



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

## GEOMETRÍA GLOBAL DE SUPERFICIES

$[\varphi, \vec{e}_3]$ -MÍNIMAS EN  $\mathbb{R}^3$

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

---

ANTONIO LUIS MARTÍNEZ TRIVIÑO

DIRIGIDA POR:  
ANTONIO MARTÍNEZ LÓPEZ

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales  
Autor: Antonio Luis Martínez Triviño  
ISBN: 978-84-1117-416-9  
URI: <http://hdl.handle.net/10481/75953>



## Agradecimientos

---

Empiezo a mirar hacia atrás y recuerdo todos los momentos y experiencias vividas a lo largo de mi formación matemática y no encuentro ecuación matemática que explique lo agradecido que estoy por toda la ayuda, consejos y compañía recibida de tantas personas; las cuáles han sido condiciones necesarias e imprescindibles en mi vida para terminar mi tesis doctoral.

Una vez leí que la belleza de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a aquellas personas que tienen el valor de profundizar en ellas. En mi caso, este sentimiento de valor lo he adquirido gracias a todas estas personas, a las que quiero dedicar toda mi gratitud con estas palabras.

No puedo empezar de otra forma que dando las gracias a mi director de tesis Antonio Martínez López por todo su esfuerzo, dedicación y el incommensurable tiempo invertido. Sin tí, esta tesis no había sido posible. Cuando me surgía algún problema, siempre estabas ahí para echarme una mano e indicarme los pasos a seguir en la trayectoria correcta. Te doy las gracias de corazón.

Gracias también a todos mis compañeros y compañeras de la Universidad de Granada, no solo por toda la formación recibida sino por brindarme ayuda cada vez que la pedía sin ponerme ningún impedimento a lo largo de estos diez años desde que era estudiante. Tanto tiempo, tantas clases, tutorías y reuniones han hecho que hoy os brinde estas palabras expresando mi gratitud. Especialmente, quiero dar las gracias a César Rosales, pues mi carrera investigadora se inició gracias a él y a Eduardo, por ayudarme durante todos estos años incluso antes de pertenecer a la Universidad. Muchas gracias.

My gratitude to the departament of mathematics of the Universidade de Brasilia. Especially, to João Paulo for his work, effort and dedication in the development of my thesis and to Jose Luis for the knowledge about

Riemannian geometry that I acquired.

Por otro lado, quiero dedicar estas palabras de agradecimiento a mis compañeros de viaje en esta travesía, compañeros que terminaron siendo amigos, amigos que terminaron formando el Grupo Fundamental. Gracias Alberto y Diego por amenizar aquellas tardes en la biblioteca, nunca las olvidaré. Sergio, no se cuanto me he podido reir contigo, gracias por todas las vivencias que hemos compartido juntos y por hacer este camino mas sencillo. Y por último, Jesús, juntos desde el primer año de grado. La no numerabilidad de horas que hemos pasado juntos hace que no tenga palabras de gratitud por tu ayuda, apoyo y consejos. Gracias.

Quiero dar también las gracias a David, Julián y Fidel, mis compañeros del IMAG, por todos los cafés y conversaciones que hemos tenido a lo largo de estos años. Erik, el compañero de todos los congresos, gracias a tu amistad parece que nos conozcamos de toda la vida. En esta parte de los agradecimientos, quiero destacar la ayuda de Ildefonso Castro y Antonio Bueno, mis compañeros de despacho. Muchas gracias por apoyarme en todo momento y por compartir conmigo mis primeros pasos como doctorando, no habría sido lo mismo sin vosotros.

Muchas gracias también a mis amigos de siempre, mis hermanos, pues algunas veces desconectar era necesario para volver a conectar. Juan Francisco, tu compañerismo y apoyo han hecho del instituto un tramo de mi vida que nunca olvidaré. Abraham y David, ya he perdido la cuenta los años que nos conocemos. Gracias por todos los momentos que hemos vivido juntos y seguramente por todos los que nos quedan por vivir. Sois dos pilares fundamentales en mi vida. Jose María, te doy las gracias por estar a mi lado en toda mi carrera, desde primaria hasta la defensa de la tesis. Gracias, por hacer que este camino sea mas sencillo y por el tiempo que hemos pasado juntos a lo largo de toda la tesis doctoral. Finalmente, mi amigo de toda la vida, Ángel, creo que somos amigos desde los 5 años. Todas las experiencias, anécdotas y la gran cantidad de recuerdos que se me vienen a la cabeza contigo hacen que te dé las gracias por estar siempre a mi lado. Muchas gracias.

Por último, quiero dar las gracias a mi familia. María, contigo siempre he tenido una persona a mi lado a quién pedir consejo, gracias por sacarme una sonrisa en los peores momentos. Jorge, no se como agradecerle la gran cantidad de momentos que hemos tenido juntos, desde tu infancia y

pasando por los peores momentos de la pandemia, te doy las gracias por hacer del hogar un lugar mejor. Padre y madre, si ha costado hasta ahora expresar mis agradecimientos con palabras, con vosotros directamente no tengo palabras, sois mi ejemplo a seguir. Muchas gracias por todos vuestros consejos y por toda la ayuda recibida. No se como agradecer todo vuestro esfuerzo para brindarme la oportunidad de labrarme un futuro y ser la persona que soy. Mis abuelos y abuelas, os doy las gracias porque vuestra sabiduría y experiencias compartidas han repercutido en mis decisiones vitales y que hoy, os esté dedicando estas palabras. Sé con total certeza, que aunque no estén todos mis abuelos, voy a encontrar la ayuda de sus manos y estarán siempre a mi lado esperándome a que les lea estas palabras.

Finalmente, quiero dedicar mis últimas palabras a mi compañera de vida, Yurema, pues llevas conmigo desde que empecé esta fascinante carrera, la carrera de toda una vida. Puesto que no voy conseguir agradecerte todo lo que me has dado con estas pocas frases, quiero decirte que gracias a tí estoy hoy aquí y que he hecho el descubrimiento mas importante de mi carrera, el mas importante de mi vida. Hoy tengo una familia gracias a tí.

Granada, mayo del 2022

*Dedicado a  
mi hijo.*

# Índice general

<b>Summary: results and conclusions</b>	<b>XI</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>23</b>
<b>2 Preliminares sobre superficies <math>[\varphi, \vec{e}_3]</math>-mínimas de <math>\mathbb{R}^3</math>.</b>	<b>39</b>
2.1 Interpretación física . . . . .	39
2.2 El espacio de Ilmanen 3-dimensional . . . . .	42
2.3 Un punto de vista variacional . . . . .	46
2.3.1 Primera fórmula de variación . . . . .	47
2.3.2 Segunda fórmula de variación. Estabilidad . . . . .	51
2.4 Ecuaciones Fundamentales . . . . .	55
<b>3 Superficies <math>[\varphi, \vec{e}_3]</math>-mínimas invariantes por isometrías de <math>\mathbb{R}^2</math>.</b>	<b>61</b>
3.1 Inmersiones $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas completas y llanas . . . . .	62
3.1.1 Grafos verticales invariantes por traslaciones horizontales . . . . .	62
3.1.2 Cilindros $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarios ladeados . . . . .	65
3.2 Inmersiones $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas rotacionales . . . . .	69
3.2.1 Caso singular . . . . .	69
3.2.2 Descripción geométrica de las superficies $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas de revolución . . . . .	71
3.2.3 Comportamiento asintótico de los ejemplos rotacionales . . . . .	80
<b>4 Superficies <math>[\varphi, \vec{e}_3]</math>-mínimas propiamente embebidas con <math>H \leq 0</math>.</b>	<b>89</b>
4.1 Ejemplos de superficies $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas estables . . . . .	89

---

4.2	Estimaciones para el area intrínseca . . . . .	91
4.3	Blow-up y estimación de la curvatura . . . . .	94
4.4	Caracterización sobre la convexidad . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Teoremas de unicidad gracias al comportamiendo asíntótico.</b>	<b>115</b>
5.1	Caracterización del ejemplo $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol . . . . .	115
5.2	Caracterización del cilindro $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario . . . . .	122
5.2.1	Definición de $C^k$ -asíntotico . . . . .	123
5.2.2	Teorema de compacidad gracias a un principio del máximo de barrera . . . . .	126
5.2.3	Demostración de la unicidad del cilindro $[\varphi, \vec{e}_3]$ - catenario . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Una correspondencia de tipo Calabi</b>	<b>141</b>
6.1	Ecuación de los grafos $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos . . . . .	141
6.2	La ecuación de las superficies $\varphi$ -maximales . . . . .	143
6.3	La correspondencia . . . . .	144
6.4	Aplicaciones . . . . .	148
6.4.1	La simetría radial se preserva . . . . .	149
6.4.2	Solitones y $\alpha$ -maximales singulares con $\alpha > 1$ . . . . .	150
6.4.3	Superficies rotacionales de tipo hiperbólico . . . . .	156
6.4.4	Par de Calabi para superficies espaciales $\alpha$ -maximales singulares rotacionales de tipo hiperbólico . . . . .	160
	<b>Futuras líneas de investigación</b>	<b>163</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>167</b>

## Summary: results and conclusions

---

The equilibrium of a flexible inextensible surface  $u = u(x, y)$  under an external force field  $\mathcal{F} = (X, Y, Z)$  was described by S.D. Poisson in *Sur les surfaces elastique* [65, pp. 173-187]. When the tensions  $\mathcal{T}$  are equal, he proved that, the condition of equilibrium is determined by the following equations

$$Z - pX - qY + \frac{\mathcal{T}}{W^2} ((1 + q^2)u_{xx} - 2pqu_{xy} + (1 + p^2)u_{yy}) = 0, \quad (0.1)$$

$$Xdx + Ydy + Zdz + d\mathcal{T} = 0, \quad (0.2)$$

where  $p = u_x$ ,  $q = u_y$ ,  $W = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$  and  $(\cdot)_x, (\cdot)_y$  denote the usual derivatives with respect to  $x$  and  $y$ . Notice that, the force  $\mathcal{F}$  is conservative if and only if the equation (0.2) holds. From equations (0.1) and (0.2), Poisson obtained

- The equation of the *minimal surfaces* in  $\mathbb{R}^3$  when  $\mathcal{F} = 0$ .
- The equation of the *capillary surfaces* when  $\mathcal{F}$  is orthogonal to the surface and  $\|\mathcal{F}\|$  only depends of a lineal function of the height.
- The equation of a *flexible surface under a gravitational force field* when  $\mathcal{F} = (0, 0, gp)$  and  $\mathcal{T} = c - gpu$ , where  $g$  is the gravitational constant.

In a more general way, we can consider external forces of gravitational type  $\mathcal{F} = (0, 0, \mathcal{E}(z))$  which only depend of the height function. In this case, the equilibrium condition can be written by

$$(1 + q^2)u_{xx} - 2pqu_{xy} + (1 + p^2)u_{yy} = \dot{\varphi}(u)W^2, \quad (0.3)$$

where  $(\cdot)$  denotes the usual derivative with respect to  $z$  and  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  is the smooth function given by

$$\varphi(z) = -\log \left( \int_{z_0}^z \mathcal{E}(t) dt \right).$$

Equivalently, we can write the equation (0.3) in terms of the mean curvature vector  $\mathbf{H}$  of the surface by

$$\mathbf{H} = \dot{\varphi} \vec{e}_3^\perp, \quad (0.4)$$

where  $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$  is the usual orthonormal frame of  $\mathbb{R}^3$  and  $\perp$  stands the projection to the normal bundle.

This equation allows us to introduce the main class of surfaces of this doctoral thesis. Let  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  be a smooth function and let  $\Sigma$  be an isometric orientable immersion in  $\mathbb{R}^2 \times ]a, b[$ , we will say that  $\Sigma$  is a  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surface if and only if the mean curvature vector  $\mathbf{H}$  satisfies the previous equation (0.4). T. Ilmanen, [36], proved that any  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surface can be viewed as a minimal surface in  $\mathbb{R}^2 \times ]a, b[$  with the following metric

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = e^\varphi \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the usual Euclidean metric in  $\mathbb{R}^3$ . The Riemannian manifold  $\mathcal{I}^\varphi = (\mathbb{R}^2 \times ]a, b[, \langle \cdot, \cdot \rangle^\varphi)$  will be called *Ilmanen space*. Furthermore, we can see any  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surface in  $\mathbb{R}^3$  as a critical point, under any normal variation with compact support, of the following weighted area functional

$$\mathcal{A}^\varphi = \int_{\Sigma} e^\varphi d\Sigma,$$

where  $d\Sigma$  is induced volume element by the Euclidean metric of  $\mathbb{R}^3$ .

This kind of surfaces has been widely studied, specially from the view-point of Calculus of Variations. Classical results about existence and regularity of the solutions of the Plateau problem for the equation (0.3) can be found in [7, 27, 28, 29, 32, 73]. But contributions from a more geometric viewpoint has been given only for some particular functions  $\varphi$ . It is interesting to mention the following cases:

- *Translating solitons*, when  $\varphi(z) = z$ . This family is characterized due to  $t \rightarrow \Sigma + t\vec{e}_3$  is a mean curvature flow, i.e., such that normal component of the velocity at each point is equal to the mean curvature at that point  $\mathbf{H} = \vec{e}_3^\perp$ . Recent advances in the understanding of its local and global geometry can be found in [51, 50, 30, 72, 74].
- *$\alpha$ -minimal singular surfaces*, when  $\varphi(z) = \alpha \log z$ ,  $z > 0$  and  $\alpha$  is a constant. When  $\alpha = 1$ ,  $\Sigma$  describes the shape of a "hanging roof", i.e., a heavy surface in a gravitational field that, according the architect F. Otto [61, pp.290], are of importance for the construction of perfect domes. For the value  $\alpha = -2$ , we recover the minimal surfaces of the hyperbolic space in the halfspace model. We refer to [17, 18, 45, 46, 47, 48, 49] for some progress in this family.

The goal of this work is to develop a global theory of  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  for a wide family of functions  $\varphi$ . Moreover, the existence of a bijective correspondence between minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  and spacelike maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski spacetime  $\mathbb{L}^3$  has motivated us to extend it between  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  and spacelike  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal surfaces in  $\mathbb{L}^3$ .

As a general rule, throughout this work, we are going to assume that the smooth function  $\varphi$  verifies the following condition

$$\varphi : ]a, b[ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{is strictly monotone.} \quad (0.5)$$

In the Chapter 1, we describe the work of Poisson in [65], which allow us to obtain the equation (0.3). Next, we study the geometry of the Ilmanen space and relate the curvatures of a surface in  $\mathcal{I}^\varphi$  with the curvatures of this surface in  $\mathbb{R}^3$ , see Proposition 2.4.

On the other hand, we also prove the equivalence between the usual stability as minimal surface in  $\mathcal{I}^\varphi$  and the stability (as locally minimum) of the weighted area functional  $\mathcal{A}^\varphi$ , see Theorem 2.18. In the last part of this chapter and by using the maximum principle for elliptic operators together with the Hamilton principle [67, Theorem 2.3], we obtain the following results for the mean curvature  $H$  and the Gauss curvature  $K$ , see Theorems 2.22 and 2.23:

- Let  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  be a smooth function satisfying (0.5) and  $\ddot{\varphi} + \lambda\dot{\varphi}^2 \geq 0$ , for some  $\lambda > 0$ . If  $\Sigma$  is a  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal immersion with mean curvature  $H \leq 0$ , then either  $H < 0$  or  $H \equiv 0$ .
- Let  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  be a smooth function satisfying (1.10) and  $\ddot{\varphi} \leq 0$ . If  $\Sigma$  is a locally convex  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal immersion, then either  $K > 0$  or  $K \equiv 0$ .

Due to the difficulty of studying the solutions of the equation (0.3) in a general situation, we are going to focus in the study of  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal graphs invariants by a uniparameter group of rigid motions in the Chapter 2. Actually, we consider examples that are invariant by either horizontal translations or by the group of vertical rotations. In the first case, besides vertical planes, we may consider that  $u = u(x)$ ,  $x \in I$  depending only of  $x$ . From (0.3), the generalized cylinder  $\Sigma = \{(x, y, u(x)) \mid x \in I, y \in \mathbb{R}\}$  is a  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surface if and only if the function  $u$  satisfies de following ordinary differential equation

$$u''(x) = \dot{\varphi}(u)(1 + u'(x)^2). \quad (0.6)$$

From its physical interpretation, any solution of (0.6) will be called  $\varphi$ -catenary and the corresponding generalized cylinder will be called  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenary cylinder. If we rotate a  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenary cylinder an angle  $\theta \in ]0, \pi/2[$  with respect to the axis  $OX$  and apply an homothety of factor  $\frac{1}{\cos(\theta)}$ , the resultating surface is also  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal, it will be called tilted  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal cylinder. In order to characterize these examples, in Theorem 3.7 we classify the complete flat  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  when  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies (0.5):

- If  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is a diffeomorphism, up to vertical rotation, any complete flat  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surface is either a vertical plane or a  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenary cylinder (maybe titled).

In the second case, we consider rotationally symmetric  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surfaces which are invariant under the group of vertical

rotations that fix the axis  $OZ$ . From (0.4), the arc-length parametrized generating curve

$$\gamma(s) = (x(s), 0, z(s)), \quad s \in I \subset \mathbb{R},$$

of a such surface satisfies the following differential system

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta) \\ z' = \sin(\theta), \\ \theta' = \dot{\varphi}(z)\cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{x}, \end{cases} \quad (0.7)$$

In Theorems 3.13 and 3.19, we establish the geometric properties of the rotational  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surfaces according to two types of surfaces: one is globally convex with only one complete embedded end (it is called  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -*Bowl*) and the other has two complete embedded convex ends and has a generating curve of winglike type (it is called  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -*minimal catenoid*).

It is of standing out that the cylindrically asymptotic behaviour of these surfaces only depends of the polynomial growth of the function  $\varphi$ , see Proposition 3.21. More precisely,

- If  $\dot{\varphi}$  has at most lineal growth, then the function  $x(s)$  is not bounded. Otherwise, if  $\dot{\varphi}$  grows as  $u^\alpha$  for some  $\alpha > 1$ , then  $x(s)$  is bounded and so, the surface is cylindrically asymptotic.

