




## Diseño y validación de un cuestionario para medir conocimiento sobre propiedades aritméticas de la suma y multiplicación en maestros de Primaria en formación inicial

José María Marbán – Universidad de Valladolid  
 José Roberto Arias – Universidad de Valladolid

 0000-0002-6561-6784  
 0000-0001-5344-7891

Recepción: 02.07.2022 | Aceptado: 18.07.2022

Correspondencia a través de **ORCID**: José María Marbán

 **0000-0002-6561-6784**

Citar: Marban, JM y Arias, JR (2022). Diseño y validación de un cuestionario para medir conocimiento sobre propiedades aritméticas de la suma y multiplicación en maestros de Primaria en formación inicial. *REIDOCREA*, 11(36), 431-450.

Área o categoría del conocimiento: Educación Matemática

**Resumen:** La comprensión de los números y de las operaciones aritméticas, junto con su uso flexible en situaciones de resolución de problemas, constituyen un aspecto esencial del constructo Sentido Numérico, en torno al cual se ha desarrollado una creciente actividad investigadora en Educación Matemática desde la década de los 90. El presente trabajo centra su atención en la dimensión de este constructo orientada a la comprensión de las propiedades aritméticas de la suma y de la multiplicación y, en particular, en el diseño y validación de un cuestionario para la medición de Conocimiento del Contenido Matemático sobre este tópico por parte de maestros de Primaria en formación inicial. El cuestionario final consta de 20 ítems distribuidos en 5 factores y presenta buenas propiedades psicométricas.

**Palabra clave:** Conocimiento Matemático del Contenido

***Design and validation of a questionnaire to measure Primary pre-service teachers' knowledge about arithmetic properties of addition and multiplication***

**Abstract:** The understanding of numbers and arithmetic operations together with a flexible use of such in problem solving context conform a key element of the construct Number Sense, around which a growing research activity in mathematical education has developed since the 90s. The present work focuses on one of its dimensions, that oriented to the understanding of the arithmetic properties of addition and multiplication and to the design and validation of a questionnaire for the measurement of Mathematical Content Knowledge on this topic by pre-service Primary teachers. The final questionnaire consists of 20 items distributed in 5 factors or dimensions and it is shown that it presents good psychometric properties.

**Keyword:** Mathematical Content Knowledge

### Introducción

Uno de los bloques de contenido imprescindibles en Educación Primaria y al que tradicionalmente las leyes educativas españolas han otorgado un peso relevante en el currículo es aquel que da cuenta del número y de las operaciones aritméticas. El número constituye un elemento nuclear en el desarrollo del pensamiento matemático y su aprendizaje se inicia a edades muy tempranas, aprovechando su presencia en el entorno más cotidiano de los niños. Ahora bien, a pesar de la notable presencia del número en el entorno “su aprendizaje implica una construcción individual” (Kamii, 1994, p.22, citado por Carbó y Gràcia, 2004, p. 39). Esta construcción refiere a un procedimiento que emana del interior de la persona, siendo tan importante el conocimiento existente del concepto como la manera de ser captado por cada persona de manera individual, donde lo que percibimos del exterior no siempre es una ayuda de cara al aprendizaje significativo de la idea de número. Su adquisición y comprensión, su continuo desarrollo por parte del niño, su uso flexible en diferentes ámbitos de la vida y su aplicación en la resolución de problemas más o menos complejos, son aspectos que

le confieren gran relevancia y, por ende, niveles altos de atención (Castro, Rico y Castro, 1996).

Durante décadas los procesos de enseñanza-aprendizaje escolares en relación con el número y las operaciones han venido caracterizados de manera dominante por una visión algorítmica y tradicional, en el que el tratamiento simbólico del número y el cálculo basado en dígitos ocupan un porcentaje significativo del tiempo de actividad matemática en el aula, y fuera de ella. Desde la década de los 90, sin embargo, son múltiples las perspectivas que apuestan por planteamientos didácticos que se apoyan y diseñan en torno al desarrollo de lo que ha convenido en llamarse Sentido Numérico (Bruno, 2000; Bruno y Almeida, 2017; Castro, 2015; Castro, Castro y Rico, 2004; Kamisnki, 2002) y en la incorporación de tareas matemáticas y recursos que atienden cada una de las dimensiones que conforman el mismo, incluyendo una mayor atención a la estimación, al cálculo mental y al uso -combinado o exclusivo- de algoritmos alternativos basados en números (Verschaffel y De Corte, 1996; Hedrén, 1999; Anghileri, 2006; Godino, Font, Konic y Wilhelmi, 2006; Adamuz-Povedano, Bracho-López y Albanese, 2016).

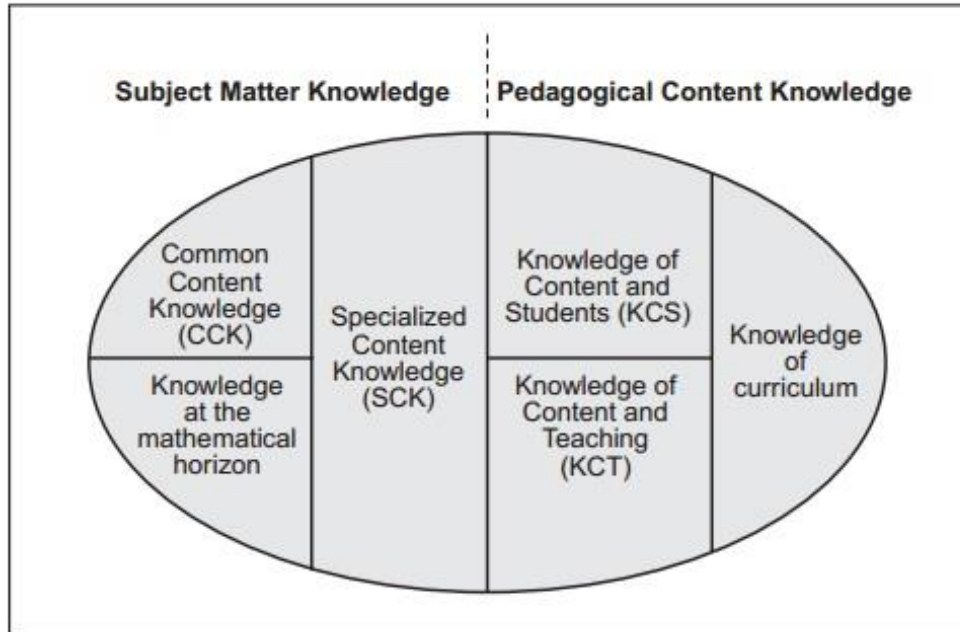
No obstante, no es el Sentido Numérico una idea sencilla de delimitar. De hecho, Wagner y Davis (2010) señalan a este constructo como una noción relativamente vaga. Por su parte, Verschaffel, Greer y De Corte (2007) indican que, aunque es reconocida su importancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, su utilidad en la investigación es controvertida, pues como señalan Can y Özdemir (2020, p. 1333) dicha investigación “presenta argumentos y resultados contradictorios respecto a los efectos de las tareas y actividades basadas en el contexto sobre el sentido numérico de los estudiantes”. A su vez, Pitta (2014) indica que no existe un consenso sobre cómo definir este constructo, pues abarca múltiples vertientes como son: a) el uso de diferentes representaciones de los números, b) la identificación de las magnitudes relativas y absolutas de los números, c) el sistema de uso de puntos de referencia, d) la composición y descomposición de los números, e) la comprensión conceptual de las operaciones, f) la estimación, g) los cálculos mentales y h) el juicio sobre la razonabilidad de los resultados.

