T_3)$  para ciertos  $a, T_3 > 0$ ;

2. Si  $g^{-1}(0) = \{p_1, \dots, p_{2k}\}$  y  $g^{-1}(\infty) = \{q_1, \dots, q_{2k}\}$ , entonces las listas ordenadas  $(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k)$ ,  $(p_{k+1}, q_{k+1}, \dots, p_{2k}, q_{2k})$  son las dos familias de finales a izquierda y a derecha de  $M$ , ambas ordenadas por alturas en el cociente, de forma creciente y cíclica;
3.  $[\gamma_2] \in H_1(M, \mathbb{Z})$  es la clase de homología de una curva cerrada  $\gamma_2$  embebida en  $M$ , cumpliendo  $P_{\gamma_2} = \vec{0}$  y  $(F_{\gamma_2})_3 = 2\pi$ . Además, imponemos que  $\gamma_2$  se levante a una curva contenida en un dominio fundamental del levantamiento  $\widetilde{M}$  doblemente periódico de  $M$  comprendido entre dos planos horizontales  $\Pi, \Pi + T$ .

Identificaremos dos superficies marcadas en  $\widetilde{\mathcal{S}}$  que difieran en una traslación, que preserve tanto la orientación, como las familias de finales izquierda y derecha, y las clases de homología en la última componente. Nótese que una misma superficie geométrica en  $\mathcal{S}$  puede producir distintas superficies marcadas en  $\widetilde{\mathcal{S}}$ , sin más que considerar distintos órdenes admisibles en las familias de finales asociadas, o una clase de homología distinta en la última componente de la superficie marcada. Abreviaremos notación escribiendo  $M = (M, p_1, \dots, p_{2k}, q_1, \dots, q_{2k}, [\gamma_2]) \in \widetilde{\mathcal{S}}$ , siempre y cuándo no lleve a confusión. De forma natural, podemos dotar a  $\mathcal{S}$  con la siguiente topología: una sucesión de superficies marcadas  $\{M_n\}_n \subset \widetilde{\mathcal{S}}$  converge a  $M \in \widetilde{\mathcal{S}}$  si la sucesión de superficies minimales asociada  $\{M_n\}_n \subset \mathcal{S}$  converge uniformemente en subconjuntos compactos a  $M \in \mathcal{S}$ , las listas de finales asociadas a las  $M_n$  convergen a la lista de finales asociada a  $M$ , y las clases de homología  $[\gamma_{2,n}] \in H_1(M_n, \mathbb{Z})$  en la última componente de las superficies marcadas  $M_n$  tienen representantes que convergen uniformemente a un representante de la clase de homología en la última componente de  $M$ , como superficie marcada. En esta topología, una superficie geométrica  $M \in \mathcal{S}$  produce un número discreto de superficies marcadas en  $\widetilde{\mathcal{S}}$ .

Sea  $M \in \widetilde{\mathcal{S}}$  con aplicación de Gauss  $g$  y diferencial altura  $dh$ . Un cálculo elemental nos da los periodos  $P_{p_j}, P_{q_j}$  y flujos  $F_{p_j}, F_{q_j}$  de  $M$  en los finales como sigue:

$$P_{p_j} + i F_{p_j} = \pi \operatorname{Res}_{p_j} \left( \frac{dh}{g} \right) (i, -1, 0), \quad P_{q_j} + i F_{q_j} = -\pi \operatorname{Res}_{q_j} (g dh) (i, 1, 0), \quad (1.13)$$

donde  $\operatorname{Res}_A$  denota el residuo de la correspondiente diferencial meromorfa en el punto  $A$ . El hecho de que  $P_{p_j}, P_{q_j}$  apunten en la dirección del eje  $x_2$  se traduce en que  $\operatorname{Res}_{p_j} (g^{-1} dh), \operatorname{Res}_{q_j} (g dh) \in \mathbb{R}$ . Y teniendo en cuenta el orden de los finales de  $M$  como superficie marcada, tenemos

$$\operatorname{Res}_{p_j} \left( \frac{dh}{g} \right) = -\operatorname{Res}_{q_j} (g dh) = \begin{cases} a & (1 \leq j \leq k) \\ -a & (k+1 \leq j \leq 2k), \end{cases} \quad (1.14)$$

para cierto  $a \in \mathbb{R}^*$  (si  $a > 0$ , entonces  $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k$  son los finales derecha de  $M$ ). Recordemos que  $P_{\gamma_2} = \vec{0}$  y  $(F_{\gamma_2})_3 = 2\pi$ . Entonces,

$$\overline{\int_{\gamma_2} \frac{dh}{g}} = \int_{\gamma_2} g dh, \quad \int_{\gamma_2} dh = 2\pi i. \quad (1.15)$$

## 1.10. Algunos resultados sobre el operador de Jacobi

Sea  $M \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  una superficie minimal orientada, embebida, completa y con curvatura total finita, y sea  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  su aplicación de Gauss. Por el Teorema 1.9.1 sabemos que  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\mathbb{M}$  menos una cantidad finita de puntos, que se identifican con los finales de  $M$ , y que la aplicación de Gauss  $N$  se extiende a una aplicación holomorfa  $N : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Denotamos por  $ds^2$  la métrica inducida en  $M$  de la métrica llana de  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ . Un teorema de Hauswirth y Traizet [18] (ver también Pérez y Ros [53]) asegura la existencia de una métrica  $d\bar{s}^2$  en  $\mathbb{M}$  para la cual se puede escribir  $ds^2 = \lambda^2 d\bar{s}^2$ , donde  $\lambda$  es una función diferenciable definida en  $M$  y que diverge en los finales de  $M$ . Consideramos el operador lineal elíptico y autoadjunto

$$\bar{L} = \bar{\Delta} + |\bar{\nabla}N|^2$$

definido sobre  $C^\infty(\mathbb{M})$ , donde estamos denotando respectivamente por  $\bar{\Delta}$  y  $\bar{\nabla}$  los operadores laplaciano y gradiente asociados a la métrica  $d\bar{s}^2$ . No es difícil probar que  $\bar{L} = \lambda^2 L$ , donde  $L = \Delta - 2K$  es el operador de Jacobi clásico definido en  $M$  (aquí,  $\Delta$  es el laplaciano en  $M$  respecto de  $ds^2$ , y  $K$  su curvatura de Gauss). Definimos el *espacio nulidad* de  $\bar{L}$  como

$$\mathcal{N}(\bar{L}) = \ker(\bar{L}) = \{u \in C^\infty(\mathbb{M}) \mid \bar{L}u = \bar{\Delta}u + |\bar{\nabla}N|^2 u = 0\}.$$

Por regularidad elíptica, toda función de Jacobi\* sobre  $M$  que sea acotada, extiende a una función en  $\mathcal{N}(\bar{L})$ , y por tanto  $\mathcal{N}(\bar{L})$  coincide con el espacio de funciones de Jacobi acotadas sobre  $M$ . Por la holomorfía de  $N$ , se cumple que  $\bar{\Delta}N + |\bar{\nabla}N|^2 N = 0$ . De donde deducimos que las combinaciones lineales de las componentes de  $N$  son funciones de Jacobi en  $\mathcal{N}(\bar{L})$ ; es decir,

$$\mathcal{L}(N) = \{\langle N, a \rangle \mid a \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathcal{N}(\bar{L}).$$

Sea  $\mathcal{B}(N) \subset \mathbb{M}$  el conjunto de puntos de ramificación de  $N$ , y sea  $\mathcal{M}(N)$  el espacio vectorial formado por todas las inmersiones minimales, posiblemente ramificadas,  $X : \mathbb{M} - \mathcal{B}(N) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , completas y con curvatura total finita (incluyendo las

---

\*Una función  $u \in C^\infty(M)$  se dice de Jacobi si cumple  $Lu = 0$ .

aplicaciones constantes), cuya aplicación de Gauss coincide con  $N$ . Nótese que, a partir de una aplicación holomorfa cualquiera  $N : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$  sobre una superficie de Riemann compacta, se pueden definir los espacios  $\mathcal{N}(N)$ ,  $\mathcal{L}(N)$ ,  $\mathcal{M}(N)$  anteriores de forma análoga. El siguiente teorema de Montiel y Ros [48] nos da la relación entre los espacios  $\mathcal{N}(N)$  y  $\mathcal{M}(N)$ , en el caso general de cualquier aplicación holomorfa  $N : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$ .

**Teorema 1.10.1 ([48])** *Dadas una superficie de Riemann compacta  $\mathbb{M}$  y una aplicación holomorfa  $N : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , existe una aplicación lineal que le hace corresponder a cada  $u \in \mathcal{N}(N)$ , una inmersión minimal  $X_u \in \mathcal{M}(N)$  cuya función soporte es  $u$  (i.e.  $\langle X_u, N \rangle = u$ ), y dicha aplicación lineal cumple que  $u \in \mathcal{L}(N)$  si, y sólo si,  $X_u$  es constante; Además, esta aplicación lineal induce un isomorfismo*

$$\mathcal{N}(N)/\mathcal{L}(N) \cong \mathcal{M}(N)/\{\text{constantes}\}.$$

Usando este tipo de técnicas, Montiel y Ros probaron también el siguiente resultado:

**Teorema 1.10.2 ([48])** *Sea  $N : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$  una función holomorfa definida sobre una superficie de Riemann compacta  $M$ . Si los valores de ramificación de  $N$  están contenidos en un ecuador esférico, entonces  $\mathcal{N}(N) = \mathcal{L}(N)$ .*

# Capítulo 2

## Construcción de los ejemplos KMR

Dedicamos esta sección a la construcción de la familia 3-paramétrica  $\mathcal{K}$  que aparece en el Teorema 1. Denotaremos por  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  a las superficies en  $\mathcal{K}$ , y las llamaremos *ejemplos KMR*. Cada  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  será una superficie minimal doblemente periódica de  $\mathbb{R}^3$ , con 4 finales horizontales y género 1 en el cociente; y por tanto, con 4 valores de ramificación, que no coinciden con los Polos Norte y Sur, ya que estamos asumiendo que los finales son horizontales y no son ramificados. Tomaremos parejas de puntos antipodales  $D'' = -D$ ,  $D''' = -D'$  en  $\mathbb{S}^2$ , a partir de los cuales construiremos los ejemplos KMR, cuyos valores de ramificación serán esos cuatro puntos  $D, D', D'', D'''$ . Denotaremos por  $e \subset \mathbb{S}^2$  al ecuador que contiene a  $D, D', D'', D'''$ , y por  $P \in e$  al punto que biseca el ángulo  $2\theta$  entre  $D$  y  $D'$ ,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , ver la Figura 2.3 izquierda. Llamaremos *configuración esférica* a  $\{D, D', D'', D'''\}$  cumpliendo lo anterior.

### 2.1. Construcción de los ejemplos $M_{\theta,0,0}$

Los ejemplos  $M_{\theta,0,0}$  que vamos a construir en esta sección se corresponden con los dados por Karcher en [30], a los cuales bautizó con el nombre de *toroidal halfplane layers*.

Con la notación anterior y para  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  fijo, tomamos el ecuador  $e$  como la preimagen por la proyección estereográfica (desde el Polo Norte) del eje imaginario  $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , y  $P = (0, 0, 1)$ , ver Figura 2.1 izquierda. Proyectando estereográficamente, obtenemos

$$D = -\lambda i, \quad \text{con } \lambda = \lambda(\theta) = \cot \frac{\theta}{2}.$$

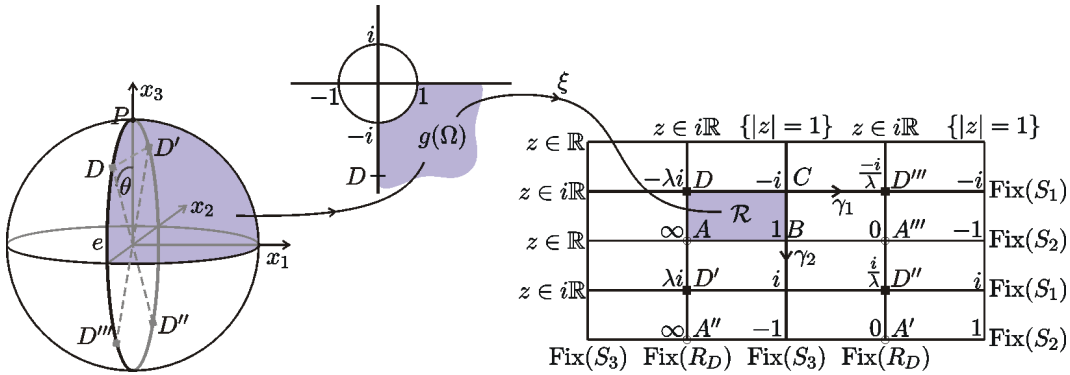


Figura 2.1: Izquierda: Configuración esférica de  $M_{\theta,0,0}$ . Centro: El biholomorfismo  $\xi$  entre las regiones sombreadas  $g(\Omega)$  y  $\mathcal{R}$ . Derecha: El toro conforme  $\Sigma_\theta$ , donde  $\text{Fix}(\star)$  denota el conjunto de puntos fijos de  $\star$ .

Los demás valores de ramificación de la aplicación de Gauss de  $M_{\theta,0,0}$  coinciden con las cuatro raíces del polinomio  $(z^2 + \lambda^2)(z^2 + \lambda^{-2})$ . Por tanto, la compactificación conforme de la superficie  $M_{\theta,0,0}$  que queremos construir es el toro rectangular

$$\Sigma_\theta = \left\{ (z, w) \in \overline{\mathbb{C}^2} \mid w^2 = (z^2 + \lambda^2)(z^2 + \lambda^{-2}) \right\}, \quad (2.1)$$

y la aplicación de Gauss de  $M_{\theta,0,0}$  extendida a  $\Sigma_\theta$  es la aplicación  $g(z, w) = z$ , de grado 2. Como asumimos que los finales de  $M_{\theta,0,0}$  son horizontales, éstos se corresponden con  $(0, \pm 1), (\infty, \pm \infty) \in \Sigma_\theta$ . Finalmente, sabemos que el espacio de 1- formas holomorfas sobre  $\Sigma_\theta$  tiene dimensión compleja 1 y que  $dz/w$  es un generador de dicho espacio. Deducimos entonces que la diferencial altura de  $M_{\theta,0,0}$  es de la forma  $dh = \mu dz/w$ , para cierto  $\mu = \mu(\theta) \in \mathbb{C}^*$  a determinar. En lo que sigue, tomamos  $\mu \in \mathbb{R}^*$ . Comprobaremos que los datos de Weierstrass  $(g, dh)$  así definidos cierran periodos.

Nos será útil trabajar con un modelo de  $\Sigma_\theta$  obtenido como cociente del  $\xi$ -plano  $\mathbb{C}$  por un retículo rectangular. Sea  $\Omega \subset \Sigma_\theta$  una de las dos componentes conexas de  $g^{-1}(\{|z| > 1, -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < 0\})$ . Topológicamente,  $\Omega$  es un disco cuya frontera contiene al punto de ramificación correspondiente al valor de ramificación  $D$  de  $g$ , y a un final correspondiente con un polo de  $g$ . Denotamos por  $\mathcal{R}$  a un rectángulo abierto contenido en el  $\xi$ -plano con vértices consecutivos  $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ . Podemos asumir que el segmento  $\overline{AB} \in \partial\mathcal{R}$  es horizontal. Sea  $\xi : \{|z| > 1, -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < 0\} \rightarrow \mathcal{R}$  un biholomorfismo con  $\xi(\infty) = A$ ,  $\xi(1) = B$ ,  $\xi(-i) = C$  y  $\xi(-\lambda i) = D$ . Es claro que  $\xi \circ g$  define un biholomorfismo entre  $\Omega$  y  $\mathcal{R}$  que se puede extender a través de las curvas frontera hasta obtener un biholomorfismo desde  $\Sigma_\theta$  hasta el cociente del  $\xi$ -plano por el retículo obtenido a partir de cuatro veces los lados del rectángulo  $\mathcal{R}$ .

Abusamos de notación denotando por  $D, D', D'', D'''$  a los puntos del  $\xi$ -plano que se corresponden con los valores de ramificación de  $g$ .

**Observación 2.1.1** *Como el espacio de 1-formas holomorfas sobre  $\Sigma_\theta$  es de dimensión 1, sabemos que  $dh = \rho d\xi$ , para cierto  $\rho \in \mathbb{C}$ . Un cálculo directo nos dice que la diferencial altura toma valores en  $i\mathbb{R}$  sobre las rectas verticales del  $\xi$ -plano correspondientes a  $z \in i\mathbb{R}$  o  $|z| = 1$  (ver la demostración del Lema 2.1.2), de donde deducimos que  $x_3 = 0$  sobre dichas rectas, y  $\rho \in \mathbb{R}$ . En particular, distintos cocientes de rectas verticales en el  $\xi$ -plano se corresponden con curvas en  $\mathbb{R}^3$  a distinta altura.*

A veces, también será útil ver  $\Sigma_\theta$  como el recubridor ramificado  $2 : 1$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  a través de la aplicación  $(z, w) \mapsto z$ . Es decir, identificamos  $\Sigma_\theta$  con dos copias  $\overline{\mathbb{C}}_1, \overline{\mathbb{C}}_2$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  pegadas a lo largo de los cortes comunes a lo largo de  $i\overline{\mathbb{R}}$  que van desde  $D$  hasta  $D'$  y desde  $D''$  hasta  $D'''$ . La aplicación cambio de hoja  $(z, w) \xrightarrow{D} (z, -w)$  de  $\Sigma_\theta$  se corresponde en el  $\xi$ -plano con la rotación de ángulo  $\pi$  alrededor de cualquiera de los 4 puntos  $D, D', D'', D'''$ .

### Lema 2.1.2

1. *El conjunto  $\{(z, w) \in \Sigma_\theta \mid |z| = 1\}$  se corresponde en  $M_{\theta,0,0}$  con dos geodésicas cerradas contenidas en sendos planos horizontales de simetría. Las simetrías respecto de dichos planos inducen la misma transformación conforme  $S_3$  de  $\Sigma_\theta$ : la reflexión respecto del cociente de la recta que pasa por  $B, C$  (o de su trasladada por medio periodo horizontal), ver Figura 2.1 izquierda.*
- *$\{(z, w) \in \Sigma_\theta \mid z \in \mathbb{R}\}$  se corresponde en  $M_{\theta,0,0}$  con cuatro geodésicas que viajan desde un cero hasta un polo de  $g$ , y que están contenidas en dos planos de simetría ortogonales al eje  $x_2$ . Las simetrías respecto de ambos planos inducen la misma transformación conforme  $S_2$  de  $\Sigma_\theta$ : la reflexión respecto del cociente de la recta que pasa por  $A, B$  (o de su trasladada por medio periodo vertical).*
- *$\{(it, w) \mid t \in \mathbb{R}, \lambda^{-1} \leq |t| \leq \lambda\}$  se corresponde en  $M_{\theta,0,0}$  con dos geodésicas verticales (cerradas en el cociente) que coinciden con el conjunto de puntos fijos de una simetría de  $M_{\theta,0,0}$  respecto de un plano ortogonal al eje  $x_1$ . La transformación conforme  $S_1$  de  $\Sigma_\theta$  inducida por dicha simetría es la reflexión respecto del cociente de la recta que pasa por  $D, D'''$  (o de la que pasa por  $D', D''$ ).*
- *$\{(it, w) \mid |t| \leq \lambda^{-1} \text{ o } |t| \geq \lambda\}$  se corresponde en  $M_{\theta,0,0}$  con cuatro líneas rectas paralelas al eje  $x_1$  que cortan ortogonalmente en los cuatro puntos de ramificación de  $g$  a las geodésicas descritas en el apartado 3. Las rotaciones de*

ángulo  $\pi$  alrededor de dichas rectas inducen la misma transformación conforme  $R_D$  de  $\Sigma_\theta$ : la reflexión respecto del cociente de la recta que pasa por  $D, D'$  (o por  $D'', D'''$ ).

*Demostración.* Si consideramos la curva  $\gamma(t) = e^{it}$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\frac{dg}{g}(\dot{\gamma}) = (\log g \circ \gamma)'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = i, \text{ y}$$

$$dh(\dot{\gamma}) = \frac{\mu \gamma'(t)}{\sqrt{(\gamma(t)^2 + \lambda^2)(\gamma(t)^2 + \lambda^{-2})}} = \frac{\mu i e^{it}}{\lambda e^{it} \sqrt{(\lambda^{-2} + e^{-2it})(e^{2it} + \lambda^{-2})}} = \frac{\mu i}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda^{-2} + 2 \cos(2t)}}.$$

Como  $\mu$  es real, llegamos a que  $\frac{dg}{g}(\dot{\gamma}) dh(\dot{\gamma}) \in \mathbb{R}$ , y por la Proposición 1.2.4 obtenemos que  $\gamma$  es una geodésica plana de simetría. Ahora bien, fijándonos en la imagen por la aplicación de Gauss de  $\gamma$ , deducimos que  $\gamma$  es horizontal en  $\mathbb{R}^3$ . El apartado 1 queda probado sin más que tener en cuenta que hay dos curvas en  $\Sigma_\theta$  con  $z = \gamma(t)$ : la recta vertical que pasa por  $C, B$  y su trasladada por medio periodo horizontal; y que dichas curvas vistas en  $\mathbb{R}^3$  han de estar a distinta altura, por la Observación 2.1.1.

Para probar 3 y 4, consideremos la curva  $\gamma(t) = it$ , para  $t \in \mathbb{R}$ . Es fácil comprobar que

$$\frac{dg}{g}(\dot{\gamma}) = \frac{1}{t}, \text{ y } dh(\dot{\gamma}) = \frac{\mu i}{\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(\lambda^{-2} - t^2)}} \in \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } \lambda^{-1} \leq |t| \leq \lambda; \\ i\mathbb{R}, & \text{si } |t| \leq \lambda^{-1} \text{ o } |t| \geq \lambda. \end{cases}$$

Por la Proposición 1.2.4,  $\gamma|_{|t| \leq \lambda^{-1}}$  (resp.  $\gamma|_{|t| \geq \lambda}$ ) son dos rectas de  $\mathbb{R}^3$  paralelas al eje  $x_1$  que pasan por un punto de ramificación de  $g$  y que viajan desde un final izquierda hasta un final derecha, ambos correspondientes a ceros (resp. a polos) de  $g$ . En  $\Sigma_\theta$ , se pueden ver dichas rectas como el cociente de las rectas verticales que pasan por  $D, D'$  y por  $D'', D'''$ . Esto prueba 4, y nos dice además que  $x_1$  diverge en los finales.

También se deduce de la Proposición 1.2.4 que hay dos geodésicas planas de simetría correspondientes a  $\gamma|_{-\lambda \leq t \leq -\lambda^{-1}}$  (resp. a  $\gamma|_{\lambda^{-1} \leq t \leq \lambda}$ ) con extremos comunes  $D, D'''$  (resp.  $D', D''$ ). Por tanto,  $\{(it, w) \mid t \in \mathbb{R}, \lambda^{-1} \leq |t| \leq \lambda\}$  se corresponde en  $M_{\theta,0,0}$  con dos geodésicas cerradas de simetría contenidas en un plano ortogonal al eje  $x_1$  (si dichas geodésicas estuviesen contenidas en distintos planos ortogonales al eje  $x_1$ , deducimos de 4 que habría infinitas curvas cuya imagen por la aplicación de Gauss estaría contenida en  $i\mathbb{R}$ , que sabemos que no es posible), lo cual acaba el tercer apartado del lema. Vistas en  $\Sigma_\theta$ , dichas geodésicas se corresponden con el cociente de las rectas horizontales que pasan por  $D, D'''$  y por  $D', D''$ .

Finalmente, consideremos  $\gamma(t) = t$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , para probar 2. En este caso,

$$\frac{dg}{g}(\dot{\gamma}) dh(\dot{\gamma}) = \frac{\mu}{t \sqrt{(t^2 + \lambda^2)(t^2 + \lambda^{-2})}} \in \mathbb{R},$$



de donde deducimos que  $\{(z, w) \in \Sigma_\theta \mid z \in \mathbb{R}\}$  se corresponde con cuatro geodésicas que viajan desde un cero hasta un polo de  $g$  contenidas en planos de simetría ortogonales al eje  $x_2$ , que se pueden ver en  $\Sigma_\theta$  como el cociente de la recta que pasa por  $A, B$  (o su trasladada por medio periodo vertical). El hecho de que haya dos y no cuatro planos de simetría se deduce de 3.  $\square$

El lema siguiente describe el grupo  $\text{Iso}(M_{\theta,0,0})$  de isometrías de  $M_{\theta,0,0}$  (es decir, isometrías de la métrica inducida por los datos de Weierstrass  $(g, dh)$  asociados a  $M_{\theta,0,0}$ ).

**Lema 2.1.3**  $\text{Iso}(M_{\theta,0,0})$  coincide con el grupo de transformaciones conformes de  $\Sigma_\theta$ , que es isomorfo a  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$  y está generado por  $S_1, S_2, S_3, R_D$ .

*Demostración.* Consideramos el modelo de  $\Sigma_\theta$  como cociente del  $\xi$ -plano. Hay 8 transformaciones conformes de  $\Sigma_\theta$  que son holomorfas: 4 traslaciones (identidad,  $D \mapsto D'$ ,  $D \mapsto D''$  y  $D \mapsto D'''$ ) y 4 giros (alrededor de  $A, B, C$  o  $D$ ). Si suponemos que  $B$  está situado sobre el origen del  $\xi$ -plano, entonces  $S_2$  se corresponde con la conjugación  $\xi \mapsto \bar{\xi}$ . Las transformaciones antiholomorfas de  $\Sigma_\theta$  las podemos obtener como composición de una holomorfa con  $S_2$ , luego concluimos que en total hay 16 transformaciones conformes de  $\Sigma_\theta$ . Por otro lado, no es difícil comprobar que el subgrupo de isometrías de  $M_{\theta,0,0}$  generado por  $S_1, S_2, S_3, R_D$  es isomorfo a  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ , luego tiene 16 elementos. Como todas las isometrías de  $M_{\theta,0,0}$  se pueden ver como transformaciones conformes de  $\Sigma_\theta$ , el lema queda demostrado.  $\square$

Para los cálculos que siguen a continuación, será necesario conocer los pullbacks por  $S_1, S_2, S_3, R_D$  de la forma de Weierstrass

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \left( \frac{1}{2}(\frac{1}{g} - g), \frac{i}{2}(\frac{1}{g} + g), 1 \right) dh$$

asociada a  $M_{\theta,0,0}$ . Vamos a hacer los cálculos para  $S_1$  (los demás se obtienen siguiendo un razonamiento similar). Como  $S_1$  es antiholomorfa,  $g \circ S_1$  será de la forma  $\varphi \circ \bar{g}$ , para cierta transformación de Möbius  $\varphi$ . Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \varphi(\infty) &= (\varphi \circ \bar{g})(A) = (g \circ S_1)(A) = g(A''') = \infty, \\ \varphi(1) &= (\varphi \circ \bar{g})(B) = (g \circ S_1)(B) = -1, \text{ y} \\ \varphi(i) &= (\varphi \circ \bar{g})(C) = (g \circ S_1)(C) = -i, \end{aligned}$$

deducimos que  $\varphi(z) = -z$ , y  $g \circ S_1 = -\bar{g}$ . Por otro lado, sabemos por la Observación 2.1.1 que  $\phi_3 = \rho d\xi$  para cierto  $\rho \in \mathbb{R}$ , luego  $S_1^* \phi_3 = \overline{\phi_3}$ . Así,

$$\begin{aligned} S_1^* \phi_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g \circ S_1} - g \circ S_1 \right) S_1^* \phi_3 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{g}} - \bar{g} \right) \overline{\phi_3} = -\overline{\phi_1}; \\ S_1^* \phi_2 &= -\frac{i}{2} \left( \frac{1}{\bar{g}} - \bar{g} \right) \overline{\phi_3} = \overline{\phi_2}. \end{aligned}$$

En general, se puede probar que

$$\begin{aligned}
S_1^* \phi_1 &= -\overline{\phi_1}; & S_1^* \phi_2 &= \overline{\phi_2}; & S_1^* \phi_3 &= \overline{\phi_3}; \\
S_2^* \phi_1 &= \overline{\phi_1}; & S_2^* \phi_2 &= -\overline{\phi_2}; & S_2^* \phi_3 &= \overline{\phi_3}; \\
S_3^* \phi_1 &= \overline{\phi_1}; & S_3^* \phi_2 &= \overline{\phi_2}; & S_3^* \phi_3 &= -\overline{\phi_3}; \\
R_D^* \phi_1 &= \overline{\phi_1}; & R_D^* \phi_2 &= -\overline{\phi_2}; & R_D^* \phi_3 &= -\overline{\phi_3}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Recordemos que  $\phi_3 = \mu \frac{dz}{w}$ , para cierto  $\mu = \mu(\theta) \in \mathbb{R}^*$ . Vamos a normalizar para evitar homotecias de la superficie. Fijamos

$$\int_{\gamma_2} \phi_3 = 2\pi i, \tag{2.3}$$

donde  $\gamma_2 \subset \Sigma_\theta$  denota la curva cerrada obtenida como cociente de la recta vertical del  $\xi$ -plano que pasa por  $C, B$  (ver Figura 2.1), condición que determina el valor de  $\mu$ . Usando (2.2) para  $S_1, S_2$ , y parametrizando  $\gamma_2(t) = e^{it}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \phi_3 &= \int_{[S_1^* B, B]} (\phi_3 - S_2^* \phi_3) = 2i \operatorname{Im} \int_{[S_1^* B, B]} \phi_3 = 2i \operatorname{Im} \int_{[C, B]} (\phi_3 - S_1^* \phi_3) = \\
4i \operatorname{Im} \int_{[C, B]} \phi_3 &= 4\mu i \operatorname{Im} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{ie^{it}}{\sqrt{(e^{2it} + \lambda^2)(e^{2it} + \lambda^{-2})}} dt = 2 \sin \theta \mathcal{K}(\sin^2 \theta) \mu i,
\end{aligned}$$

donde  $[X, Y]$  denota la curva contenida en  $\Sigma_\theta$  que va desde  $X$  hasta  $Y$  y que se corresponde en el  $\xi$ -plano con un segmento recto, y  $\mathcal{K}$  es la función integral elíptica de primer orden definida como

$$\mathcal{K}(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 u}} du, \quad 0 < m < 1.$$

De lo anterior deducimos que

$$\mu = \mu(\theta) = \frac{\pi \csc \theta}{\mathcal{K}(\sin^2 \theta)}. \tag{2.4}$$

Una vez fijado el valor de  $\mu$ , ya estamos en disposición de abordar el problema de periodos (en el sentido doblemente periódico) para  $M_{\theta,0,0}$ . Sea  $\gamma_A$  un pequeño lazo alrededor del final  $A = (\infty, +\infty) \in \Sigma_\theta$  de  $M_{\theta,0,0}$ . Denotamos respectivamente por  $P_{\gamma_A}$  y  $F_{\gamma_A}$  el periodo y flujo de  $M_{\theta,0,0}$  en  $A$ , i.e.  $P_{\gamma_A} + i F_{\gamma_A} = \int_{\gamma_A} \Phi$ . Como  $\phi_3$  es holomorfa en  $\Sigma_\theta$ , se tiene que  $\int_{\gamma_A} \phi_3 = 0$ . Además,

$$\int_{\gamma_A} \phi_1 = 2\pi i \operatorname{Res}_A \phi_1 = \pi \mu i, \quad \text{y} \quad \int_{\gamma_A} \phi_2 = 2\pi i \operatorname{Res}_A \phi_2 = \pi \mu,$$

donde  $\text{Res}_A$  denota el residuo en  $A$ . De aquí obtenemos que

$$P_{\gamma_A} = (0, \pi\mu, 0) \quad \text{y} \quad F_{\gamma_A} = (\pi\mu, 0, 0). \quad (2.5)$$

Teniendo en cuenta las isometrías de la superficie, observamos que los demás periodos y flujos en los finales de  $M_{\theta,0,0}$  se pueden obtener a partir de los de  $A$ . Si denotamos por  $\mathcal{D} = S_1 \circ R_D$  el cambio de hoja y  $\mathcal{E} = S_1 \circ S_2 \circ S_3$ , entonces

$$A' = \mathcal{E}(A), \quad A'' = \mathcal{D}(A), \quad A''' = \mathcal{D}(A'), \quad (2.6)$$

ver Figura 2.1 derecha (observemos que podríamos haber escrito  $A' = (S_1 \circ S_3)(A)$ ,  $A'' = S_1(A)$  y  $A''' = S_3(A')$ , pero preferimos (2.6) porque sigue siendo cierto para  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ , con  $\theta, \alpha, \beta$  arbitrarios, ver Sección 2.2). Teniendo en cuenta que el residuo de  $\phi_3$  en los finales se anula, deducimos de (2.2) y (2.6) que

$$\text{Res}_A \Phi = -\overline{\text{Res}_{A'} \Phi} = -\text{Res}_{A''} \Phi = \overline{\text{Res}_{A'''} \Phi}. \quad (2.7)$$

Claramente, a partir de (2.5) y (2.7) podemos obtener los vectores periodo y flujo de  $M_{\theta,0,0}$  en  $A', A'', A'''$ , que claramente son linealmente dependientes con  $P_{\gamma_A}$  y  $F_{\gamma_A}$ , respectivamente. En particular,

$$P_{\gamma_A} = P_{\gamma_{A'}} = -P_{\gamma_{A''}} = -P_{\gamma_{A'''}} \quad \text{y} \quad F_{\gamma_A} = -F_{\gamma_{A'}} = -F_{\gamma_{A''}} = F_{\gamma_{A'''}}.$$

Estudiamos ahora el problema de periodos en homología. Para ello, consideramos la curva  $\gamma_1 \subset \Sigma_\theta$  obtenida como cociente de la recta horizontal que pasa por  $D, D'''$ , ver Figura 2.1. Es claro que  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  es una base de  $H_1(\Sigma_\theta, \mathbb{Z})$ .

Como  $\int_{\gamma_1} \Phi = \int_{\gamma_1} S_1^* \Phi = \int_{\gamma_1} (-\overline{\phi_1}, \overline{\phi_2}, \overline{\phi_3})$  y  $\int_{\gamma_1} \Phi = -\int_{\gamma_1} S_3^* \Phi = \int_{\gamma_1} (-\overline{\phi_1}, -\overline{\phi_2}, \overline{\phi_3})$ , deducimos que  $\int_{\gamma_1} \phi_1 \in i\mathbb{R}$ ,  $\int_{\gamma_1} \phi_2 = 0$  y  $\int_{\gamma_1} \phi_3 \in \mathbb{R}$ . Además, como  $[\gamma_1] = [S_{2*} \gamma_1] - [\gamma_A] - [\gamma_{A''}]$  en  $H_1(M_{\theta,0,0}, \mathbb{Z})$ , entonces se tiene que

$$\int_{\gamma_1} \phi_1 = \int_{S_{2*} \gamma_1} \phi_1 - \int_{\gamma_A} \phi_1 - \int_{\gamma_{A''}} \phi_1 = \int_{\gamma_1} S_2^* \phi_1 - 2 \int_{\gamma_A} \phi_1 = - \int_{\gamma_1} \phi_1 - 2 \int_{\gamma_A} \phi_1,$$

luego  $F_{\gamma_1} = -F_{\gamma_A}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} P_{\gamma_1} &= (0, 0, f_1), & F_{\gamma_1} &= (-\pi\mu, 0, 0), \\ P_{\gamma_2} &= \vec{0} = (0, 0, 0), & F_{\gamma_2} &= (0, 0, 2\pi), \end{aligned} \quad (2.8)$$

siendo

$$f_1 = f_1(\theta) = \int_{\gamma_1} \phi_3 = -4\mu \int_1^\lambda \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - \lambda^{-2})(\lambda^2 - t^2)}} < 0. \quad (2.9)$$

**Lema 2.1.4**  $M_{\theta,0,0}$  es una superficie minimal doblemente periódica, con retículo de periodos generado por  $P_{\gamma_A}, P_{\gamma_1}$ , y con género 1 y 4 finales horizontales de tipo Scherk en el cociente.

*Demostración.* De (2.5), (2.7) y (2.8) concluimos que  $M_{\theta,0,0}$  es una superficie minimal completa e invariante por el grupo generado por las traslaciones de  $P_{\gamma_A}$  y  $P_{\gamma_1}$ . Por construcción, sabemos que  $M_{\theta,0,0}$  tiene 4 finales horizontales (de tipo Scherk) y género 1 en el cociente. Además,  $M_{\theta,0,0}$  se puede descomponer en 16 trozos congruentes, ver Figura 2.4 izquierda. Karcher [30] probó que cada uno de estos trozos es el grafo minimal obtenido al conjugar un grafo de Jenkins y Serrin definido sobre un rectángulo. En particular,  $M_{\theta,0,0}$  es embebida. Como  $M_{\theta,0,0}$  es completa y embebida, y sus finales son de tipo Scherk, llegamos a que  $M_{\theta,0,0}$  es propiamente embebida, y por tanto doblemente periódica.  $\square$

Por último, estudiamos las superficies minimales que obtenemos como límite de la familia  $\{M_{\theta,0,0} \mid \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}$ .

**Lema 2.1.5** (Ver Figura 2.2).

- (i) Cuando  $\theta \rightarrow 0^+$ ,  $M_{\theta,0,0}$  converge a dos catenoides verticales con flujo  $(0, 0, 2\pi)$ .
- (ii) Tras hacer un cambio de escala,  $M_{\theta,0,0}$  converge cuando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$  a dos superficies de Scherk doblemente periódicas con 2 finales horizontales y 2 finales verticales.

*Demostración.* Cuando  $\theta \rightarrow 0^+$ , se tiene que  $\lambda(\theta) \rightarrow +\infty$ . Si cambiamos las variables  $(z, w)$  de  $\Sigma_\theta$  por  $(z, w_1)$ , donde  $w_1\lambda(\theta) = w$ , nos queda

$$\Sigma_\theta = \{(z, w_1) \in \overline{\mathbb{C}}^2 \mid w_1^2 = (z^2\lambda^{-2} + 1)(z^2 + \lambda^{-2})\}.$$

Por tanto,  $\Sigma_\theta$  degenera cuando  $\theta \rightarrow 0^+$  en  $\{(z, w_1) \mid w_1^2 = z^2\}$ , que son dos esferas. Claramente, la aplicación de Gauss de  $M_{\theta,0,0}$  queda invariante al tomar límites. Y además,  $\frac{\mu(\theta)}{\lambda(\theta)} \rightarrow 1$  cuando  $\theta \rightarrow 0^+$ , luego la diferencial altura  $dh_\theta$  de  $M_{\theta,0,0}$  converge a  $\frac{dz}{w_1} = \pm \frac{dz}{z}$ . De aquí se deduce que si  $\theta \rightarrow 0^+$ , entonces  $M_{\theta,0,0}$  converge a dos catenoides verticales con flujo  $(0, 0, 2\pi)$ .

Cuando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ , se tiene que  $\lambda(\theta) \rightarrow 1$ , y  $\Sigma_\theta$  degenera en  $\{(z, w) \mid w^2 = (z^2+1)^2\}$ , que son dos esferas. La aplicación de Gauss límite vuelve a ser  $g(z, w) = z$ , pero ahora la diferencial altura se anula en el límite, ya que  $\mu(\theta) \rightarrow 0$  cuando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ . Por tanto, cambiamos de escala para poder pasar al límite. Consideramos la homotecia  $M_{\theta,0,0} \mapsto \widetilde{M}_{\theta,0,0} = \frac{1}{\mu(\theta)}M_{\theta,0,0}$ . Así, si  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ , entonces  $\frac{1}{\mu(\theta)}dh \rightarrow \pm \frac{dz}{z^2+1}$ ; y  $\widetilde{M}_{\theta,0,0}$  converge a dos superficies de Scherk doblemente periódicas con 2 finales horizontales y 2 finales verticales.  $\square$

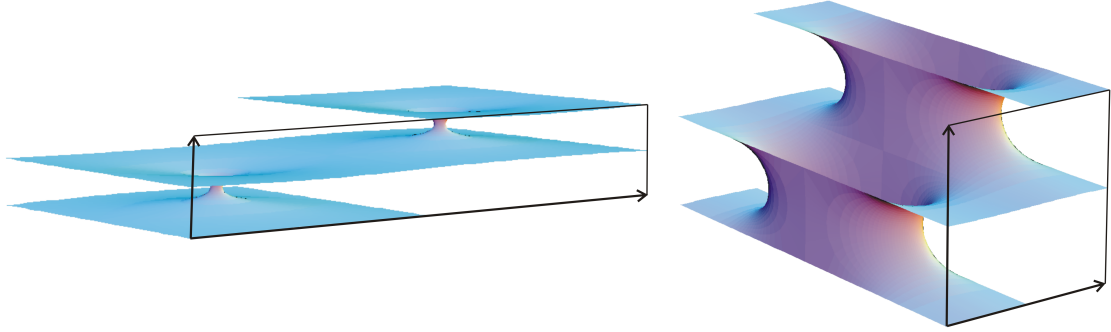


Figura 2.2:  $M_{\theta,0,0}$  para  $\theta = \pi/50$  (izquierda) y para  $\theta = 24\pi/50$  (derecha).