This result has motivated us to study the asymptotic behavior of the rotationally symmetric examples when  $\varphi$  is a strictly increasing convex smooth function with at most quadratic growth, that is, if the function  $\dot{\varphi}$  satisfies the following expression for  $u$  large enough:

$$\dot{\varphi}(u) = \alpha u + \beta + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{u^n}, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad (0.8)$$

with  $\alpha \geq 0$  and  $\beta > 0$  if  $\alpha = 0$ . In these conditions, any rotationally symmetric solution of (0.3) has the following asymptotic behavior (see Theorems 3.25 and 3.30)

- If  $\alpha > 0$ ,  $\varphi(u)(r) = C e^{\alpha r^2} + O(r^2)$ , for some  $C > 0$ ,
- If  $\alpha = 0$ , then, up to constant, we get that

$$\mathcal{G}(u)(r) = \frac{r^2}{2} - \frac{1}{\beta^2} \log(r) + O(r^{-2}), \quad \mathcal{G}(u) = \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\dot{\varphi}(\xi)}.$$

Notice that, this result generalizes the Theorem of J. Clutterbuck, O. Schnürer and F. Schulze in [14] for rotationally symmetric translating solitons.

In 1983, R. Schoen, [69], obtained estimates for the length of the second fundamental form  $|\mathcal{S}|$  of a stable minimal surface  $\Sigma$  with boundary  $\partial\Sigma$  in a Riemannian 3-manifold. In particular, in  $\mathbb{R}^3$ , he proved the existence of a constant  $C > 0$  such that

$$|\mathcal{S}(p)| \leq \frac{C}{d_\Sigma(p, \partial\Sigma)}, \quad p \in \Sigma.$$

where  $d_\Sigma$  stands for the intrinsic distance of  $\Sigma$ . Later, in 2010, H. Rosenberg, R. Souam and E. Toubiana, [66], obtained an estimate for the length of the second fundamental form, depending on the distance to the boundary, for any stable surface  $\Sigma$  with constants mean curvature  $H$  in a complete Riemannian 3-manifold of bounded sectional curvature  $|\mathbb{K}| \leq \beta < +\infty$ . They proved the existence of a constant  $C > 0$  such that

$$|\mathcal{S}(p)| \leq \frac{C}{\min\{d_\Sigma(p, \partial\Sigma), \pi/2\sqrt{\beta}\}}, \quad p \in \Sigma.$$

More recently, in 2016, B. White, [76], found an estimate for the length of the second fundamental form for minimal surfaces with finite total absolute curvature less than  $4/\pi$  in Riemannian 3-manifolds, which depends on the distance to the boundary, the sectional curvature and the gradient of the sectional curvature of the ambient space.

On the other hand, following the method of T. H. Colding y W. P. Minicozzi in [15, 16], J. Spruck and L. Xiao, [72], have also obtained area and curvature bounds for complete translating soliton

in  $\mathbb{R}^3$  with non-positive mean curvature. As an application of these estimates together with the Omori-Yau maximum principle for the Laplacian, they have proved one of the fundamental results in the recent development of the translational soliton theory conjectured by X. Wang in [75]. Namely,

If  $\Sigma$  is a complete translating soliton in  $\mathbb{R}^3$  with non-positive mean curvature, then  $\Sigma$  is convex.

Motivated by these results, the Chapter 3 is dedicated to study properly embedded  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surfaces with non-positive mean curvature in  $\mathbb{R}_a^3 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, \vec{e}_3 \rangle > a\}$ .

Firstly, we prove that if the function  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verifies

$$\dot{\varphi} > 0, \quad \ddot{\varphi} \geq 0 \quad \text{on } ]a, +\infty[, \quad (0.9)$$

this class of surfaces are stable, see the Proposition 4.2. Moreover, we obtain area bounds. Specifically, if we also assume that

$$\Gamma := \sup_{]a, +\infty[} (2\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) < +\infty. \quad (0.10)$$

then, we prove

- Let  $\Sigma$  be a  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surface with  $H \leq 0$  in  $\mathbb{R}_a^3$  and let  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a smooth function satisfying (0.9) and (0.10) on  $]a, +\infty[$ . Then, for any point  $p \in \Sigma$  there exists a radius  $\rho > 0$  verifying  $2\rho\dot{\varphi}(\rho + x_3(p)) < \log(2)$  and  $\sqrt{|\Gamma|} \rho < 1$  such that the geodesic disk  $\mathcal{D}_\rho(p)$  of radius  $\rho$  centered in  $p$  is disjoint from the cut locus of  $p$  and

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}_\rho(p)) < 4\pi\rho^2,$$

where  $\mathcal{A}(\cdot)$  is the intrinsic area of  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}^3$ .

To obtain curvature bounds, it is necessary to have a good control at infinity of the function  $\varphi$ . To be more precise, we are going to

consider that the function  $z \rightarrow \frac{\dot{\varphi}(z)}{z}$  is analytic at  $+\infty$ , i.e.,  $\dot{\varphi}$  satisfies the series expansion (0.8).

From an argument of blow-up type (see Theorem 4.12) together with a compactness result due to B.White, [76], we prove that

- If  $\Sigma$  is a properly embedded  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surface with  $H \leq 0$  in  $\mathbb{R}_a^3$  with locally bounded genus and  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies (0.8) y (0.9) on  $]a, +\infty[$ , then  $|\mathcal{S}|/\dot{\varphi}$  is bounded on  $\Sigma$ . In particular, if  $\alpha = 0$ ,  $|\mathcal{S}|$  is bounded, and if  $\alpha \neq 0$ ,  $|\mathcal{S}|$  may go to infinity but with at most a linear growth in height.

As application of the previous area and curvature bounds together with an Omori-Yau maximum principle (see [2, Theorem 3.2]), we obtain a characterization of the convexity (see the Theorem 4.22) that generalizes the Spruck-Xiao result in [72].

- Let  $\Sigma$  be a properly embedded  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surface in  $\mathbb{R}_a^3$  with  $H \leq 0$  and locally bounded genus and let  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a smooth function satisfying (0.8), (0.9) and  $\ddot{\varphi} \leq 0$  on  $]a, +\infty[$ . Then,  $\Sigma$  is convex if and only if the function  $\alpha K$  is bounded from below, where  $K$  is the Gauss curvature.

The previous area and curvature bounds have allowed us to characterize the examples  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bowls and  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenary cylinders thanks to their asymptotic behavior in the Chapter 4. Precisely, in the Theorems 5.5 and 5.18, we prove the following.

- Let  $\Sigma$  be a complete properly embedded  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surface in  $\mathbb{R}_a^3$  with only one end which is smooth asymptotic to  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bowl and let  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  be a smooth strictly increasing convex function with at most quadratic growth. Then,  $\Sigma$  must be coincide with a  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bowl.
- Let  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  and  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  be a smooth strictly increasing convex function such

that  $e^{-\varphi} \in L^1(]a, +\infty[)$  and bounded quotient  $\ddot{\varphi}/\dot{\varphi}$ . If  $\Sigma$  a complete connected  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal graph in  $\mathbb{R}_a^3$  which is  $\mathcal{C}^\infty$ -asymptotic to  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenary cylinder  $\mathcal{G}^h$ , outside a cylinder, for some  $h \in ]a, +\infty[$ , then  $\Sigma$  coincides with some  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenary cylinder with the same asymptotic behavior that  $\mathcal{G}^h$ .

The main tools used in the proofs of these results have been the Alexandrov method by vertical planes, see [1], together with the ideas of R.Schoen for minimal surfaces in [70].

I would like pointing out that F. Martín, A. Savas-Halilaj y K. Smoczyk in [51] and F. Martín, J. Pérez, A. Savas-Halilaj y K. Smoczyk in [50] obtained similar results for the particular case of the translating solitons in  $\mathbb{R}^3$ .

Calabi observed that there is a natural correspondence between the solutions of the minimal surface equation in  $\mathbb{R}^3$  with those of the maximal spacelike surface equation in  $\mathbb{L}^3$ . In the Chapter 5, we show how this correspondence can be extended between  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal graphs in  $\mathbb{R}^3$  and spacelike  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal graphs of  $\mathbb{L}^3$ . Moreover, we give also applications in the study and description of new examples.

Firstly, in the Section 6.1, we will prove that the equation of the  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal graphs (0.3) on simply connected domains  $\Omega$  is equivalent to the integrability of the following system

$$\phi_{xx} = \frac{1 + u_x^2}{W} e^{\varphi(u)}, \quad \phi_{xy} = \frac{u_x u_y}{W} e^{\varphi(u)}, \quad \phi_{yy} = \frac{1 + u_y^2}{W} e^{\varphi(u)}, \quad (0.11)$$

where, the function  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  is unique up to linear functions.

Next, we briefly introduce the family of spacelike  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal surfaces in  $\mathbb{L}^3$ . We prove that the graph of a smooth function  $\bar{u} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  is a spacelike  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal surface if and only if  $\bar{u}$  is solution of the following elliptic differential equation

$$(1 - \bar{u}_x^2) \bar{u}_{yy} + (1 - \bar{u}_y^2) \bar{u}_{xx} + 2\bar{u}_x \bar{u}_x \bar{u}_{xy} + \dot{\varphi}(\bar{u}) \bar{W}^2 = 0, \quad (0.12)$$

where  $\bar{W} = \sqrt{1 - \bar{u}_x^2 - \bar{u}_y^2}$ . If we assume that  $\tilde{\Omega}$  is simply connected,

then the equation (0.12) is equivalent to the integrability of the following system

$$\bar{\phi}_{xx} = \frac{1 - \bar{u}_x^2}{\bar{W}} e^{\varphi(\bar{u})}, \quad \bar{\phi}_{xy} = -\frac{\bar{u}_x \bar{u}_y}{\bar{W}} e^{\varphi(\bar{u})}, \quad \bar{\phi}_{yy} = \frac{1 - \bar{u}_y^2}{\bar{W}} e^{\varphi(\bar{u})} \quad (0.13)$$

where, the function  $\bar{\phi} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  is unique up to lineal functions.

Theses conditions have allowed us to describe a correspondence between  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal graphs in  $\mathbb{R}^3$  and spacelike  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal graphs in  $\mathbb{L}^3$ , see the Theorems 6.3 and 6.6, as follows,

- Let  $\Omega$  be a simply connected planar domain and let  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\psi(x, y) = (x, y, u)$  be a  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal graph in  $\mathbb{R}^3$ . If  $\phi$  is a solution of the system (0.11) and  $\vartheta$  is a primitive function of  $e^\varphi$ , then the immersion  $\tilde{\psi} : \Omega \rightarrow \mathbb{L}^3$  given by

$$\tilde{\psi} = (\phi_x, \phi_y, \vartheta(u)),$$

is a spacelike  $[-\varphi \circ \vartheta^{-1}, \vec{e}_3]$ -maximal graph over the Legendre's transform of  $\phi$ , see [24, Chapter 3]. Moreover, the induced metrics  $g$  and  $\tilde{g}$  of  $\psi$  and  $\tilde{\psi}$ , respectively, are conformal and the mean curvature  $H(\tilde{H})$  together with the Gauss curvature  $K(\tilde{K})$  of  $\psi(\tilde{\psi})$  satisfy

$$\begin{aligned} \tilde{H} + W^2 e^{-\varphi(u)} H &= 0, \\ \tilde{K} + W^4 e^{-2\varphi(u)} K &= 0. \end{aligned}$$

- Let  $\tilde{\Omega}$  be a simply connected domain,  $\tilde{\psi} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{L}^3$ ,  $\tilde{\psi}(x, y) = (x, y, \bar{u})$  is a  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal graph in  $\mathbb{L}^3$ ,  $\bar{\phi}$  is a solution of the system (0.13) and  $\vartheta$  is a primitive function of  $e^\varphi$ . Then, the immersion given by

$$\psi = (\bar{\phi}_x, \bar{\phi}_y, \vartheta(\bar{u})),$$

is a  $[-\varphi \circ \vartheta^{-1}, \vec{e}_3]$ -minimal graph on the Legendre's transform of  $\phi$  whose induced metric  $g$ , mean curvature  $H$

and Gauss curvature  $K$  satisfy

$$\begin{aligned}g &= \frac{e^{2\varphi(\bar{u})}}{\bar{W}^2} \bar{g}, \\H + e^{-\varphi(\bar{u})} \bar{W}^2 \bar{H} &= 0, \\K + e^{-2\varphi(\bar{u})} \bar{W}^4 \bar{K} &= 0,\end{aligned}$$

where  $\bar{W} = \sqrt{1 - \bar{u}_x^2 - \bar{u}_y^2}$  and  $\bar{g}$ ,  $\bar{H}$  y  $\bar{K}$  are the induced metric, the mean curvature and the Gauss curvature of the spacelike graph  $\bar{u}$ , respectively.

The last results of this work (see Sections 6.3 and 6.4) are applications of this correspondence to describing geometric properties of new spacelike  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal surfaces (resp.  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surfaces) from known properties of examples in  $\mathbb{R}^3$  (resp.  $\mathbb{L}^3$ ). We can summarize these results as follow

- If  $\psi$  is a translating soliton in  $\mathbb{R}^3$ , then  $\tilde{\psi}$  is a spacelike  $(-1)$ -maximal singular in  $\mathbb{L}^3$ .
- If  $\tilde{\psi}$  is a translating soliton in  $\mathbb{L}^3$ , then  $\psi$  is a  $(-1)$ -minimal singular in  $\mathbb{R}^3$ .
- The property of to being rotationally symmetric with respect to the axis  $OZ$  is a preserved property by the correspondence.
- There exists spacelike translating solitons in  $\mathbb{L}^3$  which are rotationally symmetric entire graphs with a lineal growth.
- For any  $\alpha < -1$ , there exists spacelike  $\alpha$ -maximal singular entire graphs in  $\mathbb{R}^3$  which are rotationally symmetric and strictly convex.
- For any  $\alpha - 1$ , there exists two spacelike  $\alpha$ -maximal singular entire graphs (resp. translating solitons) with a lineal growth which are asymptotic to the light cone of the origin with an isolated singularity at this point.

---

Finally, we propose a list of open problems together with future research lines about the theory of  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surfaces. Motivated by the classical theory of minimal surfaces and the recent works about translating solitons and  $\alpha$ -minimal singular surfaces (see for instance [4, 6, 30, 33, 34, 35, 40, 45, 58, 59, 63, 68, 72, 74]), the goals of these problems are: to study the existence of new complete examples of  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surfaces, to give Berstein's results and to find a classification of properly embedded  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surfaces with non-positive mean curvature when  $\varphi$  is a strictly increasing convex smooth function with at most quadratic growth. We also trust that the Calabi's correspondence provides us a suitable tool to guarantee the existence of new spacelike  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal surfaces in  $\mathbb{L}^3$  and to study their geometry.

# Capítulo 1

---

## Introducción

---

Uno de los problemas más profundamente tratados en Análisis Geométrico es el estudio de superficies mínimas en una variedad tridimensional. Estas superficies, caracterizadas por ser puntos críticos del funcional área, aparecen como generalización 2-dimensional a las geodésicas de una variedad y tienen multitud de aplicaciones en diferentes campos de la ciencia, como por ejemplo, en la teoría de relatividad general y en arquitectura [3, 5, 8, 21, 46, 61].

Si bien el caso más clásico, las superficies mínimas del espacio euclídeo tridimensional, ha sido estudiado desde diferentes áreas de la matemática y cuenta con una extensa bibliografía, la teoría de superficies mínimas en variedades tridimensionales homogéneas y en variedades conformemente llanas, ha experimentado, en los últimos años, un tremendo auge, permitiendo demostrar que el comportamiento de dichas superficies es muy diferente respecto del de la familia de superficies mínimas con las mismas propiedades en  $\mathbb{R}^3$ .

A continuación, y centrándonos en los aspectos más relacionados con nuestro trabajo, expondremos brevemente los orígenes y el desarrollo de la teoría de superficies mínimas que abordamos en esta memoria.

Si bien a finales del siglo XVIII, J. L. Lagrange [41, Part I, Sec. V,

Chap. III, § II], en su estudio sobre Mecánica Analítica, obtuvo ya la ecuación de una superficie en equilibrio bajo la acción del campo de fuerza gravitacional, no fue hasta principios del siglo XIX cuando, en su trabajo *Sur les surfaces elastique* [65, pp. 173-187], S. D. Poisson estudió, de una forma más general, el equilibrio de una superficie flexible e inextensible bajo un campo de fuerzas externo, ver también Cisa de Gresy [13] y J.H. Jellett [37]. Poisson probó que la condición de equilibrio para una superficie  $u = u(x, y)$  sobre un dominio plano  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  sometida a la acción de un campo de fuerzas externo  $\mathcal{F} = (X, Y, Z)$  en  $\mathbb{R}^3$  y con iguales fuerzas internas de tensión  $\mathcal{T}$  sobre la superficie, está descrita por las dos siguientes condiciones,

$$Z - pX - qY + \frac{\mathcal{T}}{W^2} ((1 + q^2)u_{xx} - 2pqu_{xy} + (1 + p^2)u_{yy}) = 0, \quad (1.1)$$

$$Xdx + Ydy + Zdz + d\mathcal{T} = 0, \quad (1.2)$$

donde  $p = u_x$ ,  $q = u_y$ ,  $W = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$  y  $(\cdot)_x, (\cdot)_y$  denotan la derivada parcial usual respecto  $x$  e  $y$ . Obsérvese que (1.2) es equivalente a que la fuerza  $\mathcal{F}$  tiene que ser conservativa y su potencial, salvo constantes, ha de coincidir sobre la superficie con la tensión  $\mathcal{T}$ .

En su estudio, Poisson destaca los siguientes casos:

- *La ecuación de las superficies mínimas,*

$$(1 + q^2)u_{xx} - 2pqu_{xy} + (1 + p^2)u_{yy} = 0, \quad (1.3)$$

cuando  $\mathcal{F} \equiv 0$ .

- *La ecuación de las superficies capilares*

$$\frac{\mathcal{T}}{W^3} ((1 + q^2)u_{xx} - 2pqu_{xy} + (1 + p^2)u_{yy}) + a + bu = 0, \quad (1.4)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $\mathcal{T}$  son constantes, cuando el campo  $\mathcal{F}$  es ortogonal a la superficie y  $\|\mathcal{F}\|$  depende linealmente de la altura.

- *La ecuación de una superficie flexible bajo el campo de fuerza gravitacional*

$$(1 + q^2)u_{xx} - 2pqu_{xy} + (1 + p^2)u_{yy} = \frac{g\rho}{g\rho u - c} W^2, \quad (1.5)$$

cuando  $\mathcal{F} = (0, 0, g\rho)$  y  $\mathcal{T} = c - g\rho u$ , donde  $g$  es la constante de gravitación universal y  $\rho$  es una constante representando la densidad de la superficie.

