Universidad de Granada

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

Programa de Doctorado de Ciencias de la Educación

Tesis Doctoral

Generalización, estructuras y representaciones de estudiantes de segundo de educación primaria desde un enfoque funcional del *early algebra*

María D. Torres

2022

Universidad de Granada

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

Programa de Doctorado de Ciencias de la Educación

Tesis Doctoral

Generalización, estructuras y representaciones de estudiantes de segundo de educación primaria desde un enfoque funcional del *early algebra*

María D. Torres

2022

Memoria de Tesis Doctoral realizada bajo la dirección de la doctora Dña. María C. Cañadas, Profesora Titular del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, que presenta Dña. María D. Torres, para optar al grado de Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada, con Mención Internacional.

Fdo: Dña. María D. Torres

VºBº de la Directora

Fdo: Dra. Dña. María C. Cañadas

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: María Dolores Torres González
ISBN: 978-84-1117-442-8
URI: http://hdl.handle.net/10481/76069

El doctorando / The *doctoral candidate* **[María D. Torres]** y los directores de la tesis / and the thesis supervisor/s: **[María C. Cañadas]**

Garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

/

Guarantee, by signing this doctoral thesis, that the work has been done by the doctoral candidate under the direction of the thesis supervisor/s and, as far as our knowledge reaches, in the performance of the work, the rights of other authors to be cited (when their results or publications have been used) have been respected.

Lugar y fecha / Place and date:

Granada a 16 de marzo de 2022

Director/es de la Tesis / *Thesis supervisor/s;*

CAÑADAS SANTIAGO MARIA CONSUELO - 74643899K

Firmado digitalmente por CAÑADAS SANTIAGO MARIA CONSUELO - 74643899K
Fecha: 2022.03.17 17:43:02 +01'00'

Firma / Signed

Doctorando / *Doctoral candidate*:

TORRES GONZALEZ MARIA DOLORES - 50613291C

Firmado digitalmente por TORRES GONZALEZ MARIA DOLORES - 50613291C
DN: C=ES, SERIALNUMBER=IDCES-50613291C, G=MARIA DOLORES, SN=TORRES GONZALEZ, CN=TORRES GONZALEZ MARIA DOLORES - 50613291C
Razón: Soy el autor de este documento
Ubicación: su firma se ubicará aquí
Fecha: 2022-03-16 21:31:27
Foxit Reader Versión: 9.5.0

Firma / Signed

Esta Tesis Doctoral ha sido realizada dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER). Asimismo, la tesis fue llevada a cabo en el seno del Grupo de Investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM 193).

Su autora ha disfrutado de un contrato predoctoral a través del Programa de Financiación Pública de Formación Doctoral; Formación del Personal Investigador (FPI), con referencia BES-2017-080124, desde 15 de junio de 2018 hasta la actualidad.

A mis padres,

por serlo todo para mí.

El motor y la ayuda necesaria en mi vida.

Sin ellos nada hubiera sido posible.

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis no hubiera sido posible sin el apoyo de varias personas a las que quiero mostrar mi más sincero agradecimiento.

En primer lugar, agradezco a María C. Cañadas, mi directora, su labor constante de guía durante la que ha demostrado no solo un gran conocimiento, sino también una profunda habilidad y eficacia en el proceso. Gracias María, por animarme, por empujarme y por estar siempre de guardia. Gracias por confiar en mí y brindarme la oportunidad de aprender tanto.

A Antonio Moreno sus valiosas revisiones y su buen talante. Gracias por mostrarme una comprensión y empatía que ha dado luz y alegría al proceso. Gracias por haber sido un compañero de viaje durante este camino.

Espero poder seguir compartiendo más trabajos junto a ambos.

Agradezco a Pedro Gómez y Paola Castro su cálida acogida durante mi primera estancia internacional en la Universidad de los Andes, donde aprendí un modo diferente de trabajar y también de vivir.

A Rodolfo Vergel su disponibilidad y agrado al recibirme en la Universidad Distrital y conversar conmigo sobre inquietudes similares. Gracias por trasmitirme tu ánimo desde que nos conocemos.

A Bárbara Brizuela, quien me recibió en la Universidad de Tufts durante mi segunda estancia internacional de tres meses y me brindó su tiempo y su ayuda en una experiencia tan exigente en mi vida. Gracias por compartir tu trabajo conmigo con tanta generosidad y amabilidad.

Agradezco a los que fueron mis compañeros en el Máster en Didáctica de la Matemática, punto de partida hacia el doctorado. En especial a María Fernanda, Francisco, Jason y Cristina por sumarme tanto. Agradezco a Eder el haber escuchado atentamente mis dudas. Me alegra que me hayas precedido porque has sido un gran referente para mí en el proceso.

Agradezco a Romina que en este último tiempo me ha acompañado en una de las aventuras más relevantes de mi vida. Has sido un gran apoyo.

Del mismo modo, agradezco al grupo FQM-193- “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”, en el que he podido desarrollar mi docencia y he aprendido de una gran calidad humana. En especial agradezco a Ana Montoro y Elena Castro su complicidad, amistad y ayuda durante mi doctorado. Gracias a las dos por estar presentes cuando lo he necesitado. También agradezco a José Antonio su compañerismo y su disponibilidad para solucionar todas mis dudas técnicas de manera veloz.

Agradezco a todos los miembros de los proyectos de investigación EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, PENFU, donde he podido realizarme como FPI, por permitirme ser parte de esto y por ayudarme a descubrir un tema que me fascina.

Finalmente agradezco a mis padres su profunda tolerancia y respeto por mis decisiones, por dejarme ser y hacer, e inculcarme el valor del esfuerzo. Gracias a mi hermano por estar ahí y formar parte de un equipo que me cuida y me alienta cada día.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Resumen

¿Qué significa pensar algebraicamente? ¿Puede desarrollarse esta capacidad en niños pequeños que no han tenido contacto con el álgebra formal? ¿Los niños pueden generalizar, ver la estructura matemática y representarla? Si es así, ¿estarán mejor preparados para las exigencias del álgebra de la educación secundaria? Estas preguntas forman parte de la exploración de la evolución del álgebra temprana como campo de investigación y práctica que sigue emergente a día de hoy (Fakhrunisa y Hasanah, 2020; Pinnock, 2020; Eriksson y Eriksson, 2021; Ventura et al, 2021; Torres et al., 2021).

Podemos imaginar muchas oportunidades para tratar de organizar actividades que permitan a los niños construir su propia comprensión, pero, cuando los conceptos en cuestión son sutiles y algo resbaladizos, se necesita una orientación explícita de lo que hay que observar para que se produzca el aprendizaje. Pretendemos que esta tesis doctoral contribuya a la caracterización del pensamiento algebraico en los cursos elementales de la educación primaria. De manera concreta nos preguntamos, ¿cómo es el proceso de generalización que llevan a cabo los estudiantes? ¿perciben estructuras que puedan generalizar?, ¿existen diferentes niveles de sofisticación en las generalizaciones que expresan? Si es así, ¿cómo las representan? Con estas preguntas de investigación debemos concretar un marco conceptual que nos ayude en nuestro análisis.

Conceptualmente, adoptamos las ideas de Kaput (2008) sobre su forma de entender el álgebra y el pensamiento algebraico; la generalización y su representación constituyen aspectos centrales. En esta memoria de investigación consideramos la perspectiva en la cual el álgebra y el pensamiento algebraico van más allá del uso de la notación algebraica, empleando representaciones tan variadas como el lenguaje natural, representaciones manipulativas, pictóricas, numéricas, tabulares, entre otras, para expresar la generalización. Nuestra actividad puede denominarse algebraica pues promovemos que los estudiantes atiendan a propiedades y relaciones entre cantidades, examinando su generalidad.

Específicamente esta tesis se centra en el estudio del pensamiento funcional como un modo de acercarse al pensamiento algebraico, donde la función es el contenido matemático clave. Pretendemos caracterizar el pensamiento funcional atendiendo a las nociones de generalización, estructura y representación como descriptores de dicho pensamiento.

Un creciente número de estudios han trabajado aspectos asociados al pensamiento funcional, centrándose en cómo estudiantes de primaria: (a) evidencian regularidades y qué estrategias emplean; (b) usan diferentes tipos de representaciones; (c) comparan funciones en un mismo problema; (d) atribuyen diversos significados a la notación algebraica; (e) evidencian dificultades y errores en el tratamiento con ciertos elementos de carácter algebraico, entre otros (Pinto, 2019). Los estudios que hemos revisado destacan que la generalización entre cantidades que covarían es el elemento central del pensamiento funcional.

Entendemos la generalización como un proceso y como un producto. El producto de la generalización es la forma en que se expresa la generalidad, es decir, es el resultado de dicho proceso (Ellis, 2007). La generalización como proceso implica: (a) identificar los elementos comunes a todos los casos (evidenciar la estructura), (b) extender el razonamiento más allá del rango en el que se originó, (c) obtener resultados más amplios que los casos particulares y (d) proporcionar una expresión directa que permita obtener cualquier término (Ellis, 2007; Kaput, 1999; Radford, 2013). Aún quedan líneas por explorar que ayudan a situar nuestro estudio. Describimos a continuación algunas de ellas brevemente.

- *Estructuras.* La estructura se refiere a aquellos comportamientos, características o propiedades que permanecen constantes a través de instancias específicas (Kieran et al., 2016). Con esto ponemos el énfasis en el reconocimiento y la expresión de las estructuras en el early algebra (Kieran et al., 2018). Evidenciamos la necesidad de profundizar y mostrar, a través de ejemplos concretos, cómo los estudiantes relacionan las variables en diferentes problemas que involucran funciones lineales. Entendemos que la noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que se expresa la generalización (Pinto y Cañadas, 2017).

- *Formas directa e inversa de una función lineal.* La forma en que la relación entre las variables es formulada verbalmente suele destacar una de sus dos funciones asociadas (es decir, marcar un sentido en la relación de dependencia entre las variables involucradas). Esto podría ejercer cierta influencia en la manera en que dicha relación es entendida y, en su caso, transcrita algebraicamente (López, 2019). La mayoría de los estudios que abordan elementos del pensamiento funcional en estudiantes de primaria consideran la forma directa de una función lineal (dado el valor de la variable independiente, determinar el valor de la dependiente) y son escasos los estudios que tratan ambas formas de la función.
- *Representaciones*. El significado y comprensión de un objeto matemático se basa en el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación (D'Amore, 2006). Las personas no tienen acceso directo a los objetos sino solo a los sistemas simbólicos que representan la realidad, es por esto que es fundamental el análisis de las producciones de los estudiantes (Duval, 1993). Nos interesa describir las representaciones empleadas por los estudiantes durante el proceso de generalización. Estas pueden ir más allá de las implicadas en la clasificación clásica. Atenderemos aquí a la representación verbal, los gestos, la representación numérica, pictórica, tabular y simbólica. Esto nos ayudará a describir características del pensamiento.
- *Tipos de tareas y preguntas*. La literatura refleja que los estudiantes de diferentes cursos generalizan las relaciones involucradas en diversos problemas y muchas veces lo hacen sin que esto sea solicitado. Analizar los tipos de preguntas y/o tareas que llevan a los estudiantes a generalizar (e.g., casos particulares o caso general) permite profundizar en los caminos y elementos considerados por estos al generalizar.

La generalización de las estructuras evidenciadas por los estudiantes durante el proceso de generalización, así como la representación de esas estructuras, nos ayudan a entender cómo los estudiantes relacionan cantidades que covarían.

Esta memoria de investigación está estructurada en cinco capítulos seguidos de las referencias bibliográficas y los anexos.

En el capítulo 1 presentamos el problema de investigación. Se justifica su relevancia y se exponen las motivaciones que llevaron a la autora a realizar esta investigación. También se plantean los objetivos y preguntas que guían este trabajo.

Nuestro objetivo general de investigación es:

profundizar en la descripción del pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes de segundo de educación primaria.

Este objetivo más amplio se concreta con los siguientes objetivos específicos:

O. E1. Describir el proceso de generalización evidenciado por los estudiantes.

O. E2. Describir las estructuras que generalizan los estudiantes.

O. E3. Caracterizar los tipos de generalización expresados por los estudiantes.

O. E4. Identificar y describir las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directa e inversa de una función.

O. E5. Analizar las representaciones que usan los estudiantes para evidenciar las estructuras.

En el capítulo 2 describimos los aspectos conceptuales que se relacionan con nuestra investigación. Abarcamos elementos generales, hasta llegar a aquellos que están directamente relacionados con los objetivos de investigación propuestos. Iniciamos el capítulo presentando el marco del pensamiento algebraico adoptado para describir la posición desde donde consideramos la generalización y su relación estrecha con la estructura y la representación, así como la idea del pensamiento funcional como una aproximación al pensamiento algebraico, siguiendo las ideas de Kaput (2008). Después, describimos los principales elementos relacionados con el pensamiento funcional, con la intención de clarificar lo que entendemos y asumimos por cada uno de ellos.

Metodológicamente, seguimos las directrices de la investigación de diseño en esta tesis doctoral, donde diseñamos e implementamos un experimento de enseñanza con varias sesiones, cuestionarios y entrevistas semiestructuradas para la recogida de información.

Los participantes de este estudio han sido estudiantes de segundo de primaria (7- 8) años que no habían trabajado previamente con funciones lineales ni la generalización. En cuanto al análisis de datos, hemos llevado a cabo un análisis cualitativo en el que hemos elaborado categorías del contenido oral y escrito de las producciones de los estudiantes tanto de las entrevistas como de los cuestionarios. Hemos diseñado un sistema de categorías para la generalización, la estructuras y las representaciones encontradas.

En el capítulo 3 describimos y justificamos el marco metodológico de la investigación. En primer lugar, describimos el paradigma metodológico que rige esta tesis: la investigación de diseño (Confrey y Lachance, 2000; Molina, et al, 2011). En segundo lugar, justificamos su consideración según los objetivos de investigación y detallamos los aspectos del diseño que forman parte de esta memoria. Finalmente, presentamos el experimento de enseñanza de cuatros sesiones que tiene lugar en la investigación y detallamos la información recopilada a través de dos fuentes de información directamente relacionadas: (a) cuestionarios de las sesiones específicas al experimento de enseñanza; y (b) entrevistas individuales y grupales semiestructuradas. Considerando las fuentes de información, describimos los estudiantes que forman parte de estas, la selección de los datos considerados, los procesos e instrumentos de recogida de información y las categorías de análisis empleadas.

En el capítulo 4, mostramos los resultados de esta Tesis Doctoral, que se presenta en la modalidad de agrupamiento de publicaciones. Por tanto, describimos los seis estudios (tres de ellos publicados y los otros tres en revisión). Los estudios persiguen los objetivos específicos de esta investigación. A continuación, presentamos los estudios en el mismo orden en el que aparecen en este capítulo:

Estudio 1: Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematic*, 9, 1109. https://doi.org/10.3390/math9101109. (Q1, JCR).

En el estudio 1 describimos el proceso de generalización evidenciado por los estudiantes, identificando y describiendo las estructuras reconocidas por los estudiantes en su evolución hacia la generalización. También hemos caracterizado los tipos de generalización expresados por los estudiantes.

Estudio 2: Torres, M. D., Moreno, A., Rodolfo, V. y Cañadas, M. C. (en revisión). An experience of transition from arithmetic generalization to algebraic generalization in the context of functional thinking.

En el estudio 2 identificamos y describimos el proceso de generalización de un estudiante de segundo curso, a través de un estudio de caso, caracterizando las generalizaciones producidas y describiendo las estructuras identificadas por el estudiante.

Estudio 3: Torres, M. D., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Gómez, P. (2021). Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años *Uniciencia*. *35*(2). https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.16. (Q3, SJR).

En el estudio 3 identificamos y comparamos las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directa e inversa de una función, tanto en el trabajo con casos particulares como en el caso general.

Estudio 4: Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A (en revisión). Recognition of structures and generalization by second graders in direct and inverse forms of a linear function.

En el estudio 4 caracterizamos cómo los estudiantes generalizan las formas directa e inversa de una función.

Estudio 5: Torres, M. D., Brizuela, B. M., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022) Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics 10*, 56. https://doi.org/10.3390/ math10010056. (Q1, JCR).

En el estudio 5 describimos cómo los estudiantes organizan los valores de una función en una tabla. Hemos identificado implicaciones de los respectivos títulos de las columnas de una tabla (identificación de las variables) y cómo identificaron la regularidad entre las variables (la estructura).

Estudio 6: Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (en revisión). Pensamiento funcional de alumnos de 2º de primaria: estructuras y representaciones.

En el estudio 6 nos centramos en identificar las estructuras que evidencian los estudiantes durante las tareas de generalización y en describir las representaciones que usan para diferentes funciones implicadas.

Estos estudios se completan y contribuyen a profundizar en tres aspectos importantes dentro del pensamiento funcional: generalización (como proceso y como producto, estructuras (en la forma directa e inversa de una función) y representación.

Finalmente, en el capítulo 5 presentamos las conclusiones de la memoria. Conectamos las conclusiones obtenidas en los diferentes estudios expuestos anteriormente. Comenzamos con las conclusiones asociadas a los objetivos generales y específicos de esta memoria, así como describimos la manera en que la tesis responde a los proyectos de investigación en los que se desarrolla. Como aportes destacados, presentamos un modelo de proceso de generalización en función de cómo los casos particulares implicados influyen en el razonamiento de los alumnos hacia la generalización. Además, observamos una vinculación entre la estructura y el proceso de generalización. En general, los estudiantes evidenciaron la estructura correcta y la mantuvieron a lo largo del proceso de generalización. En cuanto a las estructuras identificadas en las formas directa e inversa de una función hemos obtenido que la cantidad de estructuras correctas identificadas es mayor durante el trabajo de los casos particulares que en el general, en ambas formas de las funciones. Con respecto a las representaciones, destacamos que en su mayoría los estudiantes ofrecen representaciones verbales y/o numéricas para expresar relaciones. Específicamente, en la representación tabular hemos visto cómo los niños desarrollaban comprensiones tanto de la representación (tabla) como de los objetos representados (estructuras).

Presentación

Esta memoria de investigación constituye la Tesis Doctoral de la autora, con el propósito de obtener el grado de Doctora en el Programa de Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada en el curso académico 2021/2022. Esta Tesis Doctoral está conformada en torno a seis artículos que se han desarrollado en el contexto de dos proyectos de investigación I+D, con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER). La recogida de datos para la elaboración de esta investigación se realizó como parte del primer proyecto para el que se ha contado con el apoyo de una beca de referencia BES-2017-080124, otorgada por el gobierno de España, que ha estado en vigor durante parte del segundo proyecto también.

El foco de la Tesis doctoral es la caracterización del pensamiento funcional de estudiantes[1] de educación primaria, en el contexto del álgebra escolar. Esta investigación inició en el curso académico 2017/2018 con el propósito general de explorar el pensamiento funcional de los estudiantes en edades tempranas cuando resuelven tareas de generalización que involucran funciones, como aproximación al pensamiento algebraico. La investigadora principal de los proyectos I+D mencionados, la doctora María C. Cañadas Santiago, es la directora de esta tesis.

Los datos que analizamos provienen de un experimento de enseñanza compuesto por cuatro sesiones con un grupo de clase completo de segundo de primaria (7-8 años); dos entrevistas individuales semiestructuradas realizadas con algunos estudiantes de ese grupo y una entrevista grupal semiestructurada. Analizamos las respuestas escritas de los

[1] En esta tesis utilizamos de manera inclusiva términos como “los estudiantes”, “los investigadores”, “los profesores” para aludir a hombres y mujeres. Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo nombrar conjuntamente a ambos sexos en el idioma español, salvo usando “o/a”, “los/las” y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

estudiantes a unos cuestionarios[2] que aplicamos en las sesiones. Posteriormente, seleccionamos a seis estudiantes para entrevistarlos. Analizamos sus respuestas escritas a todas las sesiones del experimento de enseñanza, y sus respuestas escritas y orales durante las entrevistas.

Contexto de la investigación

Esta tesis está desarrollada bajo la influencia de tres proyectos de investigación I+D (EDU2013-41632-P, EDU2016-75771-P y ID2020-113601GB-I00). El primer proyecto "El pensamiento funcional en alumnos de primaria como aproximación al pensamiento algebraico" (ref. EDU2013-41632- P), fue pionero por poner su foco de atención en el pensamiento funcional, como aproximación al pensamiento algebraico, en estudiantes de educación primaria en España. El proyecto de investigación "Pensamiento funcional en educación primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización" (ref. EDU2016-75771-P), bajo el que se ha desarrollado esta Tesis Doctoral y con el que la autora ha disfrutado de un contrato predoctoral (FPI) adscrito al mismo, surgió como continuidad del nombrado previamente. Los dos proyectos han abordado una propuesta de innovación curricular y línea de investigación conocida como "álgebra temprana" (Kaput, 1999). Han estado centrados en un tipo específico de pensamiento algebraico, el pensamiento funcional en educación primaria. Durante el trabajo de esta tesis ha surgido la necesidad de expandir el alcance a diferentes componentes del pensamiento funcional y ampliar la gama de estudio a los años de escolaridad desde los tres años para incluir el espectro completo de la educación preescolar y primaria en un nuevo proyecto de investigación (ref. PID2020-113601GB-I00).

Los objetivos generales del proyecto EDU2016-75771-P, en el que se enmarca específicamente esta tesis: (a) profundizar en la descripción del pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes de educación primaria en España y (b) desarrollar

---

[2] En esta tesis llamaremos cuestionarios a las hojas de trabajo que se les entregaron a los estudiantes durante las sesiones.

materiales, tareas y estrategias que favorezcan el desarrollo de pensamiento funcional y la superación de los obstáculos que lo limitan. Estos dos objetivos generales se desglosan en los siguientes objetivos específicos del proyecto (OP):

O. P1. Describir el pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes españoles de los diferentes cursos de educación primaria.

O. P2. Establecer comparaciones entre el pensamiento funcional de estudiantes españoles de distintos cursos de educación primaria.

O. P3. Establecer comparaciones entre el pensamiento funcional de estudiantes españoles de distintos centros educativos.

O. P4. Diseñar materiales didácticos y tareas útiles para la introducción y desarrollo del pensamiento funcional en educación primaria.

O. P5. Identificar dificultades que encuentran estudiantes españoles de educación primaria de diferentes niveles en el proceso de pensamiento funcional y formas para ayudarlos a superarlas.

Estos objetivos se pretenden abordar a través de los diferentes elementos que se mostrarán importantes como parte del constructo de lo que es el pensamiento funcional introducidos en el marco conceptual de esta Tesis Doctoral.

Compendio de artículos

La Tesis Doctoral desarrollada en esta memoria se presenta en la modalidad de agrupación de publicaciones. Cada una de las publicaciones cumple con los indicios de calidad requeridos por el Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Estos indicios tienen que ver con que las publicaciones estén en revistas científicas indexadas (Journal Citation Reports del Science Citation Index) que ocupen posiciones relevantes en la especialidad. A continuación, presentamos los seis artículos que forman parte de esta Tesis Doctoral, presentamos el título de cada uno con los autores respectivos y los indicios de calidad de cada una de las revistas en las que hemos publicado.

Estudio 1: Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematic*, *9*, 1109. https://doi.org/10.3390/math9101109.

Indicios de calidad

a) Índice de impacto 2.258 en JCR, Q1 (2020).

b) Revista indexada en Scopus. Índice 0,495 en SJR (2020).

Estudio 2: Torres, M. D., Moreno, A., Rodolfo, V. y Cañadas, M. C. (en revisión). An experience of transition from arithmetic generalization to algebraic generalization in the context of functional thinking.

Indicios de calidad

a) Factor de impacto JCR, Q1 (2020).

b) Revista indexada en Scopus. Índice 1.85 en SJR (2020).

Estudio 3: Torres, M. D., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Gómez, P. (2021). Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años *Uniciencia*. *35*(2). https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.16.

Indicios de calidad

a) Índice de impacto 0.17 en SJR 2020
b) La revista también se encuentra indexada en: Scielo Citation Index (Web of Science) (Claritive Analytics); SciELO Costa Rica (Scientific Electronic Library Online);REDALYC (Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal); LATINDEX, Catalogue (Sistema Regional de Información en línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal)

Estudio 4: Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (en revisión). Recognition of structures and generalization by second graders in direct and inverse forms of a linear function.

Indicios de calidad

a) Factor de impacto JCR, Q2 (2020).

Estudio 5: Torres, M. D., Brizuela, B., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. Mathematics. *Mathematics, 10,* 56. https://doi.org/10.3390/math10010056.

Indicios de calidad

a) Índice de impacto 2.258 en JCR, Q1 (2020).
b) Revista indexada en Scopus. Índice 0,495 en SJR (2020).

Estudio 6: Torres, M. D., Cañadas, M.C. y Moreno, A. (en revisión) Pensamiento funcional de alumnos de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA.*

Indicios de calidad

a) Índice de impacto en SJR (2020), Q3.

Estructura de la memoria

Esta memoria se estructura en cinco capítulos. En el primer capítulo exponemos el problema de investigación, describiendo el contexto en el cual se inserta el estudio, la motivación y justificación del mismo, la perspectiva conceptual que asumimos, así como los objetivos de investigación.

En el segundo capítulo presentamos el marco conceptual adoptado y los antecedentes. Exponemos la idea de álgebra y de pensamiento algebraico que asumimos para, posteriormente, describir las relaciones y conexiones entre los principales elementos del pensamiento funcional; generalización, estructuras y representación. Según el marco conceptual adoptado, exponemos diferentes investigaciones que cobran relevancia pues nos ayudan a situar nuestra investigación.

En el tercer capítulo presentamos el marco metodológico que rige nuestra investigación. En particular, justificamos y describimos los elementos que forman parte del diseño metodológico, presentamos y caracterizamos los estudiantes con los que trabajamos, el proceso de recogida de información, las categorías para el análisis de datos y los procedimientos para dicho análisis.

En el capítulo 4, exponemos los resultados. Este capítulo lo conforman los resultados correspondientes a seis estudios, los cuales están directamente relacionados con los objetivos generales de investigación de esta tesis doctoral. Los tres estudios publicados, se presentan en formato artículo y los otros en el formato que sigue esta memoria.

Los capítulos 5 y 6 recogen las conclusiones de esta memoria en español y en inglés, respectivamente, porque es parte de los requisitos para la obtención de la Mención Internacional del título de Doctor al que opta la candidata a doctora. En este capítulo señalamos las principales conclusiones obtenidas de la investigación, considerando los objetivos planteados y los seis estudios que dan lugar a los resultados. Asimismo, las conclusiones incorporan comparaciones con otras investigaciones, las contribuciones de esta memoria a la comunidad científica, implicaciones para la docencia, algunas limitaciones del trabajo y líneas abiertas.

Formación del investigador

Esta memoria de investigación recoge un trabajo desarrollado durante cinco años —un plazo mayor al previsto, como consecuencia principalmente de la COVID—. En este período participamos en actividades científicas específicas de nuestra disciplina. En concreto, participación en congresos y estancias, entre otras, donde hemos podido divulgar los resultados del trabajo en diferentes foros y elaborar informes de investigación. Las detallamos en la tabla 0-2 donde además relacionamos las presentaciones en los foros con los estudios que posteriormente realizamos y que constituyen los resultados de esta Tesis Doctoral.

Tabla 0-2.

Actividades científicas

Curso	*Actividad científica*	Estudios
2017/2018	*22º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática [SEIEM] (Gijón, España).* Torres M. D., Cañadas, M. C., Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de Primaria. En L. J. Rodríguez- Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 574-583). SEIEM.	1 y 3
2018/2019	*23º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática [SEIEM] (Valladolid, España).* Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). SEIEM.	3
	Estancia de Investigación Estancia pre-doctoral en la Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. (Del 1-31 de mayo de 2019).	2
	XV CIAEM-IACME, Medellín, Colombia, 2019. Torres, M. D., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Gómez, P. (2019). Estructuras y generalización de estudiantes de segundo de primaria. *XV Comité Interamericano de Educación Matemática*. CIAEM	2

	Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Torres M. D., Cañadas M. C. y Moreno, A (2019). Structures identified by second graders in a teaching experiment in a functional approach to early algebra. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Utrecht, Netherlands. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416477/document	4
	RELME 33, Reunión Latinoamericana de Matemática, La Habana, Cuba, 2019. Torres M. D., Cañadas M. C. y Moreno, A (2019). Estructuras de estudiantes de 2º de primaria antes y después de un experimento de enseñanza. Contexto de investigación sobre pensamiento funcional. *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* RELME.	4
2019/2020 (Pandemia COVID-19)	Libro de actas del Congreso CUICIID (online) 2020. ISBN 978-84-09-22948-2. Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2020). Estructuras evidenciadas por estudiantes de segundo de primaria en las formas directa e inversa de una función. *Congreso universitario internacional sobre comunicación, innovación, investigación y docencia.* (online). CUICIID.	2
2020/2021	Torres, M. D., Brizuela B., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Primeras experiencias con una tabla en segundo de Educación Primaria. Aproximación funcional al pensamiento algebraico. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 603 – 611). SEIEM.	5
Curso 2021/2022	Estancia internacional de investigación para la mención internacional del doctorado. Estancia pre-doctoral en la Universidad de Tufts, Medford, Boston, Massachusett, USA. (Del 1 de febrero hasta el 30 de abril).	Avance en futuros trabajos y escritura de la memoria.

Capítulo 1. Planteamiento del problema de investigación

La mayoría estaría de acuerdo en que el pensamiento algebraico surgió mucho antes de la llegada de la notación algebraica moderna. Boyer (1968) desglosa la historia del álgebra en tres etapas: la retórica, la sinóptica y la simbólica. En la etapa retórica de la antigua Grecia, los enunciados y argumentos se expresaban verbalmente, acompañados ocasionalmente de diagramas. Los matemáticos griegos anteriores a Diofanto resolvían problemas de álgebra y pensaban y razonaban de forma algebraica sin notación algebraica. Es útil tener esto en cuenta al intentar definir las condiciones mínimas para el pensamiento algebraico (Carraher y Scliemann, 2018).

Este capítulo contiene el planteamiento general del problema de investigación, que se aborda en esta Tesis Doctoral. En los primeros apartados exponemos los argumentos que sustentan esta investigación, describiendo la motivación personal y la motivación y justificación del estudio, argumentando su pertinencia desde la investigación, el currículo y la docencia. En el segundo apartado se enuncian los objetivos de esta tesis y las preguntas de investigación que se afrontan.

1.1. Justificación personal

En el curso 2015/2016 decidí realizar el máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria en la Universidad de Granada, con el propósito de cursar unas oposiciones para ser docente de educación secundaria. Entonces, el profesor Luis Rico Romero impartía la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Sus sesiones abrieron un panorama nuevo para mí. Una visión detallista, minuciosa y cuidada del contenido matemático desde la didáctica consiguió cautivarme. Muchas son las inquietudes que esta asignatura me planteó, por lo que decidí realizar el Máster en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. La primera aproximación al problema de investigación que se presenta en esta memoria tuvo lugar en la asignatura que impartía la directora de esta Tesis doctoral, María C. Cañadas en el curso de

Pensamiento Numérico y Algebraico, durante el año 2016/2017, en el marco del citado Máster de la Universidad de Granada. Con esta asignatura empecé a interesarme por el papel del álgebra en los cursos elementales. Descubrí los diferentes enfoques del álgebra escolar y conocí que el acercarse al pensamiento algebraico desde varias vías había sido objeto relevante de estudio en la literatura precedente. De esta manera, y gracias a la beca que he podido disfrutar (BES-2017-080124) asociada al citado proyecto (EDU2016-75771-P), me involucré en el estudio del pensamiento funcional como aproximación al pensamiento algebraico, afianzando características de ese pensamiento que pudieran resultar de utilidad en el aprendizaje del álgebra por parte de los niños de educación primaria y entendiendo su potencial desde los primeros cursos.

1.2. Justificación desde la Investigación

La literatura previa ha venido arrojando hallazgos que sugieren que los niños en edades tempranas pueden pensar de maneras bastante más sofisticadas de lo que se creía sobre las relaciones funcionales (Brizuela et al., 2015). Los estudiantes logran identificar y expresar relaciones entre variables, razonar sobre funciones e incluso generalizar. Este hecho se observa además desde la educación infantil (e.g., Castro et al., 2017). Sin embargo, la literatura ha advertido de que los alumnos encuentran dificultades en el aprendizaje de las funciones en educación secundaria debido a que el estudio de la dependencia entre variables se plantea en un momento determinado de la ESO, y requiere la introducción de lenguajes y formas de simbolización nuevas, desconocidos hasta entonces por los alumnos (Deulofeu, 2001). Entre algunas de las dificultades que han encontrado los estudiantes destacamos: (a) la necesidad de buscar respuestas específicas porque no pueden utilizar símbolos matemáticos para expresar relaciones entre cantidades (Brizuela y Blanton, 2014); (b) la no comprensión del uso de las letras como números generalizados o variables. (Brizuela y Martinez, 2012; Schliemann et al., 2011); (c) la dificultad para razonar y falta de pensamiento abstracto; y (d) la dificultad para cambiar la representación del lenguaje verbal al simbolismo algebraico y viceversa (Castro et al., 2022; Molina et al., 2017).

Desde las últimas décadas, las investigaciones parecen estar de acuerdo en que el álgebra escolar no es un tema aislado de los otros contenidos matemáticos, ni se trata solo del empleo de símbolos alfanuméricos, sino de formas de pensar (Kaput, 2008; Kieran, 2011). Además, las investigaciones sobre el álgebra escolar y, en particular, el álgebra en educación primaria, se han centrado en la exploración del potencial del pensamiento algebraico de los estudiantes más que en sus limitaciones (Molina, 2009).

Actualmente en la investigación sobre el álgebra en la educación primaria hay un consenso sobre por qué es necesario introducir el álgebra desde los primeros niveles educativos. Sin embargo, el debate sobre qué, cuándo y cómo introducir el álgebra siguen siendo puntos de discusión (Freiman y Fellus, 2021).

Uno de los enfoques que se propone para promover el desarrollo del pensamiento algebraico es el funcional (Carraher y Schliemann, 2007; Kieran et al., 2016), el cual se centra en el estudio de las funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real (Cañadas y Molina, 2016). Por medio de la expresión pensamiento funcional se hace referencia a la generalización de las relaciones entre cantidades que varían en forma conjunta, la expresión de estas relaciones y el uso de dichas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton et al., 2011; Blanton y Kaput, 2011). Variedad de antecedentes evidencian que cuando los estudiantes tienen la oportunidad de debatir tareas que involucran una relación funcional desarrollan el sentido de variabilidad (Blanton et al., 2015; Cañadas et al., 2016) y que el desarrollo del pensamiento funcional contribuye a la construcción de una sólida base de aprendizajes para estudios posteriores del álgebra (Blanton y Kaput, 2011). Es en este enfoque funcional del álgebra escolar en el que se sitúa esta investigación para estudiar las estructuras, representaciones y generalización de relaciones entre cantidades covariables que evidencian los estudiantes de primaria.

1.3. Justificación desde el Currículum

El currículo escolar de algunos países como Australia, Canadá, Chile, China, Japón, Corea, Singapur, Reino Unido o Portugal entre otros, contienen contenidos explícitos sobre el álgebra en edades tempranas (Pincheira y Alsina, 2021; Pinto, 2019). Algunos de los aspectos que comparten los distintos currículos son: (a) la introducción del pensamiento algebraico a temprana edad; (b) la incorporación del pensamiento algebraico sin introducir nuevos contenidos, más bien potenciando los existentes desde el enfoque algebraico; (c) el fomento de la búsqueda de regularidades, y (d) la interpretación de la aritmética en términos generales (Pinto, 2019).

Estados Unidos fue uno de los primeros países en incluir ideas de pensamiento algebraico en sus orientaciones curriculares para primaria (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Más tarde, este país elabora una propuesta curricular nacional conocida como los *Common Core State Standards* (National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers [NGA Center y CCSSO], 2010). En lo que respecta al álgebra, el pensamiento algebraico se concibe como un elemento central, comenzando desde los cursos previos a primaria y puede ser una herramienta útil para representar conceptos, resolver problemas, fomentar las argumentaciones matemáticas y construir del conocimiento de los estudiantes, mediante el uso de principios algebraico y el lenguaje.

En España, país donde se desarrolla esta tesis, según lo señalado en el reciente Real Decreto 157/2022, aparece el sentido algebraico englobando los saberes relacionados con el reconocimiento de patrones y las relaciones entre variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022, p. 24.486). Entre los saberes básicos para los estudiantes de primaria destacamos para las nociones algebraicas las dos siguientes (p. 24.493):

- Patrones: estrategias para la identificación, descripción oral, descubrimiento de elementos ocultos y extensión de secuencias a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes.
- Relaciones y funciones: obtención de datos sencillos desconocidos (representados por medio de un símbolo) en cualquiera de los dos elementos.

La incorporación del álgebra en los primeros cursos y, en particular, el énfasis en los contextos funcionales con la representación simbólica, donde el enfoque funcional al álgebra escolar cobra sentido, no había tenido cabida en los diseños curriculares anteriores. De este modo el currículo enfatiza la percepción de patrones, estructuras y regularidades, así como la observación e identificación de características, relaciones y propiedades de objetos que permiten formular conjeturas o afirmaciones tanto en contextos cotidianos como en situaciones matemáticas, desarrollando ideas, explorando fenómenos, argumentando conclusiones y generando nuevos conocimientos.

Por tanto, en la actualidad adquiere relevancia aportar resultados que den cuenta de la posibilidad de promover el pensamiento funcional en los estudiantes de los primeros cursos, así como diseñar propuestas que permitan abordarlo en las aulas de educación primaria.

Como menciona Ayala-Altamirano (2021), considerando que diversas directrices curriculares incluyen el álgebra desde los primeros cursos, es relevante dar información sobre el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de educación primaria y sobre los primeros significados y reacciones de los estudiantes al relacionarse con diversos elementos algebraicos (Merino et al., 2013; Molina et al., 2018). En particular, en esta tesis el foco está en describir y analizar el proceso de generalización que llevan a cabo los estudiantes de segundo de educación primaria cuando resuelven problemas de generalización que involucran funciones lineales, atendiendo a las estructuras que evidencian y a las representaciones con las que se expresan.

1.4. Justificación desde la Docencia

Nuestra labor de investigación en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debe precipitar en la sociedad para que sea útil. Asimismo, y como consecuencia de que el álgebra se haya incorporado desde temprana edad en distintos currículos escolares, es importante dar información relevante a los docentes sobre lo que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que fomentan el pensamiento algebraico (Ayala-Altamirano, 2021). Parte central de la actividad de diseño e implementación que un profesor debe realizar consiste en identificar el significado de cada concepto y estructura que forme parte del contenido de la matemática escolar. Además, debe promover los sentidos o modos de uso con lo que se trabajan y aplican dichos conceptos (Rico, 2015). Es importante que los maestros actúen atendiendo a lo que los estudiantes hacen y dicen, que se sensibilicen con sus experiencias (Mason, 2017).

En esta tesis hay experiencias de enseñanza y aprendizaje que pueden ser referentes para dar la oportunidad a los estudiantes de participar en situaciones de aprendizaje variadas que les permitan generar significados. Se busca proporcionar datos empíricos para desarrollar el pensamiento algebraico y, en particular, el pensamiento funcional. Describimos en detalle estas experiencias, que no incorporan nuevos contenidos, sino que trabajan el potencial de concepto de función, a través de problemas contextualizados. En esta propuesta, el objetivo es mostrar ejemplos de cómo se pueden adaptar tareas con preguntas que invitan a analizar una serie de casos particulares y luego generalizar a partir de ellos (Molina et al., 2018). Además, al describir las tareas se espera proporcionar información útil que ayude a los docentes a construir y proponer tareas en las que sus estudiantes tengan oportunidad de desarrollar su pensamiento algebraico.

1.5. Preguntas y objetivos de investigación

La idea de incorporar el pensamiento algebraico en los primeros cursos es un tema relativamente reciente, como hemos visto. Todavía faltan elementos que ayuden a implementar el álgebra en la educación primaria. Nos centramos en la generalización ya que es una forma de abordar el trabajo de los estudiantes con ideas algebraicas. La generalización permite enriquecer las matemáticas de los estudiantes, ya que se atiende a las relaciones y estructuras que subyacen en diferentes problemas (Pinto, 2019). Específicamente, adoptamos un enfoque funcional al álgebra escolar para describir la generalización de los estudiantes, en el cual estos deben atender a cómo varían simultáneamente dos cantidades. Nos preguntamos ¿cómo generalizan los estudiantes de segundo de primaria cuando resuelven problemas que involucran funciones lineales? Estudios previos muestran cómo estudiantes de educación primaria generalizan y expresan las relaciones funcionales involucradas en problemas. ¿Cómo identifican la estructura (regularidad) de la relación implicada en diferentes tipos de preguntas, las cuales pueden incluir casos particulares o casos generales? ¿Cómo representan la estructura evidenciada?

Por lo anterior el objetivo general de esta tesis doctoral es:

Profundizar en la descripción del pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes de segundo de educación primaria.

Este objetivo más amplio se concreta con los siguientes objetivos específicos:

O. E1. Describir el proceso de generalización evidenciado por los estudiantes.

O. E2. Describir las estructuras que generalizan los estudiantes.

O. E3. Caracterizar los tipos de generalización expresados por los estudiantes.

O. E4. Identificar y describir las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directa e inversa de una función.

O. E5. Analizar las representaciones que usan los estudiantes para evidenciar las estructuras.

En la tabla 1-1 presentamos la vinculación entre cada uno de los estudios que componen esta memoria y los objetivos de la tesis doctoral.

Tabla 1-1.

Relación entre los objetivos y los estudios de la Tesis Doctoral

	Estudio	Revista	Objetivos	Relación objetivos tesis
1	Generalization Process by Second Grade Students	Mathematics	1. Describir el proceso de generalización desplegado por los estudiantes. 2. Identificar y describir las estructuras reconocidas por los estudiantes en su evolución hacia la generalización. 3. Caracterizar los tipos de generalización expresados por los estudiantes.	O. E1. Describir el proceso de generalización evidenciado por los estudiantes. O. E2 Describir las estructuras que generalizan los estudiantes O. E3. Caracterizar los tipos de generalización expresados por los estudiantes.
2	An experience of transition from arithmetic generalization to algebraic generalization in the context of functional thinking.	En revisión	1. Identificar y describir el proceso de generalización de un estudiante de segundo curso caracterizando las generalizaciones producidas.	O. E1. Describir el proceso de generalización desplegado por los estudiantes. O. E3. Caracterizar los tipos de generalización expresados por los estudiantes.
3	Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años	Uniciencia	1. Identificar y comparar las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directa	O. E4. Identificar y describir las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directa e inversa de una función.

			e inversa de una función, tanto en el trabajo con casos particulares como en el caso general.	
4	Recognition of structures and generalization by second graders in direct and inverse forms of a linear function	En revisión	1.Describir cómo los estudiantes identifican las estructuras en las variables involucradas. 2. Caracterizar cómo generalizan las formas directa e inversa de la función utilizada.	O. E4. Identificar y describir las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directa e inversa de una función.
5	Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context	Mathematics	1. Describir cómo organizan los valores en una tabla. 2. Identificar las implicaciones de los encabezados de las tablas (identificación de las variables) y cómo identificaron las regularidades existentes (la estructura).	O. E5. Analizar las representaciones que usan los estudiantes para evidenciar las estructuras
6	Pensamiento funcional de alumnos de 2º de primaria: estructuras y representaciones	En revisión	1. Identificar las estructuras que evidencian los estudiantes durante las tareas de generalización 2. Describir las representaciones que usan los estudiantes.	O. E2. Describir las estructuras que generalizan los estudiantes O. E5. Analizar las representaciones que usan los estudiantes para evidenciar las estructuras

Capítulo 2. Marco conceptual y antecedentes

En este capítulo describimos los aspectos conceptuales que se relacionan con nuestra investigación. Abarcamos los elementos más generales hasta llegar a aquellos que están directamente relacionados con los objetivos propuestos. Iniciamos el capítulo presentando el marco del pensamiento algebraico adoptado para describir la posición desde donde consideramos la generalización y su relación estrecha con la estructura y la representación, así como la idea del pensamiento funcional como una aproximación al pensamiento algebraico. Luego describimos los principales elementos relacionados al pensamiento funcional, con la intención de clarificar lo que entendemos y asumimos por cada uno de ellos.

2.1. La naturaleza del pensamiento algebraico

El álgebra es el lenguaje en el que se expresa la generalidad y la generalidad es el alma de las matemáticas. Para aprender el lenguaje del álgebra, es necesario tener algo que quieras decir. Hay que percibir algún patrón o regularidad, y luego tratar de expresarlo de forma sucinta para poder comunicar tu percepción a otra persona, y utilizarla para responder a preguntas concretas. (Mason et al, 1985, p. 8).

El álgebra es una rama de las matemáticas, así como una forma de pensar (Gowers et al., 2008), es el lenguaje para la expresión y manipulación de la generalidad, que es una actividad innata y natural en los niños. Las habilidades para expresar y manipular la generalidad se manifiestan de diversas formas y son relativas, pues dependen de cada sujeto (Mason, 1996). El álgebra escolar ha sido asumida durante mucho tiempo en forma restrictiva como lenguaje simbólico, apareciendo de manera abrupta en la educación secundaria para el estudio de los polinomios y la resolución de ecuaciones e inecuaciones. Cada vez, la investigación provee más argumentos para que haya una introducción progresiva al álgebra, desde los primeros cursos, generando pensamiento algebraico desde los inicios de la escolarización.

“Para caracterizar de forma significativa el pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, sino que se debe ser capaz también de expresarlo algebraicamente*”* (Kieran, 1989, p. 165). Estas líneas dieron lugar a profundizar en la investigación a nivel internacional sobre la naturaleza del pensamiento algebraico en la escuela. Atendiendo a la expresión algebraica de lo que es general, English y Warren (1998) señalaban y problematizaban sobre el desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica. La idea de integrar el pensamiento algebraico en las matemáticas escolares estaba cobrando interés dadas las investigaciones que surgían desde que Kaput presentara su texto en un encuentro organizado por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) y otros organismos estadounidenses, donde defendió una reforma del álgebra en la que había que integrar el razonamiento algebraico en todos los grados y en todos los temas, “algebraizar” las matemáticas escolares (Kaput, 1998).

En un trabajo posterior, Kieran precisó que el pensamiento algebraico en las primeras etapas escolares debería incluir el desarrollo de formas de pensar; la relación entre cantidades, la identificación de estructuras y la generalización, entre otras (Kieran, 2004). Surgió así la corriente *early algebra* como una propuesta de cambio curricular, enfatizando la idea de algebrización (Kaput, 2000).

La cuestión de si el pensamiento algebraico debe incluir o no símbolos alfanuméricos se ha investigado durante las décadas pasadas. Actualmente, la mayoría de los investigadores parecen estar de acuerdo en que el pensamiento algebraico “no tiene que ver con símbolos literales, sino con formas de pensar” (Kieran, 2011, p. 591). Analizar las relaciones entre cantidades, notar la estructura entre cantidades, estudiar los cambios, generalizar a partir de estímulos específicos, resolver problemas, modelar, predecir, justificar y demostrar (Kieran, 2004).

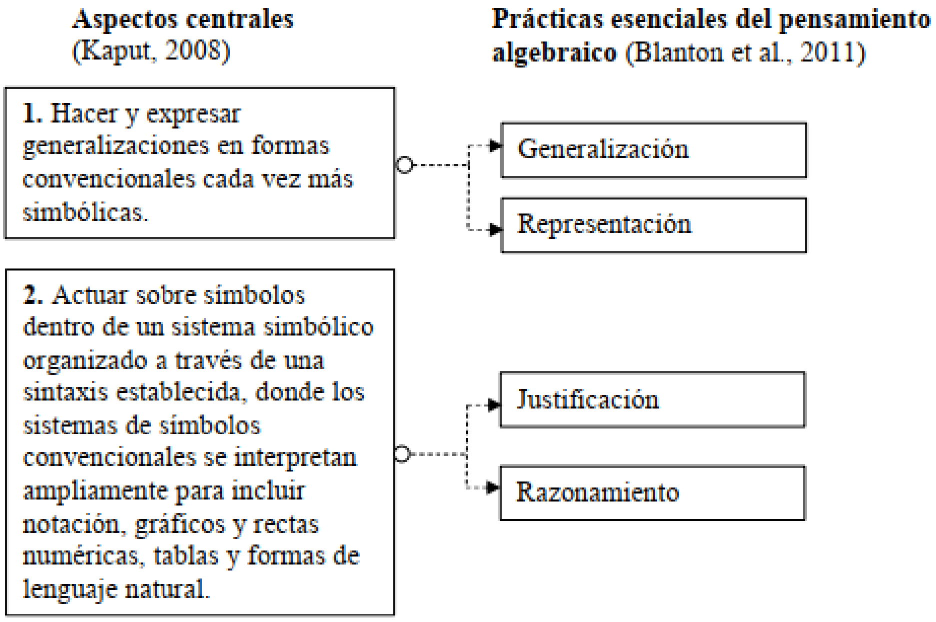
Todo esto sugiere un cambio en la visión tradicional del álgebra, caracterizada a través de contenidos específicos, a una visión de pensamiento algebraico como un proceso y formas de razonamiento (Pitta-Pantazi, et al., 2020). A pesar de los considerables avances que la investigación ha ofrecido respecto a la naturaleza del pensamiento algebraico, sigue siendo necesario definir coherentemente el contenido algebraico que sea cognitivamente apropiado en los diferentes niveles de educación y también apoyar un desarrollo longitudinal del pensamiento algebraico.

Abordamos como marco conceptual los aspectos centrales del *early algebra*, que para Kaput (2008), recaen sobre: (a) la generalización, (b) representación, (c) justificación y (d) razonamiento con estructuras matemáticas y relaciones, entendidas como prácticas esenciales que definen su concepción del álgebra (Blanton, et al. 2011).

Kaput (2008) indica que “el corazón del pensamiento algebraico está compuesto de un proceso de simbolización complejo que tiene como propósito la generalización y el razonamiento con dichas generalizaciones” (p. 9). Para este autor, el pensamiento algebraico está compuesto por dos aspectos centrales: (a) hacer y expresar generalizaciones en formas convencionales cada vez más simbólicas (resalta el álgebra como un artefacto cultural) y (b) actuar sobre símbolos dentro de un sistema simbólico organizado a través de una sintaxis establecida, donde los sistemas de símbolos convencionales se interpretan ampliamente para incluir notación, gráficos y rectas numéricas, tablas y formas de lenguaje natural (resalta una perspectiva de acción). En la figura 2-1 exponemos los aspectos centrales del pensamiento algebraico y sus prácticas.

Figura 2-1.

Aspectos centrales del pensamiento algebraico y sus prácticas (Fuente: Pinto, 2009, p. 71).



En esta tesis abordamos la generalización, la representación y las estructuras matemáticas observando las relaciones que ponen de manifiesto los estudiantes de segundo de educación primaria.

Con la finalidad de incorporar el estudio del álgebra en educación primaria, Kaput (1998) ofreció un marco teórico integrado para analizar las habilidades de pensamiento algebraico de los estudiantes desde distintas vertientes. Las resumimos en tres áreas centrales según Blanton et al. (2015):

Aritmética generalizada, que incluye la generalización de las operaciones aritméticas y sus propiedades, y la observación de la estructura de las relaciones aritméticas en lugar de los resultados de los cálculos. La aritmética generalizada implica observar regularidades en las operaciones, las estrategias de cálculo y las clases de números. Por ejemplo, relaciones en las operaciones con números pares e impares (Blanton, et al., 2018, pp. 32-33),

Equivalencias, expresiones, ecuaciones e inecuaciones. Estas incluyen una comprensión relacional del signo igual, así como la generalización, representación y razonamiento con expresiones, ecuaciones, e inecuaciones, incluyendo formas simbólicas y favorece que los estudiantes vean las expresiones como objetos en vez de ver estas como una serie de cálculos aislados y

Pensamiento funcional, centrado en la relación entre cantidades que covarían (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008) y es la aproximación al álgebra escolar que asumimos en este estudio y que describiremos con mayor detalle a continuación.

2.2. Pensamiento funcional

Como hemos presentado previamente, el pensamiento funcional es una aproximación al pensamiento algebraico desde la propuesta *early algebra*. El pensamiento funcional proporciona un contexto para desarrollar formas de pensar algebraicamente dentro de las actividades de patrones, creando oportunidades para que los estudiantes estudien el cambio, analizar las relaciones, notar la estructura, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, demostrar y predecir (Kieran 2004). Dentro de este contenido matemático, el concepto de covariación y su noción relacionada de cambio son centrales (Kieran, 2016). El pensamiento funcional refiere a situaciones en las que se busca la manera de expresar una variación conjunta y sistemática de las instancias (Kaput, 2008).

Smith (2008) indica que el pensamiento funcional esta "focalizado en la relación entre dos (o más) variables; específicamente en los tipos de pensamientos que van desde relaciones específicas a generalizaciones de relaciones" (p. 143). Blanton y Kaput (2011) señalan que el pensamiento funcional involucra la "construcción y generalización de patrones y relaciones, usando una diversidad de representaciones y tratando las relaciones generalizadas, o funciones, como el resultado de objetos matemáticos útiles" (p. 6-7). El trabajo con funciones depende de y aporta comprensión sobre las variables, la manipulación de fórmulas y la relación entre diferentes representaciones. Las tablas, los gráficos y el simbolismo algebraico son sistemas de representación clave para este contenido matemático (Doorman y Drijvers, 2011).

En el pensamiento funcional es fundamental el estudio de regularidades y, en particular, su generalización (Blanton, 2008, p. 30). De manera general, la regularidad es lo que se repite. Cuando se observa una regularidad se busca una que sea válida para más casos particulares y, finalmente, para cualquier caso perteneciente a una situación dada (Pólya, 1966). También es parte importante del pensamiento funcional la expresión de estas regularidades utilizando diferentes representaciones y el uso de esas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton et al, 2011). Por lo tanto, asumimos que el pensamiento funcional implica relaciones funcionales, que pueden ser generalizadas o no, y pueden expresarse a través de diferentes tipos de representaciones (Pinto et al., 2021).

Tal como lo señalan Carraher y Schliemann, (2015), el pensamiento funcional permite integrar el álgebra en el currículo matemático pues las operaciones aritméticas son un ejemplo de funciones. Las funciones ponen de manifiesto el dominio y codominio, lo que permite ampliar ámbitos numéricos y admiten múltiples representaciones. Aunque la función no es un contenido matemático que se encuentra en los currículos de los primeros cursos, diferentes autores (e.g., Cañadas y Molina, 2016; Carraher y Schliemann, 2007) resaltan que este concepto es un contexto para este tipo de pensamiento.

En nuestra forma de abordar el pensamiento funcional no tratamos de introducir las funciones en niveles educativos previos a la educación, sino que lo que pretendemos es aprovechar el potencial de este contenido matemático para promover capacidades en los niños que les sean útiles para el razonamiento en general y el matemático en particular, tanto en el nivel educativo en el que se encuentran como en los sucesivos (Cañadas, 2016, p. 8). A continuación, exponemos el concepto de función y la forma en la que abordamos este concepto en los estudios que hemos realizado.

2.2.1. La función lineal

La función es el elemento matemático central del pensamiento funcional (Carraher y Schliemann, 2007). Una función establece una regla de correspondencia entre dos conjuntos no vacíos que asigna a cada elemento del primer conjunto (el dominio) exactamente un elemento del segundo conjunto (codominio) (Vinner y Dreyfus, 1989, p. 357). También se puede definir como relaciones en las que el valor de cada variable independiente coincide con un valor único de la variable dependiente (Larson y Hostetler

2008). Los valores de la variable independiente pertenecen al dominio, mientras que los de la variable dependiente pertenecen al conjunto de llegada o codominio.

En este contexto funcional, las operaciones básicas pueden tratarse como funciones, debido a las relaciones entre cantidades que pueden producirse, la introducción de las relaciones entre variables puede mitigar las dificultades que los estudiantes pueden tener al trabajar con el concepto de función durante la educación secundaria, fomentar la capacidad de generalizar, representar y razonar con relaciones matemáticas, así como actuar de herramienta útil en la resolución de problemas (Carraher y Schliemann, 2007; Morales et al., 2018; Pinto, 2019).

El foco de nuestra investigación son las funciones lineales de la forma $y = mx+ n$, donde m, x y n son números naturales. Este tipo de funciones involucran estructuras multiplicativas y aditivas. En esta investigación una función lineal obedece a una relación de covariación entre dos cantidades que varían de forma conjunta. Este tipo de funciones son el foco de nuestra investigación, por ser aquellas que se consideran adecuadas a la edad de los estudiantes con los cuales trabajamos y permiten abordar el concepto de función como una variación de cambio en contextos cercanos a los estudiantes (Carraher y Schliemann, 2015).

Las funciones las presentamos a través de tareas contextualizadas. En la figura 2-2 presentamos un ejemplo de un problema que analizamos en este estudio.

Figura 2-2.

Ejemplo de problema que involucra un tipo de función lineal.

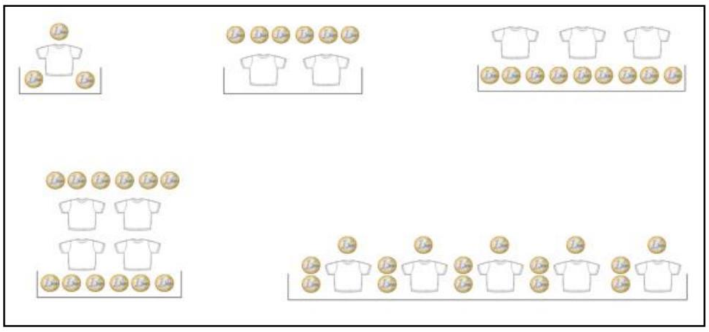
$\boldsymbol{y = mx+n}$
El problema del parque de atracciones $\boldsymbol{y =1+2x}$ A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje en una atracción vale 2 euros.

2.2.2. Formas directa e inversa de una función lineal

En el contexto del pensamiento funcional, la variable dependiente e independiente se puede elegir arbitrariamente porque esta relación dependiente se deriva de cómo presentamos la tarea (Blanton et al., 2011) y los requerimientos de estas. Por ejemplo, en la siguiente figura 2-3, observamos una relación entre las variables: número de camisetas y número de euros.

Figura 2-3.

Problema de las camisetas



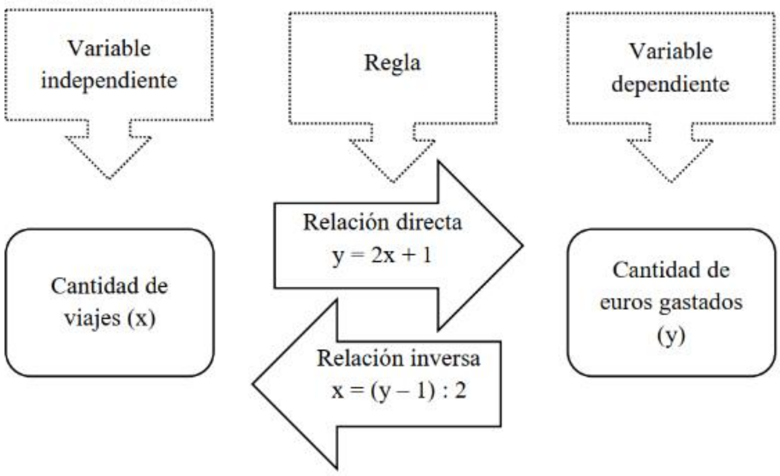
Consideramos que hay dos formas de enunciar esa relación: (a) El precio de una camiseta es de 3€. Así, si se compran 4 camisetas se han de pagar 12€, y si se compran 7 camisetas la cantidad total a pagar asciende a 21€ y (b) Un gasto de 3€ significa la compra de una camiseta, de forma que si se gastan 12€ se han comprado 4 camisetas, y que si la inversión es de 21€ la cantidad de camisetas compradas es 7. Aparentemente la primera forma de enunciar la relación funcional invita a transcribirla algebraicamente mediante la función $y=3x$, considerando como variable independiente y, denotando por x el número de camisetas. Usaremos la expresión forma directa para referirnos a esta manera de tratar la relación. La segunda parece emplazar a hacerlo a través de la función $y=x/3$, considerando como variable independiente y, denotando por x el número de euros. Esta será lo que llamaremos forma inversa.

Desde el punto de vista matemático, la función inversa dada una función f, si f: $X \rightarrow Y$, es una función real biyectiva, la función inversa de f, denotada por f^{-1}, es la función con dominio Y e imagen X definida por la siguiente regla: f(x)=y, si y sólo si, $f^{-1}(y)=x$. La función f^{-1}, al igual que f, es una aplicación biyectiva, que queda determinada de modo único por f y que cumple: (a) f^{-1} compuesta con f es igual a la función identidad en X, (b) f compuesta con f^{-1} es igual a la función identidad en Y. Las propiedades (a) y (b) caracterizan a la función inversa. (López, 2019).

Cómo hemos mencionado, las formas directa e inversa de una función están relacionadas con los roles desempeñados por cada variable involucrada. La variable independiente en la forma directa de la función es la variable dependiente en la forma inversa, y viceversa. Por ejemplo, uno de los problemas trabajados con los estudiantes, el parque de atracciones (figura 2-1), consideramos la cantidad de viajes como la variable independiente (x) y la cantidad de euros como la variable dependiente (y). La relación directa se aplicará para responder a cuántos euros habrá que pagar en total cada vez que entras al parque y te montas en varias atracciones. La relación inversa permitirá conocer la cantidad de viajes realizados. En la figura 2-4 aparecen la relación entre los elementos de una función.

Figura 2-4.

Elementos de una función (Ayala-Altamirano, 2021, p. 40).



La mayoría de las investigaciones sobre el pensamiento funcional se limitan a la forma directa de las funciones (Blanton et al., 2005). Sin embargo, los estudios sobre la forma inversa se han llevado a cabo principalmente con estudiantes de secundaria o universitarios de primeros cursos (Ellis, 2011; Paoletti et al., 2018). Paoletti (2020) sostiene que los estudiantes de secundaria y universitarios, así como los profesores en formación y en prácticas, no construyen significados productivos a partir de las funciones inversas.

Callejo et al. (2016) identifican características del pensamiento algebraico de estudiantes de primaria, en el contexto de patrones que involucran funciones lineales. Los investigadores aplicaron una hoja de trabajo a 264 estudiantes de 1º a 6º curso de primaria, el cual contenía preguntas que involucra la generalización (cercana y lejana, en términos de Stacey, 1989) de la forma directa de la relación, así como algunas cuestiones que involucraba la forma inversa de la función y su generalización. Las preguntas que involucran la forma inversa fueron consideradas solo para los estudiantes de 6º de primaria, quienes emplearon principalmente la representación gráfica para resolver problemas que involucran este tipo de relación.

Por su parte, Pinto y Cañadas (2018) analizan cómo un grupo de 24 estudiantes de quinto de primaria (10 a 11 años) percibió la función inversa al abordar una versión del clásico problema de las baldosas (función involucrada $y=2x+6$). Entre sus principales resultados, los investigadores destacan que diez de los 24 estudiantes establecieron estructuras involucrando a la función inversa de la función en cuestión, y cinco formularon el criterio de la función. En contraste, un total de 14 estudiantes no dio indicios de detección de estructuras. Se detectaron estructuras en las 10 respuestas restantes a las preguntas para ambas funciones, directa e inversa, del problema. En sus respuestas a una de las cuestiones basada en la función directa, los 10 estudiantes generalizaron la función. Las tres estructuras identificadas fueron: $2x+6$ (la más frecuente), $2x+3+3$, y $2x+2$. Cinco de estos 10 estudiantes generalizaron la estructura de la función inversa cuando se les preguntó por casos particulares. En general, los estudiantes especificaron cuatro estructuras en sus respuestas: $(x6)/2$; $(x/2)-3-3$; $(x/2)-6$ y $(x/2)-2$.

2.2.3. Estructura

Blanton y Kaput (2004) presentan una definición de pensamiento algebraico como “un hábito mental que impregna todas las matemáticas y que implica la capacidad de los estudiantes para construir, justificar y expresar conjeturas sobre la estructura y las relaciones matemáticas" (p. 142). Molina y Cañadas (2018) y Kieran (2018) muestran que la noción de estructura está presente en diferentes concepciones del álgebra escolar. La relación entre la variable independiente y la dependiente puede ser descrita en términos de su estructura.