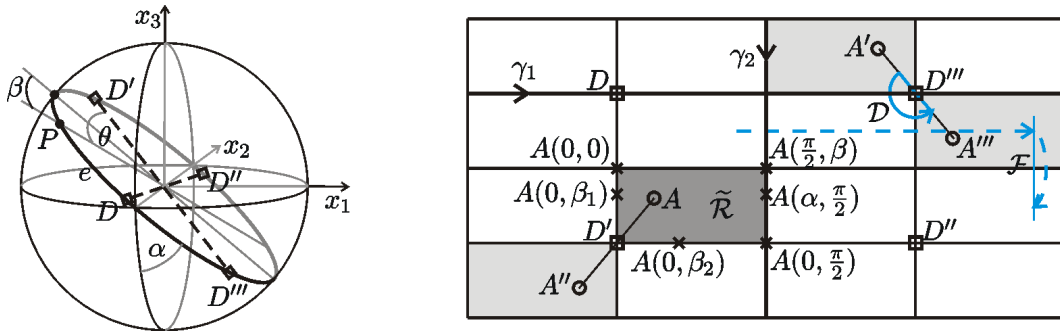


Figura 2.3: Izquierda: configuración esférica de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ . Derecha: El modelo de  $\Sigma_\theta$  en el  $\xi$ -plano, donde la línea punteada representa la isometría  $\mathcal{F} = R_D \circ S_2 \circ S_3 = \mathcal{E} \circ \mathcal{D}$ ; y  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $0 < \beta_1 < \theta < \beta_2 < \frac{\pi}{2}$ .

## 2.2. Construcción de los ejemplos $M_{\theta,\alpha,\beta}$

Para cada  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  y  $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , denotaremos por  $\varphi_\alpha$  la rotación de  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  de ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $x_2$  y por  $\varphi^\beta$  la rotación de ángulo  $\beta$  alrededor del eje  $x_1$ .

Dados  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  y  $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  con  $(\alpha, \beta) \neq (0, \theta)$ , consideramos  $e = \varphi_\alpha(e_0)$ , donde estamos denotando por  $e_0$  al ecuador obtenido como preimagen del eje imaginario  $i\mathbb{R}$  por la proyección estereográfica desde el Polo Norte; y  $P = (\varphi_\alpha \circ \varphi^\beta)(0, 0, 1)$ , ver la Figura 2.3 izquierda. Nótese que la configuración esférica  $\{D, D', D'', D'''\}$  asociada a  $\theta, \alpha, \beta$  no es otra que la imagen por la transformación de Möbius  $\psi_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi^\beta$  de la configuración esférica asociada a  $M_{\theta,0,0}$ . Obsérvese también que hemos tomado  $(\alpha, \beta) \neq (0, \theta)$ , ya que  $(\alpha, \beta) = (0, \theta)$  se corresponde con el caso en el que  $D'$  coincide con el Polo Norte, que no está permitido en este ambiente (ya que sabemos que los finales no son ramificados). Por tanto, aplicación de Gauss  $g = g_{\theta,\alpha,\beta}$  del ejemplo  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  que queremos construir estará definida

sobre el toro conforme  $\Sigma_\theta$  dado en (2.1), y vendrá dada por  $g = \psi_{\alpha,\beta} \circ g_{\theta,0,0}$ ; es decir,

$$g(z, w) = \frac{z \left( i \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right) + \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - z \left( i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right)}, \quad (z, w) \in \Sigma_\theta.$$

Consideramos la misma clase de homología  $[\gamma_2] \in H_1(\Sigma_\theta, \mathbb{Z})$  que en la Sección 2.1. De nuevo, vamos a tomar la diferencial altura  $dh = \mu \frac{dz}{w}$  de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  cumpliendo  $\int_{\gamma_2} dh = 2\pi i$ , luego  $\mu$  queda determinada por (2.4). Nótese que ni la compactificación conforme  $\Sigma_\theta$  ni la diferencial altura  $dh$  dependen de  $\alpha, \beta$ , y que los datos de Weierstrass de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  coinciden con los de  $M_{\theta,0,0}$  cuando  $\alpha = \beta = 0$ .

Como  $g$  así definida depende analíticamente de  $\alpha, \beta$ , lo mismo les ocurre a los finales  $\{A, A', A'', A'''\} = g^{-1}(\{0, \infty\})$  de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  (consideramos una elección continua de cada uno de ellos). Como se mantienen las relaciones (2.6) entre los finales, determinada la posición de  $A$  en el toro, quedarán también determinadas las posiciones de  $A', A'', A'''$ . Cuando  $(\alpha, \beta)$  varía en  $[0, \frac{\pi}{2}]^2 - \{(0, \theta)\}$ ,  $A = A(\alpha, \beta)$  se mueve en  $\tilde{\mathcal{R}} = S_2(\tilde{\mathcal{R}}) - \{D'\}$  como se describe a continuación, ver Figura 2.3 derecha (seguimos la notación de la sección anterior).

### Afirmación 2.2.1

- Cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta$  varía desde 0 hasta  $\theta$ ,  $A$  se mueve verticalmente hacia abajo desde la esquina superior izquierda  $A(0, 0)$  de  $\tilde{\mathcal{R}}$  (posición descrita en la sección anterior) hasta coincidir con  $D'$  (caso que no se considera, ya que los finales no pueden ser ramificados).
- Si  $\alpha = 0$  y  $\beta$  varía en  $(\theta, \frac{\pi}{2}]$ ,  $A$  se mueve horizontalmente hacia la derecha desde  $D'$  cuando  $\beta = \theta$  (que no se considera) hasta llegar a la esquina inferior derecha  $A(0, \frac{\pi}{2})$  de  $\tilde{\mathcal{R}}$  cuando  $\beta = \frac{\pi}{2}$ .
- Si  $\beta = \frac{\pi}{2}$  y  $\alpha$  varía desde 0 hasta  $\frac{\pi}{2}$ ,  $A$  se mueve verticalmente hacia arriba la esquina inferior derecha  $A(0, \frac{\pi}{2})$  hasta la esquina superior derecha  $A(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  de  $\tilde{\mathcal{R}}$ .
- Si dejamos ahora  $\beta$  constante,  $\beta = 0$ , y hacemos variar  $\alpha$  desde 0 hasta  $\frac{\pi}{2}$ , entonces  $A$  se mueve horizontalmente desde la esquina superior izquierda  $A(0, 0)$  hasta la esquina superior derecha  $A(\frac{\pi}{2}, 0)$  de  $\tilde{\mathcal{R}}$ .
- Cuando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , entonces  $M_{\theta, \frac{\pi}{2}, \beta}$  no es otra cosa que la imagen rotada de  $M_{\theta, \frac{\pi}{2}, 0}$  por un ángulo  $\beta$  alrededor del eje  $x_3$ , luego reducimos el estudio al caso  $\beta = 0$ , descrito anteriormente ( $A$  cae en la esquina superior derecha de  $\tilde{\mathcal{R}}$ ).

- Los valores del borde descritos arriba se extienden de forma continua y biyectiva desde  $(0, \frac{\pi}{2})^2$  hasta el interior de  $\widetilde{\mathcal{R}}$ .

*Demostración.* Sobre  $\Sigma_\theta$ , conocemos los  $z$ -valores de los puntos, ver Figura 2.1. Por tanto, para obtener la posición de  $A = A(\alpha, \beta)$  en  $\Sigma_\theta$ , estudiamos los valores que  $z = \psi_{\alpha,\beta}^{-1} \circ g$  toma sobre  $\infty$  (donde  $\psi_{\alpha,\beta}$  está definida como al comienzo de esta sección). Para ello, es útil pensar sobre  $\mathbb{S}^2$ : fijamos la configuración esférica  $\{D, D', D'', D'''\}$  y estudiamos el movimiento relativo de  $A$  respecto de ella (aquí, estamos abusando de notación denotando de nuevo por  $A$  al valor que toma la aplicación de Gauss  $N$  sobre el final  $A$ ).  $\diamond$

Estudiemos ahora el grupo  $\text{Iso}(M_{\theta,\alpha,\beta})$  de las isometrías de la métrica inducida por  $(g, dh)$ , ver (1.4). Recordemos (Lema 2.1.3) que el grupo de las transformaciones conformes de  $\Sigma_\theta$  coincide con  $\text{Iso}(M_{\theta,0,0})$ . El siguiente lema nos dice que  $\text{Iso}(M_{\theta,\alpha,\beta})$  coincide con el conjunto formado por los elementos de  $\text{Iso}(M_{\theta,0,0})$  que dejan invariante el conjunto de ceros y polos de la aplicación de Gauss  $g$  de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ .

**Lema 2.2.2**  $\text{Iso}(M_{\theta,\alpha,\beta}) = \{\psi \in \text{Iso}(M_{\theta,0,0}) \mid \psi \text{ deja invariante a } \{A, A', A'', A'''\}\}.$

*Demostración.* Llamamos  $\Delta = \{\psi \in \text{Iso}(M_{\theta,0,0}) \mid \psi \text{ deja invariante } \{A, A', A'', A'''\}\}$ , y  $g_\theta$  será la aplicación de Gauss de  $M_{\theta,0,0}$ . Por el Lema 2.1.3, es inmediato que  $\text{Iso}(M_{\theta,\alpha,\beta}) \subset \Delta$ . Por tanto, sólo hay que probar la inclusión  $\Delta \subset \text{Iso}(M_{\theta,\alpha,\beta})$ ; es decir, dada  $\psi \in \Delta$ , probemos que

$$\left( \frac{1}{|g \circ \psi|} + |g \circ \psi| \right) |\psi^* dh| = \left( \frac{1}{|g|} + |g| \right) |dh|.$$

Como  $dh$  sólo depende de  $\theta$  y  $\psi \in \text{Iso}(M_{\theta,0,0})$ , entonces  $|\psi^* dh| = |dh|$ , por lo que sólo tenemos que verificar  $\left( \frac{1}{|g \circ \psi|} + |g \circ \psi| \right) = \left( \frac{1}{|g|} + |g| \right)$ . Recordemos que los finales  $A, A', A'', A'''$  de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  son los ceros y polos de  $g$ . Observando la distribución de  $A, A', A'', A'''$  en el toro (Afirmación 2.2.1), vemos que o bien  $\psi$  lleva ceros en ceros (y por tanto también polos en polos), o bien lleva los ceros en los polos, y viceversa. Si  $\psi$  lleva ceros en ceros y polos en polos (resp. ceros en polos y viceversa), la función  $\frac{g \circ \psi}{g}$  (resp.  $(g \circ \psi)g$ ) es una función holomorfa sin ceros ni polos, luego constante. Si probamos que dicha constante tiene módulo 1, habremos acabado. Teniendo en cuenta que  $g \circ \mathcal{D} = g$  y que para  $i = 1, 2, 3$ ,  $g \circ S_i$  se corresponde en  $\mathbb{S}^2$  con la simetría respecto al ecuador obtenido como imagen por  $\psi_{\alpha,\beta}$  del ecuador ortogonal al eje  $x_i$  (en particular,  $\mathcal{E} = S_1 \circ S_2 \circ S_3$  se corresponde con la aplicación antípoda de  $\mathbb{S}^2$ , que deja invariante la configuración esférica de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ ), no es difícil encontrar un punto finito de  $\Sigma_\theta$  donde  $|g \circ \psi| = |g|$  (resp.  $|g \circ \psi| = \frac{1}{|g|}$ ). Por tanto,  $|g \circ \psi| = |g|$  (resp.

$|g \circ \psi| = \frac{1}{|g|}$ ) sobre todo  $\Sigma_\theta$ , como queríamos probar.  $\square$

El grupo de isometrías  $\text{Iso}(M_{\theta,\alpha,\beta})$  de la métrica inducida por  $(g, dh)$  siempre contiene el cambio de hoja  $(z, w) \mapsto (z, -w)$ , i.e.  $\mathcal{D} = S_1 \circ R_D$ . Además, la aplicación antípoda de  $\mathbb{S}^2$  deja invariante la configuración esférica de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ , por lo que  $\text{Iso}(M_{\theta,\alpha,\beta})$  también contiene dos involuciones antiholomorfas sin puntos fijos:  $\mathcal{E} = S_1 \circ S_2 \circ S_3$  y  $\mathcal{F} = \mathcal{E} \circ \mathcal{D}$ . Con esto en mente, resolvamos el problema de periodos para  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ . Un razonamiento similar al seguido en la sección anterior nos lleva a que los vectores periodo y flujo de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  en el final  $A$  vienen dados por

$$P_{\gamma_A} = \pi\mu \sin \theta (i E(\theta, \alpha, \beta), 0), \quad F_{\gamma_A} = \pi\mu \sin \theta (E(\theta, \alpha, \beta), 0), \quad (2.10)$$

donde estamos identificando  $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  de la forma usual,  $(a, b, c) \equiv (a + ib, c)$ , y

$$E(\theta, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \alpha + (\sin \alpha \cos \beta - i \sin \beta)^2}}.$$

Los vectores periodo y flujo en los demás finales  $A' = \mathcal{E}(A)$ ,  $A'' = \mathcal{D}(A)$  y  $A''' = \mathcal{F}(A)$  se pueden obtener de las ecuaciones (2.7), que siguen siendo válidas.

Para resolver el problema de periodos en homología, consideramos las clases  $[\gamma_1], [\gamma_2] \in H_1(\Sigma_\theta, \mathbb{Z})$  definidas como en la sección anterior (nótese que incluso podemos tomar los mismos representantes embebidos  $\gamma_1, \gamma_2$  que tomábamos para  $\alpha = \beta = 0$ , salvo cuando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  o  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ). En particular, la tercera coordenada  $(P_{\gamma_1})_3$  del vector periodo de  $M_{\theta,\alpha,0}$  a lo largo de la curva  $\gamma_1$  es  $f_1 \neq 0$ , definida como en (2.9), y por tanto,  $P_{\gamma_A}$  y  $P_{\gamma_1}$  son linealmente independientes. También se cumple que

$$\mathcal{E}^* \Phi = -\overline{\Phi}, \quad \mathcal{E}_* \gamma_1 = -\gamma_1 - \gamma_A - \gamma_{A''}, \quad \mathcal{E}_* \gamma_2 = \gamma_2, \quad (2.11)$$

donde estamos denotando por  $\Phi$  a la forma de Weierstrass de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ . Las igualdades (2.11) y (2.7) implican que  $\overline{\int_{\gamma_1} \Phi} = \int_{\gamma_1} \Phi + \int_{\gamma_A} \Phi - \overline{\int_{\gamma_A} \Phi}$  y  $\int_{\gamma_2} \Phi = -\overline{\int_{\gamma_2} \Phi}$ , de donde obtenemos que

$$F_{\gamma_1} = -F_{\gamma_A} \quad \text{y} \quad P_{\gamma_2} = (0, 0, 0). \quad (2.12)$$

De todo esto, se deduce que  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  es una superficie minimal inmersa, completa, invariante por el retículo de traslaciones generado por  $P_{\gamma_A}, P_{\gamma_1}$ , con género 1 y 4 finales (de tipo Scherk) en el cociente. Además, como  $M_{\theta,0,0}$  es una superficie embebida y las alturas de los finales de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  dependen de forma continua de  $(\alpha, \beta) \in [0, \frac{\pi}{2}]^2 - \{(0, \theta)\}$  (que es un conexo), entonces deducimos que  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  está también embebida fuera de un compacto fijo. Por otro lado, es fácil ver que si una familia de superficies minimales con autointersecciones converge a una superficie minimal embebida, entonces ésta ha de ser un recubridor de su imagen. Todo esto nos permite



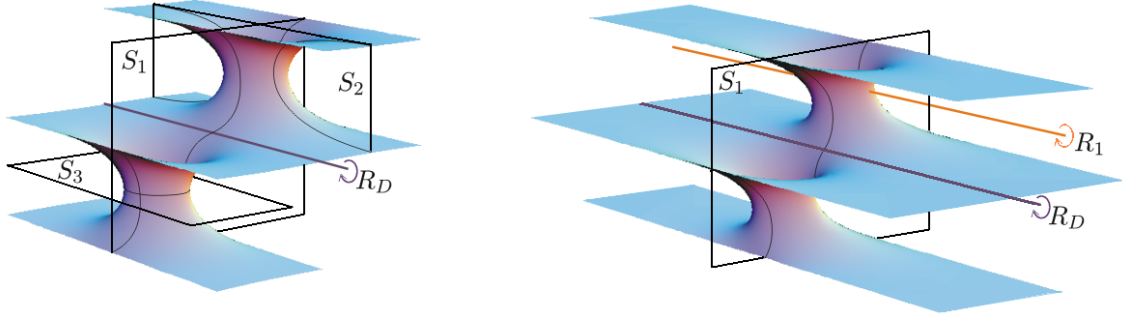


Figura 2.4: Izquierda:  $M_{\theta,0,0}$ , con  $\theta = \pi/4$ . Derecha:  $M_{\theta,0,\beta}$ , con  $\theta = \pi/4$  y  $\beta = \pi/8$ .

concluir que el conjunto  $I = \{(\alpha, \beta) \in [0, \frac{\pi}{2}]^2 - \{(0, \theta)\} \mid M_{\theta,\alpha,\beta} \text{ es embebida}\}$  es un abierto. Como  $I$  es trivialmente cerrado (ya que el límite de superficies minimales embebidas es embebido), llegamos a que  $I = [0, \frac{\pi}{2}]^2 - \{(0, \theta)\}$ . Y por tanto,  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  es una superficie minimal doblemente periódica para todos los valores de  $\theta, \alpha, \beta$ .

A continuación, estudiamos el grupo de isometrías de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  para los diferentes valores de  $\theta, \alpha, \beta$ , usando el Lema 2.2.2 y la Afirmación 2.2.1. Como hemos dicho anteriormente,  $\text{Iso}(M_{\theta,\alpha,\beta})$  siempre contiene al subgrupo  $\{\text{identidad}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}\}$ , que es isomorfo a  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  con generadores  $\mathcal{D}, \mathcal{F}$ . En  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{D}$  representa una simetría central respecto de uno de los cuatro puntos de ramificación de  $g$ , y  $\mathcal{F}$  consiste en una traslación de vector  $(P_{\gamma_A} + P_{\gamma_1})/2$ . En particular, el cociente de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  por esta traslación define una botella de Klein en un  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ . Recordemos que si  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  y  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , el final  $A$  cae en el rectángulo abierto  $\tilde{\mathcal{R}} = S_2(\mathcal{R})$ , ver Figura 2.3 derecha, y por el Lema 2.2.2,  $\text{Iso}(M_{\theta,\alpha,\beta}) = \{\text{identidad}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}\}$ . Estudiemos los casos  $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$  y  $\beta \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$ .

### Afirmación 2.2.3

- (1) Si  $\alpha = \beta = 0$ , vimos en la Sección 2.1 que  $\text{Iso}(M_{\theta,0,0})$  es isomorfo a  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$  con generadores  $S_1, S_2, S_3, R_D$ .
- (2) Si  $\alpha = 0$  y  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta \neq \theta$ ,  $\text{Iso}(M_{\theta,0,\beta})$  es isomorfo a  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  con generadores  $S_1, R_D, R_1 = S_2 \circ S_3$ . En  $\mathbb{R}^3$ ,  $S_1$  representa (como en la Sección 2.1) una reflexión en un plano ortogonal al eje  $x_1$ , y  $R_1$  se corresponde con una rotación de ángulo  $\pi$  alrededor de una recta paralela al eje  $x_1$  que corta ortogonalmente a la superficie. Si  $0 < \beta < \theta$  (resp.  $\theta < \beta < \frac{\pi}{2}$ ), entonces  $M_{\theta,0,\beta}$  contiene 4 (resp. 2) rectas paralelas al eje  $x_1$ , ver Figura 2.4 derecha y Figura 2.5 izquierda. En ambos casos,  $R_D$  es la rotación de ángulo  $\pi$  alrededor de una de dichas rectas.

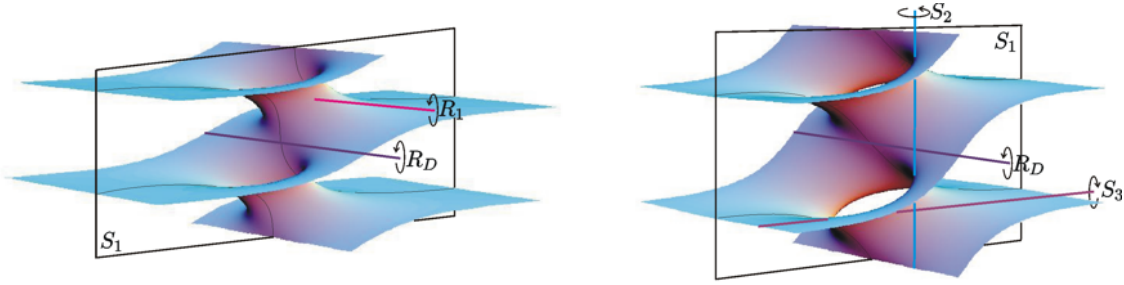


Figura 2.5: Izquierda:  $M_{\theta,0,\beta}$ , para  $\theta = \pi/4$  y  $\beta = 3\pi/8$ . Derecha:  $M_{\theta,0,\frac{\pi}{2}}$  para  $\theta = \pi/4$ .

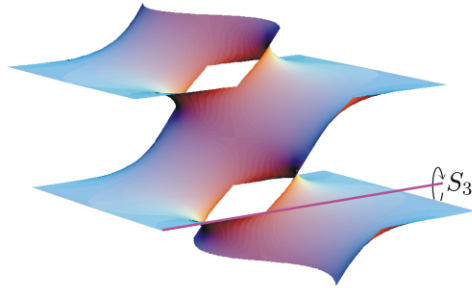


Figura 2.6:  $M_{\theta,\alpha,\frac{\pi}{2}}$ , con  $\theta = \alpha = \pi/4$ .

- (3) En el caso extremo en el que  $\alpha = 0$  y  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , se tiene que  $\text{Iso}(M_{\theta,0,\frac{\pi}{2}}) = \text{Iso}(M_{\theta,0,0})$ , en cuyo caso  $S_3$  (resp.  $S_2$ ) representa en  $\mathbb{R}^3$  una rotación de ángulo  $\pi$  alrededor de una de las 4 (resp. 2) rectas paralelas al eje  $x_2$  (resp. eje  $x_3$ ) que están contenidas en la superficie.
- (4) Cuando  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  y  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , entonces  $S_3$  es isometría de  $(g, dh)$ , luego  $\text{Iso}(M_{\theta,\alpha,\frac{\pi}{2}})$  es isomorfo a  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  con generadores  $S_3, \mathcal{D}, R_3 = S_1 \circ S_2$ . Ahora,  $S_3$  representa en  $\mathbb{R}^3$  una rotación de ángulo  $\pi$  alrededor de una de las 4 rectas paralelas al eje  $x_2$  que están contenidas en la superficie, y  $R_3$  es la composición de una reflexión respecto de un plano ortogonal al eje  $x_2$  con una traslación de medio periodo horizontal (en la dirección del eje  $x_1$ ).
- (5) Si  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  y  $\beta = 0$ , entonces  $\text{Iso}(M_{\theta,\alpha,0})$  es isomorfo a  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ , con generadores  $S_2, \mathcal{D}, R_2 = S_1 \circ S_3$ . Como ocurría para  $M_{\theta,0,0}$ ,  $S_2$  representa en  $\mathbb{R}^3$  una reflexión respecto de dos planos ortogonales al eje  $x_2$ , y  $R_2$  es una rotación de ángulo  $\pi$  alrededor de una recta paralela al eje  $x_2$  que corta la superficie ortogonalmente, ver Figura 2.7 izquierda.

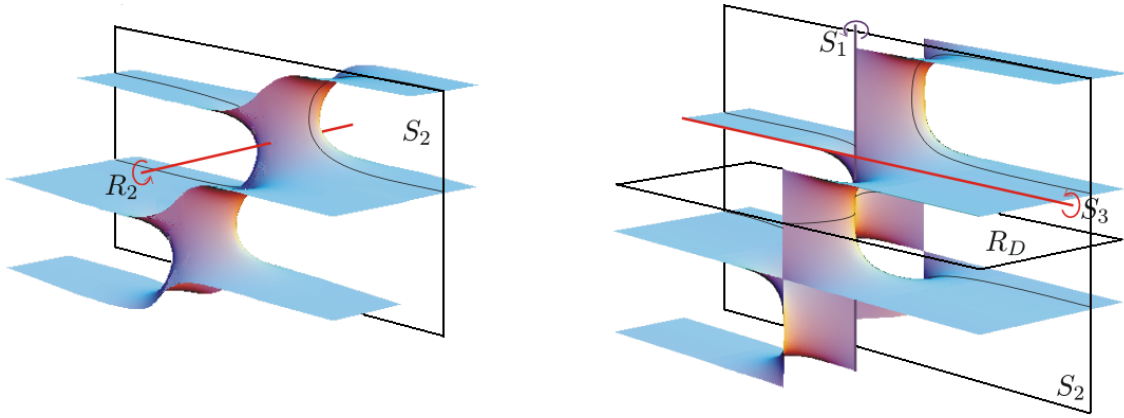


Figura 2.7: Izquierda:  $M_{\theta,\alpha,0}$  para  $\theta = \alpha = \pi/4$ . Derecha:  $M_{\theta,\pi/2,0}$  para  $\theta = \pi/4$ .

- (6) Cuando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , obtenemos que  $\text{Iso}(M_{\theta,\pi/2,\beta}) = \text{Iso}(M_{\theta,0,0})$ . Como  $M_{\theta,\pi/2,\beta}$  es la superficie obtenida al rotar  $M_{\theta,\pi/2,0}$  un ángulo  $\beta$  alrededor del eje  $x_3$ , podemos reducirnos al caso  $\beta = 0$ . En dicho caso,  $S_2$  representa en  $\mathbb{R}^3$  una simetría respecto de un plano ortogonal al eje  $x_2$ ,  $S_3$  (resp.  $S_1$ ) representa una rotación de ángulo  $\pi$  alrededor de una de las 4 (resp. 2) líneas rectas paralelas al eje  $x_1$  (resp.  $x_3$ ) que están contenidas en  $M_{\theta,\pi/2,0}$ , y  $R_D$  se corresponde con una simetría respecto de un plano horizontal, ver Figura 2.7 derecha.

**Observación 2.2.4** Hasta ahora, hemos definido la familia 3-paramétrica de superficies minimales doblemente periódicas  $\{M_{\theta,\alpha,\beta} \mid (\theta, \alpha, \beta) \in \mathcal{I}_1\}$ , con

$$\mathcal{I}_1 = \left\{ (\theta, \alpha, \beta) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times [0, \frac{\pi}{2}]^2 \mid (\alpha, \beta) \neq (0, \theta) \right\}.$$

Para ese rango de parámetros,  $(\theta, \alpha, \beta) \in \mathcal{I}_1$ , el final  $A = A(\theta, \alpha, \beta)$  recorre todos los puntos de  $\tilde{\mathcal{R}}$  (recordemos que  $\tilde{\mathcal{R}}$  es el rectángulo cerrado que aparece en la Figura 2.3 salvo la esquina  $D'$ , que se corresponde con un punto de ramificación). Recordemos que también podemos ver  $\Sigma_\theta$  como el recubridor ramificado  $2 : 1$  de  $\tilde{\mathcal{C}}$  a través de la aplicación  $(z, w) \mapsto z$ . Vía dicha aplicación, podemos identificar conformemente  $\tilde{\mathcal{R}}$  con la región de  $\tilde{\mathcal{C}}$  correspondiente a un octante de  $\mathbb{S}^2$ . Extendemos el rango de los parámetros  $\theta, \alpha, \beta$  de forma que  $A$  recorra todos los valores de  $\tilde{\mathcal{C}}$  menos  $D, D', D'', D'''$ . Para esto, tomamos  $(\theta, \alpha, \beta)$  variando en  $\mathcal{I} = \left\{ (\theta, \alpha, \beta) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi] \mid (\alpha, \beta) \neq (0, \pm\theta), (0, \pm(\pi - \theta)) \right\}$ , y definimos  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  para  $(\theta, \alpha, \beta) \in \mathcal{I}$  de forma similar a como lo hicimos para  $(\theta, \alpha, \beta) \in \mathcal{I}_1$ , aunque estas nuevas superficies que obtenemos no aportan nada nuevo. En efecto,

- $M_{\theta,\alpha,-\beta}$  coincide con la superficie obtenida al reflejar  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  respecto de un plano ortogonal al eje  $x_2$ .
- $M_{\theta,-\alpha,\beta}$  es la superficie obtenida al reflejar  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  respecto de un plano ortogonal al eje  $x_1$ .
- $M_{\theta,\alpha,\beta+\pi}$  coincide con  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ .

**Observación 2.2.5** Hemos definido la familia  $\mathcal{K} = \{M_{\theta,\alpha,\beta} \mid (\theta,\alpha,\beta) \in \mathcal{I}\}$  de ejemplos KMR. Por construcción, los valores de ramificación de la aplicación de Gauss  $N$  de cada  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  están contenidos en un ecuador de  $\mathbb{S}^2$ . Por tanto, un teorema de Montiel y Ros [48] (Teorema 1.10.2) nos asegura que el espacio de funciones de Jacobi acotadas definidas en  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  coincide con el espacio de funciones lineales de  $N$ ,  $\{\langle N, v \rangle \mid v \in \mathbb{R}^3\}$  (en particular, dicho espacio tiene dimensión 3). Esta propiedad se suele abreviar diciendo que  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  es no degenerada. Como todos los ejemplos KMR son por tanto no degenerados, Hauswirth y Traizet [18] aseguran que  $\mathcal{K}$  es una variedad analítica real de dimensión 3. En particular, se tiene que  $\mathcal{K}$  es un abierto de  $\mathcal{S}$ , salvo normalizaciones. Además, por el Lema 2.2.6 que probamos a continuación, llegamos a que  $\mathcal{K}$  es un cerrado de  $\mathcal{S}$ , luego una componente conexa suya. El Teorema 2 nos dirá que  $\mathcal{K}$  es la única componente conexa de  $\mathcal{S}$ .

### Lema 2.2.6

1. Cuando  $\beta \rightarrow \theta$ ,  $M_{\theta,0,\beta}$  converge a un ejemplo minimal de Riemann.
2. Cuando  $\theta \rightarrow 0^+$  y  $(\alpha,\beta) \rightarrow (0,0)$ ,  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  converge a dos catenoides con flujo vertical  $(0,0,2\pi)$ , ver Figura 2.2 izquierda.
3. Cuando  $\theta \rightarrow 0^+$  y  $(\alpha,\beta) \not\rightarrow (0,0)$ ,  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  converge a dos superficies de Scherk simplemente periódicas (iguales) con cuatro finales, dos de ellos horizontales, y ángulo  $\arccos(\cos \alpha \cos \beta)$ , ver Figura 2.8.
4. Cuando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$  y  $(\alpha,\beta) \rightarrow (0,\frac{\pi}{2})$ ,  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  converge (después de hacer un cambio en la escala) a dos helicoides verticales, ver Figura 2.9.
5. Cuando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$  y  $(\alpha,\beta) \not\rightarrow (0,\frac{\pi}{2})$ ,  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  converge (después de hacer un cambio en la escala) a dos superficies de Scherk doblemente periódicas (iguales) con cuatro finales, dos de ellos horizontales, y ángulo  $\arccos(\cos \alpha \sin \beta)$ , ver Figura 2.2 derecha.

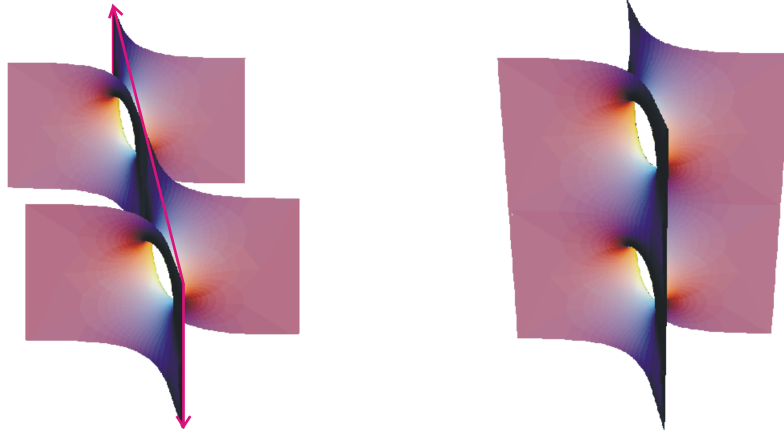


Figura 2.8:  $M_{\theta,0,\beta}$  rotada (izquierda), y dos copias de media superficie  $M_{\theta,0,\beta}$  rotada (derecha), con  $\theta = \frac{\pi}{2}00$  y  $\beta = 9\frac{\pi}{2}0$ .

*Demostración.* Todos estos límites se pueden calcular directamente a partir de los datos de Weierstrass, similarmente a lo hecho en la demostración del Lema 2.1.5.

Si  $\beta \rightarrow \theta$ , entonces la aplicación de Gauss de  $M_{\theta,0,\beta}$  converge a  $g(z, w) = (z + i \tan \frac{\theta}{2})(1 + iz \tan \frac{\theta}{2})^{-1}$ , definida sobre el toro  $\Sigma_\theta$ , y se mantiene igual la diferencial altura,  $dh = \mu(\theta)dz/w$ . No es difícil comprobar que estos datos de Weierstrass definen una superficie minimal simplemente periódica  $M_\infty$  con finales planos y género 1 en el cociente. Por el teorema de unicidad de Meeks, Pérez y Ros [41], llegamos a que  $M_\infty$  es una superficie minimal de Riemann, y queda probado 1.

Si  $(\alpha, \beta) \rightarrow (0, 0)$ , entonces  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  converge a  $M_{\theta,0,0}$ . El apartado 2 queda demostrado a partir del Lema 2.1.5.

Estudiemos ahora el límite de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  cuando  $\theta \rightarrow 0^+$  pero  $(\alpha, \beta) \not\rightarrow (0, 0)$ . Como vimos en la demostración del Lema 2.1.5, cuando  $\theta \rightarrow 0^+$  se tiene que  $\Sigma_\theta$  converge a  $\{(z, w_1) \mid w_1^2 = z^2\}$ , donde  $w_1 \lambda(\theta) = w$ , y  $dh \rightarrow dz/w_1 = \pm dz/z$ . Por tanto, sobre cada una de las esferas límite tenemos cuatro finales: dos obtenidos como límite de los finales de los ejemplos KMR (i.e. el cero y el polo de la restricción a dicha esfera de la aplicación de Gauss límite) y  $z = 0, \infty$ . Además, mediante un cálculo directo obtenemos que los periodos en los finales coinciden (salvo signo). Con todo esto, no es difícil deducir que este límite consiste en dos superficies de Scherk simplemente periódicas de ángulo  $\arccos(\cos \alpha \cos \beta)$ , lo cual prueba 3.

Como vimos también en la demostración del Lema 2.1.5,  $\Sigma_\theta$  degenera cuando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$  en dos esferas  $\{(z, w) \mid w^2 = (z^2 + 1)^2\}$  y, tras hacer un cambio de escala (tomamos  $\mu(\theta)^{-1}M_{\theta,0,0}$ , siendo  $\mu(\theta) \rightarrow 0$  cuando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ ), obtenemos como diferencial altura límite  $\pm dz/(z^2 + 1)$ . Si además  $(\alpha, \beta) \not\rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$ , sobre cada una de



Figura 2.9:  $M_{\theta,0,\beta}$  para  $\theta = \frac{19\pi}{40}$  y  $\beta = \frac{\pi}{2}$ .

las esferas límite obtenemos cuatro finales: dos obtenidos como límite de los finales de los ejemplos KMR (i.e. el cero y el polo de la restricción a dicha esfera de la aplicación de Gauss límite) y  $z = \pm i$ . En este caso,  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  converge a dos superficies de Scherk doblemente periódicas con cuatro finales, dos de ellos horizontales, y ángulo  $\arccos(\cos \alpha \sin \beta)$  entre sus finales no paralelos, luego obtenemos 5. Si por el contrario  $(\alpha, \beta) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$ , entonces el cero (resp. el polo) de la aplicación de Gauss límite es justo  $-i$  (resp.  $i$ ), y  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  converge a dos helicoides verticales (recordemos que el helicoides se puede obtener como límite de superficies de Scherk doblemente periódicas, tomando el ángulo tendiendo a 0). Con esto, queda probado el Lema 2.2.6.  $\square$

**Observación 2.2.7** *Por el Lema 2.2.6 y la Observación 2.2.4, tomando límites de ejemplos KMR se pueden obtener todos los ejemplos minimales de Riemann y todas las superficies minimales de Scherk simple y doblemente periódicas.*

Estudiemos ahora la familia de las superficies conjugadas de los ejemplos KMR. Si  $(g, dh)$  son los datos de Weierstrass de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ , entonces denotaremos por  $M_{\theta,\alpha,\beta}^*$  a la superficie minimal (posiblemente multivaluada) determinada por los datos de Weierstrass  $(g, idh)$ , y la llamaremos *conjugada de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$* . Nótese que, en particular,  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  y  $M_{\theta,\alpha,\beta}^*$  tienen la misma compactificación conforme  $\Sigma_\theta$ .

**Lema 2.2.8**  *$M_{\theta,\alpha,\beta}^*$  es una superficie minimal doblemente periódica, con retículo de periodos generado por  $F_{\gamma_A}, F_{\gamma_2}$ , con género 1 y 4 finales horizontales de tipo Scherk en el cociente.*

*Demostración.* Es fácil comprobar que el vector flujo (resp. el periodo) de la superficie conjugada  $M_{\theta,\alpha,\beta}^*$  a lo largo de una curva  $\gamma \subset \Sigma_\theta$  coincide con el periodo (resp. el opuesto del vector flujo) de la superficie original  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  a lo largo de la misma curva  $\gamma$ . Deducimos entonces de (2.7), (2.10) y (2.12) que  $M_{\theta,\alpha,\beta}^*$  es una superficie minimal completa, inmersa, invariante por el retículo de periodos generado por el vector horizontal  $P_{\gamma_A}^* = -F_{\gamma_A}$  y por  $P_{\gamma_2}^* = -F_{\gamma_2}$  (cuya tercera coordenada es  $-2\pi$ , luego  $\{P_{\gamma_A}^*, P_{\gamma_2}^*\}$  son linealmente independientes), con género 1 y 4 finales horizontales de tipo Scherk en el cociente. Además, como  $M_{\theta,0,0}^*$  es embebida ( $M_{\theta,0,0}^*$  se puede obtener simetrizando un grafo de Jenkins y Serrin, ver [30]), un razonamiento análogo

al seguido para  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  nos dice que  $M_{\theta,\alpha,\beta}^*$  es embebida, y por tanto doblemente periódica.  $\square$

Por (2.12), sabemos que se anula el vector periodo de  $M_{\theta,\alpha,\beta}^*$  a lo largo de  $\gamma_2^* = \gamma_1 + \gamma_A$ , y que la tercera componente del vector flujo de  $M_{\theta,\alpha,\beta}^*$  a lo largo de  $\gamma_2^*$  vale  $f_1(\theta)$ , donde  $f_1$  se definió en (2.9). El siguiente lema, junto con la Observación 2.2.4, nos asegura que las familias  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}^* = \{M_{\theta,\alpha,\beta}^* \mid (\theta, \alpha, \beta) \in \mathcal{I}\}$  coinciden tras considerar ciertas normalizaciones que identifican dos superficies que se diferencian en una homotecia y una rotación alrededor del eje  $x_3$ . Es decir, tras ciertas normalizaciones,  $\mathcal{K}$  es una familia autoconjugada.