Si consideramos campos de fuerzas externos de *tipo gravitacional* más generales, esto es, si  $\mathcal{F} = (0, 0, \mathcal{E}(z))$  es un campo vertical con  $\|\mathcal{F}\|$  dependiendo solo de la altura, la condición de equilibrio de una superficie con densidad  $\mathcal{E}(z)$ , viene determinada por la siguiente ecuación,

$$(1 + q^2)u_{xx} - 2pqu_{xy} + (1 + p^2)u_{yy} = \dot{\varphi}(u)W^2, \quad (1.6)$$

donde  $(\dot{\cdot})$  denota a la derivada usual con respecto a  $u$  y  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  es la función definida por

$$\varphi(z) = -\log \left( \int_{z_0}^z \mathcal{E}(t) dt \right). \quad (1.7)$$

En términos del vector curvatura media  $\mathbf{H}$  de la superficie, la condición (1.6) también se escribe como

$$\mathbf{H} = \dot{\varphi} \vec{e}_3^\perp, \quad (1.8)$$

donde por  $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$  representamos la base usual de  $\mathbb{R}^3$ . Esta ecuación permite introducir las superficies objeto de nuestro estudio. Concretamente, si  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  es una función diferenciable y  $\Sigma$  una inmersión orientable en  $\mathbb{R}^2 \times ]a, b[$ , diremos que  $\Sigma$  es una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima si y sólo si su vector curvatura media,  $\mathbf{H}$ , satisface (1.8).

En 1994, T. Ilmanen, [36], demostró que toda superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima puede verse como una superficie mínima en  $\mathbb{R}^2 \times ]a, b[$  con la métrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle^\varphi = e^\varphi \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa el producto escalar usual de  $\mathbb{R}^3$ . A la 3-variedad Riemanniana  $\mathcal{I}^\varphi = (\mathbb{R}^2 \times ]a, b[, \langle \cdot, \cdot \rangle^\varphi)$  se le conoce como *espacio de Ilmanen* y según este resultado, toda superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima en  $\mathbb{R}^3$  también puede ser considerada como punto crítico del siguiente funcional área con peso

$$\mathcal{A}^\varphi(\Sigma) = \int_\Sigma e^\varphi d\Sigma, \quad (1.9)$$

donde  $d\Sigma$  denota el elemento de volumen de la métrica inducida por la euclídea de  $\mathbb{R}^3$ .

Este tipo de superficies han sido ampliamente estudiadas desde el punto de vista del cálculo de variaciones. Los resultados clásicos sobre la ecuación (1.6) y la existencia y regularidad de las soluciones del problema de Plateau para (1.9) pueden encontrarse, por ejemplo, en [7, 27, 28, 29, 32, 73]. Sin embargo, en cuanto a su geometría solo se han realizado avances significativos para algunos casos particulares, entre los que destacamos:

- *solitones de traslación*, obtenidos cuando  $\varphi(z) = z$  es la función altura. Esta familia está caracterizada también porque

$$t \rightarrow \Sigma + t\vec{e}_3$$

es un flujo de curvatura media, es decir, la componente normal de la velocidad en cada punto es igual a la curvatura media en ese punto. Su estudio ha experimentado un tremendo auge en los últimos años y ha permitido caracterizar ejemplos clásicos por su comportamiento en infinito, ver [51, 50], o clasificar los grafos verticales completos que son solitones de traslación, [30, 72, 74].

- *superficies  $\alpha$ -mínimas singulares*, que se obtienen cuando  $\varphi(z) = \alpha \log z$ ,  $z > 0$  y  $\alpha$  constante. Para  $\alpha = 1$ , estas superficies describen la forma de un “techo colgante” que según el arquitecto F. Otto [61, pp.290] son de gran importancia en la construcción de cúpulas perfectas. Para  $\alpha = -2$  recuperamos las superficies mínimas del espacio hiperbólico en el modelo del semiespacio. En esta familia se han realizado importantes avances en la existencia y no existencia de grafos enteros, ver [17, 18], y en la caracterización de ejemplos rotaciones o traslacionalmente invariantes, [45, 46, 47, 48, 49].

El objetivo de este trabajo es desarrollar, desde un punto de vista geométrico, una teoría global de superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas en  $\mathbb{R}^3$  que abarque a una amplia familia de funciones  $\varphi$  y que, de un lado, permita estudiar y clasificar los ejemplos más simétricos y, de otro, nos

sirva para abordar problemas clásicos sobre estimaciones de área y curvatura, fundamentales para controlar globalmente su geometría. La existencia de una correspondencia natural entre las superficies mínimas en  $\mathbb{R}^3$  y las superficies espaciales maximales en el espacio de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$ , ha motivado también que nos ocupemos de extenderla a las familias de superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas en  $\mathbb{R}^3$  y de superficies espaciales  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximales en  $\mathbb{L}^3$ .

Como norma general, a lo largo de la memoria vamos a suponer que la función diferenciable  $\varphi$  verifica:

$$\varphi : ]a, b[ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{es estrictamente monótona.} \quad (1.10)$$

Empezamos este trabajo introduciendo la familia de superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas en  $\mathbb{R}^3$  desde los diferentes puntos de vista que hemos mencionado. Describimos brevemente en el Capítulo 1 que el estudio realizado por Poisson en [65] permite obtener (1.6) como la ecuación de una superficie bajo un campo de fuerza de tipo gravitacional y pasamos entonces a estudiar el espacio de Ilmanen, a dar condiciones suficientes para que dicha variedad tenga geometría acotada y a relacionar la geometría de una superficie vista en  $\mathbb{R}^3$  con la de dicha superficie en el espacio de Ilmanen. Este hecho nos permite mostrar la equivalencia de las siguientes afirmaciones, ver Teorema 2.13,

- $\Sigma$  es una inmersión  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima en  $\mathbb{R}^3$ ,
- $\Sigma$  es un punto crítico del funcional area  $\mathcal{A}^\varphi$  bajo variaciones normales con soporte compacto,
- $\Sigma$  es una inmersión mínima en el espacio de Ilmanen  $\mathcal{I}^\varphi$ ,
- $\Sigma$  es una inmersión flexible e inextensible en  $\mathbb{R}^3$  bajo la acción de un campo gravitacional y con fuerzas internas de tensión iguales;

y probar también la equivalencia entre la estabilidad usual como superficies mínimas en el espacio de Ilmanen y la estabilidad como puntos críticos del funcional  $\mathcal{A}^\varphi$ , ver Teorema 2.18.

Usando el principio del máximo para operadores elípticos y el principio de Hamilton [67, Teorema 2.3], obtenemos las siguientes propiedades para las curvatura media,  $H$ , y de Gauss,  $K$ , en este tipo de superficies, ver Teoremas 2.22 y 2.23

- Si además de (1.10),  $\ddot{\varphi} + \lambda\dot{\varphi}^2 \geq 0$ , para algún  $\lambda > 0$  y  $\Sigma$  es una inmersión  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima con curvatura media  $H \leq 0$ , entonces  $H < 0$  o  $H \equiv 0$ .
- Si además de (1.10),  $\ddot{\varphi} \leq 0$  y  $\Sigma$  es una inmersión  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima localmente convexa, entonces  $K > 0$  o  $K \equiv 0$ .

La complejidad de estudiar las soluciones de la ecuación (1.6) en toda su generalidad, nos lleva a centrarnos en el Capítulo 2 en el estudio de grafos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos invariantes por algún grupo uniparamétrico de movimientos en  $\mathbb{R}^3$ . En estos casos, (1.6) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria (EDO) cuyas soluciones proporcionarán los ejemplos más simétricos de esta teoría. Concretamente, vamos a considerar aquellos ejemplos invariantes por traslaciones horizontales (cilindros generalizados) o por el grupo de rotaciones verticales (superficies de revolución).

En el primer caso, de (1.6), el cilindro generalizado

$$\Sigma = \{(x, y, u(x)) \mid x \in I, y \in \mathbb{R}\}$$

es  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimo si y sólo si la función  $u$  verifica la siguiente EDO

$$u''(x) = \dot{\varphi}(u)(1 + u'(x)^2). \quad (1.11)$$

Toda solución de (1.11) se dirá que es una  $\varphi$ -catenaria y el correspondiente cilindro generalizado se llamará *cilindro*  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenaria. Si rotamos un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenaria un ángulo  $\theta \in ]0, \pi/2[$  entorno al eje OX y aplicamos una homotecia de razón  $\frac{1}{\cos(\theta)}$  centrada en el origen, la superficie resultante es también  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima y nos referiremos a ella como un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenaria ladeado. Nuestro primer resultado en esta línea, ver Teorema 3.7, extiende la clasificación de solitones de traslación llanos probada por F. Martín, A. Savas-Halilaj y K. Smoczyk en [51]:

- Si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente monótona, salvo una rotación vertical, toda superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima y completa de curvatura cero es o un plano vertical o un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario (quizás ladeado).

La idea principal para su demostración radica en que dada una recta sobre la superficie siempre podemos encontrar un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario (posiblemente ladeado) conteniendo a dicha recta y tangente a la superficie a lo largo de ella.

En el segundo caso consideramos las superficies de revolución  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas invariantes bajo el grupo de rotaciones verticales. De (1.8), la curva generatriz

$$\gamma(s) = (x(s), 0, z(s)), \quad s \in I \subset \mathbb{R},$$

parametrizada por el arco, de una tal superficie, debe verificar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta) \\ z' = \sin(\theta), \\ \theta' = \dot{\varphi}(z)\cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{x}, \end{cases} \quad (1.12)$$

cuyo estudio ha permitido establecer, en el caso de que  $\varphi$  sea estrictamente creciente y convexa, la existencia de dos tipos de superficies de revolución, Teoremas 3.13 y 3.19:

- superficies globalmente convexas con un final, denominadas  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -*Boles*,
- superficies con la topología de un anillo, cuya curva generatriz es de tipo ala, denominadas *catenoides*  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -*mínimos*.

Es de destacar que el hecho de que estas superficies sean o no cilíndricamente acotadas depende solo del crecimiento polinomial de la función  $\varphi$ , ver Proposición 3.21. Más concretamente, probamos:

- Si  $\dot{\varphi}$  crece a lo sumo linealmente, entonces la función  $x(s)$  no está acotada. Cuando el crecimiento de  $\dot{\varphi}$  es

como el de  $u^\alpha$  para algún  $\alpha > 1$ , entonces  $x(s)$  está acotada y por tanto la correspondiente superficie es cilíndricamente acotada.

Este resultado nos ha llevado a estudiar el comportamiento asintótico de los ejemplos rotacionalmente simétricos cuando  $\varphi$  es una función estrictamente creciente, convexa y con un crecimiento a lo sumo cuadrático. Para ser más precisos, si suponemos que para  $u$  suficientemente grande,  $\dot{\varphi}$  está dada por

$$\dot{\varphi}(u) = \alpha u + \beta + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{u^n}, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad (1.13)$$

con  $\alpha \geq 0$  y  $\beta > 0$  si  $\alpha = 0$ , entonces, ver Teoremas 3.25 y 3.30, cualquier solución  $u$  de (1.6) rotacionalmente simétrica tiene el siguiente comportamiento asintótico:

- Si  $\alpha > 0$ ,  $\varphi(u)(r) = C e^{\alpha r^2} + O(r^2)$ , para algún  $C > 0$ ,
- Si  $\alpha = 0$ , entonces, salvo constante

$$\mathcal{G}(u)(r) = \frac{r^2}{2} - \frac{1}{\beta^2} \log(r) + O(r^{-2}), \quad \mathcal{G}(u) = \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\dot{\varphi}(\xi)}.$$

Este resultado extiende al obtenido por J. Clutterbuck, O. Schnürer y F. Schulze en [14] para los solitones de traslación rotacionalmente simétricos.

En 1983, R. Schoen, [69], probó estimaciones para la longitud de la segunda forma fundamental  $\mathcal{S}$  de una superficie  $\Sigma$  mínima y estable con borde,  $\partial\Sigma$ , en una 3-variedad Riemanniana, que para el caso particular de  $\mathbb{R}^3$ , proporcionan la existencia de una constante  $C$  tal que

$$|\mathcal{S}(p)| \leq \frac{C}{d_\Sigma(p, \partial\Sigma)}, \quad p \in \Sigma.$$

donde  $d_\Sigma$  representa la distancia intrínseca de  $\Sigma$ . Posteriormente, en 2010, H. Rosenberg, R. Souam and E. Toubiana, [66], obtuvieron

también estimaciones para la longitud de la segunda forma fundamental de una superficie  $\Sigma$  estable y de curvatura media constante  $H$  en una 3-variedad de curvatura seccional  $\mathbb{K}$  acotada,  $|\mathbb{K}| \leq \beta < +\infty$ . Más concretamente, también prueban la existencia de una constante  $C > 0$  tal que

$$|\mathcal{S}(p)| \leq \frac{C}{\min\{d_\Sigma(p, \partial\Sigma), \pi/2\sqrt{\beta}\}}, \quad p \in \Sigma.$$

Algún tiempo más tarde, en 2016, B. White, [76], encontró, en términos de la distancia a la frontera y de la curvatura de la variedad ambiente, estimaciones para la longitud de la segunda forma fundamental de superficies mínimas con curvatura total finita menor que  $4\pi$  en 3-variedades riemannianas.

Recientemente, siguiendo el mismo método usado por T. H. Colding y W. P. Minicozzi en [15, 16], J. Spruck y L. Xiao, [72], han obtenido estimaciones de área y curvatura para solitones de traslación completos en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media no positiva. Como aplicación y usando el principio del máximo de Omori-Yau, ver por ejemplo [2], han conseguido demostrar uno de los resultados geométricos más celebrados en el reciente desarrollo de la teoría de solitones de traslación y que fue conjeturado por X. Wang en [75]:

Si  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  es un soliton de traslación, completo y con curvatura media no positiva, entonces  $\Sigma$  es convexo.

Motivados por estos resultados, el Capítulo 3 está dedicado a estudiar las superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas propiamente embebidas y con curvatura media no positiva en  $\mathbb{R}_a^3 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, \vec{e}_3 \rangle > a\}$ .

En primer lugar probamos que cuando la función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verifica

$$\dot{\varphi} > 0, \quad \ddot{\varphi} \geq 0 \quad \text{sobre } ]a, +\infty[, \quad (1.14)$$

esta clase de superficies son siempre estables, véase Proposición 4.2, y conseguimos también demostrar en el Teorema 4.7 estimaciones de área si además suponemos que

$$\Gamma := \sup_{]a, +\infty[} (2\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) < +\infty. \quad (1.15)$$

Concretamente, obtenemos el siguiente resultado

- Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima con  $H \leq 0$  en  $\mathbb{R}_a^3$  y sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable satisfaciendo (1.14) y (1.15) en  $]a, +\infty[$ . Entonces, para cualquier punto  $p \in \Sigma$  existe un radio  $\rho > 0$  verificando  $2\rho\dot{\varphi}(\rho + x_3(p)) < \log(2)$  y  $\sqrt{|\Gamma|} \rho < 1$  tal que el disco geodésico  $\mathcal{D}_\rho(p)$  de radio  $\rho$  centrado en  $p$  es disjunto al conjunto conjugado de  $p$  y

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}_\rho(p)) < 4\pi\rho^2,$$

donde  $\mathcal{A}(\cdot)$  es el área intrínseca de  $\Sigma$  con respecto a la métrica inducida de la euclídea de  $\mathbb{R}^3$ .

Para obtener estimaciones de curvatura usamos un argumento de tipo blow-up, ver Teorema 4.12, y un Teorema de compacidad demostrado por B.White en [76] para superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas propiamente embebidas con área y género localmente acotado. En nuestro razonamiento necesitamos que la función  $\varphi$  tenga un buen comportamiento asintótico. De forma más específica, en el Teorema 4.14, probamos:

- Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima propiamente embebida con  $H \geq 0$  en  $\mathbb{R}_a^3$  con género localmente acotado y con  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable satisfaciendo (1.13) y (1.14) en  $]a, +\infty[$ . Entonces  $|\mathcal{S}|/\dot{\varphi}$  está acotado en  $\Sigma$ .

En particular, si  $\alpha = 0$ ,  $|\mathcal{S}|$  está acotado y si  $\alpha \neq 0$ , entonces  $|\mathcal{S}|$  puede tender a infinito pero a lo sumo con un crecimiento lineal en altura.

En la última parte de este capítulo, usando las anteriores estimaciones de área y curvatura junto con un principio del máximo de Omori-Yau y argumentos de compacidad para superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas propiamente embebidas con  $H \leq 0$  en  $\mathbb{R}_a^3$ , género localmente acotado y funciones  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaciendo (1.13), (1.14) y  $\ddot{\varphi} \leq 0$  en  $]a, +\infty[$ ,

obtenemos el siguiente resultado similar al de J. Spruck y L. Xiao, [72], véase el Teorema 4.22,

- Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima propiamente embebida con  $H \leq 0$  en  $\mathbb{R}_a^3$ , género localmente acotado y  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando (1.13) y (1.14). Entonces,  $\Sigma$  es convexa si y sólo si la función  $\alpha K$  está acotada inferiormente.

Para el caso particular de los solitones de traslación, D. Hoffman, T. Ilmanen, F. Martín y B. White dieron una demostración alternativa al Teorema de Spruck-Xiao en [30].

Las anteriores estimaciones de área y curvatura han permitido también caracterizar, en el Capítulo 4, los  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Boles y cilindros  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarios por su comportamiento asintótico. Concretamente, en los Teoremas 5.5 y 5.18, probamos:

- Sea  $\Sigma$  una superficie completa  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima propiamente embebida en  $\mathbb{R}_a^3$  con un solo final diferenciablemente asintótico a un  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol y  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  una función diferenciable estrictamente creciente, convexa y con crecimiento a lo sumo cuadrático. Entonces,  $\Sigma$  es un  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol.
- Sea  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  y  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , un difeomorfismo estrictamente creciente, convexo, tal que  $e^{-\varphi} \in L^1(]a, +\infty[)$  y  $\ddot{\varphi}/\dot{\varphi}$  está acotado. Si  $\Sigma$  es un grafo completo, conexo,  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimo,  $\mathcal{C}^\infty$ -asintótico, fuera de un cilindro, a un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario,  $\mathcal{G}^h$  para algún  $h \in ]a, +\infty[$ , entonces  $\Sigma$  coincide con un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario con el mismo comportamiento asintótico que  $\mathcal{G}^h$ .

Las principales herramientas usadas en la demostración de estos resultados han sido el método de Alexandrov para planos verticales, ver [1], y las ideas de R. Schoen para superficies mínimas en [70]. En el Teorema 5.5, probamos que nuestra superficie es simétrica

respecto a cualquier plano vertical conteniendo el eje OZ y, por tanto, es rotacionalmente simétrica cortando ortogonalmente al eje de rotación; mientras que en el Teorema 5.18 demostramos, gracias al principio del máximo para operadores elípticos, que nuestro grafo es invariante por translaciones en el eje OX.

F. Martín, A. Savas-Halilaj y K. Smoczky en [51] y F. Martín, J. Pérez, A. Savas-Halilaj y K. Smoczky en [50], demostraron resultados similares para el caso particular de los solitones de traslación.