En el contexto del álgebra en general, y del pensamiento funcional en particular, la idea de estructura tiene diferentes significados (Kieran, 2018; Molina y Cañadas, 2018). Kieran, 1989, la expone como "un sistema compuesto por un conjunto de números/variables, alguna(s) operación(es), y las propiedades de dichas operaciones (…) es la organización de partes de un todo; la totalidad de los elementos de una entidad en su relación con otros" (pp. 33-34). Molina (2010), aborda la estructura como el "conjunto de términos que componen la expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes elementos y las relaciones que existen entre ellos" (p. 9). Otros autores la definen como "una identificación de propiedades generales que se instancian en situaciones particulares como relaciones entre elementos" (Mason, et al, 2009, p. 10), o también como una forma de ver un objeto o expresión de manera que se vea como una combinación de partes reconocibles junto con patrones reconocibles que conectan esas partes entre sí" (Hewitt, 2019, p. 2).

En relación a estas definiciones, entendemos aquí por estructura la organización y expresión de la regularidad entre las variables (Pinto y Cañadas, 2017). La estructura también refiere a cómo se operan los valores indeterminados o valores numéricos cuando se usa o representa la regularidad (Ureña, 2021). Por tanto, la noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que se expresa la generalización (Pinto y Cañadas, 2017).

En nuestro trabajo estamos interesados en identificar y describir las estructuras subyacentes en las respuestas de los estudiantes para describir cómo estos organizan las regularidades en problemas que involucran funciones lineales. La noción de estructura nos permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, generalizan dicha regularidad (Strother, 2011; Torres et al., 2021; Warren et al., 2013).

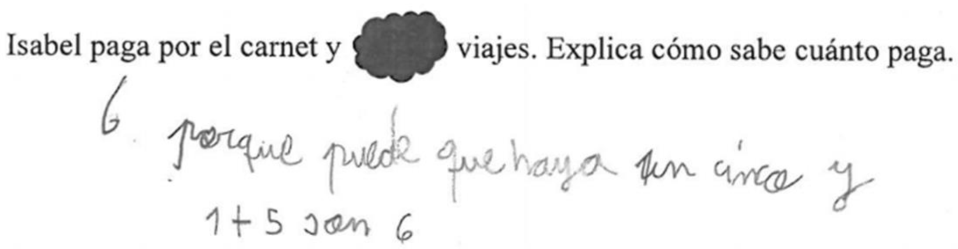
En este contexto, generalizar consiste en establecer la estructura general existente entre cantidades que covarían.

Por ejemplo, para ilustrar cómo asumimos la idea de estructura en este trabajo consideremos el problema del parque de atracciones de la figura 2-1. Para expresar la cantidad de dinero que cuesta entrar al parque de atracciones (*p*) según la cantidad de viajes (*t*), los estudiantes pueden describir la relación general entre las variables como: (a) el dinero que cuesta es 1 euro del carnet de socio más 2 por el número de viajes, (b) p=2t+1, o (c) p=t+t+1. Estas expresiones, a través de diferentes representaciones, describen la estructura subyacente de las situaciones: (a) y (b) involucran las mismas operaciones aritméticas (multiplicación y suma) mientras que (c) solo usa la suma. Las tres expresiones representan la misma regularidad, por lo tanto, se consideran equivalentes (English y Warren, 1998). En conclusión, asumimos la idea de estructura como los elementos que forman la regularidad, los cálculos que conectan dichos elementos, el orden de los elementos y las conexiones entre ellos.

Cabe destacar que los estudiantes de primaria no expresan de esta manera simbólica sus relaciones. En la figura 2-5 observamos una producción de un estudiante a una de las preguntas del problema del parque de atracciones mencionado anteriormente.

Figura 2-5.

Estructura identificada en la producción de un estudiante.



En su producción interpretamos la estructura dada por $y=1+x$ para referirse a la relación implicada por $y=2x+1$.

De la literatura previa destacamos los trabajos realizados liderados por Joanne Mulligan que infieren las estructuras interpretadas por estudiantes de 4 a 8 años al resolver diferentes problemas (e.g., Mulligan y Mitchelmore, 2009; Mulligan et al., 2006; Papic et al., 2011), donde a través de las representaciones que estos usan, analizan las diferentes formas en los cuales los niños organizan objetos y conjuntos de objetos, según lo que interpretan de los problemas presentados. Estos autores han establecido niveles en el desarrollo estructural; (a) preestructural, cuando los niños se fijan en características particulares que les atraen, pero que a menudo son irrelevantes para el concepto matemático subyacente, (b) emergente cuando los niños reconocen algunas características relevantes, pero no son capaces de organizarlas de forma adecuada, (c) parcialmente estructural cuando los niños reconocen la mayoría de las características relevantes de la estructura, pero sus representaciones son inexactas o incompletas, (d) estructural cuando los niños representan correctamente la estructura dada y (d) avanzado cuando los niños reconocen la generalidad de la estructura.

En sus estudios conjeturan que el reconocimiento inicial de las similitudes y diferencias en representaciones matemáticas desempeña un papel fundamental en el desarrollo de patrones y estructura, la abstracción y la generalización. Llaman a este hallazgo Conciencia de Patrón y de Estructura Matemática (AMPS) (Mulligan y Mitchelmore, 2012, p. 530).

En el caso de las estructuras evidenciadas en los problemas que involucran funciones, los autores mostraron una relación existente entre aquellos estudiantes con bajo rendimiento académico, los cuales evidenciaban rasgos de la etapa pre-estructural, ya que estos se centraban específicamente en las características superficiales de los problemas, no atendiendo a la estructura matemática o espacial de los elementos involucrados. En cambio, los estudiantes con buen rendimiento académico extrajeron y extendieron características estructurales de las relaciones involucradas en los elementos. En conclusión, los autores señalan que aquellos estudiantes que muestran un buen desarrollo estructural en áreas como números, operaciones o geometría mostraron fuertes indicios de pensamiento algebraico temprano.

Hay trabajos recientes que continúan abordando la idea de estructura como parte clave para interpretar las regularidades que observan los estudiantes. Por ejemplo, Pinto y Cañadas (2018) se centran en describir la estructura de la regularidad evidenciada por un grupo de 24 estudiantes de entre (10-11) años atendiendo a la forma directa e inversa de la función y=2x+6. Los principales resultados muestran que 10 estudiantes establecieron diferentes estructuras que involucran las variables en la función inversa. Por otra parte, 5 estudiantes generalizaron esta forma de la función. De los cinco estudiantes que generalizaron la función inversa, cuatro de ellos se apoyan de la estructura generalizada en la función directa ($2x+6$), revelándose como la estrategia más común para identificar la estructura de la forma inversa de la función. En Torres et al. (en revisión), describimos las estructuras y la generalización que despliegan los alumnos de segundo grado (de 7 a 8 años). Realizamos entrevistas semiestructuradas a cuatro estudiantes seleccionados de un grupo que participaba en un experimento de enseñanza en el aula. A los estudiantes se les pidió que resolvieran problemas implicaban formas directas e inversas de funciones lineales ($y=2x/y=x+4$). Se observaron diferencias en las estructuras generalizadas, dependiendo de la función y de la forma implicada. Un mayor número de alumnos generalizó estructuras para la forma inversa que para la forma directa de la función $y=x+4$.

Determinar las estructuras que los alumnos son capaces de identificar y expresar en ambas formas de una función proporciona una visión más profunda del pensamiento funcional. De ahí el interés de estudiar las dos formas conjuntamente o la forma inversa exclusivamente cuando se trabaja con alumnos de primaria. Pretendemos colaborar a paliar la escasez de este tipo de investigación, que se ha encontrado más aguda en los primeros grados de la escuela primaria.

2.3. Generalización

Mason et al. (1985) consideran que la generalización está en la raíz del álgebra escolar. La generalización es esencial para la construcción del conocimiento en general (Castro et al., 2010). La generalización puede ser entendida como una actividad mental no restringida a situaciones numéricas; es una actividad mucho más fundamental y de gran alcance, ya que todo aprendizaje humano implica transformar experiencias individuales en principios generales más amplios (Mason et al., 1985).

En el álgebra, numerosos autores definen la generalización como un elemento central del pensamiento algebraico (Cooper y Warren, 2011; Kaput, 2008). Es considerada como "un medio ideal a través del cual se puede ver y expresar una declaración general" (Mason et al., 1985, p. 1), permitiendo la generación de conocimiento matemático (Pólya, 1957).

En un sentido amplio las definiciones sobre la generalización coinciden en que esta consiste en el reconocimiento de una regularidad en un conjunto de elementos, la generación e identificación de nuevos casos en los que la generalización aplica y se llega a su respectiva expresión (Ureña, 2021). En esta tesis consideramos que generalizar, desde un enfoque funcional al álgebra escolar, implica atender, percibir y expresar cómo una cantidad varía con respecto a la otra en general (Blanton, 2008, 2017), identificando un patrón que sea válido para más casos, a partir de la regularidad observada (Pólya, 1966).

En el caso del pensamiento funcional, la generalización se da al establecer y analizar las relaciones entre variables (Smith, 2003). Por tanto, el trabajo con problemas que involucran funciones se transforma en un escenario óptimo para que los estudiantes identifiquen patrones y generalizaciones (Warren, 2005), así como para que analicen el comportamiento de la función mediante diferentes representaciones (Blanton et al., 2011; Cañadas y Molina, 2016).

2.3.1. Tipos de generalización

El carácter algebraico de la generalización en educación primaria es un tema de interés para la investigación (e.g., Ayala-Altamirano, 2021; Radford, 2018). En coherencia con nuestra descripción del pensamiento algebraico, consideramos que una generalización algebraica está caracterizada por referirse a cantidades indeterminadas, involucrar un proceso de razonamiento y recurrir a diversas formas de expresión. Una generalización será aritmética si la relación detectada se aplica de manera local, es decir solo a unos casos sin ser capaz de extenderla y/o no se observa evidencia que permita dar cuenta de la analiticidad del razonamiento (Radford, 2010). Además, en estos casos el foco de atención de los estudiantes será encontrar un resultado numérico concreto, sin establecer relación entre los casos particulares (Blanton, 2017).

En investigaciones previas, en el contexto de la resolución de problemas de patrones (Radford, 2003, 2008, 2010; Vergel, 2015), se distinguen cuatro tipos de generalización según las representaciones empleadas, de los cuales tres corresponden a generalización algebraica y una es considerada como generalización aritmética. En esta última la generalidad es una similitud observada en algunos casos, no permitiendo proporcionar una expresión para cualquier término de la secuencia. Define la generalización algebraica de patrones como la generalización que sigue aspectos tales como: (a) la toma de conciencia de una propiedad común que se nota a partir del trabajo con un número de casos particulares, (b) la generalización de dicha propiedad a los casos subsiguientes de la secuencia y por último (c) la capacidad de usar esa propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permita calcular el valor para cualquier término de la secuencia.

Dentro de la generalización algebraica se encuentran la generalización factual, la generalización contextual y la generalización simbólica (Radford, 2018). La generalización factual se basa en acciones realizadas sobre números; las actuaciones constan aquí de palabras, gestos y de actividad perceptual. Se expresa en acciones concretas a través del trabajo sobre números. En la generalización factual, esta queda implícita, pues el estudiante puede señalar con la mirada, realizar movimientos con un lápiz, dice “aquí”, señala y dice “más 3”. La generalización factual es la primera forma de generalizar donde la actividad perceptual basada en diferentes mecanismos de comunicación de los alumnos les permite avanzar en la abstracción de lo particular. Es una generalización que permite abordar cualquier caso particular, es decir, permanece siempre unido al nivel concreto. En cuanto a la generalización contextual, es la abstracción de acciones concretas. La diferencia de esta generalización con la generalización factual es que ahora no se opera con números concretos. Dicho de otro modo, la generalización contextual es la descripción del término general y los gestos y las palabras son sustituidos por frases “clave” donde los estudiantes pueden, por ejemplo, decir “siempre más 3”. Por último, la generalización simbólica es la representación de secuencias a través del sistema de representación alfanumérico del álgebra (Radford, 2010). Las frases “clave” son representadas por símbolos alfanuméricos del algebra.

2.3.2. Proceso de generalización

Existe una diversidad de concepciones de la generalización que ponen de manifiesto la aceptación dual de la generalización como proceso y producto de dicho proceso (Harel y Tall, 1991; Stephens et al., 2017). Krutetskii (1976, p. 86) indica que, a través del proceso de generalización, "las características y propiedades de los objetos aislados por abstracción se generalizan; es decir, se extienden a todo un conjunto de objetos en una determinada clase.

El producto de la generalización es la forma en que se expresa la generalidad, es decir, es el resultado de dicho proceso (Ellis, 2007). La generalización como proceso implica: (a) identificar los elementos comunes a todos los casos, (b) ampliar el razonamiento más allá del rango en el que se originó, y (c) obtener resultados más amplios que los casos particulares (Ellis, 2007; Kaput, 1999; Radford, 2013). Al generalizar, la actividad de los estudiantes puede incluir acciones tales como explorar, formular, revisar y validar conjeturas, organizar datos e identificar una estructura (Blanton, 2008; Cañadas y Castro, 2007; Pinto y Cañadas, 2018). Estas acciones podrían llevar a los estudiantes a plantear conclusiones por medio de razonamientos de abducción, inducción o deducción (Torres et al., 2021).

Blanton et al. (2011), en el mismo sentido que Kaput (2008), "conceptualizan la generalización como el proceso por medio del cual identificamos la estructura y relación en situaciones matemáticas […] esta puede referir a la identificación de relaciones entre cantidades que varían una en relación con la otra. También puede significar capturar y expresar la estructura aritmética en las operaciones sobre la base de observaciones repetidas y regulares de cómo se comportan estas operaciones" (p. 9). De esta definición sobresale el reconocimiento de estructuras como parte de la generalización para la descripción y expresión de regularidades que se extraen de distintas situaciones: aritméticas, que involucran relaciones entre cantidades covariantes, o en general de situaciones matemáticas susceptibles de ser generalizadas.

Stacey (1989) analiza el proceso de generalización de estudiantes de 9-13 años al trabajar con problemas que involucran funciones lineales de la forma y=mx+b, identificando: (a) forma de expresar generalizaciones; (b) estrategias; y (c) dificultades que tienen los estudiantes. A partir de las respuestas de los estudiantes, se distinguen dos tipos de generalización: “Cercana”, para cuestiones que “pueden ser resueltas mediante un dibujo paso a paso o contando”, las cuales tienen relación con el tipo de número involucrado (cercano a los estudiantes o en un determinado ámbito numérico); y “Lejana”, para cuestiones “que van más allá de los límites prácticos que involucra un enfoque paso a paso” (p. 150), involucrando ámbitos numéricos mayores a los comprendidos (tales como 100, 1.000, 1.000.000), por ejemplo. Como comentábamos anteriormente, entendemos la generalización como un proceso.

En relación a esta diferencia entre cercana y lejana, y con la finalidad de explorar y entender el razonamiento seguido por los estudiantes de educación primaria cuando generalizan, en Torres et al. (2021) hemos elaborado un modelo sobre el proceso de generalización compuesto por tres fases según los casos particulares de lo que se parta. Distinguimos entre casos: (a) particulares cercanos, cuando se solicita un término siguiente o alguno que puede obtenerse por un conteo, (b) particulares lejanos, aquellos donde es necesario conocer o identificar el patrón o la función para dar respuesta. Los casos particulares lejanos requerían representar cantidades que no se podían dibujar o que eran difíciles de encontrar contando con las habilidades académicas existentes de los alumnos y (c) indeterminados, aquellos para los que la respuesta dependía del reconocimiento de una relación.

2.3.3. Fases del razonamiento y proceso de generalización

Se han estudiado diferentes fases en el razonamiento que llevan a cabo los estudiantes en el proceso de generalización. El filósofo Peirce (Pierce,1965), introdujo el concepto de abducción para referirse a lo que considera como una forma de inferencia. La abducción es una primera forma de explorar e inferir y es la de menor certeza pues se trata de una fase en la que se van construyendo hipótesis explicativas (Nepomuceno, 2005). En términos de Aliseda (1996), la fase de abducción es un primer período donde se prueba repetidamente y se formulan conjeturas. Según Rivera (2017), abducir es generar una hipótesis o reducir un rango de hipótesis, desde unos pocos casos particulares, que luego se verifica mediante razonamiento inductivo. Autores como Rivera y Becker (2007) consideran en el trabajo con patrones, que la abducción es previa a la generalización. Es mediante el razonamiento abductivo cuando se van descubriendo las regularidades y pueden plantearse las primeras conjeturas posibles durante el trabajo con los primeros casos particulares presentados. En la fase de abducción se toma como válida una estructura a partir de los primeros casos particulares que deberá validarse con los subsiguientes para inducir la generalización.

Desde la perspectiva de Peirce, la inducción tiene un carácter comprobatorio y no creador, es decir, los razonamientos inductivos no aportan conocimiento nuevo. Su función es la de verificación de la teoría y, en algunos casos, de modificación de esta. Su principal labor es la de ir buscando el carácter de verdad de la hipótesis planteada (Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

Una conclusión de una inferencia abductiva no se sigue con la misma fuerza que la de una inducción (Aguayo, 2011). Para Peirce, las conclusiones abductivas siempre tendrán un estatus epistémico inferior a las inductivas (Niño, 2012). Se espera que, por supuesto, los posibles errores se corrijan a través de la ruta inductiva, lo que resulta en la construcción de una generalización que se basa en las instancias disponibles (Rivera, 2017).

En relación al razonamiento inductivo, Cañadas y Castro (2007) determinan un modelo de razonamiento inductivo constituido por siete pasos. Este modelo es parte de los resultados de una investigación en la que describen el trabajo de 359 estudiantes de secundaria al resolver seis tareas de generalización. Lo presentamos y describimos en la figura 2-6.

Figura 2-6.

Modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007)

1. Trabajo con casos particulares. Casos concretos o ejemplos con los que se inicia el proceso. Suelen ser casos sencillos y fácilmente observables.
2. Organización de casos particulares. Disponer los datos obtenidos de forma que ayude a la percepción de patrones, ya sea en una tabla, en filas y columnas, con algún orden.
3. Búsqueda y predicción de patrones. Los casos particulares son observados (que pueden o no estar organizados) y, a partir de dicha observación, se establece el siguiente caso.
4. Formulación de conjeturas. Una conjetura es una proposición que se supone verdadera pero que no ha sido sometida a exploración. Dicha exploración puede dar como resultado su aceptación o su rechazo. Si se presenta un ejemplo para el que la conjetura no es válida, ésta se rechaza. En términos de Popper (1967), se dice que la conjetura se refuta.
5. Justificación de las conjeturas. Hace referencia a toda razón dada para convencer de la verdad de una afirmación. Se suele distinguir entre justificaciones empíricas y deductivas. Las empíricas usan los ejemplos como elemento de convicción. Se vuelve comprobar con otros casos particulares.
6. Generalización. La conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares considerados.
7. Demostración. Proceso de validación formal que no deja lugar a dudas sobre la validez de la conjetura que se trata de probar y que la determina inequívocamente.

Las autoras destacan que estos siete pasos son útiles para que los estudiantes avancen hacia la generalización como paso clave, pero que no tienen que darse de forma obligada, que no tienen que darse en el orden presentado y que no tienen todos el mismo peso en el proceso de razonamiento inductivo. Por ejemplo, el paso de generalización es clave mientras que otros como la organización de casos particulares pueden ayudar en el proceso, pero no es habitual. Algunos estudios usan este modelo para diseñar cuestionarios que indagan en el proceso de generalización de estudiantes de los primeros cursos de educación primaria (e.g., Morales et al., 2018). El modelo también se ha usado en niveles universitarios. Barrera et al. (2009) lo emplean para describir y caracterizar el razonamiento inductivo de maestros de primaria en formación. Pinto y Cañadas (2018) usan el modelo en el contexto funcional describiendo los pasos que siguen los estudiantes de cuarto de primaria hacia la generalización.

2.4. Representación

Las representaciones forman parte del mundo real y tienen un papel crítico en la determinación de la estructura del pensamiento, ya que dan acceso a la construcción y comprensión de un concepto matemático (Kaput, 1991). Una fórmula o ecuación específica, una disposición particular de bloques de base diez o un gráfico particular en coordenadas cartesianas sólo tiene sentido como parte de un sistema más amplio en el que se han establecido significados y convenciones (Cuoco, 2001). Rico (2009) destaca que las representaciones no agotan los conceptos, solo exponen algunas de sus propiedades más importantes. Para conocer un objeto matemático en su complejidad se requiere de una articulación entre representaciones de este (Lupiáñez, 2016; Rico, 2009). Por lo que una representación matemática no puede entenderse de forma aislada.

Las representaciones se pueden clasificar en externas e internas (Cuoco, 2001). El autor define como representaciones externas las que podemos comunicar fácilmente a otras personas. Son las marcas en el papel, los dibujos, los esquemas de geometría y las ecuaciones. Las representaciones internas son las imágenes que creamos en nuestra mente para objetos y procesos matemáticos.

En esta tesis nos centramos en lo que diferentes autores llaman representaciones externas para distinguirlas de las mentales o internas (e.g., Castro y Castro, 1997; Goldin y Kaput, 1996; Goldin y Shteingold, 2001). Por tanto, cada vez que mencionemos representación o representaciones, nos referiremos a las representaciones externas, realizadas con lápiz, papel o habladas, las cuales son intencionales en la medida en que su propósito es registrar y transmitir un significado que puede ser interpretado por otros, permanentes y tienen naturaleza espacial y temporal (Duval, 2006; Goldin y Shteingold, 2001; Martí, 2005).

En concreto, las representaciones son fundamentales para el pensamiento funcional, ya que sirven para (a) representar ideas matemáticas, formando parte integral de cómo los estudiantes piensan sobre funciones; (b) mediar entre los sujetos y las funciones y relaciones funcionales ayudando a estructurar y ampliar el pensamiento de los estudiantes (Pinto et al., 2021); y (c) constituyen una forma de expresar las relaciones entre las variables que, si se eligen adecuadamente, puede unificar posibles ideas aisladas (Brizuela y Earnest, 2008; Carpenter y Franke, 2001).

La generalización y la representación están directamente relacionadas. Durante el proceso de generalización los estudiantes recurren a distintas representaciones y formas de expresión para percibir, dar sentido y expresar las relaciones observadas. La expresión de la generalidad tendrá distintos grados de sofisticación según las representaciones empleadas. En el grado más sofisticado hay una concentración de significados en la menor cantidad de signos a través de los que se expresa la generalidad (Radford, 2010). Por otra parte, cabe destacar que las representaciones empleadas pueden tener distintos grados de generalidad para cada individuo, ya que lo que es simbólico y abstracto para uno, puede ser concreto para otro (Mason, 1996). Las representaciones algebraicas son constitutivas del pensamiento algebraico, el pensamiento y las representaciones se desarrollan y evolucionan conjuntamente (Brizuela y Blanton, 2014).

En el pensamiento funcional, la generalización y las representaciones se encuentran en una relación de codependencia completa. En el desarrollo del pensamiento funcional consideramos que los estudiantes emplean distintas representaciones en su proceso de generalización (Radford, 2002). En este proceso destacamos la importancia de considerar las formas personales de expresarse de los estudiantes, tal como lo han hecho otras investigaciones (e.g., Cooper y Warren, 2008; Hitt y Quiróz-Rivera, 2017; Malara y Navarra, 2018; Radford, 2018b). Al respecto, Kaput et al. (2008) señalan que antes de lograr utilizar las letras y sus convenciones, los estudiantes utilizarán otras formas intermedias de simbolización y crearán un sistema de símbolos convencionales a partir de la comparación de los sistemas que utilizan, esto con el objetivo de buscar una forma económica y eficiente de comunicar sus ideas.

Nuestro interés está en describir cómo estudiantes de segundo de primaria usan representaciones al generalizar la relación entre cantidades que covarían, así como al trabajar con casos particulares.

Una función puede ser representada de múltiples formas y cada una de estas permite resaltar algunos aspectos o características de las funciones (Castro y Castro, 1997). Entre los tipos de representaciones usados por estudiantes al trabajar con problemas que involucran funciones se encuentran: (a) los gestos, (b) verbal (lenguaje natural, oral o escrito); (c) pictórica; (d) manipulativa; (e) numérica (f) notación algebraica; (g) tabular; y (h) gráfica (e.g., Carraher et al., 2008). Tal como lo señalan diferentes autores (e.g., Castro y Castro, 1997), ninguna representación es superior a otra; cada representación resalta un atributo matemático específico. A continuación, describimos las principales características de las algunas de las representaciones que se consideran en la literatura de investigación sobre pensamiento algebraico en los primeros cursos.

2.4.1. Los gestos

Los gestos ayudan a los estudiantes a generalizar y expresar la generalización. Cooper y colaboradores (Cooper y Warren, 2011; Warren et al., 2013) observan que, en el contexto de problemas que involucran una función, quienes hicieron menos gestos al explicar sus respuestas a los problemas propuestos tuvieron mayor fracaso. No obstante, tal como lo menciona Mason (1996), no son garantía de que la generalidad haya sido percibida, más bien son indicadores. Su uso podría enfatizar lo particular y hacer más difícil apreciar lo general.

2.4.2. Verbal

La representación verbal es aquella que tiene lugar mediante el lenguaje natural ya sea oral o escrito y es el que comúnmente está presente en los problemas que involucran funciones y que se presentan a los estudiantes (e.g., Blanton et al., 2015; Brizuela y Earnest, 2008; Carraher et al., 2006; Morales et al., 2018; Moss et al., 2008; Pinto y Cañadas, 2017; Radford, 2018; Sawrey et al., 2015; Warren et al., 2013). Principalmente, los problemas que introducen este tipo de representación lo hacen en enunciados escritos (durante sesiones de trabajo con clases completas o parciales) y orales (mediante entrevistas), los que pueden ser acompañados por otros tipos de representación.

El lenguaje natural es importante para dar significado a representaciones simbólicas (e.g. Molina, 2014; Stacey y MacGregor, 1995). Permite comprender cuál es la interpretación dada a ciertas expresiones algebraicas que pueden no ser suficientemente claras dado que lo que escriben los estudiantes podría no tener relación directa con lo que realmente quieren expresar (Radford, 2002).

El lenguaje natural hablado incluye un sublenguaje especializado, de características orales, y que se relaciona con dominios de las matemáticas, mientras que el lenguaje natural-escrito, involucra la producción escrita de oraciones y frases (Lesh et al., 1987).

El lenguaje natural contribuye a la comprensión conceptual de las funciones y mejora sus capacidades de representar problemas (Bautista et al., 2013; MacGregor y Stacey, 1995). Otros autores destacan que el lenguaje natural ayuda a comprender el contexto de un problema, el cual enfatiza la conexión entre las matemáticas y otros dominios de la vida cotidiana (Friedlander y Tabach, 2001). Hay estudios que revelan que la representación verbal es la más usada por los estudiantes en los primeros niveles. Pinto y Cañadas (2017, 2019) evidencian que estudiantes de tercer curso (8-9 años), y en mayor medida los de quinto curso (10-11 años), expresan la generalización principalmente por medio de la representación verbal.

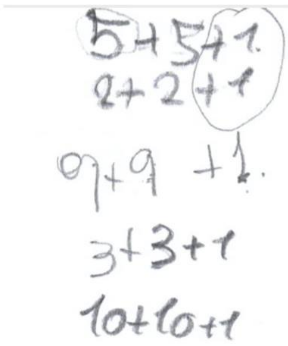
2.4.3. Numérica

Para Scheuer, et al. (2000) las representaciones numéricas se "construyen empleando un conjunto muy reducido de formas (los numerales 1 a 9) y de principios organizadores, ya que los números son entidades profundamente conceptuales y abstractas, reducibles a unas pocas nociones nucleares que al combinarse se extienden" (p.32). Blanton et al. (2015), señalan que los estudiantes que usan este tipo de representación pueden conceptualizar una relación funcional "como un conjunto de relaciones particulares entre valores correspondientes específicos" (p. 530), en la cual estos pueden describir una relación dentro de ciertos casos específicos.

Por ejemplo, en el trabajo de Ramírez et al. (2020) donde atienden al tipo de representación de la generalización expresada. Un estudiante respondió mediante la representación numérica dada en la figura 2-7 en el contexto *Function Machine* (una máquina en la que entran y salen bolas mediante la relación y =2x+1).

Figura 2-7.

Representación numérica (Ramírez, et al. 2020, p. 16).



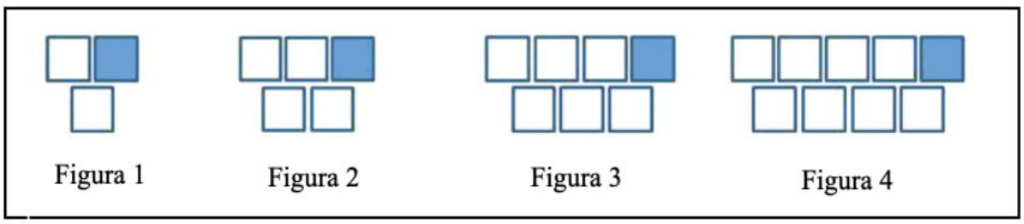
2.4.4. Pictórica

Las representaciones pictóricas son imágenes o dibujos de los elementos que son representados (Palmer y Bommel, 2016). Las representaciones pictóricas, por lo general, permiten visualizar la situación problema y la relación entre las variables a través de la relación entre las estructuras espaciales y numéricas. Este aspecto es importante en el pensamiento algebraico y en el funcional pues se pueden reconocer regularidades a partir de la descomposición de figuras (Radford, 2011). Los problemas que introducen este tipo de representación lo hacen, generalmente, acompañado de un enunciado expresado mediante lenguaje natural u oral.

En la figura 2-8, mostramos una secuencia presentada a estudiantes de segundo de primaria cuyos colores y disposición espacial dan pistas de la relación involucrada ($y=2x+1$) (Radford, 2011, p. 305).

Figura 2-8.

Representación pictórica



2.4.5. Simbólica

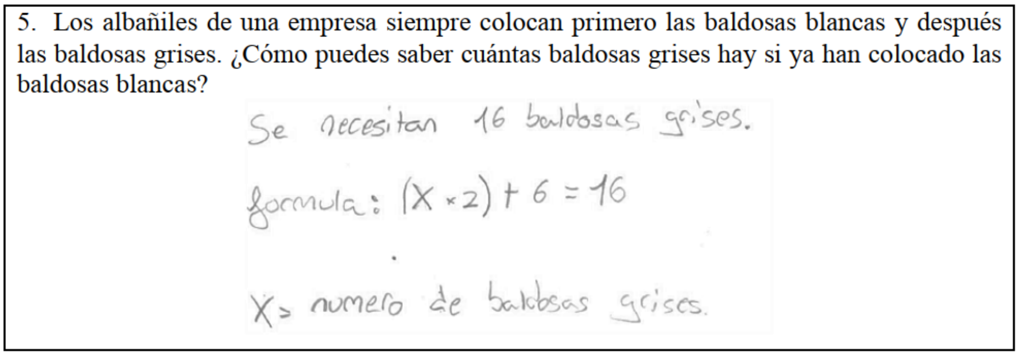
La representación simbólica, notación algebraica o simbolismo algebraico está compuesta por letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra, caracterizándose por ser una representación que tiene gran precisión (Molina, 2014). Las representaciones simbólicas a través de simbolismo algebraico permiten expresar las relaciones funcionales haciendo uso de letras y signos aritméticos (e.g. +, –, x, :, =). Brindan una visión cualitativa y cuantitativa general de la función, permitiendo hacer un análisis del comportamiento de la función de manera abstracta.

Este tipo de representación debe ser utilizada “con competencia, para dar sentido y significación a las letras y aplicar las reglas algebraicas para producir nuevas relaciones que lleven a la solución, es decir, hay que poner en juego la semántica y la sintaxis del lenguaje algebraico” (Fernández-García, 1997, p. 82).

En la figura 2-9 presentamos un ejemplo del uso de este tipo de representación por un estudiante, al responder a una de las preguntas del problema de las baldosas usado en el trabajo de Pinto (2019).

Figura 2-9.

Representación simbólica: problema de las baldosas (Pinto, 2019).



5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises hay si ya han colocado las baldosas blancas?

Se necesitan 16 baldosas grises.

formula: $(X \times 2) + 6 = 16$

X = numero de baldosas grises.

2.4.6. Tabular

La representación tabular comprende la elaboración de tablas para organizar la información de una relación entre dos cantidades (Kaput, 1989; Lupiáñez, 2016).

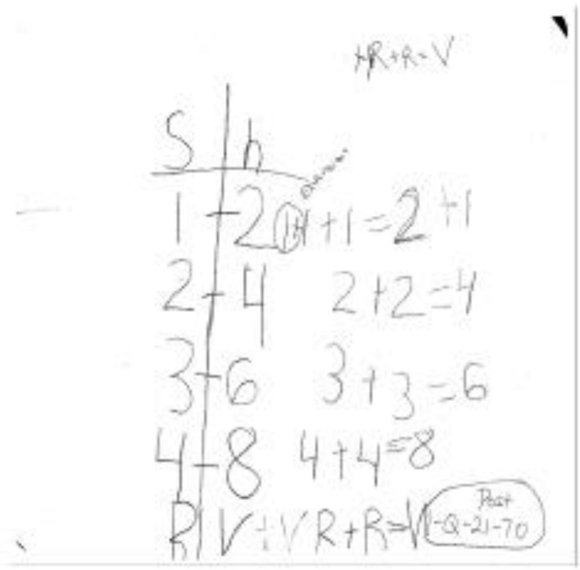
Esta representación permite visualizar en una misma fila los pares de valores relacionados correspondientes a las variables independiente y dependiente, así como los valores propios de cada variable por columnas (Blanton 2008), y ayuda a percibir los elementos de entrada y salida, simultáneamente para encontrar la relación funcional (English y Warren, 1998).

Considerando las ideas de Martí (2009), las tablas involucran una serie de procesos cognitivos (tales como la segmentación de la información, identificación de variables) que son expresados gráficamente mediante notaciones específicas (filas, columnas, encabezados, entre otros). En una representación tabular, la información es claramente separada para facilitar la identificación de los elementos expuestos. Construir tablas requiere que los estudiantes segmenten y escojan unidades de información, así como los datos serán organizados (categorización, establecimiento de correspondencias) en un determinado diseño espacial.

Dentro del contexto funcional hay investigaciones que describen el trabajo de los estudiantes considerando: (a) cómo estos construyen y completan tablas (e.g., Brizuela y Lara-Roth, 2002; Martí, 2019; Schliemann et al., 2011), y/o (b) cómo los estudiantes comprenden aspectos de la función a través de este tipo de representación (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Brizuela y Earnest, 2008; Martinez y Brizuela, 2006; Torres et al., 2022).

En el trabajo de Brizuela y Blanton (2014) se les pidió explorar a los niños durante una entrevista cuántos vagones habría recogido un tren después de cualquier número de paradas. Después de explorar los casos específicos de una, dos y tres paradas la entrevistadora preguntó a la estudiante: “¿puedes organizar esta información?”. Acto seguido, construyó la tabla que podemos ver en la figura 2-10.

Figura 2-10.
Representación tabular (Brizuela y Blanton, 2014, p. 44).



Para esta producción el estudiante tomó todas las decisiones, desde dónde colocar los diferentes números y qué letra utilizar para encabezar cada una de las columnas. Para la variable independiente eligió “S” para “stops”[3] (paradas) y para la variable dependiente eligió “h” para “how many cars the train has” (cuántos vagones tiene el tren).

Las autoras concluyen con que las decisiones que debe tomar el estudiante no son triviales y reflejan una comprensión sobre las cantidades involucradas en el problema, sobre cómo se relacionan estas cantidades entre sí, y cuál cantidad depende de la otra (en este caso, que la cantidad de vagones depende de la cantidad de paradas que haya hecho el tren, y no viceversa).

2.4.7. Representaciones múltiples

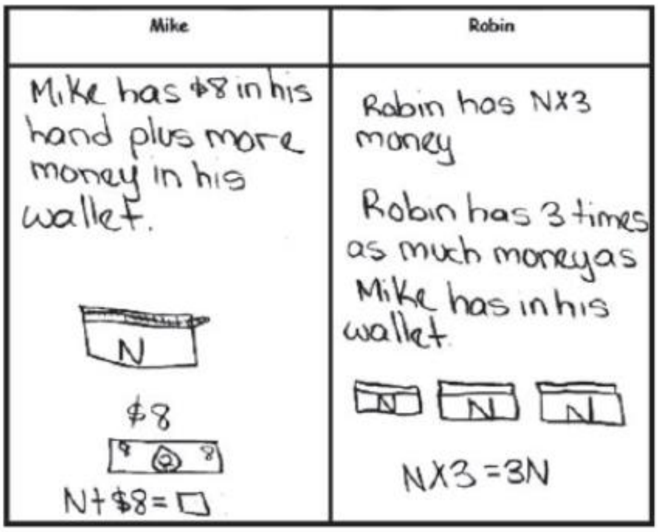
Diferentes trabajos de Bárbara Brizuela (e.g., Brizuela, 2004, 2005; Brizuela y Earnest, 2008) describen las relaciones entre representaciones que evidencian estudiantes de primaria, analizando las ventajas que tienen para los niños establecer relaciones entre

[3] Los estudiantes del trabajo fueron estadounidenses.

diferentes representaciones y qué impacto a nivel conceptual se produce al establecer esas relaciones. En un estudio longitudinal, Carraher y Schliemann (2007) analizan cómo los estudiantes piensan algebraicamente y emplean dichas representaciones, al trabajar con problemas que involucran funciones lineales.

Por ejemplo, en la figura 2-11 mostramos la respuesta de un estudiante al responder a un problema que establece la relación entre el dinero que tienen dos personas, dada las relaciones *y=x+8* y *y=3x*.

Figura 2-11.
Representación múltiple (Carraher y Schliemann, 2007, p.693)



En la respuesta del estudiante, tres representaciones diferentes convergen al representar la cantidad de dinero que tiene cada personaje del problema: representación verbal, pictórica y notación algebraica. Las tres representaciones expresan la generalización de la relación entre variables involucradas en los problemas, las cuales cobran sentido al analizarlo por separado.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo describimos y justificamos el marco metodológico de la investigación. En primer lugar, describimos el paradigma metodológico que rige esta tesis: la investigación de diseño (Molina, et al, 2011). En segundo lugar, justificamos su consideración según los objetivos de investigación y detallamos los aspectos del diseño que forman parte de esta memoria. Finalmente, presentamos el experimento de enseñanza que tiene lugar en la investigación y detallamos la información recopilada a través de dos fuentes de información directamente relacionadas: (a) cuestionarios de las sesiones específicas al experimento de enseñanza; y (b) entrevistas individuales y grupales semiestructuradas. Considerando estas fuentes de información, describimos los estudiantes que han participado, la selección de los datos considerados, los procesos e instrumentos de recogida de información y las categorías de análisis empleadas.

3.1 Diseño de investigación

Esta Tesis Doctoral tiene un carácter cualitativo y descriptivo. Asumimos una posición epistemológica calificada como interpretativa, lo que significa que, a diferencia de la adopción de un modelo científico natural en la investigación cuantitativa, aquí hacemos hincapié en la comprensión del mundo social a través de un examen de la interpretación de ese mundo por sus participantes. Igualmente asumimos una posición ontológica calificada de construccionista que implica que las propiedades sociales son resultados de las interacciones entre los individuos, y no fenómenos "ahí fuera" y separados de los que participan en su construcción (Bryman, 2012).

Enmarcamos esta tesis en el paradigma de la investigación de diseño. En particular, la metodología propuesta es un experimento de enseñanza. De esta manera indagamos en las capacidades para manifestar pensamiento funcional de los estudiantes de segundo de educación primaria a través de la resolución de problemas de generalización que involucran una función lineal. En esta investigación buscamos profundizar en la descripción del pensamiento funcional desarrollando tareas y estrategias que potencien dicho pensamiento. Para profundizar en la exploración de las capacidades de los estudiantes, implementamos sesiones de clases y realizamos entrevistas semiestructuras.

3.1.1. Investigación de Diseño

La investigación basada en el diseño (*design research*) es un tipo de investigación en la que se busca comprender y mejorar una realidad educativa (Molina et al., 2011), mientras se diseña y se desarrolla un producto, un proceso o una herramienta. A través de ciclos de implementación, observación, análisis y rediseño, el diseño se refina y se mejora (Swan, 2020). La investigación de diseño estudia el aprendizaje de los estudiantes en contexto, y es usada para describir nuevas formas de aprendizaje para los estudiantes (Cobb, et al., 2007). El potencial de las investigaciones de diseño es que hacen progresar teorías de aprendizaje y enseñanza en situaciones complejas y conducen a conocimiento empíricamente fundamentado (Design-Based Research Collective (DBRC), 2003; Molina et al., 2011).

Los objetivos de la investigación de diseño son proporcionar un conocimiento sistemático y garantizado sobre el aprendizaje y producir teorías para guiar la toma de decisiones de instrucción hacia un mejor aprendizaje para el estudiante. Prolongándolo en el tiempo, se podría pretender alcanzar un objetivo transformador que implica crear nuevas posibilidades de enseñanza y aprendizaje y estudiar su impacto en los maestros, los niños y otros usuarios finales (Cobb, 2000; Swan, 2020).

El proceso de investigación se lleva a cabo a través de ciclos iterativos de implementación, análisis y rediseño (Collins, et al., 2004). Los investigadores identifican un problema en un contexto definido y, basándose en investigaciones previas, visualizan una posible solución. Después desarrollan un borrador del diseño, no es el definitivo dado que durante la implementación puede cambiar según las necesidades que se vayan suscitando, por lo que se acomodan al modelo de la realidad (Molina et al., 2011). El rol de los investigadores en los estudios de diseño es recoger evidencias, a partir de ciclos de reflexión iterativos, de carácter prácticos que promueven de alguna manera el aprendizaje. También pueden colaborar con el profesor o actuar como él (Confrey, 2006).

El objetivo es producir un diseño eficaz, una descripción de la teoría y de los principios que sustentan el diseño y un análisis de las múltiples formas en que funciona el diseño en un contexto determinado (Swan, 2020). En este proceso la teoría previa informa el diseño y el refinamiento de las herramientas, mientras que la practica retroalimenta la teoría que la guía (Cobb, 2000). Las teorías resultantes deben ser juzgadas por su utilidad más que por su grado de generalización a una población amplia (Cobb et al., 2003; Confrey, 2006). Esta información será adaptada a los contextos en los que se desee implementar (Stephan, 2015). Las teorías propuestas pueden referirse al aprendizaje de un estudiante, o de un aula completa, o de una comunidad de enseñanza profesional, o de una escuela o distrito visto como una organización (Cobb et al., 2003).

Este tipo de investigación suele implicar tratamientos novedosos o innovadores de áreas curriculares, como la introducción de nuevos temas, nuevas tecnologías o nuevas formas de interacción (Ayala-Altamirano, 2021). En esta investigación proponemos desarrollar el pensamiento funcional de estudiantes de primaria en el marco de los contenidos algebraicos actualmente vigentes en el currículum español (Ministerio de Educación y de Formación Profesional, 2022).

Particularmente, este paradigma de investigación se adecúa a nuestros objetivos de investigación, ya que: (a) tiene el foco puesto en el diseño y exploración (Pinto, 2019); (b) permite elaborar avances teóricos con una fuerte base empírica que ayuda a guiar la práctica educativa (Cañadas y Molina, 2013); (c) tiene lugar a través de ciclos de puesta en práctica, análisis y rediseño, lo que se hace de manera paralela al avance de los objetivos; y (d) se realiza durante períodos prolongados de tiempo debido a la ventaja de examinar cambios graduales a medida que los estudiantes aprenden nuevas ideas, conceptos o estrategias (Prediger et al., 2015; Molina et al., 2011).

Las investigaciones de diseño tienen un campo de aplicación que varía en término de las edades de los sujetos participantes, así como los temas que se pueden tratar (Prediger et al., 2015). Esta multiplicidad de contextos favorece que surjan diferentes tipos de investigación de diseño, desde donde surgen los experimentos de enseñanza que describimos a continuación, un tipo de estudio dentro de la investigación de diseño (Molina et al., 2011).

3.1.2. Experimento de Enseñanza

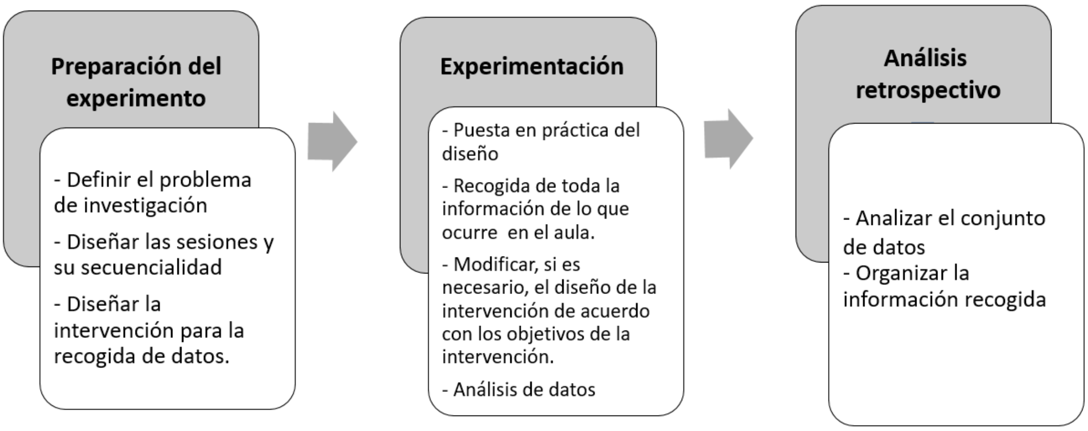
Un tipo de estudio dentro de la investigación de diseño es el experimento de enseñanza. Un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). La característica principal de estos estudios es la ruptura de la diferenciación entre docente e investigador, motivada por el propósito de los investigadores de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos (Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000).

El objetivo de un experimento de enseñanza es centrarse en la evolución de la actividad de los estudiantes atendiendo a las diferentes reformulaciones que se puedan hacer en relación a esa actividad. En un experimento de enseñanza se diseña y refina progresivamente, de forma paralela, al avance en los objetivos de investigación. Está dirigido a comprender los progresos que los niños realizan durante un periodo de tiempo y uno de los principales objetivos es formular un modelo de aprendizaje y/o desarrollo de los estudiantes, en relación con un contenido concreto (Molina et al., 2011), es decir, comprender cómo, cuándo y porqué ciertas innovaciones educativas pueden funcionar en el aula.

La oportunidad de que los investigadores participen como investigadores-docentes es una de las principales características de estos estudios, pudiendo los investigadores experimentar en primera persona el razonamiento y aprendizaje de los estudiantes (Steffe y Thompson, 2000). Si los docentes habituales de las clases desean participar, esto también es posible, no obstante, deben tener claro que las intervenciones están delimitadas y limitadas por los objetivos de la investigación, lo que se antepone a las creencias propias del docente, sobre qué cree que es mejor para los alumnos (Kelly y Lesh, 2000).

Según Cobb y Gravemeijer (2008), la investigación desarrollada en un experimento de enseñanza se estructura en tres fases: (a) la preparación del experimento, que consiste en el diseño y la creación de instrumentos de evaluación diagnóstico, los objetivos de las sesiones y el diseño y planeación de la intervención; (b) la experimentación, en esta fase se realiza la intervención en el aula y recogida de datos, los cuales son interpretados en los ciclos iterativos de la experimentación; y c) la fase de análisis retrospectivo en la que tiene lugar la recopilación y organización de los datos y el análisis en conjunto de los mismos. Esquematizamos esta información en la figura 3-1.

Figura 3-1.
Fases del experimento de enseñanza.



En un experimento de enseñanza se analiza detalladamente la actividad desarrollada por el estudiante, su entorno y el contexto en el que se realizó la actividad. En un estudio de este tipo es importante recolectar la mayor cantidad de información posible. El detalle que se visualice en los datos recolectados permitirá que en los análisis se puedan observar variables que antes pudiesen no ser relevantes (Molina et al., 2011) y serán una garantía de la calidad del estudio (Cobb y Gravemeijer, 2008). Entre las fuentes de información, que dan cuenta del proceso de enseñanza y de su fin, se pueden considerar los trabajos de los alumnos, cuestionarios, las grabaciones de video, audio de las clases, las evaluaciones, las notas de la observación de los investigadores, entrevistas, entre otras (DBRC, 2003; Herrera, 2017).

En la siguiente sección abordamos el diseño de las sesiones, su secuencialidad, así como el diseño de los cuestionarios y entrevistas usadas para la recolección de los datos.

3.1.3. Diseño del experimento de enseñanza

Los datos que analizamos en esta Tesis Doctoral provienen de un experimento de enseñanza y entrevistas individuales y/o grupales semiestructuradas llevadas a cabo con estudiantes de segundo de educación primaria (7-8 años) en un centro educativo ubicado en Granada, al sur de España.

Durante el curso 2017/2018, se desarrollaron cuatro sesiones de clase diferentes con estudiantes de en un colegio de Granada. Para llevar a cabo el experimento de enseñanza fue necesario contar con el permiso del centro y con el consentimiento informado de los padres-madres de los niños, quienes firmaron la documentación necesaria para grabar las sesiones, teniendo en cuenta que la información iba a ser confidencial y totalmente anónima.

En cada una de las sesiones se presentó una tarea a los estudiantes en forma de cuestionario, los cuales involucraban funciones lineales e introducían diferentes tipos de representaciones. Las cuatro sesiones fueron realizadas con todo el grupo, 24 estudiantes. El desarrollo de cada sesión se dividió en tres partes: (a) introducción al contexto del problema, presentamos las representaciones implicadas y las diferentes preguntas involucradas. En esta parte introductoria hacíamos preguntas a los estudiantes para verificar que comprendían el problema, (b) presentación del cuestionario para que responderán de manera individual y c) última parte en la que los estudiantes comparten sus resultados y explican algunas de sus respuestas sin recibir retroalimentación sobre esto.

Además, realizamos tres entrevistas a un grupo de estudiantes que participó en las sesiones, con la finalidad de profundizar en sus respuestas a diferentes problemas que involucran funciones. Todos los estudiantes del grupo iban a trabajar en el cuestionario y algunos de ellos serían seleccionados para ser entrevistados.

Esta selección se hizo en función de los siguientes criterios: (a) estudiantes que no habían identificado la estructura o sólo lo habían hecho en alguna ocasión, (b) estudiantes que habían identificado, en varias de las preguntas la regularidad existente y (c) estudiantes que habían logrado generalizar.

Las entrevistas fueron realizadas por uno de los investigadores miembros del proyecto (La candidata a doctora realizó las entrevistas B y C de esta memoria), y comparten una misma estructura. Las entrevistas parten de cuestiones sobre casos particulares y continúan con cuestiones sobre el caso general. Fueron transcritas a partir de las grabaciones de las mismas mediante una cámara fija que registró la totalidad de la revista.

Tanto la sesiones como las entrevistas del experimento de enseñanza persiguen propósitos similares: (a) explorar cómo los estudiantes relacionan las variables involucradas tanto en la forma directa como inversa de la función; (b) identificar el proceso de generalización llevado a cabo por los estudiantes; (c) identificar las estructuras en las respuestas de los estudiantes a los casos particulares y al caso general e (d) interpretar las diferentes representaciones producidas por los estudiantes. Tanto las sesiones como las entrevistas fueron videograbadas por los investigadores.

Para el diseño de las tareas que usamos en el experimento de enseñanza, tuvimos en cuenta las variables de tarea siguientes: función involucrada, el contexto, el lenguaje empleado, el tipo de números implicados en la tarea y el tipo de preguntas que se les hacían. El tipo de tareas propuestas tanto en las sesiones (cuestionarios) y las entrevistas son problemas en los que hay implicadas funciones lineales y se hacen cuestiones sobre la relación directa y la inversa. Estas tareas integrarán diferentes tipos de representaciones y están adaptadas al nivel educativo en el que se implementan. A partir de un contexto, se plantearán cuestiones sobre casos particulares cercanos hasta llegar a la generalización, siguiendo el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007).

En la tabla 3-1 presentamos el orden, los contextos de las situaciones planteadas en cada una de las sesiones del experimento de enseñanza y de las entrevistas, su secuencialidad y las funciones involucradas.

Tabla 3-1.

Sesiones del experimento de enseñanza y entrevistas

Fecha	Sesiones	Entrevistas	Enunciado de la tarea	Representación introducida	Función
4/12/2017 (15/12/2017)[4]	1. Máquina de bolas	A. Máquina de bolas (individual)	En una máquina de bolas entra una cantidad de bolas y salen tres bolas más.	Verbal Pictórica	y=x+3
19/01/2018	2. Parque de atracciones 1		Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 3 euros y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 1 euro.	Verbal	y=x+3
2/02/2018	3. Parque de atracciones 2		A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje en una atracción vale 2 euros.	Verbal	y =1+2x

[4] Fecha en la que tuvo lugar la entrevista A con el mismo contexto implicado en la sesión 1.

23/02/2018	4. Cumpleaños	Lucía cumple años y sus padres quieren invitar a sus amigos a la fiesta. Hay para comer bocadillos y tartas, así que cada persona tendrá dos platos.	Verbal	y =2x
4/05/2018	B. Paradas de tren (grupal)	Un tren va recogiendo a los amigos de Elsa para que vayan a su cumpleaños. En cada parada de tren se montan siempre el mismo número de personas. Queremos saber cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas. ¿Cómo puedes saber cuántas personas lleva el tren si en cada parada suben 2 personas?	Verbal Tabular	y =2x
18/05/2018	C. Superhéroes (individual)	Dos superhéroes, Iron Man y el Capitán América, cumplen años el mismo día.	Verbal	y=x+4

El tiempo trascurrido entre las sesiones fue de entre dos y tres semanas. El periodo de tiempo transcurrido entre la primera sesión y la primera entrevista (A) fueron 11 días. La entrevista B (paradas de tren) tuvo lugar un mes después de la sesión 4 (última sesión). La entrevista C (superhéroes) tuvo lugar dos semanas después de la entrevista B.

Los diferentes contextos y funciones lineales implicadas varían dependiendo de las respuestas de los estudiantes y de la dificultad evidenciada según contexto y función lineal. Este refinamiento es parte del mismo diseño de la investigación. En cada una de las entrevistas se siguió un protocolo en el cual se presentó oralmente un problema a los estudiantes, acompañado por diferentes preguntas. El investigador presentó al estudiante el problema y realizó diferentes preguntas, las cuales involucraban: (a) casos particulares; (b) el caso o relación general; y (c) función inversa.

Para las entrevistas, obtuvimos grupos de alumnos que fuesen heterogéneos, para obtener información de diferentes tipos de estudiantes. La heterogeneidad se basa en sus resultados académicos y capacidades mostradas en clase. Deben ser estudiantes participativos en todos los casos para asegurar la existencia de respuesta. Las entrevistas se realizaron a través de un protocolo previamente diseñado, siguiendo el modelo inductivo de Cañadas y Castro (2007). Las preguntas planteadas en el protocolo exploraron la relación entre casos particulares con diferentes tipos de preguntas (casos particulares dados, casos particulares del estudiante y casos particulares de un tercero) y el caso general ambos atendiendo a la forma directa de la función implicada. Pueden verse los protocolos seguidos para cada entrevista en los Anexos A, B y C.

El equipo de investigación que accedió al aula estuvo conformado por tres investigadores: (a) un profesor-investigador, que dirigió las sesiones; (b) un investigador asistente; y (c) un técnico de cámara. Cada una de las cuatro sesiones tuvieron una duración aproximada de 60 minutos. Las tres entrevistas realizadas tuvieron una duración de unos 30 minutos cada una.

Instrumentos de recogida de información

Entre las fuentes de información que se usan para extraer datos en un experimento de enseñanza, podemos considerar los trabajos de los alumnos, cuestionarios, las grabaciones de video, audio de las clases, las evaluaciones, las notas de los investigadores, entrevistas, entre otras (DBRC, 2003). Nosotros nos centraremos en los cuestionarios y en un tipo de entrevistas, las semiestructuradas.

Cuestionarios

El cuestionario es una técnica de recogida de datos típicamente cuantitativa pero que presta un importante servicio en esta investigación cualitativa (Herrera, 2017). Nos centramos en los cuestionarios que persiguen recoger una información cualitativa para ser interpretada. El cuestionario debe ser planificado y diseñado con meticulosidad de tal forma que se pueda obtener la información necesaria. De acuerdo con la forma de las preguntas existen tres tipos de cuestionarios: de preguntas cerradas, abiertas y de opción múltiple que permiten recopilar distintos tipos de respuestas (Guerrero, 2016). Nosotros usamos cuestionarios de preguntas abiertas, formulados para obtener respuestas expresadas en el propio lenguaje de los niños que lo cumplimentan y sin límite preciso en la contestación.

La elección de las preguntas en un cuestionario está condicionada por diversos factores tales como la naturaleza de la información que se desea obtener, el nivel sociocultural de quienes van a cumplimentarlo y las características y hábitos de las personas a las que se les va a preguntar.

Los cuestionarios que hemos aplicado durante las sesiones no superan las 20 preguntas y fueron respondidos de forma individual.

Entrevistas semiestructuradas

En los experimentos de enseñanza, además de las sesiones de clase y de los cuestionarios que dan lugar a una producción escrita, pueden emplearse entrevistas para obtener más información que ayude a comprender los patrones de razonamiento de los estudiantes.

De acuerdo a nuestros propósitos de investigación, la entrevista es una herramienta que permite profundizar en las maneras por las cuales los estudiantes generalizan estructuras y expresan las generalizaciones al trabajar con problemas que involucran funciones. Las entrevistas a realizar en el marco del experimento serán individuales y/o grupales y semiestructuradas, con una duración aproximada de 30 minutos. Las entrevistas se basan en preguntas cuyo propósito es explorar la riqueza del pensamiento de los entrevistados, identificar sus actividades fundamentales y evaluar su competencia cognitiva (Ginsburg, 1981).

Los resultados obtenidos al entrevistar a los estudiantes, ya sea de forma individual o en pequeños grupos, se transfieren luego al gran grupo, lo que proporciona una mejor comprensión de la forma en que los alumnos ven determinados conceptos y las explicaciones alternativas que se espera que den los estudiantes (Confrey, 2006). Como lo señalan Cohen et al. (2018), las entrevistas son un instrumento flexible para recolectar información, el cual se caracteriza por tener uno o más propósitos explícitos. La entrevista permite explorar temas en profundidad, para "ver cómo y por qué las personas enmarcan sus ideas de la forma en que lo hacen, cómo y por qué establecen conexiones entre ideas, valores y eventos, opiniones, comportamientos, etc." (p. 506).

La entrevista individual tiene como característica que "las mismas preguntas o temas generales son expuestos a cada uno de los entrevistados" (Bogdan y Biklen, 2007, p. 275). En este tipo de entrevistas, el entrevistador es libre de modificar, según las respuestas de los estudiantes, la secuencia de las preguntas, las cuales se van acomodando a las respuestas de los estudiantes y permiten obtener información más específica (Ginsburg, 1997).

La entrevista grupal es una técnica de recolección de datos cualitativa sumamente eficiente que proporciona algunos controles de calidad sobre la recogida de los datos ya que los participantes tienden a proporcionarse controles y comprobaciones los unos a los otros que suprimen las opiniones falsas (Flick, 2007). La entrevista grupal se realiza con un pequeño grupo de personas, que normalmente no exceden de ocho personas, sobre un tema específico. En la entrevista grupal, el entrevistador debe balancear la entrevista de manera directiva con un rol de moderador, siendo el líder de la dinámica del grupo, desde el principio de la entrevista (Vargas, 2021). El grupo entrevistado debe preocuparse por las preguntas que se les hace y ser sensible en la interacción grupal. Esta técnica no es sencilla; desarrollarla requiere de entrenamiento y experiencia en el manejo de grupos (p. 131).

Según la estructura del protocolo seguido en las entrevistas, estas se pueden clasificar en (a) entrevistas estructuradas (incluye solo preguntas planificadas, se hacen las mismas preguntas a todos (misma formulación y orden); (b) entrevistas no estructuras o abiertas (las preguntas no se planifican y pueden variar según cada sujeto. Hay una guía general de los temas a tratar, pero el entrevistador la maneja con total libertad); y (c) entrevistas semiestructuradas. En esta investigación usaremos entrevistas semiestructuradas.

En una entrevista semiestructurada, el protocolo no es rígido y las preguntas pueden variar según el curso de la entrevista y las respuestas de los participantes. Esto se realiza respetando parámetros comparables entre cada uno de los entrevistados (Ginsburg, 1997). Se pueden realizar preguntas de seguimiento no planificadas, variaciones o aclaraciones (Zazkis y Hazzan, 1998). El entrevistador decide el orden y la formulación de las preguntas, también si profundizará en un tema o no. Esto permite obtener información más detallada y específica. Una ventaja de este tipo de entrevistas es que su estructura flexible facilita el desarrollo de los puntos de vista de los entrevistados en contraste con las entrevistas estandarizas o cuestionarios (Flick, 2012).

3.1.4. Sujetos

Trabajamos con un grupo de 24 estudiantes de un colegio de Granada, durante el curso 2017/2018. El grupo estuvo compuesto por 24 estudiantes de segundo de educación primaria (7-8años). El colegio del que formaba parte el alumnado es concertado y trabaja mediante comunidades de aprendizaje. Se trata de un proyecto basado en un conjunto de actuaciones educativas de éxito orientadas a lograr eficiencia, equidad y cohesión social. El proyecto busca una mejora relevante en el aprendizaje escolar de todos los alumnos, en todos los niveles y, también, el desarrollo de una mejor convivencia y de actitudes solidarias. El centro fue elegido por su disponibilidad a colaborar. Es considerado un centro de nivel socio-cultural bajo.

Los conocimientos previos de los que partían los estudiantes fueron los siguientes: números del 0 al 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con llevadas. La característica fundamental de los participantes es que no habían recibido enseñanza previa en torno a tareas que involucraran alguna función lineal y la generalización antes de las sesiones del experimento.

3.1.5. Fuentes de información

Las fuentes de información consideradas en esta memoria son dos: (a) los cuestionarios cumplimentados por los estudiantes durante las cuatro sesiones y (b) las entrevistas individuales semiestructuradas (A y C) y la entrevista grupal (B).

Cuestionario 1, sesión 1.

La primera sesión sobre la máquina de bolas fue relevante en la investigación. Del análisis de los cuestionarios entregados por el grupo de clase, seleccionamos a seis estudiantes para la posterior entrevista A. Esta selección la hicimos en función de las respuestas que dieron atendiendo a si generalizaron la función o sino lo habían logrado.

En las imágenes siguientes (figura 3-2 y figura 3-3) pueden visualizarse momentos de la recogida de información durante la sesión 1. Se puede ver a los alumnos organizados en grupos de cuatro miembros, como solían trabajar en sus clases habituales y que no modificamos para nuestra investigación. Había dos maestras del centro en el aula y dos miembros del equipo de investigación.

Figura 3-2.

Sesión 1. Organización de la sesión

Figura 3-3.

Sesión 1. Presentación del contexto de la tarea

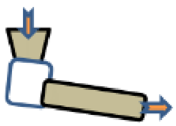
En la figura 3-4 aparece a modo de ejemplo, una pregunta del cuestionario que cumplimentaron cada uno de los alumnos durante la sesión 1. El resto puede verse en el Anexo A.

Figura 3-4.