**Lema 2.2.9** *Para cada  $(\theta, \alpha, \beta) \in \mathcal{I}_1$ , la superficie  $M_{\frac{\pi}{2}-\theta,\alpha,\beta-\frac{\pi}{2}}$  coincide con  $M_{\theta,\alpha,\beta}^*$  salvo una homotecia y una rotación alrededor del eje  $x_3$ .*

*Demostración.* Como  $\Sigma_{\frac{\pi}{2}-\theta} = \{(\tilde{z}, \tilde{w}) \mid \tilde{w}^2 = (\tilde{z}^2 - 1)^2 + 4\tilde{z}^2 \sec^2 \theta\}$ , y la transformación de Möbius  $\varphi(z) = \frac{1-iz}{z-i}$  aplica biyectivamente los puntos de ramificación de la  $z$ -proyección de  $\Sigma_\theta$  en los puntos de ramificación de la  $\tilde{z}$ -proyección de  $\Sigma_{\frac{\pi}{2}-\theta}$ , deducimos que  $\Theta(z, w) = (\varphi(z), \tilde{w}(\varphi(z)))$  es un biholomorfismo entre  $\Sigma_\theta$  y  $\Sigma_{\frac{\pi}{2}-\theta}$ . Por otro lado, no es difícil comprobar que  $g_{\theta,\alpha,\beta} = g_{\frac{\pi}{2}-\theta,\alpha,\beta-\frac{\pi}{2}} \circ \Theta$  y que  $\Theta^* dh_{\frac{\pi}{2}-\theta} = -\frac{\mu(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\mu(\theta) \tan \theta} idh_\theta = -\frac{K(\sin^2 \theta)}{K(\cos^2 \theta)} idh_\theta$ , donde estamos denotando por  $g_{\theta,\alpha,\beta}$  (resp.  $dh_\theta$ ) a la aplicación de Gauss (resp. diferencial altura) de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ . De aquí, se deduce fácilmente el Lema 2.2.9.  $\square$





## Capítulo 3

# El espacio $\mathcal{W}$ de datos de Weierstrass

En el capítulo anterior hemos descrito el espacio  $\mathcal{K} = \{M_{\theta,\alpha,\beta} \mid (\theta, \alpha, \beta) \in \mathcal{I}\}$  de ejemplos KMR (el conjunto de índices  $\mathcal{I}$  definido como en la Observación 2.2.4), que son superficies minimales doblemente periódicas con género 1 y 4 finales horizontales en el cociente. El retículo de periodos de cada  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  está generado por el periodo  $P_A$  en sus finales y el periodo  $P_{\gamma_1}$  de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  a lo largo de una clase de homología no nula en el toro compactificado. Si consideramos el cociente de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  por el retículo de periodos generado por  $P_A$  y  $kP_{\gamma_1}$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , obtenemos una superficie minimal doblemente periódica con género 1 y  $4k$  finales horizontales en el cociente. A esta superficie minimal, a la que seguiremos llamando ejemplo KMR, la denotaremos de nuevo por  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ . De aquí en adelante,  $\mathcal{K}$  denotará el espacio de ejemplos KMR con  $4k$  finales, donde  $k$  es un natural fijo. Salvo una rotación alrededor del eje  $x_3$ , podemos ver  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  como un elemento de  $\mathcal{S}$ ; es decir,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ . En la Observación 2.2.5, vimos que  $\mathcal{K}$  es una componente conexa de  $\mathcal{S}$  cuando  $k = 1$ . Claramente, esto sigue siendo cierto para  $k \in \mathbb{N}$  arbitrario; es decir, el espacio  $\mathcal{K}$  de ejemplos KMR con  $4k$  finales, es una componente conexa de  $\mathcal{S}$ . Por otro lado, cada ejemplo KMR induce un número discreto de superficies marcadas en  $\tilde{\mathcal{S}}$ . Denotaremos por  $\tilde{\mathcal{K}}$  al espacio formado por estas superficies marcadas procedentes de ejemplos KMR, a las cuales llamaremos *ejemplos KMR marcados*. El Teorema de unicidad 2 es equivalente a probar que  $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{K}}$ .

Veremos cada superficie marcada en  $\tilde{\mathcal{S}}$  como un elemento de una variedad compleja  $\mathcal{W}$  de dimensión finita, por medio de una técnica llamada *esquemas de Hurwitz*. Éste es un método usado en Geometría Algebraica para parametrizar el espacio de aplicaciones meromorfas de cierto grado predeterminado sobre una superficie de Riemann compacta (que depende de la aplicación meromorfa) de género también

prescrito (ver [15] para más información). En nuestra situación, la aplicación meromorfa será la aplicación de Gauss de unos datos de Weierstrass admisibles para nuestro problema, y la construcción general es bastante simple, como veremos a continuación.

### 3.1. Definición y propiedades de $\mathcal{W}$

Definimos  $\mathcal{W}$  como el espacio formado por listas  $(\mathbb{M}, g, p_1, \dots, p_{2k}, q_1, \dots, q_{2k}, [\gamma])$ , donde  $g : \mathbb{M} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  es una función meromorfa de grado  $2k$  definida en un toro  $\mathbb{M} = g^{-1}(\overline{\mathbb{C}})$ , con ceros  $\{p_1, \dots, p_{2k}\}$  y polos  $\{q_1, \dots, q_{2k}\}$ , ninguno de éstos punto de ramificación de  $g$ , y  $[\gamma] \in H_1(g^{-1}(\mathbb{C}^*), \mathbb{Z})$  es una clase de homología con un representante embebido que no es trivial en  $H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$ . Nótese que una misma aplicación  $g$  en las condiciones anteriores puede verse como infinitos elementos de  $\mathcal{W}$ , sin más que considerar distintos órdenes de los  $p_j, q_j$  y/o distintas clases de homología  $[\gamma] \in H_1(g^{-1}(\mathbb{C}^*), \mathbb{Z})$ . Abreviaremos denotando sólo por  $g$  a los elementos de  $\mathcal{W}$ , y los llamaremos *aplicaciones meromorfas marcadas*.

A continuación, dotaremos a  $\mathcal{W}$  de una topología para la cual el conjunto (infinito) de aplicaciones meromorfas marcadas asociadas a una misma aplicación meromorfa  $g : \mathbb{M} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  es discreto. En primer lugar, nótese que por la fórmula de Riemann-Hurwitz, cada  $g \in \mathcal{W}$  tiene número total de ramificación  $4k$  (i.e. tiene  $4k$  valores de ramificación, contando multiplicidad). Sea  $g \in \mathcal{W}$  y sean  $b_1, \dots, b_l \in \mathbb{C}^*$  sus valores de ramificación,  $l \leq 4k$ . Consideramos  $l$  discos disjuntos  $D_1, \dots, D_l \subset \mathbb{C}^*$ , donde cada  $D_j$  está centrado en  $b_j$ ; y sea  $\Omega = \overline{\mathbb{C}} - \cup_{j=1}^l D_j$ . Tomando los radios de los  $D_j$  suficientemente pequeños, podemos suponer que  $0, \infty \notin D_j$ , que cada componente de  $g^{-1}(D_j)$  es un disco, y que tanto  $\Omega$  como  $g^{-1}(\Omega)$  son conexos. Así,  $g : g^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega$  es un recubridor (no ramificado) de  $2k$  hojas. Además, aplicándole la fórmula de Riemann-Hurwitz a  $g|_{D_j}$ , se puede probar que cada componente de  $g^{-1}(D_j)$  contiene a lo más un punto de ramificación de  $g$ . Consideramos en  $\mathcal{W}$  la topología definida por el sistema de entornos descrito a continuación. Fijados  $D_1, \dots, D_l$  en las condiciones anteriores y  $\Omega = \overline{\mathbb{C}} - \cup_{j=1}^l D_j$ , definimos el entorno  $U(g)$  de  $g$  en  $\mathcal{W}$  como el conjunto formado por aplicaciones meromorfas marcadas  $f \in \mathcal{W}$  que cumplen:

- (1)  $f|_{f^{-1}(\Omega)}$  no tiene puntos de ramificación, y las restricciones  $f : f^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega$  y  $g : g^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega$  son isomorfismos como aplicaciones recubridoras. Obsérvese que esto permite identificar conformemente  $f^{-1}(\Omega)$  con  $g^{-1}(\Omega)$ . En particular, los ceros (resp. polos) de  $g$  se identifican con los ceros (resp. polos) de  $f$ .
- (2) El orden en la lista de ceros y polos de  $f$  coincide con el orden en la lista de ceros y polos de  $g$ , vía la identificación descrita en el apartado anterior.

- (3) Cada componente de  $f^{-1}(D_j)$  es un disco. Además, los discos de  $f^{-1}(D_j)$  están en correspondencia biyectiva con los discos de  $g^{-1}(D_j)$  mediante la identificación descrita en (1); y coinciden los números de ramificación de las restricciones de  $f$  y  $g$  a dichos discos.
- (4) Siempre puede elegirse un representante  $\gamma$  embebido de la clase de homología  $[\gamma] \in H_1(g^{-1}(\mathbb{C}^*), \mathbb{Z})$  contenido en  $g^{-1}(\Omega)$ . Por (1), puede verse  $\gamma$  como un ciclo embebido en  $f^{-1}(\Omega)$  que induce una clase de homología  $[\gamma] \in H_1(f^{-1}(\mathbb{C}^*), \mathbb{Z})$  no nula en  $H_1(f^{-1}(\overline{\mathbb{C}}), \mathbb{Z})$ . La clase de homología asociada a la aplicación mero-morfa marcada  $f$  coincide con  $[\gamma]$ .

A continuación, dotamos a  $\mathcal{W}$  de una estructura de variedad compleja de dimensión  $4k$ . Con la topología definida anteriormente, si los  $4k$  valores de ramificación de cierta  $g \in \mathcal{W}$  son distintos, entonces cada  $f \in \mathcal{W}$  en un entorno  $U(g)$  de  $g$  suficientemente pequeño tendrá también los  $4k$  valores de ramificación distintos. Y en tal caso, la aplicación que le hace corresponder a cada  $f \in U(g)$  la lista de sus valores de ramificación (fijado un cierto orden) es una carta local de  $\mathcal{W}$  alrededor de  $g$ . Si el número de valores de ramificación distintos de  $g$  es menor estricto que  $4k$ , la correspondencia anterior no sería una carta local. Por tanto, le hacemos corresponder a cada  $g \in \mathcal{W}$  la lista  $(\sigma_1(g), \dots, \sigma_{4k}(g))$ , donde estamos denotando por  $\sigma_j(g)$  al polinomio elemental simétrico de orden  $j$  de los  $4k$  valores de ramificación (no necesariamente distintos) de  $g$ ,  $1 \leq j \leq 4k$ . Dichos polinomios elementales simétricos se pueden ver como funciones holomorfas  $\sigma_j : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $1 \leq j \leq 4k$ , y la aplicación  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{4k}) : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}^{4k}$  es un biholomorfismo local. En particular,  $\mathcal{W}$  se puede ver vía dicho biholomorfismo local como una subvariedad (abierto) de  $\mathbb{C}^{4k}$ .

Recordemos ahora ciertos resultados de la Teoría de Variable Compleja que usaremos posteriormente aplicados a  $\mathcal{W}$  (dichos resultados se pueden encontrar en [17] para  $\mathbb{C}^n$ ). Se dice que un subconjunto  $V$  de una variedad compleja  $N$  es una *subvariedad analítica* si para cada punto  $p \in N$  existe un entorno  $U$  de  $p$  en  $N$  y un número finito de funciones holomorfas  $f_1, \dots, f_r$  definidas en  $U$  tales que  $U \cap V = \{q \in U \mid f_j(q) = 0, 1 \leq j \leq r\}$ .

**Teorema 3.1.1 (Teorema de Extensión de Riemann** [17], pág. 9) *Sea  $\mathcal{U}$  una variedad compleja y  $V$  una subvariedad analítica suya,  $V \neq \mathcal{U}$ . Si  $f : \mathcal{U} - V \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación holomorfa acotada, entonces  $f$  se extiende a todo  $\mathcal{U}$  de forma holomorfa.*

**Teorema 3.1.2 (Teorema de la aplicación propia** [17], pág. 395) *Supongamos que  $f : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$  es una aplicación holomorfa entre dos variedades complejas  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ . Si  $V \subset \mathcal{U}_1$  es una subvariedad analítica tal que  $f|_V$  es una aplicación propia, entonces  $f(V)$  es una subvariedad analítica de  $\mathcal{U}_2$ .*

**Corolario 3.1.3** *Las únicas subvariedades analíticas compactas de  $\mathcal{W}$  son los subconjuntos finitos.*

*Demostración.* Para cada  $j = 1, \dots, 4k$ , sea  $\sigma_j : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$  la función holomorfa definida anteriormente, y sea  $V \subset \mathcal{W}$  una subvariedad analítica compacta. Como  $\sigma_j|_V$  es claramente una aplicación propia, el Teorema 3.1.2 nos dice entonces que  $\sigma_j(V)$  es una subvariedad analítica de  $\mathbb{C}$ , y por tanto un subconjunto discreto. Y por compacidad, deducimos que  $\sigma_j(V) \subset \mathbb{C}$  es un conjunto finito, para  $j = 1, \dots, 4k$ . Así, el conjunto formado por todos los valores de ramificación de las aplicaciones meromorfas marcadas de  $V$  es finito. En particular,  $V$  es discreto en la topología de  $\mathcal{W}$ , y por tanto finito.  $\diamond$

En general, una aplicación holomorfa entre variedades complejas de la misma dimensión no tiene por qué ser abierta. Ahora bien, el resultado sí es cierto si la aplicación es además finita.

**Teorema 3.1.4 (Teorema de la aplicación abierta [17], pág. 667)** *Sea  $\mathcal{U}$  una variedad compleja de dimensión  $n$ , y  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}^n$  una aplicación holomorfa. Supongamos que  $x_0$  es un punto de  $\mathcal{U}$  tal que  $f^{-1}(\mathbf{0}) = \{x_0\}$ , donde estamos denotando  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ . Entonces, existe un entorno abierto  $\mathcal{O}$  de  $x_0$  en  $\mathcal{U}$  tal que  $f|_{\mathcal{O}}$  es una aplicación abierta.*

Una vez estudiada la estructura compleja de  $\mathcal{W}$ , justifiquemos el título de este capítulo; es decir, comprobemos que  $\mathcal{W}$  se corresponde con el espacio de los datos de Weierstrass en las condiciones del Teorema 2. Para ello, vamos a ver que cada  $g \in \mathcal{W}$  determina de forma única una 1-forma holomorfa, que jugará el papel de diferencial altura. Como el espacio de diferenciales holomorfas sobre un toro tiene dimensión compleja 1, para cada aplicación meromorfa marcada  $g = (\mathbb{M}, g, p_1, \dots, p_{2k}, q_1, \dots, q_{2k}, [\gamma]) \in \mathcal{W}$  existe una única 1-forma holomorfa  $\phi = \phi(g)$  de  $\mathbb{M}$  cumpliendo

$$\int_{\gamma} \phi = 2\pi i. \quad (3.1)$$

Se puede probar que  $\phi$  depende de forma holomorfa de  $g$ , en el sentido de que existe un entorno  $U(g)$  de  $g$  en  $\mathcal{W}$  para el que la aplicación  $(f, z) \in U(g) \times g^{-1}(\Omega) \mapsto \frac{\phi(f)}{\phi(g)}(z)$  es holomorfa. El par  $(g, \phi)$  se puede ver como los datos de Weierstrass de una hipotética superficie minimal en el ambiente del Teorema 2, definidos sobre  $M = g^{-1}(\mathbb{C}^*)$ , con aplicación de Gauss  $g$  y diferencial altura  $\phi$ . La ecuación (3.1) nos dice que el vector periodo (resp. flujo) de  $(g, \phi)$  a lo largo de  $\gamma$  es horizontal (resp. tiene tercera coordenada  $2\pi$ ). Diremos que  $g \in \mathcal{W}$  *cierra periodos* si, tomando  $dh = \phi$

y  $\gamma_2 = \gamma$ , se cumple la primera ecuación de (1.15), y existe  $a \in \mathbb{R}^*$  cumpliendo las ecuaciones que aparecen en (1.14) (nótese que la segunda ecuación de (1.15) se cumple por definición de  $\phi$ ).

**Lema 3.1.5** *Si  $g \in \mathcal{W}$  cierra periodos, entonces  $(g, \phi)$  son los datos de Weierstrass de una superficie minimal  $M$  propiamente inmersa en  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , siendo  $\mathbb{T}$  un toro llano 2-dimensional,  $M$  con curvatura total  $8k\pi$  y  $4k$  finales horizontales de tipo Scherk. Además, el flujo en los finales  $p_1, q_1, \dots, p_k, q_k$  es opuesto al flujo en los finales  $p_{k+1}, q_{k+1}, \dots, p_{2k}, q_{2k}$ , e igual a  $(\pi a, 0, 0)$ , donde  $a$  es el positivo que satisface (1.14).*

*Demostración.* Supongamos que  $g \in \mathcal{W}$  cierra periodos. Se deduce fácilmente de (1.14) que los periodos de  $(g, \phi)$  en los finales valen  $\pm(0, \pi a, 0)$ . Y además, el periodo  $P_\gamma$  de  $(g, \phi)$  a lo largo de  $\gamma$  se anula, por (1.15). Por tanto, basta comprobar que si  $\alpha \subset g^{-1}(\mathbb{C}^*)$  es una curva cerrada tal que  $\{[\alpha], [\gamma]\}$  es una base de  $H_1(g^{-1}(\overline{\mathbb{C}}), \mathbb{Z})$ , entonces el vector periodo  $P_\alpha$  asociado a  $\alpha$  y  $(0, \pi a, 0)$  son linealmente independientes. Pero esto es inmediato, ya que  $\phi$  es una diferencial holomorfa no nula,  $\{[\alpha], [\gamma]\}$  es una base de homología de  $g^{-1}(\overline{\mathbb{C}})$  y  $\text{Re} \int_\gamma \phi = 0$ , de donde deducimos que  $\text{Re} \int_\alpha \phi \neq 0$ . Por tanto,  $P_\alpha$  tiene tercera coordenada no nula.  $\square$

Como hemos dicho anteriormente, para que  $g \in \mathcal{W}$  cierre periodos, se tienen que satisfacer las  $4k$  ecuaciones que aparecen en (1.14), para  $dh = \phi$ . Pero como los residuos de una diferencial meromorfa definida sobre una superficie de Riemann compacta deben sumar 0, basta que (1.14) se cumpla para  $1 \leq j \leq 2k - 1$ , con lo cual quedan  $4k - 2$  ecuaciones. Por otro lado, para que  $g \in \mathcal{W}$  cierre periodos también se ha de satisfacer la primera ecuación de (1.15) para  $\gamma_2 = \gamma$  (i.e. el periodo de  $(g, \phi)$  a lo largo de  $\gamma$  se tiene que anular), en cuyo caso la parte horizontal del flujo de  $M$  a lo largo de  $\gamma$  viene dada por

$$F(\gamma) = i \int_\gamma g \phi \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2. \quad (3.2)$$

## 3.2. Las aplicaciones ligadura y clasificadora

**Definición 3.2.1** Definimos la *aplicación ligadura*  $L : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}^{4k}$  como la aplicación que le asocia a cada  $g \in \mathcal{W}$  la lista

$$L(g) = \left( \text{Res}_{p_1} \left( \frac{\phi}{g} \right), \dots, \text{Res}_{p_{2k-1}} \left( \frac{\phi}{g} \right), \text{Res}_{q_1}(g\phi), \dots, \text{Res}_{q_{2k-1}}(g\phi), \int_\gamma \frac{\phi}{g}, \int_\gamma g\phi \right).$$

Como  $\phi$  depende de  $g$  de forma holomorfa y las componentes de  $L$  se pueden calcular a partir de integrales en curvas contenidas en  $g^{-1}(\Omega)$  (ver la definición de la topología de  $\mathcal{W}$ ), concluimos que  $L$  es holomorfa.

Consideramos el subconjunto de  $\mathcal{W}$  formado por aquellas aplicaciones meromorfas marcadas que cierran periodos,

$$\mathcal{M} = \{g \in \mathcal{W} \mid L(g) = L_{(a,b)}, \text{ para ciertos } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{C}\},$$

donde  $L_{(a,b)} = \left( \underbrace{a, \dots, a}_{1 \leq j \leq k}, \underbrace{-a, \dots, -a}_{k+1 \leq j \leq 2k-1}, \underbrace{-a, \dots, -a}_{2k \leq j \leq 3k-1}, \underbrace{a, \dots, a}_{3k \leq j \leq 4k-2}, b, \bar{b} \right) \in \mathbb{C}^{4k}$ . Es fácil ver que  $\mathcal{M}$  es cerrado en  $\mathcal{W}$ .

**Observación 3.2.2** Como  $L$  es holomorfa, se tiene que  $\mathcal{M}(a, b) = \{g \in \mathcal{W} \mid L(g) = L_{(a,b)}\}$  es una subvariedad analítica de  $\mathcal{W}$ , para cada  $a \in \mathbb{R}^*$  y cada  $b \in \mathbb{C}$ . Por definición de  $L$ ,  $\mathcal{M}(a, b)$  coincide con el conjunto de superficies minimales inmersas marcadas cuyo vector periodo en los finales es  $\pm(0, \pi a, 0)$  y cuyo vector flujo a lo largo de la clase de homología dada en la última componente de la superficie marcada es  $(i\bar{b}, 2\pi)$ .

La aplicación  $J$  definida a continuación se podrá ver como una inyección canónica del espacio  $\tilde{\mathcal{S}}$  de superficies marcadas definido en la Sección 1.9, en  $\mathcal{M}$ ,

$$(M, p_1, \dots, p_{2k}, q_1, \dots, q_{2k}, [\gamma_2]) \mapsto J(M) = (g^{-1}(\bar{\mathbb{C}}), g, p_1, \dots, p_{2k}, q_1, \dots, q_{2k}, [\gamma_2]),$$

donde estamos denotando por  $g$  a la aplicación de Gauss de  $M$ . No es difícil comprobar que  $J$  así definida es una aplicación inyectiva. En efecto, supongamos que  $M_1, M_2$  son dos superficies marcadas en  $\tilde{\mathcal{S}}$  tales que  $J(M_1) = J(M_2)$ . En particular, tanto las compactificaciones conformes como la aplicaciones de Gauss de  $M_1, M_2$  coinciden, de donde deducimos que  $M_1, M_2$  son la misma superficie geométrica. Como además  $J(M_1) = J(M_2)$  nos dice que también coinciden los órdenes de ceros y polos de la aplicación de Gauss y las clases de homología destacadas de  $M_1, M_2$ , concluimos que  $M_1 = M_2$  como superficies marcadas; y por tanto,  $J$  es inyectiva. Nótese que el Lema 3.1.5 da la existencia de una inversa de  $J$  por la izquierda,  $J^{-1} : J(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$  (i.e.  $J^{-1} \circ J = \text{identidad}$ , aunque  $J \circ J^{-1}$  no coincide necesariamente con la identidad).

**Lema 3.2.3** La aplicación  $J : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{M}$  es un embebimiento topológico, considerando en  $\mathcal{M}$  la topología inducida de  $\mathcal{W}$ . Además, si identificamos  $\tilde{\mathcal{S}}$  con  $J(\tilde{\mathcal{S}})$ , entonces  $\tilde{\mathcal{S}}$  es un conjunto abierto y cerrado en  $\mathcal{M}$ , luego una componente conexa suya.

*Demostración.* Sea  $\{M_n\}_n$  una sucesión en  $\tilde{\mathcal{S}}$  que converge a una superficie marcada  $M \in \tilde{\mathcal{S}}$ . En particular, la aplicación de Gauss  $g_n$  de  $M_n$  converge uniformemente sobre compactos cuando  $n \rightarrow \infty$  a la aplicación de Gauss  $g$  de  $M$ . A partir de esto y usando razonamientos similares a los que siguen, llegamos a que para  $n$  suficientemente grande,  $J(M_n)$  cae en un entorno tan pequeño como queramos de  $J(M)$  en la topología de  $\mathcal{W}$ . Esto prueba la continuidad de  $J$ .

Para probar que  $J$  es una aplicación cerrada, tomemos una sucesión  $\{M_n\}_n$  en  $\tilde{\mathcal{S}}$  cuyas imágenes por  $J$  convergen con la topología de  $\mathcal{W}$  a una aplicación meromorfa marcada  $g \in \mathcal{M}$ , y veamos que  $g = J(M)$ , para cierta  $M \in \tilde{\mathcal{S}}$ . Como  $J(M_n) \in \mathcal{M}$ , y  $\mathcal{M}$  es un cerrado en la topología de  $\mathcal{W}$ , tenemos que  $g \in \mathcal{M}$ . Luego  $g$  representa una superficie minimal propiamente inmersa marcada  $M$  (Lema 3.1.5). Se trata de probar que  $M$  es realmente embebida. Como  $J(M_n) \rightarrow g$  en la topología de  $\mathcal{W}$ , fijado un entorno  $U(g)$  de  $g$  en  $\mathcal{W}$  arbitrariamente pequeño,  $J(M_n) \in U(g)$  para todo  $n$  suficientemente grande. En particular, los valores de ramificación de la aplicación de Gauss  $g_n$  de  $M_n$  son arbitrariamente próximos a los de  $g$ , e incluso se les puede asociar un orden, fijado un orden en los valores de ramificación de  $g$  (ver la definición de  $U(g)$ ). De aquí se deduce que el toro conforme obtenido como recubridor ramificado de  $\overline{\mathbb{C}}$  a través de  $g_n$  es arbitrariamente próximo al toro conforme obtenido como recubridor ramificado de  $\overline{\mathbb{C}}$  a través de  $g$ . O equivalentemente, como dichos toros conformes son topológicamente el mismo toro  $\mathbb{T}$ , si consideramos  $g_n, g$  definidas sobre  $\mathbb{T}$ , tenemos que las  $g_n$  convergen uniformemente a  $g$ . Y por tanto, las  $M_n$  convergen uniformemente en compactos de  $\mathbb{R}^3$  a  $M$ . Falta probar que  $M$  está embebida en  $\mathbb{R}^3$ , lo cual se obtiene a partir del Lema 4.0.8 que probaremos en el capítulo siguiente: Como el límite uniforme de superficies minimales compactas y embebidas es embebido, tenemos que  $M$  está embebida fuera de un entorno de sus finales. Ahora bien, la convergencia uniforme de las representaciones de Weierstrass de las  $M_n$  a la representación de Weierstrass de  $M$  nos dice que la sucesión de sus curvaturas de Gauss está uniformemente acotada, y el Lema 4.0.8 nos asegura entonces la existencia de un entorno tubular de  $M_n$ , de radio uniforme. En particular, la distancia entre finales consecutivos de  $M_n$  está acotada inferiormente, luego dos finales de  $M_n$  no pueden colapsar produciendo un mismo final en el límite, de donde deducimos que un entorno de los finales de  $M$  está embebido; y por tanto,  $M$  es una superficie embebida. Es decir,  $M \in \tilde{\mathcal{S}}$ . Con esto, obtenemos que  $J(\tilde{\mathcal{S}})$  es un cerrado en  $\mathcal{M}$ , y que  $J$  es una aplicación inyectiva, continua y cerrada, luego un embebimiento topológico.

Para terminar la demostración del Lema 3.2.3, falta probar que  $J(\tilde{\mathcal{S}})$  es un abierto de  $\mathcal{M}$ . Sea  $M \in \tilde{\mathcal{S}}$ , y sea  $\{g_n\}$  una sucesión en  $\mathcal{M}$  que converge a  $g = J(M)$ . Es decir, para  $n$  suficientemente grande,  $g_n$  cae en un entorno  $U(g)$  de  $g$  arbitrariamente pequeño. Consideramos  $\Omega = \overline{\mathbb{C}} - \cup_{j=1}^l D_j$ , siendo  $D_1, \dots, D_l \subset \mathbb{C}^*$  los pequeños discos

centrados en los valores de ramificación de  $g$  asociados a  $U(g)$ . Denotamos por  $M_n$  la superficie minimal inmersa marcada que nos da el Lema 3.1.5 aplicado a  $g_n$ , y sea  $\mathcal{P}_n$  el retículo 2-dimensional de periodos asociado a  $M_n$ . Para  $n$  suficientemente grande, podemos parametrizar conformemente la compactificación  $\mathbb{M}_n$  de  $M_n$  salvo pequeños discos alrededor de los puntos de ramificación de  $g_n$  por  $\psi_n : g_n^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^3/\mathcal{P}_n$ ; y similarmente para  $M$ ,  $\psi : g^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^3/\mathcal{P}$ . Por definición de  $U(g)$  dada al principio del capítulo, llegamos a que  $\psi_n(g_n^{-1}(\Omega))$  converge uniformemente a  $\psi(g^{-1}(\Omega))$ . De particular, los  $4k$  finales de las  $M_n$  convergen a los  $4k$  finales de  $M$ , de donde podemos deducir que  $\psi_n$  es un embebimiento para  $n$  suficientemente grande. Ahora bien, podemos tomar el radio de los discos  $D_i$  suficientemente pequeño de forma que  $g^{-1}(D_i)$  se pueda escribir como grafo. Para  $n$  grande, cada  $g_n^{-1}(D_i)$  es un disco cuya frontera está arbitrariamente próxima a la de  $g^{-1}(D_i)$ ; y como su imagen por la aplicación de Gauss cae en  $D_i$ , que es un disco de radio arbitrariamente pequeño, concluimos que el disco  $g_n^{-1}(D_i)$  está embebido. Así,  $M_n$  es una superficie embebida (i.e.  $M_n \in \tilde{\mathcal{S}}$ ) para  $n$  suficientemente grande, luego  $J(\tilde{\mathcal{S}}) \subset \mathcal{M}$  es abierto, y el lema queda probado.  $\square$

De aquí en adelante, identificaremos  $J$  con la aplicación inclusión, y veremos  $\tilde{\mathcal{S}}$  como un subconjunto de  $\mathcal{M}$ .

**Observación 3.2.4** *Como el espacio  $\mathcal{K}$  de ejemplos KMR con  $4k$  finales es una componente conexa de  $\mathcal{S}$  y la topología inducida de  $\mathcal{W}$  en  $\tilde{\mathcal{S}}$  coincide con la de la convergencia uniforme en compactos de  $\mathbb{R}^3$  (Lema 3.2.3), concluimos que  $\tilde{\mathcal{K}}$  es una componente conexa de  $\tilde{\mathcal{S}}$ . El Teorema 2 nos dirá que  $\tilde{\mathcal{S}}$  no tiene más componentes conexas.*

**Corolario 3.2.5** *Para cada vector  $H \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$  paralelo al eje  $x_2$  y cada  $F \in \mathbb{C}$ , el conjunto formado por las superficies marcadas  $M \in \tilde{\mathcal{S}}$  con vector periodo en los finales  $\pm H$  y flujo  $(F, 2\pi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$  a lo largo de la clase de homología  $[\gamma_2]$  en la última componente de  $M$ , es una subvariedad analítica de  $\mathcal{W}$ .*

*Demostración.* Consideremos  $a \neq 0$  tal que  $H = (0, \pi a, 0)$ , y  $b = -i\bar{F}$ . Como el conjunto de superficies minimales inmersas marcadas  $M$  con vector periodo en los finales  $\pm H$  y flujo  $(F, 2\pi)$  a lo largo de la clase de homología destacada de  $M$  como superficie marcada no es otro que  $\mathcal{M}(a, b)$ , deducimos que el conjunto al que se refiere la Proposición 3.2.5 coincide con  $\tilde{\mathcal{S}}(a, b) = \tilde{\mathcal{S}} \cap \mathcal{M}(a, b)$ . Por tanto, esta proposición es un corolario del Lema 3.2.3 y la Observación 3.2.2, ya que un abierto y cerrado de una subvariedad analítica es claramente una subvariedad analítica.  $\square$



A continuación vamos a definir una aplicación sobre  $\tilde{\mathcal{S}}$ , que asocia a cada superficie marcada la longitud de su periodo en los finales y la parte horizontal del flujo a lo largo de una clase de homología no nula de periodo  $\vec{0}$ . Esta aplicación, a la cual denotaremos por  $C$ , nos permitirá demostrar el Teorema 2 en el Capítulo 7. Además, una vez probada la unicidad de los ejemplos KMR de la que habla dicho teorema (i.e.  $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{K}}$ ), estudiaremos en el Capítulo 8 la topología del espacio  $\tilde{\mathcal{K}}$ , usando de nuevo dicha aplicación  $C$ . De hecho,  $C$  permitirá clasificar los ejemplos KMR, de ahí su nombre: aplicación clasificadora. A partir de esto, obtendremos (Capítulo 8) una descripción del espacio de moduli de las superficies doblemente periódicas de  $\mathbb{R}^3$  con finales paralelos y género 1 en el cociente; o lo que es lo mismo, una descripción del espacio de moduli de los ejemplos KMR.

**Definición 3.2.6** Los valores que la aplicación ligadura  $L$  toma sobre las superficies marcadas  $M \in \tilde{\mathcal{S}}$  quedan determinados por dos números  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{C}$  tales que  $\text{Res}_{p_1}(g^{-1}dh) = a$  y  $F_{\gamma_2} = (i\bar{b}, 2\pi)$ . Llamamos *aplicación clasificadora* a la aplicación  $C : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  dada por  $C(M) = (a, b)$ .

**Observación 3.2.7** Cada superficie minimal (geométrica)  $M \in \mathcal{S}$  se puede ver como dos (o más) superficies marcadas distintas  $M_1, M_2 \in \tilde{\mathcal{S}}$ , sin más que asociar-le clases de homología  $[\gamma_2(M_1)], [\gamma_2(M_2)] \in H_1(M, \mathbb{Z})$  distintas tales que  $[\gamma_2(M_1)] = [\gamma_2(M_2)]$  en  $H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$  (aquí  $\mathbb{M}$  es la compactificación de  $M$ ). Entonces,  $\gamma_2(M_1) - \gamma_2(M_2)$  es homólogo a un ciclo de periodo cero formado por un número par de lazos alrededor de finales. Luego las componentes de  $C(M_1), C(M_2)$  cumplen  $a(M_1) = \pm a(M_2) \in \mathbb{R}^*$ , y  $b(M_1) = b(M_2) + t\pi a(M_1)$  para cierto  $t \in \mathbb{Z}$  par.



# Capítulo 4

## Límites y estimación de curvatura

En este capítulo, vamos a estudiar condiciones en términos de la aplicación clasificadora  $C$  para que una sucesión de superficies en  $\tilde{\mathcal{S}}$  tenga curvatura de Gauss uniformemente acotada. En lo que sigue, denotaremos por  $K_\Sigma$  a la curvatura de Gauss de una superficie  $\Sigma$ . También estudiaremos los posibles límites de parciales de una sucesión  $\{M_n\}_n$  en  $\tilde{\mathcal{S}}$  cuya sucesión de curvaturas de Gauss  $\{K_{M_n}\}_n$  está uniformemente acotada. Por el Teorema 1.5.2, para asegurar en este caso la existencia de una parcial de  $\{M_n\}_n$  convergente, basta obtener una cota local del área (siempre es posible obtener un punto de acumulación, puesto que estamos identificando por traslaciones las superficies en  $\tilde{\mathcal{S}}$ ). Dicha cota local del área se obtiene como consecuencia del siguiente lema.

**Lema 4.0.8** *Sea  $\mathcal{P}$  un retículo 2-dimensional de  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3/\mathcal{P}$  una superficie minimal (orientable) propiamente embebida, no llana, con topología finita y  $4k$  finales horizontales de tipo Scherk. Denotamos por  $H, T$  dos generadores de  $\mathcal{P}$ , y asumimos que  $H$  apunta en la dirección del eje  $x_2$ . Supongamos además que  $|K_\Sigma| \leq c$ , para cierta  $c > 0$ . Entonces, se tienen las siguientes propiedades:*

- (i) *Tanto  $\|H\|$  como la separación vertical entre dos finales izquierda (resp. derecha) consecutivos de  $\Sigma$ , es mayor o igual que  $2/\sqrt{c}$ . En particular, la tercera coordenada  $T_3$  de  $T$  cumple  $|T_3| \geq 4k/\sqrt{c}$ .*
- (ii) *El radio de inyectividad de  $\mathbb{R}^3/\mathcal{P}$  está acotado inferiormente por  $1/\sqrt{c}$ , y  $\Sigma$  admite un entorno tubular (abierto) de radio  $1/\sqrt{c}$  en  $\mathbb{R}^3/\mathcal{P}$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $\tilde{\Sigma}$  al levantamiento de  $\Sigma$  a  $\mathbb{R}^3$ , que es doblemente periódico. Sabemos, gracias al Teorema del Semiespacio de Hoffman y Meeks (Teorema 1.7.4), que  $\tilde{\Sigma}$  es una superficie conexa. Como  $|K_{\tilde{\Sigma}}| \leq c$  y los finales de  $\tilde{\Sigma}$  son

asintóticos a semiplanos horizontales, el Lema 1.8.9 nos dice que  $\tilde{\Sigma}$  admite un entorno tubular  $\tilde{\Sigma}(\varepsilon)$  de radio  $\varepsilon = 1/\sqrt{c}$ . En particular, la separación vertical entre dos finales izquierda consecutivos (resp. derecha) de  $\tilde{\Sigma}$  es mayor o igual que  $2\varepsilon$ . Y como  $\Sigma$  tiene  $2k$  finales izquierda, deducimos que  $|T_3| \geq 4k\varepsilon$ . Ahora, consideremos un punto  $p \in \tilde{\Sigma}$  donde la aplicación de Gauss apunte en la dirección del eje  $x_2$ . Alrededor de  $p$ , podemos expresar localmente  $\tilde{\Sigma}$  como grafo  $\mathcal{G}$  sobre un disco contenido en el plano tangente a  $\tilde{\Sigma}$  en  $p$ . Claramente, si expresamos  $\tilde{\Sigma}$  como grafo alrededor de  $p + H$  obtenemos  $\mathcal{G} + H$ . Razonando como antes con  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G} + H$  en vez de con dos finales izquierda consecutivos, obtenemos que  $\|H\| \geq 2\varepsilon$ . Esto prueba (i).

Sea  $r$  el radio de inyectividad de  $\mathbb{R}^3/\mathcal{P}$ . Como  $\mathbb{R}^3/\mathcal{P}$  es un espacio llano, sus geodésicas no tienen puntos conjugados, luego  $2r$  coincide con el mínimo de las longitudes de las geodésicas cerradas contenidas en  $\mathbb{R}^3/\mathcal{P}$ . Y por tanto,

$$2r = \min_{v \in \mathcal{P} - \{0\}} \|v\| \geq \min(\|H\|, |T_3|) \geq \min\left(\frac{2}{\sqrt{c}}, \frac{4k}{\sqrt{c}}\right) = \frac{2}{\sqrt{c}}.$$

De lo anterior, también se deduce que dos puntos  $p, q \in \mathbb{R}^3$  homólogos en  $\mathcal{P}$  (es decir, que el vector  $p - q$  es un elemento de  $\mathcal{P}$ ) están separados por una distancia mayor o igual que  $2r$ . Así, concluimos que  $\tilde{\Sigma}(\varepsilon)/\mathcal{P}$  es un entorno tubular de  $\Sigma$  de radio  $1/\sqrt{c}$ .  $\square$

## 4.1. Límites de superficies marcadas en $\tilde{\mathcal{S}}$

A continuación, describimos todos los límites posibles de sucesiones  $\{M_n\}_n$  de superficies en las hipótesis del Teorema 2, cuya curvatura esté uniformemente acotada. Antes, fijemos la notación. Por la Proposición 1.9.5, el retículo de periodos  $\mathcal{P}_n$  de cada  $M_n$  está generado por el periodo  $H_n = (0, \pi a_n, 0)$  en los finales, con  $a_n > 0$ , y un vector no horizontal  $T_n = P_{\gamma_1(n)} \neq 0$ , siendo  $\gamma_1(n) \subset M_n$  una curva cerrada cuya clase de homología es no nula en  $H_1(\mathbb{M}_n, \mathbb{Z})$ , donde estamos denotando por  $\mathbb{M}_n$  a la compactificación de  $M_n$ .

**Proposición 4.1.1** *Sea  $\{\tilde{M}_n\}_n$  una sucesión de superficies minimales doblemente periódicas en  $\mathbb{R}^3$ , cuyo retículo de periodos  $\mathcal{P}_n$  está en las condiciones descritas anteriormente. Supongamos que para cada  $n$ ,  $M_n = \tilde{M}_n/\mathcal{P}_n$  tiene género 1 y  $4k$  finales horizontales de tipo Scherk, que  $\tilde{M}_n$  pasa por el origen  $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ , y que  $\max |K_{\tilde{M}_n}| = |K_{\tilde{M}_n}(\vec{0})| = 1$ . Entonces, una parcial de  $\tilde{M}_n$  converge uniformemente en compactos de  $\mathbb{R}^3$  y con multiplicidad 1 a una superficie minimal  $\tilde{M}_\infty$  propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  en la lista siguiente:*

1.  $\widetilde{M}_\infty$  es una catenoide vertical con flujo  $(0, 0, 2\pi)$ . En este caso, las sucesiones de periodos  $\{H_n\}_n, \{T_n\}_n$  no están acotadas, para cualquier elección de  $T_n$  en las condiciones de arriba.
2.  $\widetilde{M}_\infty$  es un helicoide vertical con vector periodo  $(0, 0, 2\pi m)$ , para algún  $m \in \mathbb{N}$ . En este caso,  $\{H_n\}_n$  no está acotada, pero podemos elegir  $T_n$  de forma que  $T_n \rightarrow (0, 0, 2\pi m)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
3.  $\widetilde{M}_\infty$  es una superficie minimal de Riemann con finales horizontales. Además,  $\{H_n\}_n$  no está acotada, y cierta elección de las  $T_n$  converge al vector periodo de  $\widetilde{M}_\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
4.  $\widetilde{M}_\infty$  es una superficie de Scherk simplemente periódica con dos finales horizontales. Además, cualquier elección de las  $T_n$  se tiene que la sucesión  $\{T_n\}_n$  no está acotada, mientras que  $\{H_n\}_n$  converge al vector periodo  $H_\infty = (0, a, 0)$  de  $\widetilde{M}_\infty$  (donde  $a > 0$ ), y  $\widetilde{M}_\infty/H_\infty$  tiene género 0.
5.  $\widetilde{M}_\infty$  es una superficie de Scherk doblemente periódica, y tanto  $\{H_n\}_n$  como  $\{T_n\}_n$  convergen respectivamente a los vectores periodo  $H_\infty, T_\infty$  de  $\widetilde{M}_\infty$ . Además, el cociente  $\widetilde{M}_\infty/\{H_\infty, T_\infty\}$  tiene género 0, al menos dos finales horizontales, y exactamente dos finales no horizontales.
6.  $\widetilde{M}_\infty$  es una superficie minimal doblemente periódica, con género 1 y  $4k$  finales horizontales de tipo Scherk. En este caso,  $H_n \rightarrow H_\infty$  y  $T_n \rightarrow T_\infty$ , donde  $H_\infty, T_\infty$  satisfacen la Proposición 1.9.5 para  $M_\infty$ .