En el Capítulo 5, presentamos una correspondencia natural entre grafos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos de  $\mathbb{R}^3$  y grafos espaciales  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximales de  $\mathbb{L}^3$  que aplicamos para describir nuevos ejemplos de superficies. Esta correspondencia extiende la obtenida por E. Calabi, [9], en el año 1970 entre superficies mínimas de  $\mathbb{R}^3$  y superficies espaciales maximales del espacio de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$ .

En primer lugar, en la Sección 6.1, demostramos que la ecuación de los grafos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos (1.6) en un dominio plano, simplemente conexo,  $\Omega$ , es equivalente a la integrabilidad del siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\phi_{xx} = \frac{1 + u_x^2}{W} e^{\varphi(u)}, \quad \phi_{xy} = \frac{u_x u_y}{W} e^{\varphi(u)}, \quad \phi_{yy} = \frac{1 + u_y^2}{W} e^{\varphi(u)}, \quad (1.16)$$

con  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  única módulo polinomios lineales. A continuación, en la Sección 6.2 introducimos el concepto de superficie espacial  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal en  $\mathbb{L}^3$  y demostramos que el grafo de una función  $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una superficie espacial  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal si y sólo si  $\tilde{u}$  es solución de la siguiente ecuación diferencial elíptica

$$(1 - \tilde{u}_x^2) \tilde{u}_{yy} + (1 - \tilde{u}_y^2) \tilde{u}_{xx} + 2\tilde{u}_x \tilde{u}_y \tilde{u}_{xy} + \dot{\varphi}(\tilde{u}) \tilde{W}^2 = 0, \quad (1.17)$$

donde  $\tilde{W} = \sqrt{1 - \tilde{u}_x^2 - \tilde{u}_y^2}$ . Cuando  $\tilde{\Omega}$  es simplemente conexo, la ecuación (1.17) es equivalente a la integrabilidad del siguiente sistema:

$$\tilde{\phi}_{xx} = \frac{1 - \tilde{u}_x^2}{\tilde{W}} e^{\varphi(\tilde{u})}, \quad \tilde{\phi}_{xy} = -\frac{\tilde{u}_x \tilde{u}_y}{\tilde{W}} e^{\varphi(\tilde{u})}, \quad \tilde{\phi}_{yy} = \frac{1 - \tilde{u}_y^2}{\tilde{W}} e^{\varphi(\tilde{u})} \quad (1.18)$$

con  $\tilde{\phi} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  única módulo polinomios lineales.

Estas condiciones de integrabilidad nos han permitido describir una correspondencia entre grafos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos en  $\mathbb{R}^3$  y grafos espaciales  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximales en  $\mathbb{L}^3$  de la siguiente forma, ver Teoremas 6.3 y 6.6:

- Sea  $\Omega$  un dominio plano simplemente conexo y  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\psi(x, y) = (x, y, u)$ , un grafo  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimo en  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\phi$  es una solución del sistema (1.16) y  $\vartheta$  una primitiva de  $e^\varphi$ , entonces  $\tilde{\psi} : \Omega \rightarrow \mathbb{L}^3$  dada por

$$\tilde{\psi} = (\phi_x, \phi_y, \vartheta(u)),$$

es un grafo espacial  $[-\varphi \circ \vartheta^{-1}, \vec{e}_3]$ -maximal en el espacio de Lorentz-Minkowski. Las métricas inducidas  $g$  y  $\tilde{g}$  de  $\psi$  y  $\tilde{\psi}$ , respectivamente, son conformes y la curvatura media  $H$  ( $\tilde{H}$ ) junto con la curvatura de Gauss  $K$  ( $\tilde{K}$ ) de  $\psi$  ( $\tilde{\psi}$ ) satisfacen

$$\begin{aligned}\tilde{H} + W^2 e^{-\varphi(u)} H &= 0, \\ \tilde{K} + W^4 e^{-2\varphi(u)} K &= 0.\end{aligned}$$

- Sea  $\tilde{\Omega}$  un dominio plano simplemente conexo,  $\tilde{\psi} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{L}^3$ ,  $\tilde{\psi}(x, y) = (x, y, \tilde{u})$  un grafo espacial  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal en  $\mathbb{L}^3$ ,  $\tilde{\phi}$  solución del sistema (1.18) y  $\vartheta$  una función primitiva de  $e^\varphi$ . Entonces la inmersión dada por

$$\psi = (\tilde{\phi}_x, \tilde{\phi}_y, \vartheta(\tilde{u})),$$

es un grafo  $[-\varphi \circ \vartheta^{-1}, \vec{e}_3]$ -mínimo en  $\mathbb{R}^3$  cuya métrica inducida, curvatura media  $H$  y curvatura de Gauss  $K$  satisfacen

$$\begin{aligned}g &= \frac{e^{2\varphi(\tilde{u})}}{\tilde{W}^2} \tilde{g}, \\ H + e^{-\varphi(\tilde{u})} \tilde{W}^2 \tilde{H} &= 0, \\ K + e^{-2\varphi(\tilde{u})} \tilde{W}^4 \tilde{K} &= 0,\end{aligned}$$

donde  $\tilde{W} = \sqrt{1 - \tilde{u}_x^2 - \tilde{u}_y^2}$  y  $\tilde{g}$ ,  $\tilde{H}$  y  $\tilde{K}$  son la métrica inducida, la curvatura media y la curvatura de Gauss del grafo espacial  $\tilde{u}$ .

Terminamos este capítulo mostrando, ver Secciones 6.3 y 6.4, cómo esta correspondencia resulta útil a la hora de describir las propiedades geométricas de los nuevos ejemplos de superficies espaciales en  $\mathbb{L}^3$  heredadas del comportamiento geométrico ya visto para los ejemplos en  $\mathbb{R}^3$  y viceversa. Algunas de estas propiedades son:

- Si  $\psi$  es un solitón de traslación en  $\mathbb{R}^3$  entonces  $\tilde{\psi}$  es una superficie espacial  $(-1)$ -maximal singular en  $\mathbb{L}^3$ .
- Si  $\tilde{\psi}$  es un solitón de traslación en  $\mathbb{L}^3$  entonces  $\psi$  es una superficie  $(-1)$ -maximal singular en  $\mathbb{R}^3$ .
- La propiedad de ser rotacionalmente simétrica con respecto al eje  $OZ$  se preserva por la correspondencia.
- Existen solitones de traslación espaciales en  $\mathbb{L}^3$  que son grafos enteros rotacionalmente simétricos y con un crecimiento lineal.
- Para  $\alpha < -1$ , existen grafos enteros espaciales  $\alpha$ -maximales singulares en  $\mathbb{L}^3$  rotacionalmente simétricos y estrictamente convexos, únicos salvo homotecia.
- Para  $\alpha < -1$ , existen dos grafos enteros espaciales  $\alpha$ -maximales singulares (resp. solitones de traslación), salvo homotecia (resp. traslación), con crecimiento lineal, asíntóticos al cono de luz en el origen y presentando una singularidad aislada en el origen.

Acabamos proponiendo una serie de problemas abiertos y futuras líneas de investigación en el estudio de las superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas. Motivados por la teoría clásica de superficies mínimas y los recientes trabajos en el estudio de solitones de traslación y  $\alpha$ -mínimas singulares en  $\mathbb{R}^3$ , ver por ejemplo [4, 6, 30, 33, 34, 35, 40, 45, 58, 59, 63, 68, 72, 74], la lista de problemas que planteamos al final de la memoria tiene el objetivo de estudiar la existencia de nuevos ejemplos completos de superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas junto a Teoremas tipo Berstein; la clasificación de los ejemplos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos propiamente embebidos con  $H \leq 0$  y las superficies de tipo semigrafo cuando  $\varphi$  es una función diferenciable estrictamente creciente, convexa y con

un crecimiento a lo sumo cuadrático. Confiamos también en que la correspondencia tipo Calabi que introducimos en el Capítulo 5 proporcione una herramienta adecuada para garantizar la existencia de nuevas superficies espaciales  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximales en  $\mathbb{L}^3$  y para estudiar su geometría.



# Capítulo 2

---

## Preliminares sobre superficies $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas de $\mathbb{R}^3$ .

---

*Este capítulo está dedicado a recopilar propiedades básicas de las inmersiones  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas de  $\mathbb{R}^3$ . En primer lugar, vemos cómo pueden ser interpretadas desde un punto de vista físico gracias al trabajo de S. D. Poisson [65]. A continuación, demostramos que las inmersiones  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas son mínimas en el espacio de Imanen 3-dimensional y pueden ser vistas como puntos críticos de un funcional área con peso. Además, si estudiamos el concepto de estabilidad como mínimos locales de dicho funcional, podremos ver que éste es equivalente con el de ser estable como superficie mínima en el espacio de Imanen. Finalmente, deducimos una serie de ecuaciones fundamentales que serán usadas a lo largo de todo este trabajo y que, por ejemplo, nos permiten demostrar principios del máximo para la curvatura media y curvatura de Gauss de estas superficies.*

### 2.1. Interpretación física.

En esta sección, presentamos brevemente el estudio de S. D. Poisson [65], sobre superficies bajo campos de fuerzas de tipo gravitacional.

Sea  $\mathcal{U}$  un dominio de  $\mathbb{R}^2$ , consideramos  $\Sigma = \text{Grafo}(u)$  una superficie flexible e inextensible de  $\mathbb{R}^3$  bajo la acción de un campo de fuerzas  $\mathcal{F}$ , donde  $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable. Denotaremos por  $\mathcal{F} = (X, Y, Z)$  la fuerza total que se aplica localmente sobre un punto

$p = (x, y, u) \in \Sigma$  y por

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

En estas condiciones, Poisson, usando argumentos de mecánica clásica, introduce dos tensiones independientes  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  que corresponden a las fuerzas intrínsecas de la superficie y demuestra que la condición de equilibrio tras la acción de  $\mathcal{F}$ , puede ser descrita por el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales con incógnitas  $u$ ,  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$ :

$$\begin{cases} XW + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mathcal{T}(1+q^2)}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mathcal{T}'pq}{W} \right) = 0, \\ YW - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mathcal{T}'pq}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mathcal{T}'(1+p^2)}{W} \right) = 0, \\ ZW + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mathcal{T}p}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mathcal{T}'q}{W} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Especialmente interesante resulta el caso  $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ , esto es, cuando las fuerzas intrínsecas de la superficie son iguales. Bajo esta situación, tenemos

**Teorema 2.1.** *Sea  $\Sigma$  superficie flexible e inextensible en  $\mathbb{R}^3$  bajo la acción de un campo de fuerzas  $\mathcal{F} = (X, Y, Z)$ . Si las fuerzas de tensión  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  son iguales, entonces la condición de equilibrio está determinada por las siguientes ecuaciones*

$$\mathcal{T}\mathbf{H} + \mathcal{F}^\perp = 0, \quad (2.2)$$

$$Xdx + Ydy + Zdz + d\mathcal{T} = 0 \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{H}$  es el vector curvatura media y  $\perp$  denota la proyección sobre el fibrado normal de la superficie.

*Demostración.* Este resultado es una aplicación directa del sistema (2.1). En efecto, por teoría clásica de superficies, sabemos que la curvatura media  $H$  del grafo  $\Sigma$  viene dada por la siguiente expresión

$$H = \frac{1}{W^3} \left( (1+q^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1+p^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (2.4)$$

Además, la parte normal del campo de fuerzas,  $\mathcal{F}^\perp$ , se escribe como

$$\mathcal{F}^\perp = \frac{1}{W}(Z - pX - qY). \quad (2.5)$$

Así, si multiplicamos la primera ecuación de (2.1) por  $-p/W$ , la segunda por  $-q/W$ , la tercera por  $1/W$  y sumamos las tres ecuaciones, obtenemos,

$$\frac{\mathcal{T}}{W^3} \left( (1 + q^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1 + p^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{W}(pX + qY - Z), \quad (2.6)$$

que junto con las ecuaciones previas (2.4) y (2.5) da (2.2).

La condición (2.3) se sigue directamente de sistema (2.1) y de (2.2) y significa que, en este caso, la fuerza  $\mathcal{F}$  siempre es conservativa y su potencial sobre la superficie ha de ser, salvo constantes, la tensión  $\mathcal{T}$ .  $\square$

Poisson, también destaca por su interés que,

- Si  $\mathcal{F} = 0$  y  $\mathcal{T}$  es una constante no nula, entonces (2.2) corresponde a la *ecuación de las superficies mínimas* en  $\mathbb{R}^3$ .
- Si  $\mathcal{F}$  es una fuerza normal a la superficie con módulo  $\|\mathcal{F}\|$  dependiendo linealmente de la altura  $z$  y la tensión  $\mathcal{T}$  es una constante no nula, entonces (2.2) es la *ecuación de las superficies capilares*.
- Si  $\mathcal{F} = (0, 0, \mathcal{E}(z))$ , donde  $\mathcal{E}(z)$  es una función de densidad sobre la superficie dependiendo solo de la altura  $z$  y  $\mathcal{T}$  es una primitiva de la función  $-\mathcal{E}$ , entonces (2.2) es la *ecuación de una superficie bajo un campo de fuerza de tipo gravitacional*.

En este último caso y considerando la función

$$\varphi(z) = \log \left( \int_{z_0}^z \mathcal{E}(t) dt \right), \quad (2.7)$$

obtenemos que (2.2) significa

$$\mathbf{H} = -\dot{\varphi} \vec{e}_3^\perp, \quad (2.8)$$

donde  $(\cdot)$  denota la derivada usual respecto a la variable. Ecuación que motiva la siguiente definición:

**Definición 2.2.** Sea  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  una función diferenciable y sea  $\Sigma$  una inmersión orientable en  $\mathbb{R}^2 \times ]a, b[$ . Diremos que  $\Sigma$  es una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal si y sólo si su vector curvatura  $\mathbf{H}$  satisface la ecuación (2.8).

## 2.2. El espacio de Ilmanen 3-dimensional.

En esta parte del trabajo, vamos a ver a las superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas como superficies mínimas en el espacio de Ilmanen. Estudiaremos la geometría de dicho espacio y daremos condiciones suficientes para saber cuando el espacio de Ilmanen tiene geometría acotada.

Consideramos  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en un intervalo abierto  $I$  de  $\mathbb{R}$ . El espacio de Ilmanen, introducido en 1994 por T. Ilmanen [36], es la 3-variedad Riemanniana  $\mathcal{I}^\varphi = \mathbb{R}^2 \times I$  dotada con la métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle^\varphi$  conforme a la métrica Euclídea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^3$  que en cada punto  $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{I}^\varphi$  está dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p^\varphi = e^{\varphi(x_3)} \langle \cdot, \cdot \rangle_p. \quad (2.9)$$

Sean  $D^\varphi$  y  $R^\varphi$  (respectivamente,  $D$  y  $R$ ) la conexión de Levi-Civita y el tensor de curvatura del espacio de Ilmanen  $\mathcal{I}^\varphi$  (respectivamente, del espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^3$ ). Entonces, de (2.9), se deduce que para cualquier base ortonormal  $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$  de  $\mathbb{R}^3$  y cualesquiera campos de vectores  $X, Y, Z \in T\mathcal{I}^\varphi$  obtenemos que

$$D_X^\varphi Y = D_X Y + \frac{1}{2} \dot{\varphi} (\langle X, \vec{e}_3 \rangle Y + \langle Y, \vec{e}_3 \rangle X - \langle X, Y \rangle \vec{e}_3), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} R^\varphi(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \frac{1}{4} ((2\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) \langle Y, \vec{e}_3 \rangle \langle Z, \vec{e}_3 \rangle + \dot{\varphi}^2 \langle Y, Z \rangle) X \\ &\quad + \frac{1}{4} ((2\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) \langle X, \vec{e}_3 \rangle \langle Z, \vec{e}_3 \rangle + \dot{\varphi}^2 \langle X, Z \rangle) Y \\ &\quad + \frac{1}{4} (2\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) (\langle X, Z \rangle \langle Y, \vec{e}_3 \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, \vec{e}_3 \rangle) \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

**Nota 2.3.** Por abuso de notación y siempre que en el contexto quede claro cuál de ellas estamos considerando, denotaremos también por  $\varphi$  la función definida en  $\mathbb{R}^2 \times I$ , dada por  $(x, y, z) \rightarrow \varphi(z)$ .

Además, si consideramos la siguiente base ortonormal de  $T\mathcal{I}^\varphi$  definida por los vectores  $\{\vec{e}_i^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}}\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ , los coeficientes de la conexión de Levi Civita y la curvatura seccional  $\mathbb{K}^\varphi$  respecto del plano  $\Pi = \{\vec{e}_i^\varphi, \vec{e}_j^\varphi\}$  con  $i \neq j$  están determinadas por las siguientes ecuaciones

$$\langle D_{\vec{e}_i^\varphi}^\varphi \vec{e}_j^\varphi, \vec{e}_k^\varphi \rangle = \frac{1}{2} e^{-\frac{\varphi}{2}} \dot{\varphi} (\delta_{3j} \delta_{ik} - \delta_{ij} \delta_{3k}), \quad (2.12)$$

$$\mathbb{K}^\varphi(\vec{e}_i^\varphi, \vec{e}_j^\varphi) = \frac{1}{4} e^{-\varphi} ((\dot{\varphi}^2 - 2\ddot{\varphi})(\delta_{i3} + \delta_{j3}) - \dot{\varphi}^2) \text{ for } i \neq j, \quad (2.13)$$

En efecto, aplicando la expresión (2.10) de la conexión de Levi-Civita obtenemos la siguiente expresión

$$D_{\vec{e}_i^\varphi}^\varphi \vec{e}_i^\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi} e^{-\varphi} (\delta_{j3} \vec{e}_i - \delta_{ij} \vec{e}_3).$$

Entonces la fórmula (2.12) se obtiene fácilmente a partir de la métrica (2.9). Por otro lado, de (2.11), obtenemos que para  $i \neq j$  se tiene que

$$\langle R^\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \vec{e}_j, \vec{e}_i \rangle = \langle R(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \vec{e}_j, \vec{e}_i \rangle - \frac{1}{4} ((2\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)(\delta_{i3} + \delta_{j3}) + \dot{\varphi}^2).$$

Finalmente, deducimos la ecuación (2.13) aplicando de nuevo la expresión de la métrica (2.9) y teniendo en cuenta el carácter tensorial de  $R^\varphi$  en sus tres variables.

A continuación, mostramos cómo se relaciona la geometría, respecto de las métricas  $\langle \cdot, \cdot \rangle^\varphi$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , de una inmersión isométrica orientable  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^2 \times I$ . De hecho, deduciremos que toda superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima en  $\mathbb{R}^3$  es una superficie mínima en  $\mathcal{I}^\varphi$ .