Cuestionario 1

Nombre y apellidos:____

4. Pon el número de bolas que tú quieras al principio de la máquina.
¿Cuántas bolas salen?

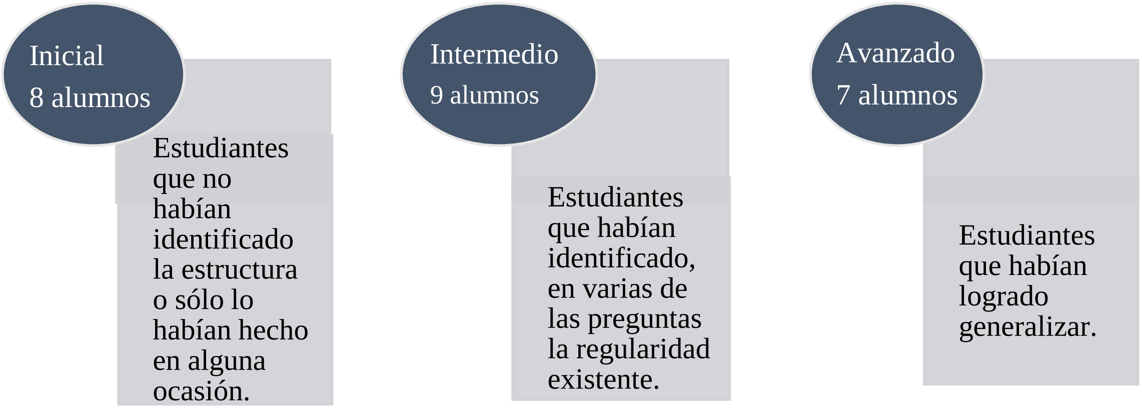


Participantes seleccionados

Para seleccionar a los estudiantes que entrevistaríamos, analizamos las respuestas de los 24 estudiantes al cuestionario dado en el Anexo A. Organizamos a los estudiantes en tres grupos, según sus logros de aprendizaje (avanzado, intermedio e inicial), con base en sus avances en la identificación de estructuras y en la generalización. Mostramos la organización en la figura 3.5.

Figura 3.5.

Selección de los estudiantes



Tras esta agrupación, y con ayuda de la maestra de la clase, seleccionamos a los seis estudiantes de cada curso considerando su disposición para colaborar (2 estudiantes de cada grupo; inicial, intermedio y avanzado). Un total de seis alumnos componen la muestra.

Entrevista A

La entrevista A fue una entrevista semiestructurada e individual. La entrevista A se realizó con los seis estudiantes, seleccionados previamente. Específicamente, profundizamos en: (a) las respuestas escritas de los estudiantes a las cuestiones del cuestionario de la sesión 1 (Anexo A) y (b) en sus respuestas orales y escritas durante la entrevista.

El espacio físico en el que tuvo lugar la entrevista A fue un aula del mismo colegio, diferente a la habitual del grupo. Puede observarse el entorno en la figura 3-6.

Figura 3-6.

Situación durante la entrevista A

Durante la entrevista A, planteamos preguntas en torno a los casos particulares de distintas formas partiendo en primer lugar de cantidades más pequeñas para ir aumentando poco a poco acercándonos al caso general. El protocolo de actuación puede verse en el Anexo B.

En las cuestiones relacionadas con los casos particulares, partimos de cantidades pequeñas —menores de 20— y progresivamente aumentamos la cantidad de bolas que pueden entrar en la máquina — entre 20 y 100—, para continuar con cantidades mayores de 100, acercándonos poco a poco así a lo indeterminado, a lo general.

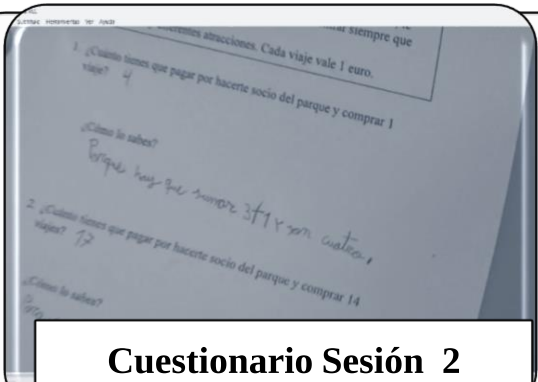
Cuestionarios 2, 3 y 4, relativos a las sesiones 2,3 y 4.

Aquí presentamos los cuestionarios relativos a la producción escrita de los estudiantes que es la que nos sirve de fuente de información complementaria a las entrevistas.

De manera general, pretenden explorar la interpretación que hacen los estudiantes de las relaciones entre las variables implicadas. Es decir, nos centramos en interpretar las estructuras que evidencian a partir de diferentes cuestiones sobre casos particulares y generales. Las preguntas que componen los cuestionarios las presentamos en la figura 3-7. Pueden verse en detalle en los Anexos C, D y E.

En estas cuestiones hemos implicado términos indeterminados como “muchos” o incluso dibujos para expresar una cantidad indeterminada de viajes y de personas para los casos generales de los cuestionarios 3 y 4.

Figura 3-7.
Cuestionarios



Cuestionario Sesión 2

Casos particulares

- ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 1 viaje?¿Cómo lo sabes?

• ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 14 viajes? ¿Cómo lo sabes?

• ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 7 viajes? ¿Cómo lo sabes?

• ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 100 viajes? ¿Cómo lo sabes?

• ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar un millón de viajes? ¿Cómo lo sabes?

• **Caso general**

• Un niño de la clase ha dicho que se hizo socio y las veces que viaja en las atracciones. Explícale cómo puede calcular cuánto se ha gastado

Cuestionario Sesión 3

Casos particulares

- ¿Cuánto pagas por el carnet y 1 viaje? Explícame cómo lo haces.

- ¿ Cuánto pagas por el carnet y 20 viajes? Explícame cómo lo haces.

- ¿ Cuánto pagas por el carnet y 10 viajes? Explícame cómo lo haces.

- ¿ Cuánto pagas por el carnet y un millón viajes? Explícame cómo lo haces.

Caso general

• Isabel paga por el carnet y muchos viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.

• Isabel paga por el carnet y [redacted] viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.

Cuestionario Sesión 4

Casos particulares

- Si hay 2 personas en el cumpleaños ¿Cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame cómo lo haces

- Si hay 4 personas cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame cómo lo haces

- Si hay 10 personas cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame cómo lo haces

- Si vamos al cumpleaños las 20 personas de la clase ¿Cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame cómo lo haces

- Si van 120 personas al cumpleaños , todo el cole de primaria ¿Cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame cómo lo haces

Caso general

- Los padres de Lucía han recibido una carta de su amigo extratrerrestre Marsian. Les ha dicho (en su idioma) que van a venir Ω extratrerrestres a la fiesta ¿Puedes escribirle a Marsian los platos que se necesitan? Explícame cómo lo haces

Entrevista B

Después de las sesiones 2, 3 y 4 del experimento de enseñanza, seguimos profundizando en el pensamiento funcional de los estudiantes mediante la entrevista B. Esta entrevista fue semiestructurada y grupal. El entorno en el que la desarrollamos se observa en la figura 3-8.

Figura 3-8.
Situación de la entrevista grupal.

Los focos de la entrevista fueron: (a) Describir cómo organizan los valores en la tabla e (b) identificar estructuras con ayuda de la tabla. Para esta entrevista, usamos diferentes tablas. La primera de ellas fue la tabla en blanco dada en la figura 3-9.

Figura 3-9.

Tabla en blanco de la entrevista grupal

De esta manera comenzamos la exploración sobre la relación entre las variables implicadas. La forma en la que seguimos con la tarea fue con diferentes casos particulares. Por ejemplo, “¿cuántas personas lleva el tren cuando pasa por 3 paradas?” o “¿Y cuando pasa por 5 paradas?”. Los alumnos fueron dando diferentes respuestas que aprovechábamos para continuar preguntando sobre la interpretación que podían hacer de la tabla: “¿Recordáis haber usado algo como esto antes?”, “¿Cómo podríamos escribir la información que nos da el problema en la tabla que os hemos dado?” o “¿Cómo podemos escribir los diferentes números dados para las paradas y las personas del tren?”.

Después de que los estudiantes se familiarizaran con la situación, seguíamos haciéndoles preguntas: “¿Qué podríamos escribir al principio, en los títulos de las columnas, para organizar la información de este problema? ¿Se os ocurre alguna forma?” “¿Qué relación existe entre los números que están ubicados en la primera columna?” “¿Qué relación existe entre los números que están ubicados en ambas columnas?”

Después de las preguntas sobre casos particulares pasamos a preguntar por el caso general incluyendo en ocasiones términos indeterminados: “Queremos saber cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas”. “¿Cómo puedes saber cuántas personas lleva el tren?", "¿Cómo le explicarías a un amigo cuántas personas llevará el tren cuando pasa por infinitas paradas?" o "¿Creéis que usar esta tabla nos puede ayudar a encontrar la cantidad de personas que hay después de cualquier número de paradas?"

Después de la tabla en blanco, presentamos otra tabla con el objetivo de profundizar en la relación entre las variables. En esta tabla hay algunos valores erróneos con los que pretendemos que los estudiantes justifiquen sus argumentos, corrigiéndolos. Presentamos esta tabla en la figura 3-10.

Figura 3-10.
Tabla a corregir en la entrevista grupal

Número de paradas	Número de personas	Corrección ¿Por qué crees que está bien o por qué crees que está mal?
5	9	
2	4	
10	5	
50	25	
100	220	
1 millón	2 millones	

De esta manera, reforzamos los datos obtenidos anteriormente al identificar de una nueva manera la estructura evidenciada por cada uno de ellos en esta tarea y su comprensión sobre los valores registrados ya en una tabla. En el Anexo F está el protocolo de actuación seguido durante la entrevista B.

Entrevista C

La entrevista C fue la última entrevista realizada y fue semiestructurada e individual. Los focos de esta entrevista están centrados en profundizar en las formas directa e inversa de las funciones y también en el uso de tablas. El protocolo completo de actuación puede verse en el Anexo G. En la figura 3-11 vemos la situación dada durante la entrevista C.

Figura 3-11.
Situación durante la entrevista C

Durante la entrevista los estudiantes contaban con una tabla de dos columnas con los títulos incompletos como la de la figura 3-12. Exploramos las interpretaciones de las tablas por parte de los estudiantes al trabajar con el contexto de las paradas de tren.

Figura 3.12.
Tabla usada durante la entrevista C

Edad de	Edad de

El proceso basado en la exploración de las estructuras en la forma directa de la función, se sitúa de manera paralela al interés por el razonamiento con la representación tabular ya que los estudiantes contaban en el momento de las preguntas con la tabla de la figura 3-12 que iban usando. Por esta razón, incluimos además preguntas análogas a las dadas en la entrevista A basadas en razonar sobre la representación.

De manera análoga a la entrevista B, planteamos preguntas sobre diferentes casos particulares no consecutivos, evitando la recurrencia (números menores a 20: 1, 4, 5, 7, 8, 9, 10…). Por ejemplo: "Cuando Iron Man cumplió 5 años, el Capitán América cumplió 9, cuando Iron Man cumplió 7 años, el Capitán América cumplió 11, cuando Iron Man cumplió 3 años, el Capitán América cumplió 7…" Después de estos casos, les facilitamos a los estudiantes una hoja con una tabla donde incluíamos la expresión "Edad de" en los encabezados de las columnas como se observa en la figura 3-12.

Los títulos de las columnas de la tabla son indicaciones, una ayuda, pero no corresponden a los títulos de los encabezados pues no aparecen los nombres de las variables. Después de los primeros casos particulares continuamos, con otros casos particulares mayores (mayores a 20 y menores a 100): 23, 31, 52… (los números mayores a 100 estuvieron formados con dígitos del 0 al 3). Se establecieron estos intervalos por los conocimientos previos de los niños.

Contamos con casos particulares propuestos por los estudiantes ya que les sugerimos que propusieran cantidades diferentes las trabajadas: "Dime una edad para Iron Man (______). Si cumple esos años ¿cuántos años cumple el Capitán América? Explícame cómo lo has pensado".

Finalizábamos preguntamos por la generalización: "Cuando Iron Man cumpla muchos años ¿cuántos años cumplirá el Capitán América?", "si Iron Man cumple "infinitos" años, ¿cuántos años tendrá el Capitán América?", "¿cómo le explicarías a un amigo qué debe hacer para conocer la edad del Capitán América?" O, por ejemplo: "Otro niño de la clase dice que cuando Iron Man tiene XX años, el Capitán América tiene YY años". "¿Estás de acuerdo con él?".

De manera análoga al trabajo anterior con la forma directa de la función, ampliamos la exploración a la forma inversa de la misma. Nos centramos en identificar estructuras y en observar el uso de la tabla. Ahora las cuestiones planteadas (casos particulares) son del tipo: "Cuando la edad del Capitán América tiene XX años, ¿cuál es la edad de Iron Man?". Siendo XX cualquier número. Para el caso particular la cuestión es del tipo: "¿Cómo explicarías cómo calcular la edad del Capitán América si conoces la edad de Iron Man?".

3.1.6. Fuentes de información y objetivos de los estudios

En esta sección relacionamos las fuentes de información presentadas anteriormente con los objetivos de los estudios que componen esta Tesis Doctoral. En la tabla 3-2. especificamos esta relación.

Tabla 3-2.

Relación entre los objetivos de los estudios que conforman la tesis y las fuentes de información utilizadas

Título del estudio	Objetivo	Fuente de información	Tarea (Función)
1. Generalization process by second grade students	O.1. Describir el proceso de generalización seguido por los estudiantes. O.2. Identificar y describir las estructuras reconocidas por los estudiantes en su evolución hacia la generalización. O.3. Caracterizar los tipos de generalización expresados por los estudiantes.	Cuestionario 1 y Entrevista A	Máquina de bolas (y=x+3)
3. The evolution from "I think plus three" towards "I always think plus three". An experience of transition from arithmetic generalization to algebraic generalization in the context of functional thinking.	O.1. Identificar y describir el proceso de generalización de estudiantes de segundo de primaria	Cuestionario 1 y Entrevista A	Máquina de bolas (y=x+3)
2. Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años	O.1. Identificar y comparar las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directa e inversa de una función, tanto en el trabajo con casos particulares como en el caso general.	Entrevista C	Edad de los superhéroes (y=x+4)
4. Recognition of structures and generalization by second graders in direct and inverse forms of a linear function	O.1. Describir cómo los estudiantes identifican las estructuras en las variables involucradas. O.2. Caracterizar cómo generalizan las formas directa e inversa de la función utilizada.	Entrevista B y C	Paradas de tren (y =2x) Edad de los superhéroes (y =x+4)

5. Introducing tables to second-year primary students in a context of algebraic thinking	O.1. Explorar el uso e interpretación de las tablas por los estudiantes al trabajar con dos tareas de generalización que involucran dos funciones lineales diferentes. O.2. Describir cómo organizan los valores en una tabla identificando la sugerencia de títulos para los encabezados (identificación de las variables) y reconocen la regularidad entre las variables (expresan la estructura).	Entrevista B y C	Paradas de tren (y =2x), Edad de los superhéroes (y =x+4)
6. Pensamiento funcional de alumnos de 2º de primaria: estructuras y representaciones	O.1. Identificar las estructuras que evidencian los estudiantes durante las tareas de generalización. O.2. Describir las representaciones que usan los estudiantes.	Cuestionarios 2, 3 y 4, y entrevista B	Parque de atracciones 1 (y =x+3), Parque de atracciones 2 (y =2x+1), Cumpleaños (y =2x) y Paradas de tren (y =2x)

3.1.7. Análisis de datos

Considerando los datos extraídos de las fuentes de información, hemos llevado a cabo el procesamiento de la información mediante una codificación cualitativa (Hernández, 2010), a partir de las producciones orales y escritas de los estudiantes en las entrevistas y los cuestionarios.

En nuestro análisis cualitativo los propósitos centrales han sido: (a) explorar los datos, (b) imponerles una estructura (organizándolos en unidades y categorías), (c) describir las experiencias de los participantes según su lenguaje y expresiones y (d) descubrir los conceptos, categorías, temas y patrones presentes en los datos, así como sus vínculos, a fin de otorgarles sentido, interpretarlos y explicarlos en función del planteamiento del problema (Bryman, 2016).

El análisis lo hemos realizado sobre las transcripciones de entrevistas y las producciones escritas de los estudiantes a los cuestionarios. Nos hemos apoyado en los videos. Utilizamos algunos extractos de las grabaciones para ilustrar y complementar algunas respuestas escritas de los alumnos, y el tratamiento de imágenes cuando ha sido necesario, en función del objetivo de investigación que estemos abordando. No todos los estudiantes participaron oralmente en las discusiones video-grabadas.

En el proceso de codificación generamos categorías de análisis basadas en el proceso de generalización que siguen los estudiantes considerando las estructuras evidenciadas en los casos particulares y las estructuras generalizadas, así como las representaciones que éstos usaron al generalizar. Este planteamiento es general y se detallará el análisis de datos seguido para cada uno de los estudios que componen esta memoria.

Considerando los objetivos de investigación, establecimos las siguientes categorías de análisis con las cuales analizamos las respuestas de los estudiantes: (a) proceso de generalización; (b) estructuras; (c) generalización; y (d) representaciones (cada categoría varía según el foco de los estudios desarrollados).

La codificación de las repuestas fue revisada por la directora de esta tesis, coautores respectivos y otros investigadores del proyecto expertos en Didáctica de la Matemática, lo que nos permitió hacer triangulaciones de expertos. Para cada uno de los análisis, empleamos hojas de cálculo, en las cuales registramos las respuestas de los estudiantes y las codificamos.

Capítulo 4. Resultados

En este capítulo presentamos lo resultados de esta Tesis Doctoral, los cuales están organizados en seis estudios (tres de ellos publicados y los otros tres en revisión). Los estudios persiguen los objetivos específicos de esta investigación. A continuación, presentamos el orden de los estudios según aparecen en este capítulo.

Estudio 1. Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematic,* 9, 1109. https:// doi.org/10.3390/math9101109.
Estudio 2. Torres, M. D., Moreno, A., Vergel, R. y Cañadas, M. C. (en revisión). An experience of transition from arithmetic generalization to algebraic generalization in the context of functional thinking.
Estudio 3. Torres, M. D., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Gómez, P. (2021). Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años *Uniciencia. 35*(2). https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.16.
Estudio 4. Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (en revisión). Recognicion of structures and generalization by second graders in direct and inverse forms of a linear function.
Estudio 5. Torres, M. D., Brizuela, B., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics, 10*, 56. https://doi.org/10.3390/ math10010056.
Estudio 6. Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (en revisión). Pensamiento funcional de alumnos de 2º de primaria: estructuras y representaciones.

Estos estudios analizan las respuestas de los estudiantes al responder al problema de la máquina de bolas (estudios 1 y 2), donde se atiende esencialmente al proceso de generalización seguido por los estudiantes donde las estructuras evidenciadas adquieren un papel fundamental en ese proceso. Los estudios 3 y 4 están centrados en analizar cómo son las generalizaciones dadas por los estudiantes en la resolución de problemas que involucran las formas directas e inversas de las funciones implicadas en las tareas de la edad de los superhéroes y de las paradas de tren. Finalmente, los estudios 5 y 6 analizan diferentes representaciones que pueden emplear los estudiantes para expresar las estructuras y la generalidad.

Los estudios los presentaremos siguiendo el formato de los manuscritos que se han enviado a las revistas, por lo que se presentan siguiendo las normas de las mismas. En la tabla 4-1 relacionamos los estudios con los objetivos de esta Tesis Doctoral.

Tabla 4-1.

Objetivos de la tesis y objetivos de los estudios

Estudio	Título	Objetivos	Relación objetivos tesis
1	Generalization Process by Second Grade Students	1. Describir el proceso de generalización desplegado por los estudiantes. 2. Identificar y describir las estructuras reconocidas por los estudiantes en su evolución hacia la generalización. 3. Caracterizar los tipos de generalización expresados por los estudiantes.	O. E2. Describir las estructuras que generalizan los estudiantes O. E3. Describir el proceso de generalización desplegado por los estudiantes. O. E5. Caracterizar los tipos de generalización expresados por los estudiantes.
2	An experience of transition from arithmetic generalization to algebraic generalization in the context of functional thinking.	1. Identificar y describir el proceso de generalización de un estudiante de segundo curso caracterizando las generalizaciones producidas. 2. Describir cómo los estudiantes identifican las estructuras en las variables involucradas.	O. E3. Describir el proceso de generalización desplegado por los estudiantes. O. E5. Caracterizar los tipos de generalización expresados por los estudiantes.
3	Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años	1. Identificar y comparar las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directa e inversa de una función, tanto en el trabajo con casos particulares como en el caso general.	O. E1. Identificar y describir las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directa e inversa de una función.

4	Recognition of structures and generalization by second graders in direct and inverse forms of a linear function	1. Caracterizar cómo generalizan las formas directa e inversa de la función utilizada.	O. E1. Identificar y describir las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directas e inversa de una función.
5	Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context	1. Describir cómo organizan los valores en una tabla. 2. Identificar implicaciones de los respectivos títulos (identificación de las variables) y cómo identificaron la regularidad intervariable (la estructura).	O. E6. Analizar los sistemas de representación que usan los estudiantes para evidenciar las estructuras
6	Pensamiento funcional de alumnos de 2º de primaria: estructuras y representaciones	1. Identificar las estructuras que evidencian los estudiantes durante las tareas de generalización 2. Describir las representaciones que usan los estudiantes.	O. E2. Describir las estructuras que generalizan los estudiantes O. E6. Analizar los sistemas de representación que usan los estudiantes para evidenciar las estructuras

ESTUDIO 1

Generalization Process by Second Grade Students

Mathematics 2021, 9, 1109. https:// doi.org/10.3390/math9101109

Received: 13 February 2021/ Accepted: 6 May 2021/ Published: 14 May 2021

Article

Generalization Process by Second Grade Students

María D. Torres *, Antonio Moreno and María C. Cañadas

Department of Mathematics Didactics, Faculty of Education Sciences, University of Granada, 18071 Granada, Spain; amverdejo@ugr.es (A.M.); mconsu@ugr.es (M.C.C.)

* Correspondence: mtorresg@ugr.es; Tel.:+34-649-812-349

Abstract: This study is part of a broader study on algebraic reasoning in elementary education. The research objective of the present survey, namely to describe generalization among second grade (7- to 8-year-old) students, was pursued through semi-structured interviews with six children in connection with a contextualized generalization task involving the function $y = x + 3$. Particular attention was paid to the structures recognized and the type of generalization expressed by these students as they reasoned. In all six, we observed three phases of inductive reasoning: (a) abductive, (b) inductive and (c) generalization. The students correctly recognized the structure at least once during the interview and expressed generalization in three ways.

Keywords: algebraic thinking; functional thinking; generalization; inductive reasoning

1. Introduction

Inductive reasoning is a necessary process towards generalization because it both favors knowledge building by observing specific cases and enables the subject to verify a conjecture by working with such cases [1]. Inductive reasoning is introduced from the earliest years of schooling to help children acquire knowledge. In preschool, for instance, children are shown different objects of the same color until they are able to distinguish the ones of that color from those of other colors and ultimately understand what it means to "be that color". Inductive reasoning is a cognitive process that begins with working with specific cases, followed by formulating, and then verifying conjectures [2]. Generalization is pivotal to inductive reasoning because it is the pathway for generating knowledge, especially mathematical knowledge [1].

Generalization is also deemed a fundamental notion in algebraic contexts, in the lower grades especially. The general consensus in mathematics education is that generalization is pivotal to mathematical activity in general and algebraic thinking in particular (e.g., [3]) because it enables subjects to generate mathematical knowledge [1]. Introducing generalization in the lower grades enables students to distance themselves from the particulars inherent in arithmetic calculations and identify structure and the mathematical relationships involved [3].

Working from different approaches to algebraic thinking for very young children helps them to generalize by identifying regularities or patterns in a given mathematical situa- tion [4]. From the various types of algebraic thinking dealing with basic algebraic notionsin the lower grades, we focus here on functional thinking. Functional thinking revolves around the relationships between two (or more) covariant quantities. More specifically, it involves thinking processes evolving from specific relationships to their generalization [3] (p. 143). The general consensus in mathematics education is that generalization is a core component of mathematical knowledge and a key to algebraic thinking (e.g., [3]).

Functional thinking is a type of algebraic thinking that adopts the function as essential mathematical content [5]. Function is a key concept in secondary school curricula, where students move from the operational to the structural vision of the idea [6]. In elementary education, in contrast, functional thinking is deemed to include activities focusing on the generalization of the relationships among covarying quantities, the expression of such (functional) relationships using different manners of representation and the applicationof the expressions to analyze the behavior of a function [7]. Reference [8] explores verbal representations of the functional relationships recognized and the strategies used by (6- to 7-year-old) first graders when performing generalization tasks in a functional thinking context. They observed some pupils to be able to identify the covariant relationship at issue, finding functional relationships to be associated with students' operational strategies or counting. Earlier studies (e.g., [9]) reported elementary school students identifying general properties by building on specific situations involving a relationship between two sets of values. This general rule may be established in terms of inductive reasoning [10], in which generalization is the outcome of identifying regularity in inter-variable behavior.

Research on generalization among elementary school students has grown in recent decades (e.g., [10–13]). Whereas symbolizing general ideas helps students build a new platform from which to express and think about unknown situations [14], research has shown that their thinking process entails algebraic thinking, even where algebraic symbolism is lacking.

Particularly prominent in this regard are the studies conducted by [15] with elementary school children of different ages. These authors published a longitudinal study in which they characterized different levels of sophistication in children's reasoning around functional relationships in their learning process. Their results suggested that children can learn to think in general terms about relationships between functional data, challenging the standard curricular assumption that students in the lower grades can detect variation only in a single sequence of values. Different studies address generalization with first, second and third graders (e.g., [10,11]). However, for second grade, we have not found results about how these students express structures during a generalization process.

Our research objective is to describe how second graders reason as they evolve toward generalization (process) and how they express generalization (result) as part of inductive reasoning. Inductive reasoning is broken down into two phases, abduction and induction, to obtain greater insight into such evolution. Abductive reasoning is an initial stage in which subjects draw from knowledge and prior experience when trying to explain an event. Abductive explanation is a conjecture that must be tested before becoming belief [16]. In inductive reasoning (in this article, we use the terms "induction" and "inductive reasoning" indistinctly as synonyms for the same cognitive process), an abductive conjecture is tested with specific cases. Both abductive and inductive reasoning serves as support for subsequent generalization. In the present study of the reasoning process, we addressed the structures identified by the children when performing generalization tasks involving linear functions. Generalization tasks enable students to explore and express functional thinking. Such research is deemed necessary for in-depth functional thinking research [17], for it attempts to respond to questions still unresolved in the literature around how very young children generalize functional relationships between two quantities. More specifically, it explores the types of relationships expressed by children and the sophistication of their thinking about such relationships [15].

1.1. *Abductive and Inductive Reasoning*

Abduction was introduced by [18], who deemed it, like induction, to be a form of inference characterized by the generation of hypotheses. Abduction is the first and least certain stage of inference, for it entails building preliminary explanations [19]. For Peirce, abductive conclusions always have a lower epistemic status than inductive conclusions [20]. According to [21], to abduct is to generate a hypothesis or narrow a range of hypotheses based on a few specific cases, a process subsequently verified via inductive reasoning. From Peirce's perspective, induction consists not of creating but of verifying; i.e., inductive reasoning does not deliver new knowledge. Its purpose is to verify and, in some cases, amend theory. It primarily entails determining the verity of the hypothesis posed [22]. According to [23], the abduction phase is an initial period when testing is repeated and conjectures formulated. The expectation is that possible errors will be corrected in the inductive phase, which in turn evolves toward generalization based on the available evidence [21]. Induction is deemed a powerful knowledge-building resource that owes its potential essentially to the presence of generalization as one of its components. Generalization involves abstracting the systematic and common features of events [24].

Authors such as [25] contended in a study on patterns that abduction precedes generalization. During abductive reasoning, subjects discover regularity, enabling them to formulate initial conjectures when working with the first specific cases included in a task. In the abductive phase, a structure is accepted as valid based on the early specific cases, subject to verification with further cases, and ultimately inducing generalization. A conclusion drawn from an abductive inference carries less weight than one drawn from induction [26]. Induction entails confirming the conjecture premised. Regularity is accepted after such confirmation, enabling the subject to generalize [25]. The process is summarized in Figure 1.

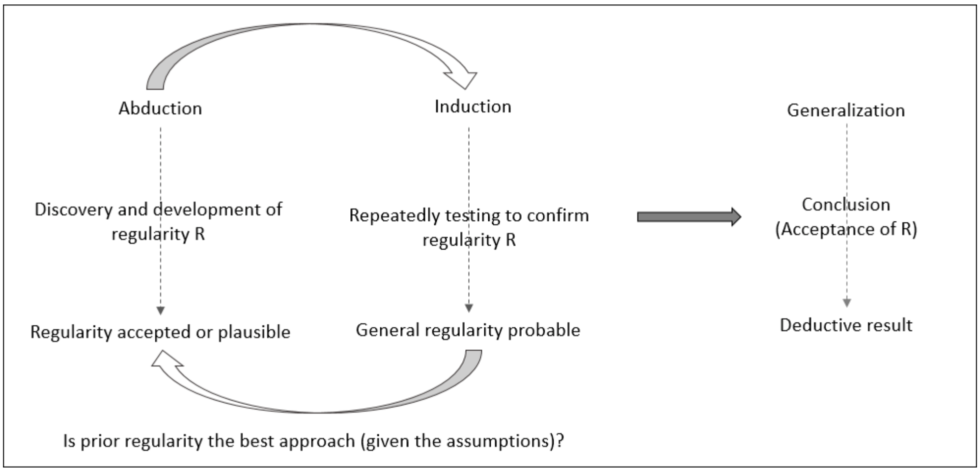


Figure 1. Abductive-inductive process [25]. Reproduced with permission of Rivera, F; Becker, J. R.

The author of [21] stressed that untested explanations may be put forward in the abduction phase, during which trial-and-error does not yield algebraic generalization because the specific cases involve numbers, which are specific values of the variables at issue [3]. In this article, Radford deemed abduction to form part of objectivation theory, which divides into stages the reasoning followed by students when working with patterns. The authors of [27] used abduction to explain the reasoning deployed by 9- and 10-year-olds when evolving toward algebraic thinking. Reference [8] associated the abductive phase with subsequent generalization based on representing structures. Structure is discussed in a later section of this article.

Reference [9] defined a seven-step inductive reasoning model (Figure 2) as part of the findings of research describing work with 359 secondary school students performing tasks that involved generalization.

1. *Working with specific cases* or examples, normally simple and readily identifiable, to initiate the process.
2. *Organizing specific cases* to arrange the data gathered in a way that helps to perceive patterns, in tables or rows and columns and ordered by some criterion.
3. *Seeking and predicting patterns* in the specific cases observed (which may or may not be organized) to formulate the next case on those grounds.
4. *Formulating conjectures* or premises assumed to be true subject to testing, which may lead to acceptance or rejection, the latter when an example is found for which the conjecture is not valid, for instance. In such cases, to use Popper's (1967) phrasing, the conjecture is refuted.
5. *Justifying conjectures*, meaning any reason put forward to defend the verity of an assertion, normally distinguishing between empirical and deductive conjectures. The former use examples as argument and additional specific cases for verification.
6. *Generalizing*, in which the conjecture is expressed in a way that refers to all the cases of a given type and implies extending reasoning beyond the specific cases explored.
7. *Proving* or formal validation establishing the unequivocal validity of the conjecture at issue.

Figure 2. Inductive reasoning model proposed by [9]. Reproduced with permission of Cañadas, M.C.; Castro.

The authors stressed that while all seven steps are useful for helping students progress toward generalization, the ultimate objective, all may not necessarily be present, appear in the order shown, or carry the same weight in inductive reasoning. Generalization is a key step, whereas organizing specific cases may prove helpful but is not routinely present. Some studies (e.g., [7]) used the model to design questionnaires exploring generalization in the lower grades; it has also been used at the university level. Reference [28] applied it to describe and characterize inductive reasoning among pre-service training elementary school teachers. The model was also used by [29] in a functional context, describing the steps followed by fourth graders working toward generalization.

1.2. Structures

As a rule, part of the inductive process in the evolution toward generalization entails observing regularities in the situation posed. In the aforementioned inductive model, that idea is captured in the third step—seeking and predicting patterns. The term pattern is normally associated with situations in which all the values in a given set are explicitly described. In mathematics education, the term structure is widely used with different meanings, although it always infers breaking an entity down into its inter-connected or inter-related component parts [30]. More specifically, structure expresses the relationships among numerical quantities, the properties of operations and inter-operational relationships [31].

Here we use the term to mean regularity in a functional algebraic thinking context. So defined, structure has to do with the terms comprising a functional algebraic expression, the signs inter-relating them, the order of the operations involved and the relationships among their elements. Structure is therefore associated with the manner in which the elements of an inter-variable regularity are organized and their inter-relationships [32]. Function is taken here to mean the numbers and numerical variables (expressed via different representation systems) as well as operations and inter-operational properties forming part of a regularity identified by the student [33]. The idea is analogous to the term "pattern" used in the [9] model, although the contexts in which the ideas are applied differ. Whereas patterns tend to deal with only one set of values with recurrence as the most obvious relationship, structures entail working with two or more sets of values.

Students may be able to detect structures on the grounds of how they represent them, both when working with specific cases and when generalizing [33]. Some researchers note that before being able to generalize, pupils must "see" the structure in a mathematical situation [8]. Identifying structure in a mathematical situation is therefore the key to induction-mediated generalization.

In the three specific cases illustrated in Figure 3, regularity may be identified as the recurrence of consecutive terms in a sequence. The position of each of the elements and the sequence in which they appear are the keys to this type of task, which differs from the generalization tasks explored here.

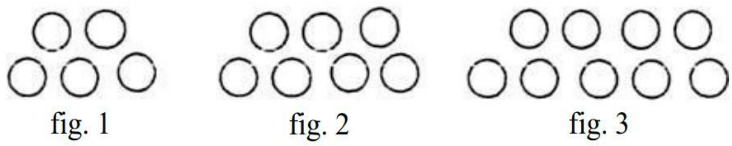


Figure 3. Pattern task [26]. Reproduced with permission of Vergel, R.

It also differs from the generalization task based on the relationship between the ages of two superheroes, given as $y = x + 4$ [34], shown in Figure 4.

> Two superheroes, Iron Man and Captain America, have birthdays on the same day. When Iron Man was 5 years old, Captain America was 9.

Figure 4. Generalization involving superheroes' age.

Identifying structure calls for the existence of a relationship between two variables perceptible in specific cases. Such cases are characterized by the absence of sequence in the representation of the variables involved. In structure, both the domain and the range are explicit numerical sets.

Reference [8] showed that when students identify structures in mathematical tasks, they experience mathematics more deeply. Reference [33] concluded that when solving the tile problem involving the relationship $y = 2x + 6$, third graders (8- to 9-year-olds) invoked 17 different structures for a given regularity, five of which were correct. They also used structure to answer the items on the questionnaire. In a paper on structures involving the functions $y = 1 + 2x$, $y = x + 3$ and $y = 2x$, [34] observed consistency in students' replies,for they identified only one different structure for the same regularity with the functions $y = 2x + 1$ and $y = 2x$.

Evidence of the presence of structures does not in itself suffice, however, to determine whether students recognize the relationship in a specific situation or merely see it as an example of a general property applicable to different situations. As [8] noted, "because language is necessarily general, it is very difficult to tell from a learner's works whether they are dwelling totally in the specific and the particular, are vaguely aware of the particular as a special or specific case of something more general, or are aware of the particular as an instantiation of a general property" (p. 11).

1.3. Generalization

Generalization is a core element in inductive reasoning and is essential to mathematical reasoning, which entails seeing beyond the particularities of a mathematical situation to draw a conclusion [35].

In the area of research on children's algebraic thinking, generalization is a key process in the early years of schooling. Some authors [36] contend that children are naturally inclined to perceive and discuss regularity, a fundamental component of generalization, even when they lack the resources needed to represent general relationships. Generalization includes establishing general relationships between covarying quantities, expressing those relationships through different types of representation (verbal, symbolic, tabular or graphic, for instance) and reasoning with such representation to analyze the behavior of a function [5]. In particular, generalization is the core notion in inductive reasoning and forms part of the highest stratum of functional thinking. In order to generalize, subjects must identify the regularities in the behavior of a functional task. A conjecture established on the grounds of regularities identified and validated by detecting further regularities ina given situation may induce generalization of the behavior observed in the function at hand.

Generalization tasks entail building new specific cases on the grounds of one or several specific cases or the general term. They therefore necessitate identifying the structure or behavior pattern in specific cases. While letters are essential, inherent in any discussion of generalization in elementary education is the acknowledgement that students may express relationships not only in terms of algebraic symbols but also in natural language or by gesturing [11]. Verbal and pictorial representation may also be instrumental when working with children in the lower grades [15].

References [36,37] distinguish four types of algebraic generalization, three of which are algebraic and one arithmetic. In the fourth, generality is a similarity observed among certain cases that does not suffice to develop an expression valid for whatsoever term in the sequence. The author defines algebraic generalization of patterns as generalization involving (a) the awareness of a common property detected by working with a number of specific cases; (b) the application of that property to the following cases in the series; and (c) the ability to use that common property to deduce a direct expression with which to calculate the value of any term in the series. Factual, contextual and symbolic generalization are sub-types of algebraic generalization [11]. Factual generalization is based on actions performed with numbers, with actions being words, gestures and perception. It is expressed as specific action through work with numbers. In the factual type, generalization is implicit; students may point with their gaze, gesture with a pencil, say "here" or point with their fingers and say "plus three". Factual generalization is the first form of generalization, the form where perception, based on different mechanisms used by students to communicate, induces computation, which enables them to move from the particular to the abstract. It is generalization from which any specific case can be addressed, i.e., it is permanently associated with the specific. Contextual generalization is the abstraction of a specific action. It differs from factual generalization in that it does not involve operating with specific numbers. To put it another way, contextual generalization is the description of the general formulation in which gestures and words are replaced with "key" phrases, with students saying things like "always plus three". Symbolic generalization is the representation of sequences with algebraic alphanumerical symbols [37]. "Key" phrases are represented with algebraic alphanumerical symbols.

1.4. Research Objectives

The general research objective of this study is to describe the generalization process deployed by second-grade pupils. In particular, we lend special attention to the structures and the types of generalization evidenced by the students. The specific research objectives are the following.

1. To describe the generalization process deployed by the students.
2. To identify and describe the structures recognized by the students in their evolution toward generalization.
3. To characterize the types of generalization expressed by the students.

2. Materials and Methods

This exploratory, descriptive study employed qualitative data analysis. Working sessions consisting of individual interviews were conducted using a design research approach [38] with three aims: (a) to explore how students related the variables involved; (b) to identify structures on the grounds of the students' answers; and (c) to explore how the students generalized in their reasoning.

We worked with verbal productions of children. We were able to develop this research after obtaining permission from their parents and from the schools. The schools preserve the original documents, as the Spanish law dictates. This study was developed in the context of the project EDU2016-75771-P.

2.1. Students

Initially our subjects comprised a group of 24 students enrolled in the second grade (7- to 8-year-olds) in the academic year 2017/2018. The non-random sample was chosen on the grounds of the availability of a charter school in Granada (Spain), located in the northern district of the city. The participating institution implements a "learning communities" project to induce social and educational change geared to the profiles of the student body. The curriculum of elementary education in Spain establishes the knowledge that students have to acquire at this stage. In order to complement this information, we interviewed the usual students' teacher about their mathematical knowledge. Concerning the topics related to the kind of tasks that we were posing, prior knowledge included the use of numbers from 0 to 399, numerical comparison, addition with carrying, and subtraction without borrowing. Their primary trait from the perspective of the study was that they had never worked with problems involving a linear function or generalization.

On the grounds of their replies to a questionnaire, the students were divided into three groups: beginning, intermediate, and advanced. All the students answered the written questionnaire individually. It included a generalization task in which the number of balls going into a machine was related to the number coming out by the functional relationship $f(x) = x + 3$. The questionnaire and interview questions were based on the inductive model specified by [9], i.e., the specific cases posed at the outset were designed to induce generalization. The first group included eight students who had not identified the structure. The nine students in the second group identified the structure involved in several (about 3 or 5 questions) of the questions, and the seven students in the third group proved able to generalize. The students' teacher chose two students from each group for the interviews (beginning: S1, S2; intermediate: S3, S4; advanced: S5, S6) based on their academic performance and classroom participation. This election was based on the teacher's assessment and knowledge of the students.

The students are identified here with the initial S and the numbers 1 to 6 to ensure anonymity. Individual interviews were conducted with all six students.

2.2. The Interview

The interviews were conducted on school premises and video-recorded. The aim was to explore students' replies in greater depth; for this purpose, we designed an interview protocol in which specific cases were distributed further to the [9] model to induce generalization.

As suggested by [39], the specific cases were presented in different ways. Items requiring the students to determine the next term in a series or one that could be found by counting were labelled as near cases, whereas those necessitating an understanding or the identification of the pattern or function were labelled as far cases. Far specific cases called for representing quantities that could not be drawn or were hard to find by counting withthe students' existing academic skills. In addition to specific cases, indeterminate cases were posed in which the reply depended on recognizing a relationship. The values used were not consecutive, to discourage students from seeking a recurrent relationship that would mask the actual functional relationship. With the near specific cases, the idea was to obtain information on students' conjectures, first by observing the structure identified during the interview. After they worked with several specific cases, we asked "what did you do to find the answer or how did you to get it?". The approach is summarized in Figure 5.

Near specific cases
○ If one ball goes into the machine, how many will come out?
○ If three go in, how many will come out?
○ If 12 go in, how many should come out?
○ What did you do to find that answer?

Figure 5. Near specific cases used in the interview.

In the first stage of the interview, students were shown drawings representing non-consecutive specific cases (Figure 6), which were then discussed with them one by one.

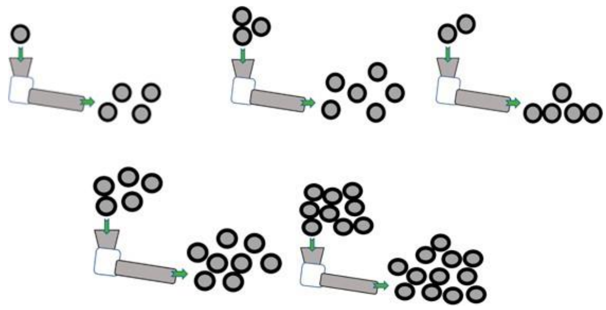


Figure 6. Near specific cases used in the interview.

The aim with the far specific cases was to determine whether students could confirm their earlier conjectures (when working with near specific cases) with justified arguments, while allowing them to vary the structure expressed about the relationship involved. Examples of far specific cases are listed in Figure 7.

Far specific cases
○ If 50 balls go into the machine, how many will come out?
○ If 350 go in, how many will come out?
○ If one million go in, how many can come out?
○ If three million go in, how many can come out?
○ What did you do to find the answer?

Figure 7. Far specific cases used in the interview.

We used other specific cases, labelled "indeterminate". Here we used expressions such as "many" or "any number of" balls. As the aim was to observe in their answers whether students reaffirmed their conjecture and generalized, we ultimately asked them "how does the machine work?" (Figure 8).

Indeterminate cases and general case
○ If a lot of balls go into the machine how many will come out?
○ If any number goes in, how many do you think will come out?
○ How does the machine work?

Figure 8. Indeterminate cases and general case used in the interview.

We also used other types of (near or far) specific cases as further stimulus. We drew from specific cases proposed by the students themselves and a specific case put forward by a classmate, aiming to induce conjecture validation and therefore justification, which would help us analyze students' functional thinking. Those questions were interspersed with the ones described above, as needed during the interview. Students' own specific cases were those formulated when they were asked to choose a number, any number, of balls to go into the machine. The specific case formulated by a classmate afforded another opportunity for pupils to justify their conjectures based on the situation proposed (Figure 9).

Other specific cases
• The student's own formulation o Choose a number (_). If you put that number of balls in, how many should come out? Explain how you got that answer. • Classmate's formulation o One of your classmates says that "if XX balls go in, then YY should come out". Do you agree? How did you find that answer? (XX and YYsymbolize the quantities used in the interview.)

Figure 9. Other specific cases used in the interview.

After the students worked with specific cases, we asked the following question to induce generalization: "Do you know how the machine works? How can you tell?".

The design of the tasks used in both the questionnaire and the interview (e.g., the functional relationship involved, the order of questions used) was inspired by studies on functional thinking previously cited. Contexts and vocabulary were chosen to be familiar to the participating students. The tasks were organised around the inductive reasoning model proposed by [9].

The structure of the questionnaire applied to select the sample and the interviews carried out was based on an inductive process, starting from particular cases and making progress to the general ones. The structure of the interview, and also that of the questionnaire, have been used in previous studies. In this way, the use of this structure to extract data from the work of elementary school students has been previously observed. Focusing on the validity of the instrument itself, we performed a pilot study using the same instrument to study the results with second graders. Thanks to this, we developed an approach to the analysis of the components. From this first approach, we modified some of the questions that seemed to be poorly understood by the students and made the instrument more valid and conducive to our particular investigation.

2.3. Data Analysis

The qualitative analysis run on the data contained in the transcriptions of the interviews was based on a combination of the inductive reasoning model of [9] and the definition of the abductive and inductive phases of such reasoning from [25]. The qualitative analysis of the data was carried out by coding the interviews after their transcription. The unit of analysis was sentences. From the keywords detected in the sentences about the relationship between variables through the particular cases and the generalization itself, we developed the categories that generated the explanations about the generalization process. We performed an expert individual triangulation made by the three authors of this article. In an independent way, we performed the analysis on part of the students' responses until we agreed on the categories for the analysis. As a result of the comparison between the authors, the categories extracted are more exhaustive and therefore more reliable.

In our analysis, generalization process was deemed to comprise three phases: (a) abduction; (b) induction; and (c) generalization. In each phase we considered the specific cases used, the conjectures posed, structures and their representation, and the acceptance of a structure previously defined that defined the inter-phase boundary.

The phases in the reasoning process were distinguished on the grounds of the specific cases the students worked with during the interviews. Inductive reasoning begins with abduction (Figure 10), a discovery phase needed to induce generalization, which requires students to formulate their initial conjectures and discover possible structures when working with a few near specific cases.

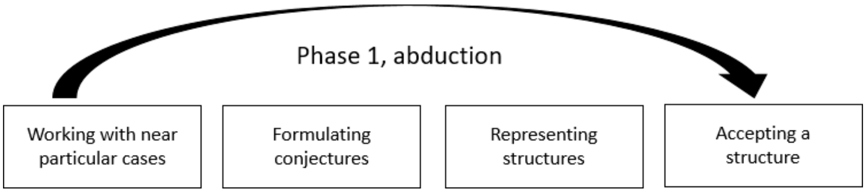


Figure 10. Abduction phase.

Representing structures is a key feature of this and the following phases, for it is the way that the students put forward their conjectures, affording us the opportunity to record them. We observed what students inferred when expressing their conjectures through structural representation. In the abductive phase, students might discover the structures with a few near specific cases. This phase concluded with a priori acceptance of a structure, in what [21] called hypothesis generation, subsequently confirmed in the induction phase. In the induction phase (Figure 11), students worked with far specific cases, possibly reformulating conjectures, i.e., identifying another structure that need not necessarily have been recognizable in the abductive phase. The most prominent feature of this phase was that students had to confirm the viability of the structure described when working with a number of far specific cases.

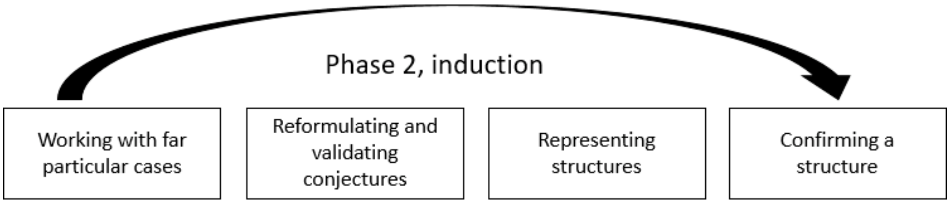


Figure 11. Induction phase.

In elementary education, a conjecture is deemed to be confirmed when a student recognizes the same structure on more than two occasions when working with far specific cases, thereby exhibiting awareness of the structure concerned.

This is when they may generalize (Figure 12); once confirmed, the structure can be applied to any other case. As [40] explains, when perceiving a trend in the inter- variable relationship with indeterminate cases or the general case, students may reaffirm the conjecture confirmed in the induction phase. Reaffirmation may then culminate in a generalized structure.

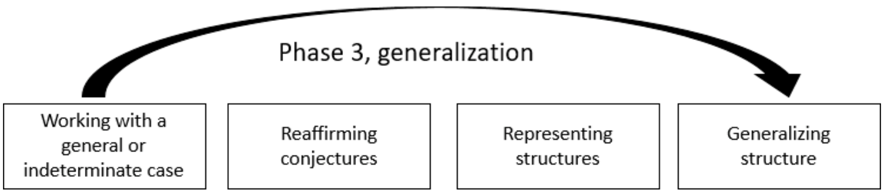


Figure 12. Generalization phase.

We analyzed students' reasoning while working with near and far specific cases and generalizing, and we determined the extent to which our analytical categories adaptedto their inductive reasoning. We identified and described the structures expressed by students as they answered questions first involving specific cases and ultimately involving the general case. The types of generalization observed were also typed in accordance with the classification of [37].

3. Results and Discussion

The findings for the generalization process observed in the six students interviewed are discussed below in terms of the categories defined in the methodology.

3.1. Description of Generalization Process

Table 1 shows the presence or absence of each step in the three phases of reasoning and the order in which they appeared, student by student. The interviews were initially analyzed bearing in mind the order in which the steps were observed to appear. The data recorded included whether the students began by working with specific cases, whether or not they formulated a conjecture or represented a structure, whether or not they confirmed prior conjectures and whether or not they generalized, and if so, how. The table shows the order of the steps observed for each student in each phase.

Table 1. Steps in generalization process recognized in students.

Phase	Step	Student					
		S1	S2	S3	S4	S5	S6
Abductive	Working with near specific cases	1st	1st	1st	1st	1st	1st
	Representing structures (formulating conjectures) and accepting structure	2nd	2nd	2nd	2nd	2nd	2nd
Inductive							
	Working with far specific cases	3rd	3rd	3rd	3rd	3rd	3rd
	Representing structures (formulating conjectures)	4th	4th	4th	4th	4th	4th
	Confirming conjectures (formulating conjectures)	5th	5th	5th	5th	5th	5th
Generalization							
	Generalizing	6th	6th	6th	6th	6th	6th

The data in Table 1 show that all the students followed all the steps in the order proposed on the grounds of the logic underlying the categories. We deemed representing structure and formulating conjectures to form part of the same step, for structure is the expression of conjecture, and in the students' answers as we interpreted them, the two appeared simultaneously. An analysis revealed that all the students worked through the phases and steps of inductive reasoning leading to generalization in the order shown in Table 1. An example of the abductive phase is illustrated in the following excerpt from the interview with S4.

1. Interviewer (I): If three balls go into the machine, how many should come out?
2. S4: Six.
3. I: And if eight go in?

4. E4: 11.
5. I: Why 11? How do you know that?
6. S4: Because there could be three balls inside, and if you add eight, 11 come out.
7. I: How did you know there could be three balls inside?
8. S4: Because otherwise if you put eight in you can't get 11 out.
9. I: Three balls are going in now. What happens?
10. S4: Inside there are three more so six come out.
11. I: What is the machine always doing the same way?
12. S4: There are balls inside and more go in.
13. I: And how many balls are inside the machine?
14. S4: If three go in, well, there are three more inside, and they come out and have to be added.

Where a conjecture was expressed explicitly, we interpreted it to mean a structure was recognized. S4 formulated a conjecture in line 6 of the except: "because there could be three balls inside, and if you add eight, 11 come out". The student was uncertain about what happened in the machine (beginning the trial-and-error process). Based on the answer in line 6, we deduced that the structure represented by S4 was $y = x + 3$. In line 8, we observed that the student tried to justify the answer. In lines 10 and 14, we deduced the same structure, $y = x + 3$. Although a new conjecture appeared in line 12, in line 14 the student re-identified $y = x + 3$ (accepting the structure), a clear indication of the presence of a preliminary trial period (abductive phase) that preceded confirmation of the structure (induction phase). Both structure and generalization are discussed in greater detail in the following section.

The excerpt below from S5′s interview exemplifies abduction, induction and generalization.

1. Interviewer (I): If you put two balls in the machine, how many will come out?
2. S5: Five, no?
3. I: Correct. And if three go in?
4. S5: Six.
5. I: If nine balls go into the machine, how many will come out?
6. S5: Here 12, no? (counting the balls). Yes, 12.
7. I: Could you tell me how the machine works?
8. S5: Well if you put one ball in you get a triplet, four come out.
9. I: What do you mean by triplet?
10. S5: Well, three more.
11. I: OK. Now choose a larger number, any number you want, other than the ones we've seen.
12. S5: 52.
13. I: 52—how many would come out?
14. S5: 55.
15. I: And if 200 go in . . .
16. S5: 203 come out.
17. I: OK, look: now we're going to put a very large number of balls in (writing a very large number on a sheet of paper), how many would come out?
18. S5: If it's one million, one million three come out.
19. I: Fine. You're doing the same thing all the time, no?
20. S5: Yes, I just think plus three.

This student exhibited abduction in lines 2 and 6, answering hesitantly when faced with the first specific case and newly discovering the relationship between the variables. Line 8 provides evidence that S5 was conjecturing, recognizing the structure interpreted to be y =

$x + 3$ (the same structure accepted earlier by the student in the abductive phase), as explicitly stated in line 10. As the interview then went on to far specific cases, we observed S5 to answer in lines 12 and 15 with the same structure recognized when working with near specific cases ($y = x + 3$). In other words, S5 confirmed the structure, applying it to far cases. When asked about indeterminate cases (a very large number of balls) in line 17, S5 reaffirmed the conjecture by answering with the structure initially recognized, $y = x + 3$ (line 18) and then went on to the generalization phase. Finally, in line 20, the student generalized the relationship involved: "I think plus three".

3.2. Structure Identification

We distinguished between students who identified structures while working with specific cases from those who did so when generalizing, defining structural identification in the general case as equivalent to generalizing. All students identified at least one structure in one scenario or the other, as summarized in the findings on structures set out in Table 2. Where students recognized different structures as they worked, they are listed in the table in chronological order.

Table 2. Structures recognized by students.

		Structure		
		Specific Cases		General Case
Group	Student	Near	Far	
Beginning	S1	$y = x + x$ $y = x + 3$	$y = x + 3$	$y = x + 3$
	S2	$y = x + 1, x + 2$ (1,10)	$y = x + 2, x + 3$ (10 …)	$y = x + 3$
Intermediate	S3	$y = x + 3$	$y = x + 3$	$y = x + 3$
	S4	$y = x + 3$ $y = x + x$	$y = x + 3$ $y = x + x$	$y = x + 3$
Advanced	S5	$y = x + 3$ $y = x + x$	$y = x + 3$	$y = x + 3$
	S6	$y = x + 3$ $y = x + x$	$y = x + 3$	$y > x$

Further to the data in Table 2, each student identified one to three structures for the specific cases during the interview. The four types of structures observed in all can be symbolized algebraically as $y = x + x$, $y = x + 1$, $y = x + 2$ and $y = x + 3$, although the students did not use such symbolism to represent the structures. The following excerpt illustrates the structures recognized by S2.

In light of the structures identified in the general case (Table 3), all six students were deemed to generalize the functional relationship. In their generalizations, we identified the structure $y = x + 3$ in five and $y > x$ in one. All generalizations were expressed verbally. We observed consistency in the results insofar as the same structure was identified in the specific and general cases at some point in the interview with five of the six students.

Table 3. Type of generalization.

Level	Student	Expression of Generalization	Type of Generalization
Beginning	S1	"The machine divides half in three balls and three more come out."	Contextual
Beginning	S2	"We put a few balls in and then if you want to put in seven or eight or however many you want, then more than that will come out. The machine takes the balls and adds three. The machine is always adding three, but I like to add one because it's more interesting."	Contextual
Intermediate	S3	"[With] one ball we get four, with two we get five, with four we get seven . . . You always have to add three. One million you get one million three."	Factual and contextual
Intermediate	S4	"You have to add the ones inside to the ones you put in. I think three inside because that's the number added most."	Contextual
Advanced	S5	"You put one ball in and you get three more. I think plus three."	Factual and contextual
Advanced	S6	"I know the machine returns the same [number of] balls, and what I know is that inside it adds lots more balls."	Incipient

3.3. Characterization of Types of Generalization

All the students in this group generalized. We perceived different types of generaliza- tion in their verbal descriptions. Three students (S2, S3 and S5) generalized by saying "you have to add three". The following extract from one of the interviews illustrates how S3′s thinking culminated in generalization.

I: How can you tell how many balls will come out of the machine if we don't care howmany go in?
S3: Well, look: with one ball we get four, with two we get five, with three we get sixand with four we get seven.
I: Fine. Then something's going on with the number of balls that comes out, right?S3: It's like I said, you always have to add three.
I: And if ne million balls go
in?S3: One million three
come out.
I: And if I put three million balls
in? S3: Then three million three
come out.
I: Then three more than you put in are always going to
come out?E3: Yes.

Three other students (S1, S4 and S6) realized that "more balls come out than go in". S1and S4 later specified the number to be added, stating that they were thinking of a structure symbolized as $y = x + 3$. (We as authors, not the students themselves, are expressing the structure recognized by students symbolically, here as $y = x + 3$.) S4 said, for instance "more balls come out than go in. I always add three". S6, in contrast, exhibited incipient generalization, failing to quantify the number coming out: "I know the machine gives back the same balls and what I know is that inside it puts in lots more balls". Five students were found to identify the structure correctly ($y = x + 3$) in both the general and the specific cases.All the students generalized verbally, using natural language to express mathematical ideas, in keeping with the nature of the data collection tool used, interviewing. Table 3 summarizes the characteristics of type of generalization observed under the classification of [37]. The table reproduces the transcripts of students' verbal expression of generalization as the grounds for identifying type.

In some cases, factual and contextual generalizations were observed to co-exist. No evidence of symbolic generalization was identified in the cases studied, however. Factualgeneralization never appeared alone, but always in conjunction with the contextual sort.Students S3 and S5 adopted the same approach. Factual generalization depending on the action performed with numbers was followed by the abstraction of specific actions (contextual generalization), ultimately expressed as "You always have to add three" or "I think plus three". Students initially identified the behavior pattern and described it in their answer to later specify the underlying general relationship. S2 and S4 exhibited contextual generalization, differing from the others in that they generalized the relationship directlywith no reference to numbers. As noted in the section on data analysis, S6 identified a relationship between the number of balls going in and coming out of the machine but failed to recognize the functional relationship, $y = x + 3$ when generalizing. That differentiatedS6′s answers from those of the other cases of contextual generalization. Attention is drawn to this case because it is not envisaged in any of the [37] categories used as our theoretical baseline. Unlike factual generalization, the contextual sort did not systematically appeartogether with any other type. More specifically, S1, S2 and S4 described the functional relationship without using numerical examples.

By way of summary of the findings on generalization as expressed by the students, we can say that five of the six generalized algebraically, for they used a common propertyto express a relationship with which the value of any term in the series could be calculated. S6, the exception, generalized incipiently, noting only that the dependent was larger than the independent variable, without quantifying the difference.

4. Conclusions

This article shows that second graders operationalize functional thinking by identify- ing structures, which enables them to generalize to most of the students in this study. Given the size of the sample, we emphasize that our intention is not to generalize the results.

Our empirical observations revealed that the generalization process deployed as they evolved toward generalization comprised three phases. The task designed for this study was based on the inductive reasoning model of [9], while students' answers were interpreted in keeping with the perspectives of [27] on the phases involved. The outcomeis a description of how the thinking processes of the second graders in this study culminate in generalization.

Distinguishing abduction, induction and generalization as phases forming part of the generalization process constitutes a theoretical contribution to the field. Although some of these phases have been described previously, we emphasize the relationship between them and how they can be related in the generalization process.

Moreover, this contribution is useful from the teaching and learning viewpoint becauseit can be used for task design.

The model specified in [9] was useful for establishing the theoretical grounds for the study and its design. The data gathering tools used—Questionnaires and interviews—Were based on these guidelines. To analyze elementary school students' output, however, some of the broadly general steps in this model must be defined more precisely. To that end,we itemized the specific cases used in the interviews to describe students' reasoning in greater detail. That was one of the keys to our research, for the degree of thinking involved in each specific case varied. Our magnification of the model specified in [9], which was designed for secondary school, proved useful for determining the phases defined by [25]. Abduction, found to be a preliminary phase, appeared when addressing the first specific cases, as students formulated their initial conjectures and first detected structure. Unprovedexplanations, an element that according to [21] might form part of the inductive process, was observed in one of our students (S4). During induction, hypotheses were put forward that were not confirmed until the students solved other, far specific cases (inductive phase). They had then to identify an inter-variable relationship to continue the process, for atthat age children are bereft of the skills to clearly visualize, count or draw very large quantities. We observed the possible confirmation of conjectures in the induction phase. A conjecture was deemed to be confirmed when a student, working with far specific cases, recognized the same structure on more than two occasions, denoting awareness of the structure concerned. Students were deemed to generalize when the confirmed conjecture was reaffirmed for the indeterminate or general cases.

The generalization process model illustrated in Figure 13 constitutes the contribution made by this study to an understanding of how stimulus (with specific cases) affects students' reasoning in a functional context.

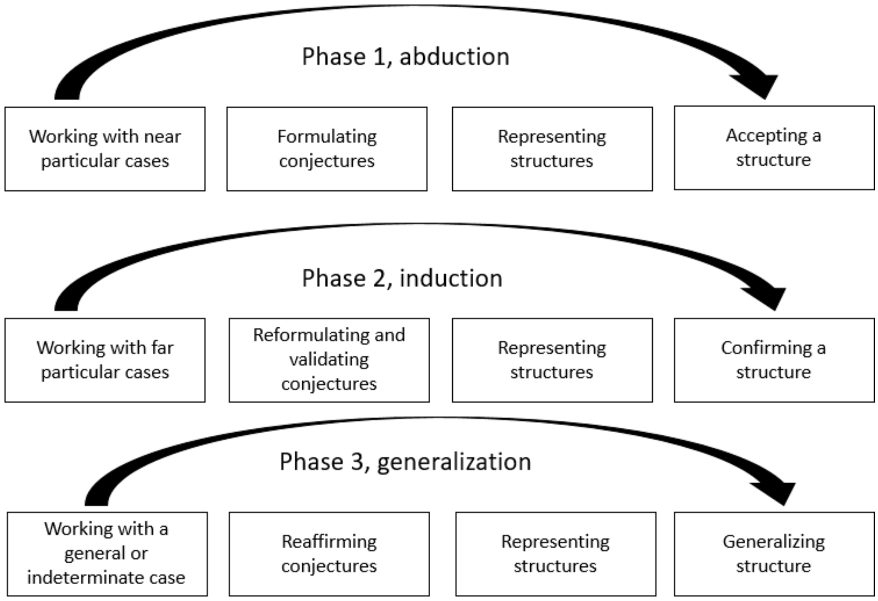


Figure 13. Adapted generalization process model.

The third step in the original model specified in [9], "seeking and predicting pat- terns", was re-labelled in this study as "representing structures", to highlight the role of the relationship between problem variables (number of balls entering and exiting the machine). A similar approach was adopted by [30], who used the model in a functional context to explore the evolution of reasoning toward generalization among fourth graders. Analogously, the term "regularity" as specified in [25] was replaced with "representing structures", to emphasize inter-variable covariation. This would make reasoning a feature suitably associated with functional thinking.

Taking generalization to be both a process and a product helped us understand how students of this study generalize by providing a means to follow their reasoningas described as well as observe how they ultimately expressed generalization. All the students generalized verbally, and the generalization observed was typed as factual and/or contextual, as defined by [38], with one exception: generalization as exhibited by student S6was deemed incipient. S1, S2 and S4 generalized contextually only. S3 and S5 expressed a combination of factual and contextual generalization. Those findings were logical in light of the interview protocol, geared toward inductive reasoning, i.e., it was designed to stimulate the evolution from initial specifics to abstraction and generalization. Recording evidence of factual generalization necessitates careful analysis, for it has to do with children's perception when facing a task. For that reason, the more alert we are to the details communicated by students when first broaching the task, the more information can be drawn from our interpretation of their generalization.