*Demostración.* Por el Lema 4.0.8, existe una cota local del área para las  $\widetilde{M}_n$ . Como por hipótesis  $\{|K_{\widetilde{M}_n}|\}_n$  está uniformemente acotada y  $\vec{0}$  es un punto de acumulación de  $\{\widetilde{M}_n\}_n$ , el Teorema 1.5.2 nos asegura la existencia de una parcial de  $\{\widetilde{M}_n\}_n$  (que seguimos denotando por  $\{\widetilde{M}_n\}_n$  para abreviar notación) convergiendo uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^3$  a una superficie minimal  $\widetilde{M}_\infty$  propiamente embebida, con  $\vec{0} \in \widetilde{M}_\infty$  y  $|K_{\widetilde{M}_\infty}(\vec{0})| = 1$ . En particular,  $\widetilde{M}_\infty$  es completa, orientable y no llana, luego no puede ser estable por el Teorema 1.5.4. Y por tanto, la multiplicidad de la convergencia de  $\{\widetilde{M}_n\}_n$  a  $\widetilde{M}_\infty$  es 1 (Proposición 1.5.3). Además, como la aplicación de Gauss de cada  $\widetilde{M}_n$  omite las direcciones verticales, lo mismo le ocurrirá para  $\widetilde{M}_\infty$  por el Teorema de la Aplicación Abierta. Así,  $\widetilde{M}_\infty$  tendrá al menos dos finales con normal límite vertical, correspondientes a un cero y un polo de la aplicación de Gauss  $g_\infty$  de  $\widetilde{M}_\infty$ . A continuación, discutimos los distintos casos, dependiendo de si las sucesiones  $\{H_n\}_n, \{T_n\}_n$  de periodos están o no acotadas.

• Supongamos que ni  $\{H_n\}_n$  ni  $\{T_n\}_n$  están acotadas, para cualquier posible elección de  $T_n$ . Tras pasar a una parcial, podemos asumir que la longitud de cualquier vector no nulo del retículo  $\mathcal{P}_n$  diverge cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces,  $\widetilde{M}_\infty$  puede verse como el límite de superficies con frontera  $\widetilde{\Sigma}_n$  de género 0 contenidas en dominios fundamentales de las  $\widetilde{M}_n$ , de donde deducimos que  $\widetilde{M}_\infty$  tiene curvatura total finita y género 0. El Teorema 1.7.2 de López y Ros nos dice que  $\widetilde{M}_\infty$  es una catenoide, que ha de ser vertical, ya que la aplicación de Gauss de  $\widetilde{M}_\infty$  omite las direcciones verticales. Como además sabemos que el máximo valor de  $|K_{\widetilde{M}_\infty}|$  es 1, concluimos que el flujo de  $\widetilde{M}_\infty$  debe ser  $(0, 0, 2\pi)$ , y obtenemos 1.

• Supongamos que la sucesión  $\{H_n\}_n$  no está acotada, pero existe una elección acotada de  $\{T_n\}_n$ . Pasando a una parcial, podemos asumir que  $H_n \rightarrow \infty$  y  $T_n \rightarrow T_\infty \in \mathbb{R}^3$ . Por el Lema 4.0.8, se tiene que  $|(T_n)_3| \geq 4k$  para todo  $n$ , luego  $|(T_\infty)_3| \geq 4k$ ; en particular,  $T_\infty \neq \vec{0}$ . Así,  $\widetilde{M}_\infty$  es invariante por la traslación de vector  $T_\infty$ . Además,  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  está propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3/T_\infty$  y su aplicación de Gauss tiene a lo sumo grado  $2k$ , deducimos que  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  tiene topología finita, luego  $\widetilde{M}_\infty$  es simplemente periódica. Entonces, los finales de  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  tienen que ser planos, helicoidales o de tipo Scherk, todos ellos con igual comportamiento asintótico. Y recordemos que al menos dos de sus finales tienen normal límite vertical. Descartamos que los finales de  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  sean de tipo Scherk, ya que al menos dos de ellos serían horizontales, lo cual forzaría a que  $T_\infty$  fuese horizontal, contradicción. Por tanto, los finales de  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  pueden ser asintóticos a planos horizontales o a finales de un helicoide vertical.

Supongamos que los finales de  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  son asintóticos a helicoides verticales, y probemos que entonces  $\widetilde{M}_\infty$  ha de ser un helicoide vertical. En este caso, la diferencial altura  $dh_\infty$  de  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  no tiene ceros, y tiene polos simples en los finales de  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$ . Si llamamos  $P$  al número de finales de  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  y  $G$  al género de su compactificación, entonces tenemos que  $P + 2(G - 1) = 0$ , de donde deducimos que  $P = 2$  y  $G = 0$ . Por el Teorema 1.8.8, llegamos a que  $\widetilde{M}_\infty$  es un helicoide vertical. Además, como  $|K_{\widetilde{M}_\infty}|$  alcanza su máximo en el origen con valor 1, el vector periodo de  $\widetilde{M}_\infty$  es de la forma  $(0, 0, 2\pi m)$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Esto prueba 2.

Ahora vamos a ver que si los finales de  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  son planos, entonces  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  es un ejemplo minimal de Riemann. Como los finales de  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  son horizontales y la distancia entre dos finales consecutivos es mayor o igual que 2, deducimos que  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  tiene una cantidad finita de finales. Veamos que  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  no puede tener género 0. Si fuese así,  $\widetilde{M}_\infty$  sería una superficie minimal de  $\mathbb{R}^3$  con género 0. En particular,  $\widetilde{M}_\infty$  tendría una cantidad finita de finales, ya que en caso contrario podríamos construir una curva contenida en  $\widetilde{M}_\infty$  uniendo dos finales homólogos por  $T_\infty$  (puesto que  $\widetilde{M}_\infty/T_\infty$  tiene una cantidad finita de finales), y por tanto dicha

curva tendría periodo no nulo, en contradicción con que  $\tilde{M}_\infty$  tiene género 0. Pero no es posible que  $\tilde{M}_\infty$  tenga una cantidad finita de finales, por el Principio del Máximo. Así, llegamos a que  $\tilde{M}_\infty/T_\infty$  es una superficie propiamente embebida con género 1 y un número finito de finales planos. El Teorema 1.8.4 de Meeks, Pérez y Ros nos dice que  $\tilde{M}_\infty/T_\infty$  es un ejemplo minimal de Riemann con finales horizontales, obteniendo así 3.

- Supongamos ahora que  $\{H_n\}_n$  está acotada, pero cualquier elección de  $\{T_n\}_n$  no lo está. Podemos asumir que  $H_n \rightarrow H_\infty = (0, a, 0)$ , para cierto  $a \geq 0$ , y  $T_n \rightarrow \infty$ . Por el Lema 4.0.8, sabemos que ha de ser  $a \geq 2$ , luego  $\tilde{M}_\infty$  es invariante por la traslación de vector  $H_\infty \neq \vec{0}$ . Como la aplicación de Gauss  $g_\infty$  de  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  tiene grado a lo sumo  $2k$ , deducimos que  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  tiene curvatura total finita. En particular,  $\tilde{M}_\infty$  es simplemente periódica. Y como sabemos que  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  tiene al menos dos finales con normal límite vertical, deducimos que los finales de  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  o bien son de tipo Scherk, con al menos dos de ellos horizontales, o bien son asintóticos a planos horizontales o helicoides verticales, todos ellos con el mismo comportamiento asintótico. Pero como  $H_\infty$  es horizontal y  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  es propia, los finales de  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  no pueden ser ni planos ni helicoidales. Por tanto, los finales de  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  son de tipo Scherk, al menos dos de ellos horizontales. Además, sabemos por el Principio del Máximo que  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  tiene al menos dos finales no horizontales (uno superior y otro inferior), luego la diferencial altura  $dh_\infty$  de  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  tiene al menos dos polos. El hecho de que la aplicación de Gauss de  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  no tome direcciones verticales nos dice que  $dh_\infty$  no tiene ceros en puntos finitos; y por la Afirmación 4.1.2 que probaremos más adelante,  $dh_\infty$  tampoco tiene ceros en su compactificación. Así, si llamamos  $P$  al número de finales no horizontales de  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  (que son polos simples de  $dh_\infty$ ) y  $G$  al género de la compactificación de  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$ , entonces  $P + 2(G - 1) = 0$ , de donde deducimos que  $P = 2$  y  $G = 0$ . Por tanto,  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  es una superficie propiamente embebida con género 0 y finales de tipo Scherk, siendo al menos dos de ellos horizontales y exactamente dos de ellos no horizontales. En esta situación, el Teorema 1.8.6 de Pérez y Traizet nos asegura que  $\tilde{M}_\infty/H_\infty$  es una superficie de Scherk simplemente periódica de género 0, de donde obtenemos 4.

- Si tanto  $\{H_n\}_n$  como  $\{T_n\}_n$  están acotadas para cierta elección de las  $T_n$ , pasando a una parcial podemos suponer que  $H_n \rightarrow H_\infty = (0, a, 0)$  y  $T_n \rightarrow T_\infty$ , con  $a \geq 2$  y  $|(T_\infty)_3| \geq 4k$ . Así,  $\tilde{M}_\infty$  es una superficie doblemente periódica, con retículo de periodos  $\mathcal{P}_\infty$  generado por  $H_\infty, T_\infty$ . Además, sabemos que  $\tilde{M}_\infty/\mathcal{P}_\infty$  tiene género 0 o 1, y un número finito de finales de tipo Scherk, al menos dos de ellos horizontales. Además, la Afirmación 4.1.2 nos dice que la diferencial altura  $dh_\infty$  de  $\tilde{M}_\infty/\mathcal{P}_\infty$  no se anula en los finales horizontales, luego es una 1-forma sin ceros. Entonces,  $P + 2(G - 1) = 0$ , donde  $P$  es el número de finales no horizontales de

$\widetilde{M}_\infty/H_\infty$  y  $G$  es el género de la compactificación de  $\widetilde{M}_\infty/H_\infty$ . Hay dos posibilidades: o bien  $\widetilde{M}_\infty/\mathcal{P}_\infty$  tiene género 0 y exactamente dos finales no horizontales (i.e.  $P = 2$  y  $G = 0$ ), o bien  $\widetilde{M}_\infty/\mathcal{P}_\infty$  tiene género 1 y todos sus finales horizontales (i.e.  $P = 0$  y  $G = 1$ ). En el primer caso, el Teorema 1.8.7 de Lazard-Holly y Meeks asegura que  $\widetilde{M}_\infty/\mathcal{P}_\infty$  es una superficie de Scherk doblemente periódica, lo cual nos da 5. Por tanto, supongamos que  $\widetilde{M}_\infty/\mathcal{P}_\infty$  tiene género 1. Como cada  $M_n$  tiene curvatura total  $8k\pi$ ,  $\widetilde{M}_\infty/\mathcal{P}_\infty$  puede tener a lo sumo curvatura total  $8k\pi$ . Por la fórmula de Meeks y Rosenberg [42], deducimos entonces que  $\widetilde{M}_\infty/\mathcal{P}_\infty$  tiene como mucho  $4k$  finales. Por otro lado, la distancia entre los finales izquierda (resp. derecha) está uniformemente acotada inferiormente por 2 (por el Lema 4.0.8). Y como las secciones horizontales no compactas de las  $\widetilde{M}_n/H_n$  convergen a secciones horizontales no compactas de  $\widetilde{M}_\infty/H_\infty$ , llegamos a que  $\widetilde{M}_\infty/\mathcal{P}_\infty$  tiene exactamente  $4k$  finales horizontales. Esto prueba 6, y acaba la demostración de la proposición.  $\square$

**Afirmación 4.1.2** *Sea  $H$  un vector horizontal no nulo, y sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3/H$  una superficie minimal propiamente embebida con finales de tipo Scherk (al menos dos de ellos horizontales), obtenida como límite de superficies  $\widetilde{M}_n/H_n$ , con  $\widetilde{M}_n$  y  $H_n$  en las condiciones de la Proposición 4.1.1. Entonces, la aplicación de Gauss  $g$  de  $\Sigma$  no es ramificada en los finales horizontales (equivalentemente, los finales de  $\Sigma$  no son ceros de la diferencial altura  $dh$  de  $\Sigma$ ).*

*Demostración.* Supongamos por reducción al absurdo que un final  $p$  de  $\Sigma$  es un cero ramificado de  $g$  (si  $p$  fuese un polo ramificado de  $g$  se razonaría de forma análoga). Como sabemos que la aplicación de Gauss  $g_n$  de  $\widetilde{M}_n/H_n$  no es ramificada en sus finales, debe haber  $l \geq 2$  ceros  $p_1(n), \dots, p_l(n)$  de  $g_n$  que convergen a  $p$  (podemos pensar en entornos de los finales de las compactificaciones de las superficies definidos en un disco común  $D$  centrado en  $p$ , luego  $p_1(n), \dots, p_l(n) \in D$  a partir de cierto  $n_0 \in \mathbb{N}$ ). En particular, las alturas de los finales  $p_1(n), \dots, p_l(n)$  de  $\widetilde{M}_n/H_n$  convergen a la altura del final  $p$  de  $\Sigma/H$ . Por el Lema 4.0.8, la única posibilidad es que sólo haya dos finales  $p_1(n), p_2(n)$  que converjan a  $p$  (i.e.  $l = 2$ ): uno izquierda y otro derecha. En particular, tanto los periodos como los flujos de  $\widetilde{M}_n/H_n$  en  $p_1(n), p_2(n)$  son opuestos, de donde se deduce que el periodo y el flujo de  $\Sigma/H$  en  $p$  se anulan, contradicción.  $\diamond$

**Observación 4.1.3** *La demostración de la Proposición 4.1.1 nos dice que podemos cambiar la hipótesis máx  $|K_{\widetilde{M}_n}| = |K_{\widetilde{M}_n}(\vec{0})| = 1$  por que  $\{K_{M_n}\}_n$  esté uniformemente acotada y que la superficie límite de las  $\widetilde{M}_n$  no sea llana.*



**Observación 4.1.4** *El Lema 2.2.6 nos dice que todos los límites del enunciado de la Proposición 4.1.1 se alcanzan. Además, se alcanzan todos los ejemplos minimales de Riemann y todas las superficies de las familias de Scherk simple y doblemente periódicas (Observación 2.2.7).*

## 4.2. Estimación de curvatura

A continuación probaremos una estimación de curvatura que será crucial para demostrar en el Capítulo 7 que la aplicación clasificadora  $C$  es abierta y propia al restringir a ejemplos que no sean KMR.

**Proposición 4.2.1** *Sea  $\{M_n\}_n \subset \tilde{\mathcal{S}}$  una sucesión de superficies marcadas, y denotemos  $C(M_n) = (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que se cumplen las dos siguientes condiciones:*

1.  $\{a_n\}_n$  está acotada inferiormente por un número estrictamente positivo.
2.  $\{|b_n|\}_n$  es una sucesión acotada.

Entonces, la sucesión  $\{K_{M_n}\}_n$  de curvaturas de Gauss está uniformemente acotada.

*Demostración.* Supongamos que  $\lambda_n := \max_{M_n} \sqrt{|K_{M_n}|} \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , y lleguemos a una contradicción. Consideremos la superficie  $\Sigma_n = \lambda_n M_n \subset \mathbb{R}^3 / \lambda_n \mathcal{P}_n$ , donde estamos denotando por  $\mathcal{P}_n$  al retículo de periodos de  $M_n$  generado por  $\{H_n, T_n\}$ , y  $H_n$  es el periodo de  $M_n$  en los finales (salvo signo). A lo largo de toda la demostración, denotaremos por  $\hat{\Sigma}_n$  y  $\tilde{\Sigma}_n$  los levantamientos de  $\Sigma_n$  a  $\mathbb{R}^3 / \lambda_n T_n$  y  $\mathbb{R}^3$  respectivamente.

Tras una traslación, podemos suponer que  $K_{\tilde{\Sigma}_n}$  alcanza su máximo en el origen. Por la Proposición 4.1.1, una parcial de  $\{\tilde{\Sigma}_n\}_n$  (que seguiremos denotando igual) converge a una superficie minimal  $\mathcal{H}_1$  propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$ , que debe caer en uno de los seis casos descritos en dicha proposición. Como por hipótesis  $a_n \not\rightarrow 0$  y estamos suponiendo que  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , la longitud del vector periodo de  $\Sigma_n$  en sus finales, que es igual a  $|\lambda_n H_n| = \lambda_n a_n$ , diverge. En particular,  $\mathcal{H}_1$  es una catenoide vertical, un helicoide vertical o un ejemplo minimal de Riemann con finales horizontales. Por otro lado, la parte vertical del flujo de  $\Sigma_n$  a lo largo de una sección horizontal compacta vale  $2\pi\lambda_n \rightarrow \infty$  (ver el apartado 7 de la Proposición 1.9.5), luego la única posibilidad es que  $\mathcal{H}_1$  sea un helicoide vertical de vector periodo  $T = (0, 0, 2\pi m)$ , para cierto  $m \in \mathbb{N}$ . Además, la Proposición 4.1.1 nos permite elegir los vectores periodo  $T_n$  de las  $M_n$  cumpliendo  $\lambda_n T_n \rightarrow T$ .

Denotaremos por  $\Pi_n^H : \mathbb{R}^3/\lambda_n T_n \rightarrow \mathbb{R}^3/\lambda_n \mathcal{P}_n$  a la proyección módulo  $\lambda_n H_n$ , por  $\pi_n : \mathbb{R}^3/\lambda_n \mathcal{P}_n \rightarrow \{x_3 = 0\}/\lambda_n \mathcal{P}_n$  la proyección lineal en la dirección de  $T_n$ , y por  $\mathbb{D} \subset \{x_3 = 0\}$  al disco unidad centrado en el origen. De ahora en adelante, consideraremos  $n$  suficientemente grande de forma que  $\lambda_n T_n$  sea un vector próximo a  $T$ , y  $\mathcal{H}_1(n) = \Sigma_n \cap \pi_n^{-1}(\mathbb{D}/\lambda_n \mathcal{P}_n)$  sea conexo y arbitrariamente próximo a un entorno del eje del helicoide  $\mathcal{H}_1$ . Sea  $\bar{\Sigma}_n$  el toro obtenido al pegarle a  $\Sigma_n$  sus  $4k$  finales. Como  $\mathcal{H}_1(n)$  no separa a  $\bar{\Sigma}_n$ ,  $\mathcal{F}_n = \bar{\Sigma}_n - \mathcal{H}_1(n)$  es un anillo compacto, que además contiene los  $4k$  finales de  $\Sigma_n$ .

Vamos a ver que la aplicación de Gauss  $N_n$  de  $\Sigma_n$  toma valores horizontales en  $\mathcal{F}_n$  para  $n$  suficientemente grande. Sea  $\Gamma_n$  la intersección de  $\Sigma_n$  con un cilindro horizontal totalmente geodésico contenido en  $\mathbb{R}^3/\lambda_n \mathcal{P}_n$ , a distinta altura que los finales de  $\Sigma_n$ . Vista en  $\bar{\Sigma}_n$ ,  $\Gamma_n$  es una curva homotópicamente no nula que interseca a  $\mathcal{H}_1(n)$  y  $\mathcal{F}_n$  en dos arcos abiertos con extremos comunes  $A_n, B_n$ . Como  $\mathcal{H}_1(n)$  está próximo a un entorno del eje de un helicoide vertical, deducimos que  $N_n(A_n), N_n(B_n)$  caen en distintos hemisferios norte y sur de  $\mathbb{S}^2$ . Por continuidad, existe algún punto de  $\Gamma_n \cap \mathcal{F}_n$  cuya imagen por  $N_n$  se aplica en  $\mathbb{S}^1$ , siendo  $\mathbb{S}^1$  el ecuador horizontal de  $\mathbb{S}^2$ . En particular,  $\mathcal{F}_n \cap N_n^{-1}(\mathbb{S}^1) \neq \emptyset$ , como queríamos probar.

Ahora vamos a ver que, de hecho,  $N_n|_{\mathcal{F}_n}$  toma todos los valores de  $\mathbb{S}^1$ , para  $n$  suficientemente grande; es decir, para cada  $\theta \in \mathbb{S}^1$  y cada  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande,  $\mathcal{F}_n \cap N_n^{-1}(\theta) \neq \emptyset$ . Nótese que  $(N_n|_{\mathcal{H}_1})^{-1}(\mathbb{S}^1)$  es el eje de  $\mathcal{H}_1$ . Como  $\mathcal{H}_1(n)$  está próximo a un entorno de  $(N_n|_{\mathcal{H}_1})^{-1}(\mathbb{S}^1)$ , entonces  $(N_n|_{\mathcal{H}_1(n)})^{-1}(\mathbb{S}^1)$  debe ser una curva cerrada y simple contenida en  $\Sigma_n$  que, vía  $N_n$ , recubre a  $\mathbb{S}^1$  un número finito de veces (vista en  $\mathbb{R}^3$ ,  $(N_n|_{\mathcal{H}_1(n)})^{-1}(\mathbb{S}^1)$  es un arco abierto y embebido cuyos extremos distan  $\lambda_n T_n$ ). Como hemos visto antes que  $\mathcal{F}_n$  tiene puntos con normal horizontal, llegamos a que el número de hojas de dicho recubrimiento de  $\mathbb{S}^1$  es menor estricto que  $2k$ , lo cual implica que para cada  $\theta \in \mathbb{S}^1$ ,  $\mathcal{F}_n \cap N_n^{-1}(\theta)$  sea no vacío, como queríamos.

A continuación, vamos a obtener otro helicoide  $\mathcal{H}_2$  a partir de otras traslaciones (distintas) de las  $\tilde{\Sigma}_n$ . Como el número de ramificación total de cada  $N_n$  es  $4k$ , deducimos por compacidad que los valores de ramificación de las  $N_n$  convergen a un número finito de puntos de  $\mathbb{S}^2$ . Por tanto, podemos tomar un disco esférico  $D_{\mathbb{S}^2}(\theta, \varepsilon)$  centrado en cierto  $\theta \in \mathbb{S}^1$  y de radio  $\varepsilon > 0$  que no contiene ningún valor de ramificación de las  $N_n$ , para  $n$  suficientemente grande. Como hemos visto en el párrafo anterior, podemos suponer que  $n$  es suficientemente grande de forma que siempre exista un punto  $p_n \in \tilde{\Sigma}_n \cap N_n^{-1}(\theta)$  cuya proyección sobre  $\mathbb{R}^3/\lambda_n \mathcal{P}_n$  caiga en  $\mathcal{F}_n$ . Las superficies trasladadas  $\tilde{\Sigma}_n - p_n$  tienen area uniformemente acotada y vector normal  $\theta$  en el origen, y la sucesión de sus curvaturas de Gauss  $\{K_{\tilde{\Sigma}_n - p_n}\}_n$  está uniformemente acotada. Por tanto, pasando a una parcial,  $\{\tilde{\Sigma}_n - p_n\}_n$  converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^3$  a una superficie minimal  $\mathcal{H}_2$  propiamente embebida,

y con plano tangente vertical en el origen. Vamos a probar que  $\mathcal{H}_2$  no es llana. Si  $\mathcal{H}_2$  fuera llana, podríamos construir un arco  $\tilde{\alpha}_n \subset \{x \in \tilde{\Sigma}_n \mid d_{\tilde{\Sigma}_n}(x, p_n) < \frac{3}{2}\|T\|\}$  de forma que el vector periodo de  $\tilde{\Sigma}_n - p_n$  a lo largo de  $\tilde{\alpha}_n$  fuera  $\lambda_n T_n$ . Por construcción,  $N_n(\tilde{\alpha}_n) \in D_{\mathbb{S}^2}(\theta, \varepsilon)$ . Y como  $D_{\mathbb{S}^2}(\theta, \varepsilon)$  no contiene valores de ramificación de  $N_n$ ,  $N_n^{-1}(D_{\mathbb{S}^2}(\theta, \varepsilon))$  consistiría en discos disjuntos contenidos en  $\Sigma_n$ , uno de los cuales contendría a  $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n/\lambda_n \mathcal{P}_n$ . Pero esto contradice el hecho de que  $\alpha_n$  es homotópicamente no trivial en  $\Sigma_n$ ; y por tanto,  $\mathcal{H}_2$  no es llana. Entonces, la Proposición 4.1.1 (ver la Observación 4.1.3) y argumentos similares a los usados anteriormente para  $\mathcal{H}_1$ , nos aseguran que  $\mathcal{H}_2$  es un helicoides vertical. Además, como tanto  $\mathcal{H}_1$  como  $\mathcal{H}_2$  han sido obtenidos como límite de traslaciones de las  $\tilde{\Sigma}_n$ , deducimos que el vector periodo de  $\mathcal{H}_2$  es de nuevo  $T = \lim_n \lambda_n T_n$ .

Sean  $\mathcal{D}_1(n), \mathcal{D}_2(n)$  dos discos disjuntos de radio  $r_n$  contenidos en  $\{x_3 = 0\}/\lambda_n \mathcal{P}_n \subset \mathbb{R}^3/\lambda_n \mathcal{P}_n$ , y tales que para  $i = 1, 2$ , se tiene que  $\mathcal{H}_i(n) = \Sigma_n \cap \pi_n^{-1}(\mathcal{D}_i(n))$  es un anillo arbitrariamente próximo a una copia trasladada del helicoides  $\mathcal{H}_i/T$  menos un entorno de sus finales (nótese que esta definición de  $\mathcal{H}_i(n)$  no coincide necesariamente con la que teníamos anteriormente, aunque sigue cumpliendo todas las propiedades ya obtenidas para  $\Sigma_n \cap \pi_n^{-1}(\mathbb{D})$ ). Tras pasar a una parcial, podemos suponer que  $r_n$  cumple

- (i) La sucesión  $\{r_n\}_n$  diverge, aunque más lentamente que  $\{\lambda_n\}_n$ ; i.e.  $r_n \rightarrow \infty$  y  $\frac{r_n}{\lambda_n} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- (ii) El ángulo que forma el normal a  $\Sigma_n$  a lo largo de las curvas helicoidales en  $\partial\mathcal{H}_i(n)$  con la dirección vertical menor que  $\frac{1}{n}$ , para  $i = 1, 2$ .

Probemos ahora que  $N_n$  aplica  $\bar{\Sigma}_n - (\mathcal{H}_1(n) \cup \mathcal{H}_2(n))$  en los discos esféricos de radio  $\frac{1}{n}$  centrados en los Polos Norte y Sur de  $\mathbb{S}^2$ . Como  $N_n$  es una aplicación abierta, basta probar que  $\Sigma_n - (\mathcal{H}_1(n) \cup \mathcal{H}_2(n))$  no tiene puntos con normal horizontal, por la condición (ii) anterior. Supongamos que existen puntos de  $\Sigma_n - (\mathcal{H}_1(n) \cup \mathcal{H}_2(n))$  con normal horizontal. Entonces, siguiendo los mismos argumentos que demostraban la existencia de  $\mathcal{H}_2$  llegamos a que distintas traslaciones de  $\tilde{\Sigma}_n$  convergen a nuevos helicoides verticales  $\mathcal{H}_3, \dots, \mathcal{H}_s$  de periodo  $T$  (nótese que  $s \leq 2k$ , ya que la curvatura total de cada  $\mathcal{H}_i$  es menor o igual que  $-4k$ , y la curvatura total de cada  $\Sigma_n$  es  $-8k\pi$ ). Consideramos los discos disjuntos  $\mathcal{D}_i(n) \subset \{x_3 = 0\}/\lambda_n \mathcal{P}_n$  de radio  $r_n$ , para  $i = 1, \dots, s$ , de forma que  $\mathcal{H}_i(n) = \Sigma_n \cap \pi_n^{-1}(\mathcal{D}_i(n))$  sea un anillo arbitrariamente próximo a una traslación del helicoides  $\mathcal{H}_i$  menos entornos de sus finales. Es fácil comprobar que todo lo obtenido anteriormente para  $\mathcal{H}_1(n), \mathcal{H}_2(n)$  sigue siendo cierto para cada  $\mathcal{H}_i(n)$ . Podemos suponer que  $N_n$  no toma valores horizontales en  $\Sigma_n - \cup_{i=1}^s \mathcal{H}_i(n)$ ; es decir, que  $s$  es el máximo posible. Así,  $\bar{\Sigma}_n - (\mathcal{H}_1(n) \cup \dots \cup \mathcal{H}_s(n))$  consiste en  $s$  anillos cerrados  $\mathcal{F}_1(n), \dots, \mathcal{F}_s(n)$  cuya imagen

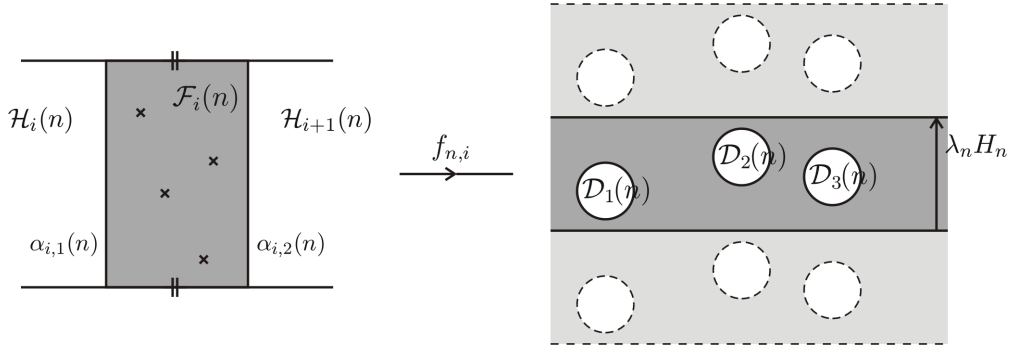


Figura 4.1:  $f_{n,i}$  es una aplicación entre las regiones sombreadas. En este caso,  $s = 3$ , y el número de hojas del recubridor  $f_{n,i}$  es  $\#_i = 2$ , ya que  $\mathcal{F}_i$  contiene 4 finales de  $\Sigma_n$ .

por  $N_n$  consiste en pequeños entornos de los Polos Norte y Sur de  $\mathbb{S}^2$ . Suponemos que los  $\mathcal{H}_i(n)$  y los  $\mathcal{F}_i(n)$  están ordenados cíclicamente de forma que  $\mathcal{F}_i(n)$  es consecutivo a  $\mathcal{H}_i(n)$ ,  $\mathcal{H}_{i+1}(n)$ , ver la Figura 4.1. Restringida a cada  $\mathcal{F}_i(n)$ , la proyección  $\pi_n$  se extiende de forma diferenciable a los finales, obteniendo la aplicación

$$f_{n,i} := \pi_n|_{\mathcal{F}_i(n)} : \mathcal{F}_i(n) \rightarrow \frac{\{x_3 = 0\} \cup \{\infty\}}{\lambda_n \mathcal{P}_n} - \cup_{j=1}^s \mathcal{D}_j(n).$$

La aplicación  $f_{n,i}$  así definida es un difeomorfismo local y propio, y por tanto una aplicación recubridora con un número finito  $\#_i$  de hojas. Como  $\partial\mathcal{F}_i(n)$  consta de dos componentes, deducimos que  $s = 2$ , contradicción. Por tanto,  $N_n[\Sigma_n - (\mathcal{H}_1(n) \cup \mathcal{H}_2(n))] \subset D_{\mathbb{S}^2}(*, 1/n)$ , donde  $* = 0, \infty$ , como queríamos probar. Del razonamiento anterior deducimos también que para  $i = 1, 2$ ,  $\mathcal{F}_i(n)$  es un anillo cerrado que contiene  $2\#_i$  finales de  $\Sigma_n$ :  $\#_i$  izquierda y  $\#_i$  derecha. Y como los  $\mathcal{H}_i(n)$  no contienen finales de  $\Sigma_n$ , tiene que ser  $\#_1 + \#_2 = 2k$ . Además,  $f_{n,i}$  aplica respectivamente las componentes  $\alpha_{i,1}(n), \alpha_{i,2}(n)$  de  $\partial\mathcal{F}_i(n)$  (que son dos hélices) sobre las circunferencias  $\partial\mathcal{D}_1(n), \partial\mathcal{D}_2(n)$  con multiplicidad  $\#_i$ . Como a su vez  $\alpha_{1,j}(n), \alpha_{2,j}(n)$  son las dos componentes de  $\partial\mathcal{H}_j(n)$ , para  $j = 1, 2$ , deducimos que  $\#_1 = \#_2$ . En particular, tanto  $\mathcal{F}_1(n)$  como  $\mathcal{F}_2(n)$  contienen  $2k$  finales de  $\Sigma_n$ :  $k$  izquierda y  $k$  derecha.

Veamos en qué se traducen estas propiedades de las  $\Sigma_n$  en las  $M_n$ . Para  $n$  suficientemente grande,  $M_n$  está formada por dos regiones  $\frac{1}{\lambda_n}\mathcal{H}_1(n), \frac{1}{\lambda_n}\mathcal{H}_2(n)$  arbitrariamente próximas a los helicoides verticales  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  contraídos por  $\lambda_n$ , y dos regiones de conexión  $\frac{1}{\lambda_n}\mathcal{F}_1(n), \frac{1}{\lambda_n}\mathcal{F}_2(n)$  cuya imagen por la aplicación de Gauss de  $M_n$  está contenida en los discos esféricos de radio  $\frac{1}{n}$  centrados en los Polos Norte y Sur de  $\mathbb{S}^2$ . No perdemos generalidad asumiendo que  $\frac{1}{\lambda_n}\mathcal{F}_1(n)$  (resp.  $\frac{1}{\lambda_n}\mathcal{F}_2(n)$ ) se aplica en un entorno del Polo Norte (resp. del Polo Sur) de  $\mathbb{S}^2$ . Además, sabemos

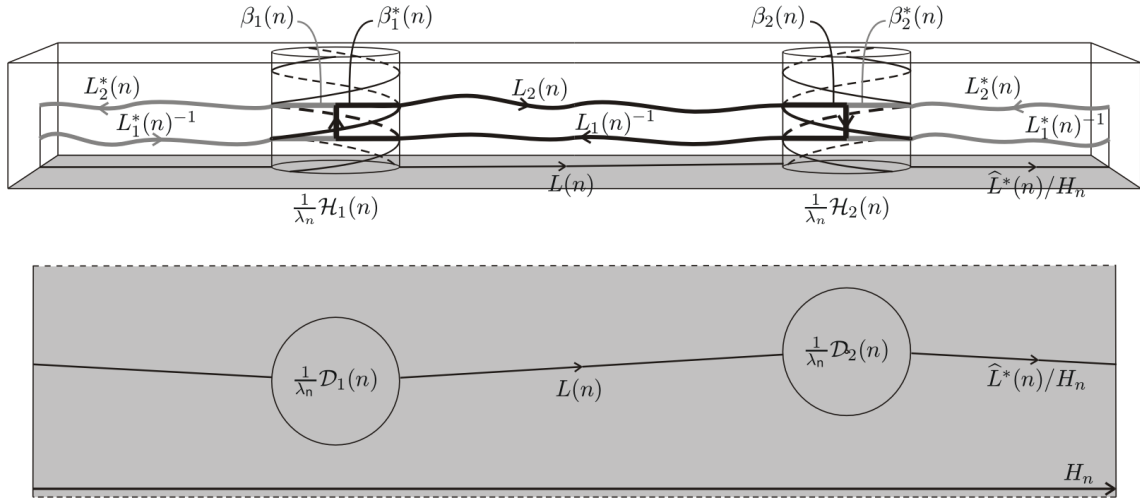


Figura 4.2: Vistas frontal y superior de dos helicoides formándose en la dirección de  $L(n)$  que converge a la dirección del eje  $x_2$ . En la vista frontal, los finales izquierda y derecha están situados delante y detrás del dibujo.

que cada  $\frac{1}{\lambda_n} \mathcal{F}_i(n)$  contiene  $k$  finales izquierda y  $k$  finales derecha de  $M_n$ , y que

$$f_n : \frac{1}{\lambda_n} [\mathcal{F}_1(n) \cup \mathcal{F}_2(n)] \rightarrow \frac{\{x_3=0\} \cup \{\infty\}}{\mathcal{P}_n} - \frac{1}{\lambda_n} [\mathcal{D}_1(n) \cup \mathcal{D}_2(n)]$$

es una aplicación recubridora de  $2k$  hojas.