En este contexto, podemos encontrar diferentes conceptualizaciones del término. Así, Cid, Godino y Batanero (2004) hablan de sentido numérico para referirse a un conjunto de nociones y relaciones complejas que configuran el “sistema de los números naturales”, que se inicia con esas actividades de contar y ordenar junto con las operaciones y relaciones que se establecen entre ellas para la solución de problemas prácticos, así como con el desarrollo del propio sistema lógico-deductivo que organiza, justifica y estructura todos los elementos. Esto es algo que no surge espontáneamente, que requiere de trabajo, exploración y observación de la realidad numérica en contextos diferentes donde se generan relaciones numéricas fértiles que no sólo se ajustan a lo que los algoritmos tradicionales nos proporcionan. Para Castro, Castro y Rico (2004) una persona posee sentido numérico si “es dueña de una buena intuición sobre los números, la variedad de sus usos y sus diferentes interpretaciones” (p. 119). La persona desarrolla acciones mentales y habilidades que le permiten trabajar con los números reconociendo, comparando, relacionando, usando y apreciando distintas cualidades de este concepto matemático llamado número y de las operaciones con él. Evidentemente, todo ello va más allá de la ejecución de un algoritmo operativo contextualizado por la sensación estática del individuo que lo desarrolla. Requerimos de un “nacimiento mental” dinámico u operativo, donde la constante observación de lo que ocurre en la acción operativa nos lleva a tomar ideas de lo que podemos hacer con los números en situaciones dispares. Dentro de esas situaciones están el cálculo flexible, las estimaciones numéricas y los juicios cuantitativos, todas ellas destacadas por Castro, Castro y Rico (2004).

Con todo ello lo que ponemos de manifiesto es que el constructo Sentido Numérico es complejo y que, como indican Gersten, Jordan y Flojo (2005), no presenta una definición común. Pero también consideramos que el Sentido Numérico es multifacético, cuestión que dificulta encontrar una definición común, y que la cuestión es atender a todos los componentes que integran dicho concepto. El presente más inmediato puede ser un reflejo de esta idea. La reciente ley educativa en España, la LOMLOE, entiende la formación matemática del individuo a partir de un desarrollo de los aspectos integradores de los distintos Sentidos Matemáticos entre los que se encuentra el Sentido Numérico. Caracteriza a dicho Sentido “por la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos, y por el desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números y las operaciones” (Real Decreto 157/2022, p. 41726). Debido a esta consideración, el Ministerio considera necesario trabajar en las aulas diferentes aspectos que acercarán al individuo a alcanzar un cierto Sentido Numérico. Dichos aspectos serían: el conteo, la cantidad, el sentido de las operaciones, las relaciones, el razonamiento proporcional y la educación financiera. A estos deberíamos añadir, aquellos componentes del Sentido Numérico que, como indican Gersten y Chard (1999), adquieren los infantes antes de su educación formal.

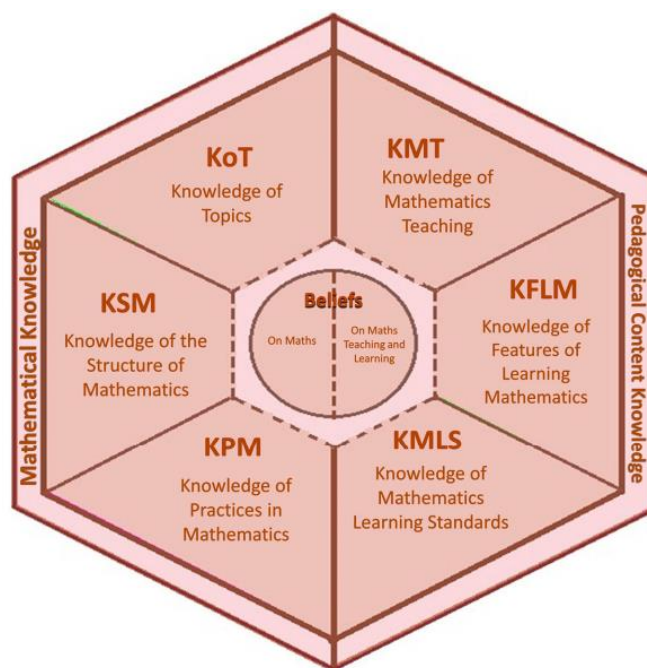
Consideramos, por tanto, que estas situaciones, cuyo desarrollo es actualmente demandado en las aulas de primaria, son los elementos que permiten el desarrollo numérico del individuo de cara a lograr alcanzar pensamiento matemático. Poder trabajarlas en el aula requiere, por parte de los maestros, observar los elementos que dan paso a su desarrollo, siendo la labor de los formadores de profesores de Primaria ayudar a los futuros docentes a que puedan realizar su trabajo con solvencia. Es por ello que coincidimos con Carrillo *et al.* (2018, p. 2) al señalar “la necesidad de profundizar en el conocimiento utilizable para la enseñanza y la necesidad de contar con herramientas o modelos adecuados que faciliten este análisis”, siendo aquí, por tanto, donde queremos centrar nuestra atención, en lo que deben saber los estudiantes, futuros profesionales de la enseñanza, para ayudar a sus alumnos a conseguir un desarrollo numérico adecuado. En un primer momento tenemos presente a autores como Shulman (1986, 1987), muy citado por diferentes autores. Este autor señala un cuerpo de conocimientos que todo profesor debe poseer y que inicialmente estaba conformado por tres categorías que posteriormente amplió a siete. En palabras de Ball, Thames y Phelps (2008), el Conocimiento del Contenido, el Conocimiento Pedagógico del Contenido y el Conocimiento Curricular, que Shulman (1986) determinó, definen dimensiones del contenido específico que todo profesional debe poseer. Los otros cuatro tipos de conocimiento, que se determinaron posteriormente, definirían dimensiones generales del conocimiento del profesor.

Posteriormente los múltiples trabajos de Ball y colaboradores llegan a la noción de Conocimiento Matemático para la Enseñanza, después de poner el centro de atención sobre el trabajo del profesor. Este tipo de conocimiento es definido por Hill, Ball, y Schilling (2008, p. 374) como: “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y mejora en el alumno”. Es un tipo de conocimiento multidimensional, lo que conlleva que incluya diferentes tipos de conocimiento que pueden ser clasificados en Conocimiento del Contenido y Conocimiento pedagógico al igual que hiciera Shulman (1986), pero con matices puesto que un buen desarrollo de estos da lugar a una variedad de conocimientos más delineados. Fruto de este trabajo es el siguiente esquema que ha aparecido en multitud de artículos referidos al tema:



**Ilustración 1:** Conocimiento del contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido. (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377)

Influidos por estos dos modelos, Carrillo et al. (2018) desarrollan un modelo propio, el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, orientado a los conocimientos que el profesor pone en práctica e integrado por el Conocimiento de las Matemáticas y el Conocimiento Pedagógico del Contenido. Así, este modelo sitúa en el centro el conjunto de creencias sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que influyen en la práctica en el aula del docente. Formando parte del Conocimiento de las Matemáticas estaría el Conocimiento de los Temas (conocimiento matemático propiamente dicho), el Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (Sistema de interconexiones que genera la materia) y el Conocimiento de las Prácticas en Matemáticas (Procedimientos matemáticos). Mientras, el Conocimiento Pedagógico del Contenido queda conformado por el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (conocimiento del potencial de las actividades, estrategias y técnicas, así como de los recursos y materiales didácticos para la enseñanza de contenidos matemáticos específicos, junto con las posibles limitaciones y obstáculos que puedan surgir), el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (conocimientos del profesor sobre la manera de razonar y proceder en matemáticas de sus alumnos) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (Conocimiento de los contenidos que se deben de enseñar en un nivel determinado y conocimiento de las nociones en que se deben basar las pruebas de valoración).