Sean  $N$  la aplicación de Gauss y  $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^2 (D_{\vec{e}_i} \vec{e}_i)^\perp$ , donde  $\perp$  denota la proyección normal, el vector curvatura media de  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Entonces, de (2.10), los endomorfismos de Weingarten  $S^\varphi$  y  $S$  de  $\Sigma$  en  $\mathcal{I}^\varphi$  y  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente, están relacionados por

$$-S_p^\varphi v = D_v^\varphi N^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} \left( -S_p v + \frac{1}{2} \dot{\varphi} \langle N(p), \vec{e}_3 \rangle v \right) \quad (2.14)$$

para cualquier punto  $p \in \Sigma$  y cualquier vector  $v \in T_p \Sigma$ , donde  $N^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} N$  es la aplicación de Gauss en el espacio de Ilmanen. De la relación anterior (2.14), deducimos:

**Proposición 2.4.** *Para cualesquiera  $u, v \in T_p \Sigma$  se tiene que*

$$\begin{aligned} S_p^\varphi(u, v) &= e^{\frac{\varphi}{2}} \left( S_p(u, v) + \frac{1}{2} \dot{\varphi} \langle N(p), \vec{e}_3 \rangle \langle u, v \rangle \right), \\ k_i^\varphi(p) &= e^{-\frac{\varphi}{2}} \left( k_i(p) + \frac{1}{2} \dot{\varphi} \langle N(p), \vec{e}_3 \rangle \right), \end{aligned}$$

donde  $S^\varphi$  y  $k_i^\varphi$  (respectivamente,  $S$  y  $k_i$ ), son la segunda forma fundamental y las curvaturas principales de  $\Sigma$  en  $\mathcal{I}^\varphi$  (respectivamente, en  $\mathbb{R}^3$ ). En particular, las correspondientes curvaturas medias están relacionadas por

$$H^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} (H + \dot{\varphi} \langle N, \vec{e}_3 \rangle). \quad (2.15)$$

Así, una superficie en  $\mathbb{R}^3$  es  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima si y sólo si es una superficie mínima en  $\mathcal{I}^\varphi$ .

Este hecho es de especial relevancia pues nos permitirá aplicar toda la teoría de superficies mínimas en 3-variedades. Una primera propiedad fundamental que podemos deducir, gracias a dicha minimalidad, es el siguiente principio de tangencia, ver [22, Teorema 1, Teorema 1a] y [44, Capítulo 2]:

**Teorema 2.5. [Principio de tangencia]** *Sean  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  dos superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas en  $\mathbb{R}^2 \times I$  conexas y embebidas con fronteras  $\partial \Sigma_1$  y  $\partial \Sigma_2$ .*

- (i) **Principio de tangencia en el interior.** *Supongamos que existe un punto en común  $p$  en el interior de  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  donde los correspondientes espacios tangentes coinciden y tal que  $\Sigma_1$  está a un lado de  $\Sigma_2$ . Entonces,  $\Sigma_1$  coincide con  $\Sigma_2$  en un entorno de  $p$ . Si además, ambas superficies son completas entonces  $\Sigma_1 = \Sigma_2$ .*

(ii) **Principio de tangencia en la frontera.** Supongamos que  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  están en el mismo plano  $\Pi$  y la intersección de  $\Sigma_1, \Sigma_2$  con  $\Pi$  es transversal. Assumimos que  $\Sigma_1$  está a un lado de  $\Sigma_2$  y que existe un punto en común  $p$  de  $\partial\Sigma_1$  y  $\partial\Sigma_2$  donde las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  tiene el mismo espacio tangente. Entonces  $\Sigma_1$  coincide con  $\Sigma_2$  en un entorno de  $p$ . De nuevo, si ambas son completas entonces  $\Sigma_1 = \Sigma_2$ .

**Nota 2.6.** Sean  $\Sigma_1, \Sigma_2$  dos superficies embebidas de  $\mathbb{R}^3$ , posiblemente con borde regular. Supongamos que existe  $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  tal que  $N_1(p) = N_2(p)$ , donde  $N_i$  es el normal de  $\Sigma_i$  en el punto  $p$ . Como los planos tangentes coinciden  $T_p\Sigma_1 = T_p\Sigma_2$ , podemos tomar coordenadas  $(x_1, x_2)$  en el espacio tangente de forma que, localmente en  $p$ , podemos ver cada  $\Sigma_i$  como un grafo orientado a  $N_i(p)$  de una función diferenciable  $u_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\Omega$  es un abierto del espacio tangente conteniendo al punto  $p$ . De hecho, podemos restringir el dominio para asumir que  $\Omega$  es regular. En estas condiciones, se dice que  $\Sigma_1$  está a un lado de  $\Sigma_2$  localmente en  $p$ , si  $u_1 \geq u_2$  ( $u_1 \leq u_2$ ) en  $\Omega$ .

Terminamos esta sección dando condiciones suficientes para saber cuando  $\mathcal{I}^\varphi$  tiene *geometría acotada*, es decir, cuándo la curvatura seccional está acotada y el radio de inyectividad está acotado inferiormente. Estas condiciones son una consecuencia de las fórmulas (2.9), (2.13) y del trabajo de J.Cheeger, M.Gromov y M. Taylor [11] para variedades completas, a saber:

**Teorema 2.7.** Sea  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Supongamos que existe un conjunto compacto  $\mathcal{K} \subset (\mathbb{R}^2 \times I)$  tal que  $\varphi$  es positiva en  $(\mathbb{R}^2 \times I) - \mathcal{K}$ , entonces  $\mathcal{I}^\varphi$  es completa. Si además, la función  $e^{-\varphi} \max\{\dot{\varphi}^2, \ddot{\varphi}\}$  está acotada en  $(\mathbb{R}^2 \times I) - \mathcal{K}$ , entonces  $\mathcal{I}^\varphi$  tiene también *geometría acotada*.

**Nota 2.8.** En el caso en que la curvatura seccional esté acotada inferiormente y superiormente por constantes positivas, podemos aplicar el Teorema de Rauch para dar una cota del radio de inyectividad.

### 2.3. Un punto de vista variacional.

En esta sección, vamos a ver las superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas como puntos críticos de un funcional de área con peso. Deduiremos las fórmulas de la primera y segunda variación de dicho funcional y terminaremos analizando la noción de estabilidad para estas superficies.

Sea  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  y  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. En  $\mathbb{R}^3$  consideramos el abierto  $\mathbb{R}^2 \times I \subseteq \mathbb{R}^3$  junto con la medida con peso  $e^\varphi d\mu$ , donde  $d\mu$  denota el elemento de volumen inducido por la métrica Euclídea,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , de  $\mathbb{R}^3$  y  $\varphi(x, y, z) = \varphi(z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times I$ . Consideremos  $\Sigma$  una superficie sin borde inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^2 \times I$  y denotemos por  $\nabla$ ,  $\Delta$  y  $d\Sigma$ , al operador gradiente, laplaciano y elemento de volumen inducido sobre  $\Sigma$ , respectivamente. Nótese, que la función  $\varphi$  induce una medida con peso  $e^\varphi d\Sigma$  sobre  $\Sigma$ . En estas condiciones, definimos el siguiente funcional de área con peso:

$$\mathcal{A}^\varphi(\Sigma) = \int_{\Sigma} e^\varphi d\Sigma. \quad (2.16)$$

A continuación, previo al cálculo de la primera y segunda derivada del funcional área necesitamos entender el concepto de *variación* de  $\Sigma$  a lo largo de un campo.

Fijamos un punto  $p \in \Sigma$  arbitrario y tomamos  $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo normal ( $X = X^\perp$ ) con soporte compacto en  $\mathbb{R}^2 \times I$  conteniendo al punto  $p$ . Una variación de  $\Sigma$  por el campo  $X$  está definida por  $\psi : \Sigma \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  tal que  $\psi_0 = Id_\Sigma$  y  $X = d\psi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$  (nótese que podemos elegir  $\varepsilon$  suficientemente pequeño para que  $\psi$  sea un difeomorfismo en  $\mathbb{R}^2 \times I$ ). Consideramos la familia uniparamétrica de inmersiones  $\Sigma_t = \psi(\Sigma, t)$  con  $\Sigma_0 = \Sigma$  y elegimos un sistema de coordenadas  $\{x_1, x_2, t\}$  de  $\Sigma \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  alrededor del punto  $(p, 0)$ . Si  $v_i = d\psi \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$  para  $i = 1, 2$ , la métrica inducida en  $\Sigma_t$  viene dada por  $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$  con  $g_{ij}(p, 0) = \delta_{ij}$  y  $\nabla_{v_i} v_j(p, 0) = 0$  y entonces, el elemento de volumen con peso de  $\Sigma_t$  está determinado por  $(d\Sigma_t)^\varphi = e^{\varphi(\psi(x,t))} \mathcal{J}(x, t) d\Sigma$ , donde

$$\mathcal{J}(x, t) = \sqrt{\det(g_{ij}(x, t))}. \quad (2.17)$$

Nótese que, en general, dado un campo normal arbitrario  $X$  es difícil dar una parametrización explícita de la variación  $\Sigma_t$  y por tanto, las fórmulas de variación que a continuación presentamos serán difíciles de manejar. Sin embargo, cuando  $\Sigma$  es una inmersión orientada podemos dar una correspondencia entre campos normales  $X$  con soporte compacto y el conjunto de funciones diferenciables con soporte compacto  $C_0^\infty(\Sigma)$ .

**Lema 2.9.** *Supongamos que  $\Sigma$  es una inmersión orientada sin borde en  $\mathbb{R}^2 \times I$  con aplicación de Gauss  $N$ . Entonces, para cada  $u \in C_0^\infty(\Sigma)$ , existe un campo diferenciable  $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con soporte compacto en  $\mathbb{R}^2 \times I$  tal que  $X = uN$  en  $\Sigma$ .*

*Demostración.* Tomamos  $u \in C_0^\infty(\Sigma)$  arbitraria y denotamos por  $A := \{p \in \Sigma : u(p) \neq 0\}$ , que es un abierto de  $\Sigma$  con  $\bar{A}$  compacto en  $\Sigma$ . Entonces, podemos encontrar un abierto  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  con  $W \subset \mathbb{R}^2 \times I$ , y un  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, tal que la aplicación  $F : A \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W$  dada por  $F(p, t) = p + tN(p)$  es un difeomorfismo.

Si ahora definimos el campo  $N_W : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  y la función  $u_W : W \rightarrow \mathbb{R}$  como  $N_W(F(p, t)) := N(p)$  y  $u_W(F(p, t)) := u(p)$ . Es obvio que  $N$  y  $u$  son diferenciables con  $N_W \equiv N$  y  $u_W \equiv u$  sobre  $A$ . Llamemos  $W_i := F(A \times (-\varepsilon_i, \varepsilon_i))$ , donde  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$  y tomemos una función  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  tal que  $\phi = 1$  en  $W_1$  y  $\text{supp}(\phi) \subseteq W_2$  (en particular  $\phi = 0$  en  $\mathbb{R}^3 - W$ ). Si definimos el campo  $\bar{N} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y la función  $\bar{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$\bar{N}(p) := \begin{cases} \phi(p) N_W(p), & p \in W, \\ 0, & p \in \mathbb{R}^3 - W, \end{cases} \quad \bar{u}(p) := \begin{cases} \phi(p) u_W(p), & p \in W, \\ 0, & p \in \mathbb{R}^3 - W, \end{cases}$$

se tiene que  $\bar{N}$  y  $\bar{u}$  son diferenciables y con soporte compacto contenido en  $W$ . Además,  $\bar{N} \equiv N$  y  $\bar{u} \equiv u$  sobre  $A$ . Es claro que  $X := \bar{u} \bar{N}$  es un campo diferenciable en  $\mathbb{R}^3$  con soporte compacto  $\text{supp}(X) \subseteq W_2 \subset W \subset D$  y además, se cumple que  $X \equiv uN$  sobre  $\Sigma$ .  $\square$

### 2.3.1. Primera fórmula de variación.

Teniendo probada una forma de construir campos de variaciones normales, damos previamente un lema técnico y demostramos la

fórmula de la primera variación del funcional area con peso (2.16).

**Lema 2.10.** *Sea  $M_h(\mathbb{R})$  la  $h^2$ -variedad de las matrices cuadradas de orden  $h$  con coeficientes reales y  $\Lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_h(\mathbb{R})$  una curva diferenciable. Entonces:*

(i) *La función  $f(t) := \text{traza}(\Lambda(t))$  es diferenciable y  $f'(t) = \text{traza}(\Lambda'(t))$ .*

(ii) *La función  $g(t) := \det \Lambda(t)$  es diferenciable y su derivada está dada por:*

$$g'(t) = \text{traza}(\Lambda'(t) \text{adj}(\Lambda(t))^t),$$

*donde  $\text{adj}(\Lambda(t))$  es la adjunta de  $\Lambda(t)$ . Además, si  $\Lambda(t)$  es siempre regular, entonces:*

$$g'(t) = (\det \Lambda(t)) \text{traza}(\Lambda'(t) \Lambda(t)^{-1}).$$

(iii) *Si  $\Lambda(t)$  es siempre regular, entonces  $\Gamma(t) := \Lambda(t)^{-1}$  es también diferenciable y:*

$$\Gamma'(t) = -\Lambda(t)^{-1} \Lambda'(t) \Lambda(t)^{-1}.$$

*Demostración.* Si  $\lambda_{ij}(t)$  es la entrada  $ij$  de  $\Lambda(t)$ , entonces  $f(t) = \sum_{i=1}^h \lambda_{ii}(t)$ . Por tanto,  $f$  es derivable y  $f'(t) = \sum_{i=1}^h \lambda'_{ii}(t) = \text{traza}(\Lambda'(t))$ . Esto prueba (i).

Sea  $D : M_h(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{h^2} \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $D(A) := \det(A)$ . Es obvio que  $D$  es diferenciable por tratarse de una función polinómica de  $h^2$  variables. Vamos a calcular la derivada parcial de  $D$  respecto de la variable  $a_{ij}$ . Utilizando el desarrollo por adjuntos asociado a la fila  $i$ -ésima, tenemos  $D(A) = \sum_{k=1}^h a_{ik} A_{ik}$ , donde  $A_{ik}$  es el menor adjunto de  $A$  para la posición  $ik$ . Como  $A_{ik}$  no depende de  $a_{ij}$ , deducimos enseguida que:

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ij}}(A) = \sum_{k=1}^h \delta_{kj} A_{ik} = A_{ij}.$$

Nótese que  $g(t) = D(\Lambda(t))$ . Por la regla de la cadena para derivadas parciales se sigue que:

$$g'(t) = \sum_{i,j=1}^h \frac{\partial D}{\partial a_{ij}}(\Lambda(t)) \lambda'_{ij}(t) = \sum_{i,j=1}^h \lambda'_{ij}(t) \Lambda_{ij}(t) = \text{traza}(\Lambda'(t) \text{adj}(\Lambda(t))^t),$$

donde en la última igualdad se ha usado que  $\text{traza}(AB^t) = \sum_{i,j=1}^h a_{ij} b_{ij}$ . Esto prueba (ii).

Por otro lado, si  $\Lambda(t)$  es regular, sabemos que

$$\Lambda(t)^{-1} = (1/\det \Lambda(t)) (\text{Adj}(\Lambda(t)))^t.$$

Por el apartado (ii) y por ser  $\Lambda(t)$  regular, la función  $1/\det \Lambda(t)$  es derivable. Además, cada entrada de  $\text{Adj}(\Lambda(t))$  se obtiene asimismo multiplicando una constante por un determinante de una curva matricial diferenciable. Esto justifica la derivabilidad de  $\Gamma(t) = \Lambda(t)^{-1}$ . Derivando en la igualdad  $\Lambda(t) \Gamma(t) = I_h$  y aplicando la regla del producto, se llega a  $\Lambda'(t) \Gamma(t) + \Lambda(t) \Gamma'(t) = 0$ , de donde se obtiene la identidad deseada despejando  $\Gamma'(t)$ .  $\square$

**Proposición 2.11. [Fórmula de la primera variación]** *Si  $X$  es un campo variacional con soporte compacto en  $\Sigma$ , entonces la fórmula de la primera variación de (2.16) viene dada por*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{A}^\varphi(\Sigma_t) = \int_{\Sigma} e^\varphi \langle X, \mathbf{H} + (\bar{\nabla} \varphi)^\perp \rangle d\Sigma, \quad (2.18)$$

donde  $\perp$  denota la proyección normal y  $\bar{\nabla}$  al gradiente usual de  $\mathbb{R}^3$ . En particular, si suponemos que  $\Sigma$  es una inmersión orientada, entonces la fórmula de la primera variación de (2.16) se puede expresar como

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{A}^\varphi(\Sigma_t) = \int_{\Sigma} e^\varphi (H + \langle \bar{\nabla} \varphi, N \rangle) u d\Sigma, \quad (2.19)$$

con  $u \in C_0^\infty(\Sigma)$ .

*Demostración.* Consideramos la variación anterior  $\psi : \Sigma \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  asociada al campo  $X$ . Recordamos que el elemento de volumen con peso de cada  $\Sigma_t$  viene dado por  $(d\Sigma_t)^\varphi = e^{\varphi(\psi(x,t))} \mathcal{J}(x,t) d\Sigma$ . Es fácil ver que,

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{\varphi(\psi(x,t))} \mathcal{J}(x,t)) = e^{\varphi(\psi(x,t))} \left( \frac{\partial \mathcal{J}(x,t)}{\partial t} + \mathcal{J}(x,t) \langle X, (\bar{\nabla} \varphi)^\perp \rangle \right). \quad (2.20)$$

Por la fórmula (2.17), tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(x, t))}} \frac{\partial}{\partial t} (\det(g_{ij}(x, t))). \quad (2.21)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que  $X$  es un campo normal, la derivada del determinante está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\det(g_{ij}(x, t))) &= \det(g_{ij}(x, t)) \text{Traza} \left( g^{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(x, t) \right) = \\ &2\det(g_{ij}(x, t)) \sum_{i=1}^2 \langle D_X v_i, v_i \rangle = 2\det(g_{ij}(x, t)) \left\langle \sum_{i=1}^2 (D_{v_i} v_i)^\perp, X \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Consecuentemente, de las ecuaciones (2.20)-(2.22), tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{\varphi(\psi(x, t))} \mathcal{J}(x, t)) = e^{\varphi(\psi(x, t))} \mathcal{J}(x, t) \langle \mathbf{H} + (\bar{\nabla} \varphi)^\perp, X \rangle, \quad (2.23)$$

y teniendo en cuenta que  $\psi(\Sigma, 0) = \Sigma$ , la fórmula de la primera variación se deduce directamente de (2.23). Finalmente, la fórmula (2.19) es una consecuencia directa del Lema (2.9) y de la fórmula (2.23).  $\square$

**Nota 2.12.** Nótese que podemos recuperar la forma de volumen con peso  $e^\varphi d\Sigma$  con el elemento de volumen inducido por la métrica de Ilmanen (2.9). Consecuentemente, de las Proposiciones 2.4 y 2.11, deducimos que  $\Sigma$  es una inmersión mínima en  $\mathcal{I}^\varphi$  si y sólo si  $\Sigma$  es un punto crítico del funcional de área (2.16) bajo variaciones normales de soporte compacto.