Vamos a construir, uniendo cuatro arcos consecutivos, una curva embebida  $\Gamma_n \subset M_n$  cuya clase de homología no será trivial en la compactificación de  $M_n$ . Sea  $L(n) \subset \{x_3 = 0\}/\mathcal{P}_n$  el segmento que minimiza la distancia desde  $\frac{1}{\lambda_n} \partial \mathcal{D}_1(n)$  hasta  $\frac{1}{\lambda_n} \partial \mathcal{D}_2(n)$ , orientado en dicho sentido, y sean  $L_1(n), L_2(n)$  dos levantamientos de  $L(n)$  por la aplicación recubridora  $f_n$  contenidos en hojas consecutivas, con la orientación inducida por la de  $L(n)$ , ver la Figura 4.2. Podemos asumir que  $L_1(n) \subset \frac{1}{\lambda_n} \mathcal{F}_1(n)$ , lo cual obliga a que sea  $L_2(n) \subset \frac{1}{\lambda_n} \mathcal{F}_2(n)$  (tener en cuenta hacia dónde apunta el normal). Fijemos  $i = 1, 2$ . Podemos unir los extremos de  $L_1(n)$  y  $L_2(n)$ , contenidos en  $\frac{1}{\lambda_n} \partial \mathcal{H}_i(n)$ , mediante un arco  $\beta_i(n) \subset \frac{1}{\lambda_n} \mathcal{H}_i(n)$  formado como unión de tres arcos consecutivos: el primero a altura casi constante, el segundo en  $N_n^{-1}(\mathbb{S}^1)$ , y el tercero casi horizontal (ver la Figura 4.2). Orientamos los arcos  $\beta_i$  con una orientación compatible con la orientación ya fijada de los  $L_i(n)$  de forma que  $\Gamma_n = L_1(n)^{-1} * \beta_1(n) * L_2(n) * \beta_2(n)$  sea una curva orientada. Nótese que  $\Gamma_n$  así definida es una curva cerrada y embebida. Nótese que  $\mathcal{H}_i(n) = \pi_n^{-1} \left( \frac{1}{\lambda_n} \mathcal{D}_i(n) \right)$ , siendo ahora  $\pi_n : \mathbb{R}^3/\mathcal{P}_n \rightarrow \{x_3 = 0\}/\mathcal{P}_n$  la proyección módulo  $T_n$ , que el radio de los discos  $\frac{1}{\lambda_n} \mathcal{D}_i(n)$  vale  $\frac{r_n}{\lambda_n} \rightarrow 0$ , y que la tercera coordenada de  $T_n$  está próxima a

$\frac{2\pi m}{\lambda_n}$ , que converge a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ . Concluimos entonces que la longitud de los arcos  $\beta_i(n)$  se va a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ . En particular, el límite del flujo de  $M_n$  a lo largo de  $\Gamma_n$  coincide con el límite del flujo de  $M_n$  a lo largo de  $L_1(n) \cup L_2(n)$ , de donde concluimos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F(\Gamma_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [F(L_1(n)) + F(L_2(n))] \\ \text{y } \lim_{n \rightarrow \infty} (F_{\Gamma_n})_3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(F_{L_1(n)})_3 + (F_{L_2(n)})_3] . \end{aligned} \quad (4.1)$$

Recordemos que  $M_n$ , como superficies marcada, tiene una clase de homología destacada:  $[\gamma_2(n)] \in H_1(M_n, \mathbb{Z})$ , y que el flujo de  $M_n$  a lo largo de  $\gamma_2(n)$  viene dado por  $F_{\gamma_2(n)} = (i\bar{b}_n, 2\pi)$ , donde  $(a_n, b_n) = C(M_n)$ . Vamos a estudiar la relación entre  $[\Gamma_n]$  y  $[\gamma_2(n)]$ . Denotaremos por  $g_n$  a la aplicación de Gauss de  $M_n$  (proyectada estereográficamente). Como  $\Gamma_n$  es una embebida, cerrada, y  $[\gamma_2(n)] \neq 0$  en  $H_1(M_n, \mathbb{Z})$ , la Proposición 1.9.5 asegura que podemos orientar a  $\Gamma_n$  cumpliendo  $[\Gamma_n] = [\gamma_2(n)]$  en  $H_1(g_n^{-1}(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ . Vistas en  $H_1(M_n, \mathbb{Z})$ , las clases  $[\Gamma_n], [\gamma_2(n)]$  se diferencian en una cantidad finita de lazos alrededor de finales de  $M_n$ , de donde obtenemos que la parte horizontal del flujo de  $M_n$  a lo largo de  $\Gamma_n$  viene dada por

$$F(\Gamma_n) = i\bar{b}_n + t(n)\pi a_n \in \mathbb{C}, \quad (4.2)$$

con  $t(n) \in \mathbb{Z}$  (recordemos que, salvo signo, la parte horizontal del flujo en los finales es igual a  $\pi a_n \in \mathbb{R}$ ). Tanto  $\Gamma_n$  como  $\gamma_2(n)$  se pueden elegir en el mismo dominio fundamental del levantamiento  $\widetilde{M}_n$  de  $M_n$  comprendido entre dos planos horizontales  $\Pi, \Pi + T_n$ ; y como  $\Gamma_n, \gamma_2(n)$  están embebidas, deducimos que  $t_n \leq 2k$ , para todo  $n$ . Pasando a una parcial, podemos suponer que  $t = t(n)$  no depende de  $n$ . Además, como los periodos de  $M_n$  a lo largo de  $\Gamma_n, \gamma_2(n)$  se anulan, llegamos a que  $t$  es un entero par (ver la Observación 3.2.7). Esto junto con el apartado 7 de la Proposición 1.9.5 nos dice que  $(F_{\Gamma_n})_3 = (F_{\gamma_2(n)})_3 = 2\pi$ . Por otra parte, como para  $i = 1, 2$  se tiene que el normal a  $\mathcal{F}_i(n)$  a lo largo de  $L_i(n)$  forma con la vertical un ángulo menor o igual que  $1/n$ , deducimos que la tercera componente del conormal a lo largo de  $L_i(n)$  es menor o igual que  $\sin(1/n)$ . Usando la segunda ecuación de (4.1), llegamos a que

$$2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} [(F_{L_1(n)})_3 + (F_{L_2(n)})_3] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2|L(n)| \sin \frac{1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|L(n)|}{n}.$$

De aquí se deduce claramente que  $|L(n)|$  diverge cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Por otro lado, como el normal se hace arbitrariamente vertical sobre  $\frac{1}{\lambda_n}\mathcal{F}_i(n)$ , entonces el conormal a lo largo de  $L_i(n)$  se hace arbitrariamente horizontal. Considerando la orientación de  $L_1(n), L_2(n)$ , llegamos a que  $\frac{F(L_1(n))+F(L_2(n))}{|L(n)|}$  converge a

un complejo de módulo 2,  $2e^{i\theta}$  para cierto  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Teniendo en cuenta además (4.1), (4.2) y que por hipótesis la sucesión  $\{b_n\}_n$  está acotada, se obtiene

$$2e^{i\theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(L_1(n)) + F(L_2(n))}{|L(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\Gamma_n)}{|L(n)|} = t\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{|L(n)|}.$$

Así,  $t \neq 0$  y  $a_n \rightarrow +\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por otra parte, como  $a_n \in \mathbb{R}^*$ , las únicas posibilidades para  $\theta$  son  $0, \pi$ . Nótese que de aquí se deduce que  $L(n)$  converge a una recta paralela al eje  $x_2$  (ver la Observación 4.2.2).

Consideremos ahora un levantamiento  $\widehat{L}(n)$  de  $L(n)$  a  $\widetilde{M}_n/T_n$ , y para  $i = 1, 2$ , sea  $\widehat{\mathcal{D}}_i(n)$  un levantamiento de  $\mathcal{D}_i(n)$  a  $\widetilde{M}_n/\lambda_n T_n$ , de forma que  $\widehat{L}(n) \cup \frac{1}{\lambda_n} [\widehat{\mathcal{D}}_1(n) \cup \widehat{\mathcal{D}}_2(n)]$  caiga en el mismo dominio fundamental de  $\widetilde{M}_n/T_n$ . Denotamos por  $\widehat{L}^*(n)$  al segmento orientado contenido en  $\{x_3 = 0\}/T_n$  que minimiza la longitud desde  $\frac{1}{\lambda_n} \partial \widehat{\mathcal{D}}_2(n)$  hasta  $\frac{1}{\lambda_n} \partial \widehat{\mathcal{D}}_1(n) + H_n$ . Construimos una curva  $\Gamma_n^* \subset M_n$  de forma análoga a lo hecho para  $\Gamma_n$ ; es decir,  $\Gamma_n^* = L_1^*(n)^{-1} * \beta_1^*(n) * L_2^*(n) * \beta_2^*(n)$ , donde  $L_1^*(n)$  y  $L_2^*(n)$  son levantamientos de  $\widehat{L}^*(n)/H_n$  a hojas consecutivas de  $\frac{1}{\lambda_n} [\mathcal{F}_1(n) \cup \mathcal{F}_2(n)]$  vía el recubridor  $f_n$ , con  $L_1^*(n) \in \frac{1}{\lambda_n} \mathcal{F}_2(n)$  y  $L_2^*(n) \in \frac{1}{\lambda_n} \mathcal{F}_1(n)$ , y cada  $\beta_j^*(n)$  es un pequeño arco contenido en  $\frac{1}{\lambda_n} \mathcal{H}_j(n)$  formado como unión de tres arcos: dos de ellos casi horizontales, y tomamos el arco central exactamente igual a  $\beta_j(n) \cap N_n^{-1}(\mathbb{S}^1)$ . Orientamos  $\Gamma_n^*$  de forma que  $\Gamma_n, \Gamma_n^*$  comparten orientación a lo largo de  $\beta_j(n) \cap N_n^{-1}(\mathbb{S}^1)$ ,  $j = 1, 2$ . Vistas en  $H_1(g_n^{-1}(\overline{\mathbb{C}}), \mathbb{Z})$ , se tiene que  $[\Gamma_n] = -[\Gamma_n^*]$ , ver la Figura 4.3 izquierda. Como en (4.2), pasando a una parcial se cumple

$$F(\Gamma_n^*) = -i\overline{b_n} + t^* \pi a_n \quad (4.3)$$

para cierto  $t^* \neq 0$ . Por otro lado, como el conormal unitario a lo largo de  $L_2(n)$  se proyecta horizontalmente en el mismo lado que el conormal unitario a lo largo de  $L_2^*(n)$ , llegamos a que  $\frac{F(\Gamma_n)}{F(\Gamma_n^*)}$  converge a un real positivo, luego  $\frac{t}{t^*} > 0$  ( $t$  y  $t^*$  tienen el mismo signo).

Vamos a llegar a una contradicción con (4.2) y (4.3). Para ello, vamos a construir dos nuevas curvas  $\zeta_n, \zeta_n^* \subset M_n$  como sigue. Sean  $\zeta_n, \zeta_n^* \subset M_n$  las curvas cerradas y embebidas definidas como

$$\zeta_n = L_1(n)^{-1} * h_1(n) * L_2^*(n) * h_2(n) \quad \text{y} \quad \zeta_n^* = L_1^*(n)^{-1} * h_1^*(n) * L_2(n) * h_2^*(n),$$

siendo  $h_i(n)$  (resp.  $h_i^*(n)$ ) una hélice contenida en  $\frac{1}{\lambda_n} \partial \mathcal{H}_i(n)$  que une  $L_1(n)^{-1}$  con  $L_2^*(n)$  (resp.  $L_1^*(n)^{-1}$  con  $L_2(n)$ ). Nótese que para  $i = 1, 2$ ,  $f_n$  aplica de forma difeomorfa tanto a  $h_i(n)$  como a  $h_i^*(n)$  sobre un arco contenido en  $\frac{1}{\lambda_n} \partial \mathcal{D}_i(n)$  arbitrariamente próximo a una semicircunferencia, y que  $h_i(n), h_i^*(n)$  son casi diametralmente

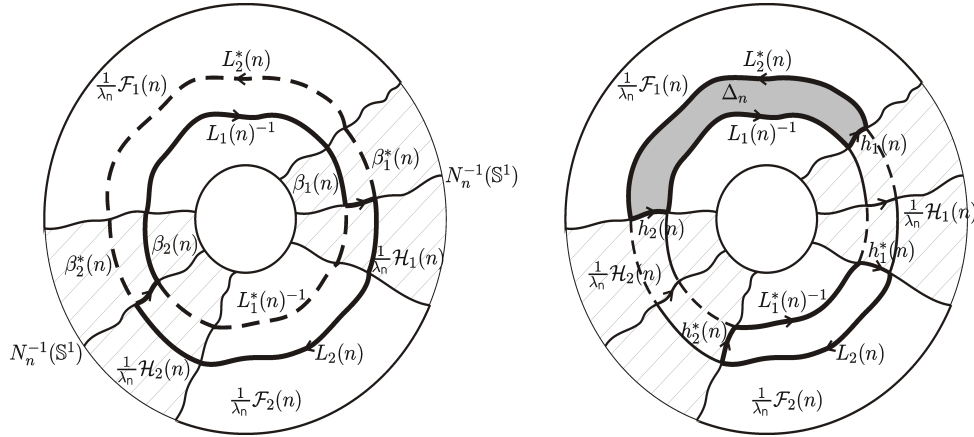


Figura 4.3: Izquierda: Las curvas  $\Gamma_n, \Gamma_n^*$ . Derecha: La curva  $\zeta_n = \partial\Delta_n$ .

opuestas en  $\frac{1}{\lambda_n}\partial\mathcal{H}_i(n)$  con respecto al eje del casi helicoides  $\frac{1}{\lambda_n}\mathcal{H}_i(n)$ . Consideramos  $\zeta_n, \zeta_n^*$  con las orientaciones inducidas por la orientación de  $\Gamma_n$  o de  $\Gamma_n^*$  a lo largo de sus arcos comunes con  $\zeta_n, \zeta_n^*$  respectivamente, ver la Figura 4.3 derecha (hemos tenido cuidado de orientar  $\Gamma_n, \Gamma_n^*$  para que ambas orientaciones induzcan la misma orientación en  $\zeta_n$  y en  $\zeta_n^*$ ).

Se puede ver  $\zeta_n$  como la frontera de un disco  $\Delta_n$  contenido en  $\frac{1}{\lambda_n}[\mathcal{F}_1(n) \cup \mathcal{F}_2(n)]$ , que es la región sombreada en la Figura 4.3 derecha. No perdemos generalidad suponiendo que  $\Delta_n \subset \frac{1}{\lambda_n}\mathcal{F}_1(n)$ . Como  $f_n$  aplica de forma difeomorfa  $\zeta_n$  en una curva contenida en  $\{x_3 = 0\}/\mathcal{P}_n$  de periodo  $H_n$ , deducimos que  $\Delta_n$  contiene un único final de  $M_n$ . En particular,  $F(\zeta_n) = \pm H_n = \pm\pi a_n$ . Análogamente, se obtiene que  $F(\zeta_n^*) = \pm\pi a_n$ . Además, como el conormal unitario a lo largo de  $L_1(n)^{-1}$  se proyecta horizontalmente en el mismo lado que el conormal unitario a lo largo de  $L_2(n)$ , llegamos a que  $F(\zeta_n^*) = F(\zeta_n)$ .

Recordemos que para  $i = 1, 2$ ,  $|\beta_i(n)| \rightarrow 0$  y  $|\beta_i^*(n)| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Análogamente se puede probar que  $|h_i(n)| \rightarrow 0$  y  $|h_i^*(n)| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Así, los límites de  $F(\Gamma_n) + F(\Gamma_n^*)$  y  $F(\zeta_n) + F(\zeta_n^*) = 2\varepsilon\pi a_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$  coinciden, y

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(F(\Gamma_n) + F(\Gamma_n^*))}{\varepsilon\pi a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2i\bar{b}_n + (t + t^*)\pi a_n}{\varepsilon\pi a_n} = \varepsilon(t + t^*).$$

Pero esto contradice que  $t, t^*$  sean dos números pares distintos de 0, ambos con el mismo signo. Dicha contradicción demuestra la Proposición 4.2.1.  $\square$

**Observación 4.2.2** Si quitamos la hipótesis (ii) de la Proposición 4.2.1, entonces es posible encontrar superficies en  $\mathcal{S}$  conteniendo dos anillos arbitrariamente próximos helicoides verticales, lo cual hace que sus curvaturas sean arbitrariamente grandes.



Basta considerar las superficies  $M_{\theta,0,\pi/2}$  estudiadas en el capítulo 2, con  $\theta \nearrow \pi/2$ , que convergen a dos helicoides cuyos ejes se pueden unir por una curva horizontal en la dirección del vector periodo en los finales; o las superficies  $M_{\theta,0,\beta}$ , con  $\beta < \theta < \pi/2$  y  $\beta \nearrow \pi/2$ , que también tienen trozos arbitrariamente próximos a dos helicoides verticales, cuyos "ejes" se unen mediante una curva horizontal, esta vez ortogonal a la dirección del vector periodo en los finales.



# Capítulo 5

## Unicidad alrededor del límite Scherk simplemente periódico

Sabemos por la Observación 2.2.7 que se alcanzan todos los ejemplos de Scherk simplemente periódicos como límites de superficies marcadas en  $\tilde{\mathcal{K}} \subset \tilde{\mathcal{S}}$ . En este capítulo probaremos que la aplicación ligadura  $L$  se extiende de forma holomorfa a estos límites Scherk. En particular, la restricción de  $L$  a  $\tilde{\mathcal{S}}$  no es una aplicación propia; o equivalentemente, la aplicación clasificadora  $C : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  no es propia. Esta es una diferencia fundamental con la situación que se da al probar la unicidad de los ejemplos minimales de Riemann [41], y debido a esto, tendremos que introducir una modificación en la estrategia original de Meeks, Pérez y Ros: veremos que la restricción de  $C$  al espacio de superficies minimales (embebidas) marcadas que no provienen de ejemplos KMR (i.e.  $C|_{\tilde{\mathcal{S}}-\tilde{\mathcal{K}}}$ ), es una aplicación propia (Teorema 7.0.7). En un primer paso para demostrar este teorema, obtendremos en este capítulo un resultado de unicidad de superficies KMR alrededor de un límite Scherk simplemente periódico; es decir, veremos que las únicas superficies marcadas en  $\tilde{\mathcal{S}}$  que tienen como límite una superficie de Scherk simplemente periódica están en  $\tilde{\mathcal{K}}$ . La siguiente proposición describe la geometría de ciertas superficies minimales marcadas en  $\tilde{\mathcal{S}}$  próximas a límites Scherk simplemente periódicos.

**Proposición 5.0.3** *Sea  $\{M_n\}_n$  una sucesión de superficies marcadas en  $\tilde{\mathcal{S}}$ . Denotemos por  $\mathcal{P}_n = \langle \{H_n, T_n\} \rangle$  el retículo de periodos asociado a  $M_n$ , donde  $H_n$  es un vector que apunta en la dirección del eje  $x_2$ . Supongamos que  $H_n \rightarrow H_\infty = (0, \pi a, 0)$  para cierto  $a \in \mathbb{R}^*$  y  $T_n \rightarrow \infty$  para cualquier elección de  $T_n$  (ver Proposición 4.1.1). Si existe  $b \in \mathbb{C}$  tal que  $C(M_n) \rightarrow (a, b)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces se tiene que para  $n$  suficientemente grande, las superficies (geométricas)  $M_n$  están arbitrariamente próximas a  $2k$  copias de una región compacta de una superficie de Scherk simplemente periódica, con género 0 y dos finales horizontales, unidas por  $2k$  regiones de*

conexión  $C_n(1), \dots, C_n(2k)$ . Además, cada  $C_n(j)$  es un anillo que contiene dos puntos de ramificación simple de la aplicación de Gauss  $g_n$  de  $M_n$ , que se puede expresar como grafo sobre la intersección de  $\Pi/H_n$  con cierta región horizontal, donde  $\Pi$  es un plano no horizontal  $\mathbb{R}^3$  que no depende de  $n$  ni de  $j$ .

*Demostración.* Nótese que basta probar que existe una parcial  $\{M_n\}_n$  que cumple la tesis de la proposición. Como el número total de ramificación de la aplicación de Gauss  $N_n$  de  $M_n$  es  $4k$  (no depende de  $n$ ), podemos tomar  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño y  $\theta \in \mathbb{S}^2 \cap \{x_2 = 0\}$  tales que el disco esférico  $D_{\mathbb{S}^2}(\theta, \varepsilon)$  no contenga valores de ramificación de  $N_n$ , para  $n$  suficientemente grande (claramente, podemos asumir que  $D_{\mathbb{S}^2}(\theta, \varepsilon)$  tampoco contiene los Polos Norte y Sur de  $\mathbb{S}^2$ ). En particular,  $N_n^{-1}(\theta)$  consiste en  $2k$  puntos distintos  $p_n(1), \dots, p_n(2k) \in M_n$ . Denotamos por  $\widetilde{M}_n$  al levantamiento de  $M_n$  a  $\mathbb{R}^3$ , y por  $\widetilde{p}_n(i)$  al levantamiento de  $p_n(i)$  a un entorno fundamental fijo de  $\widetilde{M}_n$ ,  $i = 1, \dots, 2k$ . Como  $\{C(M_n)\}_n$  converge en  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$ , la Proposición 4.2.1 nos dice que la sucesión  $\{\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(1)\}_n$  admite una cota uniforme de la curvatura de Gauss; y por el Lema 4.0.8, las superficies  $\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(1)$  admiten cotas locales uniformes del área (es decir, el área de su intersección con cualquier bola fija está acotada). El Teorema 1.5.2 nos asegura la convergencia uniforme en compactos de  $\mathbb{R}^3$  de una parcial de  $\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(1)$  (que seguimos denotando igual, por abreviar notación) a una superficie minimal  $\widetilde{M}_\infty(1) \subset \mathbb{R}^3$  propiamente embebida (no necesariamente conexa). Como hemos tomado  $\theta \in \mathbb{S}^2 \cap \{x_2 = 0\}$  y  $H_\infty$  apunta en la dirección del eje  $x_2$ , deducimos que el plano vectorial ortogonal a  $\theta$  contiene a  $H_\infty$ . Un razonamiento similar al usado en la demostración de la Proposición 4.2.1 para probar que  $\mathcal{H}_2$  no era llana (cambiando  $T_\infty$  por  $H_\infty$ ), nos permite ahora deducir que  $\widetilde{M}_\infty(1)$  no es llana. Como  $H_n$  converge, pero cualquier elección de las  $T_n$  diverge, la Proposición 4.1.1 y la Observación 4.1.3 implican que  $\widetilde{M}_\infty(1)$  es una superficie de Scherk simplemente periódica con género 0 en el cociente y dos finales horizontales.

Sea  $\Omega(1) = (\widetilde{M}_\infty(1) \cap \mathcal{C})/H_\infty$ , donde estamos denotando por  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$  a un cilindro (infinito) alrededor del eje  $x_2$ . Si el radio de  $\mathcal{C}$  es muy grande, entonces  $(\widetilde{M}_\infty(1)/H_\infty) - \Omega(1)$  consiste en un entorno de los 4 finales de  $\widetilde{M}_\infty(1)/H_\infty$ . Por tanto, para  $\delta$  tan pequeño como queramos, podemos tomar el radio de  $\mathcal{C}$  suficientemente grande de forma que la restricción a  $(\widetilde{M}_\infty(1)/H_\infty) - \Omega(1)$  de la aplicación de Gauss de  $\widetilde{M}_\infty(1)/H_\infty$  caiga en discos esféricos de radio  $\delta$ . Si definimos  $\widetilde{\Omega}_n(1) = [\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(1)] \cap \mathcal{C}$ , entonces  $\Omega_n(1) = \widetilde{\Omega}_n(1)/H_n$  converge uniformemente a  $\Omega(1)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Además, como la aplicación de Gauss de  $\Omega(1)$  es inyectiva, deducimos que la aplicación de Gauss de  $\Omega_n(1)$  es también inyectiva para  $n$  suficientemente grande. En particular,  $\widetilde{p}_n(i) - \widetilde{p}_n(1) \notin \widetilde{\Omega}_n(1)$ , con  $2 \leq i \leq 2k$ . El argumento anterior nos permite concluir que las sucesiones  $\{\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(2)\}_n, \dots, \{\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(2k)\}_n$  (tras pasar a

una parcial común a todas ellas) convergen respectivamente a superficies de Scherk simplemente periódicas  $\widetilde{M}_\infty(2), \dots, \widetilde{M}_\infty(2k)$ , cada una de ellas con género 0 en el cociente y dos finales horizontales. Nótese que todas las  $\widetilde{M}_\infty(i)$  tienen el mismo vector periodo  $H_\infty$ . Para cada  $i = 2, 3, \dots, 2k$ , definimos  $\Omega(i) = (\widetilde{M}_\infty(i) \cap \mathcal{C})/H_\infty$  y  $\widetilde{\Omega}_n(i) = [\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(i)] \cap \mathcal{C}$ . Tomando el radio de  $\mathcal{C}$  suficientemente grande, podemos suponer que  $(\widetilde{M}_\infty(i)/H_\infty) - \Omega(i)$  consiste en entornos casi llanos de los cuatro finales Scherk de  $\widetilde{M}_\infty(i)/H_\infty$ . Como antes,  $\Omega_n(i) = \widetilde{\Omega}_n(i)/H_n$  converge uniformemente a  $\Omega(i)$ . Y por la inyectividad de la restricción de la aplicación de Gauss de  $M_n$  a  $\Omega_n(i)$ , llegamos a que  $[(\widetilde{\Omega}_n(1) + \widetilde{p}_n(1)) \cup \dots \cup (\widetilde{\Omega}_n(2k) + \widetilde{p}_n(2k))]/H_n$  se embebe en  $M_n$ .

Como las secciones horizontales compactas de cada  $\Omega_n(i)$  son curvas cerradas, y sabemos por el apartado 4 de la Proposición 1.9.5 que las secciones horizontales compactas de  $M_n$  son conexas, deducimos que las  $[\widetilde{\Omega}_n(i) + \widetilde{p}_n(i)]/H_n$  están a distintas alturas. Más rigurosamente, si denotamos por  $S_n(i)$  a la banda\* horizontal de  $\mathbb{R}^3/H_n$  más pequeña que contiene a  $[\widetilde{\Omega}_n(i) + \widetilde{p}_n(i)]/H_n$ , entonces  $S_n(i) \cap S_n(j) = \emptyset$ , para cada  $i \neq j$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\widetilde{M}_\infty(1), \dots, \widetilde{M}_\infty(2k)$  están ordenadas en altura de forma creciente; es decir, podemos suponer que  $\min(x_3|_{S_n(i+1)}) \geq \max(x_3|_{S_n(i)})$ , para cada  $n$  y cada  $i = 1, \dots, 2k - 1$ , donde estamos denotando por  $x_3$  la tercera función coordenada de  $\mathbb{R}^3/H_n$ . Como podemos tomar el radio de  $\mathcal{C}$  tan grande como queramos, concluimos que tanto  $(T_n)_3$  como el ancho de las bandas  $S_n(i)$ , divergen cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Vamos a ver a continuación que  $\widetilde{M}_\infty(1), \dots, \widetilde{M}_\infty(2k)$  coinciden. Claramente, basta probar que el ángulo que forman con la horizontal los finales no horizontales de  $\widetilde{M}_\infty(i)$  no depende de  $i$ ; o equivalentemente, que los vectores flujo de las  $\widetilde{M}_\infty(i)$  alrededor de sus finales no horizontales tienen todos la misma dirección. Denotamos por  $C_n(j)$  la componente conexa de  $M_n - (\cup_{i=1}^{2k} (S_n(i)/T_n))$  que une  $[\widetilde{\Omega}_n(j) + \widetilde{p}_n(j)]/P_n$  con  $[\widetilde{\Omega}_n(j+1) + \widetilde{p}_n(j+1)]/P_n$ . Como  $C_n(j)$  es un anillo compacto contenido en  $M_n$ , el Teorema de la Divergencia asegura que los flujos de  $C_n(j)$  a lo largo de sus dos curvas frontera son opuestos. Como además dichos flujos convergen respectivamente al flujo de  $\widetilde{M}_\infty(j)/H_\infty$  alrededor de su final superior (no horizontal) y al flujo de  $\widetilde{M}_\infty(j+1)/H_\infty$  alrededor de su final inferior (no horizontal), y esto es válido para  $j = 1, \dots, 2k$  arbitrario, deducimos por un razonamiento cíclico que los flujos de todas las  $\widetilde{M}_\infty(i)$  alrededor de sus finales no horizontales tienen la misma dirección (un razonamiento alternativo para probar esto usa que la aplicación de Gauss  $N_n$  de  $M_n$  restringida a  $\cup_{j=1}^{2k} C_n(j)$  toma valores en un conjunto

---

\*Llamaremos *banda de  $\mathbb{R}^3$*  a la región conexa de  $\mathbb{R}^3$  comprendida entre dos planos paralelos, y el ancho de la banda será la distancia entre dichos planos paralelos. En un cociente  $\mathbb{R}^3/G$  de  $\mathbb{R}^3$ , una banda será el cociente por  $G$  de una banda de  $\mathbb{R}^3$ .

de  $\mathbb{S}^2$  de área arbitrariamente pequeña, lo cual se deduce de que la curvatura total de cada  $M_n$  es  $8k\pi$ , mientras que la curvatura total de cada una de las  $2k$  superficies de Scherk límite es  $4\pi$ ). Así,  $\widetilde{M}_\infty(1) = \dots = \widetilde{M}_\infty(2k)$ .

Como la aplicación de Gauss de una superficie de Scherk simplemente periódica de no tiene puntos de ramificación finitos, llegamos a que los  $4k$  puntos de ramificación (contando multiplicidad) de  $N_n$  deben estar contenidos en  $C_n(1) \cup \dots \cup C_n(2k)$ . Para cada  $j = 1, \dots, 2k$ , la restricción de  $N_n$  a cada una de las dos componentes conexas de  $\partial C_n(j)$  es una biyección sobre el borde de un pequeño disco esférico alrededor del vector normal límite  $N(j)$  de  $\widetilde{M}_\infty(j)$  en su final superior (sabemos que  $N(j)$  coincide con el vector límite de  $\widetilde{M}_\infty(j+1)$  en su final inferior). Si le pegamos a  $C_n(j)$  dos discos  $D_1, D_2$  a lo largo de  $\partial C_n(j)$ , podemos extender  $N_n$  a una aplicación holomorfa de grado 2 definida sobre la esfera  $C_n(j) \cup D_1 \cup D_2$ ,  $G : C_n(j) \cup D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . De la fórmula de Riemann-Hurwitz deducimos que el número total de ramificación de  $G$  es 2. Y como el grado de  $G$  es 2, llegamos a que  $G$  tiene exactamente dos puntos de ramificación simples, que han de estar contenidos en  $C_n(j)$ . Finalmente, sea  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  un plano paralelo a los finales no horizontales de  $\widetilde{M}_\infty(1)$  (i.e. un plano ortogonal a  $N(j)$ , para cualquier  $j = 1, \dots, 2k$ ). Como sabemos que, para  $n$  suficientemente grande,  $N_n|_{C_n(j)}$  está contenido en un disco esférico centrado en  $N(j)$  y de radio arbitrariamente pequeño, concluimos que podemos expresar  $C_n(j)$  como multigrafo sobre  $(\Pi/H_n) \cap S'_n(j)$ , siendo  $S'_n(j)$  la banda horizontal de  $\mathbb{R}^3/H_n$  comprendida entre  $S_n(j)$  y  $S_n(j+1)$ . Además, la restricción de  $N_n$  a cada una de las dos componentes conexas de  $\partial C_n(j)$  es inyectiva, de donde deducimos que  $C_n(j)$  es en verdad el grafo de una función  $u_n(j) : (\Pi/H_n) \cap S'_n(j) \rightarrow \mathbb{R}$ , lo cual acaba la demostración de la Proposición 5.0.3.  $\square$

## 5.1. Datos de Weierstrass alrededor del límite Scherk simplemente periódico

Denotaremos por  $S_\rho \subset \mathbb{R}^3/H_\infty$  a la superficie de Scherk simplemente periódica que aparece como límite de las superficies marcadas  $M_n \in \widetilde{\mathcal{S}}$  en las condiciones de la Proposición 5.0.3, donde  $H_\infty$  apunta en la dirección del eje  $x_2$  y se obtiene como límite de los vectores periodo de las  $M_n$  en sus finales. Podemos asumir que los normales límites de  $S_\rho$  en sus finales se proyectan estereográficamente en  $0, \infty, \rho, -1/\rho$ , para cierto  $\rho \in (0, 1]$ . Así, los datos de Weierstrass asociados a  $S_\rho$  vienen dados por

$$g(z) = z, \quad dh = \frac{c dz}{(z - \rho)(\rho z + 1)}, \quad \text{con } z \in \overline{\mathbb{C}} - \{0, \infty, \rho, -1/\rho\}, \quad (5.1)$$

para cierto  $c \in \mathbb{R}^*$ . Para determinar el valor de  $c$ , nótese que la intersección de  $S_\rho$  con el cociente por  $H_\infty$  de un plano horizontal a gran altura, consiste en una curva compacta  $\Gamma$  a lo largo de la cual  $S_\rho$  tiene periodo  $\pm H_\infty$ . Esta curva  $\Gamma$  se puede obtener como límite uniforme de secciones horizontales compactas  $\Gamma(n)$  de las  $M_n$  (a distintas alturas, ya que en la demostración de la Proposición 5.0.3 trasladábamos antes de tomar límites). Como para todo  $n$  se tiene que la parte vertical de los vectores periodo y flujo de  $M_n$  a lo largo de  $\Gamma(n)$  son respectivamente 0 y  $2\pi$ , entonces

$$2\pi i = c \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z - \rho)(\rho z + 1)} = 2\pi i c \operatorname{Res}_\rho \frac{dz}{(z - \rho)(\rho z + 1)} = \frac{2\pi i c}{\rho^2 + 1},$$

de donde obtenemos que  $c = \rho^2 + 1$  (hemos asumido que el normal límite de  $S_\rho$  en su final superior es  $\rho$ , y hemos orientado  $\Gamma$  de forma que la segunda igualdad de arriba es cierta; estas elecciones determinan el signo de  $c$ ).

**Observación 5.1.1** *Para  $\rho > 1$ , la construcción anterior nos da una superficie de Scherk simplemente periódica,  $S_\rho$ , que se puede ver como la imagen de otra superficie de Scherk  $S_{\rho'}$ , con  $\rho' < 1$ , por una simetría respecto de un plano ortogonal al eje  $x_1$ . Todos los resultados obtenidos en este capítulo aplicados a  $S_{\rho'}$ , se trasladarán a  $S_\rho$  mediante dicha simetría.*

A continuación, damos una carta local para  $\mathcal{W}$  alrededor de  $S_\rho \in \partial\mathcal{W}$  (como punto de  $\partial\mathcal{W}$ ,  $S_\rho$  representa  $2k$  copias de la superficie de Scherk simplemente periódica descrita anteriormente). Sea  $D(*, \varepsilon) \subset \mathbb{C}$  un pequeño disco de centro  $* = \rho, -1/\rho$  y radio  $\varepsilon > 0$ . Dadas  $2k$  parejas (desordenadas) de puntos distintos  $a_{2j-1}, b_{2j-1} \in D(\rho, \varepsilon)$  y  $a_{2j}, b_{2j} \in D(-1/\rho, \varepsilon)$ ,  $1 \leq j \leq k$ , podemos construir una aplicación meromorfa marcada  $g \in \mathcal{W}$  asociada a dichas parejas como sigue. Consideramos  $2k$  copias  $\overline{\mathbb{C}}_1, \overline{\mathbb{C}}_2, \dots, \overline{\mathbb{C}}_{2k}$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Cortamos  $\overline{\mathbb{C}}_1$  a lo largo de pequeños arcos disjuntos  $\beta_1, \beta_2$ , con  $\beta_j$  uniendo  $a_j$  con  $b_j$ , para  $j = 1, 2$  (nótese que, en particular, podemos suponer que  $\beta_j$  no pasa no  $0, \infty$ ); cortamos  $\overline{\mathbb{C}}_2$  a lo largo de  $\beta_2$  y a lo largo de un pequeño arco  $\beta_3$  uniendo  $a_3$  con  $b_3$ ; y pegamos  $\overline{\mathbb{C}}_1$  con  $\overline{\mathbb{C}}_2$  a lo largo del arco común  $\beta_2$  de forma estándar (consultar [68] para una información más detallada sobre este tipo de construcciones). Repetimos el proceso, hasta pegar  $\overline{\mathbb{C}}_{2k}$  con  $\overline{\mathbb{C}}_1$  a lo largo del arco común  $\beta_1$ . Pegando así las  $2k$  copias de  $\overline{\mathbb{C}}$ , obtenemos una superficie de Riemann  $\mathbb{M}$  de género 1. El parámetro complejo estándar  $z$  sobre cada  $\overline{\mathbb{C}}_j$  nos da una aplicación meromorfa bien definida sobre  $\mathbb{M}$ ,  $g : \mathbb{M} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , de grado  $2k$  y con valores de ramificación  $a_1, b_1, \dots, a_{2k}, b_{2k}$ , donde cada pareja  $a_j, b_j$  cae entre las copias  $\overline{\mathbb{C}}_{j-1}$  y  $\overline{\mathbb{C}}_j$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ . A cada lista  $(a_1, b_1, \dots, a_{2k}, b_{2k})$  podemos, por tanto, asociarle la aplicación meromorfa marcada  $g = (\mathbb{M}, g, 0_1, \dots, 0_{2k}, \infty_1, \dots, \infty_{2k}, [\Gamma]) \in \mathcal{W}$ ,

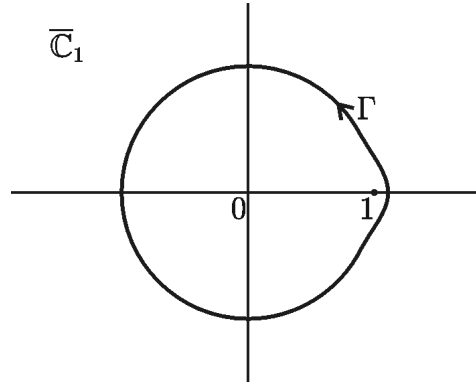


Figura 5.1: La curva  $\Gamma \subset \overline{\mathbb{C}}_1$  es un representante embebido de la clase de homología  $[\Gamma] \in H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$  cuando  $\rho = 1$ , ver la Observación 5.1.2.

donde los subíndices de los  $0_j, \infty_j$  se refieren a la copia  $\overline{\mathbb{C}}_j$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  que los contiene, y  $[\Gamma] \in H_1(g^{-1}(\mathbb{C}^*), \mathbb{Z})$  es la clase de homología de  $\Gamma = \{z \in \overline{\mathbb{C}}_1 \mid |z| = 1\}$  orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj (claramente,  $[\Gamma] \neq 0$  en  $H_1(\mathbb{M}, \mathbb{Z})$ ).

**Observación 5.1.2** *Nótese que el toro conforme  $\mathbb{M}$  no depende de  $\rho$ . Para cada  $\rho \in (0, 1)$ , la curva  $\Gamma$  definida anteriormente está embebida en  $S_\rho$ , y el vector periodo de  $S_\rho$  a lo largo de  $\Gamma$  es  $\vec{0}$ . Cuando  $\rho = 1$ , debemos deformar ligeramente  $\Gamma$  en  $\mathbb{M}$  para seguir obteniendo una curva embebida y cerrada en  $S_\rho$ , cuya clase de homología en el toro punteado  $g^{-1}(\{0, \infty, \rho, -1/\rho\})$  es constante para valores de  $\rho$  próximos a 1, ver la Figura 5.1.*

Si cambiamos de orden una pareja  $a_j, b_j$ , volvemos a obtener con la construcción anterior la misma  $g \in \mathcal{W}$ , luego la aplicación  $(a_1, b_1, \dots, a_{2k}, b_{2k}) \mapsto g \in \mathcal{W}$  no es inyectiva. Para solventar la falta de inyectividad, consideramos los polinomios elementales simétricos en dos variables de cada pareja  $a_j, b_j$ . O lo que es equivalente (ya que el par  $(a_j + b_j, a_j b_j)$  cae en un entorno de  $(2\rho, \rho^2)$  o de  $(-2/\rho, 1/\rho^2)$ , donde la aplicación  $(u, v) \mapsto (u/2, \sqrt{v})$  es un difeomorfismo local), consideramos las medias aritmética y geométrica de  $a_j, b_j$ ,

$$x_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j), \quad y_j = \sqrt{a_j b_j}.$$

Así,  $(x_j, y_j)$  cae en un entorno de  $(\rho, \rho)$  o de  $(-1/\rho, 1/\rho)$ , según la paridad de  $j$ .

Para cada  $\varepsilon > 0$ , denotamos  $\mathcal{U}(\varepsilon) = \left[ D(\rho, \varepsilon) \times D(\rho, \varepsilon) \times D\left(\frac{-1}{\rho}, \varepsilon\right) \times D\left(\frac{1}{\rho}, \varepsilon\right) \right]^k$ . Como  $x_j^2 - y_j^2 = \frac{1}{4}(a_j - b_j)^2$ , la condición  $a_j \neq b_j$  necesaria en la construcción anterior



equivale a  $x_j^2 \neq y_j^2$ . Definimos

$$\mathcal{A} = \{(x_1, y_1, \dots, x_{2k}, y_{2k}) \mid x_j^2 = y_j^2 \text{ para alguna } j = 1, \dots, 2k\}.$$

Claramente,  $\mathcal{A}$  así definida es una subvariedad analítica de  $\mathbb{C}^{4k}$ . Además, para cierto  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, la aplicación

$$\mathbf{z} = (x_1, y_1, \dots, x_{2k}, y_{2k}) \in \mathcal{U}(\varepsilon') - \mathcal{A} \mapsto \aleph(\mathbf{z}) = g \in \mathcal{W}$$

define una carta local para  $\mathcal{W}$  alrededor de  $S_\rho$ .

### Observación 5.1.3

- (i) Si una aplicación meromorfa marcada  $g = \aleph(\mathbf{z})$  produce una superficie marcada  $M \in \tilde{\mathcal{S}}$ , entonces la lista ordenada  $(0_1, \dots, 0_{2k}, \infty_1, \dots, \infty_{2k})$  no coincide necesariamente con el orden de los finales de  $M$  (como superficie marcada). Como el orden de los finales de  $M$  no afectará a los argumentos que siguen, abreviamos la notación asumiendo que la lista ordenada de los finales de  $M$  es  $(0_1, \dots, 0_{2k}, \infty_1, \dots, \infty_{2k})$ .
- (ii) Sea  $\{M_n\}_n \subset \tilde{\mathcal{S}}$  una sucesión con  $C(M_n) = (a_n, b_n) \rightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  y  $T_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  (para cualquier elección de  $T_n$ ). Por la Proposición 5.0.3, sabemos que las superficies geométricas  $M_n$  convergen uniformemente a  $2k$ -copias de una superficie de Scherk simplemente periódica  $S_\rho$  parametrizada como en (5.1) para cierto  $\rho \in (0, 1]$ . Sea  $\Gamma$  la curva  $\{|z| = 1\}$  vista en una de las copias de  $S_\rho$ . Claramente, se puede ver  $\Gamma$  como el límite uniforme de una sucesión de curvas  $\Gamma(n) \subset M_n$  con  $P_{\Gamma(n)} = 0$ . Cambiando la clase de homología de la superficie marcada  $M_n$  por  $[\Gamma(n)] \in H_1(M_n, \mathbb{Z})$ , podemos ver la misma superficie geométrica  $M_n$  como una nueva superficie marcada  $M'_n$  dentro del dominio de la carta  $\aleph$  para  $n$  suficientemente grande. La segunda componente de  $C(M'_n)$  difiere de  $b_n$  en un múltiplo entero par (fijo) de  $\pi a_n$  (ver la Observación 3.2.7).

## 5.2. Extensión holomorfa y unicidad local

Cuando  $\mathbf{z} \in \mathcal{A}$ , podemos extender de forma continua el proceso de cortar y pegar copias de  $\overline{\mathbb{C}}$  explicado anteriormente, obteniendo una superficie de Riemann con nodos (ver la página 245 de [27] para la definición de una superficie de Riemann con nodos), donde cada nodo se corresponde con el punto  $a_j = b_j$  entre las copias  $\overline{\mathbb{C}}_{j-1}, \overline{\mathbb{C}}_j$ . La correspondiente diferencial  $\phi$  se extiende también a través de  $\mathbf{z}$  como sigue.