**Ilustración 2:** Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. (Carrillo, Climent, Montes, Contreras, Flores, Escudero, Vasco, Rojas, Flores, Aguilar, Ribeiro y Muñoz, 2018)

Todos estos modelos tratan de dar respuesta a lo que necesita poseer un futuro profesional de la enseñanza para poder desempeñar su labor con solvencia. Destacamos que el futuro maestro debe poseer un sólido Conocimiento del Contenido y un aún más sólido Conocimiento Pedagógico del Contenido y, por otro lado, hemos planteado la idea de que el desarrollo numérico en los niños requiere de trabajar componentes conceptuales asociados a la idea de Sentido Numérico, por lo que será interesante comprobar si los estudios del Grado de Educación Primaria ayudan a alcanzar este tipo de conocimientos en torno a dichos componentes.

Acotamos la investigación enfocándonos en el Conocimiento del Contenido y fijando componentes conceptuales concretos del Sentido Numérico. Al igual que ocurrió con el modelo de Carrillo *et al.* (2018) tratamos el Conocimiento del Contenido influidos por las investigaciones de Shulman (1986) y Hill, Ball y Schilling (2003), aunque también valoramos las propuestas de Chinappan (2003), Bolívar (2005), Godino (2009) y Hauk *et al.* (2009). De Hill, Ball y Schilling (2003) recogemos dos de los tres subtipos de dicho conocimiento en que queda dividido: el Conocimiento Común del Contenido (CCK) y el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK). A partir de lo que la literatura dice sobre ellos hemos identificado y delimitado lo que suponen y qué aspectos son los que los determinan. De cara a los componentes conceptuales del Sentido Numérico atendimos a las tres áreas que McIntosh, Reys y Reys (1992) determinan para él, eligiendo la segunda área, Conocimiento de la Destreza con las Operaciones, que queda precisada a partir de tres sub-aspectos: comprensión del efecto de las operaciones, comprensión de las propiedades aritméticas y comprensión de la relación entre las operaciones. Para concretar aún más nuestro trabajo se centra en el segundo (comprensión de las propiedades aritméticas) no solo por su importancia sino también por considerar que son poco trabajadas en Educación Primaria, al menos en el marco propio del Sentido Numérico, siendo este sentido, como indican McIntosh, Reys y Reys (1992), la base del pensamiento nuevo y viejo. En particular, este trabajo pretende facilitar la identificación del conocimiento que presentan los estudiantes del Grado de Educación Primaria en torno a las propiedades aritméticas de la suma y multiplicación: conmutativa, asociativa y distributiva.

Con todo diremos que buscamos analizar cómo se presenta el conocimiento de un contenido concreto en los estudiantes del Grado de Educación Primaria. Este contenido concreto es el de las propiedades aritméticas de la suma y la multiplicación. Y esto nos lleva a analizar el Conocimiento del Contenido de estas propiedades que, a su vez, supone delimitar los aspectos referidos a estas propiedades y que hacen referencia al Conocimiento Común del Contenido (CCK) y al Conocimiento Especializado del Contenido (SCK). Una vez delimitados estos aspectos trataremos de observarlos en los estudiantes. Esto nos obliga a tener instrumentos que nos permitan dicha observación, cuestión que nos permitirá posteriormente realizar un análisis de situación. Pero, al no conocer o haber podido identificar instrumento alguno que permita llevar a cabo nuestras pretensiones, hemos construido uno propio de cara a lograr nuestro objetivo.

En las secciones siguientes se describe el proceso de diseño y validación del instrumento que permitió llegar a valorar el Conocimiento del Contenido que poseían los estudiantes que iniciaban sus estudios en el Grado de Educación Primaria frente al que poseían los estudiantes que finalizaban dichos estudios.

### **Objetivos**

El objetivo de este trabajo no es sino el diseño y validación de un instrumento, en forma de cuestionario, para medir Conocimiento del Contenido ligado a las propiedades aritméticas básicas de la suma y la multiplicación en maestros de Primaria en formación inicial.

Este instrumento, a su vez, formó parte de una investigación mayor que tuvo por objetivo valorar el Conocimiento del Contenido que poseían los estudiantes que iniciaban sus estudios en el Grado de Educación Primaria frente al que poseían los estudiantes que finalizaban dichos estudios, centrándose en las propiedades aritméticas ya señaladas.

### **Método**

Se recurre a un enfoque metodológico tradicional como el expuesto por Morales (2011) consistente en la ejecución de diferentes etapas que esencialmente coinciden con procesos ordenados de forma lógica de cara a garantizar tanto la validez como la fiabilidad en los instrumentos finalmente diseñados.

A continuación, se describe cada una de las etapas cubiertas junto con los resultados alcanzados y las decisiones adoptadas en cada situación en el proceso de diseño y validación del cuestionario pretendido.

### **Diseño del instrumento**

El diseño de un instrumento como el que se pretende debe comenzar con una exhaustiva revisión de la literatura, tanto para comprender y delimitar constructos y dimensiones como para identificar ítems potencialmente útiles en su formato original o previa adaptación, al margen de aquellos que se enuncien directamente.

Fruto de una extensa revisión de trabajos se delimitó, en primer lugar, el significado de los diferentes aspectos que componen el Conocimiento del Contenido de forma que las preguntas formuladas en los ítems fueran encaminadas a descubrir si los estudiantes poseían o no tales aspectos, los cuales quedan reflejados en la siguiente tabla 1:

**Tabla 1:** Recopilación de Elementos que indican la posesión por parte del estudiante del Conocimiento del Contenido.  
La posesión de Conocimiento del Contenido supone:

<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tener el conocimiento de las matemáticas de todos los días.</li> <li>- Poseer el conocimiento enseñado en la escuela.</li> <li>- Alcanzar el conocimiento del contenido profesional.</li> <li>- Alcanzar el conocimiento académico enseñado en las universidades.</li> <li>- Reconocer el error y su causa.</li> <li>- Dar razones entendibles de las cosas (interpretar)</li> <li>- Entender los métodos no estándar de los alumnos.</li> <li>- Establecer representaciones variadas y efectivas de los conceptos y saber relacionar dichas representaciones.</li> <li>- Buscar o elegir buenos ejemplos.</li> <li>- Ser capaz de realizar y entender problemas con partes diferenciadas.</li> <li>- Tener fluidez con el lenguaje matemático (de cara a las explicaciones y de cara al uso de símbolos).</li> </ul>
--

Si atendemos a las dos dimensiones que forman parte del Conocimiento del Contenido, (Conocimiento Común del Contenido y Conocimiento Especializado del Contenido), tendríamos los siguientes aspectos, los cuales sirven para determinar la posesión o no por parte de los estudiantes de dichas dimensiones:

**Tabla 2:** Recopilación de elementos que indican la posesión por parte del estudiante del Conocimiento Común del Contenido y Conocimiento Especializado del Contenido.