In summary, five of the six students expressed generalization algebraically, identifying a common characteristic to formulate an expression that, while not symbolic, enabled them to calculate the value for any term in the series. In contrast, with merely incipient, non-algebraic generalization, S6 identified the structure in a way that obviated calculation of the value of whatsoever term in the series. That finding should be stressed, for with it we identified a form of generalization in which students fail to specify the functional relationship, merely noting (in this case) that the dependent was larger than the independent variable, without quantifying the difference. That led us to supplement the categories specified by [37] with a further form of generalization, differentiating a case in which thestudent recognized only that "more balls come out than go into the machine". Accordingto the literature (e.g., [12,29]), some students do not generalize at this grade, even with this kind of interview or with interventions in the classrooms.

Another key to this study is the close relationship established between structure and the generalization process described. Representing structure is tantamount to explaininga conjecture. Structures help us interpret the inter-variable relationships identified by students. We found that conjectures were formulated at the same time as structures were represented in all the cases studied. Here, confirmation of the same structure in the inductive phase as accepted in the abductive phase guaranteed students' evolution to generalization in all cases. This provides insight into some students' ability to generalize.The potential found in inductive reasoning, however, was that it enabled us to observe when a structure was reformulated. We deemed reformulation to exist when different structures were identified, in keeping with the inductive phase as discussed in the section on structures in connection with students who identified different structures during the interview. Evidence was found of the use of four types of structure when the students worked with specific cases. When answering the interviewer's questions, the students used more than one structure, although the correct functional relationship, $y = x + 3$, was identified by all the interviewees and in the general case by five of the six. The present findings corroborate the results reported by [34] to the effect that students were inconsistent in their use of structure when solving the various specific cases involved in the problem. Drawing from a background paper by [8], we deem such inconsistency to denote non-completion of the algebraic process for want of stability in the identification of the structure during the process. We identified greater consistency here in terms of the structure detected in the specific cases and the general case, which was identical for most participants. Similar findings were reported by [35] in a study involving different functions.

In another vein, and although it was not one of the objectives pursued here, the possibility of a relationship between identification and the groups into which the students were divided on the grounds of academic performance might be envisaged. A cursory analysis revealed no noteworthy differences between the three groups in terms of structuralidentification, however. Except for S2, all the students recognized structure in the specific cases in a similar manner, i.e., $y = x + x$ or $y = x + 3$. We observed, in the advanced group, S6 change the structure initially identified to ultimately express the relationship as $y = x + x$. When generalizing, that same student limited recognition of the relationship to $y > x$, as noted above. In contrast, in that phase, the beginning and intermediate group students identified the structure to be $y = x + 3$. The conclusion drawn is that no relationship can be found between academic performance and students' ability to recognize structures in the inter-variable relationship studied here.

Regarding the reliability and validity of our research, [41] indicates that reliability consists of demonstrating that the analysis was systematic and exhaustive. In this sense,the analysis carried out is reliable given the degree of systematicity used, which allows us to affirm that the inferences we obtained are reliable. On the other hand, validity is related to the evidence that supports the reported results. In some way, the validity of the study is undermined by the antecedents, since among our results we obtained certainsimilarities with previous studies. Our research supports the results of previous studies.For example, the evidence on the achievement of generalization by students at an early age is something that has been observed before (e.g., [12,28,33]), as well as the identification of different structures when working with specific values (e.g., [5,32,33]). This corresponds to the validity of our research.

The categories defined here were useful for analyzing students' replies and maybe applicable in future research. While based on earlier studies, the categories were complemented and adapted to the data collected. Part of the originality of this study rests in the categories proposed to analyze the generalization process followed, for this particular has not been previously addressed.

We consider of special interest to continue this research using application of the different phases with students at different grades of elementary school and comparing whether the pattern continues to correspond in the same way. This would also include the identification of structures involving different functions, so that the steps of each of the given phases can be corroborated from various perspectives.

5. Patents

We add this section to clarify patents since it is a study that is developed within a research process.

Author Contributions: Conceptualization, M.C.C. and A.M.; methodology, M.C.C. and A.M.; val-idation, M.C.C., A.M. and M.D.T.; formal analysis, M.D.T and A.M.; investigation, M.C.C., A.M. and M.D.T.; resources, A.M.; data curation, M.D.T.; writing—original draft preparation, M.D.T.; writing—review and editing, M.C.C. and A.M.; visualization, M.D.T.; supervision, M.C.C. and A.M.; project administration, M.C.C.; funding acquisition, M.C.C. and others. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This research was conducted within the project reference EDU2016-75771-P, financed by the Spanish National Research Agency (AEI) and the European Fund for Regional Development (FEDER). Furthermore, it was supported by a fellowship reference BES-2017-080124 awarded by the government of Spain.

Institutional Review Board Statement: This study did not require ethical approval.

Informed Consent Statement: Informed consent was obtained from all subjects involved in the study.

Data Availability Statement: Data available on request due to restrictions.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest. The funders had no role in the designof the study; in the collection, analyses, or interpretation of data; in the writing of the manuscript, orin the decision to publish the results.

References

1. Pólya, G. *How to Solve It*; University Press: Princeton, NJ, USA, 1945; (Zugazagoitia, J. *Cómo Plantear y Reslover Problemas; Traducción al Castellano*; Trillas: León, México, 1965).
2. Pólya, G. *Matemáticas y Razonamiento Plausible [Mathematics and Plausible Reasoning]*; Tecnos: Madrid, Spain, 1966.
3. Radford, L. En torno a tres problemas de la generalización [Around three problems of generalization]. In *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*; Rico, L., Cañadas, M.C., Gutiénez, J., Molina, M., Segovia, I., Eds.; Editorial Comares: Granada, Spain, 2013; pp. 3–12.
4. Kaput, J.J. What is algebra? What is algebraic reasoning. In *Algebra in the Early Grades*; Kaput, J.J., Carraher, D.W., Blanton, M.L.,Eds.; Routledge: New York, NY, USA, 2008; pp. 5–17.
5. Blanton, M.; Levi, L.; Crites, T.; Dougherty, B. *Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3–5*; NCTM: Reston, VA, USA, 2011.
6. Doorman, M.; Drijvers, P.; Gravemeijer, K.; Boon, P.; Reed, H. Tool use and the development of the function concept: From repeated calculations to functional thinking. *Int. J. Sci. Math. Educ.* **2012**, *10*, 1243–1267. [CrossRef]
7. Morales, R.A.; Cañadas, M.C.; Brizuela, B.M.; Gómez, P. Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional [Functional relationships and strategies of first graders in a functional context]. *Enseñ. Cienc.* **2018**, *36*, 59–78. [CrossRef]
8. Mason, J.; Stephens, M.; Watson, A. Appreciating. mathematical structure for all. *Math. Educ. Res. J.* **2009**, *21*, 10–32. [CrossRef]
9. Cañadas, M.C.; Castro, E. A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA* **2007**, *1*, 67–78.
10. Kaput, J.J.; Blanton , M.L.; Moreno, L. 2 Algebra from a symbolization point of view. In *Algebra in the Early Grades*; Kaput, J.J., Carraher, D.W., Blanton, M.L., Eds.; Lawrence Erlbaum Associates: New York, NY, USA, 2008; pp. 19–55.
11. Radford, L. The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*; Kieran, C., Ed.; Springer: New York, NY, USA, 2018; pp. 3–25. [CrossRef]
12. Torres, M.D.; Cañadas, M.C.; Moreno, A. Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria [Structures, generalization and meaning of letters in a functional context for 2nd primary students]. In *Investigación en Educación Matemática XXII*; Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz- Rodríguez, L., Aguilar-González, A., Alonso, P., García García, F.J., Bruno, A., Eds.; SEIEM: Gijón, Spain, 2018; pp. 574–583.
13. Vergel, R. *Sobre la Emergencia del Pensamiento Algebraico Temprano y su Desarrollo en la Educación Primaria*; UD: Bogotá, Colombia, 2016.
14. Ayala-Altamirano, C.; Molina, M. Meanings attributed to letters in functional contexts by Primary School students. *Int. J. Sci.Math. Educ.* **2020**, *18*, 1271–1291. [CrossRef]
15. Blanton, M.; Brizuela, B.; Murphy Gardiner, A.; Sawrey, K.; Newman-Owens, A. A learning trajectory in 6-year-olds' thinkingabout generalizing functional relationships. *J. Res. Math. Educ.* **2015**, *46*, 511–558. [CrossRef]
16. Aliseda, A. La abducción como cambio epistémico: C. S. Peirce y las teorías epistémicas en inteligencia artificial. *Analogía* **1998**, *12*, 125–144.
17. Stephens, A.C.; Ellis, A.B.; Blanton, M.; Brizuela, B.M. Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In *Compendium for Research in Mathematics Education*; Cai, J., Ed.; National Council of Teachers of Mathematics: Reston, VI, USA, 2017; pp. 386–420.
18. Peirce, C. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*; Hartshorne, C., Weiss, P., Eds.; The Belknap Press of Harvard University Press:Cambridge, MA, USA, 1965.
19. Nepomuceno, A. Modelos de razonamiento abductivo [Models of abductive reasoning]. *Contrastes* **2005**, *10*, 155–180.
20. Niño, D. Abducción e Inducción en Peirce: Evolución y criterios [Abduction and induction in Peirce: Evolution and criteria]. *Designis* **2012**, *20*, 153–161.

21. Rivera, F. Abduction and the emergence of necessary mathematical knowledge. In *Springer Handbook of Model-Based Xcience*; Magnani, L., Bertolotti, T., Eds.; Springer: Cham, Switzerland, 2017. [CrossRef]
22. Nubia Soler-Álvarez, M.; Manrique, V.H. El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: Los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo [Discovery process in mathematics class: Abductive, inductive and deductive reasoning]. Ensenñ. Cienc. 2014, 32, 191–219. [CrossRef]
23. Aliseda, A. A Unified Framework for Abductive and Inductive Reasoning in Philosophy y AI. In Contributing Paper to the ECAI'96 Workshop on Abductive and Inductive Reasoning; Budapest, Hungary, 12 August 1996; pp. 1–6. Available online: http://citeseer.ist.psu.edu/viewdoc/versions;jsessionid=B03C9D84448240C8BC1DA9A01CC9476B?doi=10.1.1.37.5343 (accessed on 13 February 2021).
24. Aguayo, P. La teoría de la abducción de Peirce: Lógica, metodología e instinto [The Peirce' theory of abduction: Logic, methodol- ogy and instint]. Ideas Valores 2011, 60, 33–53.
25. Rivera, F.; Becker, J.R. Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. J. Math. Behav. 2007, 26, 140–155. [CrossRef]
26. Vergel, R. Generalización. de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. PNA 2015, 9, 193–215.
27. Barrera, V.J.; Castro, E.; Cañadas, M.C. Cuaderno de trabajo sobre razonamiento inductivo para profesores de primaria en formación [Workbook about inductive reasoning for elementary teachers training]. In Trabajo Presentado en el Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico del XIII Congreso de la SEIEM; SEIEM: Santander, España, 2009.
28. Pinto, E.; Cañadas, M.C. Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional [Generalisation and inductive reasoning by a fourth grader. A case study from the functional thinking approach]. In Investigación en Educación Matemática XXII; Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L., Aguilar González, A., Alonso, P., García García, F.J., Bruno, Y.A., Eds.; SEIEM: Gijón, Spain, 2018; pp. 457–466.
29. Torres, M.D.; Cañadas, M.C.; Moreno, A. Structures identified by second graders in a teaching experiment in a functional approach to early algebra. In *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*;Jankvist, U.T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Eds.; Institute of Education and Erme: Utrecht, The Netherlands, 2019.
30. Castro, E.; Cañadas, M.C.; Molina, M. El Razonamiento Inductivo Como gGenerador de Conocimiento Matemático [Inductive Reasoning as a Generator of Mathematical Knowledge]. *Uno* **2010**, *54*, 55–67. Available online: http://hdl.handle.net/10481/26 079 (accessed on 13 February 2021).
31. Kieran, C. The early learning of algebra: A structural perspective. In *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*; Wagner,S., Kieran, C., Eds.; NCTM: Reston, VA, USA, 1989; Volume 4, pp. 33–56.
32. Pinto, E.; Cañadas, M.C. Generalization in fifth graders within a functional approach. In Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Singapore, 17–22 July 2017; Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T.L.,Choy, Y.B.H., Eds.; PME: Singapore, 2017; Volume 4, pp. 49–56.
33. Pinto, E.; Cañadas, M.C. Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: Un estudio comparativo [Structures and generalization of third and fifth graders: A comparative study]. In *Investigación en Educación Matemática XXI*;Muñoz-Escolano, J.M., Arnal-Bailera, A., Beltrán-Pellicer, P., Carrillo, M.L.C.Y.J., Eds.; Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM: Zaragoza, Spain, 2017; pp. 407–416.
34. Driscoll, M.J. *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6–10*; Heinemann: Portsmouth, NH, USA, 1999.
35. Schifter, D.; Monk, S.; Russell, S.J.; Bastable, V. Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades. In *Algebra in the Early Grades*; Kaput, J.J., Carraher, D.W., Blanton, M.L., Eds.; Lawrence Erlbaum Associates:New York, NY, USA, 2008; pp. 413–448.
36. Radford, L. Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Math. Think. Learn.* **2003**, *5*, 37–70. [CrossRef]
37. Radford, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA* **2010**, *4*, 37–62.
38. Steffe, L.; Thompson, P.W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*; Lesh, R., Kelly, Y.A.E., Eds.; LAE.Stacey, K: Mahwah, NJ, USA, 2000; pp. 267–306.
39. Stacey, K. Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educ. Stud. Math.* **1989**, *20*, 147–164. [CrossRef]

40. Abe, A. Abduction and analogy in chance discovery. In *Chance Discovery*; Ohsawa, Y., McBurney, M., Eds.; Springer: Berlin, Heidelberg, 2003; pp. 231–248.
41. Cobb, P. Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*; Kelly, A.E., Lesh, R.A., Eds.; Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, NJ, USA, 2000; pp. 307–333.

ESTUDIO 2

An experience of transition from arithmetic generalization to algebraic generalization in the context of functional thinking

En revisión

An experience of transition from arithmetic generalization to algebraic generalization in the context of functional thinking

María D. Torres, Antonio Moreno, Rodolfo Vergel, and María C. Cañadas

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que se está llevando a cabo en el área del pensamiento algebraico en la educación primaria. Nuestro objetivo general de investigación fue identificar y describir la generalización de un alumno de 2º grado (de 7 a 8 años). En concreto, nos centramos en la transición de la aritmética a la generalización algebraica. Presentamos un estudio de caso con una entrevista semiestructurada en la que propusimos una tarea de generalización contextualizada que implicaba la función $y = x+3$*. Se prestó especial atención a las estructuras evidenciadas y al tipo de generalización expresada por el alumno en el proceso. Observamos que el alumno identificó la estructura correcta para la tarea durante la entrevista y que evidenció una generalización algebraica de tipo factual. Debido a la identificación por parte del alumno de la estructura adecuada y la aplicación de la misma a otros casos particulares diferentes, hemos observado una transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.*

Palabras clave: estructura, generalización, pensamiento algebraico, pensamiento funcional,

INTRODUCCIÓN

El uso de las letras no es condición necesaria, ni suficiente, para el pensamiento algebraico (Vergel y Rojas, 2018). Esta afirmación pretende aclarar el concepto de álgebra asumido en nuestro estudio para la educación primaria. El pensamiento algebraico no implica necesariamente el uso de letras. Entre los contenidos matemáticos que se suelen trabajar en la educación primaria y el tratamiento que se da al álgebra en la educación secundaria, hay un salto abrupto (Bednarz et al., 1996; Filloy, Puig y Rojano, 2008). La tradicional separación entre aritmética y álgebra priva a los alumnos de poderosas formas de pensar sobre las matemáticas en la educación primaria, lo que dificulta el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria (Kieran, 1992). El álgebra en la escuela queda relegada al lenguaje simbólico, eliminando el sentido del significado de la notación simbólica utilizada y evidenciando las dificultades que encuentran los estudiantes durante la transición de la aritmética al álgebra en la educación secundaria (Vergel y Rojas, 2018).

En este sentido, el álgebra temprana surge como una propuesta de cambio curricular enfatizando la idea de Kaput (2000) sobre la "algebrización del currículo" de las matemáticas. El álgebra temprana considera la introducción de modos de pensamiento algebraico desde los primeros niveles educativos para potenciar el razonamiento matemático y la generalización, aliviando las dificultades que los estudiantes encuentran al abordar el álgebra en los grados superiores (Kieran, 2000). Es habitual que la mayoría de los países incluyan elementos de este tipo de pensamiento en sus planes curriculares de educación primaria (Morales et al, 2018).

La generalización es un proceso esencial del razonamiento matemático. Considerarlo en los primeros grados permite, por ejemplo, que los alumnos se alejen de las especificidades del cálculo aritmético, a partir de la observación de regularidades o patrones de comportamiento, en casos particulares dados, y de las relaciones matemáticas implicadas (Blanton et al., 2011). Así, podemos empezar a enseñar álgebra a los jóvenes estudiantes integrando el pensamiento algebraico en las matemáticas escolares.

Este trabajo profundiza en el álgebra a través del pensamiento funcional: un tipo de pensamiento algebraico donde la función es la noción matemática clave. El pensamiento funcional se basa en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las componen (Cañadas y Molina, 2016, p. 212). La identificación de regularidades entre variables que covarían puede llevar a la generalización.

Existe un creciente consenso en que la reforma algebraica requiere una reconceptualización de la naturaleza del álgebra y del pensamiento algebraico, así como un análisis de cuándo los niños son capaces de razonar algebraicamente y cuándo deben introducirse en el currículo las ideas que requieren razonamiento algebraico (Carpenter y

Levi, 1999). En este sentido, se buscó comprender el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos de educación primaria hacia la generalización atendiendo a regularidades entre las variables evidenciadas al realizar una tarea de generalización que involucra una función lineal.

Existen estudios que abarcan la reforma del álgebra en el contexto de las matemáticas de la educación primaria, centrándose en particular en el desarrollo del pensamiento algebraico (Carpenter y Levi, 1999). Sin embargo, hasta la fecha, la investigación sobre el desarrollo del pensamiento algebraico que lo relaciona con las primeras etapas de la educación y el pensamiento aritmético de los alumnos ha sido limitada. Este artículo presenta los resultados de considerar esta transición entre el sentido numérico y el pensamiento algebraico. Describimos el proceso que va de la generalización aritmética a la generalización algebraica en un contexto funcional de álgebra escolar.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y PENSAMIENTO FUNCIONAL

El álgebra como actividad de generalización se ha desarrollado como una línea de investigación (por ejemplo, Bell, 1976; Mason y Pimm, 1984). La generalización de patrones se considera una de las formas más significativas de introducir el álgebra en los primeros grados (Radford, 2018; Vergel y Rojas, 2018) pues, entre otros aspectos, permite abordar situaciones de variación en el aula que son necesarias para desarrollar el pensamiento algebraico. Los enfoques basados en patrones para introducir el álgebra en la educación primaria se basan en exploraciones de patrones visuales, que se utilizan para generar expresiones de generalización. Con estos patrones, se requiere que los estudiantes consideren una variación de un conjunto de datos dependientes de la posición (es decir, como una relación entre términos consecutivos dentro del propio patrón). Desde este punto de vista, Radford (2010) reconoció tres formas distintas de pensamiento algebraico en función de la forma en que los estudiantes comunicaron su actividad durante el proceso de generalización. Estas formas de pensamiento algebraico fueron: pensamiento factual, pensamiento contextual y pensamiento simbólico. En el pensamiento factual, los estudiantes comunican sus pensamientos a través de gestos, movimientos, actividades perceptivas y palabras. En este nivel de pensamiento, la incertidumbre está implícita y los alumnos trabajan con valores concretos, números (casos particulares). Por ejemplo, un alumno indica con una mirada, un dedo, movimientos de lápiz o señalando. En el pensamiento contextual, los gestos y las palabras se sustituyen por frases clave. En este tipo de pensamiento, la incertidumbre es explícita y la formulación algebraica es una descripción de un término general. Por último, el pensamiento simbólico es aquel en el que las frases clave se representan mediante símbolos alfanuméricos de álgebra. En este nivel, hay un cambio drástico en la forma de referirse a la incertidumbre (Vergel, 2016, p. 74). Estos tipos de pensamiento algebraico se clasifican según la forma en que los estudiantes pueden comunicarse. Como señala Vergel (2015), esto significa que debemos reconocer todas aquellas representaciones como el lenguaje natural (oral y escrito), los gestos y procedimientos que evidencian que los alumnos intentan construir explicaciones y argumentos sobre estructuras y modos de pensamiento generales, por lo que sus líneas de argumentación y explicaciones se basan en situaciones particulares, o acciones concretas. Es importante tener en cuenta los recursos cognitivos, físicos y perceptivos que los alumnos movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. Estos recursos incluyen la comunicación simbólica y oral, así como los dibujos, los gestos, la manipulación de materiales y el movimiento corporal (Radford et al., 2009).

Como se ha mencionado, otra forma de abordar el pensamiento algebraico es a través del pensamiento funcional "centrado en la relación entre dos (o más) cantidades que varían; específicamente los tipos de pensamiento que van desde las relaciones específicas hasta las generalizaciones de relaciones" (Kaput, 2008, p. 143). Una de las nociones implicadas en el pensamiento funcional es la generalización de las relaciones entre cantidades que covarían. Otra parte importante del pensamiento funcional es la expresión de estas relaciones (funcionales) utilizando diferentes representaciones, y aplicando estas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton et al, 2011). No se trata de introducir las funciones en los niveles de educación infantil del mismo modo que se tratan en la educación secundaria, sino de aprovechar el potencial de estos contenidos matemáticos para promover en los niños habilidades que les serán útiles para el razonamiento en general y para las matemáticas en particular, tanto en su nivel escolar actual como en los futuros (Cañadas, 2016, p. 8). El pensamiento funcional, en el contexto del álgebra temprana, se centra en la relación entre dos variables, siendo esencial el estudio de las regularidades y, en particular, su generalización (Blanton, 2008, p. 30). En general, la regularidad es lo que se repite. Cuando observamos una regularidad buscamos que sea válida para otros casos particulares y, eventualmente, para cualquier caso dentro de una situación dada (Pólya, 1966).

En el ámbito del pensamiento funcional, la estructura se refiere a la regularidad presente en la expresión de la relación entre las variables de una función. La estructura corresponde a la forma en que se organizan los elementos de una regularidad entre las variables y la relación existente entre dichos elementos (Kieran, 1989). La noción de estructura que asumimos tiene que ver con los términos que componen una expresión algebraica funcional, con los signos que los relacionan, el orden de las diferentes operaciones y las relaciones existentes entre los elementos. La estructura puede evidenciarse a través de diferentes representaciones por parte de los estudiantes, ya sea al trabajar en casos particulares o al generalizar (Pinto y Cañadas, 2017). Algunos investigadores señalan que antes de generalizar, podemos "ver" la estructura involucrada (Mason, Stephens y Watson, 2009). Tomar conciencia de una estructura y de su estabilidad al trabajar con diferentes casos particulares podría llevar a la generalización.

Existen publicaciones que forman parte de proyectos de investigación en varios países, que destacan la evidencia de que los niños de los primeros grados pueden pensar de una manera bastante más sofisticada de lo que se suponía (por ejemplo, Kaput, Blanton y Moreno, 2008; Pinto y Cañadas, 2017; Radford, 2018; Torres et al., 2018). En particular, las investigaciones evidencian que el pensamiento de los estudiantes puede ser verdaderamente algebraico, aunque su producción no incluya signos alfanuméricos del álgebra (Vergel, 2013).

Hay estudios que exploran la generalización de los alumnos de primaria en contextos funcionales (por ejemplo, Carraher y Schliemann, 2016; Pinto y Cañadas, 2017). Existen numerosas investigaciones que evidencian el pensamiento algebraico y funcional de niños de primaria e incluso de preescolar. En concreto, Blanton y Kaput (2004) documentaron cómo los niños de 6 a 10 años pueden detectar relaciones de adición y multiplicación entre variables de relación funcional. Brizuela et al. (2015) evidenciaron la comprensión de las letras como variables por parte de alumnos de 6 a 7 años; mientras que Merino, Cañadas y Molina (2013) describieron la variedad y el uso combinado de estrategias por parte de alumnos de la misma edad al resolver un problema a partir de un ejemplo genérico.

La generalización es un elemento clave para el pensamiento algebraico en general y para el pensamiento funcional, en particular. Nos centramos en explorar el proceso de generalización en un estudiante que aborda una tarea en un contexto funcional.

GENERALIZACIÓN ARITMÉTICA Y GENERALIZACIÓN ALGEBRAICA

Pólya (1945) tomó la generalización como una actividad empírica inductiva en la que se acumulan ejemplos concretos y se detecta y sistematiza la regularidad. El trabajo con casos particulares es un paso esencial hacia la generalización (Cañadas, 2007). El trabajo con la incertidumbre es una de las características del álgebra, entendida como método para operar sobre formas generales (Radford, 2011, 2018; Vergel, 2015, 2016). Cuando las observaciones sobre una estructura dada se extienden a más casos, se logra la generalización. Como señala Vergel (2019), el trabajo sobre la generalización nos obliga a precisar, al menos, dos clases de generalización: la algebraica y la aritmética. Radford (2003) distingue cuatro tipos de generalización, de los cuales uno es considerado como generalización aritmética y tres corresponden a la generalización algebraica. En la primera, la generalización es una similitud observada en algunos casos, no proporcionando una expresión para ningún término de la secuencia. En otras palabras, la generalización aritmética, la abducción (generalización de la característica común) se utiliza para ir de un término a otro (Radford, 2013). En este caso, no hay deducción de una expresión que permita calcular el valor o la imagen en cualquier término de la secuencia. La idea de deducción es clave y sirve como criterio operativo que permite distinguir entre el pensamiento aritmético y el algebraico. La deducción es "todo aquello que se concluye necesariamente de otras verdades conocidas con certeza" (Descartes, 1983, p. 125).

Radford (2013, p. 6) plantea que la generalización algebraica de patrones considera los siguientes aspectos: (a) la conciencia de una propiedad común constatada a partir del trabajo en el área fenomenológica de observación de ciertos términos particulares, (b) la generalización de dicha propiedad en los siguientes casos de la secuencia y, finalmente

(c) la capacidad de utilizar esa propiedad común para obtener una expresión directa , una fórmula, que permita calcular el valor para cualquier término de la secuencia. Dentro de la generalización algebraica existe la generalización factual, la generalización contextual y la generalización simbólica (Radford, 2018). La generalización factual es la primera forma de generalizar en la que las actividades perceptivas basadas en los diversos medios de comunicación de los estudiantes generan un cálculo que ayuda a avanzar en la abstracción de lo particular. Este tipo de generalización algebraica es, por tanto, el inicio de la generalización algebraica. Se basa en acciones realizadas sobre los números; las acciones consisten aquí en palabras, gestos y actividades perceptivas. Se expresan en acciones concretas a través del trabajo sobre los números. La generalización es la que permite abordar cualquier caso particular, es la abstracción de las acciones concretas, es decir, siempre permanece conectada al nivel concreto (Radford, 2010). Rivera (2017) construyó un modelo descriptivo del proceso de generalización en tres etapas: abductiva, inductiva y de generalización. La fase de abducción es donde se forman hipótesis que no se confirman hasta que tenemos otros casos particulares en la fase inductiva, que es cuando los alumnos han necesitado identificar una estructura para poder continuar con el proceso, ya que a esta edad carecen de herramientas, como visualizar claramente la cantidad, contar o dibujar grandes cantidades. Aquí es donde vemos la posible confirmación de las estructuras. Finalmente, si la estructura confirmada se puede reafirmar con casos indeterminados o la general, se obtiene la generalización. Estas bases se apoyan en los modelos de Radford (2013) y en el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) sobre la generalización algebraica. Ambos consideran la conciencia de una propiedad común a partir del trabajo con ciertos casos particulares. Nosotros asumimos que la generalización es la capacidad de utilizar esta propiedad común para calcular el valor de cualquier término siguiente.

Sin embargo, en este estudio distinguimos entre tareas con patrones y tareas de identificación de una estructura, que es lo que trabajamos en este contexto. La idea de patrón está más vinculada a la recurrencia que al establecimiento de una relación de covarianza entre dos cantidades. El estudio del patrón y la estructura está integrado en una amplia gama de estudios sobre el desarrollo matemático en los primeros años de aprendizaje (Mulligan y Mitchelmore, 2009). Por ejemplo, en la siguiente tarea con patrones (véase la figura 1), la regularidad puede identificarse por la recurrencia de términos consecutivos en una secuencia. La posición de cada elemento y la secuencia en la que aparecen es un aspecto clave en este tipo de tareas, distinguiéndolas de las tareas de generalización con las que trabajamos en este estudio.

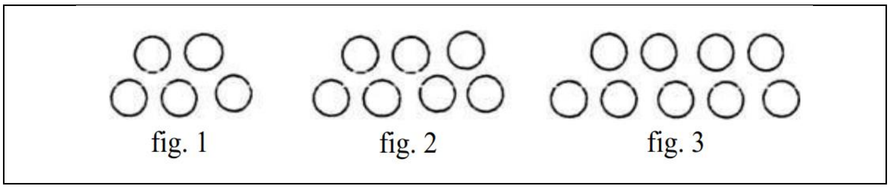


Figura 1. Tarea de patrones (Vergel, 2015).

Observamos la diferencia con la tarea de generalización basada en la relación de edad de dos superhéroes dada por y = x+4 (Torres, Cañadas y Moreno, 2019). La figura 2 muestra la introducción a la tarea.

Dos superhéroes, Iron Man y el Capitán América, cumplen años el mismo día. Cuando Iron Man cumplió 5 años, el Capitán América cumplió 9. Cuando Iron Man cumplió 7, el Capitán América cumplió 11...

Figura 2. Tarea de generalización sobre la edad de dos superhéroes.

La identificación de la estructura requiere una relación entre dos variables que también puede identificarse mediante casos particulares. Obsérvese en este caso la ausencia de secuenciación en la representación de las variables implicadas. Al referirse a la estructura, tanto el dominio como la ruta son dominios numéricos. Las nociones de generalización y estructura están relacionadas y ayudan a caracterizar el pensamiento funcional de los alumnos. En general, la estructura puede identificarse a partir de casos particulares. Radford (1996) afirmó que, la generalización desde una perspectiva educativa, depende de los objetos matemáticos que se generalizan; la generalización no es una actividad desprovista de contexto. En el caso del pensamiento funcional, la generalización se produce al establecer y analizar las relaciones entre variables (Smith, 2003). Para fomentar la generalización, se parte de situaciones que implican casos particulares y, observando las estructuras, es decir, identificando las relaciones entre las variables, se pretende alcanzar la generalización. Este estudio se centró en cómo un estudiante, a partir de casos particulares, puede identificar estructuras y luego generalizar. Nuestro objetivo específico fue identificar y describir el proceso de generalización de un alumno de 2º grado.

MÉTODO

Nuestro estudio abordó las tareas de generalización con funciones, basándose en el paso del trabajo con valores de variables concretas (casos particulares) al trabajo con incertidumbres y casos generales. Realizamos un estudio de caso, por tanto, cualitativo, exploratorio y descriptivo. Consistió en una entrevista semiestructurada a un alumno de 2º de primaria (7-8 años) de España, que no había recibido instrucción previa sobre funciones o generalización en la escuela. Los conocimientos previos que tenía sobre los números eran: números del 0 al 399, comparación de números y suma y resta con préstamo. Se eligió al alumno porque era expresivo y extrovertido, lo que ayudaría a obtener información de sus respuestas.

Examinamos cómo el alumno relacionaba las variables involucradas y observamos el proceso de generalización, identificando las estructuras evidenciadas en la relación entre las variables de la función involucrada. Observamos la transición de la generalización aritmética a la algebraica.

Instrumento de recogida de datos

Diseñamos una tarea de generalización de la función lineal $y = x+3$ en el contexto de una máquina en la que se introducen bolas y salen más bolas dependiendo de la función indicada. Aplicamos un cuestionario a un grupo de estudiantes en el que se hacían varias preguntas sobre la tarea. A continuación, realizamos una entrevista semiestructurada, que fue grabada en vídeo, con preguntas que seguían el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007), que sirvió de guía para la generalización. Este modelo se muestra en la Figura 3.

1. Trabajo sobre casos concretos. Casos concretos o ejemplos que inician el proceso. Suelen ser casos sencillos y fáciles de observar.

2. Identificación de regularidades. La regularidad es aquello que es común, se repite en diferentes hechos o situaciones y se espera que vuelva a ocurrir.

3. Formulación de conjeturas. Una conjetura es una proposición que se supone verdadera pero que no ha sido sometida a examen. Dicho examen puede dar lugar a su aceptación o rechazo. Si se da un ejemplo para el que la conjetura no es válida, ésta se rechaza. En términos de Popper (1967), la conjetura es refutada.

4. Justificación de las conjeturas. Se refiere a cualquier razón dada para convencer de la verdad de una afirmación. Solemos distinguir entre justificación empírica y deductiva. La empírica utiliza ejemplos como medio para convencer. La validación de conjeturas tiene lugar con nuevos casos particulares (diferentes de los anteriores), pero no para el general.

5. Generalización. La conjetura se expresa de forma que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares estudiados.

Figura 3. Modelo de razonamiento inductive de Cañadas y Castro (2007)

Cuando un alumno expresa una conjetura, podemos interpretar las estructuras que evidencia. La formulación y la justificación de las conjeturas informan de la estabilidad de la estructura evidenciada, que luego puede ser reformulada con más casos particulares antes de identificar la estructura a generalizar. El conjunto de pasos descritos es la base de la entrevista realizada en este estudio. El protocolo seguido se muestra en la figura 4.

1. Recall the task of the previous session

Do you remember how this machine works?

If the answer was yes, we asked, would you give me two examples? What did you do to get that answer?

If the answer was no, we reminded them and showed examples and then asked, What is the relation between the balls going in and the ones coming out? Next, we asked again for concrete examples that had emerged.

2. Observe the structure evidenced in the particular cases

Particular cases given

Particular cases proposed by the student

Third-party particular case

3. Uncertain cases and the general case

We asked, what can we use at the start of the machine to indicate the number of balls going in?

Generalization: How can you tell how the machine works?

Figura 4. Protocolo seguido.

Análisis de datos

Habíamos preparado de antemano las categorías de análisis, teniendo en cuenta las diferencias entre la generalización aritmética y la algebraica. La generalización algebraica aborda los tipos de pensamiento algebraico de Radford (2010) y la forma en que los estudiantes utilizan las estructuras durante el proceso de generalización. El modelo de razonamiento seguido en el proceso de generalización se describe con los siguientes elementos que se muestran en la Figura 6.

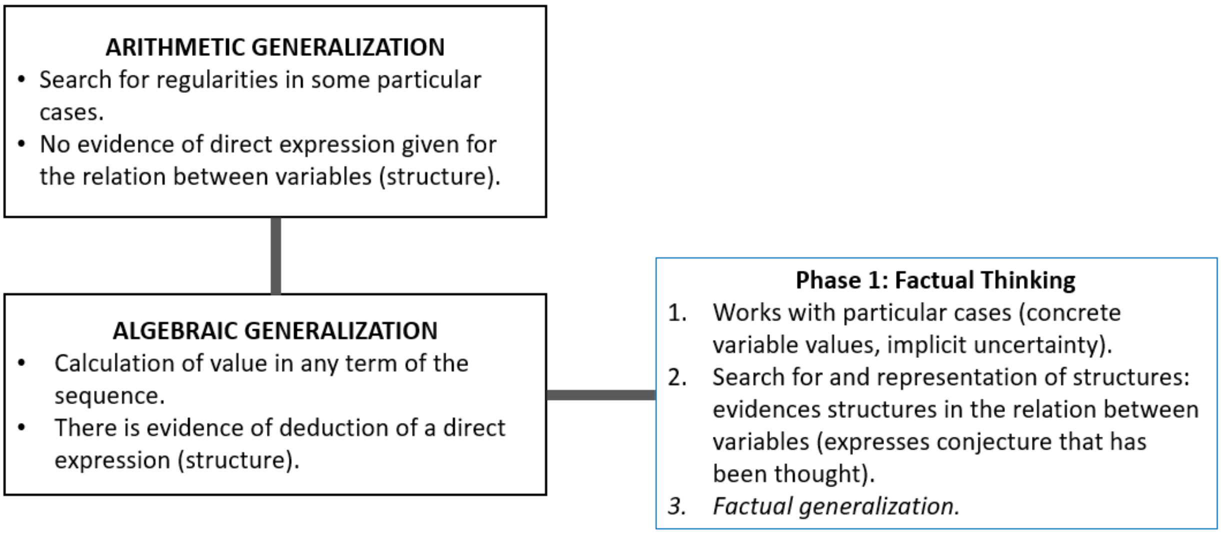


Figure 6. Proceso de generalización en un contexto funcional

En este modelo, el alumno es el sujeto de las acciones. En todas las fases de razonamiento, la identificación de las estructuras es clave, ya que permite continuar con el proceso. Interpretamos que se evidenciaba una estructura cuando el alumno era capaz de expresar una conjetura. La forma en que registramos lo que el alumno dijo sobre que se repetía en los casos particulares trabajados, fue identificando cómo expresaba su conjetura. Por ejemplo, una conjetura podía ser "más 3", una representación verbal, (es lo que se repite) pero podía ser "siempre suman 3" (una conjetura más elaborada). Estos ejemplos muestran diferentes niveles de pensamiento, aunque la estructura interpretada es la misma: $y = x+3$. Las conjeturas pueden ser validadas y reformuladas en cada fase prevista, ya que el razonamiento es dinámico.

En la fase en la que se produce el pensamiento factual (véase la figura 6), se descubren las posibles estructuras implicadas en la función. Identificamos las estructuras evidenciadas por el alumno tanto en los casos particulares dados como en aquellos en los que las cantidades eran inciertas. Cuando el alumno recibía nuevos casos particulares, podía utilizar "palabras clave" para describir el caso general (Vergel y Rojas, 2018). Consideramos que el alumno había identificado una estructura cuando respondía a dos o más preguntas siguiendo la misma regularidad o cuando generalizaba. En este caso, cuando entendíamos que el alumno había tomado conciencia de lo que se repetía.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Presentamos los resultados obtenidos, relacionados con el proceso seguido por el alumno hacia la generalización. Nos centramos en la producción del lenguaje y en el uso de los signos y la apropiación de su significado durante el proceso de generalización (Radford, 2000). Comenzamos a profundizar en el razonamiento del alumno a partir del trabajo con los casos particulares presentados en la Figura 5.

Pensamiento factual

El siguiente extracto de la entrevista muestra el momento en que Alejandro percibió que salían más pelotas de las que entraban.

> Entrevistador (I): Estos son los mismos ejemplos que utilizamos cuando los presenté en clase a todos tus compañeros. ¿Qué pasaba con esta máquina, Alejandro? ¿Qué entraba en la máquina?
>
> Alumno (S): Pues pelotas.
>
> I: Bolas, vale... ¿y qué salía?
>
> S: Más bolas.
>
> I: Vale Alejandro, vamos a ver estos ejemplos de máquinas que he traído. Si entran tres bolitas, esta es la cantidad que salía (miran los ejemplos en papel).
>
> S: Salieron seis (cuenta las bolitas)

Figure 7. Momento en el que el entrevistador comienza a trabajar con casos particulares.

No hay indicios de una estructura específica porque no cuantificó las bolas que salían frente a las que entraban. El diálogo evidencia un hecho mediado por la actividad perceptiva realizada por Alejandro. El entrevistador/investigador animó al niño a descubrir estructuras a través del trabajo con casos particulares (valores concretos de las variables). Las preguntas formuladas fueron importantes ya que movieron la actividad matemática de Alejandro al comenzar a identificar las variables involucradas en la relación funcional (variable independiente: número de bolas que entran; variable dependiente: número de bolas que salen). En ese momento, la incertidumbre radicaba en el plano numérico. El alumno contó las bolas que entraban en la máquina y las que salían para dar las respuestas iniciales. El investigador siguió preguntando sobre otros casos particulares, como se muestra en el siguiente fragmento de conversación.

> I: Por ejemplo, en esta (señalando la máquina donde entran cinco bolas), ¿cuántas entran?
>
> S: Seis.
>
> I: ¿Estás seguro de que hay seis?
>
> S: Cinco, cinco (cuenta las bolas).I: And how many should come out? (Covering the balls exiting the machine)

S: Ocho.

I: Ocho. ¿Por qué?

S: Porque hay que sumar tres.

Figure 8. El entrevistador ocultó las bolas que salían de la máquina en uno de los casos particulares.

Este diálogo ilustra que Alejandro identificó la regularidad representada por el tres, que corresponde al número de bolas que se suman al número de bolas que entran en la máquina y que, al final, proporcionó la respuesta sobre el número de bolas que salen.

A través de la elicitación del investigador y de su estrategia para ocultar las bolas que salían de la máquina, se identificó la relación matemática, que puede escribirse simbólicamente como $x \rightarrow x + 3$: si entran x número de bolas, salen $x + 3$ número de bolas. En este caso, el lenguaje utilizado por Alejandro, "Porque hay que sumar tres", sugiere que estamos viendo una generalización aritmética. En este punto del trabajo matemático de Alejandro, utilizó la abducción (hay que sumar tres) para responder a cada una de las preguntas asociadas al número de bolas que entran en la máquina. No hay evidencia de deducción de ninguna expresión directa que ayude a calcular el número de bolas que salen de la máquina dado cualquier número de bolas que entran. Las palabras de Alejandro sugieren que se trata de una generalización aritmética, ya que su respuesta se limitó a "porque hay que sumar tres". En este caso, "la abducción permite generar un procedimiento pero no una expresión directa, es decir, una fórmula" (Radford, 2013, p. 7).

El investigador siguió preguntando sobre otros casos particulares como los que se muestran en el siguiente fragmento.

I: ¿Cuántas bolas entran en ésta?

S: Nueve (cuenta las bolas).

I: ¿Y cuántas tienen que salir?

S: 12

I: ¿Cómo sabes que son 12?

S: Porque cuando hicimos las cuentas encontré un pequeño truco.

I: ¿Cuál era el pequeño truco? ¿Puedes decírmelo?

S: Pues mira... a una bola le añadimos tres más; a seis bolas le añadimos otras tres y así sucesivamente [con tres dedos de su mano izquierda muestra tres].

Figure 8. Momento en el que el estudiante utiliza gestos para responder

Alejandro enfatizó su explicación con gestos para reforzar la verdad de lo que decía. La estructura que siguió identificando en estos casos particulares sigue siendo, en términos algebraicos, $y = x+3$. El alumno identificó correctamente la relación entre las variables para los casos particulares dados. En las palabras "Pues mira, a una bola le añadimos tres más; a seis bolas le añadimos otras tres y así sucesivamente", el término "así sucesivamente" puede considerarse una deixis temporal. El alumno quiso decir que continúa "así", de la misma manera siempre. Por supuesto, el adverbio "siempre" no es explícito en su discurso, pero está implícito. Obsérvese cómo en su enunciado, la deixis modal "así que" sugiere el reconocimiento y el uso de lo que él llama "un pequeño truco", que no es otra cosa que un recurso semiótico importante, que actúa como input para asegurarse de que esas tres bolas deben ser añadidas independientemente del número concreto de bolas que entren en la máquina. El adverbio "así" evidencia una de las funciones generativas del lenguaje, es decir, funciones que permiten describir procedimientos y acciones que potencialmente pueden llevarse a cabo de forma repetida, e imaginada (Radford, 2003).

En el siguiente extracto de la entrevista, el entrevistador dio al alumno la oportunidad de validar la conjetura previa sobre la estructura evidenciada a partir de un ejemplo externo.

I: Entonces, tienes un pequeño truco que estás utilizando para todas las preguntas que te estoy haciendo.

S: Sí.

I: Y si te pregunto, por ejemplo, di cualquier otro número, el que quieras.

S: 19

I: Si entran 19 bolitas, ¿cuántas deben salir?

S: 22

I: 22. ¿Podrías decirme otra vez cómo lo has encontrado?

S: Bueno, si hay una, salen cuatro, hay que añadir tres más

I: Vale, tres más, perfecto. Hay un niño en clase que dice que si entran 25 bolitas, deben salir 27. ¿Estás de acuerdo con él?

S: No, son 28.

I: ¿Por qué 28?S: Because you have to add three, as I said, and you told me there were 25, there aren't 27

Alejandro validó la conjetura basándose en la estructura evidenciada y =x+3. En varias ocasiones dijo que había que "sumar tres". A continuación, pasamos a las preguntas que el entrevistador hacía sobre cantidades mayores para referirse al número de bolas que entraban en la máquina.

I: ¿Y si, por ejemplo, entran 1 millón de bolas?

S: 1 millón y salen tres.

I: Y si meto 3 millones de bolas.

S: 3 millones y 3, siempre hay que sumar tres.

I: Ah, vale.

Aquí se observa la transición de los casos particulares presentados al principio a los que se consideran ahora. Los valores tratados en esta parte, un millón de pelotas o tres millones de pelotas, aun siendo concretos, adquieren un sentido incierto para el alumno entrevistado. En este caso, el alumno está tratando con cantidades que no se pueden contar. Un análisis de las pruebas sugiere que ha habido una evolución. En efecto, la producción del alumno pasa de "Pues mira, a una bola le añadimos tres, a seis le añadimos otras tres y así sucesivamente", a "Siempre hay que añadir tres". En esta última producción aparece el adverbio "siempre". Expresiones como éstas pueden considerarse "expresiones lingüísticas ad hoc que comunican la idea de la abstracción que subyace a la generalización de las acciones" (Radford, 2003, p. 49). Estos deixes parecen estar en el límite entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Sin embargo, en este caso, estamos viendo una generalización de acciones que se clasifica como generalización algebraica factual. Es decir, un nivel de pensamiento en el que se evidencia una generalización de las acciones como un esquema operacional, conectado con el uso concreto de los símbolos numéricos, los términos deícticos, los gestos y la actividad perceptiva Radford, 2013; Vergel, 2013, 2015).

El carácter analítico que se requiere para que la generalización (factual) sea algebraica se encuentra en el extracto en el que Alejandro afirma: "Siempre hay que sumar 3". Este carácter analítico se manifiesta en la deducción, como movimiento, que Alejandro expresa en su afirmación (a diferencia de la inducción), la cual se basa en información clave, por ejemplo, asociada a las preguntas que el investigador ha suscitado repetidamente y que han permitido mover la actividad matemática de Alejandro.

Este tipo de generalización manifiesta un proceso colectivo (investigador y alumno), a través del cual se toma conciencia de una forma de ver y pensar las relaciones funcionales construida cultural e históricamente. Precisamente, de lo que toma conciencia Alejandro es de esta forma matemática de ver y percibir una situación matemática presentada en términos de variables tácitas y su relación. Es decir, vemos una covarianza que se materializa en la relación específica (en términos simbólicos: $y = x + 3$) entre el número de bolas que entran en la máquina y el número de bolas que salen.

CONCLUSIONS

Este estudio evidencia, como lo anticiparon nuestros antecesores, que un niño a temprana edad puede pensar algebraicamente (por ejemplo, Kaput, Blanton y Moreno, 2008; Radford, 2018; Torres, Cañadas y Moreno, 2018; Vergel, 2015). El objetivo de esta investigación fue identificar y describir el proceso de generalización de un alumno de 2º grado. El análisis de la producción del alumno demuestra una forma de pensamiento multimodal, ya que surgen diversos recursos semióticos desencadenados por el alumno en su intento de generalización (Radford, Edwards y Arzarello, 2009). En este caso, Alejandro no sólo moviliza recursos cognitivos, sino también perceptivos y gestuales que no actúan como elementos periféricos en su pensamiento, sino que son elementos inherentes y constitutivos.

El trabajo de Alejandro sugiere una transición de la generalización aritmética a la generalización algebraica. La noción de estructura ha sido aquí un elemento clave para detectar la transición, ya que ayudó a interpretar la relación entre las variables involucradas en la tarea e identificadas por el niño. La estructura ha actuado como una noción cognitiva que se refiere a la regularidad presente entre las variables de la función en cuestión.

La representación de una estructura corresponde a la explicitación de una conjetura. El punto sustancial en la producción de Alejandro ha sido la capacidad de deducción manifestada en su respuesta, "Siempre hay que sumar 3", afirmación que indica generalización de acciones, como un esquema operacional, que hemos clasificado como generalización algebraica factual. Esta expresión de generalización se ha denotado simbólicamente con la estructura $y = x + 3$.

También aparecieron palabras clave como "siempre" y "así", con las que el alumno indicaba que se centraba en casos particulares y revelaba así la aceptación de una continuidad secuencial. Encontramos una constante en las respuestas dadas por Alejandro; mostró estabilidad respecto a lo que se repetía a lo largo de la tarea con diferentes casos particulares, lo que le permitió llegar a la generalización.

Con la producción proporcionada por Alejandro, encontramos estabilidad de la estructura evidenciada desde los primeros casos particulares trabajados, lo que aseguró el logro de la generalización. Así, comprobamos que la estructura está estrechamente relacionada con el proceso de generalización seguido, dado que la identificación de la estructura en una situación matemática es clave en el proceso de generalización.

Por último, distinguimos entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Evidenciamos que la transición de la aritmética al álgebra se produce a través de una ruptura. Esto se confirmó en la medida en que Alejandro obtuvo la estructura correcta y dedujo así otros casos particulares diferentes. Podemos recordar que para Descartes (1983), la deducción es una conclusión basada en hechos dados (verdades conocidas con certeza). Aquí reside la característica del movimiento en la idea de la deducción. Para Pappus, "el análisis es el movimiento de lo que está dado a lo que se busca" (Rideout, 2008, p. 62). Por ello, para Viète "lo que es distintivamente algebraico (...) es la forma analítica en que pensamos cuando pensamos algebraicamente" (Radford, 2018, p. 6). A su vez, el adjetivo fáctico significa que las variables de la fórmula aparecen tácitamente; lo que es incierto (o lo que es general) es innominado, es decir, no es un sujeto explícito del discurso. Otra forma de decir esto es que la fórmula se expresa a través de instancias particulares de la variable (la variable se instancia en números específicos o "hechos") en forma de regla concreta, por ejemplo, "sale 1 millón y 3"; "3 millones y 3, siempre hay que sumar 3".

Agradecimientos

Esta investigación se realizó dentro del proyecto de referencia EDU2016-75771-P, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER). Además, contó con el apoyo de una beca de referencia BES-2017-080124 concedida por el gobierno de España.

Referencias

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7,* 23-40.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Johnsen & A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Carpenter, T. y Levi, L. (1999): Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal (Canada), April, 1999.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz, y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, Spain: Comares.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education. Third edition* (pp. 191-218). New York, NY: Routledge.

Descartes, R. (1983). *Descartes. Discurso del método. Reglas para la dirección de la mente [Discourse on the method. Rules for the direction of the mind]*. Barcelona, Spain: Orbis. S.A.

English, L. y Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, *91*(2), 166-170.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York, NY: Springer.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebra reasoning? En J. J. Kaput, D.W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Routledge.

Kaput, J. J., Blanton, M. J. y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates. Katz

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 390- 419). Macmillan Publishing Co, Inc.

Kieran, K. (1989). The early Learning of Algebra: a Structural Perspective. En S. Wagner y K. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Reston, Virginia: LEA.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (ED.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). London, United Kingdom: Murray.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7*(1), 69-85.

Mason, J y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 277-289.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Generalization in fifth graders within a functional approach. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapore: PME.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press. (Translation into Spanish: J. Zugazagoitia, 1965. Cómo plantear y reslover problemas. Mexico: Trillas).

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, Spain: Tecnos.

Radford, L. (1996) Some reflections on teaching algebra through generalization. En N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 107-11). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237-268.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62. Available at http://hdl.handle.net/10481/3505

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Homenaje a Encamación Castro* (pp. 3-12). Granada, Spain: Editorial Comares.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: *The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). New York, NY: Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-68351-5_1

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(3), 9-95.

Rideout, B. (2008). *Pappus reborn. Pappus of Alexandria and the changing face of analysis and synthesis in late antiquity*. Master of Arts in History and Philosophy of Science (Thesis). University of Canterbury.

Rivera, F. (2017). Abduction and the emergence of necessary mathematical knowledge. En L. Magnani y T. Bertolotti (Eds.), *Springer handbook of model-based xcience*. Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-319-30526-4_25

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. En J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). Reston, VA: NCTM.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Steffe, L. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: LAE.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz- Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). Gijón, Spain: SEIEM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Structures identified by second graders in a teaching experiment in a functional approach to early algebra. En U. T Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics* (pp. 573-582). *Education Utrecht,* Netherlands: Institute of Education and Erme.

Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años). *Revista Científica, edición especial,* 225-231.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.* Bogotá, Colombia: UD.

Vergel, R. y Rojas, P. J. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula* [. Bogotá: UD.

Vergel, R. (2019). Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico. *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Medellín, Colombia: CIAEM-IACME.

ESTUDIO 3

Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años

Uniciencia, Vol. 35(2) https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.16
Received: Oct/31/2020 • Accepted: Mar/18/2021 • Published: Jul/31/2021

Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años

Structures in the direct and inverse forms of a function by 7-8 year old students

María D. Torres [1], mtorresg@ugr.es, Orcid ID: https://orcid.org/0000-0001-6491-1151
María C. Cañadas [1], mconsu@ugr.es, Orcid ID: https://orcid.org/0000-0001-5703-2335 **Antonio Moreno** [1], amverdejo@ugr.es, Orcid ID: https://orcid.org/0000-0002-8284-3903
Pedro Gómez[2], argeifontes@uniandes.edu.co, Orcid ID: https://orcid.org/0000-0001-9929-4675

Received: Jul/14/2020 • Accepted: Aug/14/2020 • Published: Jan/31/202X

Resumen

El objetivo de este estudio ha sido caracterizar las estructuras evidenciadas por estudiantes de educación primaria desde un enfoque funcional del *early algebra*. Para ello se han identificado y comparado las estructuras que evidencian unos estudiantes en las formas directa e indirecta de una función, tanto para el trabajo con casos particulares como en la generalización. Para ello, se diseña una tarea contextualizada que involucra la función lineal y=x+4, en sus formas directa e inversa. Los seis estudiantes de este estudio de 2º de educación primaria (7-8 años) trabajaron la tarea durante entrevistas semiestructuradas durante el curso académico 2017/2018. Los estudiantes proceden de un colegio de Granada, en Andalucía, España. Se describen las estructuras evidenciadas en ambas formas de la función y tanto en el trabajo con casos particulares como cuando se les pregunta por el caso general. Se obtiene que los seis estudiantes del estudio identificaron estructuras adecuadas de la forma directa de la función en al menos una ocasión durante la entrevista. En la forma inversa se dieron estructuras también adecuadas, pero hubo estudiantes que no respondieron o a los que no se les hizo preguntas de esta parte. La mayoría de las estructuras que generalizaron se produjeron al preguntarles explícitamente por la generalización, tanto en la forma directa, como en la forma inversa de la función.

Palabras clave: estructura; forma directa de una función; forma inversa de una función; generalización; pensamiento funcional.

Abstract

The objective of this study has been to characterize the structures evidenced by elementary school students from a functional approach to early algebra. For this, the structures that some students show in the direct and indirect forms of a function have been identified and compared, both for working with particular cases and in generalization. To do this, a contextualized task is designed that involves the linear function y=x+4, in its direct and inverse forms. The six students in this study of 2nd grade of primary education (7-8 years) worked the task during semi-structured interviews during the academic year 2017/2018. The students come from a school in Granada, Andalusia, Spain. The structures evidenced in both forms of the function are described, both in the work with particular cases and when asked about the general case. It is obtained that the six students in the study identified adequate structures of the direct form of the function on at least one occasion during the interview. In the inverse form, adequate structures were also given, but there were students who did not respond or who were not asked questions about this part. Most of the structures that they generalized were produced by explicitly asking them for the generalization, both in the direct form and in the inverse form of the function.

Keywords: direct form of a function; functional thinking; generalization; inverse form of a function; structure.

Introducción

El estudio del álgebra comprende el desarrollo de un pensamiento algebraico que tiene un amplio campo de aplicación en matemáticas. En esta disciplina, el álgebra es una herramienta para la resolución de problemas y la modelización de situaciones mediante funciones (Bolaños-González y Lupiáñez-Gómez, en prensa). El *early algebra* es una propuesta curricular que plantea la introducción de modos de pensamiento algebraico desde los primeros niveles educativos para favorecer el razonamiento matemático y mitigar las dificultades que encuentran los estudiantes cuando abordan el álgebra en cursos superiores (Kieran, 2004), que es lo habitual en la gran mayoría de los países (Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018; Castillo-Sánchez, Gamboa-Araya, y Hidalgo-Mora, 2018).

Entre los contenidos matemáticos que usualmente se trabajan en educación primaria y el tratamiento que se le da al álgebra en educación secundaria se produce un salto abrupto (Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Filloy, Puig y Rojano, 2008). Este tratamiento del álgebra se caracteriza por ser formal y no prestar atención a nociones como la generalización y el razonamiento, lo cual motiva la propuesta early algebra (Molina, 2006). La generalización es un proceso esencial en el razonamiento matemático. Atender a ella en los cursos más básicos permite, por ejemplo, que los estudiantes se alejen de las particularidades adheridas al cálculo aritmético, al poder identificar la estructura y las relaciones matemáticas involucradas (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011).

La propuesta del early algebra pretende promover un aumento de la capacidad para expresar la generalidad de los estudiantes desde los primeros niveles educativos, a partir de la observación de patrones de comportamiento o regularidades desde unos casos particulares dados; consiste en una "algebrización del currículo" (Kaput, 2000).

Existen publicaciones que forman parte de grandes proyectos, en diferentes países, que ponen el énfasis en la evidencia de que los niños en los primeros niveles educativos, pueden pensar de manera bastante más sofisticada de lo que se suponía (e.g., Kaput, Blanton y Moreno, 2008; Pinto y Cañadas, 2017a; Radford, 2018; Torres, Cañadas y Moreno, 2018; Vergel, 2015). Particularmente, la investigación evidencia que, aun cuando las producciones de los estudiantes no contienen los signos alfanuméricos del álgebra, su pensamiento puede ser genuinamente algebraico (Vergel, 2014).

En este trabajo se centra en el pensamiento funcional: un tipo de pensamiento algebraico en el que la función es la noción matemática protagonista. "El pensamiento funcional se basa en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 3). "El pensamiento funcional, en el contexto del *early algebra*, se centra en la relación entre dos variables, siendo fundamental el estudio de regularidades y, en particular, su generalización" Blanton, 2008, p. 30). De manera general, la regularidad es lo que se repite y, a partir de una regularidad observada, se prueba que esta sea válida para más casos particulares y, finalmente, para cualquier caso perteneciente a una situación dada (Pólya, 1966). Concretamente, en el contexto funcional se habla de estructura para referirse a la regularidad que define las relaciones existentes entre las variables de una función. A través de la identificación de una estructura entre valores concretos de ambas variables (casos particulares), se puede llegar a generalizar siguiendo un proceso de razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2007).

Cada función tiene dos formas que se denominan directa e inversa. El pensamiento funcional se centra en las relaciones, tanto directa (de la variable dependiente con la variable independiente) como inversa (de la variable independiente con la variable dependiente), existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultánea (Blanton y Kaput, 2004; Warren y Cooper, 2005). Pinto y Cañadas (2017a) exploraron cómo 24 estudiantes de quinto de educación de primaria (10-11 años) identificaban la forma inversa de una funció al trabajar con una tarea (y=2x+6). Los autores concluyeron que 10 estudiantes establecieron diferentes estructuras que involucran las variables en la función inversa. Por otra parte, 5 estudiantes generalizaron esta forma de la función. Ellos encontraron que las respuestas son más incoherentes e imprecisas en el estudio de la forma inversa.

Diferentes investigaciones describen la generalización de estudiantes de educación primaria en contextos funcionales (e.g., Carraher y Schliemann, 2016; Pinto y Cañadas, 2017a) pero no hay estudios sobre cómo estudiantes de 2º de educación primaria identifican y generalizan las estructuras tanto en las formas directa e inversa de una función en edades tempranas. Nuestra investigación persigue caracterizar cómo los estudiantes identifican las estructuras en las formas directa e inversa de una función.

Generalización y estructura en un contexto funcional

Pólya (1945) considera la generalización como una actividad empírica inductiva en la que se acumulan ejemplos concretos y se detecta y se sistematiza una regularidad. La generalización es una capacidad cognitiva que se puede desarrollar. Asumimos que generalizar es pasar de lo particular a lo general (Mason, 1996). Para Radford (1997) generalizar es observar algo que va más allá del dominio de unos casos particulares. La generalización es un elemento central del razonamiento inductivo y requiere de una abstracción a partir de casos particulares para extraer una conclusión (Driscoll, 1999).

En este estudio, nos aproximamos al álgebra desde una tarea de generalización en un contexto funcional, una de las vías que promueven algunos autores (e.g., Blanton y Kaput, 2004). La función es el contenido matemático presente en este contexto. Blanton, Brizuela, Murphy Gardiner, Sawrey y Newman-Owens (2015) caracterizaron diferentes niveles de sofisticación en el pensamiento de los niños a través de trayectorias de aprendizaje al aplicar diferentes funciones a través de un estudio longitudinal. Los resultados sugieren que los niños pueden aprender a pensar de manera generalizada sobre las relaciones en los datos de funciones, más allá del enfoque curricular típico en los primeros cursos de primaria, donde se suele considerar una sola secuencia de valores.

Usualmente, se utilizan tareas de generalización que involucran una función lineal para promover el pensamiento funcional de los estudiantes. Estos, en el proceso de generalización, pueden identificar diferentes estructuras de la función involucrada en la tarea. En el ámbito del pensamiento funcional se habla de estructuras para referirse a la expresión de las regularidades presentes entre las variables de las funciones involucradas. Se explora cómo los estudiantes identifican las estructuras sin atender a la posición ni al crecimiento, como sucede en el estudio de los patrones, sino atendiendo a la relación de covariación y a la generalización de esas estructuras. El estudio del patrón y la estructura está integrado en una amplia gama de estudios de desarrollo matemático en los primeros años de enseñanza (Mulligan y Mitchelmore, 2009). La idea de patrón se relaciona más con la noción de recurrencia que con la de estructura (esta última referida al establecimiento de una relación de covariación entre dos cantidades). Una de las manifestaciones del pensamiento funcional es a través del reconocimiento de una estructura. Para interpretar cómo los estudiantes identifican una estructura, se define, desde un punto de vista cognitivo, como la forma en la que es evidenciada la regularidad entre las variables (Pinto y Cañadas, 2017a). Esta regularidad puede ser expresada a través de diferentes representaciones, tanto al trabajar con casos particulares de las variables como al generalizar (Torres, Moreno y Cañadas (en revisión)).

Diferentes autores distinguen entre distintos tipos de generalización. Se asume en este estudio la tipología identificada por Pinto y Cañadas (2017b), quienes distinguen entre generalización espontánea e inducida. La generalización espontánea se produce sin preguntar explícitamente por ella y suele darse cuando se plantean cuestiones relacionadas con casos particulares. La generalización inducida se produce cuando se pregunta explícitamente por el caso general. Para generalizar, se debe identificar la estructura a partir de unos casos particulares. De esta manera las nociones de generalización y de estructura están relacionadas. Esta última es útil para interpretar y presentar las producciones de los estudiantes sobre la relación que observan entre las variables involucradas en una tarea de generalización. Torres, Cañadas y Moreno (2018) abordan unas categorías sobre las estructuras evidenciadas por seis estudiantes de 2º de educación primaria de la forma directa de la función y=x+3 cuando trabajan con casos particulares y cuando trabajan con la generalización. La tarea de generalización con la que trabajaron consistía en una máquina en la que se introducían un número determinado de bolas y salían otro número concreto de bolas siguiendo la estructura mencionada, como aparece en la figura 1.