Como consecuencia, recopilando la información obtenida hasta ahora, tenemos que,

**Teorema 2.13.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\Sigma$  es una inmersión  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima.
- $\Sigma$  es un punto crítico del funcional área  $\mathcal{A}^\varphi$  bajo variaciones normales con soporte compacto.
- $\Sigma$  es una inmersión mínima en el espacio de Ilmanen  $\mathcal{I}^\varphi$ .

- $\Sigma$  es una inmersión flexible e inextensible en  $\mathbb{R}^2 \times I$  bajo la acción de un campo de fuerzas de tipo gravitacional y con fuerzas de tensión iguales sobre la superficie.

### 2.3.2. Segunda fórmula de variación. Estabilidad.

Introducimos ahora el concepto de *estabilidad*, como mínimos locales del funcional (2.16), a través del estudio de la segunda variación de  $\mathcal{A}^\varphi$  bajo variaciones normales de soporte compacto.

**Proposición 2.14. [Fórmula de la segunda variación]** Sea  $\Sigma$  una inmersión  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima sin borde en  $\mathbb{R}^2 \times I$  y  $X$  un campo variacional normal con soporte compacto. Si  $\psi_t$  es una variación normal asociada a  $X$ , entonces la fórmula de la segunda variación del funcional de área con peso (2.16) viene dada por

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} (\Sigma_t) = \int_{\Sigma} e^\varphi \left( |\nabla^\perp X|^2 - |\langle \mathcal{S}(\cdot, \cdot), X \rangle|^2 + \overline{\nabla}^2 \varphi(X, X) \right) d\Sigma, \quad (2.24)$$

donde  $\overline{\nabla}^2$  es el Hessiano usual de  $\mathbb{R}^2 \times I$ . En particular, si suponemos que  $\Sigma$  es orientada con aplicación de Gauss  $N$  y  $X = uN$ ,  $u \in C_0^\infty(\Sigma)$ , entonces la fórmula (2.24) se puede expresar por

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} (\Sigma_t) = - \int_{\Sigma} e^\varphi u \mathcal{L}_\varphi(u) d\Sigma \quad (2.25)$$

donde  $\mathcal{L}_\varphi$  es el operador de estabilidad de tipo gradiente Schrödinger definido por

$$\mathcal{L}_\varphi(\cdot) = \Delta^\varphi(\cdot) + (|\mathcal{S}|^2 - \overline{\nabla}^2 \varphi(N, N))(\cdot), \quad (2.26)$$

y

$$\Delta^\varphi(\cdot) = \Delta(\cdot) + \langle \nabla \varphi, \nabla(\cdot) \rangle \quad (2.27)$$

es el Laplaciano asociado a  $\varphi$ .

*Demostración.* Del Lema 2.10 apartado (iii), tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ii}(x, t) = -2 \langle D_{v_i} X, v_i \rangle. \quad (2.28)$$

por tanto, de las fórmulas (2.22) y (2.28), deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} (e^{\varphi(\psi(x,t))} \mathcal{J}(x,t)) &= e^{\varphi(\psi(x,t))} \mathcal{J}(x,t) \left( -2 \sum_{i=1}^2 (\langle D_{v_i} v_i, X \rangle^2 + \langle D_X D_{v_i} v_i, X \rangle) \right. \\ &\sum_{i=1}^2 \langle D_{v_i} X, D_{v_i} X \rangle + X(X(\varphi)) + \left( \sum_{i=1}^2 \langle D_{v_i} v_i, X \rangle + \langle \bar{\nabla} \varphi, X \rangle \right) \left( \sum_{j=1}^2 \langle D_{v_j} v_j, X \rangle + \langle \bar{\nabla} \varphi, X \rangle \right) \\ &= e^{\varphi} \left( -2 |\langle \mathcal{S}(\cdot, \cdot), X \rangle|^2 + \sum_{i=1}^2 (\langle R(v_i, X) v_i, X \rangle + \langle D_{v_i} D_X X, v_i \rangle + \langle D_{v_i} X, D_{v_i} X \rangle) \right. \\ &\left. + \bar{\nabla}^2 \varphi(X, X) + \langle \bar{\nabla} \varphi, D_X X \rangle + \left( \sum_{i=1}^2 \langle D_{v_i} v_i, X \rangle + \langle \bar{\nabla} \varphi, X \rangle \right) \left( \sum_{j=1}^2 \langle D_{v_j} v_j, X \rangle + \langle \bar{\nabla} \varphi, X \rangle \right) \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Descomponiendo  $D_{v_i} X = \sum_{i=1}^2 \langle D_{v_i} X, v_i \rangle v_i + (D_{v_i} X)^\perp$ , tenemos que

$$\sum_{i=1}^2 \langle D_{v_i} X, D_{v_i} X \rangle = |\langle \mathcal{S}(\cdot, \cdot), X \rangle|^2 + |\bar{\nabla}^\perp X|^2. \quad (2.30)$$

Además, usando que  $\operatorname{div}(e^\varphi)(D_X X)^T = e^\varphi \operatorname{div}((D_X X)^T) + e^\varphi \langle \bar{\nabla} \varphi, (D_X X)^T \rangle$ , deducimos que

$$e^\varphi \sum_{i=1}^2 \langle D_{v_i} D_X X, v_i \rangle = \operatorname{div}(e^\varphi (D_X X)^T) - e^\varphi (\langle \bar{\nabla} \varphi, (D_X X)^T \rangle + \langle (D_X X)^\perp, \mathbf{H} \rangle). \quad (2.31)$$

Consecuentemente, sustituyendo las expresiones (2.30) y (2.31) en (2.29), obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} (e^{\varphi(\psi(x,t))} \mathcal{J}(x,t)) &= e^\varphi (|\bar{\nabla}^\perp X|^2 - |\langle \mathcal{S}(\cdot, \cdot), X \rangle|^2 + \bar{\nabla}^2 \varphi(X, X)) \\ &+ \langle \mathbf{H} + \bar{\nabla} \varphi, (D_X X)^\perp \rangle + \langle \mathbf{H} + \bar{\nabla} \varphi, X \rangle^2 + \operatorname{div}(e^\varphi (D_X X)^T). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Usando el Teorema de la divergencia junto con el hecho de que la inmersión  $\Sigma$  sea  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima, la fórmula (2.24) se deduce de la ecuación (2.32). Finalmente, teniendo en cuenta que para cualquier  $u \in C_0^\infty$  se tiene

$$\operatorname{div}(e^\varphi u \nabla u) = e^\varphi u \Delta^\varphi(u) + e^\varphi |\nabla u|^2$$

la expresión (2.25) es una consecuencia directa del Lema (2.9) junto con una integración por partes de la ecuación (2.24).  $\square$

**Definición 2.15.** Diremos que una inmersión orientada  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima sin borde  $\Sigma$  es estable si y sólo si para cualquier función  $u \in C_0^\infty(\Sigma)$  con soporte compacto contenido en  $\mathbb{R}^2 \times I$  se verifica que

$$0 \leq - \int_{\Sigma} e^\varphi u \mathcal{L}_\varphi(u) d\Sigma.$$

**Nota 2.16.** La existencia de superficies estables no está garantizada para cualquier función  $\varphi$ . X.Cheng, T. Mejia y D.Zhou en [12] demostraron que si  $\mathcal{I}^\varphi$  es completa y  $\ddot{\varphi} \leq -\epsilon < 0$  para algún  $\epsilon > 0$ , entonces no existen superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas estables sin borde y área con peso finita.

Sin embargo, existe un criterio demostrado por D. Fischer-Colbrie y R. Schoen [25] que caracteriza las superficies estables por el signo del primer valor propio del operador de estabilidad  $\lambda_1(\mathcal{L}_\varphi)$ .

**Teorema 2.17.** Sea  $\Sigma$  una inmersión  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima completa y orientada en  $\mathbb{R}^3$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\Sigma$  es estable.
- $\lambda_1(\mathcal{L}_\varphi)(\mathcal{K}) < 0$  para cualquier compacto  $\mathcal{K}$  de  $\Sigma$ .
- Existe una función positiva  $u \in C^2(\Sigma)$  tal que  $\mathcal{L}_\varphi(u) = 0$ .

Terminamos esta sección, dando una relación probada por X.Cheng, T. Mejia y D.Zhou en [12] entre la fórmula de la segunda variación del funcional área con peso para inmersiones  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas en  $\mathbb{R}^2 \times I$  e inmersiones mínimas en el espacio de Ilmanen  $\mathcal{I}^\varphi$ .

Si vemos  $\Sigma$  como una inmersión mínima en el espacio de Ilmanen  $\mathcal{I}^\varphi$ , es bien conocido que el operador de estabilidad con la métrica inducida  $\langle \cdot, \cdot \rangle^\varphi$  viene dado por

$$\mathcal{G}_\varphi(\cdot) = \Delta_\varphi(\cdot) + (|\mathcal{S}^\varphi|^2 + \text{Ric}^\varphi(N^\varphi, N^\varphi))(\cdot), \quad (2.33)$$

donde  $\Delta_\varphi$  es el Laplaciano inducido en la superficie por la métrica de Ilmanen.

Del Teorema 2.17 podemos extender la definición de estabilidad para el operador  $\mathcal{G}_\varphi$  análogamente a como se ha hecho con el operador  $\mathcal{L}_\varphi$ . El siguiente resultado da la equivalencia entre las dos definiciones:

**Teorema 2.18.** *Dada una inmersión  $\Sigma$   $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima sin borde en  $\mathbb{R}^2 \times I$ , entonces para cualquier función  $u \in C_0^\infty(\Sigma)$  se tiene que*

$$\int_{\Sigma} (e^{\frac{\varphi}{2}} u) \mathcal{G}_\varphi(e^{\frac{\varphi}{2}} u) e^\varphi d\Sigma = \int_{\Sigma} u \mathcal{L}_\varphi(u) d\Sigma. \quad (2.34)$$

*En particular,  $\Sigma$  es estable en  $\mathbb{R}^2 \times I$  si y sólo si  $\Sigma$  es estable en  $\mathcal{I}^\varphi$  como superficie mínima.*

*Demostración.* Para probar este resultado, solo necesitamos demostrar que para cualquier función  $u \in C^\infty(\Sigma)$ , tenemos la siguiente relación

$$\mathcal{G}_\varphi(e^{\frac{\varphi}{2}} u) = e^{-\frac{\varphi}{2}} \mathcal{L}_\varphi(u). \quad (2.35)$$

De la sección 2.2, ya sabemos que si  $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$  es la base usual de  $\mathbb{R}^3$  y  $N$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma$  con respecto a la métrica Euclídea, entonces  $\{\vec{e}_i^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} \vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$  y  $N^\varphi = e^{-\frac{\varphi}{2}} N$  definen una base ortonormal de  $\mathcal{I}^\varphi$  y una aplicación de Gauss en  $\Sigma$  con respecto a la métrica (2.9). Teniendo en cuenta esto, de las fórmulas (2.11) y (2.4), tenemos que

$$\text{Ric}^\varphi(N^\varphi, N^\varphi) = e^{-\varphi} \left( -\frac{1}{2} \ddot{\varphi} (1 + \langle N, \vec{e}_3 \rangle^2) - \frac{1}{4} \dot{\varphi}^2 (1 - \langle N, \vec{e}_3 \rangle^2) \right), \quad (2.36)$$

$$|\mathcal{S}^\varphi|^2 = e^{-\varphi} \left( |\mathcal{S}|^2 - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \langle N, \vec{e}_3 \rangle^2 \right). \quad (2.37)$$

Por otro lado, considerando  $u \in C^\infty(\Sigma)$  una función arbitraria. El operador Laplaciano en el espacio de Ilmanen viene dado por  $\Delta_\varphi = e^{-\varphi} \Delta$  y por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta_\varphi(e^{\frac{\varphi}{2}} u) &= e^{-\frac{\varphi}{2}} \left( u \Delta(e^{\frac{\varphi}{2}}) + \Delta^\varphi(u) \right) \\ &= e^{-\frac{\varphi}{2}} \left( \Delta^\varphi(u) + u \left( \frac{1}{2} \ddot{\varphi} |\nabla x_3|^2 + \frac{1}{4} \dot{\varphi}^2 (1 + \langle N, \vec{e}_3 \rangle^2) \right) \right), \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde  $x_3(p) = \langle p, \vec{e}_3 \rangle$  es la función tercera coordena en  $\Sigma$ . Nótese que  $|\nabla x_3|^2 + \langle N, \vec{e}_3 \rangle^2 = 1$ , así, sumando las expresiones (2.36),(2.37) y (2.38) y teniendo en cuenta que  $\bar{\nabla}^2 \varphi(N, N) = \ddot{\varphi} \langle N, \vec{e}_3 \rangle^2$ , deducimos que

$$\mathcal{G}_\varphi(e^{\frac{\varphi}{2}} u) = e^{-\frac{\varphi}{2}} (\Delta^\varphi(u) + (|\mathcal{S}|^2 - \ddot{\varphi} \langle N, \vec{e}_3 \rangle^2)u) = e^{-\frac{\varphi}{2}} \mathcal{L}_\varphi(u).$$

□

## 2.4. Ecuaciones Fundamentales.

En esta sección, demostramos una serie de ecuaciones que serán de gran utilidad a lo largo de este trabajo. Estas ecuaciones junto con el principio del máximo para operadores elípticos [26, Capítulo 9] y un principio del máximo de Hamilton [67, Sección 2] para valores propios de la segunda forma fundamental, nos permitirán probar principios del máximo para la curvatura media y la curvatura de Gauss de superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas en  $\mathbb{R}^2 \times I$

Sea  $\Sigma$  una inmersión  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima en  $\mathbb{R}^2 \times I$  orientable y con aplicación de Gauss  $N$ . Denotaremos por  $\mathcal{S}$  la segunda forma fundamental escalar dada por  $\mathcal{S}(X, Y) = -\langle dN(X), Y \rangle$  para cualesquiera vectores  $X, Y \in T\Sigma$ , por  $\mathbf{H} = \text{traza}(dN)$  el vector curvatura media, por  $K = \det(dN)$  la curvatura de Gauss y por  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita de  $\Sigma$  respecto a la métrica inducida.

Si  $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$  es la base usual de  $\mathbb{R}^3$ , vamos a considerar las funciones coordenadas  $x_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  y las funciones ángulo  $\eta_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$x_i(p) = \langle p, \vec{e}_i \rangle \quad \text{y} \quad \eta_i(p) = \langle N(p), \vec{e}_i \rangle \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

En particular, la curvatura media de nuestra inmersión  $\Sigma$  se puede expresar por

$$H = -\dot{\varphi}(x_3)\eta_3. \tag{2.39}$$

**Lema 2.19.** *En las condiciones anteriores, se tiene que:*

$$(i) \quad \nabla x_i = \vec{e}_i^\top \quad \text{y} \quad \langle \nabla \eta_i, \cdot \rangle = -\mathcal{S}(\nabla x_i, \cdot).$$

- (ii)  $\Delta^\varphi x_i = \dot{\varphi} \delta_{i3}$ .
- (iii)  $\Delta^\varphi \eta_i + |\mathcal{S}|^2 \eta_i = -\ddot{\varphi} \eta_3 (\delta_{i3} - \eta_i \eta_3)$ .
- (iv)  $\nabla^2 \eta_3(\cdot, \cdot) = (\nabla_{\nabla x_3} \mathcal{S})(\cdot, \cdot) - \eta_3 \mathcal{S}^{[2]}(\cdot, \cdot)$ .
- (v)  $\nabla^2 H(\cdot, \cdot) = -(\nabla_{\nabla \varphi} \mathcal{S})(\cdot, \cdot) - \eta_3 \nabla^2 \dot{\varphi}(\cdot, \cdot) - H \mathcal{S}^{[2]}(\cdot, \cdot) + \mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ .
- (vi)  $\Delta \mathcal{S}(\cdot, \cdot) + (\nabla_{\nabla \varphi} \mathcal{S})(\cdot, \cdot) + \eta_3 \nabla^2 \dot{\varphi}(\cdot, \cdot) + |\mathcal{S}|^{[2]}(\cdot, \cdot) - \mathcal{B}(\cdot, \cdot) = 0$ ,

donde  $\mathcal{S}^{[2]}$  y  $\mathcal{B}$  son dos formas bilineales simétricas definidas por

$$\mathcal{S}^{[2]}(X, Y) = \sum_{j=1}^2 \mathcal{S}(X, v_j) \mathcal{S}(Y, v_j), \quad (2.40)$$

$$\mathcal{B}(X, Y) = \langle \nabla \dot{\varphi}, X \rangle \mathcal{S}(\nabla x_3, Y) + \langle \nabla \dot{\varphi}, Y \rangle \mathcal{S}(\nabla x_3, X), \quad (2.41)$$

para cualesquiera vectores  $X, Y \in T\Sigma$  y cualquier base ortonormal  $\{v_j\}_{j=1,2}$  de  $T\Sigma$  y donde  $^\top$  denota parte tangente.

*Demostración.* (i) Para cualquier vector  $X \in T\Sigma$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla x_i, X \rangle &= dx_i(X) = \langle X, \vec{e}_i^\top \rangle, \\ \langle \nabla \eta_i, X \rangle &= d\eta_i(X) = \langle dN(X), \vec{e}_i^\top \rangle = -\mathcal{S}(X, \nabla x_i). \end{aligned}$$

(ii) Consideremos  $\{v_j\}_{j=1,2}$  cualquier base ortonormal de  $T\Sigma$ . Por el ítem (i) y la ecuación (2.39), tenemos que

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^2 \langle \nabla_{v_j} \nabla x_i, v_j \rangle = -\eta_i \sum_{j=1}^2 \langle \nabla_{v_j} N, v_j \rangle = -\eta_i H = \dot{\varphi} \eta_i \eta_3. \quad (2.42)$$

Además, es fácil probar que

$$\langle \nabla \varphi, \nabla x_i \rangle = \dot{\varphi} \langle \vec{e}_3^\top, \vec{e}_i^\top \rangle = \dot{\varphi} (\delta_{i3} - \eta_i \eta_3), \quad (2.43)$$

y por tanto, (ii) es una consecuencia directa de las ecuaciones (2.42) y (2.43).