Conocimiento Común del Contenido	Conocimiento Especializado del Contenido
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ser capaz de resolver operaciones matemáticas.</li> <li>- Ser capaz de resolver correctamente las tareas propuestas a los alumnos.</li> <li>- Dar solución a problemas aplicando estrategias.</li> <li>- Reconocer cuando un estudiante comete un error o da una respuesta equivocada.</li> <li>- Reconocer cuando el libro de texto está definiendo un concepto de manera inadecuada.</li> <li>- Ser capaz de usar términos y notaciones matemáticas correctas cuando habla o escribe en la pizarra.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Conocer cómo representar con exactitud las ideas matemáticas.</li> <li>- Saber proporcionar explicaciones matemáticas para las reglas y los procedimientos comunes.</li> <li>- Ser capaz de explicar qué se ha hecho en cada estrategia.</li> <li>- Ser capaz de examinar y comprender los métodos de solución inusuales a problemas.</li> <li>- Responder al estudiante el porqué de las cuestiones.</li> <li>- Encontrar un ejemplo para desarrollar un aspecto matemático específico o para resolver una pregunta.</li> </ul>

A partir de estos listados se creó un abanico de enunciados de ítems que cubriesen a priori ambos tipos de conocimiento y abarcasen los tres tipos de propiedades aritméticas de interés en este trabajo para la suma y la multiplicación. Fruto de esta primera etapa se enunciaron un total de 60 ítems iniciales, 30 vinculados a Conocimiento Común del Contenido y otros 30 a Conocimiento Especializado del Contenido, distribuidos de la siguiente forma:

**Tabla 3:** Distribución de todos los ítems iniciales creados para medir el Conocimiento del Contenido.

Conocimiento del contenido										
60 ítems										
Conocimiento del contenido					Conocimiento especializado del contenido					
30 ítems					30 ítems					
Conmutativa		Asociativa		Distributiva	Conmutativa		Asociativa		Distributiva	
10 ítems		10 ítems		10 ítems	8 ítems		11 ítems		11 ítems	
Suma	Mult.	Suma	Mult.	Mult. y Suma	Suma	Mult.	Suma	Mult.	Mult. y Suma	
5	5	6	4	10	4	4	7	4	11	

## Resultados

### *Validez de contenido*

Los 60 ítems iniciales fueron organizados en una plantilla en la que se recogía, para cada uno de ellos, su enunciado, el tipo de conocimiento que pretendía medir, el tipo de propiedad aritmética al que hacía referencia el ítem y la operación. Dicha plantilla fue sometida al juicio de 10 expertos en Didáctica de la Matemática con amplio bagaje profesional, sin implicación directa o indirecta en la investigación y sin conocimiento de los demás miembros del grupo, enviando a cada uno de ellos una descripción de los objetivos del trabajo y de los constructos subyacentes junto con las instrucciones para la valoración. En particular, cada experto debía valorar la claridad de los enunciados, la pertinencia y necesidad del ítem para el aspecto que pretendía evaluar y, finalmente, la adecuación del ítem al tipo de conocimiento que se trataba de medir (cada ítem se valoró de 1 a 5) y el nivel de complejidad del ítem, así como comentar todo aquello que considerara interesante incluir de cara a la mejora del cuestionario, aportando argumentos, en su caso, que avalasen esas consideraciones.

Tras recibir las respuestas de los expertos se inició una revisión individual de cada uno de los ítems calculando, en primera instancia, el promedio de sus valoraciones cuantitativas e iniciando la selección de los ítems por aquellos que tenían valoración alta (puntuación 4-5) y eliminando los de puntuación baja (puntuación 1). En segunda instancia se procedió a calcular para cada uno de los ítems restantes el índice conocido como ratio de validez de contenido (CVR) establecido por Lawse (1975) y determinado a través de la fórmula  $CVR = (n_e - N/2) / (N/2)$ , donde  $n_e$  = número de expertos que valora el ítem como esencial y  $N$  = número total de expertos. Debemos señalar que, en este trabajo, dado que se solicitó a los expertos una valoración ítem a ítem de 0 a 5, se consideró que un ítem podía ser considerado esencial si la valoración otorgada por el correspondiente experto era 4 ó 5.

Lawshe, además, ofrece una tabla de valores que ayuda a determinar el valor mínimo que un ítem debe alcanzar de cara a ayudar al investigador en su decisión de mantenerlo, modificarlo o suprimirlo (Tabla 4):

**Tabla 4:** Valores mínimos de CVR en función del número de expertos. (Lawshe, 1975, p. 568)

N. de expertos	Valor mínimo
7	0.99
8	0.75
9	0.68
10	0.62
11	0.59
12	0.56

Haciendo uso de la tabla anterior en la fila correspondiente a los 10 expertos, se procedió a la supresión de cuantos ítems no superaron el valor de 0.62 requerido, quedando el cuestionario en este punto conformado únicamente por 31 ítems, 12 vinculados al Conocimiento Común del Contenido (CCC) y 19 al Conocimiento Especializado del Contenido (CEC).

El siguiente paso consistió en determinar el índice de validez de contenido (CVI) del cuestionario en su totalidad, así como de cada una de las dos partes en las que este queda dividido atendiendo a la distribución de ítems en CCC o CEC. En este caso, se empleó la fórmula propuesta por Tristán-López (2008) basada en una revisión del trabajo de Lawshe utilizado como referencia previamente. Los resultados obtenidos se



muestran en la siguiente tabla, ofreciendo valores razonables de acuerdo con los criterios establecidos por el propio Tristán-López:

**Tabla 5:** Índice de validez de contenido e índice de validez de contenido total

	Aspectos evaluados por los ítems	Adecuación de los ítems al tipo de conocimiento evaluado
CVI_CCC	0,94907407	0,81666667
CVI_CEC	0,80862309	0,74210526
CVI <sub>total</sub>	0,8699121	0,77096774
Conocimiento del contenido		

Ahora bien, atendiendo a la distribución de ítems en función del contenido desarrollado se pudo observar que en el caso de la Propiedad Asociativa de la Multiplicación se recurría para su valoración a un único ítem en Conocimiento Común del Contenido y que, en algunas otras propiedades o conocimientos asociados también a esta operación, se recurría únicamente a 2 ítems. Este hecho sugirió la incorporación de ítems de refuerzo en estos casos, actuación esta que, junto con la revisión final de los comentarios y sugerencias aportadas por el grupo de expertos, teniendo en cuenta aquellas que fueran encaminadas a reformular el ítem siguiendo unas pautas claras tales como cambiar el contexto del problema por utilizar números grandes o cambiar el orden de los números en el desarrollo del texto, insistir en los cálculos mentales y no escritos, pedir explicaciones sobre la propiedad desarrollada o simplemente suplir una expresión lingüística por una más adecuada, condujeron a una nueva versión del cuestionario con una versión de ítems distribuidos de la siguiente manera (Tabla 6):

**Tabla 6:** Incorporación de nuevos ítems a los aspectos evaluados para el Conocimiento Común del Contenido y el Conocimiento Especializado del Contenido.

Conocimiento Común del contenido		Conocimiento Especializado del contenido	
Aspecto evaluado	Ítems	Aspecto evaluado	Ítems
- Conocer el enunciado correcto de la propiedad.	6 ítems	- Reconocer explicaciones adecuadas para la propiedad aritmética	8 ítems
- Identificar la propiedad cuando es aplicada al resolver una tarea propuesta	15 ítems	- Dar ejemplos para desarrollar un aspecto matemático	2 ítems
- Saber qué operación cumple la propiedad	1 ítem	- Reconocer representaciones de propiedades aritméticas	5 ítems
- Ser capaz de resolver correctamente las tareas propuestas a los alumnos.	12 ítems	- Ser capaz de explicar qué se ha hecho.	13 ítems
		- Conocer formas alternativas de resolución aplicando propiedades	3 ítems

En cuanto a la distribución de los ítems atendiendo a la operación contemplada y a las propiedades aritméticas en estudio, esta queda resumida en la Tabla 7:

**Tabla 7:** Incorporación de nuevos ítems referidos a cada propiedad en el desarrollo del Contenido matemático.

	C. Común del contenido	C. Especializado del contenido
Propiedad contemplada en el ítem	22 Ítems	21 ítems
Propiedad Conmutativa de la suma.	3 ítems	4 ítems
Propiedad Conmutativa de la multiplicación	5 ítems	3 ítems
Propiedad Asociativa de la suma	4 ítems	3 ítems
Propiedad Asociativa de la multiplicación	4 ítems	3 ítems
Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto de la suma	6 ítems	8 ítems

De esta manera, existen ítems suficientes para cada una de las propiedades y se encontró una proporcionalidad relativamente interesante para las fases de validación que vendrían a continuación. El cuestionario, en este punto, quedaba conformado por 43 ítems, 22 relativos al Conocimiento Común del Contenido y 21 relativos al Conocimiento Especializado del Contenido.