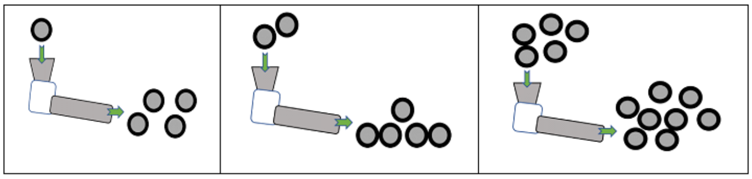


Figura 1. *Representación pictórica de algunos de los casos particulares proporcionados a los estudiantes*

Los resultados de ese estudio muestran que los estudiantes identificaron cuatro tipos de estructuras diferentes (y=x+3, y=x+x, y=x+2, y=x+1), durante los casos particulares dados. La mayoría generalizó verbalmente la estructura correcta, y=x+3, al preguntar sobre la generalización, e identificaron la misma estructura para casos particulares y para el caso general, observándose coherencia en sus respuestas.

Los estudiantes de educación primaria pueden utilizar diferentes tipos de representaciones para expresar las estructuras que identifican en las tareas con funciones lineales. Estas incluyen (a) lenguaje natural – oral, (b) lenguaje natural – escrito, (c) pictórico, (d) numérico, (e) notación algebraica, (f) tabular y (g) gráfico (Carraher et al., 2008). Asumimos que la representación verbal es aquella que se hace mediante el lenguaje natural, ya sea oral o escrito. La representación verbal y la pictórica resultan claves para el trabajo con estudiantes de primero de educación primaria (Cañadas y Fuentes, 2015). La representación numérica es empleada junto a la verbal por estudiantes de 2º curso de educación primaria (Torres, Cañadas y Moreno, 2019).

Formas directa e inversa de una función

La función es una regla que establece la relación de covariación de los valores de uno o más conjuntos de datos respecto de otro(s). En este trabajo nos centraremos en las funciones que relacionan dos variables que covarían (Thompson, 1994). Dada la edad de los estudiantes con los que trabajamos nos ceñimos a las funciones lineales ($y = mx+n$, siendo m y n números naturales), con dominio y codominio también sobre números naturales.

Se establecen dos relaciones en las funciones de dos variables; formas directa e inversa de la función. Merino et al. (2013) trabajaron con la relación que se puede establecer entre el número de mesas y las personas que se pueden sentar alrededor de ellas. Definieron en su investigación como forma directa de la función, a aquella que dado el número de mesas permite conocer el número de niños que se pueden sentar a su alrededor. En cambio, cuando es conocido el número de niños que están sentados, y se requiere el número de mesas que son necesarias, la tomaban como la forma inversa de esa función.

Cuando hablamos de una función $y = f(x)$, en general, se está haciendo referencia a su forma directa pues es la manera usual en la que se representa la regularidad entre las dos variables. Esa función tiene una función inversa $y = g(x)$, tal que $g (f (x)) = f (g (x)) = x$. En este estudio fijamos de partida una función dada $y=x+4$ que decidimos que es la que se refiere a la forma directa por considerarla más sencilla. Se afirma que, para los casos por los que preguntamos a los estudiantes, para uno o más valores de x estaremos indagando sobre la capacidad del sujeto para identificar y/o generalizar la forma directa de esa función. Sin embargo, para los casos en los que se le pregunta al estudiante por el valor *x* dados uno o más valores de *y*, entonces se está indagando sobre la capacidad del sujeto para identificar y/o generalizar sobre la forma inversa de esa función. Se aclara que la forma directa no está determinada por las cantidades que se presentan para obtener una respuesta; está determinada por la forma en la que se presentan los datos iniciales. En este estudio se tomará como forma directa de la función aquella que se supone más sencilla para los estudiantes.

En la figura 2 presentamos un mapa conceptual que incluye y relaciona los elementos teóricos de este trabajo. El sentido de las flechas recoge el camino hacia la generalización como culmen del proceso del pensamiento funcional manifestado.

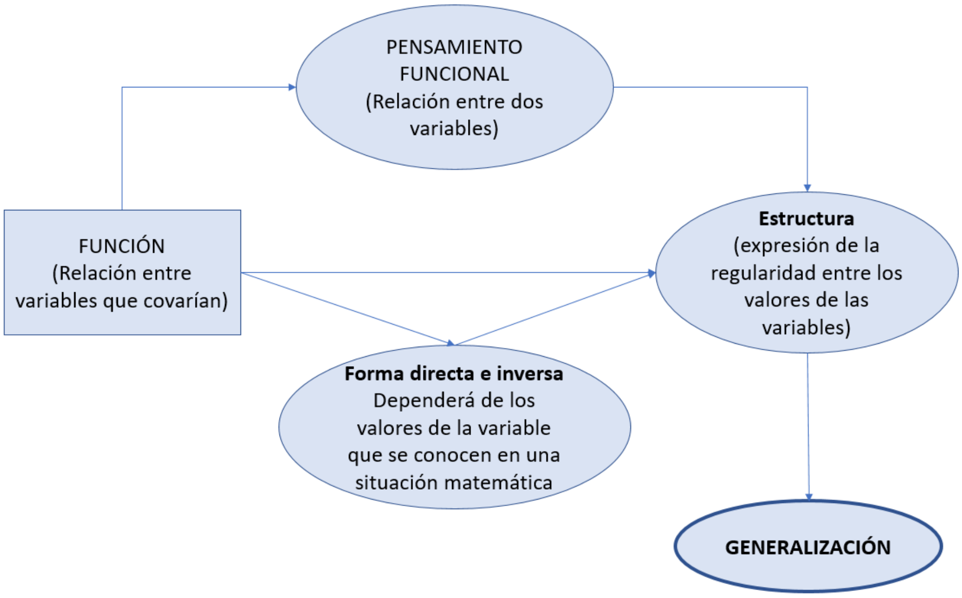


Figura 2. *Elementos centrales en este trabajo*

La generalización es la fase final del proceso seguido. La posición que ocupan las formas directa e inversa en nuestro estudio es central (ver figura 2), ya que permite explorar el pensamiento puesto en juego por los estudiantes en dos direcciones (directa e inversa). Las estructuras identificadas y expresadas por los estudiantes nos ayudan a conocer el pensamiento funcional con mayor profundidad. Para que haya evidencia de pensamiento funcional es necesario que esté implícita una relación, ya sea en la forma directa o inversa de la función. Atendiendo a la estructura identificada en las dos formas se puede observar la generalización que logran.

Nuestro objetivo general de investigación es describir cómo los estudiantes de 2º de educación primaria identifican las formas directa e inversa de una función en una tarea de generalización en un contexto funcional del *early algebra*. Para ello, se define el siguiente objetivo específico de investigación: identificar y comparar las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directa e indirecta de una función, tanto para el trabajo con casos particulares como en la generalización.

Metodología

Se lleva a cabo un estudio de tipo cualitativo y de carácter exploratorio y descriptivo. Dentro del paradigma de la investigación de diseño, se desarrolla un experimento de enseñanza con sesiones de trabajo (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Los experimentos de enseñanza son los estudios de diseño más frecuentes de la investigación de diseño (Castellanos, Flores y Moreno, 2018). Las sesiones del experimento constituyen el contexto previo a la realización de unas entrevistas semiestructuras. En la tabla 1 se recogen los diferentes contextos y funciones lineales implicadas en la secuencia de sesiones.

Tabla 1

Características de las sesiones de clase

Contexto	**Función**
Sesión 1: máquina de bolas	y = x+3
Sesión 2: parque de atracciones 1º	
Sesión 3: parque de atracciones 2º	y = 2x+1
Sesión 4: cumpleaños	y = 2x
Sesión 5: paradas de tren	

En las sesiones se aplicaron cuestionarios basados en tareas de generalización que consisten en obtener nuevos casos particulares o el caso general partiendo de unos casos particulares conocidos. Para ello, los estudiantes han debido de identificar una estructura en esos casos particulares dados. Es decir, se les pide que reconsideren los patrones como funciones (como relación entre dos variables). Esto a menudo implica generar una representación y/o registrar de algún modo los casos particulares para identificar la relación entre dos conjuntos de datos.

En la figura 3, se presenta un ejemplo de cuestionario aplicado después de introducir la tarea en la sesión 1 y que nos sirvió para seleccionar a los estudiantes de la muestra de este estudio.

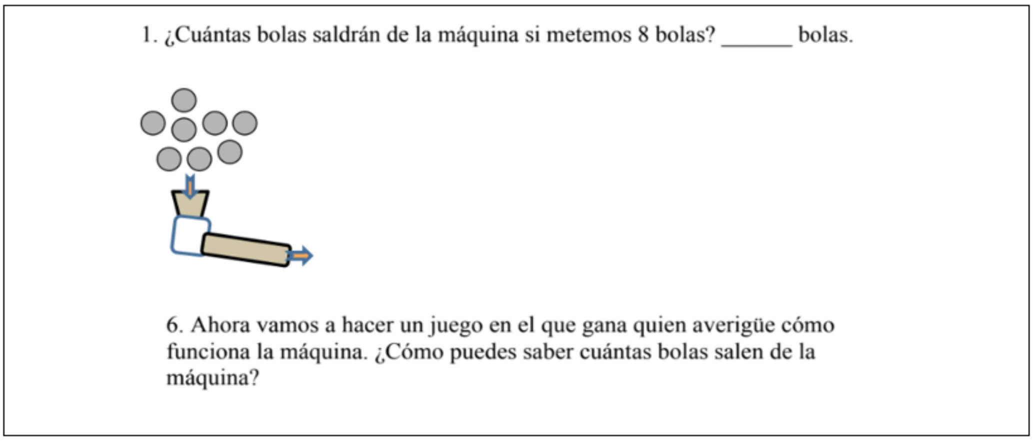


Figura 3. *Ejemplo del cuestionario aplicado en la sesión 1. Pregunta sobre un caso particular (pregunta 1) y el caso general (pregunta 6)*

Los estudiantes no recibieron retroalimentación sobre sus respuestas. Al aula entraron tres miembros del equipo de investigación: la profesora-investigadora, una investigadora de apoyo y otro investigador que grabó con la videocámara.

Al final de las sesiones del experimento de enseñanza, se realizaron unas entrevistas finales a seis estudiantes. Los propósitos de las entrevistas fueron: (a) explorar cómo los estudiantes relacionan las variables involucradas y (b) identificar las estructuras en las respuestas de los estudiantes a los casos particulares y al caso general. Para alcanzar los objetivos de investigación, se describieron las estructuras identificadas tanto en la forma directa como inversa de la función (durante los casos particulares y el general) como también las generalizaciones expresadas, diferenciando si son espontáneas o inducidas.

Participantes

Los sujetos de este estudio fueron seis estudiantes de 2º de educación primaria (7-8 años), de España, a los que realizamos una entrevista individual semiestructurada. Sus conocimientos previos eran los siguientes: números del 0 al 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con llevadas. La característica fundamental de los participantes es que no habían recibido enseñanza previa en torno a tareas que involucraran alguna función lineal y la generalización antes de las sesiones del experimento. Se seleccionaron a estos estudiantes de un grupo de 24 al que aplicamos un cuestionario inicial (ver figura 4) en la primera sesión del experimento. Las preguntas del cuestionario involucran la función $y=x+3$ (ver figura 1) en una tarea de generalización contextualizada. Según las respuestas de los estudiantes se pudieron hacer tres grupos de los que seleccionamos a seis de ellos, teniendo en cuenta las recomendaciones de la profesora en cuanto a los logros de aprendizaje de cada estudiante y según hubieran avanzado en el proceso de generalización. En la Tabla 2 resumimos esta información.

Tabla 2

Selección de la muestra

Grupos	**Criterios de selección**	**Estudiantes**
Inicial	No identificaron la regularidad	E1, E2
Intermedio	Evidenciaron la regularidad en varias preguntas	E3, E4
Avanzado	Generalizaron	E5, E6

Instrumento de recogida de información

Para fundamentar el diseño de la entrevista y guiar el proceso hacia la generalización se sigue, en este estudio, una adaptación del modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) que se presenta en la figura 4.

1. *Trabajo con casos particulares.* Casos concretos o ejemplos con los que se inicia el proceso. Suelen ser casos sencillos y fácilmente observables.
2. *Identificación de estructuras.* La estructura hace referencia a las relaciones existentes entre las variables de una función.
3. *Formulación de conjeturas.* Una conjetura es una proposición que se supone verdadera pero que no ha sido sometida a exploración. Dicha exploración puede dar como resultado su aceptación o su rechazo. Si se presenta un ejemplo para el que la conjetura no es válida, ésta se rechaza. En términos de Popper (1967), se dice que la conjetura se refuta.
4. *Justificación de las conjeturas.* Hace referencia a toda razón dada para convencer de la verdad de una afirmación. Se suele distinguir entre justificaciones empíricas y deductivas. Las empíricas usan los ejemplos como elemento de convicción. La validación de conjeturas se realiza con nuevos casos particulares (diferentes a los del paso previo), pero no para el general.
5. *Generalización.* La conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares considerados.

Figura 4. *Modelo adaptado de razonamiento inductivo*. Extraído de Cañadas y Castro (2007)

Con los pasos descritos en el modelo se observa cómo los estudiantes, a partir de los casos particulares, logran identificar estructuras para luego poder generalizar. Cuando los estudiantes expresan una conjetura se interpreta las estructuras que evidencian. Algunos estudios usan el modelo de Cañadas y Castro (2007) para diseñar cuestionarios que indagan en el proceso de generalización de estudiantes de los primeros cursos de educación primaria (e.g., Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2018). Aunque la formulación y justificación de conjeturas que pueden desarrollar los estudiantes son parte del proceso hacia la generalización no son objeto de estudio de este trabajo.

En la entrevista, se plantea una tarea que involucra una función lineal de tipo aditivo (función $y=x+4$). Se trata de una función lineal, que es recomendada para trabajar con estudiantes de educación primaria (e.g., Carraher y Schliemann, 2016). Se usó como contexto la edad de dos superhéroes cuya diferencia son 4 años. La presentamos de la manera siguiente: “Iron Man y el Capitán América cumplen años el mismo día. Cuando Iron Man cumplió 5 años, el Capitán América cumplió 9. Cuando Iron Man cumplió 7 años, el Capitán América cumplió 11”. Un miembro del equipo de investigación fue el entrevistador, quien comenzó presentando la tarea a los estudiantes. A continuación, les mostró casos particulares (no consecutivos para evitar la recursividad en las respuestas de los estudiantes) de la tarea y avanzamos inductivamente hacia la generalización. Cada entrevista duró 20 minutos, tiempo suficiente para que este no fuera un problema para los estudiantes. Las entrevistas estaban constituidas por dos partes. En la primera, se les planteaba la forma directa de la función y en la segunda la inversa. El protocolo seguido en ambas entrevistas es análogo. Comenzaron con preguntas sobre los casos particulares para, finalmente, preguntar por el caso general. El número total de casos particulares presentados o tratados durante la entrevista es diferente de unos estudiantes a otros dependiendo de sus respuestas. Después de los casos particulares, preguntamos por el caso general determinado por la pregunta: ¿Cómo le explicarías a un amigo qué ha de hacer para conocer la edad de uno de los superhéroes? (el superhéroe cambia en función de la forma de la función que se esté trabajando, directa o inversa).

El entrevistador formulaba las preguntas que los estudiantes debían responder mediante un protocolo de actuación que comienza por las preguntas referidas a la forma directa de la función por ser la más sencilla de identificar por los estudiantes. Una síntesis se presenta en la Figura 5.

Forma directa

1º Casos particulares

Casos particulares dados:

- Cuando Iron Man cumplió 5 años, el Capitán América cumplió 9
- Cuando Iron Man cumplió 7 años, el Capitán América cumplió 11…

Casos particulares propuestos por el estudiante:

- Dime una edad para Iron Man (_). Si cumple esos años, ¿cuántos años cumple el Capitán América?

Casos particulares de un tercero:

- Un niño de la clase dice que “Cuando Iron Man tiene XX años, el Capitán América tiene YY años. ¿Estás de acuerdo con él?

2º Generalización

¿Cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocer la edad del Capitán América?

Forma inversa

1º Casos particulares

Casos particulares dados

- Cuando el Capitán América cumplió 5 años ¿cuántos cumplió Iron Man?
- Cuando el Capitán América cumplió 8 años ¿cuántos cumplió Iron Man?

Casos particulares propuestos por el estudiante.

- Dime una edad para el Capitán América (_). Si cumple esos años ¿Cuántos años cumple Iron Man?

Casos particulares de un tercero

- Un niño de la clase dice que “Cuando el Capitán América tiene XX años, Iron Man tiene YY
- Años ¿Estás de acuerdo con él?

2º Generalización

¿Cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocer la edad de Iron Man?

Figura 5. *Protocolo de la entrevista*

Análisis y resultados

Tras transcribir las entrevistas, se reprodujeron las categorías diseñadas por Torres, Moreno y Cañadas 2018), basadas en las estructuras identificadas por los estudiantes. Las categorías distinguen entre estructuras dadas para los casos particulares (donde se situa el trabajo con casos particulares de las variables) y el caso general (donde se pregunta con la indeterminación de manera explícita). Se amplían aquí estas categorías para acoger las estructuras evidenciadas durante el trabajo de la forma inversa de la función. Se atiende así a las estructuras evidenciadas en las formas inversa y directa de la función. Consideramos que un estudiante identifica una estructura cuando responde a dos o más cuestiones siguiendo la misma regularidad o cuando generaliza. De esta manera se asegura que un estudiante ha creado conciencia de lo que se repite y su respuesta no es por casualidad o por cálculos ante una determinada pregunta. Por otro lado, se considera el tipo de generalización expresada: inducida y/o espontánea.

Se presentan los resultados por medio de tablas-resumen, que complementamos con algunos ejemplos de las respuestas dadas por los estudiantes. En este trabajo se interpretan las estructuras identificadas por los estudiantes durante los casos particulares y el caso general. Cada estudiante puede evidenciar diferentes estructuras a lo largo de entrevista. En el caso que haya más de una estructura, las recogemos según su orden cronológico de aparición. Se expresan las estructuras identificadas por los estudiantes mediante simbolismo algebraico, aunque ellos no emplearan ese sistema de representación, como se verá en los ejemplos posteriores.

Forma directa

En la tabla 3 se presentan los resultados relativos a las respuestas de los estudiantes al problema que involucra la forma directa de la función donde el dato conocido es el valor de la variable independiente (dada la edad de Iron Man se les pregunta por la edad del Capitán América).

Tabla 3

Estructuras identificadas en la forma directa de la función

	Estructura	
Estudiante	**Casos particulares**	**Caso general**
E1	y=x + 4	y=4x
		y=x + 4
E2	y=x + x	y = x + 4
	y=x + 4	
E3	y=x + 4	y=x + 4
E4	y=x + 4	y=x + 4
	y=x + x	
E5	y=x + 4	y=x + 4
E6	y=x + 4	y=x + 4

En las respuestas a las preguntas que involucran casos particulares y caso general se observan tres tipos diferentes de estructuras: y=x+4, y=4x, y = 4x e y=x+x. Cada estudiante evidenció una o dos estructuras diferentes en su trabajo. Los seis estudiantes evidenciaron la estructura y=x+4 en el trabajo con preguntas relativas a casos particulares. Dos de ellos, E2 y E4, identificaron la relación y=x+x, y ofrecieron la misma variedad en el tipo de estructuras; identificaron una relación dada por una operación aditiva (y=x+x), para los casos particulares.

Con respecto al caso general, los seis estudiantes evidenciaron la estructura y=x+4. E1, adicionalmente, muestra la estructura y=4x. Este estudiante expresó inicialmente que hay que “multiplicar por 4” para obtener la edad del superhéroe mayor. Todos los estudiantes expresaron verbalmente la generalización.

Tres estudiantes (E2, E3 y E4) generalizaron a partir de la estructura y=x+4 al expresar: “hay que sumar más 4”. Los estudiantes E1, E5 y E6 muestran diferentes formas de evidenciar esa estructura ya que emplearon un valor concreto para referirse a la edad del superhéroe.

E1 generalizó tanto espontánea como inducidamente. Desde el inicio de la tarea (trabajo con valores concretos) E1 identificó la estructura, tratándose por tanto de una generalización espontánea. Al continuar con la entrevista generalizó inducidamente cuestiones relativas al caso general (generalización inducida). En el siguiente fragmento, observamos la generalización espontánea de E1, observada durante preguntas sobre casos particulares.

E (Entrevistador): Cuando Iron Man cumplió 5 años el Capitán América cumplió 9. Cuando Iron Man cumplió 7 años, el Capitán América cumplió 11. Y cuando Iron Man cumplió 3 años, el Capitán América cumplió 7 años. ¿Puedes decirme alguna relación entre esos números?

E1 (Estudiante1): El Capitán América siempre le gana por 4 años más.

Los demás estudiantes (E2, E3, E4, E5 y E6) generalizaron únicamente de manera inducida, cuando se les preguntó por el caso general. A continuación, se muestra un ejemplo de generalización inducida.

E: ¿Cómo le explicarías a un amigo qué ha de hacer para conocer la edad del Capitán América?

E5: Iron Man tiene 4 años menos que el Capitán América y el Capitán América tiene 4 años más que Iron Man. Se llevan 4 años.

Forma inversa

En la Tabla 4 se presentan los resultados relativos a la forma inversa de la función donde el dato conocido es el valor de la variable dependiente (dada la edad del Capitán América se les pregunta por la edad de Iron Man).

Tabla 4

Estructuras identificadas en la forma inversa de la función

	Estructura	
Estudiante	**Casos particulares**	**Caso general**
E1	x = y - 4	NR
E2	x = 2y	NP
E3	x= y - 4	x= y - 4
E4	NP	NP
E5	x = y - 4	x = y - 4
E6	x = y - 4	x = y - 4

Nota. NR = no responde; NP = no se le pregunta.

En total evidenciamos dos tipos diferentes de estructuras incluyendo tanto las dadas en los casos particulares como en el caso general x=y-4 y x=2y. Cada estudiante evidenció una única estructura a lo largo de la entrevista. Salvo E2 y E4, todos evidenciaron la regularidad x=y-4 en algún momento de su trabajo, tanto en los casos particulares como en el general. E2 identificó la estructura x= 2y y a E4 no se le preguntó por la forma inversa por haberse encontrado cansado y disperso en ese momento de la entrevista.

Todos los estudiantes expresaron la generalización verbalmente. Se distingue también en el estudio de la forma inversa de la función entre generalización inducida y espontánea. E1 no respondió en esa ocasión a la pregunta del caso general. A E2 y E4 no se les preguntó por el caso general ya que se encontraban distraídos en esta última parte de la entrevista. Las generalizaciones de E3 y E6 son inducidas. Por ejemplo, E6 expresó "antes sumaba y ahora resto, yo siempre estoy restando 4". Otro ejemplo de este tipo de generalización lo da E3:

E: ¿Cómo explicarías cómo calcular la edad del Capitán América conociendo la de Iron Man?

E3: Cuando nació Iron Man tenía el Capitán América 4 años y después vas sumando los años.

E: ¿Qué has hecho tú?

E3: Una resta, aquí: 9-4, 8-4, 352-4.

Por otro lado, E5 generalizó de ambas formas: espontánea e inducida. Al preguntar por los casos particulares E5 expresó: "antes sumaba 4 ahora resto 4" (generalización espontánea). Ante la pregunta sobre el caso general, E5 contestó: "Siempre resto 4" (generalización inducida).

Conclusiones

Tras el análisis de los datos se evidencian capacidades en los niños de 2º de educación primaria de este estudio para evidenciar estructuras en tareas de generalización que involucran una función lineal, para las formas directa e inversa de la función. Dado el tamaño de la muestra, se advierte de que la intención no es generalizar. En cuanto a la consecución de los objetivos de investigación se han identificado las diferentes estructuras evidenciadas por los estudiantes de 2º de educación primaria en relación al proceso que siguen hasta la generalización. Se ha observado el tipo de generalización que cada uno de los estudiantes expresa en el contexto que involucra la función y=x+4, tanto en la forma directa como la forma inversa. Esto ha permitido descubrir diferencias entre las estructuras identificadas por los estudiantes en ambas formas de la función.

Durante el estudio de la forma directa se obtiene una mayor cantidad de estructuras diferentes evidenciadas (y=x+4, y=x+x e y=4x) frente a dos tipos de estructuras diferentes evidenciadas durante el estudio de la forma inversa (x=y-4 y x=2y). Si durante el estudio de la forma inversa tenemos en cuenta a los estudiantes E2 y E4 (a los que no se les pregunta por encontrarse en ese momento distraídos o cansados), se concluye que los estudiantes presentaron mejores comportamientos al identificar las estructuras en la forma inversa en el sentido de que todos identificaron la estructura adecuada para los casos particulares y para el caso general, excepto E2. En los hallazgos obtenidos para la forma directa se observa que hay más estructuras erróneas que en el caso de la forma inversa. Sobre los estudiantes que no responden no podemos decir nada, esto ocurre con uno de los estudiantes durante el estudio de la forma inversa E1. Se aclara que las preguntas correspondientes a la forma inversa se hicieron al final de la entrevista pudiendo influir en la motivación o cansancio de los niños.

La variedad de las estructuras identificadas durante el estudio de la forma directa de la función muestra una evidencia sobre un primer período en que los estudiantes van buscando diferentes regularidades. En este estudio se ha considerado que la forma directa era, por la operación aritmética aditiva, la que involucra la función más sencilla, pues implica una adición, que la forma inversa donde se implica una sustracción. Pero el hecho de que haya más cantidad de estructuras adecuadas proporcionadas (en total, atendiendo tanto a los casos particulares como al caso general) puede ser un indicio para pensar lo contrario.

Las estructuras evidenciadas durante las formas directa e inversa, durante el primer momento de la entrevista (casos particulares), se han mantenido y generalizado para todos los estudiantes. Es importante hablar de la estabilidad de la estructura evidenciada por los estudiantes en casos particulares y más tarde en el caso general para cada una de las formas directa e inversa. Aunque la estabilidad es menor en la forma directa que en la inversa (teniendo en cuenta al estudiante que no contesta y a los dos a los que no se les pregunta), se evidencia coherencia en las estructuras identificadas tanto en los casos particulares como en el general por la mayor parte de los estudiantes. E1 no lo cumple pues evidencia junto con la estructura adecuada otra que es errónea, y=4x. Esto concuerda con lo observado en Torres, Cañadas y Moreno (2018), que entrevistaron a seis estudiantes e identificaron la estructura correcta de la función que implicaron (y=x+3) en al menos una ocasión a lo largo de la entrevista durante el estudio de la forma directa de la función. Al igual que ocurre en el trabajo de Warren, Miller y Cooper (2013), cuando los estudiantes toman conciencia de la estructura, las conversaciones con ellos tienden a disminuir dando respuestas con una clara validación de la regularidad encontrada entre las variables. Esto nos da información sobre la consciencia de la estructura establecida por estos estudiantes de primaria.

En cuanto al tipo de estructuras evidenciadas, se destaca la estructura y =x+x. En este trabajo es evidenciada por dos estudiantes en el trabajo con casos particulares de la forma directa de la función. En Torres, Cañadas y Moreno (2018) se encontra que tres de los seis estudiantes entrevistados evidenciaron esa misma estructura para una tarea contextualizada que involucra la función y=x+3. Con la forma inversa de la función se encuentra la estructura multiplicativa $x = 2y$, equivalente a la aditiva x= y+y, en una ocasión, durante el trabajo con los casos particulares. Como se ha visto, esta estructura que verbalmente se corresponde con "sumar un número consigo mismo" aparece en las dos formas de la función como estructura errónea. Este hallazgo puede deberse a que con algún caso particular el resultado coincidía con el doble del valor de la variable independiente o porque están familiarizados a trabajar con la suma de un número consigo mismo. También se destaca la estructura dada y=4x, en el caso general, por un estudiante que verbalizó para la forma directa: "hay que multiplicar por 4" para obtener la edad del superhéroe mayor. Inferimos aquí una dificultad al confundir una estructura aditiva con otra multiplicativa.

La generalización más frecuente ha sido la inducida con la forma directa de la función (cinco de seis estudiantes). Solo E1 generaliza en las formas espontánea e inducida. Durante el estudio de la forma inversa son dos de los tres estudiantes que responden los que presentan generalización inducida (al preguntarles por el caso general). E5 presenta generalización espontánea e inducida. La generalización inducida es la generalización esperada ya que en realidad no necesitan generalizar para responder a las cuestiones sobre casos particulares. Lo destacable es que algunos estudiantes de segundo curso generalizaran y les resultara útil la generalización para hallar la respuesta a algún o algunos casos particulares.

Finalmente podemos concluir que al trabajar con funciones (como relación entre dos variables) se ha implicado la representación y/o el registro del número de elementos para identificar la estructura entre los dos conjuntos de datos. De esta manera se fomenta el pensamiento funcional para facilitarles el pensamiento algebraico formal dejando atrás únicamente el pensamiento de una sola variación, en una sola dirección, que es lo que ocurre con el trabajo con patrones.

Financiamiento

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia EDU2016-75771-P, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: M. D. T. 35 %, M. C. C. 30 %, A. M. 20% y P. G. 15%.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [**M.D.T.**], previa solicitud razonable.

Referencias

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3

Bolaños-González, H. y Lupiáñez-Gómez, J. (en prensa). Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. *Revista Uniciencia, 35*(1), 1-18. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.1

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students’ capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. *Investigación en Educación Matemática XIX*. (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in Mathematics Education. Third edition* (pp. 191-218). New York, NY: Routledge.

Castellanos, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2018). Reflexión en el prácticum: Un experimento de enseñanza con estudiantes colombianos. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado,22*(1), 429-455. Recuperado de https://revistaseug.ugr.es/index.php/profesorado/article/view/9935

Castillo-Sánchez, M.; Gamboa-Araya, R. y Hidalgo-Mora, R. (2018). Concordance between introductory university mathematics courses and the program of pre-university studies: A view from the perspectives of content and academic performance. *Revista Uniciencia. 32*(2), 20-41. http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.2

Driscoll, M. J. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71254-3

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J., Blanton, M. J. y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–55). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates. Katz. https://doi.org/10.4324/9781315097435-3

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *The Mathematics Educator*, *18*(1), 139-151.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Granada, España: Atrio.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75–88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto functional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21(*2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017a). Generalization in fifth graders within a functional approach. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapur: PME.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017b). Functional thinking and generalization in third year of primary school. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 472-479). Dublin, Irlanda: DCU Institute of Education and Erme.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press. (Traducción al castellano: J. Zugazagoitia, 1965. Cómo plantear y reslover problemas. México:Trillas). https://doi.org/10.1515/9781400828678

Pólya, G. (1966). Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid, España: Tecnos

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12- year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz- Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). Gijón, España: SEIEM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). Valladolid: SEIEM.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (en revisión). Inductive reasoning and generalization in second grade students.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años).* Doctorado tesis, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193-215

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162. https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5

ESTUDIO 4

Recognition of structures and generalization by second graders in direct and inverse forms of a linear function

En revisión

Recognition of structures and generalization by second graders in direct and inverse forms of a linear function

Resumen

Desde un enfoque funcional del early algebra, nos centramos en describir las estructuras y la generalización de estudiantes de 2º de educación primaria (7-8 años). Realizamos entrevistas individuales semiestructuradas a cuatro estudiantes seleccionados de un grupo que había participado en una experiencia previa. Les planteamos tareas contextualizadas que involucran funciones lineales, en sus formas directa e inversa. Describimos las estructuras evidenciadas por los estudiantes en el trabajo con ambas formas de la función, en las preguntas que involucraban casos particulares y en las que pedíamos la generalización. Destacamos que todos los estudiantes identificaron una estructura adecuada tanto en la forma directa de la función como en la inversa. En cuanto a las estructuras que generalizaron, observamos diferencias según las funciones y las formas de las funciones involucradas. La cantidad de estructuras que generalizaron es mayor para la forma inversa de una de las funciones tratadas.

Palabras clave: estructura, forma directa de una función, forma inversa de una función, función, generalización, pensamiento funcional.

INTRODUCCIÓN

Numerosos investigadores defienden una perspectiva funcional en la escuela que permita promover el pensamiento algebraico de los estudiantes, en contraste con un enfoque más tradicional centrado en el álgebra como manipulación simbólica (e.g., Schliemann, Carraher y Brizuela, 2007). La adopción de la perspectiva funcional no solo permite a los estudiantes obtener una comprensión profunda de la función, algo esencial para el éxito en los futuros cursos de matemáticas (e.g., Romberg et al., 1993), sino también favorecer capacidades relativas a la identificación de regularidades, representación, establecimiento de relaciones y procesos de generalización (Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016). Estas capacidades a desarrollar son parte del pensamiento funcional entendido como “un modo de pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 3). Este tipo de pensamiento tiene como concepto matemático principal a la función. Específicamente en el contexto funcional del *early algebra*, se aborda la relación entre las variables de una función, siendo fundamental el estudio de regularidades y, en particular, su generalización (Blanton, 2008, p. 30).

Las regularidades y la generalización son fundamentales en el pensamiento algebraico en general; y en el pensamiento funcional, en particular (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). Las estructuras son las regularidades presentes en las relaciones entre las variables de la función involucrada (Pinto y Cañadas, 2017a). La estructura se puede observar en el trabajo con casos particulares de la función, pero también para el caso general (Torres, Cañadas y Moreno, en revisión). En este contexto, generalizar consiste en establecer la estructura general existente entre cantidades que covarían. Considerar la generalización en los cursos más elementales permite, por ejemplo, que los estudiantes se alejen de las particularidades que trae consigo el cálculo aritmético, identificando las relaciones matemáticas involucradas (Blanton, et al., 2011). Existen evidencias en numerosas investigaciones, tanto en el panorama nacional como en el internacional, de la manifestación de pensamiento funcional en niños de educación primaria (6-12 años), e incluso educación infantil (3-5 años), al abordar la generalización (e.g., Blanton, Brizuela, Murphy, Sawrey y Newman-Owens, 2015; Carraher y Schliemann, 2016).

Usualmente, a los estudiantes de educación primaria con los que se trabaja el pensamiento funcional, se les proponen tareas que involucran funciones lineales. En ellas, la variable independiente tiene un rol y la variable dependiente otro. Pero también se pueden intercambiar los roles que asume cada una de esas variables. Aquí es donde surge la idea de formas directa e inversa de una función. En este trabajo atendemos a ambas formas de una función (directa e inversa). Una misma variable asume el rol de variable independiente para la forma directa y el de variable dependiente para la forma inversa, y viceversa. La mayor parte de la literatura de investigación sobre pensamiento funcional aborda únicamente la forma directa de una función (e.g., Blanton et al., 2005). Por otro lado, los trabajos que abordan la forma inversa de una función se han centrado, en su mayor parte, en educación secundaria o desde la perspectiva del maestro en formación (Ellis, 2011; Paoletti, Steven, Hobson, Moore, y LaForest, 2018). Paoletti (2020) argumenta que los estudiantes de secundaria, los estudiantes universitarios, los maestros en formación y los maestros en ejercicio no construyen significados productivos de la función inversa. En nuestra revisión de antecedentes, el único trabajo que aborda ambas formas de una función en educación primaria es el de Pinto y Cañadas (2017b). Los autores describieron cómo niños de entre 10-11 identificaron estructuras al trabajar con la forma inversa de la función y=2x+6. Las estructuras que puedan identificar y expresar los estudiantes en ambas formas de una función nos ayudan a conocer el pensamiento funcional con mayor profundidad. Por tanto, evidenciamos una necesidad de abordar el estudio de las formas directa e inversa de una función, de forma conjunta, o la forma inversa de una función con estudiantes de educación primaria. En particular, esta carencia de estudios relacionados se observa en los primeros cursos de educación primaria, foco de interés de nuestro trabajo.

En este trabajo, describimos las estructuras y la generalización de niños de entre 7 y 8 años al trabajar las formas directa e inversa de dos funciones en el contexto de un problema de generalización.

ESTRUCTURA Y GENERALIZACIÓN

En Educación Matemática el término estructura se usa ampliamente con diversos significados. De manera general, siempre están referidos a la forma en la que una entidad se compone de partes, existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen esa entidad (Hoch y Dreyfus, 2004). En particular, la estructura ocupa las relaciones entre cantidades numéricas, las propiedades de las operaciones y las relaciones entre las operaciones (Warren, 2003). En particular, en el pensamiento algebraico la estructura obedece a la relación entre los diversos componentes de la regularidad (Mulligan, Mitchelmore y Prescott, 2005). El significado asignado a la noción de estructura en diferentes investigaciones en el marco del *early algebra* es descrito por Molina y Cañadas (2018). Las autoras consideran que atender a la noción de estructura contribuye a la caracterización del pensamiento algebraico de los estudiantes y a la percepción del contenido matemático involucrado. En el contexto funcional la noción de estructura hace referencia a la regularidad entre los valores de las variables involucradas (Pinto y Cañadas, 2017b). Esta noción permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, la generalizan (Warren, Miller y Cooper, 2013). Específicamente, en nuestro contexto, con la noción de estructura queremos informar sobre la consistencia del trabajo de los estudiantes en dos tareas al trabajar con diferentes valores particulares de las variables y la generalización.

El estudio de la estructura está integrado en una amplia gama de estudios de desarrollo matemático en los primeros años de enseñanza (Mulligan y Mitchelmore 2009). Autores como MacGregor y Stacey (1995) ya hablaban de que los estudiantes deben hacerse conscientes de las estructuras de las relaciones entre cantidades. Necesitan experiencia en reconocer y describir estas relaciones.

La toma de conciencia de una estructura y su estabilidad a lo largo del trabajo con diferentes casos particulares es lo que permite llegar a la generalización (Torres et al., en elaboración). Una de las manifestaciones del pensamiento funcional es a través del reconocimiento de una estructura. Algunos investigadores destacan que antes de que los estudiantes lleguen a generalizar, deben "ver" la estructura involucrada en la tarea (Mason, Stephens y Watson, 2009). La generalización es una noción fundamental para promover el pensamiento algebraico (e.g., Cooper y Warren, 2008) y, en particular, el pensamiento funcional (Ellis, 2011). La generalización es un proceso de pensamiento matemático fundamental que requiere ver detrás de las particularidades de una situación matemática y sacar una conclusión (Driscoll, 1999). La generalización es una capacidad cognitiva que se puede desarrollar. Es una actividad empírica inductiva en la que se acumulan ejemplos concretos y se detecta y se sistematiza una regularidad (Pólya, 1945). La investigación sobre generalización en distintos niveles educativos distingue diferentes enfoques. Harel (2002) propuso dos formas diferentes de abordar la generalización: como resultado y como proceso. Por un lado, encontramos, la generalización como un resultado donde se desarrolla una generalidad a partir de algunos ejemplos, frecuentemente por ensayo y error. Por otro lado, la generalización como un proceso inductivo: donde se justifica una generalidad durante una progresión de diferentes pasos. Esta idea es compartida por Ellis (2007), quien distingue entre la actividad de los estudiantes a medida que generalizan, como un proceso, y las expresiones finales de generalización de los estudiantes.

En este trabajo atendemos al pensamiento funcional de los estudiantes puesto en juego durante la realización de unas tareas de generalización contextualizadas que parten de unos casos particulares donde se involucra una función lineal. Los estudiantes, en el proceso de generalización, pueden identificar diferentes estructuras de la función involucrada en la tarea. Cuando una estructura observada se hace válida para más casos, es cuando consideramos que se ha generalizado.

FORMAS DIRECTA E INVERSA DE UNA FUNCIÓN

El concepto de función es fundamental para prácticamente todos los aspectos de las matemáticas y todas las ramas de la ciencia. Las funciones ilustran explícitamente la forma en que la suma y la resta, y la multiplicación y división, son operaciones inversas (Warren, Miller y Cooper, 2013). La función es una regla que establece la relación de covariación entre los valores de uno o más conjuntos de datos respecto de otro(s). En este trabajo nos centramos en las funciones que relacionan dos variables. Ver una función como una relación entre cantidades que covarían es observar un cambio coordinado de los valores x e y, lo que permite examinar estructuras que pueden extenderse (Ellis, 2011). Confrey y Smith (1995) describieron que la entrada inicial de los estudiantes en un problema sucede, típicamente, desde la perspectiva covariacional.

El pensamiento funcional se centra en las relaciones existentes entre cantidades que covarían (Blanton y Kaput, 2004; Warren y Cooper, 2005). Se establecen dos relaciones en las funciones de dos variables; formas directa e inversa de la función. Cuando hablamos de una función $y = f(x)$, en general, se está haciendo referencia a su forma directa pues es la manera usual en la que se representa la regularidad entre las dos variables. Esa función tiene una función inversa $y= g(x)$, tal que $g(f(x)) = f(g(x)) = x$. En este sentido, Merino, Cañadas y Molina (2013), en una investigación con niños de 10-11 años, propusieron una tarea de generalización en la que existe una relación funcional entre el número de mesas y el número de personas que se pueden sentar alrededor de ellas. En ese caso se tomó como forma directa cuando, conocido el número de mesas, se solicita el número de personas. Por ende, la forma inversa es cuando, conocido el número de personas, se solicita el número de mesas en ese mismo contexto. Aclaramos que la forma directa no está determinada por las cantidades que se presentan para obtener una respuesta; está determinada por la forma en la que se presentan los datos iniciales.

Nuestra revisión de la literatura de investigación evidencia, por un lado, que existen trabajos centrados únicamente en el estudio de la forma directa en educación primaria. Destacamos el estudio longitudinal de Blanton et al. (2015) centrado en diferentes cursos de educación primaria. Estos autores caracterizaron diferentes niveles de sofisticación en el pensamiento de los niños sobre relaciones funcionales según la forma directa de la función a través de trayectorias de aprendizaje. Torres, Cañadas y Moreno (2018) se centraron en las estructuras de la forma directa de una función y la generalización. Analizaron las respuestas de los estudiantes a varias cuestiones sobre un problema contextualizado que involucraba la función lineal y =x+3. Los autores muestran cuatro tipos de estructuras diferentes identificadas por los estudiantes en el trabajo con casos particulares. Los seis estudiantes de 2º de educación primaria del estudio generalizaron verbalmente la relación involucrada. La mayoría de los estudiantes generalizaron la estructura correcta y emplearon la misma para casos particulares y para el caso general; observándose coherencia en sus respuestas y evidenciando capacidades en los estudiantes de 2º curso para identificar estructuras entre variables y generalizar.

Por otro lado, hay trabajos que se han centrado en la forma inversa de una función en el contexto del álgebra escolar pero son escasos. Pinto y Cañadas (2017b) describieron cómo 24 estudiantes de quinto de educación de primaria (10-11 años) percibieron la forma inversa al trabajar con un problema que involucra una función (y=2x+6). Estos autores concluyeron que 10 estudiantes establecieron diferentes estructuras que involucran las variables en la función inversa. Por otra parte, cinco estudiantes generalizaron esta forma de la función. Se considera que la relación entre las variables dada en la forma inversa de una función genera más dificultades que la directa y nos ayuda a indagar en el desarrollo del pensamiento funcional (MacGregor y Stacey, 1995).

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Las estructuras que se corresponden con cada una de las formas (directa e inversa de una función) son diferentes ya que la manera de expresarlas es distinta. Nuestro objetivo general de investigación es identificar y describir cómo los estudiantes de 2º de educación primaria (7-8 años) perciben y generalizan las estructuras en las formas directa e inversa de una función al trabajar con tareas que involucran funciones lineales en el contexto funcional del *early algebra*. Abordamos este objetivo a través de dos objetivos de investigación específicos: (a) describir cómo los estudiantes identifican las estructuras en las variables involucradas y (b) caracterizar la generalización de los estudiantes en las formas directa e inversa de la función implicada.

MÉTODO

Llevamos a cabo un estudio de carácter exploratorio y descriptivo. Dentro del panorama de la investigación de diseño, desarrollamos un experimento de enseñanza con cuatro sesiones de trabajo, y entrevistas individuales y grupales (Steffe y Thompson, 2000). Tanto las sesiones como en las entrevistas estaban basadas en tareas de generalización. Ambas fueron diseñadas a partir de la guía que ofrece el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007), desde el trabajo con casos particulares hacia la generalización. El entrevistador introdujo los contextos de las tareas. Comenzó mostrando a los estudiantes casos particulares pequeños (no consecutivos, para evitar la recursividad en las respuestas de los estudiantes), e iba aumentando el tamaño de los casos particulares. Incluimos las expresiones "muchas" e "infinitas" como cantidades indeterminadas para promover la generalización.

En la tabla 1 presentamos los contextos y las funciones involucradas en las tareas usadas para trabajar con los estudiantes. Al tratar con estudiantes de educación primaria, tratamos con funciones lineales cuyos valores se mueven en los números naturales: dominio, codominio y posibles constantes. En primer lugar, llevamos a cabo cuatro sesiones con un grupo de 24 estudiantes, con una semana de tiempo entre cada dos sesiones consecutivas. Cada sesión tuvo una duración de 50 minutos. Al finalizar las cuatro sesiones realizamos dos entrevistas semiestructuradas (grupales e individuales, respectivamente) con cuatro estudiantes. Las nombraremos en adelante como entrevista A y entrevista B, respectivamente. Tanto las sesiones como las entrevistas fueron videograbadas. En cada una de las sesiones previas a las entrevistas planteamos una tarea de generalización con un contexto y una función involucrada que detallamos en la tabla 1.

Tabla 1. Planificación del experimento de enseñanza

Contexto	Función
Sesión 1: Máquina de bolas	y=x+3
Sesión 2: Parque de atracciones 1º	
Sesión 3: Parque de atracciones 2º	y=2x+1
Sesión 4: Cumpleaños	y=2x
Entrevista A: Paradas de tren	
Entrevista B: Edad superhéroes	y=x+4

Iniciamos las sesiones preguntando por casos particulares y, pasando por nuevos casos particulares, llegamos a preguntar por la generalización. En todas las sesiones del experimento de enseñanza usamos la misma dinámica: en primer lugar, introducimos la tarea en gran grupo presentando la tarea a trabajar, después aplicamos unos cuestionarios específicos de cada sesión y, por último, una puesta en común. Los estudiantes no recibieron retroalimentación sobre sus respuestas, aunque tratábamos de guiarlos en sus reflexiones para que se dieran cuenta si incurrían en errores y los guiábamos hacia la generalización. Al aula entraron tres miembros del equipo de investigación: la profesora-investigadora, una investigadora de apoyo y otro investigador que grabó con la videocámara. En las sesiones previas nos centramos en el estudio de la forma directa y no se hicieron preguntas enfocadas a explorar la función inversa hasta las entrevistas. No tuvieron ninguna sesión entre las entrevistas A y B.

Participantes y centro

Los sujetos de este estudio son cuatro estudiantes de segundo de educación primaria (7-8 años) en un centro escolar concertado de España, con un nivel socioeconómico bajo. El centro fue elegido intencionalmente según su disponibilidad.

A un grupo de 24 estudiantes de segundo de educación primaria del centro mencionado les aplicamos un cuestionario inicial en la primera sesión del experimento de enseñanza (ver tabla 1). Las preguntas del cuestionario involucraban la función y=x+3. Según las respuestas de los 24 estudiantes, los diferenciamos en tres grupos, según hubieran avanzado en el proceso de generalización y teniendo en cuenta las recomendaciones de la tutora en cuanto a los logros de aprendizaje de cada estudiante. Con estos criterios, seleccionamos a 6 estudiantes, candidatos para la realización de las entrevistas. Finalmente, presentamos aquí un estudio en el que contamos con las producciones de los cuatro estudiantes que estuvieron presentes en las dos entrevistas que llevamos a cabo.

Los conocimientos previos de los estudiantes y que tuvimos en cuenta para el diseño de la recogida de información fueron: números del 0 al 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con llevadas. Ellos no habían recibido enseñanza previa ni habían trabajado el tipo de tareas que involucraran alguna función lineal y la generalización antes del experimento de enseñanza.

Instrumento de recogida de información: dos entrevistas

En este trabajo nos centramos en la información que proviene de las dos entrevistas realizadas a cuatro estudiantes. El intervalo de tiempo transcurrido entre las entrevistas realizadas fue de dos semanas.

El objetivo de las entrevistas fue profundizar en las respuestas de los estudiantes en lo relativo a las estructuras identificadas, tanto en la forma directa como inversa de la función. A ambas entrevistas llevamos unas hojas con tablas y hojas en blanco, que los estudiantes podían usar para registrar el trabajo que iban desarrollando en ambas formas.

En la entrevista A planteamos una tarea que involucra una función lineal y=x+4, usamos como contexto el número de paradas de tren y las personas que suben en cada parada (ver tabla 1). En la entrevista A tratamos la misma función lineal que en la sesión 4. La situación con la que introdujimos la tarea a los estudiantes la presentamos en la figura 1.

Un tren va recogiendo a los amigos de Elsa para que vayan a su cumpleaños. En cada parada de tren se montan siempre el mismo número de personas. Queremos saber cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas. ¿Cómo puedes saber cuántas personas lleva el tren si en cada parada suben 2 personas?

Figura 1. Introducción a la tarea de la entrevista A

Para el estudio de la forma inversa de la función, en esta entrevista usamos una tabla donde incluimos algunos valores de las variables para que los estudiantes completaran el resto (ver figura 2).

Número de paradas	Número de personas
	4
	2
3	
7	
	6
	12
10	
	20
	300
	4 millones
	Z

Figura 2. Tabla de trabajo para la forma inversa (entrevista A)

En la entrevista B planteamos una tarea relativa a la edad de dos superhéroes cuya diferencia es cuatro años. En este caso, la función lineal era $y = x+4$, donde la relación involucrada es aditiva.

La situación con la que iniciamos a los alumnos en la tarea durante la entrevista B trata de la edad de dos superhéroes, Iron Man y el Capitán América, cumplen años el mismo día. En esta entrevista presentamos a los estudiantes una tabla de trabajo como la que presentamos en la figura 3.

Edad de	Edad de

Figura 3. Tabla de la entrevista B

A partir de estas presentaciones de las tareas, continuamos las entrevistas planteando preguntas sobre casos particulares mediante un protocolo de entrevista. Presentamos una síntesis del protocolo de actuación para la entrevista A en la Figura 2. Presentamos el orden de los casos particulares trabajados y la forma en la que inducimos a la generalización mediante el modelo de Cañadas y Castro (2007), para las formas directa e inversa de la función implicada. El protocolo fue análogo para la entrevista B.

FORMA DIRECTA

1º Casos particulares

1. Identificar relación funcional (dado el número de paradas se les pregunta por el número de personas que llevaba el tren)
2. Casos particulares dados

Cuando el tren para 1 vez se suben 2 personas

Cuándo el tren para 3 veces ¿cuántas personas se suben?

Cuando el tren para 10 veces ¿cuántas personas se suben?

3. Casos particulares propuestos por el estudiante.

   Dime un número de paradas que pueda hacer el tren (_). Si para esas veces ¿Cuántas personas pueden subirse?

4. Casos particulares con cantidades cada vez mayores

   Si el tren para 1000 veces ¿cuántas personas podrán subirse?

   Si el tren para un millón de veces ¿cuántas personas podrán subirse?

2º Generalización

5. Expresar la generalización

   ¿Cómo le explicarías a un amigo cuántas personas llevará el tren cuando pasa por infinitas paradas?

   ¿Cómo le explicarías a un amigo cuántas personas llevará el tren cuando pasa por muchas paradas?

FORMA INVERSA

1º Casos particulares

6. Identificar relación funcional (dado el número de personas que viajan en el tren se les pregunta por el número de paradas)
7. Casos particulares dados

   - Cuando el tren lleva 4 personas ¿Cuántas veces ha parado?
   - Cuando el tren lleva 12 personas ¿Cuántas veces ha parado?

- Cuando el tren lleva 300 personas ¿Cuántas veces ha parado?

2º Generalización

8.Expresar la generalización

¿Cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocerlas personas que van en el tren cuando ha parado por muchas paradas?

Figura 4. Protocolo de la entrevista A

Análisis de datos

Tras transcribir las entrevistas, diseñamos un sistema de categorías basado en las estructuras identificadas por los estudiantes, tanto en los casos particulares presentados como en el caso general, teniendo en cuenta las formas directa e inversa de la función. Consideramos que un estudiante identifica una estructura cuando responde a dos o más cuestiones siguiendo la misma regularidad o cuando generaliza. De esta manera, interpretamos que el estudiante toma conciencia de la estructura implicada. Cada estudiante puede evidenciar diferentes estructuras a lo largo de una misma entrevista.

En nuestro estudio fijamos de partida una función dada y=x+4 que decidimos que es la que se refiere a la forma directa por considerarla más sencilla. Afirmamos que, para los casos por los que preguntamos a los estudiantes, para uno o más valores de *x* estaremos indagando sobre la capacidad del sujeto para identificar y/o generalizar la forma directa de esa función. Sin embargo, para los casos en los que preguntamos al estudiante por el valor x dados uno o más valores de y, entonces estoy indagando sobre la capacidad del sujeto para identificar y/o generalizar sobre la forma inversa de esa función.

RESULTADOS

En esta sección presentamos los resultados. Los resumimos a través de tablas y, a continuación, hacemos una lectura de los resultados más representativos o particulares. Presentamos algunos ejemplos de estos resultados, a través de respuestas dadas por los estudiantes; recogemos las estructuras identificadas por cada estudiante según su orden cronológico de aparición. Expresamos las estructuras mediante el simbolismo algebraico que se corresponde con las mismas, aunque los estudiantes no emplearan esa representación.

Forma directa de las funciones

En la tabla 2 presentamos los resultados relativos a la forma directa de la función para las dos entrevistas.

Tabla 2. Estructuras identificadas en la forma directa de la función

			Estructuras	
	Función	Estudiante	Casos particulares	Caso general
Entrevista A	y = 2x	E1	y = 2x	NR
		E2	y = 2x	NR
		E3	y = 2x	y = 2x
		E4	y = 2x	NR
Entrevista B	y = x+4	E1	y = x + 4	y = x + 4
		E2	y = x + 4	y = x + 4
		E3	y = x + 4	y = x + 4
		E4	y = x + 4	NR
			y = x + x	

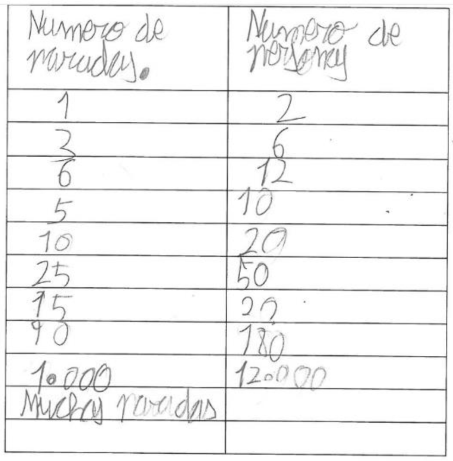
Nota. NR = No responde

De manera global, los cuatro estudiantes identificaron estructuras en el trabajo con casos particulares en ambas entrevistas. Para el caso general, hubo tres estudiantes (E1, E2 y

E4) y un estudiante (E4) que no respondieron en las entrevistas A y B, respectivamente. Todas las estructuras identificadas son adecuadas para la tarea presentada, a excepción de la estructura y=x+x. Esa estructura la identificó E4 en la entrevista B, pero este estudiante también identifica la estructura correcta en otro momento. Describimos a continuación los resultados obtenidos para cada una de las entrevistas.

Entrevista A

Como se desprende de la tabla 2, todos los estudiantes identificaron la estructura correcta implicada en la tarea (y =2x) en el trabajo con preguntas sobre casos particulares dados en la forma directa de la función. Destacamos la producción de E1 durante la entrevista A, que obtuvo el número de personas multiplicando por dos o sumando consigo mismo la cantidad en ocho casos particulares diferentes (ver figura 5).



Numero de paradas.	Numero de personas
1	2
3	6
6	12
5	10
10	20
25	50
15	[illegible]
90	180
1.000	12.000
Muchas paradas	

Figura 5. Respuestas de E1 a los casos particulares (entrevista A)

Evidenciamos así que la estructura que identificó E1 es y=2x. Adicionalmente, expresó verbalmente: “Multiplico por dos el número de paradas para obtener el número de personas que van en el tren”. Este estudiante evidenció la generalización de la estructura identificada desde los primeros casos particulares.

En el caso de las 1000 paradas, E1 parece no seguir la estructura y=2x o si la sigue, no sabe multiplicar ese número por dos ya que obtiene 12.000 como número de personas que pueden subirse al tren.

En la tabla 2 se observa que tres estudiantes no responden y que uno (E3) sí lo hace, al preguntarles por el caso general. E3 generalizó la estructura y además lo hizo de forma correcta, diciendo “siempre está multiplicando por dos”. Los demás estudiantes no respondieron ante la pregunta dada para el caso general. Sin embargo, E1 lo hace desde el trabajo con casos particulares

Entrevista B

Todos los estudiantes identificaron la estructura correcta implicada en la tarea de la entrevista B, cuya función involucrada era y=x+4, en preguntas relativas a los casos particulares dados en la forma directa de la función (dada la edad de Iron Man, se les preguntó por la edad del Capitán América). Destacamos a E4, por evidenciar dos estructuras diferentes. Este estudiante evidenció inicialmente la estructura correcta y, con el avance de la entrevista, evidenció también la estructura y=x+x. Presentamos un ejemplo de las respuestas de E4 sobre los casos particulares durante la entrevista B.

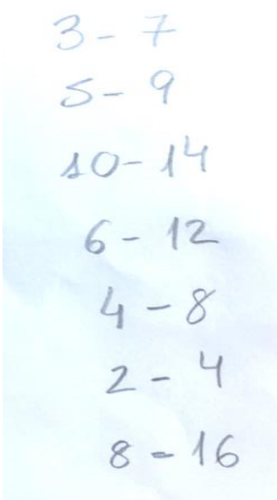


Figura 6. Respuestas de E4 a los casos particulares (entrevista B)

En la figura 6 observamos que para los casos en las que la edad de Iron Man era tres, cinco y diez, E4 usó la estructura y=x+4. En cambio, cuando esa edad era de seis, cuatro, dos y ocho años, E4 evidenció la estructura y= x+x, al responder que había que sumarle el mismo número al número dado para obtener la edad del Capitán América. De esta manera E4 nos deja evidencia de haber generalizado la estructura y= x+x desde el trabajo de los casos particulares, aunque esta no sea la estructura adecuada a la tarea.

Como se observa en la tabla 2, a E4 se le preguntó por el caso general y no respondió ante la pregunta. En cambio, tres estudiantes (E1, E2 y E3) generalizaron la estructura adecuada al preguntarles por el caso general. Además, lo hicieron de forma correcta. Los tres estudiantes generalizaron la estructura y= x+4. E1 expresó la generalización como: "el Capitán América ha nacido cuatro años antes, hay que sumar más cuatro". E2 y E3 coincidieron en sus respuestas expresando únicamente "que hay que sumar siempre más cuatro".

Un ejemplo de un estudiante que respondió utilizando en sus respuestas las expresiones "muchos años" e "infinitos años". Presentamos un extracto de entrevista donde evidencia su generalización.

1. E (Entrevistador): ¿Podrías decirme qué edad tendrá el Capitán América cuando Iron Man cumpla muchos años?
2. E3 (Estudiante E5): Tendrá muchos más cuatro.
3. E: Y cuando Iron Man tenga infinitos años ¿cuántos cumplirá el Capitán América?
4. E3: Pues infinitos cuatro.
5. E: Entonces, ¿cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocer la edad del Capitán América?
6. E3: Como siempre, sumando cuatro. El Capitán América ha nacido cuatro años antes.

En las líneas 4 y 6 observamos cómo E3 respondió que la edad del Capitán América debería calcularse sumando cuatro a infinito. Finalmente, en la línea 6 expresó la generalización verbalmente: "como siempre, sumando cuatro [a la edad del Capitán América]".

Forma inversa de las funciones

En la tabla 3 presentamos los resultados relativos a la forma inversa de la función en ambas entrevistas.

Tabla 3. Estructuras identificadas en la forma inversa de la función

			Estructuras	
	Función	Estudiante	Casos particulares	Caso general
Entrevista A	y=2x	E1	x=y/2	NR
		E2	x=y/2	x=y/2
		E3	x=y/2	x=y/2
		E4	x=y/2	-
Entrevista B	y=x+4	E1	x=y-4	x=y-4
		E2	NR	-
		E3	x=y-4	x=y-4
		E4	x=y-4	x=y-4

Nota. NR = No responde; - = No se le pregunta

Todas las estructuras evidenciadas durante el trabajo con los casos particulares en la entrevista A son adecuadas a la tarea. Como se observa en la tabla 3, en la entrevista B hay tres estudiantes (E1, E3 y E4) que respondieron evidenciando la estructura adecuada a preguntas sobre casos particulares y un estudiante no respondió (E2). Para el caso general, hay un estudiante que no respondió (E1), durante la entrevista A y dos estudiantes a los que no se les preguntó (E4 y E2, entrevista A y B respectivamente), por encontrarse cansados y/o distraídos en ese momento de las entrevistas. Detallamos a continuación los resultados obtenidos para cada una de las entrevistas en las formas inversas de las funciones.

Entrevista A

Todos los estudiantes identificaron la estructura correcta implicada en la tarea durante los casos particulares según la forma inversa de la función (x = y / 2). Por ejemplo, E2 respondió de la siguiente manera cuando le preguntamos lo que ocurre cuando el tren lleva cuatro personas. "Si el tren lleva cuatro personas entonces ha parado dos veces. Dos más dos son cuatro porque es lo mismo que hemos hecho antes".

Otro ejemplo de respuestas a preguntas sobre casos particulares de la forma inversa de la función lo tenemos en E3. En la figura 7 observamos los números que registró durante la entrevista. Para la pregunta "¿cuántas veces para el tren si lleva cuatro millones de personas?" E3 contestó: "Si hay cuatro millones de personas en el tren, entonces ha parado dos millones de veces".

Número de paradas	Número de personas
2	4
1	2
3	6
7	14
3	6
6	12
10	20
10	20
150	300
2	4 millones

Figura 7. Respuestas de E3 a los casos particulares (entrevista A)

En cuanto a la generalización, dos estudiantes generalizaron la estructura correcta, x=y/2, y dos no evidenciaron ninguna estructura. E1 no respondió a la pregunta sobre el caso general que se le hizo y a E4 no se le llegó a preguntar por el caso general. Los que generalizaron lo hicieron expresando verbalmente que el número de paradas del tren es la mitad del número de personas.

Entrevista B

E1, E3 y E4 identificaron la estructura correcta implicada en la tarea (x=y-4) durante su trabajo con casos particulares dados en la forma inversa de la función (dada la edad del

Capitán América se les pregunta por la edad de Iron Man). No obtenemos respuesta de E2 en este momento de la entrevista (NR).

En cuanto al caso general, los estudiantes que identificaron la estructura previamente (E1, E3 y E4) lograron generalizar. E4 expresó "antes sumaba y ahora resto, yo siempre estoy restando cuatro". Otro ejemplo de este tipo de generalización lo da E1 a través del siguiente fragmento.

7. E: ¿Cómo explicarías cómo calcular la edad del Capitán América conociendo la de Iron Man?
8. E1: Cuando nació Iron Man tenía el Capitán América cuatro años y después vas sumando los años.
9. E: ¿Qué has hecho tú?
10. E1: Una resta, aquí: nueve menos cuatro, ocho menos cuatro, trescientos cincuenta y dos menos cuatro.

E1 relacionó las variables involucradas, pero necesitó valores concretos para expresar la generalización observada, como se evidencia en la línea 10 del extracto anterior.

Por otro lado, E3, generalizó expresando "antes sumaba cuatro, ahora resto cuatro. Siempre resto cuatro". A E2 no se le preguntó explícitamente por la función inversa al encontrarse muy disperso y poco concentrado en esta última parte de la entrevista.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las entrevistas semiestructuradas han aportado información sobre cómo manifiestan pensamiento funcional los estudiantes en estas edades (7-8) años, a partir del estudio de las estructuras evidenciadas. Estas estructuras evidencian la regularidad que los estudiantes abstraen a partir de la información y de los datos que les ofrecemos en la tarea propuesta. Hemos observado que los estudiantes son capaces de identificar la estructura correcta en la forma directa y logran generalizar esa estructura para después hacerlo con las relaciones dadas por la forma inversa.