(iii) De la ecuación  $\Delta N = \nabla H - |\mathcal{S}|^2 N$  y la expresión de la curvatura media (2.39), deducimos

$$\Delta N = -\ddot{\varphi} \eta_3 \nabla x_3 - \dot{\varphi} \nabla \eta_3 - |\mathcal{S}|^2 N. \quad (2.44)$$

Así, teniendo en cuenta que  $\Delta\eta_i = \langle \Delta N, \vec{e}_i \rangle$ , de las fórmulas del ítem (i) y (2.44) obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta\eta_i &= -\dot{\varphi}\langle \nabla\eta_3, \nabla x_i \rangle - \ddot{\varphi}\eta_3\langle \nabla x_3, \vec{e}_i^T \rangle - |\mathcal{S}|^2\eta_i \\ &= \mathcal{S}\langle \nabla\varphi, \nabla x_i \rangle - \ddot{\varphi}\eta_3(\delta_{i3} - \eta_i\eta_3) - |\mathcal{S}|^2\eta_i \\ &= -\langle \nabla\varphi, \nabla\eta_i \rangle - \ddot{\varphi}\eta_3(\delta_{i3} - \eta_i\eta_3) - |\mathcal{S}|^2\eta_i.\end{aligned}$$

lo que prueba (iii).

(iv) Este ítem se deduce de la ecuación (2.39) y la fórmula de Codazzi para la segunda forma fundamental  $\mathcal{S}$ . En efecto, para cualesquiera vectores  $X, Y \in T\Sigma$  tenemos que

$$\begin{aligned}\nabla^2\eta_3(X, Y) &= \sum_{j=1}^2 (\nabla_{v_j}\mathcal{S})(X, Y)v_j(x_3) - \eta_3 \sum_{j=1}^2 \mathcal{S}(X, v_j)\mathcal{S}(Y, v_j) \\ &= (\nabla_{\nabla x_3}\mathcal{S})(X, Y) - \eta_3\mathcal{S}^{[2]}(X, Y).\end{aligned}$$

(v) De nuevo, para cualesquiera vectores  $X, Y \in T\Sigma$ , la ecuación para la curvatura media  $H$  y el anterior ítem (iv) dan

$$\begin{aligned}\nabla^2 H(X, Y) &= XY(h) - (\nabla_X Y)(H) \\ &= -\eta_3\nabla^2\dot{\varphi}(X, Y) - \dot{\varphi}\nabla^2\eta_3(X, Y) + \mathcal{B}(X, Y) \\ &= -\eta_3\nabla^2\dot{\varphi}(X, Y) - (\nabla_{\nabla\varphi}\mathcal{S})(X, Y) - H\mathcal{S}^{[2]}(X, Y) + \mathcal{B}(X, Y).\end{aligned}$$

(vi) El último ítem es una aplicación directa de (v) y la conocida como la identidad de Simon:

$$\Delta\mathcal{S} = \nabla^2 H - |\mathcal{S}|^2\mathcal{S} + H\mathcal{S}^{[2]}.$$

□

Observamos que gran parte de estas ecuaciones están determinadas por operadores lineales de tipo elíptico de segundo orden. Como consecuencia, el principio del máximo de Hopf para este tipo de operadores, ver [24, Capítulo 6] o [26, Capítulo 9], da

**Corolario 2.20.** *Si  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable estrictamente creciente ( o estrictamente decreciente ), entonces la función  $x_3$*

no puede alcanzar un máximo local ( o un mínimo local ) en el interior de  $\Sigma$ . En particular, si  $\varphi$  es estrictamente monótona, entonces no existen superficies compactas  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas.

**Corolario 2.21.** Sea  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable estrictamente creciente y convexa y considera  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima con curvatura media  $H \leq 0$ . Si existe un punto interior  $p \in \{\eta_2 > 0\}$  donde la función  $\eta_2/\eta_3$  alcanza un máximo, entonces  $\eta_2/\eta_3$  es una función constante. Análogamente, si existe un punto interior  $p \in \{\eta_2 < 0\}$  donde la función  $\eta_2/\eta_3$  alcanza un mínimo, entonces  $\eta_2/\eta_3$  es contante.

*Demostración.* De la ecuación 3. del Lema 2.19, tenemos que

$$\Delta^\varphi \left( \frac{\eta_2}{\eta_3} \right) + 2 \langle \nabla \left( \frac{\eta_2}{\eta_3} \right), \frac{\nabla \eta_3}{\eta_3} \rangle = \ddot{\varphi} \left( \frac{\eta_2}{\eta_3} \right),$$

y la prueba concluye aplicando los principios del máximo para operadores elípticos en [26, Capítulo 9] gracias a la convexidad de  $\varphi$ .  $\square$

**Teorema 2.22.** Sea  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable estrictamente monótona satisfaciendo que  $\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi}^2 \geq 0$ , para algún  $\lambda > 0$ . Consideramos  $\Sigma$  una inmersión  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima en  $\mathbb{R}^2 \times I$ , con curvatura media  $H \leq 0$ . Si  $H$  se anula en algún punto de  $\Sigma$ , entonces  $H$  es constantemente nula y por tanto  $\Sigma$  ha de ser un subconjunto abierto de un plano vertical.

*Demostración.* Por la expresión de la curvatura media (2.39) y las ecuaciones (i), (ii) y (iii) del Lema 2.19, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta(e^{-\lambda\varphi}) + \lambda e^{-\lambda\varphi} (\ddot{\varphi} |\nabla x_3|^2 + H^2 - \lambda \dot{\varphi}^2 |\nabla x_3|^2) &= 0, \\ \Delta \eta_3 + \dot{\varphi} \langle \nabla \eta_3, \nabla x_3 \rangle + (|\mathcal{S}|^2 + \ddot{\varphi} |\nabla x_3|^2) \eta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \Delta(e^{-\lambda\varphi} \eta_3) + (2\lambda + 1) \langle \nabla(e^{-\lambda\varphi} \eta_3), \nabla \varphi \rangle &= \\ = -e^{-\lambda\varphi} \eta_3 ((\lambda + 1)(\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi}^2) |\nabla x_3|^2 + \lambda H^2 + |\mathcal{S}|^2). \end{aligned}$$

Por hipótesis, la función ángulo  $\eta_3 \geq 0$  en todo  $\Sigma$ . Pero, si  $H$  se anula en algún punto, entonces  $\eta_3$  también se anula en dicho punto y por el

principio del máximo,  $\eta_3 \equiv 0$ . En particular,  $H$  se anula en cualquier punto y  $\Sigma$  está contenida en un plano vertical.  $\square$

Para finalizar estos preliminares, aplicamos un principio de Hamilton a la segunda forma fundamental  $\mathcal{S}$  para demostrar un principio del máximo para la curvatura de Gauss  $K$ . Dicho resultado es aplicación directa del Teorema 2.3 en [67] demostrado por A. Savas-Halilaj y K. Smoczyk.

**Teorema 2.23.** *Sea  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable estrictamente creciente satisfaciendo  $\ddot{\varphi} \leq 0$ . Consideramos  $\Sigma$  una inmersión  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas localmente convexa, esto es,  $\mathcal{S}$  es semi-definida positiva. Si la curvatura de Gauss  $K$  se anula en un punto de  $\Sigma$ , entonces  $K$  es constatemente nula.*

*Demostración.* Por hipótesis, podemos elegir la aplicación de Gauss  $N$  para que  $\mathcal{S}$  sea forma bilinear semi-definida positiva. De la ecuación (vi) del Lema 2.19, tenemos que

$$\Delta \mathcal{S} + (\nabla_{\nabla \varphi} \mathcal{S}) + \Gamma(\mathcal{S}) = 0,$$

donde  $\Gamma(\mathcal{S}) = \eta_3 \nabla^2 \dot{\varphi} + |\mathcal{S}|^2 \mathcal{S} - \mathcal{B}$ . Nótese que para cualquier vector nulo  $v$  de  $\mathcal{S}$  se tiene que  $\Gamma(\mathcal{S})(v, v) = \eta_3 \ddot{\varphi} \langle \nabla x_3, v \rangle^2 \geq 0$ . Como consecuencia, podemos aplicar el principio del máximo de Hamilton [67, Teorema 2.3] para probar que si existe un punto de  $\Sigma$  donde anula un autovalor de  $\mathcal{S}$ , entonces dicho autovalor es constante cero en toda  $\Sigma$ .  $\square$

**Nota 2.24.** En el caso en que  $\mathcal{S}$  fuese semi-definida negativa, podemos aplicar el resultado previo 2.23 a la forma bilinear  $-\mathcal{S}$  para demostrar que en tales condiciones, si  $K$  se anula en un punto entonces  $K$  se anula en todos los puntos.



# Capítulo 3

---

## Superficies $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas invariantes por isometrías de $\mathbb{R}^2$ .

---

Cuando intentamos dar los primeros ejemplos en una teoría, uno se plantea buscar aquellos 'aparentemente' mas sencillos los cuáles presentan algún tipo de simetría; en este caso, vamos a estudiar inmersiones  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas que son invariantes por traslaciones en una dirección horizontal o aquellas que son rotacionalmente simétricas entorno al eje  $OZ$ . A lo largo de la primera sección, introducimos los denominados cilindros  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarios y los cilindros  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarios ladeados estudiando grafos verticales invariantes por traslaciones. De hecho, probaremos que junto con los planos verticales estos son las únicas inmersiones  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas completas y llanas. En la segunda sección, construimos los ejemplos rotacionalmente simétricos que serán denominados  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Boles y  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos catenoides. En ambos casos, describiremos las propiedades geométricas de tales ejemplos en función de las propiedades analíticas de nuestra función  $\varphi$ , daremos explícitamente el comportamiento asintótico de todos estos ejemplos y generalizaremos, en la última sección del capítulo, el resultado de J. Clutterbuck, O. Schnürer y F. Schulze en [14] para superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas rotacionalmente simétricas cuando  $\varphi$  sea una función estrictamente creciente, convexa y tenga un comportamiento asintótico cuadrático. Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en [53].

### 3.1. Inmersiones $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas completas y llanas.

#### 3.1.1. Grafos verticales invariantes por traslaciones horizontales.

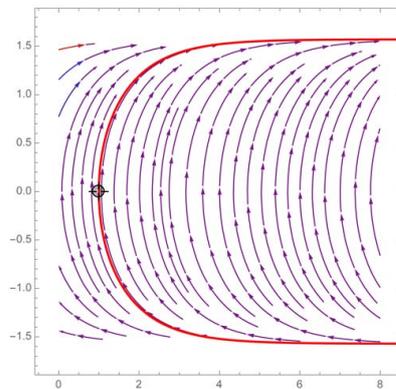
Sea  $\Sigma$  un grafo  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimo definido por una función  $u$  la cuál solo depende de una variable  $u = u(x)$ . Por la ecuación (1.6), la función  $u$  es solución de la siguiente ecuación diferencial

$$u''(x) = \dot{\varphi}(u)(1 + u'(x)^2). \quad (3.1)$$

Con la idea de construir ejemplos completos, vamos a considerar  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , una función estrictamente monótona. Entonces, aplicando el cambio de variable  $z = \varphi(u)$  y  $u' = \tan(v)$ , obtenemos que (3.1) es equivalente al siguiente sistema

$$\left. \begin{aligned} v' &= h(z), \\ z' &= h(z) \tan(v) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

donde  $h$  es la función definida por  $h(z) = \dot{\varphi}(\varphi^{-1}(z))$  en  $\varphi(]a, +\infty[)$ .



**Figura 3.1:** Diagrama de fases del sistema (3.2).

Con esta notación, es fácil comprobar que  $e^z \cos(v)$  es constante a lo largo de las soluciones de (3.2) y observando el diagrama de fases ( ver Figura (3.1) ) asociado al sistema (3.2), se puede deducir que

para cada solución  $u$  de (3.1) existe un único  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $v(x_0) = 0$ . por tanto, no es ninguna restricción asumir que  $x_0 = 0$  junto con las siguientes condiciones iniciales

$$u(0) = u_0 \in ]a, +\infty[ \quad , \quad u'(0) = 0. \quad (3.3)$$

**Proposición 3.1.** *La solución  $u$  de (3.1)-(3.3) es una función par definida en el intervalo  $] -\Lambda_{u_0}, \Lambda_{u_0}[$ , dada por  $u(x) = (\mathcal{X} \circ \varphi)^{-1}(x)$  donde*

$$\mathcal{X}(z) = \int_{z_0}^z \frac{d\tau}{|h(\tau)|\sqrt{e^{2(\tau-z_0)} - 1}}, \quad z_0 = \varphi(u_0) \quad (3.4)$$

$$\Lambda_{u_0} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{\varphi(u_0)}^{\varphi(u)} \frac{d\tau}{|h(\tau)|\sqrt{e^{2(\tau-z_0)} - 1}}. \quad (3.5)$$

*Demostración.* Solo necesitamos probar que  $u(x) = (\mathcal{X} \circ \varphi)^{-1}(x)$  pues la fórmula (3.5) es consecuencia directa de la definición de  $\mathcal{X}$ . Nótese que, a lo largo de las soluciones se tiene que

$$\cos(v) = e^{z_0 - z}. \quad (3.6)$$

En consecuencia, del sistema (3.2) y la fórmula (3.6), deducimos

$$z' = h(z)\sqrt{e^{2(z-z_0)} - 1}. \quad (3.7)$$

y por el Teorema de la función inversa, la definición de  $\mathcal{X}$  y (3.7), se deduce que  $u = (\mathcal{X} \circ \varphi)^{-1}$  ya que  $(\mathcal{X}^{-1})' = z'$ .  $\square$

A la vista de éste resultado, nos preguntamos cuándo el intervalo de definición está acotado ó no y cómo se comportan las soluciones con respecto a la condición inicial.

**Teorema 3.2.** *Si  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , es una función estrictamente creciente, entonces*

- (i)  $\Lambda_{u_0} < +\infty$  si y sólo si  $e^{-\varphi} \in L^1(]u_0, +\infty[)$ , es decir,  $\int_{u_0}^{+\infty} e^{-\varphi(\lambda)} d\lambda < +\infty$ . En particular, si  $\Lambda_{\lambda_0} < +\infty$  para algún  $\lambda_0 \in ]a, +\infty[$ , entonces  $\Lambda_\lambda < +\infty$  para cualquier  $\lambda \in ]a, +\infty[$ .

(ii) Si  $\Lambda_\lambda < +\infty$  y  $\varphi$  es convexa (respectivamente, cóncava), entonces  $\Lambda_\lambda$  es decreciente (respectivamente, creciente) con respecto a  $\lambda$ .

*Demostración.* Aplicando el cambio de variable  $\tau = \varphi(\sigma)$  al ser  $\varphi$  un difeomorfismo en su imagen, tenemos que

$$\int_{\varphi(u_0)}^{\varphi(u)} \frac{d\tau}{|h(\tau)|\sqrt{e^{2(\tau-z_0)} - 1}} = \int_{u_0}^u \frac{d\sigma}{\sqrt{e^{2(\sigma-z_0)} - 1}}. \quad (3.8)$$

por tanto, el primer ítem (i) es una consecuencia directa de clásicos criterios de convergencia por comparación. Basta tener en cuenta que,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{e^{2(\tau-z_0)} - 1}}{e^{\tau-z_0}} = 1 \neq 0.$$

Por otro lado, asumiendo que  $\dot{\varphi}$  es creciente y  $\Lambda_\lambda < +\infty$  para cualquier  $\lambda \in ]a, +\infty[$ , tenemos que si  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  entonces, aplicando el cambio de variable  $\sigma = \tau + \varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)$  en la fórmula (3.5), obtenemos que

$$\Lambda_{\lambda_1} \geq \Lambda_{\lambda_2} + \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_{z-\varphi(\lambda_2)}^{z-\varphi(\lambda_1)} \frac{d\tau}{h(\tau + \varphi(\lambda_2))\sqrt{e^{2\tau} - 1}} = \Lambda_{\lambda_2}.$$

Y un argumento similar cuando  $\dot{\varphi}$  es decreciente demuestra el (ii).  $\square$

De las expresiones (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5) todas estas propiedades pueden resumirse en los siguientes dos resultados:

**Teorema 3.3.** Sea  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un difeomorfismo estrictamente creciente. Entonces la solución  $u$  de (3.1)-(3.3) está definida en  $] -\Lambda_{u_0}, \Lambda_{u_0}[$ ,  $\Lambda_{u_0} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , es convexa, simétrica respecto al eje  $OY$  y alcanza un mínimo en  $x = 0$ . Además,

(i) si  $c < +\infty$ , entonces  $\Lambda_{u_0} = +\infty$  y,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u'(x) = \pm \sqrt{e^{2(c-z_0)} - 1}.$$

(ii) si  $c = +\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \pm \Lambda_{u_0}} u(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \Lambda_{u_0}} u'(x) = \pm \infty.$$

En particular, si  $\Lambda_{u_0} < +\infty$ , el grafo de  $u$  es asintótico a dos rectas verticales.

**Teorema 3.4.** Sea  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un difeomorfismo estrictamente decreciente. Entonces la solución  $u$  de (3.1)-(3.3) está definida en  $] -\Lambda_{u_0}, \Lambda_{u_0}[$ ,  $\Lambda_{u_0} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , es cóncava, simétrica respecto al eje  $OY$  y alcanza un máximo en  $x = 0$ . Además,

(i) si  $c < +\infty$ , entonces  $\Lambda_{u_0} < +\infty$  y,

$$\lim_{x \rightarrow \pm \Lambda_{u_0}} u(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} u'(x) = \pm \sqrt{e^{2(c-z_0)} - 1}.$$

(ii) si  $c = +\infty$ , entonces  $\Lambda_{u_0} < +\infty \iff \int_a^{u_0} e^{-\varphi(\lambda)} d\lambda < +\infty$ , y

$$\lim_{x \rightarrow \pm \Lambda_{u_0}} u(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \Lambda_{u_0}} u'(x) = \pm \infty.$$

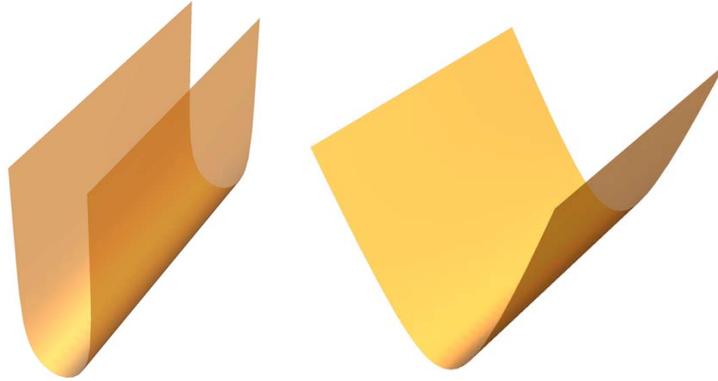
**Nota 3.5.** En las condiciones del Teorema 3.4, el grafo de  $u$  es completo cuando  $a = -\infty$ . Pero en este caso, cambiando  $\varphi$  por  $-\varphi$ , podemos aplicar de nuevo el Teorema 3.3.