### *Índices de dificultad y discriminación*

Esta etapa de validación precisó de una aplicación piloto del cuestionario, de la creación de una plantilla de corrección y del análisis de las respuestas en términos de dificultad y discriminación de cada uno de los ítems.

### *Aplicación piloto del cuestionario*

El cuestionario fue implementado en una sesión de dos horas de duración, debido a la gran cantidad de preguntas y la amplitud de respuesta que suponían algunas de estas preguntas. La administración fue grupal y uno de los autores de este artículo se encargó de suministrar el cuestionario y de dar las instrucciones pertinentes para una realización adecuada y sin problemas. El estudio se realizó con participantes provenientes de una muestra de carácter incidental conformada por 63 estudiantes del Grado en Educación Primaria.

### *Creación de una plantilla de corrección y análisis de respuestas*

Se asignaron valores de corrección según el tipo de pregunta (respuestas múltiples o respuestas abiertas) tal y como indica la siguiente tabla:

**Tabla 8:** Códigos para respuestas a los ítems.

Tipo de pregunta	3	2	1	0
Múltiple		Correcta	Incorrecta	No contesta
Abierta	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No contesta

Al asignar dichos valores se pudo observar que, aunque todo el proceso previo de elaboración del cuestionario se había realizado con rigor, se habían cometido errores en el enunciado de dos de los ítems. En uno de ellos los estudiantes tuvieron dificultad

a la hora de entender lo que se pedía realmente (fallo parcial de validez de apariencia) mientras que, en el segundo de los ítems mencionados, tal y como ya había anticipado uno de los expertos, las respuestas al ítem no permitían medir lo que se pretendía medir. Se optó por suprimir ambos ítems.

Seguidamente se calculó el índice de dificultad de cada uno de los ítems restantes. Este índice es definido como el cociente o proporción entre el número de respuestas correctas al ítem y el número de participantes que han contestado. Se puede decir que un ítem es más fácil cuanto mayor índice de dificultad tiene, ya que tener un índice de 0'1 es indicativo de que sólo el 10% ha resuelto adecuadamente el ítem. Si un ítem tiene un índice de dificultad cercano a 0 ó 1 deberá no ser tenido en cuenta pues no aporta información sobre las diferencias relativas al constructo medido. Por lo general, se considera que cuestionarios donde los ítems tienen un índice de dificultad comprendido entre 0,3 y 0,7 maximizan las diferencias relativas al constructo medido.

Morales (2012) determina, para ítems de respuesta abierta, el índice de dificultad como la medida de cada ítem. También podemos atender al grado de dificultad de la prueba, que se determina según Mejía (2005, p. 40) mediante la fórmula:

$$Gd = \frac{\bar{x}}{Pm} \times 100$$

Donde: Gd = Grado de dificultad de la prueba;  $\bar{x}$  = Promedio de los puntajes obtenidos; Pm = Puntaje máximo posible de alcanzarse en la prueba.

Para poder interpretar la cifra resultante se utiliza la escala de Kuder-Richardson (citada por Mejía, 2005, p. 40):

**Tabla 9:** Escala Kuder-Richardson. (Mejía, 2005, p. 40)

81%	Muy fácil
61% a 80%	Relativamente fácil
51% a 60%	Dificultad adecuada
31% a 50%	Relativamente difícil
11% a 30%	Difícil
Debajo del 10%	Muy difícil

Calculados los índices de dificultad de cada ítem se obtuvieron los siguientes resultados mostrados en la Tabla 10 (los ítems 17 y 25 corresponden a los dos ítems suprimidos durante la realización de la prueba piloto):

**Tabla 10:** Índices de dificultad de cada uno de los ítems en el cuestionario de Conocimiento del Contenido tras aplicarlos en la prueba piloto.

Conocimiento de la materia											
Ítem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ID	61,11	74,60	57,14	52,38	79,89	48,15	39,68	90,48	87,83	67,72	96,82
Ítem	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ID	87,3	86,50	44,97	71,42	70,89		66,66	57,14	50,79	63,49	87,30
Ítem	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
ID	33,33	92,06		53,43	61,9	30	30,68	37,56	41,79	63,49	85,18
Ítem	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	
ID	50,79	57,14	45,50	74,07	49,20	66,67	30,15	33,33	17,98	71,42	

A la vista de estos resultados se puede observar que existen ítems categorizables como difíciles y otros como muy fáciles. Es el caso del ítem 42, un ítem excesivamente difícil, y de los ítems 8, 9, 11, 12, 13, 22, 24 y 33, en este caso señalados como excesivamente fáciles. Debido a ello, estos ítems serían eliminados del cuestionario junto con el 17 y el 25 ya suprimidos previamente en esta fase, es decir, un total de 11 ítems, quedando conformado el cuestionario en este punto por 32 ítems.

Otro índice calculado fue el índice de discriminación. Siguiendo a Morales (2012), se puede aplicar la siguiente fórmula:

$$D = \frac{AS - AI}{N}$$

donde:

- AS = números de acertantes en el grupo superior (con puntuación total más alta)
- AI = número de acertantes en el grupo inferior (con puntuación total más baja)
- N= número de participantes en uno de los grupos

La realización del cálculo de este índice precisa de la agrupación previa de los estudiantes en dos grupos. Dicha agrupación se realiza teniendo en cuenta las puntuaciones obtenidas en el cuestionario. El grupo superior está constituido por los estudiantes que respondieron mejor y el grupo inferior por los que adquirieron puntuaciones más bajas. Se determina el poder de discriminación del ítem de manera que, a mayor diferencia en número de acertantes entre los grupos superior e inferior, el ítem es más discriminante, es decir, contribuye más a situar a un sujeto entre los primeros o entre los últimos (Tabla 11).

**Tabla 11:** Índices de Discriminación de cada uno de los Ítems del Cuestionario de Conocimiento del Contenido tras aplicarlos en la prueba piloto.

Conocimiento del Contenido												
Item	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
IDiscr	0,32	0,68	0,16	0,45	0,65	0,97	0,16	0,26	0,35	0,87	0,1	0,52
Item	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
IDiscr	0,26	0,74	0,39	1,29		1	1,26	0,90	0,26	0,42	1,3	0,03
Item	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
IDiscr		1,51	0,97	0,51	0,81	1,32	0,90	0,93	0,65	1,55	0,9	1,29
Item	37	38	39	40	41	42	43					
IDiscr	1	0,74	1,13	1,45	0,68	0,65	0,81					

Observando los resultados se observa que, en este caso, no es preciso suprimir ningún ítem adicional.

### **Fiabilidad**

Condición necesaria de todo buen instrumento de medición de constructos es su fiabilidad entendida como el grado o la precisión con la que dicho instrumento mide un determinado rasgo, independientemente del hecho de si es capaz o no de medirlo (validez). Es decir, se dice que un test es fiable si mide bien lo que está midiendo. Por su parte, Morales (2011) indica que la fiabilidad expresa el grado de precisión de la

medida, de manera que si un cuestionario tiene una fiabilidad alta sucesivas medidas con este instrumento darán ordenaciones semejantes de los individuos. Un cuestionario con fiabilidad baja provoca variaciones en sucesivas mediciones con el mismo grupo de individuos. Es por lo tanto un concepto referido a la constancia o consistencia de la medida.