De manera global, hemos obtenido que la cantidad de estructuras correctas identificadas es mayor durante el trabajo de los casos particulares que en el general, en ambas formas de las funciones. Fijándonos, en primer lugar, en la forma directa de las funciones implicadas observamos que tanto en la entrevista A como en la entrevista B, todos los estudiantes han identificado la estructura adecuada, en al menos una ocasión durante la entrevista, al trabajar con los casos particulares. Este hallazgo es destacable ya que en trabajos previos no ocurre así. Torres, Cañadas y Moreno (2018) observaron, para una tarea que involucra la función y=x+3, que los estudiantes identificaron cuatro tipos diferentes de estructura para una misma función, para la forma directa, al trabajar con casos particulares. La estructura inadecuada más frecuente en el estudio de Torres, Cañadas y Moreno (2018) fue la dada por y=x+x (en tres de los seis casos estudiados). En nuestro caso, durante la entrevista B, un estudiante evidencia no solo la estructura correcta implicada sino también la estructura incorrecta dada por y=x+x. La evidencia de esta estructura que verbalmente se corresponde con "sumar un número consigo mismo". puede deberse a que con algún caso particular el resultado coincidía con el doble del valor de la variable independiente o porque están familiarizados a trabajar con la suma de un número consigo mismo. Esta estructura (y=x+x) también fue identificada por tres de los seis estudiantes del trabajo de Torres, Cañadas y Moren o (2018) por lo que es una tendencia que se repite en diferentes contextos.

Durante ambas entrevistas, las estructuras identificadas han sido, salvo la mencionada en un caso, las correctas (y=2x y y=x+4). Dos estudiantes generalizaron la estructura adecuada en la forma directa de la función en la entrevista A. Uno de ellos generaliza al preguntarle directamente por la generalización. Sin embargo, otro de ellos generaliza durante el trabajo con los casos particulares. Este resultado es destacable ya que no era lo esperado según el protocolo diseñado. Estos resultados se obtienen atendiendo a los estudiantes que no responden.

La cantidad de estructuras que se evidencian en la generalización en la entrevista B ha sido mayor, siendo tan solo un estudiante el que no logra generalizar la estructura al preguntar por el caso general. Esto puede deberse a que los estudiantes tienen una mayor facilidad para desenvolverse con relaciones aditivas. En Torres, Cañadas y Moreno (2018) cinco de los seis estudiantes entrevistados generalizaron la estructura correcta (y=x+3). Durante la entrevista B usamos la función y=x+4 que mantiene la misma relación aditiva que y=x+3 y de la que obtenemos que tres de cuatro estudiantes generalizaron la estructura adecuada. Por lo que observamos que las funciones implicadas producen los mismos resultados en diferentes estudios con estudiantes de las mismas edades (7-8) años. Hemos detectado que los estudiantes han expresado la generalización sin llegar a decir a qué hay que sumar cuatro. Quizás no lo creen necesario según el contexto y por cómo se les plantea la pregunta, que incluye el valor de la variable independiente.

En cuanto al trabajo con la forma inversa de la función, también todos los estudiantes evidenciaron la estructura de manera adecuada durante el trabajo con los casos particulares en la entrevista A. En la entrevista B hay un estudiante que no respondió a preguntas sobre casos particulares. En cuanto a las estructuras generalizadas, observamos que la cantidad de estructuras adecuadas evidenciadas sigue siento mayor en la entrevista B que en la entrevista A para la forma inversa. Cada vez que hemos tenido evidencia de una estructura ha sido la adecuada al contexto trabajado, como ocurría con la forma directa. Esto es diferente en estudios previos como el de Pinto y Cañadas (2017b), quienes evidencian diferentes estructuras para la forma inversa de la función, de los 24 estudiantes que entrevistaron, 10 establecieron diferentes estructuras para la misma función $y=2x+6$.

Con respecto a la forma inversa hemos detectado que dos estudiantes E2 (entrevista A) y E1 (entrevista B) contestan pensando en la función en su forma directa. De esta manera lo que hacen es sumar cantidades para dar el resultado. De esta manera están indicando en que se dan cuenta de que el proceso es equivalente para el cálculo de lo pedido en ambas formas de la función.

Rescatamos la importancia de que la evidencia de una estructura identificada entre las variables involucradas en unos casos particulares puede hacerse extensible a más casos, hasta la generalización. Con respecto a esto, podemos concluir que, en este estudio, hay más estudiantes que han generalizado la estructura que implica la función $y=x+4$ en el contexto de los superhéroes (entrevista B) que con la función $y=2x$ dada en el contexto de las paradas de tren (entrevista A), tanto para la forma directa como para la inversa de la función.

Encontramos un hallazgo inusual con respecto a la literatura revisada (e.g., MacGregor y Stacey, 1995), al observar que la cantidad de estructuras generalizadas es mayor en la forma inversa de la función que con la forma directa, en la entrevista A. Pero es que en la entrevista B se mantiene la cantidad de estructuras adecuadas generalizadas con la forma inversa. MacGregor y Stacey (1995) advertían que el estudio de la forma inversa de una función resulta más difícil en la interpretación que pueden hacer los estudiantes sobre la relación entre las variables en la forma inversa. A diferencia del anterior, y sin pretensión de generalizar los resultados dado el tamaño de la muestra con la contamos, observamos que hay un estudiante más que logra generalizar la estructura durante el trabajo de la forma inversa que con la directa. Podemos destacar aún más este hallazgo al especificar que el estudio de la forma inversa se llevó a cabo después de las entrevistas sobre la forma directa, momento en el que los estudiantes podrían encontrase cansados y dispersos.

Hay estudiantes que no han contestado a las preguntas planteadas (en el estudio de la forma directa e inversa de la función) o incluso no se les plantean (en el estudio de la forma inversa). Estas circunstancias se han dado de manera más acusada en la entrevista A. Tal vez la operación de multiplicación que ofrece la función les dificulte establecer la estructura implicada entre las variables más que con las operaciones aditivas que pueden ofrecer una oportunidad para evidenciar la estructura de forma más sencilla para ellos. Sin embargo, los alumnos ya conocían la estructura dada por $y=2x$, pues la sesión 4, previa a la entrevista, recogía distinto contexto, pero la misma estructura. Durante el experimento de enseñanza, la sesión 4 no trascurrió como se esperaba en cuanto a la identificación de las estructuras por lo que cambiamos ese contexto al nuevo de las paradas de tren. Esto corrobora de alguna manera la dificultad de la operación multiplicativa en este estudio por parte de los estudiantes de estas edades al haber descartado que el contexto de la tarea fuera la causa. En este momento cabe una reflexión sobre la necesidad de un requisito previo esencial en los estudiantes para poder describir ellos mismos lo que hacen. Quizás muchos estudiantes perciban las relaciones entre las variables empleadas, es decir, quizás perciban la estructura, pero no puedan expresarla con palabras. Expresiones que se han manifestado de una manera casi espontánea por la mayoría de los alumnos en este estudio como “sumar más 4 o multiplicar por dos” podrían no ser tan fáciles de trasmitir para otros.

Las tareas de generalización que ofrecemos en la investigación permiten promover el pensamiento funcional por lo que podrían tratarse como un aporte para la enseñanza. En nuestra metodología utilizamos el potencial del objeto matemático, la función, de forma que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan pensar algebraicamente y reflexionen sobre las relaciones entre variables. en este nivel educativo. El trabajo realizado sobre los distintos papeles jugados por las mismas variables de una relación funcional expresada de manera directa o inversa puede ayudar a profundizar en el desarrollo de la búsqueda de covariaciones entre variables que les será beneficioso en niveles posteriores.

Atendiendo a la implicación docente nos hacemos eco de los resultados de Paoletti (2020) donde pone en evidencia la necesidad de apoyar a los estudiantes y profesores de educación superior en la reorganización de sus significados y dificultades sobre la función inversa, sumergiendo a nuestros estudiantes en edades tempranas en el trabajo de identificar regularidades funcionales, estructuras con funciones directas e inversas relaciones covariacionales en general. El autor advierte de que los futuros investigadores deberían estar interesados en explorar cómo los estudiantes más jóvenes podrían desarrollar significados de relación (o función) y relación inversa (o función) basado en el razonamiento sobre las relaciones entre variables que covarian. Pues bien, este es el aporte de nuestra investigación. En este sentido nosotros hemos examinado cómo niños de entre 7 y 8 años desarrollan el pensamiento funcional cuando ofrecemos una forma inversa de la función, fijándonos en la manera en la que generalizan las estructuras evidenciadas. Pretendemos que estos hallazgos proporcionen un punto de partida para futuras investigaciones dada la escasez de trabajos sobre la forma inversa de la función en educación primaria para poder favorecer la productividad del pensamiento funcional en cursos superiores.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia EDU2016-75771-P, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER). Además, se ha realizado con el apoyo de una beca con referencia BES-2017-080124 otorgada por el gobierno de España.

Referencias

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015) A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558

Cañadas, M., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87-103. doi:10.1016 j.jmathb.2015.10.004.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education. Third edition* (pp. 191-218). Nueva York, NY: Routledge.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2008). Generalizing mathematical structure in years 3-4: a case study of equivalence of expression. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 369-376). Morelia, México: PME.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66-86. doi:10.2307/749228

Driscoll, M. J. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262. doi:10.1080/10508400701193705

Ellis A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 215–238). Heidelberg, Alemania: Springer. doi:10.1007/978-3-642-17735-4_13

Harel, G. (2002). The development of mathematical induction as a proof scheme: a model for DNR-based instruction. En S. Campbell y R. Zazkis (Eds.*), Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 185-212). New Jersey, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Heines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology ofMathematics Education* (Vol.3, pp. 49-56). Bergen, Norway: Bergen University College.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7*(1), 69-85.

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp.129-141). Granada, España: Atrio

Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C. y Prescott, A., (2005). Case studies of children's development of structure in early mathematics: A two-year longitudinal study. En H. Chick, y J. Vincent, (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, pp. 1- 8. Melbourne: PME

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21(*2), 33-49.

Paoletti, T. (2020). Reasoning about relationships between quantities to reorganize inverse function meanings: The case of Arya. *The Journal of Mathematical Behavior,* 57, 100741. doi:10.1016/j.jmathb.2019.100741

Paoletti, T., Stevens, I. E., Hobson, N. L. T., Moore, K. C. y LaForest, K. R. (2018). Inverse function: Pre-service teachers' techniques and meanings. *Educational Studies in Mathematics, 97,* 93–109.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017a). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 407-416). Zaragoza, España: SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017b). Generalization in fifth graders within a functional approach. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapur: PME.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press. (Traducción al castellano: J. Zugazagoitia, 1965. Cómo plantear y reslover problemas. México:Trillas).

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, España: Tecnos

Romberg, T. A., Carpenter, T. P. y Fennema, E. (1993). Toward a common research perspective. En T. A. Romberg, E. Fennema, y T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 1-9). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Steffe, L. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: LAE.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). Gijón, España: SEIEM.

Torres, M.D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (en revisión). Inductive Reasoning and Generalizatión in Second Grade Students. *International Journal of Science and Mathematics Education.*

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122–137

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162. doi:10.2304/ciec.2005.6.2.5

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

ESTUDIO 5

Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context

Mathematics 2022, 10(1), 56; https://doi.org/10.3390/math10010056

Received: 9 November 2021 / Accepted: 23 December 2021 / Published: 24 December 2021

Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context

María D. Torres [1,*], Bárbara Brizuela [2], María C. Cañadas[1], and Antonio Moreno[1]

[2] Department of Education, Tufts University, School of Arts and Sciences. Medford, Massachusetts 02155, USA. Barbara.Brizuela@tufts.edu (B. B).
[1] Department of Mathematics Didactics, Faculty of Education Sciences, University of Granada, 18071 Granada, Spain; amverdejo@ugr.es (A. M.); mconsu@ugr.es (M.C.C.).
* Correspondence: mtorresg@ugr.es; Tel.:+34-649-812-349

Abstract: In this study, we adopted a functional perspective to algebra. Our focus was on tables and how they were first used by second-grade elementary school students (7- and 8-year-olds) when working with functions. We designed and implemented two semi-structured interviews, one group and one individual, two weeks apart, and focused on tasks involving different functions and uses of tables, with and without headings. Data analysis revealed that students were able to organise the values of variables by listing them in columns and labeling the headings (i.e., identifying the variables involved). The ways in which children organised the data in tables enabled us to identify the structures they identified as regularities between the variables involved in the functions. More structures were correctly identified in the second interview compared to the first.

Keywords: function; functional thinking; generalisation; structure; tabular representation.

1. Introduction

Mathematical tasks are necessarily performed in a representational context [1]. In this article we explore second-grade elementary (7- and 8-year-old) students' uses, integration, and interpretations of tabular representations when working with tasks involving generalisations of two linear functions.

Representations entail changing the appearance of a given data item to view it differently [2]. In mathematics education research, representations have traditionally carried substantial weight in light of their role in building mathematical knowledge [3]. Mathematical representations are closely related to mathematical reasoning, given the significant part they play in the development and understanding of students' reasoning processes [4]. Learning to use mathematical representations affords students a series of tools that enhance their ability to think about and communicate mathematical ideas [5].

This study specifically addresses tabular representations in a functional context. Functions may help introduce algebra to young children and different types of representations are embedded within functions, for example, algebraic notations, function tables, and Cartesian coordinate graphs. An early introduction to the functional perspective may favour a fuller understanding of functions [6].

Tabular representations are a specific form for recording and organising information that has multiple uses [7]. Tables, among the most frequently used representational tools, are a device more commonly used in daily life than one might expect. We are all familiar with calendars, timetables (e.g., for trains), weekly school or professional task charts, weather data logs, and matrices with different types of quantitative information in texts such as scientific papers, the media, and books [8]. Children come into early contact with tables in a wide variety of environments. Nonetheless, research has traditionally paid scant attention to tabular representations [8], in contrast to the in-depth study and descriptions of children's understandings and uses of other function-related representational tools such as graphs (e.g.,[9];[10]).

While tables are an essential element in mathematics curricula, little is known about how suitable they may be for understanding functions [11]. In this study we did not broach functions as posed in secondary education, but rather explored the relationships between variables identified by observing regularities. In functional contexts, the observation of intervariable regularity is known as structure. In elementary education, the identification intervariable structures encourages functional thinking, thereby favouring algebraic reasoning. Functional thinking is based on the construction, description, and representation of and reasoning with and about functions and their constituent elements [12]. The functional approach includes a number of representations: natural language, function tables, graphs, and symbolic notation.

In this study, we posed the following research questions: How do children organise values in tables with or without (a priori) headings? And how do they identify the regularities (structures) in intervariable relationships (i.e., between quantities in columns)?

2. Functional thinking and representations

Functional thinking focuses on the relationships between co-varying quantities [13]. The development of functional thinking fosters the ability to generalise, represent, explain, and reason about mathematical relationships [14] and helps students surmount the difficulties encountered in understanding the very idea of what functions are in secondary education [15]. Elementary school students' ability to generalise and represent generalisations is consequently of interest in functional contexts (e.g.,[16]; [17]; [18]). Against this backdrop, generalisation is preceded by the identification of structures ([19]; [21]), the latter meant as the regularity observed in the variables present in the functions at hand. Structure is defined as the form in which the regularity between specific values of the variables involved is organised or the manner in which generalisation is expressed [17]. The approach implicit in this definition makes it possible to analyse how students interpret regularities and potentially ++generalise [21, 22]. From this perspective, generalising consists in establishing the general structure between covarying quantities.

[18], among other researchers who have explored elementary school students' ability to identify structures and generalise in functional contexts, studied how six 7- to 8-year-old students worked with the function y=x+3. Their participants identified four types of structures in the particular cases proposed (y=x+3, y=x+x, y=x+2, y=x+1), although most correctly generalised the structure as y=x+3 when asked to generalise, and they consistently identified the same structure in the specific and general cases. The authors represented the structures symbolically as their interpretation of students' oral or written statements. [17] also broached structure in a study with 8- to 9-year-olds, who identified 17 structures for the relationships between the variables in $y=2x+6$. Whilst six of the structures ($y=2(x+2)+2$; $y=2x+3+3$; $y=3(x+2)-x$; $y=3x+1$; $y=2x+2$; $y=(x+3)\cdot 2$; $y=(x$

+ 6) + 2x) were appropriate, the remaining 11 were not. No data on how students used tables to identify structures were reported in these studies.

Observing children's ability to interpret and represent generalisations provides information on their functional thinking, consequently providing guidance on how algebra instruction might be broached in elementary school. Underlying any discussion of generalisation among elementary school students is the acknowledgement that such students may use natural language or gestures as well as algebraic symbolism to represent relationships [23]. While the use of letters is essential, thought processes and algebraic activity may be expressed in a number of ways. The types of representations that elementary school students may use to solve linear function problems include (a) spoken natural language; (b) written natural language; (c) pictorial; (d) numerical; (e) algebraic; (f) tabular; or (g) graphic systems [24]. We define verbal representations as meaning either oral or written natural language. Pictorial and verbal are the two predominant types of representations among students in the early years of schooling [25]. [26] noted that students' verbal descriptions of particular or general cases gives them the opportunity to encourage the use of other types of representations. Our focus in this study was on tabular representations.

3. Tabular representations

According to [27], representations imply the existence of two interrelated but functionally separate entities; that interconnection between the representative and represented worlds is also implicit in the representative (symbol or representation) and the represented (idea) objects themselves.

In our work, tables are the representations and the concepts they refer to are the relationships between the variables involved, that we will identify through the structures that students express.

A table is a graphic format in which quantitative information is organised around two axes, one vertical and the other horizontal, to systematise interrelated data or elements [28]. The two axes serve to cross-reference the information contained in two sets of variables whose reciprocal relationship is represented. The quantitative data comprising the content in the cells must be interpreted by cross-referencing the concepts represented in the respective columns and rows.

We are interested in children's interpretations and uses of tables at an early age when they are working with linear functions, given the scarcity of empirical studies specifically focused on the uses that children make of tables once they are outlined, but with blank cells. [29] conducted a study with 8- and 10-year-olds to explore how they understood, constructed, and what they thought about tables when working with additive interrelationships. The task they designed for the students revolved around three siblings who put the money received from their grandmother in a money box. The grandmother increased the amount she gave the children by one dollar per day, from day one to day three. Each grandchild started out with a different amount of money. Of the 39 students interviewed, 22 opted to build chronological tables. They headed the columns with the names of the three characters and designated the rows by days of the week, so that the downward flow along a column reflected the number of days. The children had worked with tables in earlier sessions, although they were given no template for this task. [8] adopted a similar approach to explore 8- to 11-year-old students constructing tables. In this case, as the researchers did not specify to the students the type of representation requested, a wider variety of responses was observed. Although both studies focused on tabular representations, neither addressed students' recognition of structures through the use of tables, as we will do in this study.

Both of these studies analysed the characteristics of the tables constructed by children to explore how they worked on tasks by constructing a table with which to systematically organize a set of data. According to [8], construction is the sole phase in which tables serve as an actual cognitive tool for re-organising information and effectively solving a problem. Nonetheless, as tables seldom constitute the object of classroom instruction, the functional tasks that can be performed with tables have conventionally been confined to interpreting and on occasion filling in the blank cells in a table.

Although the information in the tables usually involves direct reading, studies on writing and number notation among preschool children have shown that the ability to interpret a notation does not necessarily imply that a child can construct or use it to solve a problem [30, 31].

Our research explored another pathway for the study of tables in the context of learning by giving students tables with blank cells and with columns and rows sometimes labelled. [32] conducted a study with 22 children, all 6 years old, and asked them to solve problems involving addition or subtraction. According to these authors, the tools that proved to be most useful for the children were tables with unlabelled headings, and secondarily pen and paper. However, this study did not explore the interrelationship between the use of tables and the identification of structures, as ours will do.

Here we analysed how children used empty tables with or without pre-established headings when working with a series of linear functions to gain some insight into the extent to which they had internalised an intervariable relationship on the basis of the structure they identified in the tables.

4. Research objectives

We explored second-grade elementary (7- and 8-year-old) students' interpretations of tables when working with two tasks involving generalisation, each focused on a different linear function. This article describes how they organised values in a table, identifying the implications of the respective headings (identification of the variables) and how they identified intervariable regularity (the structure).

5. Materials and Methods

This qualitative, exploratory, and descriptive study consisted of five classroom sessions and two semi-structured interviews, the first was a group interview and the second was individual. Session and interview timing and the functions involved are provided in Table 1. All the functions entailed a multiplicative, an additive relationship, or both. Based on existing recommendations (e.g., [16]), as the study was focused on elementary education students, it was limited to linear functions (y = mx + n, where m and n, domain and codomain, were natural numbers). All 24 students in a single classroom took part in the classroom sessions.

Table 1. Sessions and interviews

Context	Function
Session 1: Ball machine	$y=x+3$
Session 2: Amusement park 1	$y=x+3$
Session 3: Amusement park 2	$y=2x+1$

Session 4: Birthday	$y=2x$
Session 5: Introduction to tables	N/A
Interview 1: Train stops	$y=2x$
Interview 2: Superhero ages	$y=x+4$

In keeping with the main aim of the study—to explore how students identified structures in different contexts—the purpose of the first four sessions was to explore how students identified the structures in the relationships between variables. We subsequently focused on the representations they used to express the relationships observed.

The purpose of session 5 was to introduce students to tabular representations, which they had not previously seen. No functional context was included to prevent enthusiasm for the activity from waning due to the repetition of the same dynamics from earlier sessions. In session 5 the children were taught how to fill in the cells in a blank table in which the headings were labelled to specify different types of polyhedrons and their characteristics: number of surfaces, vertices, edges, and so forth. The students were provided with material to build the figures and a worksheet with the table printed on it to record the geometric characteristics. The worksheet used by one of the students in session 5 is reproduced in Figure 1. Classroom sessions were held once a week and interviews were conducted two weeks after session 5.

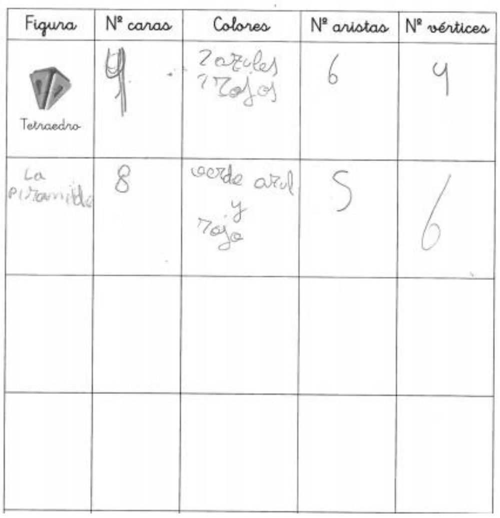


Figure 1. Student's table, session 5

5.1 Participants and school

The participants in this study were four second-grade (7- to 8-year-old) elementary school students (Alba, Ángel, Darío, and Lola, all pseudonyms) in a Spanish charter school in academic year 2017/2018 whose students were primarily from low income backgrounds. The school, which was participating in a social and educational transformation project (Comunidades de aprendizaje, learning communities) geared to its students' social profile, was chosen deliberately because of its availability.

We selected four of the 24 students in the second-grade class who had been present in all five sessions and both interviews and whose parents had provided consent and they had provided assent. The selection was also based on the classroom teacher's assessment of students' academic achievement, attitude, and predisposition to participate actively in the interviews.

We took into account students' prior knowledge, based on the curriculum and the information provided by the teacher for the design of the sessions: numbers from 0 to 399, comparison of numbers, and addition and subtraction operations with carry. Students had not had experiences working with linear functions, generalising, or representing data in tables prior to session 5 described above.

5.2 Data Collection

In this study we focused on the data drawn from the interviews, which were designed along the lines recommended in [33] model on inductive reasoning focused on generalisation. This model begins with particular cases and gradually works up to general questions, enabling researchers to observe how students generalise structures initially identified in particular cases.

The interviewer introduced the tasks, beginning with particular cases involving small non-consecutive (to prevent students from using recursive patterning) quantities, which were then gradually increased. The terms 'a lot of' and 'infinite' were used as indeterminate quantities to encourage generalisation. During the interviews students were given worksheets containing tables and blank sheets that they could use to record their work. The interviews, video-recorded and held two weeks apart, aimed to provide deeper insight into students' interpretations of tabular representations and how tables connected to the structures students identified.

5.2.2. Interview 1

Interview 1 as a group interview in which all four students participated with the goal of obtaining a larger number of reactions that would help us explore their thinking. We introduced the interview 1 task as follows: Elsa's friends are taking a train to go to her birthday party. Just two people board the train at each stop. In this interview, the students were given a worksheet each with the blank table reproduced in Figure 2. They were encouraged to share their responses.

Fecha: 4 de mayo de 2018 **Hoja de trabajo 1**

Figure 2. Worksheet 1 for interview 1 with blank table to begin to explore student thinking

The task continued with questions on particular cases: “How many passengers would be on the train after three stops?” “And after five?... The students were different responses in which we could observe if they expressed some structures for the relationship between the variables. We then asked about their interpretation of the table: ‘Do you remember using something like this before?”; “How could you put the information given in the problem in the table?”; “How can we show the number of train stops and the number of passengers in the table?”.

Once we felt sure the students had understood the situation, we continued to pose questions: “What could we put in the column headings to organise the information in the problem?”; “Can you think of something?”; “How are all the numbers in the first column related?”; “How are the numbers in one column related to the ones in the other?”.

After they answered the questions about particular cases, we went on to ask about the general case with the use of indeterminate terms: “We want to know how many people will be on the train after a lot of stops.” “How can we know how many passengers are on the train?”; “How would you explain to a friend how many people would have boarded after an infinite number of stops?”; and “Do you think using this table can help us find the number of people there are if we know the number of stops?”.

We then gave students a second worksheet to explore the intervariable relationships more closely. Were the forms individual, were they discussing and agreeing on their answers. Worksheet 2 contained incorrect values intended to prompt them to explain their reasons for correcting the errors and identifying the correct values. The idea was to reinforce the data collected with worksheet 1 to identify the structure recognised by each student in this task and their understanding of the values pre-printed in the table. Worksheet 2 is depicted in Figure 3.

Nombre y apellidos:____

Fecha: 4 de mayo de 2018 **Hoja de trabajo 2**

Number of stops	Number of people		Correction Why do you think it’s right or why do you think it’s wrong?
5	9	⇨	
2	4	⇨	
10	5	⇨	
50	25	⇨	
100	220	⇨	
1 millón	2 millones	⇨	

Figure 3. Worksheet 2 (interview 1)

5.2.3. Interview 2

The generalisation task set up for individual interview 2, focused on the ages of two superheroes, was introduced in the following way: “Two superheroes, Iron Man and Captain America, have birthdays on the same day". Much as in interview 1, we then gave students a series of non-consecutive (to avoid recurrence) examples: When Iron Man was 5 years old Captain America was 9, when Iron Man was 7 Captain America was 11, and when Iron Man was 3 Captain America was 7. We subsequently gave students a worksheet with a two-column table with identical but incomplete headings and space to write in each superhero's name (see Figure 4).

Edad de	Edad de

Figure 4. Table used for interview 2[5]

The interview 2 table headings are hints, a help, but they do not correspond to the titles of the headings since they do not include the full names of the variables. The first few particular cases were followed with others involving larger quantities: 23, 31, 52. We also asked the students to propose their own quantities, other than the ones stated: "Choose an age for Iron Man (__). If he's that old, how old is Captain America? How do you know that?"

[5] Edad de = Age of

We concluded by asking them to generalise: “When Iron Man is very old, how old will Captain America be?” “If Iron Man is infinitely old, how old will Captain America be?” “How would you explain to friends what they have to do to figure out Captain America’s age?” Or for instance: One of your classmates said that “When Iron Man is XX[6], Captain America is YY[7]”. Do you agree?’ These questions enabled the students to identify different structures for the intervariable relationship.

We included questions in interview 2 analogous to those described in interview 1 based on exploring their reasoning about tabular representations.

5.3. Data analysis

After transcribing the interviews verbatim, we defined categories based on students’ ability to interpret and use tables during the tasks. The unit of analysis was the sentences. In the same way, we analyzed the different worksheets that the students filled out during the interviews. In both interviews we determined whether they could:

1. Recognise tables as elements for recording data in a different funcitonal context (yes/no)

2. Organise data in the tables during the tasks:

- Did they place data in the appropriate column and row? (yes/no)
- Did they write in or complete the table headings? (yes/no)

3. Identify structures:

- Did they relate the values of each variable (numbers or quantities) in the two columns to the variables involved, identifying the regularities between them? (yes/no)
- Were the structures correctly identified? (yes/no)

The structures were those identified by the students for both the particular and general cases. A structure was deemed to have been identified when a given student used the same regularity to solve two or more particular cases or when they generalised. As in earlier studies (e.g., [17]; [34]), this was taken as proof of students’ identification of structure, whether or not the structure was adequate to the relationship at hand.

6. Results and discussion

We detail the results obtained in both interview 1 and 2, in this order, attending to the same categories of analysis in both interviews. The differences between the first and second interview findings on tabular representations were subsequently analysed. Examples of students’ worksheets and transcripts of excerpts from the interviews are included below to illustrate the results.

---

[6] XX= We do not use the letters XX in interviews. We use this symbology to refer to any example.

[7] YY= ^{3}XX

6.1. Tables as a means to record data

This first analytical category was intended to explore students' prior knowledge of tabular representations. In group interview 1, only one student, (Alba) remembered the tables from the last of the five classroom sessions, although she was not able to name it as a "table." The other three students did not remember having used a table before until they were reminded by the interviewer about that session. The following excerpt from interview 1 illustrates how the table was introduced and how it was remembered.

Interviewer (I): Today I've brought a task worksheet. Can anyone tell me if they remember what it shows? (Pointing at the worksheet with a blank table.)

All: (No response, thinking.)

Lola: It's an empty piece of paper.

I: But there's something drawn on it, right? Let's try to remember.

All: (No response.)

Alba: Now I remember! We used it with the magnets (referring to lesson 5) when we had to make shapes and describe the details.

I: That's it, a table, we wrote in the number of vertices, surfaces, edges… Today we're going to use a table, too, but for another task, OK? Look (reading the train stop task): whenever the train stops, two friends, two people, board. Can we put that information in the table somehow?

All: (Silence.)

When these questions were posed the students were looking at the blank table on their worksheets (see Figure 5).

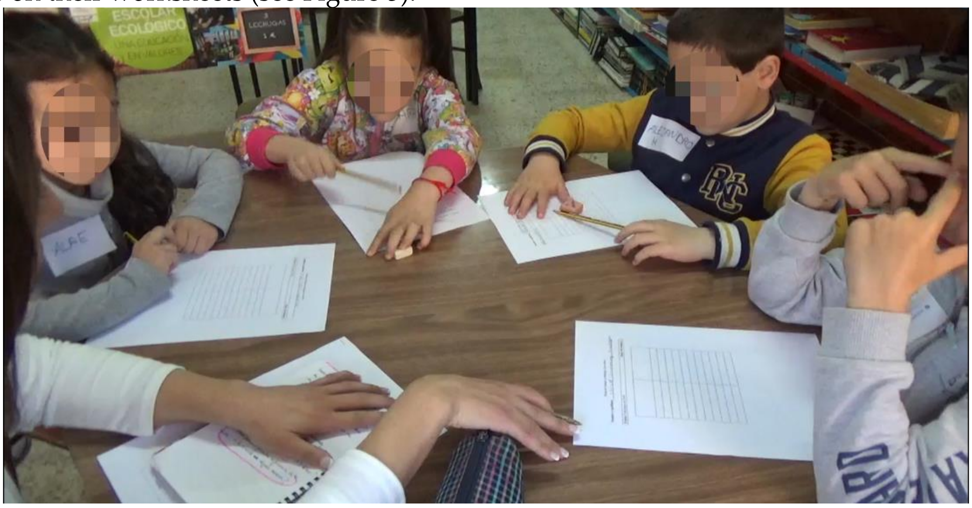


Figure 5. Students and worksheets at the start of interview 1

In contrast, by interview 2, the students had become acquainted with tabular representations and the dynamics of generalisation tasks; thus, the new table they were given during the second interview caused them no surprise. Not only did they remember it, but they were comfortable using it as a means to record information.

6.2. Data organisation in tables

In the first few cases posed on intervariable relationships, the students had trouble deciding where in the table to place the values of the independent variable (number of train stops). They asked 'Where am I supposed to put it?', as in the following excerpt.

Interviewer (I): When the train stops once, how many people get on?

Darío, Ángel, Lola, and Alba: Two (in unison).

I: If two people board every time the train stops, how can we show that on the table?

Darío: Putting half of the word here and the other half there (pointing to the two column headings).

I: Which half-word do we write in, Darío? Let's see, write down whatever you want.

Darío: Hmmmm (thinking). I don't know.

Alba: Yes, you can, but I don't know where.

Ángel: I don't think you can.

Up to this point the students did not know where to place the values of the variables (either by rows or by columns). None knew how to head the columns with labels. Darío was the only student who came close to a suggestion (line 4). The excerpt of the following exchange with the students illustrates how they were taught the procedure for recording data in the table during the interview.

I: OK, no problem. Let's try something. Let's write number of stops here in this space (heading for left column). Now we're going to try to show that the train stops once and two people get on.

All: (Still writing nothing.)

I: How could we show that the train stops once?

Lola: Writing it down?

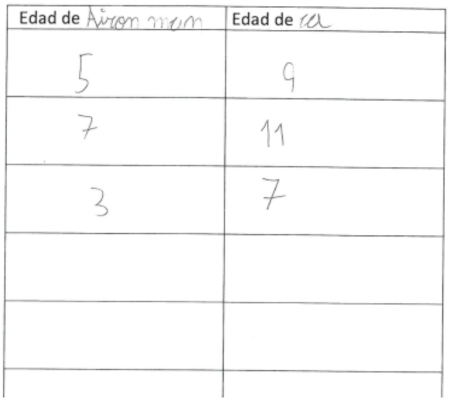
I: Yes, but how? What should we write? Any ideas?

All: (Shaking their heads no.)

I: Well, we could write in a '1' under where it says number of stops? The train stops once and two people board each time it stops. We write in the number of people in the second column next to the 1. If the train stops three times, for instance, we write that down underneath the 1.

The interviewer's introduction to the process for recording the known values. This does not interfere with their interpretation of the data and their use on the table to guess the structure involved in each task, we will see it later with the analysis of the structures.

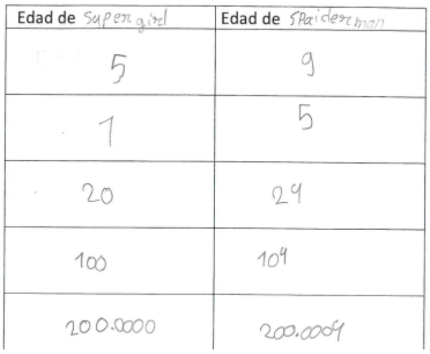
A substantial difference was observed in students' organisation of data in tables between the first and second interviews. In the latter, all four students wrote in the values of the variables for the first few particular cases in the respective columns and also completed the table headings unaided. Their correct completion of the headings was an indication that they had recognised which values referred to the independent and which to the dependent variables. Figure 6 reproduces the table Ángel worked with in the first three particular cases on the superhero ages. He spelled Iron Man using Spanish phonetics ('Airon mam') and abbreviated Captain America as 'c.a.'



Edad de Airon mam	Edad de [illegible]
5	9
7	11
3	7

Figure 6. Ángel's table (interview 2): headings and first three particular cases

After working with particular cases involving larger quantities, Lola expressed her distaste for the two superheroes, professing a preference for Supergirl and Spiderman. The only assistance she requested was the correct spelling of the superheroes' names. Lola's table, reproduced in Figure 7, reflects the particular cases we worked on with her and also shows that she located the variables labels and quantities in the correct locations in the table.



Edad de Super girl	Edad de SPaiderman
5	9
1	5
20	24
100	104
200.0000	200.0004

Figure 7. Lola's table (interview 2): headings and particular cases

Since interview 2 was carried out individually with each of the four students, the particular cases listed in their tables differed. The two other students' responses were similar to those given by Ángel and Lola.

6.3. Identification of structures

The structures identified in interview 1 for both the particular and general cases are listed in Table 2 (in symbolic format, although the students did not use this type of representation).

Table 2. Structure identified in interview 1

		Structure	
Function	Student	Particular case	General case
$y = 2x$	Ángel	$y = 2x$	NR
	Lola	$y = 2x$	NR
	Darío	$y = 2x$	$y = 2x$

Table 2. Structure identified in interview 1

		Structure	
Function	Student	Particular case	General case
	Alba	$y = 2x$	NR

Note. NR = No response

All four students identified the structures correctly when working with particular cases, although three did not answer the question on the general case.

The following excerpt, a continuation of the one transcribed earlier, illustrates how the students identified structures in the particular cases.

I: If the train stops three times how many people get on?

All: 6.

I: Why 6?

Ángel: Because 2 plus 2 is and 2 more make 6.

I: And how did you do that, Ángel?

Ángel: Well, I multiplied 2 times 3.

I: And why did you multiply times 2? What's 2 here?

Ángel: Well, the number of stops.

I: Well, let's see, when the train stops three times (pointing to the stops column), how many people (pointing to the number of people column) boarded?

All: 6 (all write in 6 in the respective cell).

I: Alba, can you explain why the answer is 6?

Alba: Because if the train stops three times six people would get on. I multiplied 3 times 2.

I: And why times 2, Alba?

Alba: Because 2 means two people.

I: Good, now let's think about what happens if the train stops, let's say six times.

Lola: Twelve would get on.

Ángel: Twelve (answering a little later).

I: And now how did you get that answer?

Ángel: Multiplying 6 times 2.

Darío and Lola: Multiplying times 2.

Darío: Yeah, you always need to multiply.

I: Then we can show that in the table: if the train stops six times (pointing to the stops column), what number should we put here (pointing to the number of people column)?

All: (Writing 12 in the respective cell.)

I: Fine. Now if the train stopped five times, how many of Elsa's friends could have boarded?

All: Ten (answering quickly at the same time). (Darío and Alba write the number into the table, now unaided by the interviewer.)

I: OK, and if the train stops ten times?

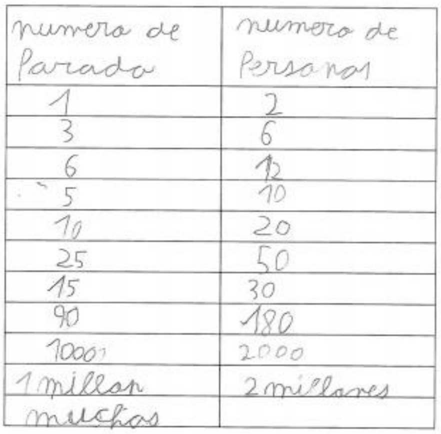
Darío: Well, it picks up 20 people.

Ángel and Alba: 20 (answering after Darío).

Ángel: Now it's 10 times 2.

Although Ángel initially answered with an additive relationship (line 19), in the remaining cases his responses, like those of his classmates, were indicative of a structure built on a multiplicative relationship (lines 21, 27, 34, and 35). Darío's remark in line 36 merits comment, for his assertion that 'you always need to multiply' illustrates his ability to generalise after working with the first few particular cases.

Three students did not respond to the question on the general case in interview 1, possibly due to distraction among them at that point in the conversation. In this group interview (interview 1) it was sometimes difficult to hold all four students' attention at once. Darío, who identified a correct structure for the function, also generalised claiming 'multiplying times 2; you always need to multiply'. However, he did not write in the value corresponding to the 'a lot of stops' case (indeterminate term) (see Figure 8).



numero de Parado	numero de Personas
1	2
3	6
6	12
5	10
10	20
25	50
15	30
90	180
1000	2000
1 millon	2 millones
muchos	

Figure 8. Darío's table (interview 1)

As for the general case, the following excerpt from the interview illustrates our results:

I: If the train can carry however many people we want… It's Elsa's train. For instance, Alba, if the train stops one million times, how many people can board?

Darío: Well, two million (answering quickly).

Alba: (No answer.)

Darío: But teacher, how do you write one million?

I: You can write it out in words, Darío, no problem.

Darío: (Writes 'one million' in words in the table.)

I: Now let's suppose the train stops a lot of times, I don't know how many, but a lot. In the number of stops column we're going to write in 'lots', in words.

All: (Three students write in 'lots' in the respective cell.)

I: Good. If the train stops lots of times, how many people can board?

Ángel: 900000?

Lola: (Raises her hands to her head, thinking.)

Ángel: Lots.

I: Not so sure. And if it stops an infinity of times?

Darío: Oof, one trillion or one hundred thousand trillion.

I: Why Darío?

Darío: Because lots of stops can be a trillion.

I: I'm going to ask one more question… These numbers (pointing to the number of stops column), what did we say they are?

All: (In unison) Number of stops.

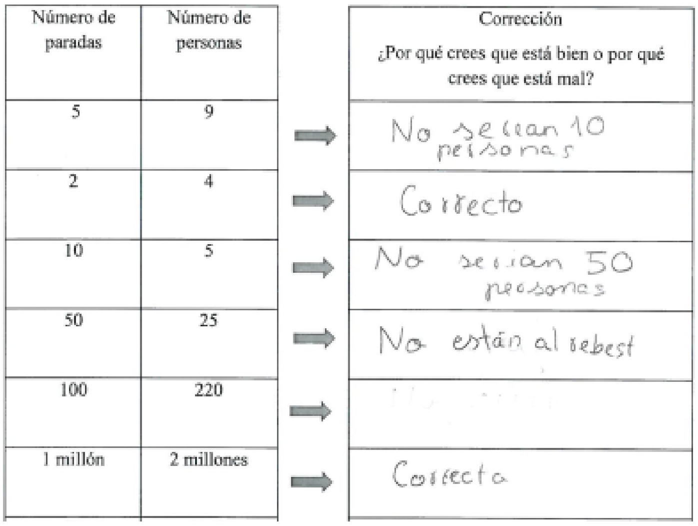
I: Very good. And these (pointing to the number of people column)?

All: (In unison) Number of people.

I: OK, can we explain to a classmate or to one another how we can figure out the number of people that can be on the train when it stops lots of times? How can we figure that out?

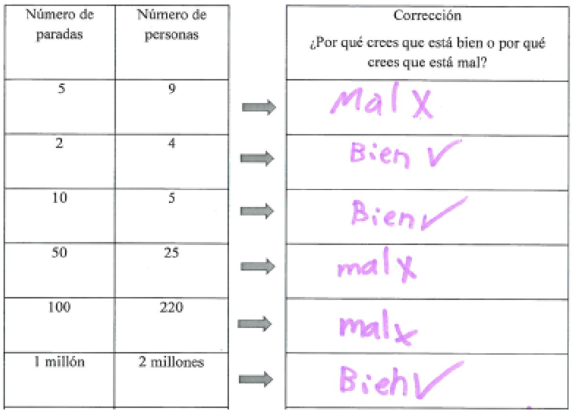
Darío: You always need to multiply, like before.

The students' second interview 1 worksheet, on which they had to correct erroneous values pre-printed on the table, revealed that they had internalised the structure recognised in the task and were able to use the table as a recording medium. Figures 9 and 10 show that Alba and Lola identified the same structures as specified on earlier worksheet 1.



Número de paradas	Número de personas		Corrección ¿Por qué crees que está bien o por qué crees que está mal?
5	9	➡	No serían 10 personas
2	4	➡	Correcto
10	5	➡	No serían 50 personas
50	25	➡	No están al rebest
100	220	➡	
1 millón	2 millones	➡	Correcta

Figure 9. Alba's table (interview 1)[8]



Número de paradas	Número de personas		Corrección ¿Por qué crees que está bien o por qué crees que está mal?
5	9	➡	Mal X
2	4	➡	Bien ✓
10	5	➡	Bien ✓
50	25	➡	mal X
100	220	➡	mal X
1 millón	2 millones	➡	Bien ✓

[8] No, serían 10 personas = No, it would be 10 people /Correcto= Correct / No, serían 50 personas= No, it would be 50 people / No, están al revés=/ No, they are backwards

Figure 10. Lola's table (interview 1)[9]

Taking a closer look at the differences between the two girls' answers we can see that Lola wrote 'right' or 'wrong', with no further explanation. Alba's observation that "it is the other way around" (see Figure 9), for the case 50 number of stops and 25 number of people, reflects that she has identified the correct structure in this task, even though she did not recognize the structure for the general case (see Table 2). This may be due to the difficulty in holding the students' attention in this group interview.

The structures identified in interview 2 are shown in Table 3 (symbolically here also).

Table 3. Structure Identified during Interview 2

Function	Student	Structure	
		Particular case	General case
$y = x+4$	Ángel	$y = x + 4$	$y = x + 4$
	Lola	$y = x + 4$	$y = x + 4$
	Darío	$y = x + 4$	$y = x + 4$
	Alba	$y = x + 4$	*NR*
		$y = x + x$	

Note. NR = No response

During the interview, all the students correctly identified the structure involved in the particular cases. Alba's responses were of special interest, for they revealed that she had identified two types of structures (see Table 3). After initially identifying the structure correctly, as the interview progressed, she also (incorrectly) identified the structure $y=x+x$. Alba's answers to the particular cases during interview 2 are reproduced in Figure 11.

[9] Mal = incorrect / Bien= Good

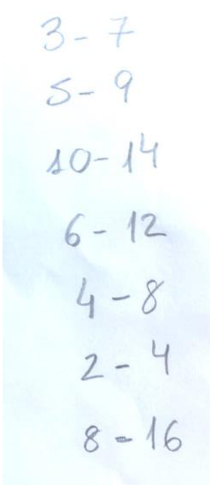


Figure 11. Alba’s answers to questions on particular cases (interview 2)

The values in Figure 11 were jotted down by the interviewer as Alba called them out. We recurred to this procedure because by this point in the interview she was inattentive and somewhat tired. When Iron Man’s ages were 3, 5, or 10, Alba used the structure *y=x+4*. In contrast, when they were 6, 4, 2, or 8, she identified the structure as *y=x+x*, answering that she found Captain America’s age by adding Iron Man’s age in years to that same number. In other words, while working with some particular cases, Alba generalised, albeit incorrectly, the structure *y=x+x*. She implies the relation of double to refer to some quantities.

The student's own production without the help of the interviewer led her to fill in the table that appears in the figure 12.

Edad de IRON MAN	Edad de C-A.
7	11
11	15
8	

Figure 12. Alba’s table with particular cases (interview 2)

Alba did not answer the question on the general case (see Table 3). The other three students did generalise when asked to, however, and they did so correctly. The verbal expression used by Ángel, Lola, and Darío to generalise would translate symbolically as *y=x+4*. Ángel generalised in the following words: ‘Captain America was born 4 years before; you have to add 4’. Lola and Darío both replied simply that ‘you have to always add 4’.

Darío was one of the students who answered using indeterminate terms, such as ‘a lot of years old’ and ‘infinitely old’. The following excerpt provides evidence of his ability to generalise:

I: Could you tell me how much older Captain America will be when Iron Man is many years old?

Darío: He’d be many plus 4.

I: And when Iron Man is infinite years old, how old will Captain America be?

Darío: Well, infinite plus 4.

I: How would you explain to friends what they have to do to figure out Captain America's age?

Darío: As always, adding 4. Captain America was born 4 years before.

In line 70 Darío replied that Captain America's age would be found by adding 4 to infinite. And in line 72 he generalised verbally: 'As always, adding 4 [to Iron Man's age]'.

6. Conclusions

Given the small group of participants, we have no intention to generalise any of our findings, which must necessarily be interpreted with caution. Tables were introduced in the session immediately preceding the interviews so students' lack of familiarity with them would not interfere with their ability to identify structures in the tasks involving generalisation. Our findings show that they only effectively understood the use of tables after they were re-introduced in interview 1. As interpreting a table entails understanding the process for classifying information and identifying the variables (set out in rows and columns), so these processes follow certain conventions that are not necessarily trivial [35].

Group interview 1, at times, hindered communication with the interviewer due to the nature of group interviews, which sometimes resulted in a lack of response from the students, especially in relation to the general case. The number of general structures identified was clearly smaller in the group interview (interview 1). The clue consisting in pre-printing part of the heading for the superheroes' ages in the interview 2 worksheet may partially explain this difference. Three students did not answer the question on the general case in interview 1. All students correctly organised the data (values of variables) in the columns and rows in interview 2, when they also completed the labels for the columns, unaided by the interviewer.

Unlike the students described by [32], the students in our study found it more difficult to work with a table lacking labelled headings. It was easier for them to identify the general structure when the column headings were pre-labelled. This seems to indicate that specifying the dependent and independent variables in the table facilitated the identification of the intervariable relationship. This, in turn, may carry implications for classroom approaches to teaching functions and tables.

Students appeared to learn from interview 1 to 2, when they correctly completed the blank cells in the table. They also proved able to relate and identify the values of the dependent and independent variables (number of stops, number of people, superheroes' ages) in both interviews, illustrated through the structures they identified, correctly in most cases, in the two tasks. Only one incorrect structure, $y=x+x$, was observed in interview 2. It has not been the usual thing in the literature since in several studies they have identified a greater number of different structures throughout the same interview and for the same function (e.g., [17]; [18]). [18] report that three of the six students interviewed identified the structure $y=x+x$ for a word problem involving the function $y=x+3$. In this study the children did not explicitly identify structures as described here. Rather, we identified the structures on the grounds of their own representations. These authors did not use tables in their study. In [18]'s study, the incorrect structure, verbally expressed as 'adding a number to itself', might have appeared because in one particular case the answer happened to be double the value of the independent variable. The same occurs in this study with Alba's response in interview 2 where it implies the relation of double to refer to some quantities. A second possible explanation is that the students were more used to tasks involving addition when asked to sum two equal numbers.

The cognitive activity requested during the interviews has been dual and simultaneous since we have seen how the children have developed understandings of both the representation (table) and the objects represented (relationships between variables) as pointed out by Kaput (1987). Our study differs from previous studies (e.g., [29]; [8]) by introducing blank tables and others with hints in the headings, and allows us to view it as a instructional move that could help students learning about tables and functions.

The present findings, duly systematised, may help teachers design classroom activities favouring students' use of tabular representations and their ability to engage in functional thinking. Furthering communication skills through the use of tabular representations is likewise essential, given today's elementary and secondary school curricular calls for a command of this and similar representational tools to graphically represent information. Hence the interest in observing their use by these young students.

7. Patents

We add this section to clarify patents since it is a study that is developed within a research process

Author Contributions: Conceptualization, B. B., M.C.C. and A.M.; methodology, M. D. T., M.C.C. and A.M.; validation, B. B., M.C.C., A.M. and M.D.T.; formal analysis, M. D. T., B. B., M. C. C. and A.M.; investigation, B. B., M.C.C., A.M. and M.D.T.; resources, B. B; data curation, B.B. and M.D.T.; writing—original draft preparation, M.D.T.; writing—review and editing, M. D. T., B. B., M.C.C. and A.M.; visualization, M.D.T.; supervision, B. B., M.C.C. and A.M.; project administration, M.C.C.; funding acquisition, M.C.C. and others. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.oped within a research process.

Funding: This research was conducted within the project reference EDU2016-75771-P, financed by the Spanish National Research Agency (AEI) and the European Fund for Regional Development (FEDER). Furthermore, it was supported by a fellowship reference BES-2017-080124 awarded by the government of Spain.

Data Availability Statement: Data available on request due to restrictions.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses, or interpretation of data; in the writing of the manuscript, or in the decision to publish the results.

Informed Consent Statement: Informed consent was obtained from all subjects involved in the study.

References

1. Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, (61), 103-131.
2. Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática [On the notions of representation and understanding notions in mathematics education research]. PNA, 4(1), 1-14.

3. Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización [Representations and modeling]. In L. Rico (Ed.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 95-124). Horsori.
4. Henriques, A., & Ponte, J. (2014). As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. Bolema, 28(48), 276-298.
5. NCTM. (2007). Principios e normas para a matemática escolar. A.P.M.
6. Martínez, M., & Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. Journal of Mathematical Behavior, 25, 285-298.
7. Gabucio, F. Martí, E. Enfedaque, J., Gilbert, S., & Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria.
8. Martí, E. (2009) Tables as cognitive tools in primary education. In C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría, & E. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools in different fields of learning* (pp. 133-148). Sense.
9. Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60 (*1), 1-64.
10. Nemirovsky, R., Tierney, C., & Wright, T. (1998). Body motion and graphing. Cognition and Instruction, 16(2), 119-172.
11. Brizuela, B. M., & Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 309-319.
12. Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico (pp. 209-218). Comares.
13. Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Hoines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College.
14. Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. NCTM.
15. Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers (Ed.), Secondary algebra education (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
16. Carraher, D. W., & Schliemann, A. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education. Third edition* (pp. 191-218). Routledge.
17. Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo [Structures and generalisation in third and fifth year of primary school: a comparative study]. In J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.
18. Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.
19. Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.
20. Torres, M. D., Moreno, A, & Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics, 9*,1109. https://doi.org/10.3390/math9101109.
21. Strother, 2011
22. Warren Miller y COOper
23. Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.
24. Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 3-22.
25. Cañadas, M. C., & Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio [Functional thinking in first-year primary teacher students: An exploratory study]. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.
26. Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

27. Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Lawrence Erlbaum Associated.
28. Campbell-Kelly, M., Croarken, M., Flood, R., & Robson, E. (Eds.) (2003). The history of mathematical tables. From sumer to spreadsheets. Oxford University Press.
29. Brizuela, B. M., & Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. Journal of Mathematical Behavior, 20, 309-319.
30. Martí, E., Garcia-Milà, M., & Teberosky, A. (2005). Notational strategies for problem solving in 5 to 7 year olds. *European Journal of Developmental Psychology, 2*, 364-384.
31. Morales-Moreno, Y., & Martí, E. (2004). Uso de notaciones y teoría de la mente en niños de 3 a 6 años [Use of notations and theory of mind in 3 to 6 year-old children]. *Infancia y Aprendizaje, 27*, 289-305.
32. Brizuela, B., & Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE, 21*, 37-43.
33. Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.
34. Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIII* (pp. 573-582). SEIEM
35. Kozulin, A. (1998). *Psychological tools*. Harvard University Press.

ESTUDIO 6

Pensamiento funcional de alumnos de 2º de primaria: estructuras y representaciones

En revisión

Pensamiento funcional de alumnos de 2º de primaria: estructuras y representaciones

María Dolores Torres[a], María C. Cañadas[a] y Antonio Moreno[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo es parte de una investigación más amplia que se desarrolla en el ámbito del pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria en España. Nos centramos aquí en identificar las estructuras (regularidades identificadas) y las representaciones que aparecen durante el proceso de generalización de unos estudiantes. Para ello, implementamos tareas de generalización que involucran funciones lineales en un experimento de enseñanza con tres estudiantes de 2º de educación primaria (7-8 años). Destacamos que el número de estructuras y la forma de generalizar la estructura dependen de las tareas planteadas en cada caso. Las generalizaciones de todos los estudiantes se han representado mediante representaciones verbales y/o numéricas.

Palabras clave: *estructura, generalización, pensamiento funcional, representaciones.*

INTRODUCCIÓN

Las directrices curriculares de algunos países Australia, Canadá, China, Japón, Corea, Singapur o Portugal contienen contenidos explícitos sobre le algebra en edades tempranas (Merino, Cañadas y Molina, 2013; Hauck y Alsina, 2021). En el caso de España (donde se desarrolla esta investigación), el currículo se hace menos explícito en cuando a elementos algebraicos y recomienda que los estudiantes de primaria sean capaces de "describir y analizar cambios en situaciones, identificar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19387). La novedad de estos contenidos en los diseños curriculares justifica la necesidad de que la investigación aporte sugerencias sobre cómo implementar esos contenidos (Ayala-Altamirano y Molina, 2020).

Esta investigación se centra en el pensamiento funcional como una puerta de entrada al pensamiento algebraico (Carraher y Schliemann, 2007). Éste se centra en las relaciones existentes entre cantidades que covarían conjuntamente (Blanton y Kaput, 2004). Los antecedentes han demostrado que brindar a los estudiantes la oportunidad de trabajar con tareas de generalización que involucran funciones conduce a una comprensión de la variabilidad conjunta (Brizuela, Blanton, Gardiner, Newman-Owens y Sawrey, 2015; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016). El desarrollo del pensamiento funcional fomenta la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011) y ayuda a superar las dificultades existentes en la comprensión del concepto de función en educación secundaria (Doorman y Drijvers, 2011). Dos nociones fundamentales con las que abordar el pensamiento funcional, y que tratamos en este estudio son, la generalización y la representación de la generalidad. La capacidad de los estudiantes de educación primaria para generalizar, identificar estructuras y representar las generalizaciones son de interés en el contexto funcional (Carraher y Schliemann, 2016; Pinto y Cañadas, 2017; Torres, Moreno y Cañadas, 2021).

Consideramos que generalizar es pasar de lo particular a lo general y en ver lo general en lo particular (Mason, 1996). Las tareas de generalización requieren precisamente de la identificación de una regularidad o estructura a partir de unos casos particulares dados (Pólya, 1966). Las nociones de generalización y de estructura están relacionadas ya que para generalizar se puede identificar la estructura a partir de casos particulares. Trabajar la generalización en los cursos más elementales permite, por ejemplo, que los estudiantes se alejen de las particularidades que trae consigo el cálculo aritmético, identificando la estructura y las relaciones matemáticas involucradas (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). En este estudio nos preguntamos por cuál o cuáles son las estructuras que evidencian los estudiantes sobre las relaciones funcionales implicadas en diferentes tareas. Atendemos a las estructuras evidenciadas durante el trabajo con unos casos particulares y también a las estructuras que generalizan.

La actividad matemática se realiza necesariamente en un "contexto de representación" (Duval, 2006). Los estudiantes pueden representar de diversas formas las estructuras que evidencian durante una tarea de generalización. El simbolismo algebraico no es la única forma en que los estudiantes representan el pensamiento funcional, que también puede adoptar la forma de lenguaje natural o incluso gestos (Radford, 2018). En este sentido nos preguntamos también por el tipo de representación o representaciones que usan los estudiantes de educación primaria para expresar la generalización.

GENERALIZACIÓN Y ESTRUCTURA EN UN ENFOQUE FUNCIONAL DEL EARLY ALGEBRA

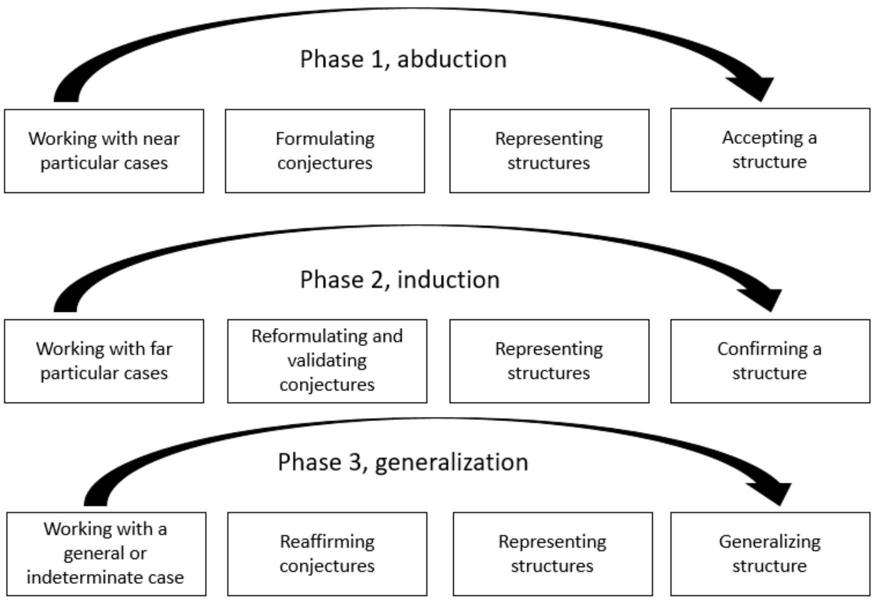
El pensamiento funcional se basa en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016). Promover el pensamiento funcional de los estudiantes más pequeños puede ayudar a desarrollar habilidades para analizar relaciones entre cantidades y deducir la regla general de una regularidad en una situación dada (Kaput, 2008).

En este contexto la identificación de estructuras es una acción previa a la generalización. La estructura hace referencia a la regularidad presente entre las variables de las funciones involucradas (Torres, Cañadas y Moreno, 2021). La noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que se expresa la generalización (Pinto y Cañadas, 2017). Esta noción permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, generalizan dicha regularidad (Strother, 2011; Torres, Moreno y Cañadas, 2021; Warren, Miller y Cooper, 2013). En este contexto, generalizar consiste en establecer la estructura general existente entre cantidades que covarían.

Entre los investigadores que exploran la identificación de estructuras y la generalización en estudiantes de educación primaria en contextos funcionales están Pinto y Cañadas (2017). Ellos abordaron la noción de estructura con estudiantes de tercero de primaria (8-9 años). Emplearon 17 estructuras diferentes para una misma regularidad entre las variables, $y=2x+6$. Siete de ellas adecuadas a la tarea ($y=2(x + 2) + 2$, $y= 2x + 3 + 3$, $y=$ x + x + 6, $y= 2x+6$, $y= 3(x + 2) – x$, $y= (x + 3)·2$, $y= (x + 2) + (x + 2) + 2$), mientras que las 11 restantes no lo fueron.

Torres, Cañadas y Moreno (2018) en un estudio con seis estudiantes de segundo de educación primaria, de 7-8 años, con una tarea que involucra la función $y =x+3$, identificaron cuatro tipos de estructuras diferentes (($y=x+3$, $y=x+x$, $y=x+2$, $y=x+1$)[10]), durante el trabajo los casos particulares dados. La mayoría generalizó verbalmente la estructura correcta, $y=x+3$, al preguntar sobre la generalización e identificaron la misma estructura para casos particulares y para el caso general, observándose coherencia en sus respuestas. Ambos trabajos representan las estructuras de manera simbólica como una interpretación de lo que los estudiantes transmitieron de manera verbal y/o escrita.

Para promover la generalización seguimos el modelo de Torres, Moreno y Cañadas (2021) en las preguntas planteadas en las diferentes tareas, que proponen partir de situaciones que involucran diferentes casos particulares y, observando regularidades (estructuras), llegar a la generalización. Este modelo comprende tres fases: (a) abducción; (b) inducción; y (c) generalización. En cada fase se consideraron los casos específicos utilizados, las conjeturas planteadas, las estructuras y su representación, y la aceptación de una estructura previamente definida que definió el límite entre fases. Las presentamos en la Figura 1.



[10] Hemos traducido a lenguaje algebraico lo que el estudiante representa verbalmente.

Figura 1. Modelo de generalización (Torres, Moreno y Cañadas, 2021, p. 15).

La fase de abducción sucede en los primeros casos particulares (casos particulares cercanos). En esta fase se detectan las primeras estructuras. En la fase de abducción es donde se generan hipótesis que no se confirman hasta que no contamos con otros casos particulares, los lejanos (fase inductiva), momento en el que los estudiantes han necesitado identificar una relación entre las variables para poder continuar con el proceso ya que en estas edades quedan desprovistos de herramientas como visualizar claramente la cantidad, contar o dibujar al trabajar con cantidades cada vez más grandes. Es aquí donde observamos la posible confirmación de conjeturas; fase de inducción. Una conjetura se ha confirmado cuando un estudiante evidencia la misma estructura en más de dos ocasiones durante el trabajo con casos particulares lejanos. De esta manera el estudiante hace notar que ha adquirido una consciencia de la regularidad implicada, de la estructura implícita. Finalmente, si se consigue reafirmar la conjetura confirmada mediante los casos indeterminados o el general se obtiene la generalización.

Hemos llamado caso particular cercano cuando se solicita un término siguiente o alguno que puede obtenerse por un conteo, mientras que hemos llamado caso particular lejano a aquellos donde es necesario conocer o identificar el patrón o la función para dar respuesta. Los casos particulares lejanos son aquellos en los que los números representan cantidades que no pueden dibujarse o que dificultan el conteo debido al nivel educativo de los estudiantes. Además de esos casos particulares, al estudiante se le presentan casos indeterminados donde la respuesta está condicionada al reconocimiento de la función. Los valores que facilitamos no son consecutivos para que los estudiantes no se ciñan a una relación de recurrencia que impida la evidencia de la relación funcional.