**Proposición 5.2.1** *Cada  $\mathbf{z} \in \mathcal{A}$  produce  $l$  esferas  $S_1, \dots, S_l$  unidas por  $l$  nodos  $P_j, Q_j \in S_j$  (aquí estamos suponiendo que  $Q_j = P_{j+1}$  y que los subíndices son cíclicos), y  $g$  degenera en  $l$  aplicaciones meromorfas  $g(j) : S_j \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  no constantes, cuyos grados suman  $2k$ , y cada  $g(j)$  toma los valores  $\rho$  y/o  $-1/\rho$  en los puntos  $P_j, Q_j$ . La 1-forma holomorfa  $\phi$  degenera sobre cada  $S_j$  en la única 1-forma meromorfa  $\phi_j$  sobre  $S_j$  que tiene exactamente dos polos simples en  $P_j$  y  $Q_j$  con residuos  $1$  y  $-1$  respectivamente (dichos residuos quedan determinados por la ecuación  $\int_{|z|=1} \phi = 2\pi i$ ). Finalmente, tanto  $g$  como  $\phi$  dependen de forma holomorfa de todos los parámetros (incluyendo los puntos de  $\mathcal{A}$ ).*

*Demostración.* Dada  $\mathbf{z} \in \mathcal{A}$ , tomamos una sucesión  $\{\mathbf{z}_n\}_n \subset \mathcal{U}(\varepsilon) - \mathcal{A}$  convergiendo a  $\mathbf{z}$ . Cada  $\mathbf{z}_n$  determina una aplicación meromorfa marcada,

$$g_n = \aleph(\mathbf{z}_n) = (\mathbb{M}_n, g_n, p_{1,n}, \dots, p_{2k,n}, q_{1,n}, \dots, q_{2k,n}, [\Gamma(n)]) \in \mathcal{W},$$

y una 1-forma holomorfa  $\phi_n$  tal que  $\int_{\Gamma(n)} \phi_n = 2\pi i$ . Sean  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}^*$  los puntos (distintos) obtenidos como límite cuando  $n \rightarrow \infty$  de los valores de ramificación  $a_{1,n}, b_{1,n}, \dots, a_{2k,n}, b_{2k,n}$  de las  $g_n$  (nótese que  $m < 4k$ , ya que al menos una pareja  $a_{\tau,n}, b_{\tau,n}$  colapsa en un único punto al tomar límites, por ser  $\mathbf{z} \in \mathcal{A}$ ). Para cada  $l = 1, \dots, m$ , sea  $D_l \subset \mathbb{C}$  un pequeño disco centrado en  $c_l$ , siendo  $D_l \cap D_i = \emptyset$  para todo  $l \neq i$ , y sea  $\Omega = \overline{\mathbb{C}} - \cup_{l=1}^m D_l$ . Por cómo se define la topología de  $\mathcal{W}$  (ver la Sección 3.1), los valores de ramificación  $a_{\tau,n}, b_{\tau,n} \in \cup_{l=1}^m D_l$ , para todo  $\tau = 1, \dots, 2k$  y  $n$  suficientemente grande. Así,  $g_n|_{g_n^{-1}(\Omega)} : g_n^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega$  es un recubridor (no ramificado) de  $2k$  hojas, y todos estos recubridores  $g_n|_{g_n^{-1}(\Omega)}$  son isomorfos. Nótese que cada  $g_n^{-1}(\Omega)$  tiene  $l$  componentes conexas  $\Omega_{1,n}, \dots, \Omega_{l,n}$ , donde  $l$  es el número de parejas  $a_{\tau,n}, b_{\tau,n}$  que colapsan al tomar límites. Vía el isomorfismo de recubridores entre los  $g_n|_{g_n^{-1}(\Omega)}$ , podemos identificar las componentes  $\Omega_{j,n}$  con subconjuntos abiertos  $\Omega_j$  contenidos en esferas  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , sobre las que hay definidas  $l$  aplicaciones meromorfas  $g(j) : S_j \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , con valores de ramificación contenidos en la lista  $\{c_1, \dots, c_m\}$  y tales que  $\sum_{j=1}^l \text{grado}(g(j)) = 2k$ . Además, podemos considerar mediante la identificación anterior, cada  $\Omega_j$  como subconjunto de  $\mathbb{M}_n$ , para todo  $n$  suficientemente grande, y la restricción de  $g_n$  a cada  $\Omega_j$  la podemos identificar con  $g(j)$ . Salvo dos de ellas, todas las componentes de  $\partial\Omega_j$  bordean discos en el toro  $\mathbb{M}_n$ . Las dos curvas restantes de  $\partial\Omega_j$ , son homólogas a  $\Gamma(n)$  en  $\mathbb{M}_n$ , y cada una de ellas es borde de un disco  $D_l$  que contiene una pareja de valores de ramificación  $a_{\tau,n}, b_{\tau,n}$  que coinciden en el límite (i.e.  $a_{\tau,n} - b_{\tau,n} \rightarrow 0$ ). Observamos que si achicamos el radio  $r$  de los discos  $D_l$ , los dominios  $\Omega_j$  se hacen cada vez más grandes, hasta obtener la esfera  $S_j$  finitamente punteada,  $S_j - Z_j$ , cuando  $r \rightarrow 0$ . Las dos curvas de  $\partial\Omega_j$  no triviales en  $\mathbb{M}_n$  determinan dos puntos distintos  $P_j, Q_j \in Z_j$  en los cuales  $g(j)$  toma valores  $\rho$  y/o  $-1/\rho$ . Consideramos una curva  $\Gamma_j(n) \subset \Omega_j$  homóloga a  $\Gamma(n)$  en  $\mathbb{M}_n$ . Así,  $\Gamma_j(n)$

es un generador de la homología de  $S_j - \{P_j, Q_j\}$ . Sea  $C$  el cilindro que recubre a  $\mathbb{M}_n$  cuyo grupo fundamental está generado por  $\Gamma_j(n)$ , y parametrizamos  $C$  por  $\mathbb{C}^*$  deforma que  $\Gamma_j(n)$  se levanta al grupo de homotopía de  $\{|z| = 1\}$  en  $\mathbb{C}^*$ . Entonces, la inclusión de  $\Omega_j$  a  $\mathbb{M}_n$  se levanta a una función holomorfa e inyectiva  $f_n : \Omega_j \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Un resultado analítico (Lema 7 de [41]) nos dice que, pasando a una parcial, asegura la existencia de una sucesión  $\{\lambda_n\}_n$  en  $\mathbb{C}^*$  tal que  $\{\lambda_n f_n\}_n$  converge uniformemente en compactos de  $\Omega_j$  a una función holomorfa inyectiva  $f : \Omega_j \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Tomamos los radios de los discos  $D_l$  convergiendo a 0, con los que  $\Omega_j$  converge a  $S_j - \{P_j, Q_j\}$ . Y por un proceso diagonal, podemos tomar la sucesión  $\{\lambda_n\}_n$  y la función límite  $f$  independientes de  $\Omega_j$ ; es decir,  $\lambda_n f_n : S_j - \{P_j, Q_j\} \rightarrow \mathbb{C}^*$  converge uniformemente en compactos de  $S_j - \{P_j, Q_j\}$  a  $f : S_j - \{P_j, Q_j\} \rightarrow \mathbb{C}^*$ , que es un función holomorfa e inyectiva. Luego  $f$  extiende a un biholomorfismo entre  $S_j$  y  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Por otro lado,  $\phi_n$  se levanta a  $\frac{dz}{z}$  en  $\mathbb{C}^*$  (que es la única 1-forma holomorfa cumpliendo  $\int_{\{|z|=1\}} \phi_n = 2\pi i$ ), por lo que la restricción de  $\phi_n$  a  $\Omega_j$  coincide con  $f_n^* \frac{dz}{z} = \frac{d(\lambda_n f_n)}{\lambda_n f_n}$ , que converge a  $\phi = \frac{df}{f}$ . De nuevo tomando límites en los dominios  $\Omega_j$ , llegamos a que  $\phi_n$  converge a  $\phi$  sobre  $S_j - \{P_j, Q_j\}$ ; y  $\phi$  es una 1-forma meromorfa con sólo dos polos simples en  $P_j, Q_j$  con residuos  $\pm 1$ . Fijamos  $P_j$  como el polo de  $\phi$  cuyo residuo es 1. Esto completa la demostración de la Proposición 5.2.1.  $\square$

**Lema 5.2.2** *La aplicación ligadura  $L$  se extiende de forma holomorfa a  $\mathcal{U}(\varepsilon)$ .*

*Demostración.* Como  $\mathcal{U}(\varepsilon) \cap \mathcal{A}$  es una subvariedad analítica de  $\mathcal{U}(\varepsilon)$  y  $L$  es una aplicación holomorfa en  $\mathcal{U}(\varepsilon) - \mathcal{A}$ , basta probar que  $L$  es una aplicación acotada en un entorno de  $\mathcal{U}(\varepsilon) \cap \mathcal{A}$ , por el Teorema de Extensión de Riemann (Teorema 3.1.1). Consideramos una sucesión  $\{g_n = \aleph(\mathbf{z}_n)\}_n$  de aplicaciones meromorfas marcadas, con  $\mathbf{z}_n \in \mathcal{U}(\varepsilon) - \mathcal{A}$  convergiendo a  $\mathbf{z} \in \mathcal{U}(\varepsilon) \cap \mathcal{A}$ . Nótese que cada componente de  $L(g_n)$  se puede escribir como una integral de una 1-forma holomorfa  $\varphi_n$  a lo largo de una curva  $\alpha$  contenida en una de las esferas doblemente punteadas  $S_j - \{P_j, Q_j\}$  que aparecen en la Proposición 5.2.1 (podemos asumir que  $\alpha$  no depende de  $n$ ), y que  $\{\varphi_n\}_n$  converge uniformemente sobre  $\alpha$  cuando  $n \rightarrow \infty$  a una 1-forma holomorfa  $\varphi$  en  $S_j - \{P_j, Q_j\}$ . De aquí se deduce directamente que  $L(g_n)$  está acotada, como se quería probar.  $\square$

**Teorema 5.2.3**  *$L|_{\mathcal{U}(\varepsilon)}$  es un biholomorfismo para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño.*

*Demostración.* Dada una lista  $\mathbf{z} = (x_1, y_1, \dots, x_{2k}, y_{2k}) \in \mathcal{U}(\varepsilon) - \mathcal{A}$ , denotaremos por  $g = \aleph(\mathbf{z}) = (\mathbb{M}, g, 0_1, \dots, 0_{2k}, \infty_1, \dots, \infty_{2k}, [\Gamma])$  a la aplicación meromorfa marcada

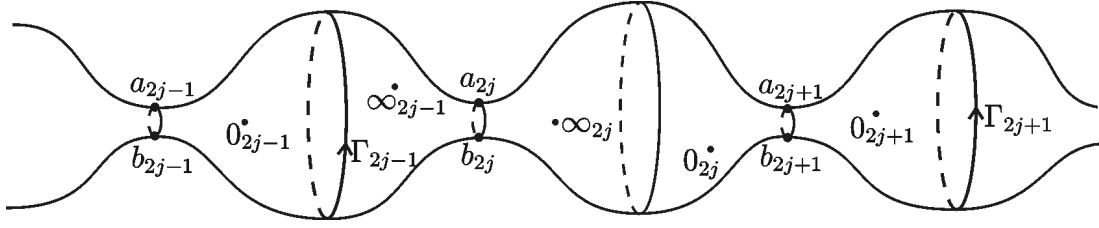


Figura 5.2: Es la parte del toro asociado a  $g = \aleph(\mathbf{z})$ , con  $\mathbf{z} \in \mathcal{U}(\varepsilon) - \mathcal{A}$ , correspondiente a las copias  $\overline{\mathbb{C}}_{2j-1}, \overline{\mathbb{C}}_{2j}, \overline{\mathbb{C}}_{2j+1}$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

asociada a  $\mathbf{z}$ . Para  $j = 1, \dots, k$ , sea  $\Gamma_{2j-1}$  la curva cerrada contenida en  $g^{-1}(\overline{\mathbb{C}})$  que se corresponde con el lazo  $\{z \in \overline{\mathbb{C}}_{2j-1} \mid |z| = 1\}$  (si  $\rho = 1$ , modificamos levemente dicho lazo como mencionamos en la Observación 5.1.2). Consideramos en  $\Gamma_1$  la orientación de  $\Gamma$ , y orientamos las demás  $\Gamma_{2j-1}$  para que sean homólogas a  $\Gamma_1$  en el toro  $g^{-1}(\overline{\mathbb{C}})$ , ver la Figura 5.2. Así, el Teorema de los Residuos nos dice que

$$\text{Res}_{0_{2j}}\left(\frac{\phi}{g}\right) + \text{Res}_{\infty_{2j+1}}\left(\frac{\phi}{g}\right) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\Gamma_{2j+1}} \frac{\phi}{g} - \int_{\Gamma_{2j-1}} \frac{\phi}{g} \right)$$

$$\text{y } \text{Res}_{\infty_{2j}}(g\phi) + \text{Res}_{\infty_{2j-1}}(g\phi) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\Gamma_{2j+1}} g\phi - \int_{\Gamma_{2j-1}} g\phi \right),$$

donde recordemos que estamos denotando respectivamente por  $0_l, \infty_l$  al cero e infinito de la copia  $\overline{\mathbb{C}}_l$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Por tanto, podemos escribir la composición de  $L$  con cierta transformación lineal y biyectiva de  $\mathbb{C}^{4k}$  como  $\widehat{L} : \mathcal{U}(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}^{4k}$ , donde

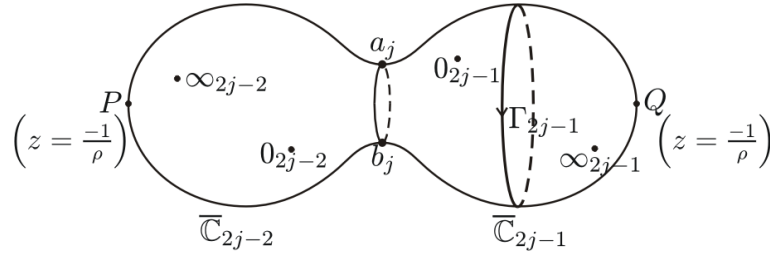
$$\widehat{L}(\mathbf{z}) = \left( \underbrace{\text{Res}_{0_{2j-1}}\left(\frac{\phi}{g}\right)}_{1 \leq j \leq k}, \underbrace{\text{Res}_{\infty_{2j-1}}(g\phi)}_{1 \leq j \leq k}, \underbrace{\int_{\Gamma_{2j-1}} \frac{\phi}{g}}_{1 \leq j \leq k}, \underbrace{\int_{\Gamma_{2j-1}} g\phi}_{1 \leq j \leq k} \right).$$

Por el Teorema de la Función Inversa, basta probar que la diferencial de  $\widehat{L}$  en el punto  $(\rho, \rho, \frac{-1}{\rho}, \frac{1}{\rho})^k \in \mathbb{C}^{4k}$  correspondiente a  $S_\rho \in \partial\mathcal{W}$ , es un automorfismo de  $\mathbb{C}^{4k}$ .

Fijemos  $j = 1, \dots, k$ . Para calcular  $\frac{\partial \widehat{L}}{\partial x_{2j-1}}(S_\rho)$ , derivamos en  $x = \rho$  la composición de  $\widehat{L}$  con la curva

$$x \in D(\rho, \varepsilon) \mapsto \mathbf{x}_\rho = \left( \rho, \rho, \frac{-1}{\rho}, \frac{1}{\rho}, \dots, \frac{1}{\rho}, x, \rho, \frac{-1}{\rho}, \frac{1}{\rho}, \dots, \rho, \rho, \frac{-1}{\rho}, \frac{1}{\rho} \right) \in \mathcal{U}(\varepsilon),$$

donde  $x$  está situada en la  $(4j - 3)$ -ésima componente de  $\mathbf{x}_\rho$ . Como hemos probado en el Lema 5.2.2,  $\mathbf{x}_\rho$  produce  $2k - 1$  esferas  $S_1, S_2, \dots, S_{2j-2}, S_{2j}, \dots, S_{2k}$  y  $2k - 1$  aplicaciones meromorfas  $g_1, g_2, \dots, g_{2j-2}, g_{2j}, \dots, g_{2k}$ , cada  $g_m$  definida sobre  $S_m$ , cumpliendo:

Figura 5.3: La esfera doble  $S_{2j-2}$  ( $j = 1, \dots, k$ ).

1. Para cada  $m = 1, \dots, 2k$ ,  $m \neq 2j - 2, 2j - 1$ ,  $g_m : S_m \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  es un biholomorfismo. Por tanto, podemos parametrizar  $S_m$  sobre  $\overline{\mathbb{C}}$  mediante  $g_m(z) = z$  (a estas esferas las llamaremos *esferas simples*). En dicha parametrización, los nodos de  $S_m$  se corresponden con  $\rho, \frac{-1}{\rho}$ , y  $\phi = c \frac{dz}{(z-\rho)(z+\frac{1}{\rho})}$ , donde  $c \in \mathbb{C}^*$  queda determinada por la ecuación  $\int_{|z|=1} \phi = 2\pi i$  (en particular,  $c$  no depende de  $x$ ).
2. La aplicación meromorfa  $g_{2j-2} : S_{2j-2} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  tiene grado 2. Podemos parametrizar  $S_{2j-2}$  sobre  $\{(z, w) \in \overline{\mathbb{C}}^2 \mid w^2 = z^2 - 2xz + \rho^2\}$ , donde  $w \equiv w_x = \sqrt{z^2 - 2xz + \rho^2}$  está bien definida (Nos referiremos a  $S_{2j-2}$  como *esfera doble*). Fijamos el signo de la raíz cuadrada de  $w^2$  cumpliendo  $w \sim z - \rho$  sobre  $\overline{\mathbb{C}}_{2j-1}$  y  $w \sim -(z - \rho)$  sobre  $\overline{\mathbb{C}}_{2j-2}$ . Denotemos por  $Q$  (resp.  $P$ ) al punto correspondiente a  $z = -1/\rho$  en  $\overline{\mathbb{C}}_{2j-1}$  (resp.  $\overline{\mathbb{C}}_{2j-2}$ ), ver la Figura 5.3. Aquí,  $g(z, w) = z$  y  $\phi = c(x) \frac{dz}{(z+\frac{1}{\rho})w}$ , siendo

$$-1 = \text{Res}_Q \phi = \text{Res}_Q \frac{c(x) dz}{(z + \frac{1}{\rho})w} = \frac{c(x)}{w(Q)}. \quad (5.2)$$

Como para  $m \neq 2j - 2, 2j - 1$ , las componentes de  $\widehat{L}|_{S_m}$  no dependen de  $x$ , las correspondientes derivadas respecto de  $x$  se anulan. Falta por calcular  $\widehat{L}|_{S_{2j-2}}, \widehat{L}|_{S_{2j-1}}$ .

- $\text{Res}_{0_{2j-1}} \left( \frac{\phi}{g} \right) = c(x) \text{Res}_{0_{2j-1}} \left( \frac{dz}{z(z + \frac{1}{\rho})w_x} \right) = \frac{\rho c(x)}{w_x(0_{2j-1})} = -c(x)$ .
- $\text{Res}_{\infty_{2j-1}}(g\phi) = c(x) \text{Res}_{\infty_{2j-1}} \left( \frac{z dz}{(z + \frac{1}{\rho})\sqrt{z^2 - 2xz + \rho^2}} \right)$   
 $= -\rho c(x) \text{Res}_{\xi=0} \left( \frac{d\xi}{\xi(\rho + \xi)\sqrt{1 - 2x\xi + \rho^2\xi^2}} \right) = -c(x)$ .

$$\begin{aligned}
\blacksquare \operatorname{Res}_Q \left( \frac{\phi}{g} \right) &= c(x) \operatorname{Res}_Q \left( \frac{dz}{z(z + \frac{1}{\rho})w_x} \right) = \frac{-\rho c(x)}{w_x(Q)} = \rho \\
&\Rightarrow \int_{\Gamma_{2j-1}} \frac{\phi}{g} = -2\pi i \operatorname{Res}_Q \frac{\phi}{g} = -2\pi i \rho . \\
\blacksquare \operatorname{Res}_Q(g\phi) &= c(x) \operatorname{Res}_Q \frac{z dz}{(z + \frac{1}{\rho})w_x} = \frac{-c(x)}{\rho w_x(Q)} = \frac{1}{\rho} \\
&\Rightarrow \int_{\Gamma_{2j-1}} g\phi = -2\pi i [\operatorname{Res}_Q(g\phi) + \operatorname{Res}_{\infty_{2j-1}}(g\phi)] = 2\pi i \left( c(x) - \frac{1}{\rho} \right) .
\end{aligned}$$

Como  $w_\rho = (z - \rho)^2$ , de (5.2) obtenemos que  $c(\rho) = -w_x(Q)|_{x=\rho} = \frac{\rho^2+1}{\rho}$ , y  $c'(\rho) = -\frac{d}{dx}|_{x=\rho} w_x(Q) = -\frac{1/\rho}{w_\rho(Q)} = \frac{1}{\rho^2+1}$ . Por tanto,

$$\frac{\partial \widehat{L}}{\partial x_{2j-1}}(S_\rho) = \frac{1}{\rho^2+1} \left( 0, \dots, 0, \overset{(2j-1)}{-1}, \overset{(2j)}{-1}, 0, \dots, 0, \overset{(2k+2j-1)}{0}, \overset{(2k+2j)}{2\pi i}, 0, \dots, 0 \right).$$

Análogamente llegamos a que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{L}}{\partial y_{2j-1}}(S_\rho) &= \frac{\rho^2}{\rho^2+1} \left( 0, \dots, 0, \overset{(2j-1)}{1 - \frac{(\rho^2+1)^2}{\rho^4}}, \overset{(2j)}{-1}, 0, \dots, 0, \overset{(2k+2j-1)}{0}, \overset{(2k+2j)}{2\pi i}, 0, \dots, 0 \right); \\
\frac{\partial \widehat{L}}{\partial y_{2j-1}}(S_\rho) &= \frac{\rho^2}{\rho^2+1} \left( 0, \dots, 0, \overset{(2j-1)}{1}, \overset{(2j)}{1}, 0, \dots, 0, \overset{(2k+2j-1)}{2\pi i}, \overset{(2k+2j)}{0}, 0, \dots, 0 \right); \\
\frac{\partial \widehat{L}}{\partial y_{2j}}(S_\rho) &= \frac{(\rho^2+1)^2-1}{\rho^2+1} \left( 0, \dots, 0, \overset{(2j-1)}{1}, \overset{(2j)}{\frac{1}{1-(\rho^2+1)^2}}, 0, \dots, 0, \overset{(2k+2j-1)}{2\pi i}, \overset{(2k+2j)}{0}, 0, \dots, 0 \right).
\end{aligned}$$

Así, el valor absoluto del Jacobiano de  $\widehat{L}$  en el punto  $S_\rho$  (que es el valor absoluto del determinante de la matriz de filas  $\frac{\partial \widehat{L}}{\partial x_{2j-1}}(S_\rho), \frac{\partial \widehat{L}}{\partial y_{2j-1}}(S_\rho), \frac{\partial \widehat{L}}{\partial y_{2j-1}}(S_\rho), \frac{\partial \widehat{L}}{\partial y_{2j}}(S_\rho)$  calculadas anteriormente), es igual a  $(2\pi)^{2k}$ , lo cual prueba el teorema.  $\square$

**Corolario 5.2.4** *Las únicas superficies marcadas en  $\widetilde{\mathcal{S}}$  alrededor de un elemento de  $\partial\mathcal{W}$  correspondiente a dos copias de una superficie de Scherk simplemente periódica  $S_\rho$  (para cualquier  $\rho \in (0, 1]$ ), con género 0 en el cociente y dos finales horizontales, están contenidas en  $\widetilde{\mathcal{K}}$ .*

*Demostración.* Sea  $\{M_n\}_n$  una sucesión en  $\widetilde{\mathcal{S}}$  convergiendo a  $S_\rho \in \partial\mathcal{W}$  (caso 4 de la Proposición 4.1.1). Por el Lema 5.2.2, la aplicación ligadura  $L$  se extiende de forma holomorfa a  $S_\rho$ . Concretamente, si identificamos  $L$  con su composición con la carta

local  $\mathfrak{N} : \mathcal{U}(\varepsilon) - \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{W}$  alrededor de  $S_\rho$ , donde  $\varepsilon$  es un real positivo suficientemente pequeño, entonces  $L$  se extiende de forma holomorfa a todo  $\mathcal{U}(\varepsilon)$ . Además, el Teorema 5.2.3 asegura la existencia de un  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño para el cual  $L|_{\mathcal{U}(\varepsilon)}$  es un biholomorfismo (identificaremos  $\mathcal{U}(\varepsilon) \equiv \mathfrak{N}(\mathcal{U}(\varepsilon))$ ). En particular, el espacio  $\mathcal{U}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}$  tiene dimensión real 3 ( $\mathcal{M}$  es el espacio de superficies inmersas marcadas definido en el capítulo anterior). Por otra parte, de la Observación 2.2.5 y del apartado 3 del Lema 2.2.6 se deduce que la dimensión (real) de  $\tilde{\mathcal{K}}$  alrededor de  $S_\rho$  es 3; y por tanto,  $\mathcal{U}(\varepsilon) \cap \mathcal{M} = \mathcal{U}(\varepsilon) \cap \tilde{\mathcal{K}}$ . Por otro lado, la Observación 5.1.3 nos asegura la existencia de una superficie marcada  $M'_n \in \mathcal{U}(\varepsilon)$  tal que  $M_n, M'_n$  coinciden como superficies geométricas, para  $n$  suficientemente grande ( $M_n$  y  $M'_n$  sólo se diferencian en la clase de homología destacada como superficies marcadas). Así,  $M'_n \in \tilde{\mathcal{K}}$ , de donde obtenemos también que  $M_n \in \tilde{\mathcal{K}}$ , como queríamos probar.  $\square$





# Capítulo 6

## Unicidad alrededor de la catenoide

Cuando una sucesión  $\{M_n\}_n \in \tilde{\mathcal{S}}$  degenera en una catenoide vertical (caso 1 de la Proposición 4.1.1), los residuos que aparecen en la aplicación ligadura  $L$  divergen cuando  $n \rightarrow \infty$ . En este capítulo, modificaremos la definición de  $L$  para poder obtener una extensión bien definida y localmente invertible alrededor de dicho punto de  $\partial\mathcal{W}$ . Esto nos dará una unicidad local de ejemplos KMR alrededor del límite catenoide.

**Proposición 6.0.5** *Sea  $\{M_n\}_n$  una sucesión en  $\tilde{\mathcal{S}}$ , con  $C(M_n) = (a_n, b_n) \rightarrow (\infty, 0)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces, para  $n$  suficientemente grande, la superficie geométrica  $M_n$  está próxima a  $2k$  copias trasladadas de una región compacta arbitrariamente grande contenida en una catenoide de flujo  $(0, 0, 2\pi)$ , junto con  $2k$  regiones de conexión  $C_n(1), \dots, C_n(2k)$ , donde cada  $C_n(j)$  es un anillo doblemente punteado que contiene un final izquierda y un final derecha de  $M_n$ , y dos puntos de ramificación (distintos) de la aplicación de Gauss  $N_n$  de  $M_n$ . Además, cada  $C_n(j)$  se puede escribir como grafo sobre su proyección horizontal en  $\{x_3 = 0\}/H_n$ , donde estamos denotando por  $H_n = (0, \pi a_n, 0)$  al vector periodo de  $M_n$  en sus finales.*

*Demostración.* Seguiremos un razonamiento similar al de la demostración de la Proposición 5.0.3. Nótese que basta comprobar que existe una parcial de  $\{M_n\}_n$  cumpliendo la tesis de la Proposición 6.0.5. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, denotamos por  $p_n(1), \dots, p_n(2k) \in M_n$  los  $2k$  puntos distintos que se aplican por  $N_n$  en un valor regular prescrito  $\theta \in \mathbb{S}^2 \cap \{x_2 = 0\}$  tal que el disco esférico  $D_{\mathbb{S}^2}(\theta, \varepsilon)$  centrado en  $\theta$  y de radio  $\varepsilon$ , no contiene ni valores de ramificación de  $N_n$  ni los Polos Norte y Sur de  $\mathbb{S}^2$ , para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. Sea  $\widetilde{M}_n$  el levantamiento doblemente periódico de  $M_n$  a  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $\widetilde{p}_n(i)$  el levantamiento de  $p_n(i)$  a un entorno fundamental fijo de  $\widetilde{M}_n$ ,  $i = 1, \dots, 2k$ . Por la Proposición 4.2.1 y el Lema 4.0.8, sabemos que la sucesión  $\{\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(1)\}_n$  tiene curvatura uniformemente acotadas,

y admite cotas locales uniformes del área. Por tanto, tras pasar a una parcial, se tiene que  $\{\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(1)\}_n$  converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^3$  a una superficie minimal propiamente embebida  $\widetilde{M}_\infty(1) \subset \mathbb{R}^3$ . Los mismos argumentos que en las Proposiciones 4.2.1 y 5.0.3 prueban que  $\widetilde{M}_\infty(1)$  no es llana, luego  $\widetilde{M}_\infty(1)$  está en uno de los seis casos de la Proposición 4.1.1 (de nuevo aquí hemos usado la Observación 4.1.3). Como  $a_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , descartamos los tres últimos casos de dicha Proposición. Supongamos que  $\widetilde{M}_\infty(1)$  es un helicoides vertical (caso 2 de la Proposición 4.1.1), y consideremos una recta horizontal  $r \subset \widetilde{M}_\infty(1)$ . Podemos tomar arcos  $\gamma_n$  contenidos en secciones horizontales compactas de las  $M_n$  convergiendo a  $r$ , ya que  $H_n \rightarrow \infty$ . Recordemos que hemos normalizado de forma que la parte vertical del flujo de  $M_n$  a lo largo de secciones horizontales compactas es  $2\pi$ . Como la parte vertical del conormal de  $M_n$  no puede anularse a lo largo de secciones horizontales (puesto que  $M_n$  no contiene puntos con normal vertical), deducimos que la parte vertical del vector flujo de  $M_n$  a lo largo de  $\gamma_n$  es menor o igual que  $2\pi$ . Tomando límites, llegamos a que la tercera coordenada del flujo de  $\widetilde{M}_\infty(1)$  a lo largo de  $r$  es menor o igual que  $2\pi$ , contradicción. Por tanto,  $\widetilde{M}_\infty(1)$  no puede ser un helicoides vertical. Supongamos ahora que  $\widetilde{M}_\infty(1)$  es una superficie minimal de Riemann, y denotemos por  $F \in \mathbb{C}^*$  a la parte horizontal de su flujo a lo largo de una sección horizontal compacta (sabemos que  $F \neq 0$  por un Teorema de Pérez y Ros [52]). Existe una curva cerrada  $\Gamma(n) \subset \widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(1)$ , para  $n$  suficientemente grande, tal que  $F(\Gamma(n))$  converge a  $F$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Pero

$$F(\Gamma(n)) - i\overline{b_n} = t(n)\pi a_n$$

para cierto entero par  $t(n)$ , ver la Observación 3.2.7. Esto nos lleva a una contradicción al tomar límites, ya que por hipótesis se tiene que  $(a_n, b_n) \rightarrow (\infty, 0)$ , y además  $t(n)$  no puede converger a 0 (porque  $F \neq 0$ ). Por tanto,  $\widetilde{M}_\infty(1)$  es una catenoide vertical con flujo  $(0, 0, 2\pi)$ .

Como en la demostración de la Proposición 5.0.3, llegamos a que para  $n$  suficientemente grande, los puntos  $\widetilde{p}_n(i) - \widetilde{p}_n(1)$ , con  $2 \leq i \leq 2k$ , caen fuera de un dominio compacto de  $\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(1)$  arbitrariamente próximo a una catenoide vertical; y que pasando a una parcial,  $\{\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(2)\}_n, \dots, \{\widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(2k)\}_n$  convergen de nuevo a  $\widetilde{M}_\infty(1)$ . Como podemos aproximarnos uniformemente a una región compacta  $\Omega \subset \widetilde{M}_\infty(1)$  arbitrariamente grande por regiones compactas  $\widetilde{\Omega}_n(i) \subset \widetilde{M}_n - \widetilde{p}_n(i)$ , deducimos que  $(T_n)_3 \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde estamos denotando por  $T_n$  cualquier generador no horizontal del retículo de periodos  $\mathcal{P}_n$  asociado a  $M_n$ . Tomamos las bandas  $[\widetilde{\Omega}_n(i) + \widetilde{p}_n(i)]$  en un mismo dominio fundamental de  $\widetilde{M}_n$ . Nótese podemos elegir  $[\widetilde{\Omega}_n(i) + \widetilde{p}_n(i)]/H_n$  como la intersección de  $\widetilde{M}_n/H_n$  con regiones horizontales

disjuntas  $S_n(i) \subset \mathbb{R}^3/H_n$  cuya anchura diverge cuando  $n \rightarrow \infty$ . Suponemos que las regiones  $S_n(i)$  están ordenadas por alturas, de forma creciente.

Para cada  $j = 1, \dots, 2k$ , sea  $C_n(j)$  la componente conexa de  $M_n - (\cup_{i=1}^{2k} S_n(i)/T_n)$  que une  $[\tilde{\Omega}_n(j) + \tilde{p}_n(j)]/\mathcal{P}_n$  con  $[\tilde{\Omega}_n(j+1) + \tilde{p}_n(j+1)]/\mathcal{P}_n$ . Usando la inyectividad de la aplicación de Gauss de la catenoide, podemos probar análogamente a lo hecho en la demostración de la Proposición 5.0.3 que cada  $C_n(j)$  se puede compactificar añadiendo dos finales  $e_1(n), e_2(n)$  de  $M_n$ , obteniendo así un anillo compacto con dos puntos de ramificación simples de la aplicación de Gauss  $N_n$  de  $M_n$ , y que  $N_n$  aplica de forma biyectiva cada curva de  $\partial C_n(j)$  en la frontera de un pequeño disco esférico centrado en  $(0, 0, \pm 1)$ . Como la suma de los flujos de  $M_n$  alrededor de  $e_1(n), e_2(n)$  se anulan (por el Teorema de la Divergencia, y porque los flujos de  $M_n$  a lo largo de las curvas en la frontera de  $C_n(j)$  tienden a un vector vertical de longitud finita, mientras que el flujo de  $M_n$  en sus finales es siempre horizontal y de longitud arbitrariamente grande), deducimos que  $e_1(n), e_2(n)$  son respectivamente un final izquierda y un final derecha de  $M_n$  (o viceversa), ambos con el mismo vector normal límite. Finalmente, la proyección horizontal de  $C_n(j)$  sobre  $\{x_3 = 0\}/H_n$  se extiende de forma diferenciable a  $e_1(n), e_2(n)$ , dando lugar a un difeomorfismo local y propio, luego a una aplicación recubridora. Como  $C_n(j)$  contiene exactamente un final izquierda y un final derecha, deducimos que dicha aplicación recubridora tiene una hoja. Esto nos dice que  $C_n(j)$  es un grafo sobre  $\{x_3 = 0\}/H_n$ , y acaba la demostración de la Proposición.  $\square$

## 6.1. Datos de Weierstrass para el límite catenoide

Vamos a seguir el esquema de la Sección 5.1 del capítulo anterior. En primer lugar, vamos a obtener una carta local de  $\mathcal{W}$  alrededor del punto de  $\partial\mathcal{W}$  descrito en la Proposición 6.0.5. Para cada  $i = 1, \dots, k$ , elegimos puntos distintos  $a_{2i-1}, b_{2i-1}$  (resp.  $a_{2i}, b_{2i}$ ) en un pequeño disco punteado alrededor de 0 (resp. de  $\infty$ ) contenido en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Dichos puntos  $a_1, b_1, \dots, a_{2k}, b_{2k}$  pueden ser considerados como los valores de ramificación de una aplicación meromorfa  $g$  de grado  $2k$ , y un proceso de “cortar y pegar” análogo al descrito en la Sección 5.1, da lugar a una aplicación meromorfa marcada  $g \in \mathcal{W}$ . Como se pueden intercambiar los papeles de  $a_j, b_j$ , para definir una carta local de  $\mathcal{W}$  tomamos como parámetros

$$x_j = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_j + b_j), & \text{si } j \text{ es impar;} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_j} + \frac{1}{b_j} \right), & \text{si } j \text{ es par;} \end{cases} \quad y_j = \begin{cases} a_j b_j, & \text{si } j \text{ es impar;} \\ \frac{1}{a_j b_j}, & \text{si } j \text{ es par.} \end{cases}$$

Nótese que todos los parámetros  $x_j, y_j$  están próximos a 0, y que la condición  $a_j \neq b_j$  (resp.  $a_j, b_j \neq 0, \infty$ ) se traduce en  $y_j \neq x_j^2$  (resp.  $y_j \neq 0$ ). En lo que sigue, abreviaremos escribiendo  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2k})$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{2k})$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , denotaremos

$$D(0, \varepsilon)^{4k} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}^{4k} \mid |x_j|, |y_j| < \varepsilon \text{ para todo } j = 1 \dots, 2k\},$$

$$\mathcal{B} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D(0, \varepsilon)^{4k} \mid x_j^2 = y_j, \text{ para algún } j = 1 \dots, 2k\},$$

$$\widehat{\mathcal{B}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D(0, \varepsilon)^{4k} \mid y_j = 0, \text{ para algún } j = 1 \dots, 2k\}.$$

Claramente,  $\mathcal{B} \cup \widehat{\mathcal{B}} \subset D(0, \varepsilon)^{4k}$  es una subvariedad analítica, y la aplicación

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D(0, \varepsilon)^{4k} - (\mathcal{B} \cup \widehat{\mathcal{B}}) \mapsto \chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g \in \mathcal{W}$$

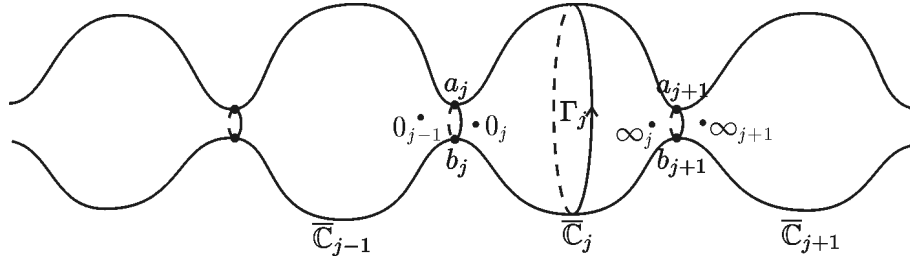
es una carta local para  $\mathcal{W}$ . En adelante, denotaremos  $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (0, \dots, 0) \in D(0, \varepsilon)^{4k}$ .

**Observación 6.1.1** *Como en la Observación 5.1.3, dada una sucesión  $\{M_n\}_n \subset \widetilde{\mathcal{S}}$  con  $C(M_n) \rightarrow (\infty, 0)$ , existe otra sucesión de superficies marcadas  $\{M'_n\}_n$  en la imagen de la carta  $\chi$  tal que para cada  $n$ ,  $M_n$  y  $M'_n$  se corresponden con la misma superficie geométrica; y si  $C(M_n) = (a_n, b_n)$ , entonces  $C(M'_n) = (a_n, b_n + \pi a_n t_n)$ , para cierto entero par  $t_n$ .*

A continuación, buscamos ecuaciones que indiquen cuándo una aplicación meromorfa marcada en la imagen de la carta local  $\chi$  produce una superficie minimal inmersa marcada en  $\mathcal{M}$ . Fijemos  $g \in \chi \left( (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D(0, \varepsilon)^{4k} - (\mathcal{B} \cup \widehat{\mathcal{B}}) \right)$ , y sea  $\overline{\mathbb{C}}_j$  la copia  $j$ -ésima de  $\overline{\mathbb{C}}$ , y  $\Gamma_j$  la curva  $\{z \in \overline{\mathbb{C}}_j \mid |z| = 1\}$ , orientada positivamente (resp. negativamente) cuando  $j$  es impar (resp. par). Así orientadas, dichas curvas son todas homólogas en el toro  $g^{-1}(\overline{\mathbb{C}})$ , y  $[\Gamma_1]$  es la clase de homología destacada en la aplicación meromorfa marcada  $g$ . Denotaremos respectivamente por  $0_j, \infty_j$  a los puntos  $z = 0, z = \infty$  de  $\overline{\mathbb{C}}_j$ , ver la Figura 6.1 para el caso en el que  $j$  es impar. Recordemos que  $\phi$  es la única 1-forma holomorfa cumpliendo  $\int_\gamma \phi = 2\pi i$ . Para cada  $1 \leq j \leq 2k$  definimos

$$A_j = \begin{cases} \int_{\Gamma_j} \frac{\phi}{g}, & \text{si } j \text{ es impar;} \\ \int_{\Gamma_{j+1}} g\phi, & \text{si } j \text{ es par;} \end{cases}$$

$$B_j = \begin{cases} \text{Res}_{0_{j-1}} \left( \frac{\phi}{g} \right) \text{Res}_{0_j} \left( \frac{\phi}{g} \right), & \text{si } j \text{ es impar;} \\ \text{Res}_{\infty_{j-1}} (g\phi) \text{Res}_{\infty_j} (g\phi), & \text{si } j \text{ es par.} \end{cases}$$

Figura 6.1: En este caso,  $j$  es impar.