La fiabilidad se midió con un coeficiente de consistencia interna muy utilizado en este tipo de investigaciones: el coeficiente Alfa de Cronbach. Este coeficiente mide las correlaciones entre los ítems que forman parte del cuestionario. Se puede utilizar para analizar cada uno de los ítems con respecto al total del cuestionario piloto. Sus valores se encuentran entre 0 y 1, indicando mayor consistencia con valores cercanos a 1. En este coeficiente influye el tamaño del cuestionario, de manera que cuanto mayor sea el tamaño mayor será alfa.

Para poder calcular el coeficiente deseado se empleó el programa estadístico SPSS 21.0 obteniendo el siguiente resultado:

**Tabla 12:** Coeficiente Alfa de Cronbach del cuestionario Conocimiento del Contenido.

Cuestionario	Coeficiente Alfa de Cronbach
Conocimiento del Contenido	0,898

El valor Alfa de Cronbach alcanzado puede interpretarse como bueno e, incluso, cercano a excelente, de acuerdo con el criterio de George y Mallery (2003). Para estos autores, un coeficiente Alfa de Cronbach con valor superior a 0,9 sería un valor excelente, mientras que un valor superior a 0,8 sería un valor bueno. Como el número de ítems del que se partía era relativamente alto, se analizó el coeficiente en cada uno de los ítems para poder observar su aportación individual al coeficiente final. En esta línea también se determinó el coeficiente de correlación elemento-total corregido. Los resultados fueron los siguientes (Tabla 13):

**Tabla 13:** Valores del coeficiente alfa de Cronbach y el coeficiente correlación ítem-total corregido para el cuestionario del Conocimiento del Contenido.

Ítem	Coeficiente $\alpha$ de Cronbach	Coeficiente correlación ítem-total corregido	Ítem	Coeficiente $\alpha$ de Cronbach	Coeficiente correlación ítem-total corregido
Ítem 1	,898	,268	Ítem 26	,892	,626
Ítem 2	,896	,459	Ítem 27	,893	,599
Ítem 3	,898	,178	Ítem 28	,896	,405
Ítem 4	,898	,303	Ítem 29	,895	,458
Ítem 5	,899	,251	Ítem 30	,892	,592
Ítem 6	,893	,554	Ítem 31	,893	,589
Ítem 7	,900	,137	Ítem 32	,897	,363
Ítem 10	,895	,504	Ítem 34	,892	,625
Ítem 14	,896	,382	Ítem 35	,895	,443
Ítem 15	,898	,276	Ítem 36	,891	,622
Ítem 16	,894	,490	Ítem 37	,894	,500
Ítem 18	,893	,574	Ítem 38	,897	,330
Ítem 19	,895	,558	Ítem 39	,895	,474
Ítem 20	,898	,436	Ítem 40	,893	,556
Ítem 21	,898	,241	Ítem 41	,895	,449
Ítem 23	,621	,891	Ítem 43	,900	,218

De entrada, se observa, de manera inmediata, que todos los coeficientes de correlación ítem-total corregido son superiores a cero (ninguno negativo). Por debajo de 0,30 están los ítems: 1, 3, 5, 7, 15, 21 y 43. Es conveniente indicar que, de cara al coeficiente Alfa de Cronbach global, sólo encontraríamos una mejoría del mismo eliminando los ítems 5, 7 y 43. Así, este análisis de fiabilidad lleva finalmente a la supresión de estos tres nuevos ítems quedando el cuestionario en su estado actual conformado por 25 ítem distribuidos de la siguiente forma (Tabla 14):

**Tabla 14:** Distribución de ítems en función del contenido a evaluar tras el análisis de fiabilidad.

	C. Común del contenido	C. Especializado del contenido
Propiedad contemplada en el ítem	13 ítems	12 ítems
Propiedad Conmutativa de la suma.	2 ítems	1 ítem
Propiedad Conmutativa de la multiplicación	1 ítem	2 ítems
Propiedad Asociativa de la suma	2 ítems	2 ítems
Propiedad Asociativa de la multiplicación	4 ítems	2 ítems
Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto de la suma	4 ítems	5 ítems

### *Validez de constructo*

Para completar la validación de constructo iniciada con la revisión de la literatura, la delimitación del propio constructo objetivo del instrumento de medición y la selección de ítems junto con su validez de contenido asociada, se aborda a continuación la búsqueda de grupos homogéneos de ítems determinados a partir de los factores definidos por los aspectos originales que determinan los tipos de conocimiento a evaluar.

Así, se llevó a cabo un análisis factorial recurriendo a un método de extracción de factores basado en el análisis de componentes principales seguido de un método de rotación ortogonal de acuerdo con el procedimiento de normalización Varimax de Kaiser. Previo a dicho análisis se comprobó la pertinencia del mismo mediante el test de esfericidad de Barlett y la determinación del índice KMO (Kaiser-Meyer-Okin), obteniendo los siguientes resultados (Tabla 15):

**Tabla 15:** KMO y prueba de Barlett para el cuestionario del Conocimiento del Contenido antes de calcular factores.

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.		,760
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	680,827
	gl	300
	Sig.	,000

El índice KMO obtenido se corresponde con un valor categorizado como medianamente aceptable. Por su parte, el test de esfericidad rechaza la hipótesis nula según la cual las variables no están intercorrelacionadas. Con estos datos resulta procedente continuar con el análisis factorial, análisis que determinó, inicialmente, 8 factores que explicaban el 69,561% de la varianza total.

A la vista de la matriz de componentes rotados se pudo apreciar que dos de los ítems formaban cada uno de ellos un factor, por lo que fueron suprimidos de acuerdo con criterios como los apuntados por Costello y Osborne (2005). A continuación, se repitió todo el proceso de análisis factorial trabajando ahora con 23 ítems que acabaron agrupándose en 6 factores que explicaban el 64,070 % de la varianza. Nuevamente se

apreciaron dos ítems conformando un factor, por lo que se tomó la decisión de eliminarlos y proceder una vez más con un nuevo análisis factorial sobre los 21 ítems restantes.

Estos 21 ítems se estructuraron en 5 factores que explicaban el 61,477 % de la varianza. Tras aplicar el método Varimax uno de los ítems presentó dos valores muy parecidos en dos factores distintos, siendo por tanto finalmente eliminado para determinar una agrupación de los 20 ítems restantes en los 5 factores mencionados, con los factores 1, 4 y 5 asociados al Conocimiento Común del Contenido y los factores 2 y 3 al Conocimiento Especializado del Contenido. Los 20 ítems finales se recogen en el Anexo.

La distribución final en términos de tipo de conocimiento a evaluar y de propiedad aritmética considerada por el ítem fue la siguiente (Tabla 19):

**Tabla 19:** Distribución de todos los ítems finales creados para medir el Conocimiento del Contenido.

	C. Común del contenido	C. Especializado del contenido
Propiedad contemplada en el ítem	10 ítems	10 ítems
Propiedad Conmutativa de la suma.	0 ítems	1 ítem
Propiedad Conmutativa de la multiplicación	1 ítem	1 ítem
Propiedad Asociativa de la suma	2 ítems	2 ítems
Propiedad Asociativa de la multiplicación	3 ítems	2 ítems
Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto de la suma	4 ítems	4 ítems

## Discusión

Los distintos pasos seguidos para la construcción y validación del cuestionario han dado como resultado un conjunto de 20 ítems que se agrupan en cinco factores. Estos cinco factores representan dimensiones del Conocimiento Común del Contenido (3 factores) y Conocimiento Especializado del Contenido (2 factores).