REPRESENTACIONES

En la tradición investigadora de la Educación Matemática las representaciones tienen gran relevancia por su rol en la construcción del conocimiento matemático (Cai, 2005; Kaput, 1991. El aprendizaje de representaciones matemáticas proporciona a los estudiantes herramientas que aumentan su capacidad de pensar además de ayudar a comunicar ideas matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007).

Tratar la generalización en educación primaria supone aceptar que los estudiantes pueden representar las relaciones identificadas no solo mediante simbolismo algebraico, sino que también lo pueden hacer mediante el lenguaje natural o los gestos (e.g., Radford, 2002). Si bien las letras son esenciales en álgebra, se acepta que los modos de pensamiento y actividad algebraica se pueden expresar de otras maneras. Los tipos de representaciones que pueden utilizar los alumnos de primaria para resolver problemas con funciones lineales incluyen: (a) lenguaje natural - oral; (b) lenguaje natural - escrito; (c) pictórico; (d) numérico; (e) notación algebraica, (f) tabular; y (g) gráfico (Carraher et al., 2008). También podemos encontrar combinaciones de diferentes representaciones (Carraher et al. 2008). Asumimos que la representación verbal es aquella que se hace mediante el lenguaje natural, ya sea oral o escrito (Cañadas, Castro y Castro, 2008). Radford (2003), destaca que la representación verbal en las descripciones de los estudiantes ante casos particulares o el general, funciona como una herramienta útil para promover el uso de otros tipos de representaciones.

Las representaciones pictóricas utilizan únicamente recursos visuales, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011). Según los antecedentes, la representación pictórica y la verbal suelen ser las predominantes en el trabajo con estudiantes de los primeros niveles educativos (Cañadas y Fuentes, 2015). También es usual encontrar la utilización del lenguaje natural y la representación numérica para expresar las regularidades entre variables (Pinto, Moreno y Cañadas, 2021).

Las representaciones numéricas se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático. Las representaciones simbólicas se caracterizan por el uso del simbolismo algebraico, siendo las representaciones que suponen un mayor grado de abstracción para los estudiantes. Así mismo, tenemos en cuenta las representaciones múltiples, que resultan de la combinación de dos o más representaciones diferentes (Kolloffel, Eysink, De Jong y Wilhelm, 2009).

Ureña, Ramírez y Molina (2019) estudiaron las representaciones de las generalizaciones de 25 estudiantes de cuarto de primaria (de 9 a 10 años) en torno a una tarea basada en la función $y = x+2$. Los autores identificaron cuatro formas de representación de la generalización de una relación funcional. Todos los estudiantes usaron la representación numérica, seis estudiantes usaron la representación genérica, siete la representación verbal y tres la simbólica.

En el estudio de Merino, Cañadas y Molina (2013), con 20 estudiantes de 10 a 11 años, las representaciones verbales, pictóricas, numéricas y simbólicas son las que tuvieron mayor relevancia. El tipo de representación más usada por los estudiantes fue la verbal, si bien en la mayoría de los casos estas representaciones aparecen como representaciones múltiples, acompañadas de otras numéricas o pictóricas.

Con este estudio pretendemos contribuir a la investigación sobre el pensamiento funcional de estudiantes de 2º de educación primaria abordando la generalización. Los objetivos de investigación de este trabajo son: (a) identificar las estructuras que evidencian los estudiantes durante las tareas de generalización, (b) describir las representaciones que usan los estudiantes.

MÉTODO

Este estudio es de tipo cualitativo, con carácter exploratorio y descriptivo. Aplicamos cuatro sesiones de clase a un grupo de 24 estudiantes. Llevamos a cabo tres estudios de caso.

Los sujetos del estudio han sido tres estudiantes de 2º curso de Educación Primaria (7-8 años), de un colegio de Granada (España). Fueron seleccionados por ser los que asistieron a todas las sesiones de clase, la maestra del grupo propuso a estos tres estudiantes por su buena disposición a colaborar y sus diferentes logros de aprendizaje. Los estudiantes habían trabajado previamente con los números del 0 hasta el 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con y sin llevadas. No habían trabajado con problemas que involucraran funciones lineales, la generalización y tampoco habían hecho uso de diferentes representaciones para manifestar relaciones entre variables. En adelante nombraremos a los estudiantes como E1, E2 y E3, para respetar su anonimato.

Recogida de información

Para cada una de las cuatro sesiones diseñamos una tarea con base en un problema de generalización que involucraba una función lineal. Los contextos de las tareas utilizadas han sido validados previamente al ser tratadas previamente en nuestros antecedentes. Cada sesión estaba compuesta de diferentes partes. En la primera introdujimos el contexto de la tarea y planteamos algunas preguntas relativas a casos particulares (entre 4 y 6 cuestiones) hasta ver que los estudiantes entendían la situación y las preguntas. En la segunda, aplicamos un cuestionario, de manera individual y en papel, con preguntas sobre casos particulares (5 cuestiones) y, siguiendo el modelo de Torres, Moreno y Cañadas (2021), incluimos preguntas sobre otros casos particulares hasta llegar a la generalización. La tercera parte constituía el cierre de las sesiones. Los estudiantes podían presentar sus respuestas y explicarlas al gran grupo.

En las preguntas realizadas sobre los casos particulares hemos evitado números consecutivos para evitar la recursividad como único modo de generalización. Los casos particulares planteados son de dos tipos; casos dados mediante cantidades concretas y casos dados mediante uso de términos “un millón” o “muchos”.

Tres miembros del equipo de investigación estuvieron a cargo de la implementación de las sesiones: un investigador-docente era que guiaba la sesión, otro investigador ayudaba a éste en la gestión del aula atendiendo las dudas que pudieran surgir durante la cumplimentación de los cuestionarios y otro investigador llevaba la parte técnica sobre la videograbación de las sesiones. La maestra de los estudiantes estuvo presente pero no intervino. Los estudiantes no recibieron *feedback* para no interferir con nuestros objetivos de investigación y con el carácter exploratorio del trabajo. La información que analizamos aquí proviene de los cuestionarios cumplimentados por los estudiantes.

Sesiones de clase

En la Tabla 1 presentamos los contextos de las tareas planteadas en las diferentes sesiones y las funciones involucradas.

Tabla 1. Sesiones de clase

Sesiones	Contexto de la tarea	Función
Parque de atracciones 1	Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 3 euros y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 1 euro.	y=x+3
Parque de atracciones 2	A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje en una atracción vale 2 euros.	y =1+2x
Cumpleaños	Lucía cumple años y sus padres quieren invitar a sus amigos a la fiesta. Hay para comer bocadillos y tartas, así que cada persona tendrá dos platos.	y =2x
Paradas de tren	Un tren va recogiendo a los amigos de Elsa para que vayan a su cumpleaños. En cada parada de tren se montan siempre el mismo número de personas. Queremos saber cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas. ¿Cómo puedes saber cuántas personas lleva el tren si en cada parada suben 2 personas?	y= 2x

El contexto de las dos primeras sesiones fue el mismo porque resultó motivador para los estudiantes. En las sesiones 3 y 4 la función fue la misma y el contexto diferente ya que el contexto del cumpleaños no generó el interés esperado en los estudiantes. Dependiendo de la dificultad en las respuestas de los estudiantes involucramos funciones aditivas y/o multiplicativas.

A continuación, presentamos las sesiones de clase que tuvieron lugar. Todas siguen una estructura basadas en un proceso hacia la generalización (Torres, Moreno y Cañadas, 2021).

Los propósitos de las sesiones fueron, acordes con los objetivos de investigación: (a) explorar cómo los estudiantes relacionan las variables involucradas; b) identificar y describir estructuras evidenciadas por los estudiantes; (c) explorar la generalización de los estudiantes mediante el uso de diferentes representaciones.

Sesión 1. Parque de atracciones 1

Algunos de los casos particulares y el caso general empleados en el cuestionario fueron planteados como indica la Tabla 2.

Tabla 2. Sesión 1. Preguntas sobre casos particulares y caso general

Casos particulares cercanos y lejanos	Caso general
¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 14 viajes? ¿Cómo lo sabes?	Un niño de la clase ha dicho que se hizo socio y las veces que viaja en las atracciones. Explícale cómo puede calcular cuánto se ha gastado.
¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 100 viajes? ¿Cómo lo sabes? ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar un millón de viajes? ¿Cómo lo sabes?	

Sesión 2. Parque de atracciones 2

En esta ocasión preguntamos a los estudiantes por la generalización de dos formas diferentes que hemos distinguido como; caso general 1 y caso general 2. El caso general 2 es diferente a los tratados anteriormente, ya que planteamos la pregunta general representando una cantidad indeterminada mediante un dibujo, una mancha, como puede apreciarse en la tercera columna de la Tabla 3. Tanto los casos particulares como los generales fueron planteados como indica la misma tabla.

Tabla 3. Sesión 2. Casos particulares y generales

Casos particulares cercanos y lejanos	Caso general 1	Caso general 2
¿Cuánto pagas por el carnet y 1 viaje? Explícame cómo lo haces. ¿Cuánto pagas por el carnet y un millón	Isabel paga por el carnet y muchos viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.	Isabel paga por el carnet y  *viajes.* Explica cómo sabe cuánto paga.

viajes? Explícame cómo lo haces	

Sesión 3. Cumpleaños

Los casos particulares en esta sesión son análogos a los de la sesión 1. Hubo una única pregunta relativa al caso general. Algunos de los casos particulares y el caso general aplicados en el cuestionario fueron planteados como indica la Tabla 4.

Tabla 4. Sesión 3. Casos particulares y caso general

Casos particulares cercanos y lejanos	Caso general
Si hay 2 personas en el cumpleaños ¿Cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame como lo haces.	Los padres de Lucía han recibido una carta de su amigo extraterrestre Marsian. Les ha dicho (en su idioma) que van a ir Ω extraterrestres a la fiesta. ¿Puedes escribirle a Marsian los platos que se necesitan?
Si vamos las 20 personas de la clase ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame como lo haces.	

Sesión 4. Paradas de tren.

En esta sesión la forma de presentar los casos particulares fue diferente. Planteamos ahora una forma tabular de representación con la finalidad de profundizar en la manera en que identifican las estructuras. En la Figura 1 aparece la secuencia de casos particulares en la manera en la que se lo presentamos a los estudiantes en este cuestionario.

Casos particulares cercanos y lejanos	
1	
3	
13	
Proponen números	

Probar con números cada vez más grandes (dependerá de los que hayan propuesto)	
1 millón	
Muchas paradas	
Infinitas paradas	

Figura 2. Casos particulares, sesión 4.

En esta sesión organizamos y relacionamos las variables involucradas en el problema mediante una tabla. Los encabezados están en blanco ya que pretendíamos explorar el significado que le atribuyen los alumnos a una tabla de dos columnas (si saben usarla, si relacionan valores por filas o por columnas, cómo nombran a las variables involucradas…). En definitiva, explorar la forma en la que identifican la relación entre cantidades variables. Esta actividad sugería además escribir los encabezados para las variables dependientes o independientes. Nosotros dábamos cantidades iniciales y también les pedíamos que dieran algunos números cada vez más grandes para ver si estaban identificando la relación entre variables. Incluimos las expresiones de “muchas paradas” e “infinitas paradas” como cantidades indeterminadas. La pregunta para el caso general viene dada por: ¿Cómo le explicarías a un amigo cuantas personas llevará el tren cuando pasa por muchas paradas?

Análisis de datos

Tras analizar las respuestas escritas al cuestionario, realizamos un análisis de datos cualitativo. En este análisis hemos atendido únicamente a la información que provenía de los cuestionarios ya que la de las sesiones videograbadas fue muy escueta al no haber participación de los estudiantes. Diseñamos las categorías de análisis relativas a estructuras durante el proceso de generalización (casos particulares y caso general) y representaciones, atendiendo a los objetivos de investigación. Consideramos que un estudiante identifica una estructura cuando responde a dos o más cuestiones siguiendo la misma regularidad o cuando generaliza. Consideramos que, en estos casos, las respuestas de los estudiantes no son producto de un mero cálculo, sino que responden a un patrón de respuesta, la creación de conciencia de lo que se repite, para varias cuestiones o la generalizan. Describimos las diferentes representaciones utilizadas en cada sesión atendiendo a la clasificación presentada en el marco teórico.

En los resultados presentaremos las categorías, a la vez que presentamos ejemplos del trabajo de los estudiantes que las evidencian.

RESULTADOS

Presentamos los resultados sobre estructuras tanto para los casos particulares como para el caso general en cada una de las tareas propuestas. Describiremos también las representaciones utilizadas en las respuestas de los estudiantes.

Estructuras y representaciones

Presentamos el resumen de resultados sobre estructuras en la Tabla 5 en las cuatro sesiones. Expresamos las estructuras que hemos interpretado con notación algebraica, aunque no es la representación empleada por los estudiantes como se observará en los ejemplos posteriores. Cada estudiante puede evidenciar diferentes estructuras; recogemos las estructuras de cada estudiante en el orden cronológico en el que las observamos.

Tabla 5. Resumen de estructuras evidenciadas

Sesión	Función	Estudiante	En trabajo con casos particulares	En trabajo con caso general 1	En trabajo con caso general 2
Parque de atracciones 1	y = x+3	E1	y = x + 3	NR[i]	
		E2	y = x + 3	y = x + 3	
		E3	y = x + 3	NE[ii]	
Parque de atracciones 2	y = 1+2x	E1	y = 1 + 2x	NE	NE
		E2	y = 1+ x	y = 1+ x	y = 1+ x
		E3	y = 1+ x	NE	NE
Cumpleaños	y = 2x	E1	y = x+x	y = x	
		E2	y = 2x	NE	
		E3	y = 2x	NR	
Paradas de tren	y = 2x	E1	y = 2x	NE	
		E2	y = 2x	NE	
		E3	y = 2x	NE	

[i] NR= No responde

[ii] NE= No evidencia estructura

En general, todos los estudiantes identificaron alguna estructura en el trabajo con casos particulares; no ocurre lo mismo en el caso general. En la sesión 1 (parque de atracciones 1), los tres estudiantes evidenciaron la estructura y = x+3 en respuestas a preguntas sobre casos particulares. E1 expresó que son 103 lo que tiene que pagar por hacerse socio del parque y comprar 100 viajes: “junto 100 y 3 más”. E3 escribió que “suma 3 y 100” para obtener la respuesta. Mostramos un ejemplo de la respuesta de E2 en una cuestión sobre casos particulares en la Figura 3.

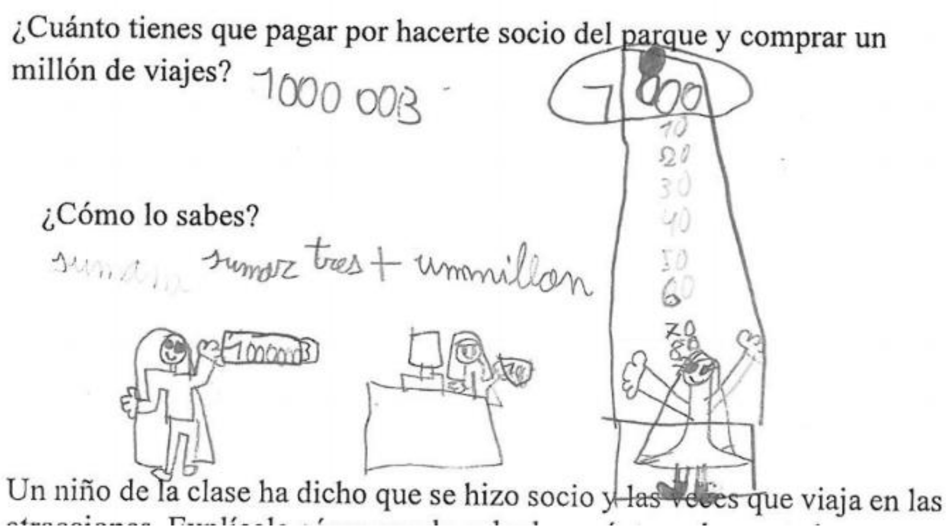


Figura 3. Respuesta de E2 a la pregunta sobre un caso particular (1 millón)

E2 es el único estudiante que generalizó en esta sesión expresando: “porque siempre tengo que sumar 3 + un número”. E1 no respondió a esta cuestión y E3 lo hizo sin dar evidencia de haber identificado estructura. La respuesta de E3 al caso general fue: “dándole el precio”.

En cuanto a las representaciones usadas por estos tres estudiantes podemos identificar dos tipos: verbal y numérica. Ambas pueden observarse en el ejemplo de la figura 2. La representación verbal vino dada por el lenguaje natural escrito: “sumar tres + un millón”. Dentro de esta representación encontramos el del signo más (+), representando adicción de cantidades. Podemos apreciar que en este caso los dibujos que realiza no contienen el significado de lo que sería una representación pictórica.

En la sesión 2 solo E1 evidenció la estructura correcta del problema en los casos particulares. Al preguntarle cuánto paga por el carnet y 20 viajes, E1 escribe: “sumo 20+1 y me salen 21”. Cuando le preguntamos cuánto paga por el carnet más un millón de viajes, E1 contestó: “Sumo 1000000+1 y me salen 2000001”. E2 y E3 contestaron a las preguntas sobre los casos particulares evidenciando la misma estructura $y = 1+x$, incorrecta en este contexto. E2 contestó al caso particular sobre los 20 viajes y de la siguiente forma: “21, porque hay que sumar 1 y 20”. E3 igualmente contestó: “21, sumando 20 y 1”. En cuanto a los casos generales, E2 generalizó mediante la estructura 1+x. En el caso general 1 expresa: “61 porque muchos pueden ser 60 más 1 son 61”. En el caso general 2, E2 expresó: “6 porque puede que haya cinco y 1+5 son 6”. Hizo referencia a la cantidad indeterminada representada por una mancha mediante un valor concreto. En la Figura 4 puede verse este ejemplo.

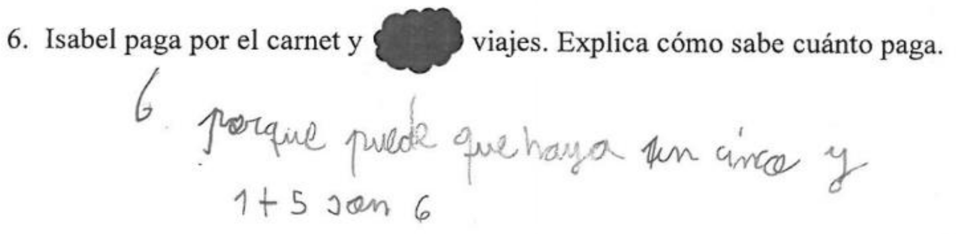
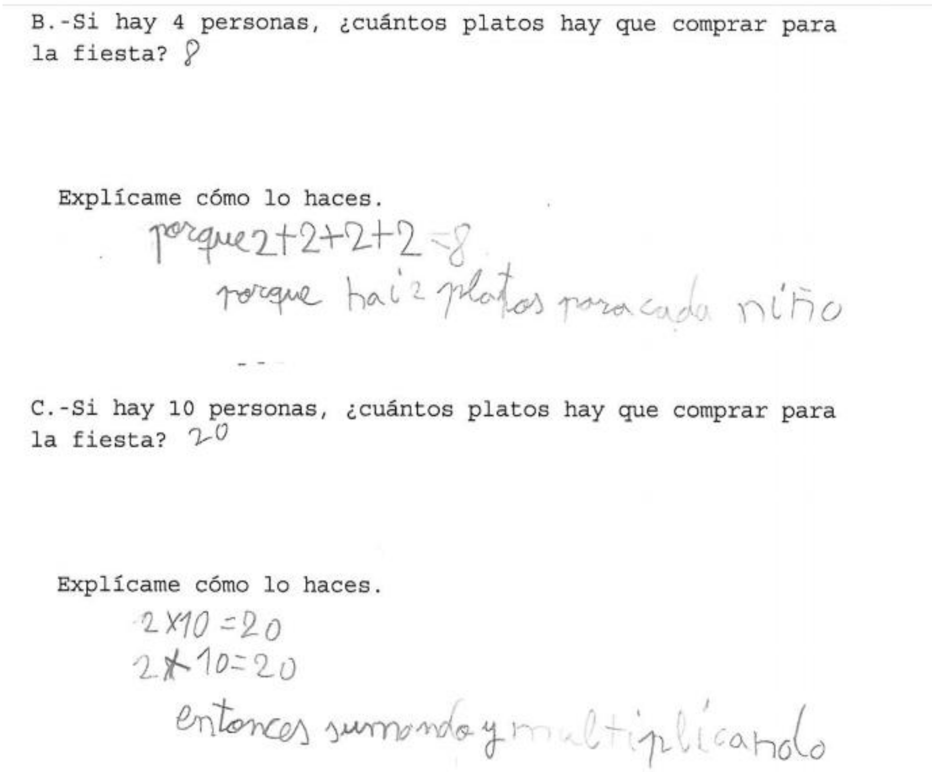


Figura 4. Respuesta de E2 a la pregunta sobre el caso general 2.

E1 y E3 no evidenciaron la estructura al preguntarles por el caso general. Por ejemplo, E1 al preguntarle por el caso general 1 y 2 escribió 201.

En este caso, los tres estudiantes utilizaron las representaciones numéricas y la verbal de manera conjunta, en de la misma forma que puede verse en la figura 3.

En la sesión 3, E2 y E3 evidenciaron la misma estructura cuando trabajan con casos particulares; y = 2x. E1 evidencia la estructura aditiva y = x+x. E2 es un caso destacable en esta sesión ya que a partir de los casos particulares cambia la estructura y = 2x. Podemos apreciarlo en la Figura 5.



B.-Si hay 4 personas, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? 8

Explícame cómo lo haces.

porque 2+2+2+2 =8

porque hai 2 platos para cada niño

C.-Si hay 10 personas, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? 20

Explícame cómo lo haces.

2x10 =20

2x10=20

entonces sumando y multiplicando

Figura 5. Respuesta de E2 a los casos particulares

En el caso general, E1 evidenció estructura y=x, escribe que necesitarán Ω platos. Expresa “Ω significa que van a venir Ω extraterrestres”. E2 no evidencia la estructura en el caso general ya que expresa: “sumas 4 veces el 2 y te sale 8”. E3 no responde a esta pregunta. Las representaciones usadas por los alumnos en esta sesión han sido de tipo verbal y numérica.

En la sesión 4, los estudiantes evidenciaron la misma estructura cuando trabajan con casos particulares; y = 2x. Ejemplo de ello lo vemos con el estudiante E3 en la Figura 6.

Numero de paradas	Numero de personas
1	2
3	6
6	12
5	10
10	20
25	50
15	30
45	90
90	180
1,000	12.000
muchas paradas	

Figura 6. Casos particulares por el estudiante E3.

De esta manera interpretamos que la estructura evidenciada por los estudiantes ha sido y = 2x. En el caso general, no observamos que los alumnos hayan identificado algún tipo de estructura al preguntarle por cuántas personas llevará el tren tras muchas paradas.

En cuanto a las representaciones tenemos que las usadas han sido en este caso y de nuevo las representaciones numérica y verbal. Por otro lado, a través de la representación tabular que utilizamos en la tarea, interpretamos que, aunque E1, E2 y E3 no sugieren títulos para los encabezados, reconocen lo que significa cada número de la tabla.

A modo de resumen podemos decir, que el análisis de los datos de las cuatro sesiones arroja que en la sesión 1 y 4, todos los estudiantes identificaron correctamente la estructura empleada en cada uno de los contextos, en preguntas sobre casos particulares. Las relaciones implicadas en estos contextos han sido; y = x+3, y = 2x. En las sesiones 2 y 3 los estudiantes E2 y E3 han identificado correctamente la estructura de la función. Solo el estudiante E1 ha identificado la estructura correcta en la sesión 2 donde involucramos la función y = 1+2x. En los casos generales la situación es diferente. Tan solo generaliza la relación funcional correctamente el estudiante E2 en la sesión 1. En las demás sesiones los estudiantes de este estudio, en su mayoría, no generalizan ninguna estructura que podamos interpretar salvo en las sesiones 2 y 3 donde E2 y E1 evidencian una estructura que no se corresponde con la relación funcional implicada. En otras sesiones no contestan a la pregunta planteada en el caso general.

CONCLUSIONES

Hemos observado evidencias de pensamiento funcional en estos estudiantes de segundo curso de Educación Primaria cuando atendemos a la forma de expresar las regularidades que encuentran (estructuras) en las situaciones vistas y a la forma de representar las generalizaciones que evidencian.

La cantidad de estructuras correctas identificadas por los estudiantes en este estudio (sobre todo en los casos generales) ha sido menor que las encontradas en el estudio previo de Torres, Cañadas y Moreno (2018). En esta ocasión el análisis de los datos ha provenido únicamente de las respuestas escritas de los estudiantes a los cuestionarios aplicados en cada una de las sesiones. Lo que quiere decir que no ha habido oportunidad de profundizar más en las respuestas de los estudiantes.

Encontramos unos resultados que difieren de los del trabajo de Pinto y Cañadas (2017) cuando atendemos a la variedad de estructuras evidenciadas. Nosotros encontramos mayor coherencia en las respuestas dadas debido a que se dan pocas estructuras diferentes para una misma regularidad. La dificultad para tratar con unas funciones y otras parece evidente. La función aditiva $y = x+3$ no presenta problema en su identificación en los casos particulares. Tampoco presenta mayor problemática la función $y = 2x$, función multiplicativa. Sin embargo, la función $y = 1 + 2x$, aditiva y multiplicativa ha presentado una mayor dificultad en su identificación en los casos particulares dados. Encontramos que los estudiantes han tendido a evidenciar la estructura $y = 1+ x$ en la mayor parte de los casos estudiados en la sesión 2 (parque de atracciones 2).

En cuanto a las sesiones que comparten la misma función (sesión 3 y 4) encontramos que los estudiantes son más reacios a generalizar la estructura en la última sesión, la correspondiente a las paradas de tren. En la sesión del cumpleaños es un estudiante el que expresa la generalización mediante una estructura que no es la correcta.

La comparación entre los resultados obtenidos entre las sesiones 1 y 2 durante los casos particulares y el caso general advierten de que la estructura aditiva con la multiplicativa de una misma función dificulta la tarea de generalización en estos estudiantes de segundo de primaria. Igualmente observamos que los contextos involucrados en las sesiones 3 y 4 que han sostenido la misma función nos han permitido apreciar, quizás, una influencia en los resultados obtenidos.

Tanto en la sesión 3 como en la sesión 4 ningún estudiante consigue generalizar. En la sesión 2 hubo dos formas de preguntar sobre la generalización para acercarse a ella. Ambas han obtenido los mismos resultados por parte de los estudiantes; usan un valor concreto sin una lógica determinada para referirse a las cantidades indeterminadas representadas por nosotros mediante “muchos viajes” o “mediante un dibujo que representaba la cantidad de viajes. Sin embargo, en la sesión 3 sobre el cumpleaños ha sido un estudiante el que ha empleado el símbolo **Ω** en su respuesta sin recurrir a un valor concreto. Este uso puede darse por repetición, el estudiante lo ha visto escrito en el enunciado de la tarea.

En cuanto a las representaciones empleadas por los estudiantes en las cuatro sesiones han sido en todos los casos representaciones verbales y/o numéricas como apuntaban los trabajos de nuestros antecedentes, (e.g., Cañadas y Fuentes, 2015; Merino, Cañadas y Molina, 2013; Ureña, Ramírez y Molina, 2019), en estas edades tempranas. El sistema de representación verbal apareció usualmente vinculado con la representación numérica. En la última sesión presentamos la representación tabular observando que los alumnos han sido capaces de relacionar la variable dependiente e independiente mediante ese medio.

Coincidimos en que una introducción temprana a una perspectiva funcional puede fomentar una visión profunda del concepto de función (Martínez y Brizuela, 2006). Dadas las representaciones habituales dadas por los estudiantes en este estudio y las diferentes estructuras identificadas en una tarea de generalización, ponemos de manifiesto que los estudiantes de estas edades tienen la capacidad y herramientas necesarias para trabajar este tipo de tareas en el aula de primaria.

Una apuesta interesante es la de seguir trabajando en cómo los diferentes contextos y las distintas funciones implicadas afectan en la manera en la que los estudiantes se acercan a la generalización. Esta información nos ayudará a caracterizar el pensamiento funcional en los estudiantes en estas edades y nos brindará las herramientas con las que diseñar una instrucción eficaz en el sentido funcional de esta investigación.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Ayala-ALtamirano, C. y Molina, M. (2020). *International Journal of Science and Mathematics Education* 18:1271–1291 https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Cai, J. (2005). US and Chinese teachers' constructing, knowing and evaluating representations to teach mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(2), 135-169.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, *34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes delpensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2016). *Powerful ideas in elementary school mathematics*. En L. English y D. Kirshner (Eds.), Handbook of international research in Mathematics Education. Third edition (pp. 191-218). Nueva York, NY: Routledge.

Carraher, D., Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, *40*(1), 3-22.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). *Algebra in functions*. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, (61), 103-131.

Pincheira Hauck, N. G. y Alsina, À. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, *33*(1). 153-180.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. V. Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht, The Netherlands: Springer

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Routledge.

Kolloffel, B., Eysink, T. H. S., De Jong, T. y Wilhelm, P. (2009). The effects of representational format on learning combinatory from an interactive computer simulation. *Instructional Science, 37*(6), 503-517.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Merino, E., Cañadas, M.C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En Berciano, Ainhoa; Gutiérrez, Ángel; Estepa, Antonio; Climent, Nuria (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao, España: SEIEM.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria [Royal Decree 126/2014 of February 28, which establishes the basic curriculum of Primary Education]. *BOE, 52*, 19349–19420.

NCTM. (2007). Principios e normas para a matemática escolar. Lisboa, Portugal: A.P.M e I.I.E.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, España: SEIEM.

Pinto, E., Cañadas, M.C. y Moreno, A. (2021). Functional Relationships Evidenced and Representations Used by Third Graders Within a Functional Approach to Early Algebra. *Int J of Sci and Math Educ* (https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, España: Tecnos.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.),
Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice (pp. 3-25). New York, NY: Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-68351-5_1

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). Gijón: SEIEM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Estructuras enlas formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8años. *Uniciencia, 35(*2), 1-16. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.16.
Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75-84.

Torres, M. C., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics, 9*, 1109. https://doi.org/10.3390/math9101109.

Capítulo 5. Conclusiones

En este capítulo exponemos las conclusiones generales de esta investigación. Conectamos las conclusiones obtenidas en los diferentes estudios expuestos en el capítulo anterior. En primer lugar, establecemos las conclusiones asociadas a los objetivos generales y específicos de esta memoria, y describimos la manera en que la tesis contribuye a los proyectos de investigación de los que forma parte. En segundo lugar, describimos las principales contribuciones de esta investigación, para luego describir las implicaciones para la docencia que surgen de nuestros resultados. Finalmente, presentamos las limitaciones y perspectivas futuras que surgen del proceso de esta Tesis Doctoral.

5.1. Research objectives

El objetivo general de esta tesis doctoral ha sido profundizar en la descripción del pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes de segundo de educación primaria. Esta descripción se articula a través de la generalización, la representación y la estructura. Los hemos abordado como descriptores del pensamiento funcional en un grupo de estudiantes españoles de segundo curso de educación primaria (7-8 años). Hemos asumido la perspectiva funcional del pensamiento algebraico, donde las funciones son el contenido matemático esencial.

Considerando los objetivos específicos que contribuyen a la descripción del pensamiento funcional, en la tabla 6-1 describimos la conexión de estos con los estudios que forman parte de los resultados de esta tesis. En las secciones que siguen describimos las principales conclusiones asociadas a cada objetivo de esta investigación, así como la relación con los objetivos de los proyectos I+D en los que se desarrolla esta tesis.

Tabla 5-1.

Relación objetivos y estudios de la Tesis Doctoral

Objetivos específicos de la tesis	Estudios 1	2	3	4	5	6
O. E1. Describir el proceso de generalización evidenciado por los estudiantes.	x	x				
O. E2 Describir las estructuras que generalizan los estudiantes	x					x
O. E3. Caracterizar los tipos de generalización expresados por los estudiantes.	x	x				
O. E4. Identificar y describir las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directas e indirectas de una función.			x	x		
O. E5. Analizar las representaciones que usan los estudiantes para evidenciar las estructuras					x	x

5.1.1. Objetivo específico 1

O. E1. Describir el proceso de generalización evidenciado por los estudiantes.

Este objetivo lo hemos abordado en los estudios 1 y 2. Nuestras observaciones empíricas sobre el proceso de generalización han evidenciado que los estudiantes pueden poner en juego diferentes tipos de razonamiento vinculados a diferentes fases como son: la abducción, la inducción y la generalización. Aunque algunas de estas fases han sido descritas previamente por otros autores (e.g., Rivera, 2017; Rivera y Becker, 2003), aquí son distinguidas según los diferentes casos particulares planteados a los estudiantes (diferentes estímulos). Hemos destacado la relación entre las fases y cómo pueden relacionarse en el proceso de generalización.

La abducción, ha sido considerada una fase preliminar en el proceso, apareció al abordar los primeros casos particulares (casos particulares cercanos), cuando los alumnos formularon sus conjeturas iniciales y detectaron por primera vez la estructura. Durante la inducción, los estudiantes plantearon conjeturas que no confirmaron hasta que resolvieron otros casos particulares (casos particulares lejanos). En este momento la identificación de la estructura de la relación entre las variables por parte de los estudiantes fue clave para continuar el proceso. Hemos considerado que una conjetura se confirmaba cuando un alumno, trabajando con casos particulares lejanos, reconocía la misma estructura en más de dos ocasiones, lo que denotaba el conocimiento o consciencia de la estructura en cuestión. Consideramos que los alumnos generalizaban cuando la conjetura confirmada se reafirmaba para los casos indeterminados o generales.

Tomar la generalización como un proceso y un producto nos ayudó a entender cómo los estudiantes de este estudio generalizaban. Este concepto dual de la generalización a proporcionado un medio para seguir el razonamiento de los estudiantes y observar cómo expresan finalmente la generalización.

Durante el proceso de generalización han aparecido palabras clave como “siempre” y “así”, deícticos temporales que son característicos en el proceso de generalización para estudiantes de estas edades.

5.1.2. Objetivo específico 2

O. E2 Describir las estructuras que generalizan los estudiantes

Este objetivo ha sido abordado directamente en los estudios 1 y 6 pero la estructura ha sido una noción que ha permeado cada uno de los estudios desarrollados como ayuda en el análisis de las relaciones evidenciadas entre las variables por los estudiantes.

Hemos identificado una estrecha relación entre la estructura y el proceso de generalización. Hemos analizado las estructuras evidenciadas por los estudiantes, tanto en los casos particulares como en el caso general. Hemos visto cómo evolucionan desde las estructuras identificadas en los casos particulares hasta la que finalmente generalizan.

Observamos que, de manera general, los estudiantes evidenciaron la estructura correcta y la mantienen a lo largo del proceso de generalización. El hecho de que los estudiantes hayan logrado generalizar las estructuras en varias de las tareas propuestas es destacable dada la edad de los estudiantes de segundo de primaria de nuestra investigación.

Sin embargo, la coincidencia de las estructuras aditiva y multiplicativa en una misma función dificultó la tarea de generalización en los estudiantes de segundo de primaria participantes.

5.1.3. Objetivo específico 3

O. E3. Caracterizar los tipos de generalización expresados por los estudiantes.

Este objetivo lo hemos abordado específicamente en el estudio 1 y el estudio 2. Asumir la generalización como un proceso y como un producto nos permite, por un lado, comprender cómo los estudiantes generalizan pudiendo seguir su razonamiento, como hemos redactado anteriormente, pero también observar cómo expresan las generalizaciones en última instancia.

En cuanto a las generalizaciones que se han dado, todas de forma verbal, han quedado clasificadas en gran parte como generalizaciones algebraicas; factuales y/o contextuales, siguiendo la clasificación de Radford (2010).

El registro de una evidencia de generalización factual requiere de un análisis cuidadoso pues tiene que ver con la actividad perceptual de los niños ante la realización de la tarea. Por ello, cabe profundizar más en la interpretación que hacemos de esa generalización atendiendo con mayor detalle a lo que comunica el estudiante en la primera toma de contacto con la tarea.

Hemos evidenciado casos de generalización aritmética y también algebraica. Para la transición entre ambas, hemos atendido a la noción de estructura abordándola como el conjunto de términos que componen la expresión, los signos que los relacionan, al orden de los diferentes elementos y las relaciones que existen entre ellos (Molina, 2010). La estructura se ha referido a aquello que permanece constante a través de los casos particulares.

Las generalizaciones manifestadas han tenido en su mayoría un carácter algebraico debido a que los estudiantes usan una propiedad común para dar una expresión que, aunque de manera no simbólica, permite obtener el valor para cualquier término de la secuencia.

En nuestro análisis sobre los tipos de generalizaciones hemos encontrado una generalización incipiente y no algebraica ya que con la estructura identificada no se haya el valor de cualquier término de la secuencia. Este hallazgo es destacable pues identificamos una forma de generalizar en la que los alumnos no concretan la relación funcional pero sí expresan que el valor de la variable dependiente es mayor que la independiente, sin llegar a cuantificar esa diferencia. Hemos complementado así las categorías de Radford (2010) añadiendo a esa clasificación otra particular de nuestro estudio, distinguiendo el caso en el que el estudiante identifica que "salen más bolas que las entran en la máquina" donde la relación funcional no aparece explícitamente.

5.1.4. Objetivo específico 4

O. E4. Identificar y describir las estructuras que evidencian los estudiantes en las formas directa e inversa de una función.

Este objetivo específico se ha abordado en los estudios 3 y 4. La consideración de ambas formas de la función favorece la flexibilidad y reversibilidad en el pensamiento de los estudiantes. Los estudiantes, al trabajar con la forma inversa deben "revertir" el proceso que hacen después de trabajar con la forma directa, con las operaciones aritméticas implicadas, centrando la atención en las estructuras y relaciones matemáticas que subyacen.

Aunque estudios previos con estudiantes de tercero y quinto de primaria (e.g., Pinto, 2019; Pinto y Cañadas, 2017) concluyen con que la forma inversa arroja un número de estructuras erróneas mayor que la forma directa para las funciones: $y= 2x+6$, $y=3x$ *e* $y= 2x+18$. Encontramos aquí que las estructuras evidenciadas para la forma inversa han sido correctas en todos los casos para las funciones $y=x+4$ e $y = 2x$, con estudiantes de segundo de primaria. Dos de las funciones implicadas por nuestros antecedentes incluyen la estructura aditiva y multiplicativa. Anteriormente (objetivo 2), hemos evidenciado que la coincidencia de las estructuras aditiva y multiplicativa en una misma función dificultó la tarea de generalización en los estudiantes de segundo de primaria participantes. Quizás este resultado explica que los estudiantes de primaria con las funciones trabajadas hayan evidenciado más estructuras correctas que nuestros antecedentes.

Sin embargo, hemos observado que no todos los estudiantes respondieron a la forma inversa cuando se les preguntó. A los estudiantes que no respondieron se les preguntó por varios casos particulares. La exploración de las formas inversas de las diferentes funciones del estudio se dio al final de las entrevistas, algunos estudiantes se mostraban distraídos en esta parte final.

En estos estudios se ha considerado que la forma directa involucra una adición y la forma inversa implica una sustracción. Se hizo así porque consideramos que la primera iba a resultar más accesible para los estudiantes. Sin embargo, en el estudio 4 hemos observado que hay dos estudiantes que generalizan la estructura en la forma inversa y no en la forma directa tanto con la función $y=x+4$ cómo con $y = 2x$.

De manera global, hemos obtenido que la cantidad de estructuras correctas identificadas es mayor durante el trabajo de los casos particulares que en el general, en ambas formas de las funciones.

Hemos destacado una estructura inadecuada en el estudio con la función $y=x+4$, dada por $y=x+x$. También hemos encontrado esta estructura en los casos particulares del estudio 1 cuando la función implicada era $y= x+3$. La evidencia de esta estructura que verbalmente se corresponde con "sumar un número consigo mismo" puede deberse a que con algún caso particular el resultado coincidía con el doble del valor de la variable independiente o porque están familiarizados a trabajar con la suma de un número consigo mismo.

5.1.5. Objetivo específico 5

O. E5. Analizar las representaciones que usan los estudiantes para evidenciar las estructuras.

Este objetivo ha sido trabajado en los estudios 5 y 6. En cuanto a las representaciones empleadas por los estudiantes de esta tesis, encontramos representaciones verbales y/o numéricas en las producciones de los estudiantes de segundo de primaria. Cañadas y Fuentes (2015) en su trabajo con estudiantes de primero encontraron también que las representaciones verbales y/o numéricas fueron las más habituales. También lo han observado otros estudios con estudiantes de quinto y cuarto curso de primaria (e.g., Merino et al., 2013; Ureña et al., 2019), respectivamente. En el estudio 5, el sistema de representación verbal apareció usualmente vinculado con la representación numérica manifestándose ambas de forma conjunta para obtener significado.

En cuanto a la representación tabular abordada específicamente en el estudio 5 podemos decir que interpretar una tabla implica comprender los procesos de clasificación de la información y de identificación de las variables (dispuestas en filas y columnas), estos procesos siguen ciertas convenciones que no son necesariamente triviales. Hemos observado que a los alumnos segundo de primaria de este estudio les resultó más difícil trabajar con una tabla que carecía de títulos etiquetados. Les resultaba más fácil identificar la estructura general cuando los títulos de las columnas estaban etiquetados. Destacamos la dificultad de trabajar con tablas sin etiquetas. En este caso, escribir los encabezados de las etiquetas de una tabla indica que se entiende la relación entre las variables implicadas. Así que, a priori, esto parece ser más complicado para los niños de esta edad. Este hallazgo puede deberse a lo poco habituados que están al registro tabular ya que la primera aproximación a las tablas la tuvieron con nuestro trabajo. En los estudios que nos anteceden (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Brizuela y Blanton, 2014; Brizuela y Lara-Roth, 2002), las tablas son introducidas de una manera natural para el registro de valores en las sesiones que llevan a cabo para explorar el pensamiento funcional. Observan que los estudiantes terminan por escribir los encabezados sin dificultad. En este estudio, observamos que la especificación de las variables dependientes e independientes en la tabla facilitó la identificación de la relación entre las variables.

5.2. Contribuciones específicas de la investigación

Esta Tesis Doctoral contribuye al conocimiento de la disciplina desde diferentes perspectivas, en particular a la investigación en *early algebra*. Exponemos las contribuciones específicas de las misma en este capítulo.

Por un lado, presentamos la contribución de la presente Tesis Doctoral a los objetivos propuestos en el proyecto de investigación I+D en la que se inserta. En la tabla 6-2 presentamos los objetivos de investigación del proyecto y su relación con los estudios que presentamos en esta memoria.

Tabla 5-2.

Contribución a los objetivos del proyecto

Proyecto de investigación	Objetivos generales del proyecto	Objetivos específicos del proyecto	Estudios de la tesis relacionados
Pensamiento funcional en educación primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización. (ref. EDU2016-75771-P)	O1. Profundizar en la descripción del pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes de educación primaria en España.	O.P1. Describir el pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes españoles de los diferentes cursos de educación primaria.	1, 2, 3, 4, 5 y 6
	O2. Desarrollar materiales, tareas y estrategias que favorezcan el desarrollo de pensamiento funcional y la superación de los obstáculos que lo limitan.		
		O. P2. Establecer comparaciones entre el pensamiento funcional de estudiantes españoles de distintos cursos de educación primaria.	
		O. P3. Establecer comparaciones entre el pensamiento funcional de	

	estudiantes españoles de distintos centros educativos.	
	O. P4. Diseñar materiales didácticos y tareas útiles para la introducción y desarrollo del pensamiento funcional en educación primaria.	1, 2, 3, 4, 5 y 6
	O. P5. Identificar dificultades que encuentran estudiantes españoles de educación primaria de diferentes niveles en el proceso de pensamiento funcional y formas para ayudarlos a superarlas.	

Como se desprende de la tabla, con esta Tesis Doctoral hemos contribuido a describir el pensamiento funcional que ponen de manifiesto los estudiantes de segundo de educación primaria. También contribuimos al diseño de tareas útiles para la introducción y desarrollo del pensamiento funcional. Aclaramos que no pretendemos generalizar los resultados de esta tesis. Hacemos referencia a un grupo de estudiantes de segundo de educación primaria con un nivel socio-cultural bajo y con unos concomimientos previos relativos a números del 0 al 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con llevadas. En este sentido cabría pensar que con grupos similares y contextos parecidos se podrían esperar resultados análogos.

Ahora destacamos las principales contribuciones que emergen como fruto de esta investigación.

En esta Tesis Doctoral, hemos profundizado en el proceso de generalización de niños de 7-8 años en el contexto español, observando las formas de pensar algebraicamente dentro del contexto funcional que manifiestan los estudiantes al resolver los problemas presentados. En este sentido el modelo del proceso de generalización presentado en el estudio 1 constituye una contribución teórica a la comprensión de cómo el estímulo (casos particulares implicados) puede tener implicaciones en el razonamiento de los alumnos hacia la generalización en un contexto funcional.

La forma de interpretar las relaciones entre las variables mediante la estructura, tanto para casos particulares como para casos generales en el proceso de generalización, puede apoyar la manera de dar significado y entender cómo los estudiantes relacionan las variables a responder a diferentes problemas. Concretamente, identificar las estructuras puede ayudar a entender cómo estos comprenden la relación entre variables a través de sus maneras de conectar los elementos que forman parte de las regularidades detectadas por ellos. Por eso la noción de estructura está íntimamente relacionada con el proceso de generalización en el que podemos destacar la estabilidad de la estructura como un aspecto clave en la evolución del proceso de generalización.

Al igual que ocurre en el trabajo de Warren et al. (2013), hemos observado que cuando los estudiantes tomaron conciencia de la estructura, dieron respuestas con una clara validación de la regularidad encontrada entre las variables. El estudio de las funciones en los grados elementales suele centrarse en las funciones lineales (Schifter, 2016). Dado que las funciones lineales incluyen un componente multiplicativo y un componente aditivo, proporcionan a los estudiantes la oportunidad de considerar la diferencia entre las estructuras multiplicativas y aditivas.

Por otra parte, abordar las formas directa e inversa de la función lineal constituye una contribución relevante para las investigaciones en el contexto del pensamiento algebraico. En el pensamiento funcional, en particular, son escasos los estudios que describen cómo los estudiantes comprenden relaciones inversas. En concreto, la manera en la que analizamos el trabajo de los estudiantes al trabajar con las formas directa e inversa de la función lineal constituye un enfoque relevante para la investigación. Por una parte, proporcionamos evidencias de cómo analizar las respuestas de los estudiantes y, por otra, conectamos el trabajo de los estudiantes con la generalización y representación al trabajar ambas formas de la función. Destacamos que los estudiantes logran generalizar las estructuras correspondientes a la forma inversa.

Con respecto a las representaciones, destacamos que en la representación tabular hemos visto cómo los niños desarrollaban comprensiones tanto de la representación (tabla) como de los objetos representados (relaciones entre variables), tal y como señala Kaput (1987).

Nuestro estudio difiere de los anteriores (e.g., Martí, 2009; Martí, et al, 2005) al introducir tablas en blanco y tablas con pistas para los títulos de los encabezados.

5.3. Implicaciones para la docencia

Las investigaciones que se producen en el área de la Educación Matemática, cómo en cualquier disciplina, deben precipitar en la sociedad solventando alguna necesidad. Específicamente esta investigación debe tener una repercusión en el aula de clase, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que no puede manifestarse sin que los maestros se hagan eco de este conocimiento. El currículo actual habla ahora de sentido algebracio (Ministerio de Educación y Formación Profesional, p. 24.486) en educación primaria, incluyendo nociones algebraicas más precisas como el uso de símbolos. Esto hace que la pertinencia de la investigación cobre relevancia y que sus resultados sean apreciados por los docentes.

Siguiendo esta perspectiva podemos enfocarnos en que las tareas y contextos implicados en cada uno de los estudios de esta tesis sobre el pensamiento funcional alientan a los estudiantes a descubrir relaciones entre variables, a explorar estructuras matemáticas más que a centrarse en cálculos aislados. Esto es en sí mismo una implicación docente pues el uso de una guía que el docente puede utilizar basada en el descubrimiento de relaciones se manifiesta como una forma de enfrentarse a la enseñanza del pensamiento funcional. Las tareas que aportamos en esta tesis pueden usarse para promover el pensamiento fucional en el aula e impulsar el pensamiento algebraico desde este enfoque.

El aporte dado sobre el proceso de generalización en tres fases contribuye a tener un conocimiento docente sobre la forma en que los estudiantes generalizan y por lo tanto su uso para orientar a los alumnos en el proceso de generalización y para la creación y diseño de tareas podría ser útil.

En nuestra metodología utilizamos el potencial del objeto matemático, la función, de forma que los estudiantes han desarrollado habilidades que les permiten pensar algebraicamente y reflexionar sobre las relaciones entre variables en este nivel educativo.

El trabajo realizado sobre los distintos papeles que juegan las mismas variables de una relación funcional expresada de manera directa o inversa puede ayudar a profundizar en el desarrollo de la búsqueda de covariaciones entre variables que les será beneficioso en niveles posteriores de la educación secundaria como recogen algunos de nuestros antecedentes (e.g., Ellis, 2011; Paoletti, et al., 2018).

Los presentes hallazgos sobre la representación tabular, debidamente sistematizados, pueden ayudar a los profesores a diseñar actividades en el aula que apoyen tanto el uso de tablas, como la representación de las nociones matemáticas que se trabajen el aula promiendo su capacidad para participar en el pensamiento funcional. El fomento de las habilidades comunicativas mediante el uso de representaciones tabulares es igualmente esencial, dado que el currículo actual de educación primaria y secundaria exige el dominio de esta y otras herramientas de representación similares para representar gráficamente la información, de ahí el interés de observar su uso por parte de estos jóvenes estudiantes. Para poner en marcha programas de álgebra temprana a diferentes escalas se requiere una inversión tanto en materiales curriculares como en desarrollo profesional a largo plazo. Esto, a su vez, puede tener implicaciones para los enfoques de la enseñanza de funciones y tablas en el aula.

5.4. Perspectivas futuras

Consideramos de especial interés continuar esta investigación utilizando la aplicación de las diferentes fases (abducción, inducción y generalización) con alumnos de diferentes cursos de primaria y comparando si siguen la misma tendencia en el uso de las diferentes fases para razonar en el proceso de generalización. En este punto debemos de incluir también la identificación de estructuras que impliquen diferentes funciones, de manera que se puedan corroborar los pasos de cada una de las fases dadas desde varias perspectivas. Otra vía de continuidad del trabajo es ver si ese modelo es útil en otras aproximaciones al pensamiento algebraico, diferentes de la funcional.

Los resultados e implicaciones de esta Tesis Doctoral abren camino para explorar un nuevo campo: la formación de profesores. Sabemos, de alguna u otra forma, lo que los estudiantes de primaria pueden hacer al trabajar con contenidos de carácter algebraico.

Sin embargo, son escasas las investigaciones que, desde la perspectiva del pensamiento algebraico, abordan el efecto que pueden tener estos profesionales en la mediación y construcción de los aprendizajes algebraicos de los estudiantes de la escuela primaria.

Nos hacemos eco de los resultados de Paoletti (2020), quien pone en evidencia la necesidad de apoyar a los estudiantes y profesores de educación superior en la reorganización de sus significados y dificultades sobre la función inversa, sumergiendo a nuestros estudiantes en edades tempranas en el trabajo de identificar regularidades funcionales, estructuras de funciones directas e inversas relaciones covariacionales en general. El autor advierte de que los futuros investigadores deberían estar interesados en explorar cómo los estudiantes más jóvenes podrían desarrollar significados de relación (o función) y relación inversa (o función) basados en el razonamiento sobre las relaciones entre variables que covarian. En este sentido, hemos examinado cómo niños de entre 7 y 8 años desarrollan el pensamiento funcional cuando ofrecemos una forma inversa de la función, fijándonos en la manera en la que generalizan las estructuras evidenciadas. Pretendemos que estos hallazgos proporcionen un punto de partida para futuras investigaciones dada la escasez de trabajos sobre la forma inversa de la función en educación primaria para poder favorecer la productividad del pensamiento funcional en cursos superiores.

En algunos casos hemos observado que hay estudiantes que no han contestado a las preguntas planteadas (en el estudio de la forma directa e inversa de la función) o incluso no se les plantean (en el estudio de la forma inversa). El hecho de que los estudiantes no contesten a algunas preguntas o no expliquen sus respuestas puede tener que ver con que no estaban acostumbrados a dar muchas explicaciones en su dinámica habitual de clase. En este sentido cabe destacar la importancia de los aspectos centrales que propone Kaput (2008) para el pensamiento algebraico en el aula sobre la expresión de la generalización se presentó en el marco teórico.

En este momento cabe una reflexión sobre la necesidad de un requisito previo esencial en los estudiantes para poder describir ellos mismos lo que hacen. Quizás muchos estudiantes perciban las relaciones entre las variables empleadas, es decir, quizás perciban la estructura, pero no puedan expresarla con palabras. Expresiones que se han manifestado de una manera casi espontánea por la mayoría de los alumnos en este estudio como “sumar más 4 o multiplicar por dos” podrían no ser tan fáciles de trasmitir para otros. Destacamos la necesidad de realizar más investigaciones en este sentido, porque permitirían aproximarse, de una forma más profunda, a las relaciones entre dos variables en el ámbito del pensamiento funcional.

Con respecto a las representaciones, centrándonos en la tabular, nuestros resultados ayudan a la literatura de investigación en el sentido de que las tablas son un elemento esencial en los planes de estudio de matemáticas y se sabe poco sobre lo adecuadas que pueden ser para la comprensión de las funciones (Brizuela y Lara-Roth, 2002; Martí, 2009).

Además, aunque las tablas se presentan en los planes de estudio de algunos países como contenidos y estándares de aprendizaje, como en América, Australia, España y Singapur (Pincheira y Alsina (2021), no se utilizan para interpretar relaciones entre variables. Una línea de investigación abierta está en atender a la construcción y la comunicación y razonamiento con las tablas e incluir además la exploración con la representación gráfica. Esto podría dar una visión de conjunto sobre la interpretación de los estudiantes sobre las funciones.

5.5. Fiabilidad y validez de la investigación

Sobre la fiabilidad, Cobb (2000) señala que consiste en demostrar que el análisis fue sistemático y exhaustivo. Molina et al. (2011) añade que la fiabilidad se refiere al grado en que las inferencias y afirmaciones son razonables y justificables. Para esto se mide el grado de sistematicidad del análisis y si éste permite o no la refutación de conjeturas.

Otros aspectos a considerar son si los criterios utilizados para las argumentaciones son explícitos y permiten a otros investigadores monitorizar el análisis, si las argumentaciones y afirmaciones finales pueden ser justificadas siguiendo las sucesivas fases del análisis dado que se describe detalladamente cada una de estas fases y que se fundamentan las inferencias realizadas, así como si el análisis ha recibido críticas por otros investigadores externos al equipo que ha recogido los datos. En este sentido, el análisis realizado es confiable dado el grado de sistematicidad utilizado, lo que nos permite afirmar que las inferencias que obtuvimos son confiables.

Por otra parte, la validez está relacionada con las pruebas que respaldan los resultados comunicados. De alguna manera, la validez del estudio se ve mermada por los antecedentes, ya que entre nuestros resultados obtuvimos ciertas similitudes con estudios anteriores. Nuestra investigación apoya los resultados de estudios anteriores. Por ejemplo, la evidencia sobre el logro de la generalización por parte de los estudiantes a una edad temprana es algo que se ha observado antes (e.g., Pinto y Cañadas, 2018; Blanton et al., 2015), así como la identificación de diferentes estructuras cuando se trabaja con valores específicos (e.g., Blanton, et al., 2011; Pinto y Cañadas, 2017). Esto se corresponde con la validez de nuestra investigación.

Las categorías definidas aquí fueron útiles para analizar las respuestas de los alumnos y pueden ser aplicables en futuras investigaciones. Aunque se basan en estudios anteriores, las categorías se complementaron y adaptaron a los datos recogidos. Parte de la originalidad de este estudio radica en las categorías propuestas para analizar el proceso de generalización seguido, pues este modelo en particular no ha sido abordado previamente.

Por otro lado, hay que destacar que la generalidad en este tipo de estudio no está relacionada con la representatividad de la muestra, Confrey (2006) señala que la generalización se consigue en la medida que los resultados se exponen tantos acontecimientos que confirman las conjeturas como los que no lo hacen. Además, se evidencia explícitamente el poder explicativo de los constructos teóricos. Se busca crear modelos probables que conduzcan a aprendizajes satisfactorios por medio de la reflexión y la relación entre los hallazgos y la realidad a la que se pretendan transferir. Para esto los investigadores deben aportar suficiente información sobre la conjetura, su contenido y evolución y el marco teórico (Confrey y Lachance, 2000). Cobb (2000) señala que al generalizar es importante notar que los fenómenos son ejemplos situados en una realidad local.

La replicabilidad se refiere a la posibilidad de repetir elementos o aspectos del proceso en otros contextos. Este indicador está estrechamente relacionado con la capacidad de generalización, pues si hay elementos o aspectos del proceso que se pueden repetir en otros contextos, y se obtienen los mismos resultados, entonces se considera que estos son generalizables y se valida que promueven aprendizajes en otros contextos. Así mismo, consideramos la investigación de utilidad en relación con el grado de claridad con la que se exponen las conclusiones y aportes para la enseñanza, de modo que los docentes puedan utilizarlas en la planificación y actuación en el aula.

Chapter 6. Conclusions

In this chapter we present the general conclusions of this research. First, we state the conclusions associated with the general and the specific objectives of this report, and describe how the thesis contributes to the research projects of which it is a part. Second, we describe the main contributions of this research, and then describe the implications for teaching that arise from our results. Finally, we present the limitations and future perspectives arising from the process of this dissertation.

6.1. Research objectives

The general objective of this doctoral thesis has been to deepen in the description of functional thinking shown by students of second grade of primary education. This description is articulated through generalization, representation and structure; as they are key elements in functional thinking contexts. We have used them as descriptors of functional thinking in a group of Spanish students in the second year of primary education (7-8 years old).

Considering the specific objectives of this thesis, in Table 6-1 we connect them with the studies that are part of the results of this thesis. Then, we describe the main conclusions associated with each objective of this research, as well as the relationship with the objectives of the R+D projects in which this thesis is developed.

Table 6-1.

Relationship between objectives and studies of this Doctoral Thesis

Specific objectives of the thesis	Studies 1	2	3	4	5	6
O. E1. Describe the generalization process evidenced by the students.	x	x				
O. E2. Describe the structures that students generalize	x					x
O. E3. Characterize the types of generalization expressed by students.	x	x				
O. E4. Identify and describe the structures evidenced by students in the direct and inverse forms of a function.			x	x		
O. E5. Analyze the representations used by students to evidence structures					x	x

6.1.1. Specific Objective 1

O. E1. Describe the generalization process evidenced by the students.

We have addressed this objective in studies 1 and 2. Our empirical observations on the generalization process provided evidence that students can bring into play different types of reasoning linked to different phases such as: abduction, induction, and generalization. Although some of these phases have been previously described by other authors (e.g., Rivera, 2017; Rivera & Becker, 2003), here they are distinguished according to the different particular cases posed to the students (different stimuli). We have highlighted the relationship between the phases and how they can be related in the generalization process.

Abduction, a preliminary phase in the generalization process, appeared when approaching the first particular cases (near particular cases) when the students formulated their initial conjectures and first identified the underlying structure. During induction, the second phase, students made conjectures that they did not confirm until they solved other particular cases (distant particular cases). At this point the students' identification of the structure of the relationship between the variables was key to continue the process. We considered that a conjecture was confirmed when a student, working with distant particular cases, recognized the same structure on more than two occasions, indicating knowledge or awareness of the structure in question. We considered that students generalized when the confirmed conjecture was reaffirmed for indeterminate or general cases.

Taking generalization as both a process and a product helped us to understand how the students in this study generalized. This dual approach to generalization has informed the way we study and observe students' reasoning and how they ultimately express generalization.

During the generalization process, key words such as "always" and "like this" appeared, temporal deictics that are characteristic of the generalization process for students of these ages.

6.1.2. Specific Objective 2

O. E2. Describe the structures that students generalize

This objective has been directly addressed in studies 1 and 6. But structure has also been a notion involved in the other studies that constitute this thesis. Structure has allowed to analyse the relationships evidenced between the variables by the students.

We have identified a close relationship between structure and the generalization process. We have analyzed the structures evidenced by the students, both in the particular cases and in the general case. We have seen how they evolve from the structures identified in the particular cases to the one they finally generalize.

We observed that, in general, the students evidenced the correct structure and maintained it throughout the generalization process. The fact that the students were able to generalize the structures in several of the proposed tasks is remarkable given the age of the students in our research (7-8 years old).

However, the coincidence of the additive and multiplicative structures in the same function made the generalization task more difficult for the second-grade students participating.

6.1.3. Specific Objective 3

O. E3. Characterize the types of generalization expressed by students.

We have specifically addressed this objective in study 1 and study 2. Assuming generalization as a process and as a product allows us, on the one hand, to understand how students generalize by being able to follow their reasoning, as we have written above; but also to observe how they finally express the generalizations.

Regarding the generalizations given by the students, all in verbal form, they have been largely classified as algebraic generalizations; factual and/or contextual, following Radford’s (2010) classification.

The recording of evidence of factual generalization requires careful analysis as it has to do with the perceptual activity of the children in the performance of the task. Therefore, it is worth going deeper into the interpretation we make of that generalization by paying more attention to what the student communicates in the first contact with the task.

We have evidenced cases of arithmetic and also of algebraic generalization. For the transition between both types of generalization, we have paid attention to the notion of structure, approaching it as the set of terms that make up the expression, the signs that relate them, the order of the different elements and the relationships that exist between them (Molina, 2010). The structure has referred to that which remains constant throughout the particular cases.

Most of the generalizations shown had an algebraic character because the students use a common property to give an expression that, although in a non-symbolic way, allows obtaining the value for any term of the sequence.

In our analysis of the types of generalizations, we have found an incipient and non-algebraic generalization, since the structure identified does not provide the value of any term of the sequence. This finding is noteworthy because we identified a form of generalization in which students do not specify the functional relationship but express that the value of the dependent variable is greater than the value of the independent variable, without quantifying this difference between the values. We have thus complemented Radford's (2010) categories by adding a new kind of generalisation for the case when the student identifies that "more balls come out than go into the machine" where the functional relationship does not appear explicitly.

6.1.4. Specific Objective 4

O. E4. Identify and describe the structures evidenced by students in the direct and inverse forms of a function.

This specific objective was addressed in studies 3 and 4. The consideration of both forms of the function encourages flexibility and reversibility in students' thinking. Students, when working with the inverse form must "undo" the process they carry out after working with the direct form, with the arithmetic operations involved, focusing attention on the underlying mathematical structures and relationships.

Previous studies with third and fifth grade students (e.g., Pinto, 2019; Pinto & Cañadas, 2017) concluded that the inverse form yields a higher number of erroneous structures than the direct form for the functions $y= 2x+6$, $y=3x$ and $y= 2x+18$. We find here that the structures identified for the inverse form were correct in all cases for the functions $y=x+4$ and $y = 2x$, with second grade students. Two of the functions implied by our antecedents include the additive and multiplicative structure. Previously (objective 2), we provided evidence that the inclusion of both additive and multiplicative structures in the same function made the generalization task challenging for participating second-grade students.

However, we noted that not all students responded to the inverse form when asked. Students who did not respond were asked about several particular cases. Exploration of the inverse forms of the different functions in the study occurred at the end of the interviews and some students were distracted in this final part of the interviews.

In these studies, the direct form has been considered to involve addition and the inverse form to involve subtraction. This was done because we considered that the former would be more accessible to students. However, in study 4 we observed that there were two students who generalized the structure in the inverse form and not in the direct form with both $y=x+4$ and $y = 2x$ functions.

Overall, our results indicate that the number of correct structures identified is higher during the work with particular than with general cases, in both forms of the functions.

We also highlighted that students identified an inadequate structure ($y=x+x$) in the study with the function $y=x+4$. Students also identified this structure in the particular cases of study 1 when the function involved was $y= x+3$. St described this structure as "add a number to itself." We speculate that students may have identified this structure because for some particular cases the result coincided with twice the value of the independent variable or because they are familiar with the addition of a number to itself.