En las definiciones anteriores y en lo que sigue, consideraremos los subíndices ordenados cíclicamente; es decir, cuando  $j = 1$  entenderemos que  $j - 1 = 2k$ .

Supongamos que  $j$  es impar. El Teorema de los Residuos afirma que

$$A_j - A_{j-2} = 2\pi i \left[ \text{Res}_{0_j} \left( \frac{\phi}{g} \right) + \text{Res}_{0_{j-1}} \left( \frac{\phi}{g} \right) \right],$$

$$A_{j+1} - A_{j-1} = 2\pi i \left[ \text{Res}_{\infty_{j+1}} (g\phi) + \text{Res}_{\infty_j} (g\phi) \right]. \quad (6.1)$$

Esto, junto con (1.14) y (1.15), nos dice que  $g$  cierra periodos si y sólo si existen  $a \in \mathbb{R}^*$  y  $b \in \mathbb{C}$  cumpliendo

$$\begin{cases} A_{2i-1} = b \quad \text{y} \quad A_{2i} = \bar{b}, & \text{para todo } i = 1, \dots, k, \\ B_j = -a^2, & \text{para todo } j = 1, \dots, 2k. \end{cases} \quad (6.2)$$

**Observación 6.1.2** *Fijemos  $j$  impar (resp.  $j$  par). No hay una forma natural de distinguir entre los dos ceros  $0_{j-1}, 0_j$  (resp. los dos polos  $\infty_{j-1}, \infty_j$ ) de  $g$  que están cerca de los valores de ramificación  $a_j, b_j$ . De hecho, los subíndices dependen de la elección de la curva  $\beta_j$  común a las copias  $\overline{C}_j, \overline{C}_{j-1}$  que une  $a_j, b_j$ , que no depende de forma continua de los parámetros. En otras palabras, los residuos de  $g^{-1}\phi$  en  $0_{j-1}, 0_j$  (resp. de  $g\phi$  en  $\infty_{j-1}, \infty_j$ ) no son funciones bien definidas de los parámetros. Pero como las parejas (desordenadas) de ceros  $\{0_{j-1}, 0_j\}$  (resp. de polos  $\{\infty_{j-1}, \infty_j\}$ ) sí dependen continuamente de los parámetros, consideramos la suma y el producto de los residuos de  $g^{-1}\phi$  en  $0_{j-1}, 0_j$  (resp. de  $g\phi$  en  $\infty_{j-1}, \infty_j$ ). Esencialmente, éstas son las definiciones de  $A_j$  y  $B_j$ , ver (6.1).*

## 6.2. Extensión holomorfa y unicidad local

Cuando existe  $j = 1, \dots, 2k$  tal que  $a_j - b_j \rightarrow 0$  (o equivalentemente,  $y_j - x_j^2 \rightarrow 0$ ), entonces la superficie de Riemann asociada a la aplicación meromorfa marcada

$g \in \mathcal{W}$  obtenida en el procedimiento anteriormente descrito degenera en una superficie de Riemann con nodos, con al menos un nodo entre las copias  $\overline{\mathbb{C}}_{j-1}, \overline{\mathbb{C}}_j$ . De forma similar a lo hecho en la Proposición 5.2.1, se puede probar que cada  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{B}$  produce:

- Una superficie de Riemann con nodos, consistente en  $l$  esferas  $S_1, \dots, S_l$  unidas por puntos  $P_j, Q_j$ . Estamos denotando por  $P_{j+1} = Q_j$  al nodo entre las esferas  $S_j, S_{j+1}$ , para cada  $j = 1, \dots, l$ .
- $l$  aplicaciones meromorfas (no constantes)  $g(j) : S_j \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , para  $j = 1, \dots, l$ , con  $\sum_j \deg(g(j)) = 2k$  y  $g(j)(\{P_j, Q_j\}) \subset \{0, \infty\}$ .
- $l$  diferenciales meromorfas  $\phi(1), \dots, \phi(l)$ , donde cada  $\phi(j)$  está definida en  $S_j$  y tiene sólo dos polos simples en  $P_j$  y en  $Q_j$ , con residuos 1 y  $-1$  respectivamente.

Si existe cierto  $j$  impar (resp. par) para el cual  $a_j = 0$  y  $b_j \neq 0$ , o viceversa (resp.  $a_j = \infty$  y  $b_j \neq \infty$ , o viceversa), entonces la estructura conforme entre las copias  $\overline{\mathbb{C}}_{j-1}, \overline{\mathbb{C}}_j$  no degenera en un nodo, aunque  $g$  tiene un cero doble (resp. un polo doble) en  $a_j$ . Así, cada  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \widehat{\mathcal{B}} - \mathcal{B}$  produce un toro  $\mathbb{M}$  y una aplicación meromorfa  $g : \mathbb{M} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  de grado  $2k$ , con al menos un cero o un polo doble. En este caso,  $\phi$  se extiende a la única diferencial holomorfa definida sobre  $\mathbb{M}$  cumpliendo  $\int_{\Gamma_1} \phi = 2\pi i$ .

**Observación 6.2.1** *Los puntos  $(\mathbf{x}_\lambda, \mathbf{0}) \in \widehat{\mathcal{B}} - \mathcal{B}$ , con  $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$  para cierto  $\lambda > 0$  pequeño, representan los puntos de  $\partial\mathcal{W}$  correspondientes a los ejemplos minimales de Riemann próximos a catenoides.*

**Proposición 6.2.2** *Tanto  $g$  como  $\phi$  dependen de forma holomorfa de los parámetros  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  en un pequeño entorno de  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  (incluyendo los puntos de  $\mathcal{B} \cup \widehat{\mathcal{B}}$ ).*

*Demostración.* Similar a la demostración de la Proposición 5.2.1. □

No es difícil comprobar que  $B_j \rightarrow \infty$  cuando  $y_j \rightarrow 0$ , por lo que no cabe esperar que  $B_j$  se extienda de forma holomorfa a  $\widehat{\mathcal{B}}$ . Vamos a comprobar que la fuerza con la que  $B_j$  diverge cuando  $y_j \rightarrow 0$  es la de  $1/y_j$ .

**Proposición 6.2.3** *Para cada  $1 \leq j \leq 2k$ , las funciones  $A_j$  y  $\widetilde{B}_j = y_j B_j$  admiten extensiones holomorfas definidas sobre todo  $D(0, \varepsilon)^{4k}$ .*

*Demostración.* La extensión de  $A_j$  a los puntos de la forma  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{B} \cup \widehat{\mathcal{B}}$  se obtiene como corolario de la Proposición 6.2.2, ya que las curvas  $\Gamma_{2i-1}$  se quedan fuera de los posibles nodos de la superficie de Riemann límite.

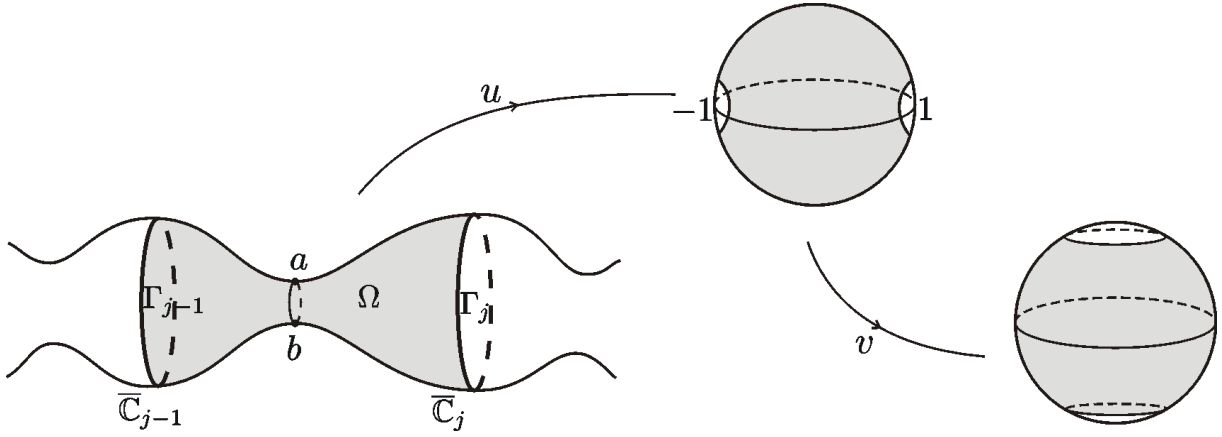


Figura 6.2: Izquierda:  $\Omega$  es el anillo sombreado, con curvas frontera  $\Gamma_{j-1}$ ,  $\Gamma_j$ .

Para  $\tilde{B}_j$  ya no podemos aplicar la Proposición 6.2.2 directamente, ya que los puntos  $0_{j-1}, 0_j$  (o  $\infty_{j-1}, \infty_j$ , según corresponda) en los que se calculan los residuos pueden ser o bien nodos de la superficie de Riemann límite (cuando  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{B}$ ) o bien puntos de ramificación de  $g$  (cuando  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \hat{\mathcal{B}} - \mathcal{B}$ ).

Fijamos  $j$  impar (para  $j$  par se razona análogamente). Sea  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D(0, \varepsilon)^{4k} - (\mathcal{B} \cup \hat{\mathcal{B}})$ , para cierto  $\varepsilon$  pequeño, y  $g = \aleph(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  (escribiremos  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  para indicar que  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  está próximo a  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ ). Denotamos por  $\Omega$  el anillo bordeado por  $\Gamma_{j-1}$  y  $\Gamma_j$  en  $g^{-1}(\overline{\mathbb{C}})$  que contiene a los puntos de ramificación  $a = a_j \sim 0$  y  $b = b_j \sim 0$  de  $g$ , ver la Figura 6.2. En primer lugar, vamos a obtener una representación conforme de  $\Omega$  como anillo estándar contenido en  $\mathbb{C}$ . Consideramos las siguientes funciones definidas sobre  $\Omega$ ,

$$u = u(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}} \quad \text{y} \quad v = v(u) = \frac{1+u}{1-u},$$

y fijamos el signo de la raíz de forma que  $u \sim 1$  sobre  $\Gamma_j$  (y por tanto,  $u \sim -1$  sobre  $\Gamma_{j-1}$ ). Como  $u'(z) = \frac{a-b}{2(z-b)\sqrt{(z-a)(z-b)}}$  y  $a, b \neq 0$  (puesto que  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin \hat{\mathcal{B}}$ ), concluimos que  $u$  es un biholomorfismo de  $\Omega$  en un anillo contenido en la esfera  $\{(z, u) \mid u^2 = \frac{z-a}{z-b}\}$ , ver la Figura 6.2 centro. Y como  $v$  es una transformación de Möbius de  $u$ , llegamos a que  $v$  es un biholomorfismo del anillo anterior en cierto anillo  $v(u(\Omega))$  que calcularemos a continuación. Sobre  $\Gamma_j$ , podemos escribir  $z = e^{i\theta}$ . Usando que  $\frac{1-be^{-i\theta}}{1-(b-a)e^{-i\theta}}$  converge a 1 cuando  $a, b \rightarrow 0$ , y que  $\frac{\lambda}{1-\lambda}$  y  $\lambda$  son infinitésimos equivalentes de orden 1 cuando  $\lambda \rightarrow 0$ , se concluye:

$$u = \sqrt{1 + \frac{(b-a)e^{-i\theta}}{1-be^{-i\theta}}} \sim \sqrt{1 + \frac{(b-a)e^{-i\theta}}{1-(b-a)e^{-i\theta}}} \sim \sqrt{1 + (b-a)e^{-i\theta}} \sim 1 + \frac{1}{2}(b-a)e^{-i\theta}.$$

Así,  $u(\Gamma_j)$  es una curva próxima a la circunferencia  $\partial D(1, r/2) \subset \mathbb{C}$  de centro 1 y radio  $r/2$ , con  $r = |b - a| \sim 0$ . Como sobre  $\Gamma_{j-1}$  cambia la rama de la raíz que aparece en la definición de  $u$ , llegamos a que  $u(\Gamma_{j-1}) \sim \partial D(-1, r/2)$  (además, se comprueba que las orientaciones inducidas en  $u(\Gamma_j), u(\Gamma_{j-1})$  son opuestas). Como  $u(\Omega)$  es el dominio de  $\overline{\mathbb{C}}$  con curvas frontera  $u(\Gamma_j), u(\Gamma_{j-1})$  que contiene a  $u(a) = 0$  y  $u(b) = \infty$ , deducimos que  $u(\Omega)$  es un dominio próximo al dominio exterior a los discos  $D(\pm 1, r/2)$  en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Luego la imagen por  $v \circ u$  de  $\Omega$  está próxima al anillo centrado en  $0 \in \mathbb{C}$  de radios  $4/r, r/4$ ; es decir,  $v(u(\Omega)) \sim D(0, 4/r) - D(0, r/4)$ . Podemos entonces escribir la serie de Laurent de  $\phi$  con respecto a la variable  $v$  sobre el anillo  $D(0, 1/r) - D(0, r)$ ,

$$\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n v^n dv,$$

donde  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|v|=1} \frac{\phi}{v^{n+1}}$  depende de forma meromorfa de todos los parámetros.

Acotemos  $|c_n|$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . En primer lugar, nótese que  $\int_{|v|=1} \frac{\phi}{v^{n+1}} = \int_{\Gamma_j} \frac{\phi}{v^{n+1}} = \int_{\Gamma_{j-1}} \frac{\phi}{v^{n+1}}$ . Como  $\phi$  admite una extensión meromorfa a la superficie con nodos, y  $\Gamma_{j-1}, \Gamma_j$  pueden verse como curvas compactas en dicha superficie de Riemann que no pasan por los polos de  $\phi$ , las integrales de  $|\phi|$  sobre  $\Gamma_j$  y sobre  $\Gamma_{j-1}$  están acotadas por cierta constante  $C > 0$ , que no depende de  $a$  ni de  $b$ . Además,  $|v| \geq 1/r$  sobre  $\Gamma_j$  (ya que  $|v| \sim 4/r$  sobre  $\Gamma_j$ ), de donde obtenemos que si  $n+1 \geq 0$ , entonces

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_j} \frac{\phi}{v^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{|\phi|}{|v|^{n+1}} \leq Cr^{n+1}.$$

Sobre  $\Gamma_{j-1}$ , se tiene que  $|v| \sim r/4$ , luego  $|v| \leq r$ . De aquí, se tiene que

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{j-1}} |\phi| |v|^{|n+1|} \leq Cr^{|n+1|}$$

cuando  $n+1 \leq 0$ . En resumen, hemos obtenido que

$$|c_n| \leq Cr^{|n+1|}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (6.3)$$

A continuación calculamos los residuos que aparecen en la definición de  $B_j$ . Para ello, nótese que  $z = 0$  si y sólo si  $v \in \{\alpha, 1/\alpha\}$ , siendo

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{a/b}}{1 - \sqrt{a/b}}.$$

Concretamente, se tiene que  $u = \frac{v-1}{v+1}$  y  $z = \frac{u^2 b - a}{u^2 - 1}$ , de donde se llega a que



$$g = z = \frac{a-b}{4v} \left( v^2 + \frac{2(b+a)}{b-a}v + 1 \right) = \frac{a-b}{4v} (v - \alpha) \left( v - \frac{1}{\alpha} \right).$$

Con todo esto, se tiene que

$$\operatorname{Res}_{v=\alpha} \left( \frac{\phi}{g} \right) = \frac{4}{(a-b)(\alpha - 1/\alpha)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \alpha^{n+1} = \frac{-1}{\sqrt{ab}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \alpha^{n+1},$$

$$\text{y} \quad \operatorname{Res}_{v=\frac{1}{\alpha}} \left( \frac{\phi}{g} \right) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n}{\alpha^{n+1}}.$$

Como  $\alpha = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{b-a}$  y  $\frac{1}{\alpha} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{b-a}$ , entonces  $\max \left\{ |\alpha|, \frac{1}{|\alpha|} \right\} \leq \frac{1}{2r}$ . Con todo esto,

$$\left| \operatorname{Res}_{v=\alpha} \left( \frac{\phi}{g} \right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| |\alpha|^{n+1} \leq \frac{C}{\sqrt{ab}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n+1|}} = \frac{\tilde{C}}{\sqrt{y_j}},$$

para cierta constante  $\tilde{C} > 0$ . Y análogamente, se prueba que  $\left| \operatorname{Res}_{v=\frac{1}{\alpha}} \left( \frac{\phi}{g} \right) \right| \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{y_j}}$ .

Así, tanto  $\sqrt{y_j} \operatorname{Res}_{0_{j-1}} \left( \frac{\phi}{g} \right)$  como  $\sqrt{y_j} \operatorname{Res}_{0_j} \left( \frac{\phi}{g} \right)$  son funciones acotadas. Deducimos que  $\tilde{B}_j = y_j B_j$  es una función acotada en  $D(0, \varepsilon)^{4k} - (\mathcal{B} \cup \hat{\mathcal{B}})$  (i.e. cuando  $y_j \neq x_j^2$ ,  $y_j \neq 0$ ). Como  $\mathcal{B} \cup \hat{\mathcal{B}}$  es una subvariedad analítica de  $D(0, \varepsilon)^{4k}$ , el Teorema de Extensión de Riemann para funciones holomorfas (Teorema 3.1.1) asegura que  $\tilde{B}_j$  se puede extender de forma holomorfa a todo  $D(0, \varepsilon)^{4k}$ , como queríamos probar.  $\square$

**Proposición 6.2.4** *Para cada  $j = 1, \dots, 2k$ , se tiene que*

$$\begin{aligned} A_j(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= 0, & \tilde{B}_j(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= -1, \\ \frac{\partial A_{j-1}}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= 2\pi i, & \frac{\partial A_h}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= 0 \text{ para todo } h \neq j-1, \\ \text{y} \quad \frac{\partial A_h}{\partial y_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= 0 \text{ para todo } h. \end{aligned}$$

*Demostración.* Abreviamos escribiendo  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_j = (0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0, y_j, 0, \dots, 0)$ , con  $y_j \neq x_j^2$  e  $y_j \neq 0$ . La superficie de Riemann asociada a  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_j$  tiene  $2k - 1$  nodos que la divide en  $2k - 1$  esferas doblemente punteadas. En  $2k - 2$  de dichas

esferas (esferas simples), la correspondiente aplicación meromorfa  $g_m$  tiene grado 1. Si consideramos las esferas simples como copias de  $\overline{\mathbb{C}}$ , cada  $g_m$  coincide con el valor del parámetro complejo estándar  $z$  sobre dicha copia de  $\overline{\mathbb{C}}$ , y la diferencial altura  $\phi$  restringida a la correspondiente esfera simple es  $\frac{dz}{z}$ . La esfera restante (esfera doble), que denotaremos por  $S$ , se obtiene al pegar las copias  $\overline{\mathbb{C}}_{j-1}, \overline{\mathbb{C}}_j$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

En primer lugar, consideremos que  $j$  es impar. Entonces, podemos parametrizar  $S$  como  $\{(z, w) \in \overline{\mathbb{C}}^2 \mid w^2 = (z-a)(z-b)\}$ , donde  $a+b = 2x_j$  y  $ab = y_j$ . Aquí, la correspondiente aplicación meromorfa (de grado 2) es  $g(z, w) = z$ , y  $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$  es una aplicación bien definida. Fijamos la rama de la raíz que aparece en la definición de  $w$  de forma que sea  $w \sim z$  en  $\overline{\mathbb{C}}_j$  y  $w \sim -z$  en  $\overline{\mathbb{C}}_{j-1}$ . Así,  $\phi$  tiene dos polos simples en los nodos  $\infty_{j-1}, \infty_j$  con residuos  $1, -1$  respectivamente. Como

$$\operatorname{Res}_{\infty_j} \frac{dz}{w} = \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{dz}{z\sqrt{1-2x_j/z+y_j/z^2}} = -1,$$

concluimos que  $\phi = dz/w$ , luego

$$A_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})_j = \int_{\Gamma_j} \frac{dz}{zw} = -2\pi i \operatorname{Res}_{\infty_j} \frac{dz}{zw} = 0 \quad (6.4)$$

y

$$A_{j-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_j = \int_{\Gamma_{j-1}} \frac{z dz}{w} = 2\pi i \operatorname{Res}_{\infty_{j-1}} \frac{z dz}{-z\sqrt{1-2x_j/z+y_j/z^2}} = 2\pi i x_j. \quad (6.5)$$

De (6.4) y (6.5) deducimos que  $A_j(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, 2k$  (no necesariamente impar). Calculemos ahora las derivadas parciales de las  $A_j$  ( $j$  impar). Para cada  $h = 1, \dots, 2k$ , se tiene que

$$\frac{\partial A_h}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \lim_{y_j \rightarrow 0} \frac{d}{dx_j} \Big|_{x_j=0} A_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})_j.$$

Si  $h \neq j-1, j$ , entonces la integral que aparece en la definición de  $A_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})_j$  se puede calcular sobre una esfera simple. Como esta esfera simple no depende de  $x_j$ , entonces  $\frac{\partial A_h}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ , para todo  $h \neq j-1, j$ . De (6.4) obtenemos directamente que  $\frac{\partial A_j}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ . Y (6.5) implica que  $\frac{\partial A_{j-1}}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 2\pi i$ . Además, un razonamiento similar al anterior nos dice que  $\frac{\partial A_h}{\partial y_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ , para todo  $h$ .

Finalmente, calculemos  $\tilde{B}_j(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ . Como

$$\operatorname{Res}_{0_j} \left( \frac{\phi}{g} \right) = \frac{1}{\sqrt{y_j}} \quad \text{y} \quad \operatorname{Res}_{0_{j-1}} \left( \frac{\phi}{g} \right) = \frac{-1}{\sqrt{y_j}},$$

entonces  $\tilde{B}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})_j = -1$ . Tomando límites  $x_j \rightarrow 0, y_j \rightarrow 0$ , obtenemos claramente que  $\tilde{B}_j(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = -1$ . Esto termina la demostración de la Proposición 6.2.4 en el caso en el que  $j$  es impar.

Supongamos ahora que  $j$  es par. Recordemos que en el caso  $j$  impar ya obtuvimos que  $A_j(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$  (era para todo  $j$ ). Este caso ( $j$  par) es análogo al anterior, cambiando respectivamente  $w$  y  $\phi$  por

$$\tilde{w} = \sqrt{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{b}\right)} = \sqrt{\frac{1}{z^2} - \frac{2x_j}{z} + y_j} \quad \text{y} \quad \tilde{\phi} = \frac{-dz}{z^2 \tilde{w}}.$$

Así, calculamos

$$A_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})_j = \int_{\Gamma_j} \frac{-dz}{z \tilde{w}} = 2\pi i \operatorname{Res}_{0_j} \frac{dz}{z \tilde{w}} = 0,$$

$$A_{j-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_j = \int_{\Gamma_{j-1}} \frac{-dz}{z^3 \tilde{w}} = 2\pi i \operatorname{Res}_{0_{j-1}} \frac{dz}{z^2 \sqrt{1 - 2x_j z + y_j z^2}} = 2\pi i x_j,$$

de donde concluimos fácilmente que las parciales respecto de las  $x_j, y_j$  se anulan todas salvo  $\frac{\partial A_{j-1}}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , que vale  $2\pi i$ . El valor de  $\tilde{B}_j(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  lo obtenemos a partir de

$$\operatorname{Res}_{\infty_j} (g\phi) = \frac{1}{\sqrt{y_j}}, \quad \operatorname{Res}_{\infty_{j-1}} (g\phi) = \frac{-1}{\sqrt{y_j}}. \quad \square$$

Para cada  $j = 1, \dots, 2j$ , se tiene que  $1/B_j = y_j/\tilde{B}_j$ . Como  $\tilde{B}_j$  se extiende de forma holomorfa al polidisco  $D(0, \varepsilon)^{4k}$  (Proposición 6.2.3) y  $\tilde{B}_j(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = -1$  (Proposición 6.2.4), deducimos que  $1/B_j$  se extiende de forma holomorfa a  $D(0, \varepsilon)^{4k}$ . Así, la aplicación  $\Theta : D(0, \varepsilon)^{4k} \rightarrow \mathbb{C}^{4k}$  definida por

$$\Theta = \left( A_1, \dots, A_{2k}, \frac{1}{B_1}, \dots, \frac{1}{B_{2k}} \right) \quad (6.6)$$

es una aplicación holomorfa, y además  $\Theta(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

**Teorema 6.2.5** *Existe  $\varepsilon > 0$  tal que la restricción de  $\Theta$  a  $D(0, \varepsilon)^{4k}$  es un biholomorfismo sobre su imagen.*

*Demostración.* De la Proposición 6.2.4, obtenemos que

$$\frac{\partial B_h^{-1}}{\partial y_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = -\delta_{hj},$$

donde  $\delta_{hj}$  es la delta de Kronecker. Esto, junto con los valores de las derivadas parciales de las  $A_h$  en  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  (Proposición 6.2.3), nos dice que la matriz jacobiana de  $\Theta$  en  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  es invertible. A partir de esto, el teorema se obtiene como consecuencia del Teorema de la Función Inversa.  $\square$

**Corolario 6.2.6** *Las únicas superficies marcadas  $M_n \in \tilde{\mathcal{S}}$  con  $C(M_n) \rightarrow (0, \infty)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , son ejemplos KMR marcados.*

*Demostración.* La Proposición 6.0.5 nos dice que  $M_n$ , para  $n$  suficientemente grande, está próxima como superficie geométrica al límite catenoide. Consideramos una carta local de  $\mathcal{W}$  alrededor de dicho límite catenoide como la que definíamos en la Sección 6.1,  $\chi : D(0, \varepsilon)^{4k} - (\mathcal{B} \cup \widehat{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathcal{W}$ . Por la Observación 6.1.1, para  $n$  suficientemente grande, existe una superficie marcada  $M'_n \in \tilde{\mathcal{S}}$  que cae en la imagen de la carta  $\chi$ , para cierto  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, y que coincide con  $M_n$  como superficie geométrica. Mediante  $\chi$ , podemos identificar  $M'_n$  con cierto  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D(0, \varepsilon)^{4k} - (\mathcal{B} \cup \widehat{\mathcal{B}})$ . Tomamos  $\varepsilon > 0$  cumpliendo el Teorema 6.2.5.

Por otro lado, como consecuencia del Teorema 6.2.5 se tiene que para cada  $t < 0$  suficientemente pequeño y cada  $b \in \mathbb{C}$ ,  $b \sim 0$ , existe un único  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D(0, \varepsilon)^{4k}$  tal que  $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (b, \bar{b}, \dots, b, \bar{b}, t, \dots, t)$ . Esta lista  $(b, \bar{b}, \dots, b, \bar{b}, t, \dots, t)$  corresponde, según (6.2), a la condición de cerrar periodos para una superficie marcada en la imagen de  $\chi$ . Por tanto, deducimos de (6.2) que el espacio de superficies minimales inmersas marcadas en un pequeño entorno  $\mathcal{U}$  del punto de  $\partial\mathcal{W}$  correspondiente al límite catenoide descrito en la Proposición 6.0.5, es triparamétrico (i.e.  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M} \cap \mathcal{U}) = 3$ ). Como consecuencia de la Observación 2.2.5 y del apartado 2 del Lema 2.2.6, deducimos que la dimensión (real) de  $\tilde{\mathcal{K}}$  alrededor de dicho límite catenoide es 3; y por tanto,  $\mathcal{M} \cap \mathcal{U} = \tilde{\mathcal{K}} \cap \mathcal{U}$ . En particular,  $M'_n \in \tilde{\mathcal{K}}$ , para todo  $n$  suficientemente grande. Luego como superficie geométrica y para estos índices  $n$ ,  $M_n$  es un ejemplo KMR, como queríamos probar.  $\square$

# Capítulo 7

## Unicidad de los ejemplos KMR

Recordemos que estamos denotando por  $\tilde{\mathcal{K}} \subset \tilde{\mathcal{S}}$  al espacio de ejemplos KMR marcados, y que  $\tilde{\mathcal{K}}$  es una componente conexa de  $\tilde{\mathcal{S}}$  (Observación 3.2.4). El Teorema 2 equivale a probar que  $\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{S}}$ , lo cual obtendremos por reducción al absurdo.

Supongamos que  $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}} \neq \emptyset$ , y lleguemos a una contradicción. Probaremos en los Teoremas 7.0.7 y 7.0.8 que  $C : \tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  es una aplicación abierta y propia, de donde deducimos que  $C(\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}})$  es un subconjunto abierto y cerrado en  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$ . Como es inmediato comprobar que  $C(\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}})$  contiene puntos en las dos componentes conexas de  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  (dada una superficie marcada  $(M, p_1, \dots, p_{2k}, q_1, \dots, q_{2k}, [\gamma_2]) \in \tilde{\mathcal{S}}$ , basta considerar  $(M, p_{k+1}, \dots, p_{2k}, p_1, \dots, p_k, q_{k+1}, \dots, q_{2k}, q_1, \dots, q_k, [\gamma_2]) \in \tilde{\mathcal{S}}$ ; las imágenes por  $C$  de estas dos superficies marcadas caen en distintas componentes conexas de  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$ ), llegamos a que  $C|_{\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}}$  es una aplicación sobreyectiva. En particular, podemos encontrar superficies marcadas  $M_n \in \tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}$  con  $C(M_n) \rightarrow (\infty, 0)$ , pero esto contradice el Corolario 6.2.6, y prueba el Teorema 2.

**Teorema 7.0.7** *La aplicación clasificadora  $C : \tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  es propia.*

*Demostración.* Sea  $\{M_n\}_n$  una sucesión en  $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}$ , con  $C(M_n) \rightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$ , y veamos que existe una parcial de  $\{M_n\}_n$  que converge a una superficie marcada  $M_\infty \in \tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}$ . Por la Proposición 4.2.1, la sucesión de curvaturas de Gauss  $\{K_{M_n}\}_n$  está uniformemente acotada. Denotamos por  $N_n$  a la aplicación de Gauss de  $M_n$ , y por  $\tilde{M}_n$  al levantamiento doblemente periódico de  $M_n$  a  $\mathbb{R}^3$ . Un razonamiento análogo al de la demostración de la Proposición 5.0.3 nos permite tomar un punto  $p_n \in N_n^{-1}(\mathbb{S}^2 \cap \{x_2 = 0\})$  a distancia (esférica) positiva de los valores de ramificación de  $N_n$  y de los Polos Norte y Sur de  $\mathbb{S}^2$ , de forma que una parcial de  $\{\tilde{M}_n - \tilde{p}_n\}_n$  converge a una superficie minimal  $\tilde{M}_\infty$  propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  y no llana, donde  $\tilde{p}_n \in \tilde{M}_n$  es un levantamiento de  $p_n$  a  $\mathbb{R}^3$ . Así,  $\tilde{M}_\infty$  cae en uno

de los seis casos descritos en la Proposición 4.1.1. Como  $\tilde{\mathcal{K}}$  es un abierto de  $\tilde{\mathcal{S}}$ , el teorema quedará probado si llegamos a que  $\tilde{M}_\infty$  se corresponde con el caso 6 de dicha proposición.

Como el vector periodo  $H_n$  de  $M_n$  en sus finales converge a  $H_\infty = (0, \pi a, 0)$ ,  $\tilde{M}_\infty$  no puede caer en ninguno de los casos 1, 2, 3 de la Proposición 4.1.1. El Corolario 5.2.4 nos permite también descartar el caso 4, ya que las  $M_n$  no son ejemplos KMR. Supongamos que  $\tilde{M}_\infty$  cae en el quinto caso de la Proposición 4.1.1, y lleguemos a una contradicción. Es decir, supongamos que  $\tilde{M}_\infty$  es una superficie de Scherk doblemente periódica, con género 0, al menos dos finales horizontales y exactamente dos finales no horizontales en el cociente. Sea  $\Gamma$  la curva obtenida al cortar  $\tilde{M}_\infty$  con un plano horizontal  $\{x_3 = c\}$  a diferente altura de los finales (horizontales) de  $\tilde{M}_\infty$ . Como  $\tilde{M}_\infty$  tiene exactamente dos finales no horizontales,  $\Gamma$  es una curva embebida en forma de  $U$ , con dos ramas infinitas asintóticas a dos semirrectas. Si denotamos por  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  al plano vectorial paralelo a los finales no horizontales de  $\tilde{M}_\infty$ , entonces el conormal a  $\tilde{M}_\infty$  a lo largo de cualquiera de las dos ramas divergentes de  $\Gamma$  está arbitrariamente próximo al vector unitario  $\eta \subset \Pi$  ortogonal a  $\Pi \cap \{x_3 = c\}$  y con tercera coordenada positiva. Como  $\{\tilde{M}_n - \tilde{p}_n\}$  converge a  $\tilde{M}_\infty$ , concluimos que  $M_n$  contiene un arco horizontal  $\Gamma_n$  con  $\Gamma_n - p_n \rightarrow \Gamma$  (en particular, la longitud de  $\Gamma_n$  es arbitrariamente grande a partir de cierto natural  $n$ ). Y si denotamos por  $\eta_n$  el conormal de  $\tilde{M}_n$  a lo largo de  $\Gamma_n$ , entonces  $\eta_n \rightarrow \eta$ . En particular, la integral de la tercera componente de  $\eta_n$  a lo largo de  $\Gamma_n$  es arbitrariamente grande. Nótese que  $\Gamma_n$  no produce una curva cerrada en  $M_n$ , pero el conormal no puede cambiar el signo de su tercera componente (porque  $M_n$  no tiene puntos con normal vertical), de donde deducimos que la parte vertical del flujo de  $M_n$  a lo largo del cociente de la sección horizontal que contiene a  $\Gamma_n$ , es arbitrariamente grande. Esto contradice la normalización de las superficies en  $\mathcal{S}$ , y prueba el Teorema 7.0.7.  $\square$

**Teorema 7.0.8** *La aplicación clasificadora  $C : \tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  es una aplicación abierta.*

*Demostración.* Fijemos una superficie marcada  $M \in \tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}$ . Basta probar que la restricción de  $C$  a un entorno abierto de  $M$  en  $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}$  es una aplicación abierta. Sea  $(a, b) = C(M) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  y  $\mathcal{M}(a, b) = L^{-1}(L_{(a,b)}) \subset \mathcal{M}$  (con la notación del capítulo 3.2). Como  $\tilde{\mathcal{K}}$  es abierto y cerrado en  $\tilde{\mathcal{S}}$ , del Lema 3.2.3 deducimos que  $\tilde{\mathcal{K}}$  es también un abierto y cerrado de  $\mathcal{M}$ . Y como  $\mathcal{M}(a, b)$  es una subvariedad analítica de  $\mathcal{W}$  (Observación 3.2.2), llegamos a que  $(\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}})(a, b) = (\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}) \cap \mathcal{M}(a, b)$  es también una subvariedad analítica de  $\mathcal{W}$ ; y además, contiene a  $M$ . Por el Teorema 7.0.7, sabemos además que  $(\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}})(a, b) = (C|_{\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}}})^{-1}(a, b)$  es un compacto, luego es un

subconjunto finito (Lema 3.1.3). Podemos por tanto tomar un entorno abierto  $\mathcal{U}$  de  $M$  en  $\mathcal{W}$  tal que  $(\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}})(a, b) \cap \mathcal{U} = \{M\}$ . En términos de la aplicación ligadura  $L : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}^{4k}$ , para  $\mathcal{U}$  suficientemente pequeño, podemos escribir esta última igualdad como  $L^{-1}(L_{(a,b)}) \cap \mathcal{U} = \{M\}$ , ya que  $(\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}})$  es abierto y cerrado en  $\mathcal{M}$ , luego podemos tomar  $\mathcal{U}$  cumpliendo  $(\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{K}})(a, b) \cap \mathcal{U} = \mathcal{M}(a, b) \cap \mathcal{U}$ . El Teorema de la Aplicación Abierta para aplicaciones holomorfas finitas (Teorema 3.1.4) nos asegura la existencia de un abierto  $\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$  tal que  $L|_{\mathcal{O}}$  es una aplicación abierta. Finalmente, la relación entre  $L$  y  $C$  nos permite concluir.  $\square$





# Capítulo 8

## Topología de $\mathcal{K}$

En el capítulo anterior hemos probado que el espacio  $\mathcal{S}$  de superficies minimales doblemente periódicas de  $\mathbb{R}^3$ , con  $4k$  finales paralelos y género 1 en el cociente, coincide con el espacio  $\mathcal{K}$  de ejemplos KMR. Para  $k = 1$ , los ejemplos KMR, los cuales denotábamos por  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ , fueron estudiados en detalle en el Capítulo 2 (seguiremos la notación de dicho capítulo en lo que sigue). Si denotamos por  $H$  el vector periodo en los finales de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ , y consideramos el levantamiento de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  a  $\mathbb{R}^3/H$ , obtenemos una superficie simplemente periódica, que denotaremos por  $\widehat{M}_{\theta,\alpha,\beta}$ , con género 0 e infinitos finales horizontales de tipo Scherk. Recordemos que, para  $k \in \mathbb{N}$  arbitrario, las superficies en  $\mathcal{K}$  son los cocientes con  $4k$  finales (horizontales) de estas superficies simplemente periódicas  $\widehat{M}_{\theta,\alpha,\beta}$ . En este capítulo, queremos estudiar el espacio de moduli  $\mathcal{K}$ , para lo que nos podemos restringir al caso  $k = 1$ ; es decir, a lo largo de todo el capítulo supondremos que las superficies en  $\mathcal{K} = \{\mathcal{M}_{\theta,\alpha,\beta} \mid (\theta, \alpha, \beta) \in \mathcal{I}\}$ , tienen exactamente 4 finales horizontales, siendo

$$\mathcal{I} = \left\{ (\theta, \alpha, \beta) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [-\pi, \pi] \mid (\alpha, \beta) \neq (0, \pm\theta), (0, \pm(\pi - \theta)) \right\}.$$

Como dijimos al principio del Capítulo 3, tenemos que rotar cada ejemplo KMR  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  alrededor del eje  $x_3$ , para conseguir que el periodo en sus finales apunte en la dirección del eje  $x_2$ . En particular, rotamos para que el periodo  $P_{\gamma_A}$  en su final  $A$  sea de la forma  $(0, \pi a, 0)$ , para cierto  $a > 0$ . Usaremos la aplicación  $C$  dada en la Definición 3.2.6 para distinguir entre superficies de  $\mathcal{K}$ , de ahí el nombre que recibe  $C$ : *aplicación clasificadora*. Recordemos que, a grandes rasgos,  $C : \widetilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$  le hace corresponder a cada ejemplo KMR marcado la longitud de su periodo en los finales y la parte horizontal del flujo a lo largo de una clase de homología no trivial cuyo periodo se anula. Como ahora conocemos explícitamente las superficies sobre las que se define  $C$ , podemos fijar un orden en los finales de cada ejemplo KMR marcado, y dar explícitamente la clase de homología en la última componente de

cada  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ . En particular, podemos fijar un orden de los finales de cada ejemplo KMR para que  $C$  tome valores en  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ . Como superficie marcada, consideraremos

$$M_{\theta,\alpha,\beta} = (\Sigma_\theta, g_{\theta,\alpha,\beta}; A''' = \mathcal{F}(A), A' = \mathcal{E}(A), A, A'' = \mathcal{D}(A), [\gamma_2]),$$

donde todo se define como en la Sección 2.2.