Se observa claramente que ni los ítems que integran los 3 factores del Conocimiento Común del Contenido ni los que integran los 2 factores del Conocimiento Especializado del Contenido cubren todos los aspectos de ambos conocimientos inicialmente pretendidos (Tabla 2) sino que cubren únicamente algunos aspectos en cada caso, conformando así factores que obligan a una interpretación más precisa. También se puede observar que los ítems ofrecen posibilidades para valorar conocimiento en torno a todas las propiedades, aunque con menor profusión en el caso de la propiedad conmutativa, no existiendo ítems para la propiedad conmutativa de la suma.

Los distintos pasos realizados para la elaboración del cuestionario evidenciaron que los ítems creados para la propiedad conmutativa fueron eliminándose principalmente como consecuencia de un valor de dificultad que indicaba que eran ítems fáciles y que presentaban un valor ítem-total corregido inferior a 0,3.

Tras el análisis factorial se obtuvieron 5 factores donde se pudo observar que las saturaciones de cada ítem con sus respectivos factores tenían valores altos. Los factores 1, 4 y 5 correspondían a ítems para medir el Conocimiento Común del Contenido donde dichos ítems cubrían los aspectos Conocer el enunciado correcto de la propiedad y Ser capaz de resolver correctamente las tareas propuestas a los alumnos.

La distribución de estos ítems lleva a pensar en la necesidad de concretar mejor los aspectos o dimensiones del Conocimiento Común del Contenido medidos por ellos. Con el factor 1 la dimensión valorada supone “ser capaz de resolver correctamente la tarea que pide determinar un número que falta aplicando la propiedad”, mientras que el factor 5 mediría la dimensión “ser capaz de resolver correctamente la tarea que pide aplicar la propiedad a los datos numéricos que ahí aparecen”. Por otra parte, el factor 4 obedecería a la dimensión “conocer la definición de la propiedad tanto a nivel textual como a nivel simbólico”.

Los factores 2 y 3 corresponderían a ítems para medir el Conocimiento Especializado del Contenido donde dichos ítems cubren principalmente la dimensión Ser capaz de explicar qué se ha hecho. También en este caso la distribución de los ítems en los factores lleva a pensar en precisar mejor esta dimensión. Así, el factor 2 se centraría en evaluar si el estudiante muestra Ser capaz de explicar qué se ha hecho después de realizar una descomposición, mientras que el factor 3 se orientaría a comprobar si dicho estudiantes muestra Ser capaz de explicar qué se ha hecho ante igualdades numéricas mostradas.

El estudio realizado ha permitido, en todo caso, crear un cuestionario con buenas propiedades psicométricas que permite medir el Conocimiento del Contenido por parte del profesorado de Educación Primaria en formación inicial en relación con las propiedades aritméticas de la suma y la multiplicación. En particular, el instrumento presenta buenos valores de los índices de validez de contenido, dificultad y discriminación, una clara estructura factorial consistente con la teoría subyacente al constructo medido y los aspectos del mismo a evaluar en el contexto de aplicación del propio cuestionario y, finalmente, un alto valor de consistencia interna determinado por un coeficiente Alpha de Cronbach de 0,898.

## Referencias

- Adamuz-Povedano, N, Bracho-López, R y Albanese, V (2016). Algoritmos ABN: creencias de maestros de Educación Primaria en formación. En JA Macías, A Jiménez, JL González, MT Sánchez, P Hernández, C Fernández, FJ Ruiz, T Fernández y A Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (551-553). Málaga: SEIEM.
- Anghileri, J (2006). *Teaching number sense*, 2nd Edition. London: Continuum International Publishing Group.
- Alsina, A (2002). De los contenidos a las competencias numéricas en la enseñanza obligatoria. *UNO. Didáctica de las matemáticas*, 29, 55-66.
- Bracho, R, Adamuz, N, Jiménez, N y Gallego, MC (2014). Una experiencia de investigación-acción colaborativa para el desarrollo del sentido numérico en los primeros años de aprendizaje matemático. En JL González, JA Fernández Plaza, E Castro Rodríguez, MT Sánchez Compañía, C Fernández, JL Lupiáñez y L Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (1-9). Málaga: SEIEM.
- Bruno, A (2000). Sentido numérico. *Números*, 43, 267-270.
- Bruno, A y Almeida, R (2017). Establishing profiles on the use of number sense. *Journal of Research in Mathematics Education*, 6(1), 56-84. <http://doi.org/10.17583/redimat.2017.1910>
- Can, D y Özdemir, İE Y (2020). An examination of fourth-grade elementary school students' number sense in context-based and non-context-based problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(7), 1333-1354.
- Carbó, L y Gràcia, V (Coords.) (2004). *El mundo a través de los números*. Lleida: Milenio.
- Carrillo, J, Climent, N, Montes, M, Contreras, LC, Flores, E, Escudero, D, Vasco, D, Rojas, N, Flores, P, Aguilar, Á, Ribeiro, M y Muñoz, MC (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Castro, E (2015). Sentido numérico. En P Flores y L Rico (coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (109-126). Madrid: Pirámide.
- Castro, E, Castro, E y Rico, L (2004). Aprendiendo a multiplicar y dividir. En V. Bermejo (Coord.), *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor* (93-116). Madrid: Editorial CCS.
- Castro, E, Rico, L y Castro, E (1996). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Editorial Síntesis.



- Cid, E, Godino, JD y Batanero, C (2004). Didáctica de los Sistemas numéricos para maestros. En JD Godino (Dir.), *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- Costello, AB y Osborne, JW (2005). Best practices in exploratory factor analysis: Four recommendations for getting the most from your analysis. *Practical assessment, research & evaluation*, 10(7), 1-9. <https://doi.org/10.7275/fyj1-4868>
- George, D y Mallery, M (2003). *Using SPSS for Windows step by step: a simple guide and reference*. Boston: Allyn & Bacon.
- Gersten, R, Jordan, NC y Flojo, JR (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38, 293–304. <https://doi.org/10.1177/00222194050380040301>
- Godino, JD, Font, V, Konic, P y Wilhelmi, MP (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En JM Cardeñoso y M Peñas *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico (117- 184)*. Granada: SAEM Thales.
- Hedren, R (1999). The teaching of traditional standard algorithms for the four arithmetic operations versus the use of pupils' own methods. En I Schwank (Ed.). *Proceedings of the First Conference of the European Research in Mathematics Education I: Group 2*. Osnabrueck.
- Hill, HC, Ball, DL y Schilling, SG (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Kaminski, E (2002). Promoting Mathematical Understanding: Number Sense in Action. *Mathematics Education Research Journal*, 14(2), 133-149. <http://doi.org/10.1007/BF03217358>
- Lawshe, CH (1975). A Quantitative approach to content validity. *Personnel Psychology*, 28, 563-575. <http://doi.org/10.1111/j.1744-6570.1975.tb01393.x>
- Llinares, S (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación* (pp. 151-176). Madrid: Síntesis.
- Martínez, J (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón*, 63(4), 95-110.
- McIntosh, A, Reys, BJ y Reys, RE (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, 12(3), 2-8. <http://doi.org/10.12691/education-5-9-13>
- Mejía, E (2005). *Técnicas e instrumentos de investigación*. Lima: UNMSM.
- Morales, P (2011). *Guía para construir cuestionarios y escalas de actitudes*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.
- Morales, P (2012). *Análisis de ítems en las pruebas objetivas*. [Documento en línea]. Universidad de Comillas. Madrid.
- Pitta, D (2014). *Number Teaching and Learning*. *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.
- Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, de 2 de marzo de 2022.
- Tristán-López, A (2008). Modificación al modelo de Lawshe para el dictamen cuantitativo de la validez de contenido de un instrumento objetivo. *Avances en medición*, 6(1), 37-48.
- Verschaffel, L y De Corte, E (1996). Number and Arithmetic. In AL Bishop, K Clements, C Keitel, J Kilpatrick & C Laborde (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp 99–137). Netherlands: Kluwer Academic Printed. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0\\_4](https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_4)
- Verschaffel, L, Greer, B y De Corte, E (2007). Whole Number Concepts and Operations. In: Lester FK (ed) *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*, IAP, Charlotte, 557 – 628.
- Wagner, D y Davis, B (2010). Feeling number: grounding number sense in a sense of quantity. *Educational Studies in Mathematics*, 74 (1), 39-51. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9226-9>