6.1.5. Specific Objective 5

O. E5. Analyze the representations used by students to evidence structures.

This objective has been worked in studies 5 and 6. Regarding the representations used by the students in this thesis, we found verbal and/or numerical representations in the productions of second grade students. Cañadas & Fuentes (2015) found that verbal and/or numerical representations were the most common when working generalization tasks involving functions with first graders. This has also been observed by other studies with fifth and fourth grade students (e.g., Merino et al., 2013; Ureña et al., 2019), respectively. In study 5, the verbal representation system appeared usually linked with the numerical representation manifesting both together to obtain meaning.

Regarding the tabular representation, specifically addressed in study 5, we can say that interpreting a table implies understanding the processes of classifying information and identifying variables (arranged in rows and columns), and these processes follow certain conventions that are not necessarily trivial. We observed that the second-graders in this study found it more difficult to work with a table that lacked labeled headings. They found it easier to identify the overall structure when the column headings were labeled. We emphasize the difficulty of working with tables without labels. In this case, writing the label headings of a table indicates an understanding of the relationship between the variables involved. Therefore, a priori, this seems to be more complicated for children of this age. This finding may be due to how little accustomed they are to tabular recording since they had their first approach to tables with our work. In the studies that precede us (e.g., Blanton & Kaput, 2004; Brizuela & Blanton, 2014; Brizuela & Lara-Roth, 2002), tables are introduced in a natural way for recording values in the sessions they carry out to explore functional thinking. They observe that students end up writing the headings without difficulty. In this study, we observed that the specification of the dependent and independent variables in the table facilitated the identification of the relationship between the variables.

6.2. Specific research contributions

This Doctoral Thesis contributes to the knowledge of the discipline from different perspectives, in particular to research in early algebra. We present the specific contributions in this section.

First, we present the contribution to the objectives proposed in the R+D research project in which it is inserted. In Table 6-2 we present the research objectives of the project and their relationship with the studies presented in this report.

Table 6-2.

Contribution to project objectives

Research project	General project objectives	Specific objectives of the project	Related studies
Functional thinking in primary education: functional relations, representations and generalization. (ref. EDU2016-75771-P)	O1. To deepen in the description of functional thinking shown by primary school students in Spain	O.P1. To describe the functional thinking shown by Spanish students in different grades of primary education.	1, 2, 3, 4, 5 y 6
	O2. Develop materials, tasks and strategies that favor the development of functional thinking and the overcoming of obstacles that limit it.	O. P2. To establish comparisons between the functional thinking of Spanish students in different grades of primary education. O. P3. To establish comparisons between the functional thinking of Spanish students from different schools. O. P4. To design didactic materials and useful tasks for the introduction and development of functional thinking in primary education. O. P5. To identify difficulties encountered by Spanish primary school students of different levels in the functional thinking process and ways to help them overcome them.	1, 2, 3, 4, 5 y 6

As we can observe in the table, with this Doctoral Thesis we have contributed to describe the functional thinking shown by students in the second year of primary education. We also designed and adapt from previous studies useful tasks for the introduction and development of functional thinking.

We clarify that we do not intend to generalize the results of this thesis. We refer to a group of students in the second year of primary education (7-8 years old) with a low socio-cultural level and with some previous knowledge of numbers from 0 to 399, comparison of numbers and addition and subtraction operations with carried numbers. In this sense, one might think that with similar groups and similar contexts, similar results could be expected.

We now highlight the main contributions that emerge from our research.

In this Doctoral Thesis, we have delved into the generalization process of 7-8 years old children in the Spanish context, observing the ways of thinking algebraically within the functional context manifested by the students when solving the problems presented. In this sense the model of the generalization process presented in study 1 constitutes a theoretical contribution to the understanding of how the stimulus (particular cases involved) can have implications in students' reasoning towards generalization in a functional context.

How to interpret the relationships between variables through structure, both for particular cases and for general cases in the generalization process, can support how to make meaning and understand how students relate variables to answer different problems. Specifically, identifying structures can help students to understand the relationship between variables through their ways of connecting the elements that are part of the regularities detected by them. Therefore, the notion of structure is closely related to the generalization process in which we can highlight the stability of the structure as a key aspect in the evolution of the generalization process.

As is the case in the work of Warren et al. (2013), we observed that when students became aware of the structure, they gave answers with clear validation of the regularity found between variables. The study of functions in elementary grades usually focuses on linear functions (Schifter, 2016). Since linear functions include a multiplicative component and an additive component, they provide students with the opportunity to consider the difference between both kind of structures.

Addressing the direct and inverse forms of the linear function is a relevant contribution to research in the context of algebraic thinking. In functional thinking research, studies describing how students understand inverse relations are scarce. In particular, the way in which we analyze students' work when working with the direct and inverse forms of the linear function constitutes a relevant approach to research. On the one hand, we provide evidence of how to analyze students' responses. On the other hand, we connect students' work with generalization and representation when working with both forms of the function. We highlight that students manage to generalize the structures corresponding to the inverse form.

With respect to the representations, we emphasize that in the tabular representation we have seen how the children developed understandings of both the representation (table) and the objects represented (relationships between variables), as Kaput (1987) points out. Our study differs from previous studies (e.g., Martí, 2009; Martí, et al, 2005) by introducing blank tables and tables with clues for the headings of the headings.

6.3. Teaching implications

The research produced in the area of Mathematics Education, as in any discipline, must have an impact on society by solving some need. Specifically, this research must have a repercussion in the classroom, in the process of teaching and learning mathematics, which cannot be manifested without teachers echoing this knowledge. The current curriculum now speaks of algebraic sense (Ministerio de Educación y Formación Profesional, p. 24,486) in primary education, including more precise algebraic notions such as the use of symbols. This makes relevant this research as its results are also appreciated by teachers.

Following this perspective, we can focus on the fact that the tasks and contexts involved in each of the studies in this thesis on functional thinking encourage students to discover relationships between variables, to explore mathematical structures rather than to focus on isolated computations. This is in itself a teaching implication as the use of a guide that the teacher can use based on the discovery of relationships manifests itself as a way of approaching the teaching of functional thinking. The tasks provided in this thesis can be used to promote functional thinking in the classroom and to promote algebraic thinking from this approach. Some of them have been already published online for free in https://pensamientoalgebraico.es/en/actividades.

The contribution given on the generalization process in three phases contributes to have a teaching knowledge on how students generalize and therefore its use to guide students in the generalization process and for the creation and design of tasks could be useful.

In our methodology, we use the potential of the mathematical object, the function, so that students have developed skills that allow them to think algebraically and reflect on the relationships between variables at second grade.

The work developed on the different roles played by the same variables of a functional relationship expressed in a direct or inverse way can help to deepen the development of the search for covariations between variables that will be beneficial to them at later grades of secondary education as some of our antecedents (e.g., Ellis, 2011; Paoletti, et al., 2018) collect.

The present findings on tabular representation, properly systematized, can help teachers to design classroom activities that support both the use of tables and the representation of mathematical notions being worked on in the classroom by promoting their ability to engage in functional thinking. The promotion of communicative skills through the use of tabular representations is equally essential, given that the current curriculum of primary and secondary education requires the mastery of this and other similar representational tools to graphically represent information, hence the interest in observing their use by these young students. To implement early algebra programs at different scales requires an investment in both curricular materials and long-term professional development. This, in turn, may have implications for approaches to teaching functions and tables in the classroom.

6.4. Future prospects

We consider of special interest to continue this research using the application of the different phases (abduction, induction and generalization) with students of different primary school grades and comparing if they follow the same tendency in the use of the different phases to reason in the generalization process. At this point we should also include the identification of structures involving different functions, so that the steps of each of the given phases can be corroborated from various perspectives. Another way of continuing the work is to see if this model is useful in other approaches to algebraic thinking, different from the functional one.

The results and implications of this Doctoral Thesis open the way to explore a new field: teacher training in Spain, contributing to the international recent vein that it is being starting. We know, in one way or another, what elementary school students can do when working with algebraic content. However, there is little research, from the perspective of algebraic thinking, addressed on the effect that these professionals can have on the mediation and construction of algebraic learning of elementary school students.

We echo the results of Paoletti (2020), who highlights the need to support students and teachers of higher education in reorganizing their meanings and difficulties about the inverse function, immersing our students at early ages in the work of identifying functional regularities, structures of direct and inverse functions covariate relationships in general. The author cautions that future researchers should be interested in exploring how younger students might develop meanings of relation (or function) and inverse relation (or function) based on reasoning about relationships between covarying variables. In this regard, we have examined how 7- to 8-year-olds develop functional thinking when we offer an inverse form of the function, looking at how they generalize the structures evidenced. We intend these findings to provide a starting point for future research given the paucity of work on the inverse form of the function in primary education in order to promote the productivity of functional thinking in higher grades.

In some cases, we have observed that there are students who have not answered the questions posed (in the study of the direct and inverse form of the function) or even not were asked with them (in the study of the inverse form). The fact that students do not answer some questions or do not explain their answers may have to do with the fact that they were not used to give many explanations in their usual class dynamics. In this sense, it is worth highlighting the importance of "practices", proposed by Kaput (2008) where he emphasizes argumentation in algebraic thinking in the classroom over the expression of generalization.

At this point, it is worth reflecting on the need for an essential prerequisite for students to be able to describe themselves what they do. Perhaps many students perceive the relationships between the variables used, that is, perhaps they perceive the structure, but cannot express it in words. Expressions that have been expressed in an almost spontaneous way by most of the students in this study such as “add plus 4 or multiply by two” might not be so easy for others to convey. We emphasize the need for further research in this direction, because it would allow us to approach, in a deeper way, the relationships between two variables in the field of functional thinking.

With respect to representations, focusing on the tabular one, our results contribute to the research literature in the sense that tables are an essential element in mathematics curricula and little is known about how adequate they can be for the understanding of functions (Brizuela & Lara-Roth, 2002; Martí, 2009).

Moreover, although tables are presented in the curricula of some countries as content and learning standards, as in United States, Australia, Spain and Singapore (Pincheira & Alsina, 2021), they are not used to interpret relationships between variables. An open line of research is in attending to construction and communication and reasoning with tables and also including exploration with graphic representation. This could give an overview of students' interpretation of functions.

6.5. Reliability and validity of the research

On reliability, Cobb (2000) points out that it consists of demonstrating that the analysis was systematic and exhaustive. Molina et al. (2011) add that reliability refers to the degree to which degree to which inferences and assertions are reasonable and justifiable. For this purpose, the degree of systematicity of the degree of systematicity of the analysis and whether or not it allows for the refutation of conjectures.

Other aspects to consider are whether the criteria used for the arguments are explicit and allow other researchers to monitor the analysis. Also, if the arguments and final statements can be justified following the successive phases of the analysis given that each of these phases is described in detail and that the inferences made are substantiated, as well as if the analysis has received criticism from other researchers external to the team that collected the data.

In this sense, the analysis carried out is reliable given the degree of systematicity used, the triangulation in the data analysis with different researchers. This allows us to affirm that the inferences we obtained are reliable. On the other hand, validity is related to the evidence supporting the reported results. In some ways, the validity of the study is diminished by the antecedents, since among our results we obtained certain similarities with previous studies. Our research supports the results of previous studies. For example, evidence on students' achievement of generalization at an early age is something that has been observed before (e.g., Pinto & Cañadas, 2018; Blanton et al., 2015), as well as the identification of different structures when working with specific values (e.g., Blanton, et al., 2011; Pinto & Cañadas, 2017). This corresponds to the validity of our research.

The categories defined here were useful for analyzing student responses and may be applicable in future research. Although they are based on previous studies, the categories were complemented and adapted to the data collected. Part of the originality of this study lies in the categories proposed to analyze the generalization process followed, as this particular model has not been addressed previously.

On the other hand, it should be noted that generality in this type of study is not related to the representativeness of the sample. Confrey (2006) points out that generalization is achieved to the extent that the results expose as many events that confirm the conjectures as those that do not. In addition, the explanatory power of the theoretical constructs is explicitly evidenced. The aim is to create probable models that lead to satisfactory learning through reflection and the relationship between the findings and the reality to which they are to be transferred. For this, researchers must provide sufficient information about the conjecture, its content and evolution, and the theoretical framework (Confrey & Lachance, 2000). Cobb (2000) points out that when generalizing it is important to note that the phenomena are examples situated in a local reality.

Finally, replicability refers to the possibility of repeating elements or aspects of the process in other contexts. This indicator is closely related to the capacity for generalization, since if there are elements or aspects of the process that can be repeated in other contexts, and the same results are obtained, then these are considered to be generalizable and it is validated that they promote learning in other contexts. Likewise, we consider the research to be useful in relation to the degree of clarity with which the conclusions and contributions for teaching are presented, so that teachers can use them in their planning and actions in the classroom.

Referencias[11]

Ayala-Altamirano, C. (2021). *Concepción y representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de primaria en contextos funcionales* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Bogdan, R. C. y Biklen, S. K. (2007). *Qualitative research for education. An introduction to theory and methods* (5ª ed.). Pearson.

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics*. Wiley and Sons.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-Year-Olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grade students' capacity for functional thinking. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). PME.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education: A global dialogue from multiple perspective* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

[11] Recogemos aquí las referencias usadas en la Tesis Doctoral a excepción de las que únicamente están recogidas en los artículos presentados.

Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología – Segunda época* (UNLP), *14*, 37-57.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 34-63. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO: Revista de Didáctica de la Matemática*, *54*, 55-67.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. Edma 0-6: *Eduación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13.

Castro, E., Cañadas, M. C., Molina, M. y Rodríguez-Domingo, S. (2022). Difficulties in semantically congruent translation of verbally and symbolically represented algebraic statements *Educational Studies in Mathematics. 109*, 593-609.

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2002) Additive relations and function tables. *Journal Mathematics. Behaviour, 20,* 309–319.

Brizuela, B. M. y Martinez, M. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero (Ed.), Desarrollo cognitivo y educación [II]. *Procesos de conocimiento y contenidos específicos* (pp. 267-290). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Bryman, A. (2016). *Social research methods*. Oxford university press.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), Investigación en educación matemática. Homenaje a Luis Rico (pp. 209-218). Comares.

Callejo, M. L., García-Reche, Á. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 5-25.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 669-705). NCTM.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 191-208). Routledge.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. En *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 107-138). Springer, Cham.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 307-333). Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh, y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68–95). Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2007). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (octava edición). Routledge.

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (1.a ed., pp. 135-152). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511816833.010

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). Lawrence Erlbaum Associates.

Cuoco, A. A. (2001). *The roles of representation in school mathematics*. NCTM.D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME, 9*(4), 177-196.

Design Based Research Collective [DBRC] (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 119-135). Sense Publishers.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*(1), 37-65.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebrization. Advances in mathematics education* (pp. 215-238). Springer.

English, L. D. y Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Eriksson, H. y Eriksson, I. (2021). Learning actions indicating algebraic thinking in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(3), 363-378.

Fakhrunisa, F. y Hasanah, A. (2020, April). Students' algebraic thinking: A study of mathematical modelling competencies. In Journal of Physics: *Conference Series* (Vol. 1521, No. 3, p. 032077). IOP Publishing.

Freiman, V. y Fellus, O. O. (2021). Closing the gap on the map: Davydov's contribution to current early algebra discourse in light of the 1960s Soviet debates over wordproblem solving. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09989-6.

Goldin, G. y Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G. y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. 1-23). NCTM.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 4-11.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind*: *The clinical interview in psychological research and practice*. Cambridge University Press.

Gowers, T., Barrow-Green, J. y Leader, I. (Eds.). (2008). Introduction. What is mathematics about? *The Princeton companion to mathematics* (pp. 1–76). Princeton University Press.

Guerrero, M. A. (2016). La investigación cualitativa. Recuperado de https://repositorio.uide.edu.ec/handle/37000/3645

Harel, G. y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 38-42

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (6ª ed). McGraw-Hill.

Herrera, J. (2017). La investigación cualitativa. Recuperado de http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/1167

Hewitt, D. (2019). "Never carry out any arithmetic": the importance of structure in developing algebraic thinking. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.558-566). Freudenthal Group y FreudenthalInstitute, Utrecht University y ERME.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. En E. Fenema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from a engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. E. y Lesh, R.A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 33-56). NCTM y Laurence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 579-593). Springer.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258- 2

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. En Autora (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution o an emerging field of research and practice* (pp. 79-105). Springer.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago, IL: University of Chicago Press

Larson, R. y Hostetler, R. (2008). *Precálculo* (7.ª ed.). Reverté Ediciones.

López, E. (2019). *Estrategias de resolución de problemas que involucran una función afín y su inversa de estudiantes de primer curso de Educación Primaria desde una aproximación funcional al pensamiento algebraico*. (Trabajo fin de Máster). Granada, España.

Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Ediciones Pirámide.

Martí, E., Garcia-Milà, M. y Teberosky, A. (2005). Notational strategies for problem solving in 5 to 7 year olds. *Developmental Psychology Journal*, *2*, 364-384.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, P. Echeverría y E. Teubal (Eds.), *Representationals systems and practices as learning tools in different fields of learning* (pp. 133-148). Sense Publishers.

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: Being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. En S. Stewart (Ed.), *And the rest is just algebra* (pp. 97-117). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Springer. https://doi.org/10.1007/978- 94-009-1732-3_5

Mason, J., Grahamn, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. The Open University Press.

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. Edma 0-6: *Eduación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 52* (24386- 24504). Autor.

Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *SUMA*, *65*, 7-15.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, *29*(1), 75-88.

Molina, M., y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.

Molina, M. y Mason, J., (2009). Justifications-on-demand as a device to promote shifts of attention associated with relational thinking in elementary arithmetic. Canadian Journal of Science, *Mathematics and Technology Education*, *9*(4), 224-242. https://doi.org/10.1080/14926150903191885.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*, 1137-1156.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565 /rev/ensciencias.2472

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.

National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers [NGA Center y CCSSO]. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. NGA y CCSSO.

Paoletti, T. (2020). Reasoning about relationships between quantities to reorganize inverse function meanings: The case of Arya. *The Journal of Mathematical Behavior*, 57, 100741. doi:10.1016/j.jmathb.2019.100741

Paoletti, T., Stevens, I. E., Hobson, N. L. T., Moore, K. C. y LaForest, K. R. (2018). Inverse function: Pre-service teachers' techniques and meanings. *Educational Studies in Mathematics, 97*, 93-109.

Palmér, H. y Bommel, J. (2016). Exploring the role of representations when young children solve a combinatorial task. En J. Häggström, E. Norén, J. Bommel, J. Sayers, O. Helenius y Y. Liljekvist (Eds.), *Proceedings of MADIF 10The Tenth Research Seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education* (pp. 47-55).

Pincheira, N. y Alsina, A. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, *33*, 153-180.

Pinto, E. (2019). *Generalización de estudiantes de 3º a 6º de Educación Primaria en un contexto funcional del álgebra escolar* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En A. Muñoz-Escolano, A. Arnal, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Structures and generalisation in a functional approach: The inverse function by fifth graders. En Gómez, D. M. (Ed.), *Proceedings of the First PME Regional Conference: South America* (pp. 89-96). PME.

Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-20.

Pitta-Pantazi, D., Chimoni, M. y Christou, C. (2020). Different types of algebraic thinking: An empirical study focusing on middle school students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(5), 965-984.

Prediger, S., Gravemeijer, K. y Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. *ZDM – The International*

Journal on Mathematics Education, 47(6), 877-891. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Comares.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Springer.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 21- 40). Pirámide.

Rivera, F. (2017). Abduction and the emergence of necessary mathematical knowledge. En L. Magnani y T. Bertolotti (Eds.), *Springer handbook of model-based xcience*. Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-319-30526-4_25

Rivera, F. y Becker, J. R. (2003). The Effects of Numerical and Figural Cues on the Induction Processes of Preservice Elementary Teachers. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 63-70.

Scheuer, N., Sinclair, A., de Rivas, S. M. y Christinat, C. T. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y Aprendizaje, 23*(90), 31-50.

Schifter, D., Bastable, V., Russell, S. J., Riddle, M., & Seyferth, L. (2008). Algebra in the K-5 classroom: Learning opportunities for students and teachers. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics. 2008 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 263-277). NCTM.

Schliemann, A. D., Lins, M., Brito, L. y Siqueira, A. (2011). La comprensión de equivalencias en niños pequeños. En A. D. Schliemann, D. W. Carraher y B. M. Brizuela (Eds.), *El carácter aritmético del álgebra. Ideas para la sala de clases.* (pp. 47-72). Paidós.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164. https://doi.org/10.1007/BF00579460.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Lawrence Erlbaum Associates.

Stephens, A., Fonger, N. Knuth, E., Strachota, S. y Isler, I. (2016). *Elementary students' generalization and representation of functional relationships: A learning progressions approach.* Paper presented at ICME 13 Conference.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. y Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education. Third handbook of research in mathematics education.* (pp. 386–420). NCTM.

Swan, M. (2020). Design research in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 192-195). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_180

Torres, M.D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz- Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII*. (pp. 574–583). SEIEM.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics*, *9*(10), 1109.

Ureña (2021). *Representaciones de generalización y estrategias empleadas en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales*. Una investigación con estudiantes de primaria y secundaria. (Tesis doctoral), Universidad de Granada.

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M. y Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in Kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior*, *62*, 100866. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193-215.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75-84.

ANEXOS

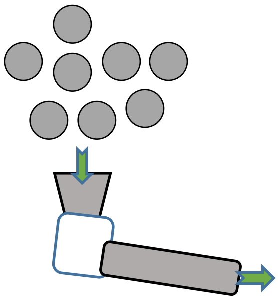
Anexo A. Cuestionario 1. Sesión 1

CUESTIONARIO INICIAL - 2º

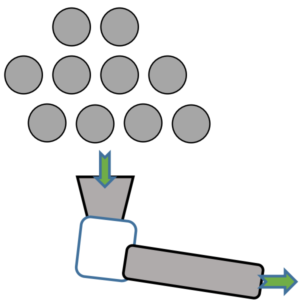
Nombre y apellidos:____

PARTE 1

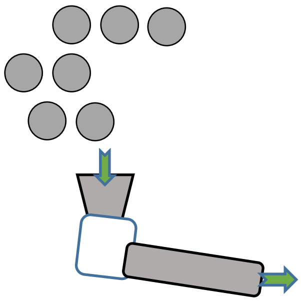
1. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 8 bolas? _______ bolas.



2. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 10 bolas? ______ bolas.



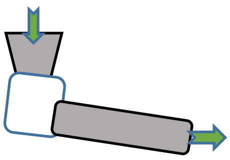
3. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 7 bolas? _______ bolas.



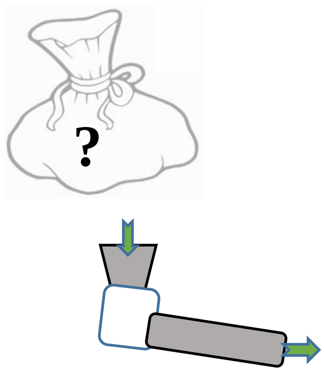
CUESTIONARIO INICIAL - 2º

Nombre y apellidos:____

4. Pon el número de bolas que tú quieras al principio de la máquina. ¿Cuántas bolas salen?



5. Pon el número de bolas que crees que saldrán de la máquina en la siguiente situación. ______ bolas.



6. Ahora vamos a hacer un juego en el que gana quien averigüe cómo funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuántas bolas salen de la máquina?

CUESTIONARIO INICIAL - 2º

Nombre y apellidos:____

PARTE 2

7. Rodea con lápiz si las siguientes frases son verdaderas o falsas.

(a) Si en la máquina metes cuatro bolas, salen 7 bolas.

Verdadera Falsa

(b) En la máquina siempre salen dos bolas más que las bolas que has metido.

Verdadera Falsa

(c) En la máquina siempre salen tres bolas más que las bolas que has metido.

Verdadera Falsa

(d) En la máquina siempre sale el doble del número de bolas que de bolas que has metido.

Verdadera Falsa

(e) Si meto A bolas en la máquina, salen A bolas.

Verdadera Falsa

(f) Si meto A bolas en la máquina, salen A+1 bolas.

Verdadera Falsa

(g) Si meto A bolas en la máquina, salen A+3 bolas.

Verdadera Falsa

Anexo B. Protocolo entrevista A

Objetivo: Aplicar regla funcional en casos particulares diferentes.					
Guión				Observaciones sobre la pregunta	Acciones para ayudar
	Menor 20	Entre 20 y 100	Mayor 100	Corroborar que responda bien planteando ejemplo de los tres rangos numéricos.	- Cambiar el ámbito numérico - Cambiar la forma de preguntas por caso particular (número dado, pregunta de evaluación, número inventado por el estudiante).
Casos particulares dados.					
- Si entran (____)bolas, ¿cuántas debieran salir?/ Si entran (____), ¿qué número sale? - ¿Qué hiciste para obtener esa respuesta? Explícame tu pensamiento.	*(Aquí proponer números)*	*(Aquí proponer números)*	*(Aquí proponer números)*		
Casos particulares del estudiante.					
Dime un número (______). Si colocas ese <u>número de bolas</u>, ¿cuántas bolas debieran salir? ¿Qué número debería salir? Explícame tu pensamiento.					
Caso particular de un tercero.					
- Otro niño de la clase dice "si entran XX bolitas, debieran salir YY". ¿Estás de acuerdo con él? - ¿Qué hiciste para obtener esa respuesta? Explícame tu pensamiento.	*(Aquí proponer números)*	*(Aquí proponer números)*	*(Aquí proponer números)*		
Observaciones generales					

Acciones "sin ayuda"

- Repetición de la pregunta.
  - Igual
  - Variando
  - Destacando algunos elementos
- Repetición de la respuesta o una síntesis de la última respuesta.
  - Acción eco.
  - Resumen.
- Estímulo con expresiones de interés.
  - Verbal
  - Gestos
- Pausa
- Solicitar profundizar
- Aclaración de lenguaje

3. LO INDETERMINADO Y USO DE LA LETRA – Función directa *Objetivo: Identificar las ideas de los estudiantes sobre las letras y su uso en contextos funcionales.*		
Guión	Observaciones sobre la pregunta	Acciones para ayudar
a. Cantidades indeterminadas **(Volver a plantear pregunta 5 cuestionario 2°)** 5. Pon el número de bolas que crees que saldrán de la máq siguiente situación. _____ bolas. 	- Ver preguntas → - Si no se le ocurre nada → fin.	- <u>Si el niño no sabe usar el signo de ¿? preguntar:</u> - **¿qué podemos usar al principio de la máquina para indicar que entra un número de bolas?** - **¿qué podemos usar al final para indicar que lo que sale?** - Si es solo verbal → incitarlo al uso de una representación recordar preguntas de cuestionario.
b. Generalización **(Volver a plantear pregunta 6 cuestionario 2°)** 6. Ahora vamos a hacer un juego en el que gan funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuá máquina?	- Tanteo libre → si llega al simbolismo, OK. - Si no se le ocurre nada → fin.	- Si es solo verbal → incitarlo al uso de una representación recordar preguntas de cuestionario. **INDAGAR EN PREGUNTAS A PARTE OPCIONAL (VERDADEROS Y FALSOS)** **Otras preguntas:** ¿Habías visto o usado las letras antes en matemáticas? ¿Para qué crees que se usan las letras?

Acciones "sin ayuda"

- Repetición de la pregunta.
  - Igual
  - Variando
  - Destacando algunos elementos
- Repetición de la respuesta o una síntesis de la última respuesta.
  - Acción eco.
  - Resumen.
- Estímulo con expresiones de interés.
  - Verbal
  - Gestos
- Pausa
- Solicitar profundizar
- Aclaración de lenguaje

Anexo C. Cuestionario 2. Sesión 2

Nombre y apellidos:____

Fecha: 19 de enero de 2018 Hoja de trabajo 1

Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 3 euros y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 1 euro.

1. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 1 viaje?

   ¿Cómo lo sabes?

2. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 14 viajes?

   ¿Cómo lo sabes?

3. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 7 viajes?

¿Cómo lo sabes?

Nombre y apellidos:____

Fecha: 19 de enero de 2018 Hoja de trabajo 2

Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 3 euros y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 1 euro.

4. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 100 viajes?

¿Cómo lo sabes?

5. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar un millón de viajes?

¿Cómo lo sabes?

6. Un niño de la clase ha dicho que se hizo socio y las veces que viaja en las atracciones. Explícale cómo puede calcular cuánto se ha gastado.

Anexo D. Cuestionario 3, sesión 3.

Nombre y apellidos: ____________________________________

Fecha: 02 de febrero de 2018 Hoja de trabajo 1

A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje en una atracción vale 2 euros.

¿Cuánto pagas por el carnet y 1 viaje?

Explícame cómo lo haces.

¿ Cuánto pagas por el carnet y 20 viajes?

Explícame cómo lo haces.

1. ¿ Cuánto pagas por el carnet y 10 viajes?

Explícame cómo lo haces.

Nombre y apellidos:___________

Fecha: 02 de febrero de 2018 Hoja de trabajo 2

A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje en una atracción vale 2 euros.

¿ Cuánto pagas por el carnet y un millón viajes?

Explícame cómo lo haces.

2. Isabel paga por el carnet y muchos viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.

3. Isabel paga por el carnet y  viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.

Anexo E. Cuestionario 4, sesión 4.

Nombre: ___ ___ ______________________________

Lucía cumple años y sus padres quieren invitar a sus amigos a la fiesta. Hay para comer bocadillos y tartas, así que cada persona tendrá dos platos.

A.-Si hay 2 personas en el cumpleaños, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta?

Explícame cómo lo haces.

B.-Si hay 4 personas, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta?

Explícame cómo lo haces.

C.-Si hay 10 personas, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta?

Explícame cómo lo haces.

Nombre: ____

Lucía cumple años y sus padres quieren invitar a sus amigos a la fiesta. Hay para comer bocadillos y tartas, así que cada persona tendrá dos platos.

D.-Si vamos las 20 personas de la clase, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta?

Explícame cómo lo haces.

E.-Si van 120 personas, todo el cole de Primaria, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta?

Explícame cómo lo haces.

F.-Los padres de Lucía han recibido una carta de su amigo extraterrestre Marsian. Marsian les ha dicho (en su idioma) que van a ir Ω extraterrestres a la fiesta. ¿Puedes escribirle a Marsian los platos que se necesitan?

Explícame cómo lo haces.

Anexo F. Protocolo entrevista B

Protocolo entrevista -2º Primaria

Fecha: 4 de mayo de 2018	**Hoja de trabajo 1**

Componentes del grupo:

1.____
2. ____
3.____
4. ____

Un tren va recogiendo a los amigos de Elsa para que vayan a su cumpleaños. En cada parada de tren se montan siempre el mismo número de personas. Queremos saber cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas. ¿Cómo puedes saber cuántas personas lleva el tren? *(sondeo y se rellena el 1 y el 3. Y el 6 si lo saben)*

Enunciado completo. Cuando para en una parada se suben 2 personas.

Número de paradas	
1	
3	
6	
5	
10	
13	
Proponen números	
Proponen números	
Proponen números	

Probar con números cada vez más grandes (dependerá de los que hayan propuesto)	
1000	
1 millón	
Muchas paradas	
Infinitas paradas	

- Significado de la tabla
  1. Ahora os traemos un nuevo problema. (Leemos el enunciado del problema)
  2. ¿Cuántas personas lleva el tren cuando pasa por 3 paradas? ¿Y cuando pasa por ….(mirar tabla)?
  3. ¿Cómo podríamos escribir la información que nos da el problema en la tabla que os hemos dado?
  4. ¿Para qué podemos usar esta tabla en este problema?
  5. ¿Qué podríamos escribir al principio, en los títulos de las columnas, para organizar la información de este problema? ¿Se os ocurre alguna forma?
  6. ¿Qué relación existe entre los números que están ubicados en la primera columna?
  7. ¿Qué relación existe entre los números que están ubicados en la otra columna?
  8. Creéis que usar esta tabla nos puede ayudar a encontrar la cantidad de personas que hay después de…?
  9. ¿Qué significan los números que están escritos en la tabla? ¿Y los que tú has escrito?
  10. ¿Qué significa el número 10? ¿y el 2? **(Se puede seguir preguntando por los que ellos escriban)**
- Explorar la relación entre cantidades variables
  11. (cuando completen) ¿tienen estos dos números algo que ver? ¿Hay alguna relación entre ellos? ¿cuál? ¿Cómo lo sabes?
  12. ¿Esa relación será siempre así? ¿Por qué?
  13. ¿Puedes encontrar una relación entre el número de paradas y el número de personas?
  14. ¿Cuántas personas llevará el tren si ha pasado por 20 paradas? ¿Y por 50? ¿Y por 1000?
  15. ¿Cómo le explicarías a un amigo cuantas personas llevará el tren cuando pasa por muchas paradas?

Fecha: 4 de mayo de 2018	**Hoja de trabajo 2**

Número de paradas	Número de personas		Corrección ¿Por qué crees que está bien o por qué crees que está mal?
5	9	→	
2	4	→	
10	5	→	
50	25	→	
100	220		
1 millón	2 millones	→	
X	X+X	→	
N	N+N	→ →	
Z	Z	→	

Intervención del investigador

1. Ahora tenemos esta tabla rellena. Vamos a corregirla. Te pedimos que digas si está bien o mal, y lo corrijas en la tabla con un boli de otro color.

2. Vamos paso a paso, comenzaremos por la primera fila ¿qué opináis? ¿Es eso cierto? ¿Por qué? (se sigue con los demás casos)
3. ¿Cómo lo sabes? (Continuamos de forma análoga en los siguientes casos)
4. Este niño dice que si el tren para X veces, el tren llevará X+X personas ¿Es eso verdad? ¿Por qué?
5. ¿Para qué crees que se pueden usar las letras?
6. 5.1 (Si no aceptan el uso de la letra fin de la entrevista en este punto, sino podríamos seguir tanteando)

Nombre y apellidos: ____

Fecha: 4 de mayo de 2018	**Hoja de trabajo 3**

Número de paradas	Número de personas
	4
	2
3	
7	
	6
	12
10	
	20
	300

	4 millones
	α

Intervención del investigador

1. Ahora vamos a rellenar la siguiente tabla que aparece incompleta. Así que vamos a intentar completarla nosotros. **(Evitar recursividad)**
2. ¿Si el tren lleva 4 personas por cuántas paradas ha pasado? ¿Y si lleva 2? (Se sigue avanzando en la misma línea con los datos de la tabla)
    - 2.1.1. (Si no saben contestar ayudarse de los datos de la variable independiente que he añadido)
    - 2.1.2. (Si aún no dicen nada podemos optar por recordarles los casos particulares sencillos de la directa para ver si retoman)
    - 2.1.3. (Si no conseguimos nada finaliza la entrevista).

Anexo G. Protocolo entrevista C

Protocolo de entrevista final. Curso 2º

I. Identificación

Nombre del entrevistado: ____

Clase: _________________ Fecha: ___________________

Nombre del entrevistador: ____

Hora de inicio: __________________ Hora de finalización: ______________

Justificación del estudiante seleccionado: _______________________________

II. Focos de entrevista

Si en los cuestionarios anteriores no ha quedo alguna respuesta clara, marcar con una **X** qué elementos profundizar.

	Función directa: Exploración de casos particulares
	○ Identificar relación funcional.
	○ Aplicar regla funcional en casos particulares diferent
	    ○ Casos particulares dados.
	    ○ Casos particulares propuestos por estudiante.

	Función directa: Proceso de generalización ○ Expresar la generalización ○ Razonar con la generalización[12]
	Función directa: Cantidades indeterminadas ○ Expresar ideas sobre casos que incluyen cantidades i

Acciones "sin ayuda"

- Repetición de la pregunta.
  - Igual
  - Variando
  - Destacando algunos elementos
- Repetición de la respuesta o una síntesis de la última respuesta.
  - Acción eco.
  - Resumen.
- Estímulo con expresiones de interés.
  - Verbal
  - Gestos
- Pausa
- Solicitar profundizar
- Aclaración de lenguaje

[12] Basado en el trabajo (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, & Newman-Owens, 2017) . Ellos proponen "Explore how students reason with the generalization" Sample questions: If your friend said he had 5 dogs and counted 6 dog noses, do you think he counted correctly? How do you know?

	○ Interpretar casos en los que se utilizan letras. ○ Letras propuestas por los estudiantes. ○ Letras propuestas por el entrevistador.
	Organizar información en una tabla

	Función inversa: Exploración de casos particulares ○ Identificar relación funcional. ○ Aplicar regla funcional en casos particulares diferentes. ○ Casos particulares dados. ○ Casos particulares propuestos por estudiante.
	Organizar información en una tabla

III. Protocolo y registro.

Mencione lo siguiente "[*nombre del estudiante*] A continuación, te realizaré algunas preguntas para conocer tu pensamiento y comprender qué realizaste. Si tienes alguna pregunta, puedes hacerla cuando quieras. Al finalizar, te pediremos que no las compartas con tus compañeros para que todos puedan responder según sus propias ideas.

Tarea

Tipo de función: aditiva (x + 4)

Dos superhéroes, Iron Man y el Capitán América cumplen años el mismo día.

1. **Explorar casos particulares y descubrir relación funcional**

Guion	**Acciones para ayudar**
• Cuando Iron Man cumplió 5 años, el Capitán América cumplió 9. • Cuando Iron Man cumplió 7 años, el Capitán América cumplió 11. • Cuando Iron Man cumplió 3 años, el Capitán América cumplió 7. Después de presentar los casos, proponer el siguiente caso. En caso de que aun no capte la	En caso que tengan problema para comprender la situación: 1º Replantear los casos particulares de nuevo

<table>
<tr><td>relación entre las edades, volver a los casos anteriores y llevar a cabo alguna acción de ayuda.

Cuando Iron Man cumpla 10 ¿cuántos años tendrá el Capitán América?</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales</td></tr>
</table>

2. **Aplicar relación funcional**

Mostrar tabla de dos columnas en blanco (Anexo 1), organizar los ejemplos anteriores en la tabla. *El objetivo no es que los estudiantes organicen la información, si sucede, bien.* Pero el objetivo del uso de la tabla es organizar los casos que se presentan a los estudiantes.

<table>
<tr><th>Guion</th><th>Acciones para ayudar</th></tr>
<tr><td>Proponer otros casos para completar la tabla y pedirle que ellos también escriban algunos ejemplos. El entrevistador es quien los escribe en la tabla.

• Si Iron Man cumple (___) años, ¿cuántos años tiene el Capitán América?
Proponer algunos de los números que a continuación se sugieren. Los que sean necesarios según cada entrevista. Recordar proponerlos sin seguir un orden ascendente o descendente.
○ Números menores a 20 →
1, 4, 5, 7, 8, 9, 10 [se puede contar con los dedos]
11, 12.
○ Mayores a 20 y menores a 100 →
20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33.
Múltiplos de 10 puede ser fácil en algunos casos.
○ Mayores a 100 →
Número formados con dígitos del 0 al 3.
• Dime una edad para Iron Man (______).
Si cumple esos años ¿cuántos años</td><td>En caso que tengan problemas de cálculo, señalar que pueden dejar expresada la operación sin escribir la respuesta. Esto no es necesario escribirlo.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>cumple el Capitán América? Explícame cómo lo has pensado.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales</td></tr>
</table>

Proceso de generalización

Estos casos no registrarlos en la tabla. Considerar el uso de un folio nuevo.

<table>
<tr><th>Guion</th><th>Acciones para ayudar</th></tr>
<tr><td>Expresar la generalización

Cuando Iron Man cumpla muchos años ¿Cuántos años cumplirá el Capitán América?

Si Iron Man cumple “infinitos” años, ¿cuántos años tendrá el Capitán América?

¿Cómo le explicarías a XXXX qué debe hacer para conocer la edad del Capitán América?

¿Siempre se calcula así?, ¿cómo lo sabes?</td><td>Proponer otros casos generales y que señale si son correctos o no, justificando su respuesta. “Si alguien te dice que calcula la edad del Capitán América…. ¿tú le dirías que es correcto o incorrecto?”

o Sumando 3 a la edad de Iron Man.
o Multiplicando por 2 la edad de Iron Man.
o Sumando 4 a la edad de Iron Man
o Multiplicando por 4 la edad de Iron Man

Relacionar lo que digan de manera verbal con expresiones numéricas, para corroborar que lo que verbalizan corresponde con los cálculos que harían.</td></tr>
<tr><td>Razonar con la generalización

Otro niño de la clase dice que “Cuando Iron Man tiene XX años, el Capitán América tiene YY años. ¿Estás de acuerdo con él?</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales</td></tr>
</table>

Cantidades indeterminadas

Guion	Acciones para ayudar

Interpretar casos en los que se utilizan letras. - Letras propuestas por los estudiantes. Preguntar una vez y luego pasar a V y F. Escoge una letra para representar una edad cualquiera de Iron Man. ¿Cuántos años tendría el Capitán América? ¿Cómo podemos saber cuántos años tiene? Si un compañero escoge una letra distinta a la tuya, ¿la edad del Capitán América cambia o es la misma? - Letras propuestas por el entrevistador. Si R es la edad de Iron Man ¿Qué edad tiene el Capitán América? Si B es la edad de Iron Man ¿Qué edad tiene el Capitán América? Si Y es la edad de Iron Man ¿Qué edad tiene el Capitán América? ¿Son correctas estas afirmaciones?, ¿por qué? - Cuando la edad de Iron Man es Z años, la edad del Capitán América es Z + Z + Z +Z años. - Cuando la edad de Iron Man es Z años, el Capitán América tiene W años. - Cuando la edad de Iron Man es Z años, el Capitán América tiene Z años. - Cuando la edad de Iron Man es A años, el Capitán América tiene A años. Cuando la edad de Iron Man es Z años, el Capitán América Z+4 años. - Cuando la edad de Iron Man es N años, el Capitán América tiene N+4 años.	
Observaciones generales	

Función inversa

Presentar al final de la entrevista, solo si queda tiempo. No es necesario que lo registren en la tabla.

Guion	Acciones para ayudar
Pedirles que registren la información en la tabla. Cuando la edad del Capitán América es XXXX, ¿cuál es la edad de Iron Man? • Casos fáciles. • Números pequeños • Números grandes.	
¿Cómo explicarías cómo calcular la edad del Capitán América si conoces la edad de Iron Man?	
Observaciones generales	

Edad de	Edad de

Anexo H. EXTENDED SUMMARY

What does it mean to think algebraically? Can this ability be developed in young children? Can children generalize, see the mathematical structure, and represent it? If so, will they be better prepared for the demands of high school algebra? These questions are part of the exploration of the evolution of early algebra as a field of research and practice that is still emerging today (Eriksson & Eriksson, 2021; Fakhrunisa & Hasanah, 2020; Pinnock, 2020; Torres et al., 2021; Ventura et al, 2021).

INTRODUCTION

Currently in research on algebra in elementary education, there is a consensus on why it is necessary to introduce algebra from the earliest educational levels. However, the debate on what, when and how to introduce algebra are still points of discussion (Freiman & Fellus, 2021).

From the curricular viewpoint, different countries such as Australia, Canada, Chile, China, United States, Japan, Korea, Singapore, United Kingdom or Portugal among others, include explicit content on algebra at early ages (Pincheira & Alsina, 2021; Pinto, 2019). Some of the aspects shared by the different curricula are: (a) the introduction of algebraic thinking at early ages; (b) the incorporation of algebraic thinking without introducing new content, rather enhancing existing content from the algebraic approach; (c) the encouragement of the search for regularities, and (d) the interpretation of arithmetic in general terms (Pinto, 2019).

One of the approaches proposed to promote the development of algebraic thinking is the functional approach (Blanton & Kaput, 2011). Functional thinking focuses on the study of functions and families of functions in real-life situations (Cañadas & Molina, 2016). With the term functional thinking we refer to the generalization of relationships between quantities that vary together, quantities that vary together, the expression of these relationships, and the use of these expressions to analyze the behavior of a function (Blanton et al., 2011; Blanton & Kaput, 2011).

Previous studies show that when students have the opportunity to discuss tasks involving a functional relationship, they develop a sense to identify variability easier (Blanton et al., 2011; Brizuela, et al., 2015). The development of functional thinking contributes to build a solid learning foundation for further studies in learning algebra (Blanton & Kaput, 2011). This research is situated in this functional approach to school algebra. Particularly, we focus on the generalization, structures and representations by elementary school students.

In Spain, the country where this thesis is developed, the current curriculum for elementary education include: strategies for identification, oral description, discovery of patterns in a collection of numbers, figures or images, as well as obtaining simple unknown data (represented by means of a symbol) with functions (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022, p. 24,493).

Conceptually, we adopt Kaput's (2008) ideas about the understanding of algebra and algebraic thinking. From this perspective, generalization and its representation constitute central aspects. In this Thesis we assume that algebra and algebraic thinking go beyond the use of algebraic notation, employing representations as varied as natural language, manipulative, pictorial, numerical, tabular representations, among others, to express generalization. As we encourage students to attend to properties and relations between quantities, examining their generality, this activity is considered part of algebraic thinking.

In functional thinking, functions are the key mathematical content involved. In this Doctoral Thesis, we intend to characterize functional thinking through the notions of generalization, structure and representation.

RESEARCH OBJECTIVES

Chapter 1 presents the objectives guiding this work are presented. Our general research objective is:

To deepen in the description of functional thinking shown by students in the second year of primary education.

This broader objective is further specified by the following specific objectives:

O. E1. To describe the generalization process evidenced by the students.

O. E2. Describe the structures that students generalize.

O. E3. Characterize the types of generalization expressed by students.

O. E4. Identify and describe the structures evidenced by students in the direct and inverse forms of a function.

O. E5. Analyze the representations students use to evidence structures.

THEORETICAL ELEMENTS AND BACKGROUND

In Chapter 2, we describe the conceptual aspects related to our research. We cover general elements, until we reach those that are directly related to the proposed research objectives. We begin the chapter by presenting the framework of algebraic thinking adopted to describe the position from which we consider generalization and its close relationship with structure and representation, as well as the idea of functional thinking as an approach to algebraic thinking, following the ideas of Kaput (2008). Then, we describe the main elements related to functional thinking, with the intention of clarifying what we understand and assume by each of them.

A growing number of studies have worked on aspects associated with functional thinking, focusing on how elementary students: (a) evidence regularities and what strategies they employ; (b) use different representations; (c) compare functions in the same context; (d) attribute diverse meanings to algebraic notation; (e) evidence difficulties and errors in dealing with certain elements of an algebraic nature, among others (Pinto, 2019). The studies we have reviewed highlight that generalization between covarying quantities is the central element of functional thinking.

Generalization

Numerous authors in early algebra context consider generalization as a central element of algebraic thinking (e.g., Cooper & Warren, 2011; Kaput, 2008). It is “an ideal means through which a general statement can be seen and expressed” (Mason et al., 1985, p. 1), allowing the generation of mathematical knowledge (Pólya, 1957).

There is a diversity of conceptions of generalization that highlight the dual acceptance of generalization as both a process and a product of that process (Harel & Tall, 1991; Stephens et al., 2017). Krutetskii (1976) indicates that, through the process of generalization, he characteristics and properties of objects isolated by abstraction are generalized; that is, they are extended to a whole set of objects in a given class. We approach generalization here both as a process and as a product.

We understand generalization as a process and as a product. The product of generalization is the form in which generality is expressed, that is, it is the result of that process (Ellis, 2007). Generalization as a process involves: (a) identifying the elements common to all cases (evidencing structure), (b) extending the reasoning beyond the range in which it originated, (c) obtaining results broader than the particular cases, and (d) providing a direct expression that allows obtaining any term (Ellis, 2007; Kaput, 1999; Radford, 2013).

Lineal function

A function establishes a correspondence rule between two non-empty sets that assigns to each element of the first set (the domain) exactly one element of the second set (codomain) (Vinner & Dreyfus, 1989, p. 357).

The way in which the relationship between variables is verbally formulated usually highlights one of its two associated functions (i.e., marking a sense in the dependence relationship between the variables involved). This could exert some influence on the way in which such a relationship is understood and, where appropriate, transcribed algebraically (López, 2019). Most studies that address elements of functional thinking in elementary students consider the direct form of a linear function (given the value of the independent variable, determine the value of the dependent) and studies that address both forms of the function are scarce.

Structures

In relation to function, Molina (2010) addresses structure as the "set of terms that make up the expression, the signs that relate them, the order of the different elements and the relationships that exist between them" (p. 9). We understand here by structure the organization and expression of regularity between variables (Pinto & Cañadas, 2017). We evidenced the need to deepen and show, through concrete examples, how students relate variables in different problems involving linear functions. Structure refers to those behaviors, characteristics or properties that remain constant across specific instances (Schifter, 2016). With this we emphasize the recognition and expression of structures in early algebra (Kieran, 2018).

Representations

The meaning and understanding of a mathematical object is based on the use of different representations and their progressive articulation (D'Amore, 2006). People do not have direct access to objects but only to symbolic systems that represent reality, which is why the analysis of students' productions is fundamental (Duval, 1993). We are interested in describing the representations used by students during the generalization process. These go beyond those implied in the classical classification, and we consider: gestural, verbal, numerical, pictorial, tabular and algebraic notation. In this thesis we attend to the following representations:

Gestures

Thinking is not only a mental activity but a process mediated and evidenced by language, gestures, rhythm, and all the resources used to interact with the environment (Radford, 2018; Vergel, 2015).

Gestures help students generalize and express generalization. Some authors (Cooper & Warren, 2011; Warren et al., 2013) observe that, in the context of problems involving a function, those who made fewer gestures when explaining their answers to the proposed problems had greater failure. However, as mentioned by Mason (1996), they are not a guarantee that generality has been perceived, rather they are indicators. Their use could emphasize the particular and make it more difficult to appreciate the general.

Verbal representation

Verbal representation is that which takes place through natural language either spoken or written and is the one commonly present in problems involving functions and presented to students (e.g., Blanton et al., 2015; Warren et al., 2013). Mainly, problems that introduce this type of representation do so in written (during work sessions with full or partial classes) and oral (through interviews) statements, which can be accompanied by other types of representation.

Numerical representation

For Scheuer, et al. (2000) numerical representations are "constructed by employing a very reduced set of forms (the numerals 1 to 9) and organizing principles, since numbers are deeply conceptual and abstract entities, reducible to a few nuclear notions that when combined are extended" (p. 32). Blanton, et al. (2015), note that students using this type of representation can conceptualize a functional relationship “as a set of particular relationships between specific corresponding values” (p. 530), in which these can describe a relationship within certain specific cases.

Pictorial representation

Pictorial representations are images or drawings of the elements that are represented (Palmer & Bommel, 2016). In general, this representation allows visualizing the problem situation and the relationship between variables through the relationship between spatial and numerical structures. This aspect is important in algebraic and functional thinking as regularities can be recognized from the decomposition of figures (Radford, 2011). The problems that introduce this type of representation are generally accompanied by a statement expressed through natural or oral language.

Tabular representation

Tabular representation comprises the elaboration of tables to organize the information of a relationship between two quantities (Kaput, 1989). This representation allows visualizing in the same row the pairs of related values corresponding to the independent and dependent variables, as well as the eigenvalues of each variable by columns (Blanton 2008), and helps to perceive the input and output elements, simultaneously to find the functional relationship (English and Warren, 1998).

Symbolical representation

The symbolic representation, algebraic notation or algebraic symbolism is composed of letters and signs characteristic of arithmetic and algebra, characterized by being a representation that has great precision (Molina, 2014). Symbolic representations through algebraic symbolism allow expressing functional relationships by making use of letters and arithmetic signs (e.g. +, -, x, :, =). They provide a general qualitative and quantitative view of the function, allowing an analysis of the behavior of the function in an abstract way.

METHODOLOGICAL FRAMEWORK

In Chapter 3, we describe and justify the methodological framework of the research. First, we describe the methodological paradigm that governs this thesis: the research design (Confrey & Lachance, 2000; Molina, et al, 2011). Second, we justify its consideration in terms of the research objectives and detail the aspects of the design that are part of this report. Finally, we present the four-session teaching experiment that takes place in the research and detail the information collected through two directly related sources of information: (a) the questionnaires of the specific sessions of the teaching experiment; and (b) the individual and group semi-structured interviews. Considering the sources of information, we describe the students who are part of them, the selection of the data considered, the processes and instruments of information collection, and the categories of analysis employed. As for the data analysis, we carried out a qualitative analysis by coding the oral and written content of the students' productions from both the interviews and the questionnaires. We designed a system of categories for the generalization, structures and representations found.

COMPENDIUM OF PUBLICATIONS AND SYNTHESIS OF RESULTS

In Chapter 4, we show the results of this doctoral thesis, which is presented in the form of a grouping of publications. Thus, we describe the six studies (three of them published and the other three under review). The studies pursue the specific objectives of this research. Below, we present the studies in the same order in which they appear in this chapter:

Study 1: Torres, M. D., Moreno, A, & Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. Mathematic, 9, 1109. https:// doi.org/10.3390/math9101109. (Q1, JCR).

In study 1, we described the generalization process evidenced by the students. We identified three phases during the generalization process: abduction, induction and generalization (as a product). We identify and describe the structures recognized by the learners in their evolution towards generalization. We also characterized the types of generalization expressed by the students.

Study 2: Torres, M. D., Moreno, A., Rodolfo, V., & Cañadas, M. C. (under review). An experience of transition from arithmetic generalization to algebraic generalization in the context of functional thinking.

In study 2, we identify and describe the generalization process of a second-year student, through a case study, characterizing the generalizations produced and describing the structures identified by the student.

Study 3: Torres, M. D., Cañadas, M. C., Moreno, A., & Gómez, P. (2021). Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años [Structures in direct and inverse forms of a function evidenced by 7–8-year-old students]. *Uniciencia. 35*(2). https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.16. (Q3, SJR).

In study 3, we identify and compare the structures evidenced by students in the direct and inverse forms of a function, both in the work with particular cases and in the general case.

Study 4: Torres, M. D., Cañadas, M. C., & Moreno, A (under review). Recognition of structures and generalization by second graders in direct and inverse forms of a linear function.

In study 4, we characterized how students generalize the direct and inverse forms of a function.

Study 5: Torres, M. D., Brizuela, B. M., Cañadas, M. C., & Moreno, A. (2022) Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics 10*, 56. https://doi.org/10.3390/ math10010056. (Q1, JCR).

In study 5, we described how students organized the values of a function in a table. We identified implications of the respective column headings of a table (variable identification) and how they identified the regularity between variables (structure).

Study 6: Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (under review). Pensamiento funcional de alumnos de 2º de primaria: estructuras y representaciones [Functional thinking of 2nd grade students: structures and representations].

In study 6, we focused on identifying the structures that students demonstrate during generalization tasks and on describing the representations they use for different functions involved.

These studies complete and contribute to deepen three important aspects within functional thinking: generalization (as a process and as a product, structures (in the direct and inverse form of a function) and representation.

In Table H, we present a synthesis of the objectives pursued with each study and the contexts involved in each one, functions and sources of information.

Tabla H.

Objectives of the studies and objectives of the Thesis.

	Study	Review	Data used	Function	Objetives	Thesis objectives
1	Generalization Process by Second Grade Students	Mathematics	Interview 1	y = x+3	1. Describe the generalization process deployed by the students. 2. Identify and describe the structures recognized by the students in their evolution towards generalization. 3. Characterize the types of generalization expressed by students.	O. E1. Describe the generalization process deployed by the students. O. E2 Describe the structures that students generalize O. E3. Characterize the types of generalization expressed by students.
2	An experience of transition from arithmetic generalization to algebraic generalization in the context of functional thinking.	JCR (Q1)	Interview 1	y = x+3	1. Identify and describe the generalization process of a second year student by characterizing the generalizations produced.	O. E1. Describe the generalization process deployed by the students. O. E3. Characterize the types of generalization expressed by students.
3	Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años [Structures in direct and inverse forms of a function evidenced by 7–8-year-old students]	Uniciencia	Interview 3	y = x+4	1. Identify and compare the structures that students identify and compare the structures evidenced by students in the direct and inverse forms of a function, both in the work with	O. E4. Identify and describe the structures that students evidence in the direct and inverse forms of a function..

					particular cases and in the general case.	
4	Recognition of structures and generalization by second graders in direct and inverse forms of a linear function	JCR (Q2)	Interviews 2 y 3	y = 2x/ y = x+4	1. Describe how students identify the structures in the variables involved. 2. Characterize how they generalize the direct and inverse forms of the function used.	O. E4. Identify and describe the structures that students evidence in the direct and inverse forms of a function.
5	Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context	Mathematics	Interviews 2 y 3	y = 2x/ y = x+4	1. Describe how they organize the values in a table. 2. Identify the implications of the table headings (identification of variables) and how they identified existing regularities (structure).	O. E5. Analyze the representational systems used by students to evidence structures.
6	Pensamiento funcional de alumnos de 2º de primaria: estructuras y representaciones [Functional thinking of 2nd grade students: structures and representations]	SJR (Q3)	Cuadernillos de las 4 sesiones	y = x+3/ y =1+2x/ y = 2x/ y = x+4	1. Identify the structures evidenced by students during generalization tasks. 2. Describe the representations students use.	O. E2. Describe the structures that students generalize O. E5. Analyze the representational systems used by students to evidence structures.

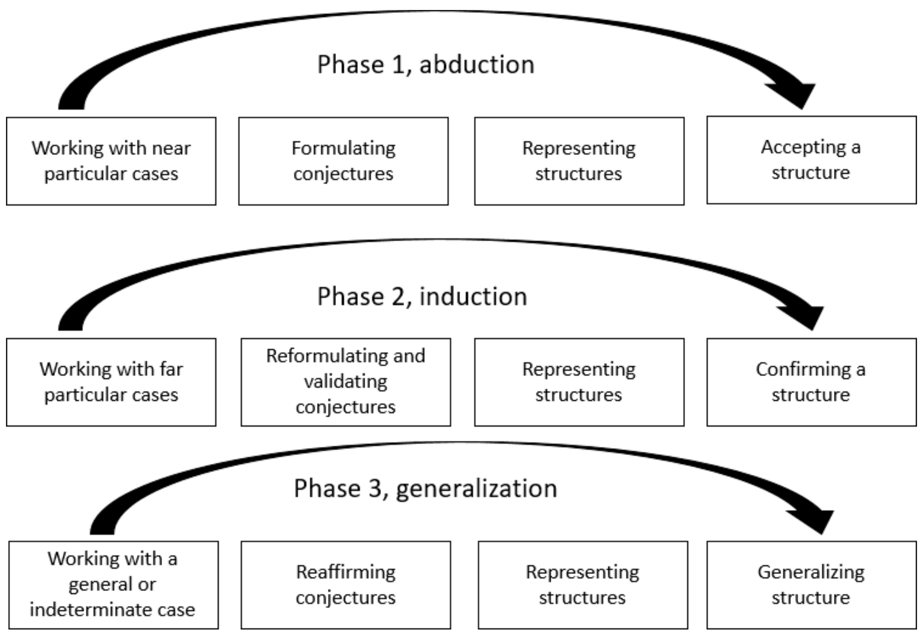
CONCLUSIONS

Finally, in Chapter 5 we present the conclusions of the report. We connect the conclusions obtained in the different studies presented above. We begin with the conclusions associated with the general and specific objectives of this report, as well as describe the way in which the thesis responds to the research projects in which it is developed.

As outstanding contributions, we present a model of the generalization process in terms of how the particular cases involved influence students' reasoning toward generalization. We show it in Figure H.

Figura H.

Generalization process model.



We observed a link between the structure and the generalization process. In general, students evidenced the correct structure and maintained it throughout the generalization process. Similarly, the different ways of representing a structure were taken into account.

We consider of special interest to continue this research using the application of the different phases (abduction, induction and generalization) with students of different primary school grades and comparing whether the trend remains the same. This idea can also be extrapolated to other approaches of algebraic thinking different from functional thinking.

Regarding the structures identified in the direct and inverse forms of a function, we have obtained that the number of correct structures identified is higher during the work with particular cases than with the general one, in both forms of the functions. We have examined how children between 7 and 8 years old develop functional thinking when we introduce an inverse form of the function, looking at the way in which they generalize the structures evidenced. We intend these findings to provide a starting point for future research given the paucity of work on inverse function form in primary education in order to encourage functional thinking productivity in higher grades.

Regarding tabular representation, we have seen how children developed understandings of both representation (table) and structures. Our results contribute to the research literature in the sense that tables are a representation to work with in the classroom and little is known about how adequate they can be for the understanding of functions (Brizuela & Lara-Roth, 2002; Martí, 2009).

ACKNOWLEDGMENTS

This Doctoral Thesis has been carried out within the research projects of the National I+D Plan with references EDU2016-75771-P and PID2020-113601GB-I00, funded by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness.

REFERENCES

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education: A global dialogue from multiple perspective* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Brizuela, B. M., & Lara-Roth, S. (2002) Additive relations and function tables. *Journal Mathematics. Behaviour, 20*, 309–319.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(1), 34-63. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939

Cañadas, M. C., & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades [An approach to the conceptual framework and main antecedents of functional thinking in the early ages.] In E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 669-705). NCTM.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai (Ed.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 187-214). Springer.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research and design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Lawrence Erlbaum Associates.

D’Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME, 9*(4), 177-196.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37-65.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221-262.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Eriksson, H., & Eriksson, I. (2021). Learning actions indicating algebraic thinking in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(3), 363-378.

Fakhrunisa, F., & Hasanah, A. (2020, April). Students’ algebraic thinking: A study of mathematical modelling competencies. In Journal of Physics: *Conference Series* (Vol. 1521, No. 3, p. 032077). IOP Publishing.

Freiman, V., & Fellus, O. O. (2021). Closing the gap on the map: Davydov’s contribution to current early algebra discourse in light of the 1960s Soviet debates over wordproblem solving. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09989-6.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38-42

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. In Author (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution o an emerging field of research and practice* (pp. 79-105). Springer.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. University of Chicago Press.

López, E. (2019). *Estrategias de resolución de problemas que involucran una función afín y su inversa de estudiantes de primer curso de Educación Primaria desde una aproximación funcional al pensamiento algebraico*. (Trabajo fin de Máster). Granada, España.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. In C. Andersen, N. Scheuer, P. Echeverría, & E. Teubal (Eds.), *Representationals systems and practices as learning tools in different fields of learning* (pp. 133-148). Sense Publishers.

Mason, J., Grahamn, A., Pimm, D, & Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. The Open University Press.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra* (pp. 65–86). Springer. https://doi.org/10.1007/978- 94-009-1732-3_5.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria [Royal Decree 157/2022, of March 1, establishing the organization and minimum teaching requirements for Primary Education]. *BOE, 52*, 24,386- 24,504. Author.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza [An approach to design research through teaching experiments]. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Palmér, H., & Bommel, J. (2016). Exploring the role of representations when young children solve a combinatorial task. *Proceedings of MADIF 10The Tenth Research Seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education* (pp. 47-55).

Pincheira, N., & Alsina, A. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria [Towards a characterization of early algebra from the analysis of contemporary Early Childhood and Elementary Education curricula]. *Educación Matemática, 33*, 153-180.

Pinnock, E. (2021). Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: the global evolution of and emerging field of research and practice. *Research in Mathematics Education, 23*(2), 226-230, https://10.1080/14794802.2020.1725613.

Pinto, E. (2019). *Generalización de estudiantes de 3º a 6º de Educación Primaria en un contexto funcional del álgebra escolar* [Generalization of third and sixth graders in a functional context of school algebra] (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. In A. Muñoz-Escolano, A. Arnal, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Schifter, D., Bastable, V., Russell, S. J., Riddle, M., & Seyferth, L. (2008). Algebra in the K-5 classroom: Learning opportunities for students and teachers. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics. 2008 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 263-277). NCTM.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M., & Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education. Third handbook of research in mathematics education.* (pp. 386-420). NCTM.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. In L Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Comares.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Springer.

Torres, M. D., Moreno, A., & Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics*, *9*(10), 1109.

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M., & Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in Kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior*, *62*, 100,866. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano [Generalization of patterns and forms of algebraic thinking early]. *PNA*, *9*(3), 193-215

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Warren, E., Miller, J., & Cooper, T. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.