### Observación 8.0.9

- (i) *Hasta ahora, habíamos considerado  $C$  valuada en  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$ , que no es conexo. No perdemos generalidad restringiéndonos la imagen a una componente conexa  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ , ya que lo único que estamos haciendo es impedir ver la misma superficie geométrica con órdenes distintos de los finales. Al tomar  $C : \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ , el orden en los finales de cada  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  está ya obligado.*
- (ii) *Para  $\alpha = \beta = 0$ , habíamos descrito explícitamente la curva embebida  $\gamma_2 \subset \Sigma_\theta$  en la Sección 2.1 (ver la Figura 2.1 derecha). Recordemos también que estamos denotando por  $A = A(\alpha, \beta), A' = A'(\alpha, \beta), A'' = A''(\alpha, \beta), A''' = A'''(\alpha, \beta) \in \Sigma_\theta$  los finales de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ , y que vistos en la compactificación conforme  $\Sigma_\theta$  de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ , los puntos  $A, A', A'', A'''$  dependen continuamente de  $\alpha, \beta$ . De este modo, para los demás valores de  $\alpha, \beta$ , podemos considerar un representante embebido  $\gamma_2 \subset \Sigma_\theta - \{A, A', A'', A'''\}$  de la clase de homología  $[\gamma_2]$  dependiendo de forma continua de  $\alpha, \beta$ , tal que  $\gamma_2$  se puede levantar en  $\mathbb{R}^3$  a un dominio fundamental del levantamiento doblemente periódico de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  comprendido entre dos planos horizontales, y tal que su clase de homología  $[\gamma_2]$  permanece constante en  $H_1(\Sigma_\theta - \{A, A', A'', A'''\}, \mathbb{Z})$ , ver la Figura 8.1. Nótese que se puede tomar  $\gamma_2$  como para el caso  $\alpha = \beta = 0$  cuando  $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ .*

En este capítulo nos convendrá ver  $\Sigma_\theta$  como el recubridor ramificado  $2 : 1$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Recordemos que identificábamos  $\Sigma_\theta$  (tras la Observación 2.1.1) con dos copias  $\overline{\mathbb{C}}_1, \overline{\mathbb{C}}_2$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  pegadas a lo largo de los cortes comunes a lo largo de  $i\overline{\mathbb{R}}$  que van desde  $D$  hasta  $D'$  y desde  $D''$  hasta  $D'''$ . No perdemos generalidad suponiendo que  $\tilde{\mathcal{R}} \subset \overline{\mathbb{C}}_1$ , ver la Figura 2.3 derecha. Definimos  $\Gamma_i = \{z \in \overline{\mathbb{C}}_i \mid |z| = 1\}$ , para  $i = 1, 2$  (ver la Figura 8.2 izquierda). Orientamos  $\Gamma_1$  de forma que  $\Gamma_1 = \gamma_2$  cuando  $\alpha = \beta = 0$ , y consideramos la orientación en  $\Gamma_2$  para que sea  $[\Gamma_2] = [\Gamma_1] \in H_1(\Sigma_\theta, \mathbb{Z})$  (Figura 2.1). Dado un punto  $X \in \Sigma_\theta$ , denotamos por  $\gamma_X$  a un pequeño lazo contenido en  $\Sigma_\theta$  alrededor de  $X$  orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Se puede comprobar que, vistas como clases de homología en el toro punteado, se tiene

$$\begin{cases} [\gamma_2] = [\Gamma_1] & , \text{ si } |\beta| < \frac{\pi}{2} \\ [\gamma_2] = [\Gamma_2] + [\gamma_{A''}] + [\gamma_{A'}] & , \text{ si } |\beta| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (8.1)$$

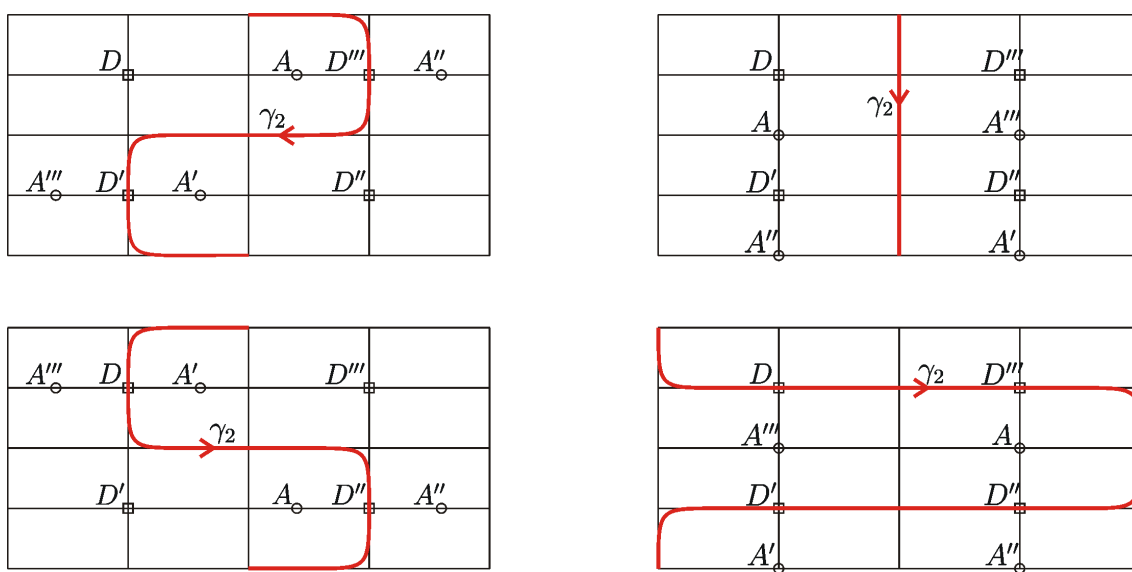


Figura 8.1: Para cualesquier valores de los parámetros  $\theta, \alpha, \beta$ , siempre es posible escoger uno de estos representantes embebidos para la clase de homología  $[\gamma_2]$  en la última componente de la superficie marcada  $M_{\theta, \alpha, \beta}$ .

Superior izquierda:  $\alpha = 0$  y  $-\pi + \theta < \beta < -\frac{\pi}{2}$ . Superior derecha:  $\alpha = \beta = 0$ .

Inferior izquierda:  $\alpha = 0$  y  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi - \theta$ . Inferior derecha:  $\alpha = 0$  y  $\beta = \pi$ .

Nótese que cuando  $|\beta| = \frac{\pi}{2}$ , tanto  $\Gamma_1$  como  $\Gamma_2$  pasan por finales de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ . Como  $[\gamma_2]$  sólo intervendrá a lo largo del capítulo en el cálculo de vectores periodo y flujo de  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ , y tanto el periodo como el flujo en  $A'$  son opuestos a los de  $A'''$ , tomaremos

$$[\gamma_2] = [\Gamma_2] + [\gamma_{A''}] - [\gamma_{A'''}], \quad \text{cuando } |\beta| > \frac{\pi}{2},$$

que tiene un representante embebido contenido en una misma copia de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Como dijimos en la Observación 2.2.4, las superficies (geométricas)  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  y  $M_{\theta,\alpha,\beta+\pi}$  coinciden, con  $|\beta| \leq \frac{\pi}{2}$ . Ahora estamos viendo que, como superficies marcadas, no son iguales.

Sea  $\mathcal{S}$  la familia uniparamétrica de superficies de Scherk simplemente periódicas con género 0 en el cociente, 2 finales horizontales, vector periodo en la dirección del eje  $x_2$  y parte vertical del flujo en sus finales que no son horizontales igual a  $2\pi$ . La Observación 2.2.7 nos dice que podemos ver todas las superficies en  $\mathcal{S}$  como límite de ejemplos KMR (geométricos). Vamos a asociarle a cada superficie de Scherk  $S \in \mathcal{S}$  un orden en sus finales y una clase de homología (en  $S$ ) que permita ver  $S$  como superficie marcada en  $\partial\mathcal{W}$ . En concreto, vamos a tomar el orden en los finales inducido al tomar límites en el orden en los finales de las superficies marcadas en  $\tilde{\mathcal{K}}$  que se corresponden con los ejemplos KMR (geométricos) próximos a  $S$ , y lo mismo para la clase de homología destacada. De este modo, se tendrá  $S \in \partial\tilde{\mathcal{K}}$ .

Para cada  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , denotaremos por  $S_{\rho,1}$  a la superficie de Scherk simplemente periódica marcada obtenida a partir de la construcción descrita en la Sección 5.1, a la que denotábamos por  $S_\rho$ . Es decir,

$$S_{\rho,1} = (\mathbb{M}_\rho, g, 0_2, 0_1, \infty_1, \infty_2, [\gamma(1)]) , \text{ donde:}$$

- $\mathbb{M}_\rho$  es una superficie de Riemann con nodos construida al pegar dos copias  $\overline{\mathbb{C}}_1, \overline{\mathbb{C}}_2$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ , con nodos  $\rho, \frac{1}{\rho}$ ;
- $g : \mathbb{M}_\rho \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  le asocia a cada punto de  $\mathbb{M}_\rho$  su valor del parámetro complejo  $z$  asociado como punto de  $\overline{\mathbb{C}}_j$ ,  $j = 1, 2$  (en particular,  $g$  es de grado 2);
- $0_j$  y  $\infty_j$  denotan respectivamente el cero y el infinito de  $\overline{\mathbb{C}}_j$ ,  $j = 1, 2$ ;
- $\gamma(1) = \{z \in \overline{\mathbb{C}}_1 \mid |z| = 1\}$ .

La superficie marcada  $S_{\rho,1}$  así definida se corresponde con dos copias de la superficie de Scherk simplemente periódica en  $\mathcal{S}$  cuyos normales límite en sus finales no horizontales se proyectan estereográficamente en  $\rho, \frac{1}{\rho}$ . No es difícil comprobar que  $S_{\rho,1}$  se obtiene al tomar límites  $\theta \rightarrow 0$  a partir de ejemplos KMR marcados  $M_{\theta,\alpha,\beta}$ , con  $|\beta| < \frac{\pi}{2}$  (recordad las igualdades entre las clases de homología dadas en (8.1),

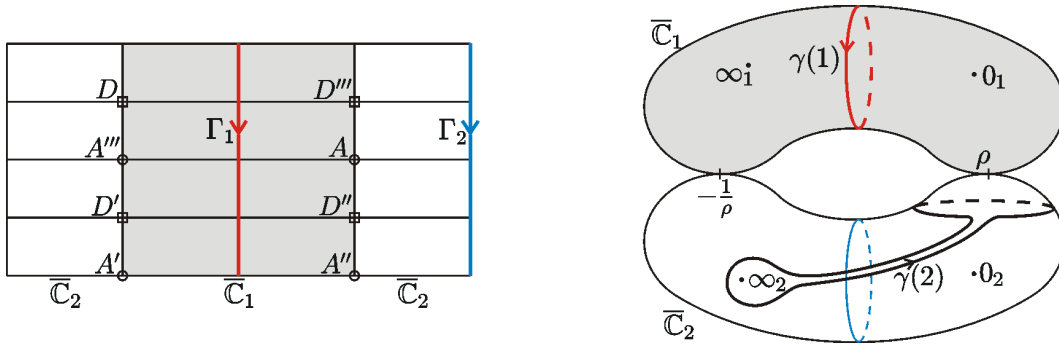


Figura 8.2: Izquierda: El toro  $\Sigma_\theta$  visto como recubridor ramificado 2 : 1 de la esfera  $\overline{\mathbb{C}}$ . Derecha: La superficie de Riemann  $\mathbb{M}_\rho$  con nodos  $\rho, -\frac{1}{\rho}$ , y las curvas  $\gamma(1) \subset \overline{\mathbb{C}}_1$  y  $\gamma(2) \subset \overline{\mathbb{C}}_2$ , para  $\rho < 1$ ; aquí,  $[\gamma(2)] = [\gamma_{\infty_2}] + [\gamma_\rho]$ .

y tener en cuenta el orden de los finales dado en  $M_{\theta,\alpha,\beta}$  como superficie marcada). Si consideramos  $M_{\theta,\alpha,\beta+\pi}$  y tomamos límites  $\theta \rightarrow 0$ , obtenemos una nueva superficie marcada  $S_{\rho,2} \in \partial\mathcal{K}$  que coincide con  $S_{\rho,1}$  salvo en la clase de homología de la última componente:

$$S_{\rho,2} = (\mathbb{M}_\rho, g, 0_2, 0_1, \infty_1, \infty_2, [\gamma(2)]) ,$$

siendo  $[\gamma(2)] = [\tilde{\gamma}(2)] + [\gamma_{\infty_2}] - [\gamma_{0_2}]$ . Definimos el espacio de superficies de Scherk simplemente periódicas marcadas  $\tilde{\mathcal{S}} = \{S_{\rho,1}, S_{\rho,2} \mid \rho > 0\}$ . Por construcción, se tiene  $\tilde{\mathcal{S}} \subset \partial\tilde{\mathcal{K}} \subset \partial\mathcal{W}$ .

El Lema 5.2.2 y el Teorema ?? (que fue probado para  $S_\rho = S_{\rho,1}$ , aunque se puede probar análogamente para  $S_{\rho,2}$ ), nos dicen que la aplicación ligadura  $L$  se puede extender de forma holomorfa a  $\tilde{\mathcal{S}}$ , y que dicha extensión es un biholomorfismo local en un entorno de  $\tilde{\mathcal{S}}$  en  $\mathcal{W}$  (recordar las definiciones de la variedad compleja  $\mathcal{W}$  y la aplicación ligadura  $L$  dadas en la Sección 3.2). En particular, obtenemos que  $\tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \cup \tilde{\mathcal{S}}$  tiene estructura de variedad compleja de dimensión 4 (las restricciones de  $L$  a entornos de las superficies marcadas de  $\tilde{\mathcal{S}}$ , son cartas locales para  $\tilde{\mathcal{W}}$ ). Además, podemos calcular explícitamente los valores de  $L$  en las superficies marcadas de  $\tilde{\mathcal{S}}$ :

$$L(S_{\rho,1}) = \left( \frac{1+\rho^2}{\rho}, -\frac{1+\rho^2}{\rho}, -2\pi\rho i, 2\pi\rho i \right) \quad \text{y} \quad (8.2)$$

$$L(S_{\rho,2}) = \left( \frac{1+\rho^2}{\rho}, -\frac{1+\rho^2}{\rho}, \frac{2\pi i}{\rho}, -\frac{2\pi i}{\rho} \right), \text{ para todo } \rho \in \mathbb{R}^+.$$

Otra consecuencia de la holomorfía de  $L$  en  $\tilde{\mathcal{W}}$  es que  $\hat{\mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{K}} \cup \tilde{\mathcal{S}} \subset \tilde{\mathcal{W}}$  es una subvariedad analítica de  $\tilde{\mathcal{W}}$ . Por otro lado, sabíamos que  $\tilde{\mathcal{K}}$  es una variedad analítica real de dimensión 3. Esto, junto con la extensión de  $L$  a  $\tilde{\mathcal{W}}$ , produce sobre  $\hat{\mathcal{K}}$  una estructura de variedad analítica real de dimensión 3.

## 8.1. La aplicación clasificadora extendida

Recordemos que toda la información relativa a  $L|_{\tilde{\mathcal{K}}}$  está contenida en la aplicación clasificadora  $C$ . Ahora extendemos  $C$  a la variedad analítica real  $\tilde{\mathcal{K}}$  de dimensión 3, basándonos en la extensión anterior de la aplicación ligadura. Recordemos (ver la Definición 3.2.6) que  $L(M) = (a, -a, b, \bar{b})$  podemos reescribirlo en términos de  $C$  como  $C(M) = (a, b)$ , para cualquier superficie marcada  $M \in \tilde{\mathcal{K}}$ . Por tanto, teniendo en cuenta (8.2), definimos para cada  $\rho \in \mathbb{R}^+$ ,

$$C(S_{\rho,1}) = \left( \frac{1+\rho^2}{\rho}, -2\pi\rho i \right), \quad C(S_{\rho,2}) = \left( \frac{1+\rho^2}{\rho}, \frac{2\pi}{\rho} i \right). \quad (8.3)$$

De esta forma, tenemos una extensión  $C : \hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ , que es diferenciable, puesto que  $L$  es holomorfa. Como, además,  $L$  es un biholomorfismo local en un entorno de  $\tilde{\mathcal{S}}$  en  $\tilde{\mathcal{W}}$ , concluimos que  $C$  es un difeomorfismo local en un entorno de  $\tilde{\mathcal{S}}$  en  $\hat{\mathcal{K}}$ .

Si identificamos  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ , entonces  $C(\tilde{\mathcal{S}})$  tiene dos componentes conexas:  $C_1 = \left\{ \left( \frac{1+\rho^2}{\rho}, 0, -2\pi\rho \right) \mid \rho \in \mathbb{R}^+ \right\}$  y  $C_2 = \left\{ \left( \frac{1+\rho^2}{\rho}, 0, \frac{2\pi}{\rho} \right) \mid \rho \in \mathbb{R}^+ \right\}$ . Cada  $C_j$ ,  $j = 1, 2$ , es una curva divergente contenida en el semiplano ortogonal al eje  $x_2$ .

**Proposición 8.1.1** *La aplicación clasificadora  $C : \hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$  es propia.*

*Demostración.* Tomemos una sucesión  $\{M_n\}_n$  en  $\hat{\mathcal{K}}$  cuya imagen por  $C$  converge,  $C(M_n) = (a_n, b_n) \rightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ , y probemos que existe una parcial de  $\{M_n\}_n$  convergiendo a una superficie marcada contenida en  $\hat{\mathcal{K}}$ .

En primer lugar, supongamos que pasando a una parcial, podemos suponer que  $\{M_n\}_n \subset \tilde{\mathcal{K}}$ . Es decir, supongamos que  $M_n = M_{\theta_n, \alpha_n, \beta_n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , siendo  $(\theta_n, \alpha_n, \beta_n) \in \mathcal{I}$ . Pasando a una parcial, podemos suponer que  $\{(\theta_n, \alpha_n, \beta_n)\}_n$  converge a  $(\theta_\infty, \alpha_\infty, \beta_\infty) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi]$ . Podemos deducir de (2.10) que la primera componente  $a(M_n)$  de  $C(M_n)$  es igual al módulo del vector  $P_{\gamma_{A_n}} = \mu(\theta_n) \sin \theta_n E(\theta_n, \alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{C}$ . En particular,

- Si  $\theta_\infty = \frac{\pi}{2}$ , entonces  $a(M_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , contradicción con que  $a \neq 0$ .
- Si  $\alpha_\infty = 0$  y  $\beta_\infty \in \{\pm\theta_\infty, \pm(\pi - \theta_\infty)\}$ , entonces  $a(M_n) \rightarrow \infty$ , que no es posible.

Por tanto, las únicas posibilidades son o bien  $\theta_\infty = 0$  y  $(\alpha_\infty, \beta_\infty) \notin \{(0, 0), \pm(0, \pi)\}$ , que nos da una superficie marcada en  $\tilde{\mathcal{S}}$  (ver el Lema 2.2.6); o bien  $(\theta_\infty, \alpha_\infty, \beta_\infty) \in \mathcal{I}$ , que se corresponde con el ejemplo KMR marcado  $M_{\theta_\infty, \alpha_\infty, \beta_\infty}$ . Por tanto, la parcial  $\{M_n\}_n$  converge en  $\hat{\mathcal{K}}$ , como queríamos probar. Esto se podría haber probado también usando un argumento más teórico, similar al de la demostración del Teorema 7.0.7.

Podemos por tanto suponer que  $\{M_n\}_n$  es una sucesión contenida en  $\tilde{\mathcal{S}}$ . De (8.3) se obtiene claramente que la restricción  $C|_{\tilde{\mathcal{S}}}$  es una aplicación propia. Esto completa la demostración de la Proposición 8.1.1.  $\square$

**Teorema 8.1.2**  $C : \hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$  es un difeomorfismo local.

*Demostración.* Como  $C$  es un difeomorfismo local en un entorno de  $\tilde{\mathcal{S}}$  en  $\hat{\mathcal{K}}$ , sólo falta probar que  $C|_{\tilde{\mathcal{K}}}$  es también un difeomorfismo local. El espacio tangente a  $\tilde{\mathcal{K}}$  en  $M$  se puede identificar con el espacio vectorial (ver [18])

$$T_M \tilde{\mathcal{K}} = \left\{ u = \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_0 \tilde{M}_t, N \right\rangle \mid \{\tilde{M}_t\}_t \subset \mathcal{K} \text{ es una variación normal de } \tilde{M}_{t=0} = \tilde{M} \right\},$$

donde  $\tilde{M}$  es el levantamiento doblemente periódico de  $M$  a  $\mathbb{R}^3$ , y  $N$  es su aplicación de Gauss. En particular, las funciones de  $T_M \tilde{\mathcal{K}}$  son funciones de Jacobi\* en  $\tilde{M}$ , que en general no inducen funciones univaluadas en el cociente  $M$  (depende de la variación del retículo de periodos de  $\tilde{M}_t$ ). Además, como los finales de  $\tilde{M}_t$  son asintóticos a semiplanos horizontales, puede probarse que cada  $u \in T_M \tilde{\mathcal{K}}$  es acotada en un entorno de cada final de  $\tilde{M}_t$ . Por tanto, para ver que  $C|_{\tilde{\mathcal{K}}}$  es un difeomorfismo local, bast probar que la única función de Jacobi en  $\ker(dC_M) \subset T_M \tilde{\mathcal{K}}$  es la idénticamente nula. Para ello, consideremos un ejemplo KMR marcado  $M \in \tilde{\mathcal{K}}$ , y comprobemos que la única función de Jacobi contenida en el núcleo de  $dC_M$  es la idénticamente nula.

Denotemos por  $\tilde{M}$  al levantamiento doblemente periódico de  $M$  (vista como superficie geométrica) a  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $u : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Jacobi en  $\ker(dC_M)$ . Probemos que  $u = 0$ . Podemos escribir  $u = \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_0 \tilde{M}_t, N \right\rangle$ , para cierta variación  $\tilde{M}_t$  de  $\tilde{M}_{t=0} = \tilde{M}$  en  $\mathcal{K}$ . Sea  $\mathcal{P}_t$  el retículo de periodos asociado a  $\tilde{M}_t$ ,  $M_t = \tilde{M}_t / \mathcal{P}_t$ , y  $(a_t, b_t) = C(M_t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}$ . Como  $u \in \ker(dC_M)$ , entonces

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} a_t = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} b_t = 0. \quad (8.4)$$

Por el Lema 2.2.9 (tras una normalización), llegamos a que la aplicación  $* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  que asocia a cada ejemplo KMR su superficie conjugada, es una aplicación bien definida. Además,  $*$  es claramente diferenciable, ya que es la restricción a  $\mathcal{K}$  de la aplicación  $(g, \phi) \rightarrow (g, i\phi)$  definida en el espacio de todos los datos de Weierstrass

---

\*Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  una superficie minimal, y sea  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Recordemos que se dice que  $u$  es una *función de Jacobi* si cumple  $\Delta u - 2Ku = 0$  (ecuación de Jacobi), donde  $\Delta$  es el operador laplaciano y  $K$  es la aplicación de Gauss de  $M$ . Es decir, si es un cero del operador de Jacobi  $L = \Delta - 2K = \Delta + |\nabla N|^2$ .

permitidos en este ambiente (sabemos que dicho espacio se identifica con el espacio  $\mathcal{W}$  estudiado en la Sección 3.1). También se cumple de manera trivial que la composición  $* \circ *$  coincide con la identidad en  $\mathcal{K}$ , de donde deducimos que  $*$  es un difeomorfismo. Luego basta probar que  $v = (d*)_u = 0$ . Nótese que  $v = \langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \widetilde{M}_t^*, N \rangle$ , siendo  $\widetilde{M}_t^*$  la superficie conjugada de  $\widetilde{M}_t$ . En particular,  $v$  es una función de Jacobi de  $\widetilde{M}^*$ . Como  $\widetilde{M}_t^*$  tiene finales horizontales,  $v$  es además acotada.

Supongamos en primer lugar que  $v$  es invariante por el retículo de periodos asociado a  $\widetilde{M}^*$ . En este caso,  $v$  induce una función de Jacobi (acotada) en el cociente  $M^*$  de  $\widetilde{M}^*$  por su retículo de periodos, a la que seguiremos llamando  $v$ . Por la Observación 2.2.5, sabemos que  $v = \langle N, V \rangle$ , para algún vector  $V \in \mathbb{R}^3$ . Denotamos por  $\mathcal{M}$  al espacio lineal formado por todas las inmersiones minimales ramificada en  $\mathbb{R}^3$  (incluyendo las aplicaciones constantes) cuya aplicación de Gauss es  $N$ , y tienen curvatura total finita y finales planos (ver la Sección 1.10). Un el Teorema 1.10.1 de Montiel y Ros, existe un único elemento  $X_v$  en  $\mathcal{M}$  cumpliendo que  $\langle X_v, N \rangle = v$ . Como la constante  $V$  cumple lo anterior, ha de ser  $X_v = V$ , constante. Por tanto,  $v$  se corresponde con una traslación de  $\widetilde{M}^*$  en  $\mathbb{R}^3$ . Como estamos identificando los ejemplos KMR por traslaciones, llegamos a que  $v = 0$ , como queríamos probar. Por tanto, basta probar que  $v$  baja al cociente  $M^*$ .

Recordemos que el vector flujo de  $\widetilde{M}_t$  en sus finales es (salvo signo)  $F_t = (\pi a_t, 0, 0)$ , y que el flujo a lo largo de la clase de homología en la última componente del ejemplo KMR marcado  $M_t$  viene dado por  $\widetilde{F}_t = (i\bar{b}_t, 2\pi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3$ . Por tanto, el vector periodo de  $\widetilde{M}_t^*$  (antes de normalizarla para verla en  $\widehat{\mathcal{K}}$ ) está generado por  $H_t = F_t$  y  $T_t = \widetilde{F}_t$ . Parametrizamos  $\widetilde{M}_t^*$  por  $\psi_t^* : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}_t^*$ , y denotamos respectivamente por  $S_{1,t}, S_{2,t} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$  los difeomorfismos inducidos por  $H_t, T_t$ ; es decir, aquellos que satisfacen

$$\psi_t^* \circ S_{1,t} = \psi_t^* + H_t \quad \text{y} \quad \psi_t^* \circ S_{2,t} = \psi_t^* + T_t. \quad (8.5)$$

Las ecuaciones en (8.4) aseguran que  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H_t = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T_t = \vec{0}$ . Con esto,

$$\begin{aligned} v \circ S_{1,0} &= \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t^*, N \right\rangle \circ S_{1,0} = \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi_t^* \circ S_{1,t}), N \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t^*, N \right\rangle + \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H_t, N \right\rangle = v. \end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos usado que  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t^* \circ S_{1,t} = \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t^* \right) \circ S_{1,0} + (d\psi_0^*)_{\widetilde{M}} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} S_{1,t} \right)$ , y este segundo término no aparece porque va multiplicado por el normal a la superficie. De forma análoga,  $v \circ S_{2,0} = v$ , luego  $v$  baja al cociente  $M^*$ . El Teorema 8.1.2 queda así probado.  $\square$

### Demostración del Teorema 3:

Deducimos de la Proposición 8.1.1 y el Teorema 8.1.2 que  $C : \widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$



difeomorfismo local y propio, luego es una aplicación recubridora. El hecho de que  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$  sea un conjunto simplemente conexo, nos permite concluir que la aplicación clasificadora  $C$  es un difeomorfismo. En particular,  $C$  permite clasificar las superficies marcadas en  $\tilde{\mathcal{K}}$ . Como  $C(\tilde{\mathcal{S}})$  consiste en los dos arcos (disjuntos)  $C_1, C_2$ , que son divergentes y propios en  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ , obtenemos que el espacio  $\tilde{\mathcal{K}}$  de ejemplos KMR marcados es difeomorfo a  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 - (C_1 \cup C_2)$ , que a su vez es difeomorfo a  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 - \{(\pm 1, 0)\})$ . Esto prueba el Teorema 3.  $\square$

Con esto, tenemos explícitamente descrito el espacio  $\tilde{\mathcal{K}}$  de ejemplos KMR marcados. Es natural preguntarse por la estructura del espacio  $\mathcal{K}$  de superficies geométricas, módulo las identificaciones naturales por simetrías de las que hablábamos en la Observación 2.2.4 y en la Afirmación 2.2.1 para el caso  $\alpha = \pi/2$  (en particular, estamos viendo repetido en  $\mathcal{K}$  cada ejemplo KMR geométrico, ya que se cumple  $M_{\theta, \alpha, \beta + \pi} = M_{\theta, \alpha, \beta}$  como superficies geométricas). Esto es, vamos a estudiar la familia  $\mathcal{K}_1 = \{M_{\theta, \alpha, \beta} \mid (\theta, \alpha, \beta) \in \mathcal{I}_1\}$ , siendo

$$\mathcal{I}_1 = \left\{ (\theta, \alpha, \beta) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2 \mid (\alpha, \beta) \neq (0, \theta) \right\}.$$

Pues bien,  $\mathcal{K}_1$  puede obtenerse como cociente de  $\mathcal{K}$  por ciertas identificaciones, que se corresponden con las isometrías de  $\mathbb{R}^3$  bajo las que estamos identificando superficies geométricas KMR. Dichas isometrías son: rotaciones alrededor del eje  $x_3$  o las simetrías respecto de planos ortogonales al eje  $x_1$  o al eje  $x_2$ , (ver la Observación 2.2.4 y la Afirmación 2.2.1). Por ejemplo, identificamos  $M_{\theta, \alpha, -\beta}$  con  $M_{\theta, \alpha, \beta}$ , ya que una se obtiene como imagen de la otra mediante una simetría de  $\mathbb{R}^3$  respecto del plano ortogonal al eje  $x_2$ . En concreto,

$$\mathcal{K}_1 = \tilde{\mathcal{K}} / \sim, \quad \text{siendo} \quad M_{\theta, \alpha, \beta} \sim M_{\theta', \alpha', \beta'} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ y } \theta' = \theta, \\ \text{o bien } \alpha' = \alpha, \\ \text{o bien } \beta' = -\beta, \\ \text{o bien } \beta' = \beta + \pi. \end{cases}$$

Como algunos ejemplos KMR admiten a estas simetrías como isometrías de la superficie; esto se traduce en que el cociente  $\mathcal{K}_1$  de  $\mathcal{K}$  por tales simetrías no es una variedad diferenciable, sino que tiene estructura de orbifold de dimensión 3.



# Bibliografía

- [1] S. Bernstein. Sur un théorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. *Comm. de la Soc. Math. de Kharkov (2<sup>ème</sup> sér.)*, 15:38–45, 1915-1917.
- [2] S. Bernstein. Über ein geometrisches theorem und seine anwendung auf die partiellen differentialgleichungen vom elliptischen typus. *Math. Z.*, 26:551–558, 1927.
- [3] O. Bonnet. Memoire sur la theorie des surfaces applicables. *J. Éc. Polyt.*, 42, 1867.
- [4] M. Callahan, D. Hoffman, and W. H. Meeks III. Embedded minimal surfaces with four ends. En preparación.
- [5] E. Catalan. Sur les surfaces réglées dont l’aire est un minimum. *J. Mathem. p. appl.*, 7:203–211, 1842.
- [6] P. Collin. Topologie et courbure des surfaces minimales de  $\mathbb{R}^3$ . *Annals of Math. 2nd Series*, 145–1:1–31, 1997. MR1432035, Zbl 886.53008.
- [7] C. Costa. Example of a complete minimal immersion in  $\mathbb{R}^3$  of genus one and three embedded ends. *Bull. Soc. Bras. Mat.*, 15:47–54, 1984.
- [8] M. do Carmo. *Geometría Diferencial de curvas y superficies*. Alianza Editorial, Madrid, 3<sup>a</sup> edición, 1995.
- [9] M. do Carmo and C. K. Peng. Stable minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  are planes. *Bulletin of the AMS*, 1:903–906, 1979. MR0546314, Zbl 442.53013.
- [10] J. Douglas. Solution of the problem of plateau. *Trans. Amer. Math Soc.*, 33:263–321, 1931.
- [11] A. Enneper. Analytsch- geometrische untersuchungen. *Z. Math. und Phys.*, 9:96–125, 1864.

- [12] L. Euler. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudeates sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, 1969. A source book in mathematics, partially translated by D. J. Struik, see pages 399–406.
- [13] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 33:199–211, 1980. MR0562550, Zbl 439.53060.
- [14] H. Fujimoto. On the number of exceptional values of the Gauss maps of minimal surfaces. *J. of the Math. Society of Japan*, 40(2):235–247, 1988.
- [15] W. Fulton. Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves. *Ann. of Math.*, 90(2):542–575, 1969. MR0260752, Zbl 194.21901.
- [16] F. Gackstatter. Über die Dimension einer Minimalfläche und zur Ungleichung von St. Cohn-Vossen. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 61(2):141–152, 1976.
- [17] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. (Pure and Applied Mathematics). Wiley-Interscience, 1978. MR0507725, Zbl 408.14001.
- [18] L. Hauswirth and M. Traizet. The space of embedded doubly-periodic minimal surfaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 51(5):1041–1079, 2002. MR1947868.
- [19] D. Hoffman and H. Karcher. Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature. In R. Osserman, editor, *Encyclopedia of Mathematics, Vol. 90, Geometry V*, pages 5–93. Springer-Verlag, 1997.
- [20] D. Hoffman, H. Karcher, and F. Wei. Adding handles to the helicoid. *Bulletin of the AMS, New Series*, 29(1):77–84, 1993.
- [21] D. Hoffman, H. Karcher, and F. Wei. The genus one helicoid and the minimal surfaces that led to its discovery. In *Global Analysis and Modern Mathematics*. Publish or Perish Press, 1993. K. Uhlenbeck, editor, p. 119–170. MR1278754, Zbl 990.54130.
- [22] D. Hoffman and W. H. Meeks III. A complete embedded minimal surface in  $\mathbb{R}^3$  with genus one and three ends. *J. of Differential Geometry*, 21:109–127, 1985.
- [23] D. Hoffman and W. H. Meeks III. Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature. *Bulletin of the AMS*, 12:134–136, 1985.

- [24] D. Hoffman and W. H. Meeks III. The strong halfspace theorem for minimal surfaces. *Invent. Math.*, 101:373–377, 1990. MR1062966, Zbl 722.53054.
- [25] D. Hoffman, M. Weber, and M. Wolf. The existence of the genus-one helicoid. Preprint.
- [26] A. Huber. On subharmonic functions and differential geometry in the large. *Comment. Math. Helvetici*, 32:181–206, 1957.
- [27] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, editors. *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer-Verlag, 1992. MR1215481, Zbl 754.30001.
- [28] H. Jenkins and J. Serrin. Variational problems of minimal surface type II. Boundary value problems for the minimal surface equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 21:321–342.
- [29] L. Jorge and W. H. Meeks III. The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature. *Topology*, 22(2):203–221, 1983.
- [30] H. Karcher. Embedded minimal surfaces derived from Scherk’s examples. *Manuscripta Math.*, 62:83–114, 1988. MR0958255, Zbl 658.53006.
- [31] H. Karcher. Construction of minimal surfaces. *Surveys in Geometry*, pages 1–96, 1989. University of Tokyo, 1989, and Lecture Notes No. 12, SFB256, Bonn, 1989.
- [32] F. Pacard L. Hauswirth. Minimal surfaces of finite genus with two limits ends. Preprint.
- [33] J. L. Lagrange. Essai d’une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies. *Miscellanea Taurinensia* 2, 325(1):173–199, 1760.
- [34] R. Langevin and H. Rosenberg. A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications. *Duke Math. J.*, 57(3):819–828, 1988.
- [35] H. Lazard-Holly and W. H. Meeks III. The classification of embedded doubly-periodic minimal surfaces of genus zero. *Invent. Math.*, 143:1–27, 2001. MR1802791, Zbl 992.18190.
- [36] A. Legendre. Mémoire sur l’intégration de quelques équations aux différences partielles. *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris*, pages 309–351, 1789.

- [37] F. J. López and A. Ros. On embedded complete minimal surfaces of genus zero. *J. of Differential Geometry*, 33(1):293–300, 1991. MR1085145, Zbl 719.53004.
- [38] W. H. Meeks III. *The Geometry and the Conformal Structure of Triply-Periodic Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* . PhD thesis, University of California, Berkeley, 1975.
- [39] W. H. Meeks III. The theory of triply-periodic minimal surfaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 39(3):877–936, 1990.
- [40] W. H. Meeks III. The geometry, topology, and existence of periodic minimal surfaces. *Proceedings of Symposia in Pure Math.*, 54:333–374, 1993. Part I. MR1216594, Zbl 812.49030.
- [41] W. H. Meeks III, J. Pérez, and A. Ros. Uniqueness of the Riemann minimal examples. *Invent. Math.*, 131:107–132, 1998. MR1626477, Zbl 916.53004.
- [42] W. H. Meeks III and H. Rosenberg. The global theory of doubly periodic minimal surfaces. *Invent. Math.*, 97:351–379, 1989. MR1001845, Zbl 676.53068.
- [43] W. H. Meeks III and H. Rosenberg. The maximum principle at infinity for minimal surfaces in flat three-manifolds. *Comment. Math. Helvetici*, 65:255–270, 1990. MR1057243, Zbl 713.53008.
- [44] W. H. Meeks III and H. Rosenberg. The geometry of periodic minimal surfaces. *Comment. Math. Helvetici*, 68:538–578, 1993.
- [45] W. H. Meeks III and H. Rosenberg. The uniqueness of the helicoid and the asymptotic geometry of properly embedded minimal surfaces with finite topology. *Annals of Math.*, 161:723–754, 2005.
- [46] G. Monge. Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles. *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris*, pages 118–192, 1787.
- [47] G. Monge. *Application de l'analyse à la géométrie (5<sup>ème</sup> Ed.)*. Bachelier, Paris, 1850.
- [48] S. Montiel and A. Ros. Schrödinger operators associated to a holomorphic map. In *Global Differential Geometry and Global Analysis (Berlin, 1990)*, volume 1481 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 147–174. Springer-Verlag, 1991. MR1178529, Zbl 744.58007.
- [49] R. Osserman. Global properties of minimal surfaces in  $E^3$  and  $E^n$ . *Annals of Math.*, 80(2):340–364, 1964.

- [50] R. Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover Publications, New York, 2nd edition, 1986.
- [51] J. Pérez, M. M. Rodríguez, and M. Traizet. The classification of doubly periodic minimal tori with parallel ends. *J. of Differential Geometry*, 69(3):523–577, 2005.
- [52] J. Pérez and A. Ros. Some uniqueness and nonexistence theorems for embedded minimal surfaces. *Math. Ann.*, 295(3):513–525, 1993. MR1204835, Zbl 789.53004.
- [53] J. Pérez and A. Ros. The space of properly embedded minimal surfaces with finite total curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, 45(1):177–204, 1996. MR1406689, Zbl 864.53008.
- [54] J. Pérez and A. Ros. Properly embedded minimal surfaces with finite total curvature. In *The Global Theory of Minimal Surfaces in Flat Spaces-LNM-1775*, pages 15–66. Springer-Verlag, 2002. G. P. Pirola, editor. MR1901613.
- [55] J. Pérez and M. Traizet. The classification of singly periodic minimal surfaces with genus zero and Scherk type ends. Aparecerá en el *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [56] G. P. Pirola. The infinitesimal variation of the spin abelian differentials and periodic minimal surfaces. *Comm. Anal. Geom.*, 6(3):393–426, 1998.
- [57] J. Plateau. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-villars, Paris, 1873.
- [58] T. Rado. *On the problem of Plateau*. Springer-Verlag, Berlin, 1933.
- [59] B. Riemann. Über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung. *Abh. Königl. d. Wiss. Göttingen, Mathem. Cl.*, 13:3–52, 1867. K. Hattendorf, editor.
- [60] B. Riemann. *Oeuvres Mathématiques de Riemann*. Gauthiers-Villars, Paris, 1898.
- [61] M. M. Rodríguez. Doubly periodic minimal tori with parallel ends: Standard examples. Preprint.
- [62] M. M. Rodríguez and M. Traizet. An embedded minimal surface with infinite topology. preprint.

- [63] A. Ros. Embedded minimal surfaces: forces, topology and symmetries. *Calc. Var.*, 4:469–496, 1996. MR1402733, Zbl 861.53008.
- [64] R. Sa Earp and H. Rosenberg. The Dirichlet problem for the minimal surface equation on unbounded planar domains. To appear in *Journal de Mathématique Pures et Appliquées*.
- [65] H. F. Scherk. Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. *J. R. Angew. Math.*, 13:185–208, 1835.
- [66] R. Schoen. Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *J. of Differential Geometry*, 18:791–809, 1983.
- [67] H. A. Schwarz. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, volume 1. Springer, Berlin, 1890.
- [68] G. Springer. *Introduction to Riemann Surfaces*. Chelsea Publishing Co., New York, 2nd edition.
- [69] E. Thayer and Wohlgemuth. New embedded, doubly-periodic minimal surfaces of genus three. *GANG preprint series 3.21*.
- [70] E. Toubiana. On the uniqueness of the helicoid. *Annales de L'Institute Fourier*, 38:121–132, 1988. MR0978243, Zbl 645.53032.
- [71] F. Wei. *The existence and topology of properly embedded minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$* . PhD thesis, University of Massachusetts at Amherst, 1991.
- [72] K. Weierstrass. Fortsetzung der untersuchung über die minimalflächen. *Monatsbericht der Königl. Akademied. Wiss*, pages 511–518, 1887. Mayer & Müller, Berlin.
- [73] K. Weierstrass. Analytische bestimmung einfach zusammenhängender minimalflächen, deren begrenzung aus geradlinigen, ganz im endlinchen liegenden strecken besteht. *Math. Werke*, 3:221–238, 1903. Mayer & Müller, Berlin.
- [74] B. White. Complete surfaces of finite total curvature. *J. Diff. Geom.*, 26:315–326, 1987.
- [75] J. A. Wolf. *Spaces of Constant Curvature*. McGraw-Hill, New York, 1967.