## Anexos

### CUESTIONARIO

1.- *Calcula sin calculadora, y utilizando el método que suponga menos operaciones, el valor de  $43 \times 1 + 43 \times 2 + 43 \times 3 + 43 \times 4 + 43 \times 5 + 43 \times 6$ .*

2.- *Esta es una típica estrategia usada por un chico joven para calcular  $8 \times 23$ :*

1er PASO:  $8 \times 10 = 80$

2º PASO:  $8 \times 10 = 80$

3er PASO:  $8 \times 3 = 24$

4º PASO:  $80 + 80 + 24 = 184$ .

*Explica cada uno de los pasos indicando si utiliza alguna propiedad aritmética (nombrándola, en su caso).*

3.- *En la siguiente igualdad hay un valor desconocido:  $(7 \times 156) + (9 \times 156) = N \times 156$ . Sin hacer cálculos, ¿qué valor debería tener  $N$  para que la igualdad sea cierta? ¿Cómo has obtenido el valor de  $N$ ?*

4.- *Ana ha comprado 3 sobres con 6 cromos en cada uno. Su amigo Carlos tiene el doble de cromos que Ana. Por otro lado, Andrés tiene el triple de cromos que Inés, quién tiene 6 sobres de 2 cromos cada uno. Sin hacer ningún tipo de cálculo, ¿quién tiene más cromos, Carlos o Andrés? ¿Por qué?*

5.- *¿Qué valor tendría que tener el número natural  $M$  para que la igualdad siguiente fuera cierta:  $151 \times 142 = M \times 151$ ? Explica cómo resolverías el problema sin realizar ningún cálculo.*

6.- *Observa la siguiente igualdad:  $(52 \times 11) = (52 \times 10) + (m \times n)$ . Sin hacer ningún tipo de cálculo, ¿qué valor tendrían que tener  $m$  y  $n$  para conseguir que la sentencia fuera verdad? ¿En qué propiedad aritmética te basas para dar ese valor?*

7.- *Escribe una definición de la propiedad asociativa de la multiplicación.*

8.- *Recurriendo únicamente a cálculo mental, ¿qué valor tendrían que tener el número natural  $m$  y el número natural  $n$  para que las siguientes igualdades fueran ciertas?:  $183+147 = 180+m+147 = 180+n$ . Explica qué propiedad/es aritmética/s se utilizaría/n.*

9.- Tenemos 6 bolsas (de una tela no transparente) en un escritorio y en cada una de ellas hay 7 triángulos y 12 cuadrados. Sin hacer cálculos, responde a las siguientes preguntas referidas al total de bolsas: ¿Qué hay, más triángulos o más cuadrados? (Razona la respuesta) ¿Cómo operarías, de dos maneras distintas, para calcular el total de piezas? ¿Cómo estás seguro de que las dos maneras conducen a lo mismo?

10.- A la hora de calcular  $14 + 23$ , uno puede discurrir como sigue:

$$\begin{aligned}
 14 + 23 &= (10 + 4) + (20 + 3) \\
 &= 10 + (4 + 20) + 3 \text{ (propiedad .....)} \\
 &= 10 + (20 + 4) + 3 \text{ (propiedad .....)} \\
 &= (10 + 20) + (4 + 3) \text{ (propiedad .....)}
 \end{aligned}$$

en la que la última línea es la explicación precisa de por qué la adición de  $14+23$  puede ser llevada a cabo columna por columna. Explica en qué se tiene que fijar un estudiante para escribir adecuadamente el nombre de la propiedad aplicada en cada línea.

11.- En un curso de 5º de Primaria se les proponen a los alumnos las siguientes multiplicaciones:  $7 \times 320$  y  $6 \times 27$ . Un alumno realiza los siguientes procesos:

$$7 \times 320: 7 \times 3 = 21; 2100; 7 \times 2 = 14; 140; 2100 + 140 = 2240.$$

$$6 \times 27: 27 + 27 = 54; 54 + 54 = 108; 108 + 50 = 158; 158 + 4 = 162$$

¿Son un mismo proceso? Explica dónde observas las diferencias y señala las coincidencias.

12.- Enuncia una definición de la propiedad asociativa de la suma.

13.- ¿Cómo explicarías a tus alumnos que estas igualdades numéricas recurren a las mismas propiedades aritméticas?

$$2 + 7 = 2 + 3 + 4 = 5 + 4 \quad 10 + 5 = 7 + 3 + 5 = 7 + 8$$

$$25 + 15 = 12 + 13 + 15 = 12 + 28$$

14.- Usando la operación  $4 \times 129 = 516$ , calcula el valor de  $4 \times 128$ .

15.- Juan se quiere comer una tableta de chocolate formada por 8 rectángulos iguales. Los lados de los rectángulos tienen lados que miden 5 cm y 6 cm. Alberto se quiere comer una tableta de chocolate de rectángulos iguales cuyos lados miden 8 cm y 5 cm, respectivamente.

Sin hacer cálculo alguno, determina el número de rectángulos que debe tener la tableta de Alberto para que coma la misma cantidad que Juan. Escribe los pasos que sigues para resolver este problema.

16.- Mira la siguiente igualdad y, sin hacer las operaciones, di si es cierta o falsa. Indica en qué propiedad aritmética te basas. Si alguien no la reconociera ¿qué explicación le darías para que viera que realmente es la propiedad que tú dices?

$$417 \times 127 + 37 \times 19 = 127 \times 417 + 19 \times 37$$

17.- En un grupo de Bachillerato de 5 chicos y 15 chicas se decide vender camisetas diferentes por separado. Los chicos las venden a 6€ mientras que las chicas lo hacen a 5€. Al final, los chicos consiguen vender 15 camisetas mientras que las chicas sólo venden 6. Sin hacer cálculos, ¿quién crees tú que obtenido más dinero? Razona la respuesta.

18.- ¿Cómo explicarías a tus alumnos que estas igualdades numéricas se basan en la misma propiedad aritmética?

$$1 + 9 = 9 + 1 \quad 2 + 3 = 3 + 2 \quad 8 + 5 = 5 + 8 \quad 9 + 21 = 21 + 9 \quad 3 + 15 = 15 + 3$$

19.- El número  $A = 15 \times 5623 \times 60$  es un múltiplo de 9 porque lo podemos poner como  $A = 9 \times 562300$ . Explica cómo se puede llegar a escribir el número A tal y como figura en la segunda expresión a partir de la primera expresión.

20.- En la siguiente situación se realiza la multiplicación de dos números ¿podrías explicar el proceso que se ha seguido?

1er MOMENTO

2º MOMENTO

3er MOMENTO

$$71 \times 31$$

×	<b>70</b>	<b>1</b>				
<b>30</b>	<b>2100</b>	<b>30</b>				
<b>1</b>	<b>70</b>	<b>1</b>	+			
			<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; padding-top: 5px;"><b>2130</b></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><b>71</b></td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; padding-top: 5px;"><b>2201</b></td> </tr> </table>	<b>2130</b>	<b>71</b>	<b>2201</b>
<b>2130</b>						
<b>71</b>						
<b>2201</b>						