**Definición 3.6.** Si  $u$  es solución de (3.1)-(3.3), diremos que  $\mathcal{G}^{u_0} = \text{Grafo}(u) \times \mathbb{R}$  es un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario.

### 3.1.2. Cilindros $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarios ladeados.

Sea  $\psi = (x, y, u(x))$  un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario con  $u$  cumpliendo (3.3), definido en el intervalo  $] -\Lambda_{u_0}, \Lambda_{u_0}[$  y con aplicación de Gauss

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}}(u', 0, 1).$$



**Figura 3.2:** Cilindros  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarios para  $\dot{\varphi} = 1$  y  $\dot{\varphi} = 1/x_3^2$ , respectivamente.

Si rotamos la superficie por un ángulo  $\theta \in ]0, \pi/2[$  sobre el eje  $OX$  y aplicamos una homotecia de razón  $1/\cos(\theta)$ , la superficie resultante queda parametrizada como sigue

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{1 - \cos(\theta)}{\cos(\theta)} \langle \psi, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + (\tan(\theta)) \vec{e}_1 \wedge N,$$

y su aplicación de Gauss dada por

$$\tilde{N} = \cos(\theta) N + (1 - \cos(\theta)) \langle N, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \sin(\theta) \vec{e}_1 \wedge N. \quad (3.9)$$

En consecuencia, la curvatura media  $\tilde{H}$  de  $\tilde{\psi}$  verifica

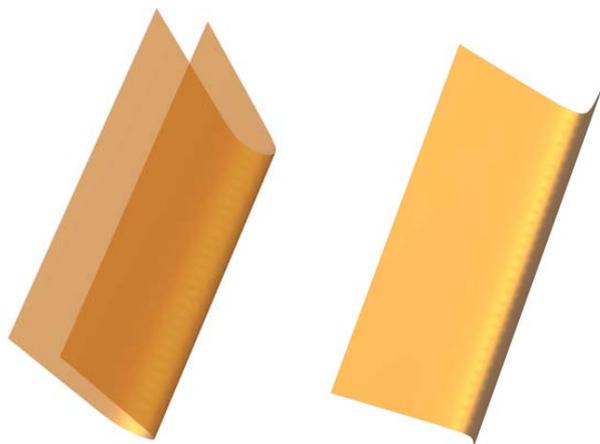
$$\tilde{H} = \cos(\theta) H = -\cos(\theta) \dot{\varphi} \langle N, \vec{e}_3 \rangle = -\dot{\varphi} \langle \vec{e}_3, \tilde{N} \rangle.$$

Por tanto, la nueva superficie  $\tilde{\psi}$  es también  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima y denominaremos a estos ejemplos por *cilindros  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarios ladeados*. Obsérvese que,

$$\tilde{\psi}(x, y) = \left( \frac{x}{\cos(\theta)}, y - u(x) \tan(\theta), u(x) + y \tan(\theta) \right), \quad (3.10)$$

es qtambién el grafo de la función  $\mathcal{G}_\theta : ] - \frac{\Lambda_{u_0}}{\cos(\theta)}, \frac{\Lambda_{u_0}}{\cos(\theta)} [ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\mathcal{G}_\theta(x, y) = \frac{u(x \cos(\theta))}{\cos^2(\theta)} + y \tan(\theta).$$



**Figura 3.3:** Cilindros  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarios ladeados para  $\dot{\varphi} = 1$  y  $\dot{\varphi} = 1/x_3^2$ .

Terminamos esta sección dando una clasificación de las superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas completas y llanas cuando  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un difeomorfismo, pues sorprendentemente estos son los únicos ejemplos junto con los planos verticales y los cilindros  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarios.

**Teorema 3.7.** *Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima completa y llana en  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un difeomorfismo estrictamente monótono, entonces  $\Sigma$  o bien, es un plano vertical, o bien, es un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario (posiblemente ladeado).*

*Demostración.* Demostramos el resultado solo cuando  $\varphi$  es estrictamente creciente pues en el otro caso podemos cambiar  $\varphi$  por  $-\varphi$  y aplicamos lo ya demostrado. Por hipótesis, tenemos que  $\Sigma = \alpha \times \Pi^\perp$  es una superficie reglada con aplicación de Gauss constante a lo largo de las rectas y donde  $\alpha$  es una curva regular completa contenida en un plano  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ .

**Afirmación:** Sea  $L$  una línea recta contenida en  $\Sigma$  y  $\nu_L$  el normal exterior unitario a lo largo de  $L$ . Si  $\langle \nu_L, \vec{e}_3 \rangle \neq 0$ , entonces existe un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario (ladeado, si  $L$  es no horizontal) conteniendo a dicha recta  $L$  y tangente a  $\Sigma$  a lo largo de los puntos de  $L$ .

Entonces, salvo una rotación y homotecia,  $\Sigma$  es tangente a un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario a lo largo de la recta  $L$ . por tanto, la prueba se termina por unicidad de solución de la ecuación diferencial ordinaria (3.1).  $\square$

*Demostración de la afirmación.* Si  $L$  es horizontal entonces, después de una rotación sobre el eje  $OZ$ , podemos asumir que

$$L = \{(x_0, 0, u_0 + s(0, 1, 0)) | s \in \mathbb{R}\},$$

donde  $(x_0, 0, u_0)$  es un punto arbitrario de  $L$  y existe  $\phi \in ]-\pi/2, \pi/2[$  tal que  $\nu_L = (-\sin(\phi), 0, \cos(\phi))$ . Entonces, como  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un difeomorfismo creciente, existe una solución  $u_L$  de (3.1)-(3.3) y  $x_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $u_L(x_1) = u_0$  y  $u'_L(x_1) = \tan(\phi)$ . El cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario que nosotros estamos buscando es justo una traslación del cilindro  $\text{Grafo}(u_L) \times \mathbb{R}$  en la dirección  $\vec{e}_1$ .

Por otro lado, si  $L$  es no horizontal. Fijamos cualquier punto  $p \in L \cap \{z = 0\}$ . Por una rotación con origen en  $p$  y respecto al eje  $OZ$ , podemos asumir que existe  $\theta \in ]-\pi/2, 0[$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nu_L = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}(-\alpha, -\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Entonces, por (3.9) y (3.10), si tomamos la solución  $u_L$  de (3.1)-(3.3) verificando

$$u_L(x_1) = \langle p, \vec{e}_2 \rangle \cos(\theta) \sin(\theta), \quad u'_L(x_1) = \alpha,$$

para algún  $x_1 \in \mathbb{R}$ , concluimos que el cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario ladeado que buscábamos es una traslación en el eje  $OX$  del cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario ladeado después de aplicar una rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $\vec{e}_2$  y una homotecia de factor  $1/\cos(\theta)$  al cilindro  $\text{Grafo}(u_L) \times \mathbb{R}$   $\square$

Como consecuencia, aplicando el Teorema 2.23, obtenemos

**Corolario 3.8.** *Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un difeomorfismo creciente verificando  $\ddot{\varphi} \leq 0$  y sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima completa y localmente convexa. Si la curvatura de Gauss se anula en un punto, entonces  $\Sigma$  es o bien, un plano vertical, o bien,  $\Sigma$  es un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario (posiblemente ladeado).*

### 3.2. Inmersiones $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas rotacionales.

#### 3.2.1. Caso singular.

En el caso rotacionalmente simétrico, si  $u = u(r)$  con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  es una función diferenciable, la ecuación (1.6) se reduce a la siguiente EDO

$$u'' = (1 + u'^2) \left( \dot{\varphi}(u) - \frac{u'}{r} \right), \quad (3.11)$$

donde  $(\cdot)'$  denota la derivada respecto de  $r$ . Nótese que (3.11) es degenerada y, por tanto, la teoría clásica de ecuaciones diferenciables no garantiza la existencia y unicidad de solución en  $r = 0$ .

Multiplicando por  $r$ , la ecuación (3.11) se puede reescribir como:

$$\left( \frac{ru'}{\sqrt{1 + u'^2}} \right)' = \frac{r\dot{\varphi}(u)}{\sqrt{1 + u'^2}}. \quad (3.12)$$

Así, usando el Teorema 2 de J. Serrin en [71], una solución de (3.12) no puede tener singularidades aisladas. En consecuencia, no es restricción estudiar existencia de soluciones de (3.12) con las siguientes condiciones iniciales

$$u(0) = u_0 \in ]a, b[, \quad u'(0) = 0. \quad (3.13)$$

En este caso, usando un argumento similar al de la prueba de la Proposición 2 en [45], podemos demostrar,

**Proposición 3.9.** *El problema (3.11)-(3.13) tiene una única solución  $u \in \mathcal{C}^2([0, R])$  para algún  $R > 0$ , que depende continuamente de las condiciones iniciales y tal que*

$$u''(0) = \frac{\dot{\varphi}(u)}{2}. \quad (3.14)$$

*Demostración.* Consideremos las funciones  $g : ]a, b[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dadas por

$$g(x, y) = \frac{\dot{\varphi}(x)}{\sqrt{1 + y^2}} \quad f(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Nótese que una función  $u \in C^2([0, \delta])$ , para algún  $\delta > 0$ , es solución (3.11)-(3.13) si y sólo si  $rg(u, u') = (rf(u'))'$  con  $u(0) = u_0$  y  $u'(0) = 0$ .

Tomemos  $\delta > 0$  (a determinar después) y  $\mathcal{T}$  el operador definido por

$$(\mathcal{T}u)(r) = u_0 + \int_0^r f^{-1} \left( \int_0^s \frac{t}{s} g(u, u') dt \right) ds.$$

Es claro que cualquier punto fijo del operador  $\mathcal{T}$  es solución de (3.11)-(3.13). En consecuencia, si probamos que  $\mathcal{T}$  es contractivo en el espacio de funciones  $C^1([0, \delta])$  bajo la norma  $\|u\|_\infty^1 = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ , podremos asegurar la existencia de un punto fijo y, por tanto, de una solución a nuestro problema.

Obsérvese que, de la diferenciabilidad de  $\varphi$ ,  $g$  y  $f^{-1}$  son funciones continuas Lipschitz de constante  $L > 0$  en  $[u_0 - \xi, u_0 + \xi] \times [-\xi, \xi]$  y  $[-\xi, \xi]$ , respectivamente, para algún  $\xi < \min\{u_0, 1\}$ . Así, para cualesquiera  $u, v \in \overline{B}(u_0, \xi)$  y para cualquier  $r \in [0, \delta]$ , tenemos que,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}u)(r) - (\mathcal{T}v)(r)| &\leq \frac{L^2 \delta^2}{4} \|u - v\|_\infty^1, \\ |(\mathcal{T}u)'(r) - (\mathcal{T}v)'(r)| &\leq \frac{L^2 \delta}{2} \|u - v\|_\infty^1. \end{aligned}$$

Tomando entonces  $\delta$  suficientemente pequeño, deducimos que  $\mathcal{T}$  es una contracción en la bola cerrada  $\overline{B}(u_0, \delta)$  en  $C^1([0, \delta])$  y podemos garantizar la existencia local de solución al problema de valores iniciales (3.11)-(3.13) con regularidad  $C^1([0, \delta]) \cap C^2([0, \delta])$ .

Para terminar la prueba, (3.14) se deduce directamente de la regla de L'Hôpital y (3.11). La dependencia continua de las condiciones iniciales es consecuencia de la dependencia continua de los puntos fijos de  $\mathcal{T}$  con respecto al parámetro  $u_0$ .  $\square$

El siguiente resultado nos va a permitir comparar grafos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos rotacionalmente simétricos.

**Proposición 3.10.** Sean  $\varphi_1, \varphi_2 : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables estrictamente crecientes y convexas tal que  $\dot{\varphi}_1 > \dot{\varphi}_2$  en  $]a, b[$ . Si denotamos por  $u_{\varphi_1}$  y  $u_{\varphi_2}$  las soluciones correspondientes al problema (3.11)-(3.13), entonces  $u'_{\varphi_1} > u'_{\varphi_2}$ , en  $]0, R[$ .

*Demostración.* Si definimos la función  $d := u'_{\varphi_1} - u'_{\varphi_2}$ , entonces  $d(0) = 0$  y

$$d'(0) = u''_{\varphi_1}(0) - u''_{\varphi_2}(0) = \left( \frac{\dot{\varphi}_1(u_0)}{2} - \frac{\dot{\varphi}_2(u_0)}{2} \right) > 0.$$

Consecuentemente, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $d > 0$  sobre  $]0, \epsilon[$ . De hecho  $d > 0$  en todo el intervalo  $]0, R[$ ; en otro caso, existe un  $r_1 > 0$  tal que  $d(r_1) \leq 0$  y podemos tomar  $r^* := \inf\{r > 0 : d(r) < 0\}$  verificando  $d(r^*) = 0$  y  $d'(r^*) \leq 0$ . Sin embargo, de la ecuación (3.11) y teniendo en cuenta que  $\int_0^{r^*} d > 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\geq d'(r^*) = (1 + u'_{\varphi_1}(r^*)^2)[\dot{\varphi}_1(u_{\varphi_1}(r^*)) - \dot{\varphi}_1(u_{\varphi_2}(r^*))] \\ &> (1 + u'_{\varphi_1}(r^*)^2)[\dot{\varphi}_1(u_{\varphi_2}(r^*)) - \dot{\varphi}_1(u_{\varphi_2}(r^*))] > 0, \end{aligned}$$

llegando a una contradicción.  $\square$

**Nota 3.11.** La Proposición anterior es cierta también si asumimos que  $\varphi_1, \varphi_2 : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables tal que  $\inf_{]a, b[} \{\dot{\varphi}_1\} > \sup_{]a, b[} \{\dot{\varphi}_2\}$ .

Como consecuencia de la Proposición 3.10 y del comportamiento asintótico de los solitones de traslación rotacionalmente simétricos descrito en [14], obtenemos el siguiente resultado

**Corolario 3.12.** Sea  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  una función diferenciable estrictamente creciente y sea  $u$  una solución entera de (3.11). Si existe un  $\alpha > 0$  tal que  $\dot{\varphi} > \alpha$ , entonces para  $r$  suficientemente grande tenemos que

$$u'(r) \geq \alpha r - \frac{1}{\alpha r}.$$

### 3.2.2. Descripción geométrica de las superficies $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas de revolución.

Ahora, vamos a describir las superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas que son invariantes bajo un grupo 1-paramétrico de rotaciones que dejan invariante la dirección  $\vec{e}_3$ . Una tal superficie, con curva generatriz

$$\gamma(s) = (x(s), 0, z(s)), \quad s \in I \subset \mathbb{R},$$

parametrizada por el arco, viene dada por

$$\psi(s, t) = (x(s) \cos(t), x(s) \sin(t), z(s)), \quad (s, t) \in I \times \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

El normal interior de  $\psi$  es

$$N(s, t) = (-z'(s) \cos(t), -z'(s) \sin(t), x'(s)), \quad (3.16)$$

y los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental son

$$\begin{aligned} \langle \psi_s, \psi_s \rangle &= 1, & \langle \psi_s, N_s \rangle &= -\kappa, \\ \langle \psi_t, \psi_t \rangle &= x^2, & \langle \psi_t, N_t \rangle &= -x z', \\ \langle \psi_s, \psi_t \rangle &= 0, & \langle \psi_s, N_t \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $\kappa$  es la curvatura de  $\gamma$  y  $'$  representa la derivada respecto de  $s$ .

En consecuencia, de (3.17), el vector curvatura media de  $\psi$  se escribe como,

$$\mathbf{H} = - \left( \kappa + \frac{z'}{x} \right) N. \quad (3.18)$$

Así, de (1.6), (3.15), (3.16) y (3.18), la superficie  $\psi$  es  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima si y sólo si verifica el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta), \\ z' = \sin(\theta), \\ \theta' = \dot{\varphi}(z) \cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{x}, \end{cases} \quad (3.19)$$

donde

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t) dt.$$

A lo largo de toda esta sección consideraremos que  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R} \in \{-\infty\}$ , es una función estrictamente creciente y convexa, esto es:

$$\dot{\varphi} > 0, \quad \ddot{\varphi} \geq 0 \quad \text{sobre } ]a, +\infty[. \quad (3.20)$$

• EJEMPLOS GLOBALMENTE CONVEXOS.

En este apartado, estudiamos las soluciones del sistema (3.19) con las siguientes condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \quad z(0) = z_0 \in ]a, +\infty[ \quad y \quad \theta(0) = 0. \quad (3.21)$$

En este caso, la superficie interseca ortogonalmente al eje de rotación y tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.13.** *Con las condiciones iniciales (3.21), la curva generatriz  $\gamma$  es el grafo de una función  $u(x)$  par, estrictamente convexa, definida sobre un intervalo simétrico maximal  $]-\omega_+, \omega_+[$ ,  $\omega_+ \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , con un mínimo global en el origen  $x = 0$  y verificando  $\lim_{x \rightarrow \pm\omega_+} u(x) = +\infty$ .*

*Demostración.* En primer lugar, la existencia de  $\gamma$  alrededor de  $s = 0$  está garantizada por la Proposición 3.9. Además, es fácil comprobar que  $\bar{x}(s) = -x(-s)$ ,  $\bar{z}(s) = z(-s)$  y  $\theta(s) = -\theta(-s)$  es también solución del problema de valores iniciales (3.19)-(3.21) y por tanto,  $\gamma$  es simétrica. Así pues, no es restricción estudiar solo el caso  $s \geq 0$ .

Aplicando la regla de L' Hôpital, tenemos que  $2\theta'(0) = \dot{\varphi}(z_0) > 0$  y  $\gamma$  es una curva plana estrictamente convexa alrededor de  $s = 0$ . De hecho, podemos asegurar que  $\theta'(s) > 0$  para  $s \geq 0$ ; en otro caso, de (3.21), existe un primer valor  $s_0 > 0$  tal que  $\theta'(s_0) = 0$  y  $\theta''(s_0) \geq 0$ . Como  $\theta' > 0$  en  $[0, s_0[$ , del sistema (3.19) tenemos que  $0 < 2\theta(s_0) < \pi$  y

$$\theta''(s_0) = \frac{\sin(2\theta(s_0))}{2} \left( \ddot{\varphi}(z(s_0)) + \frac{1}{x(s_0)^2} \right) > 0,$$

llegando a contradicción.

De la misma manera, como  $\theta' > 0$  para  $s > 0$ , tenemos que  $0 < 2\theta(s) < \pi$  para todo  $s > 0$  y  $\gamma$  es el grafo de una función  $u = u(x) \in \mathcal{C}^2(]-\omega_+, \omega_+[)$  estrictamente convexa y solución de

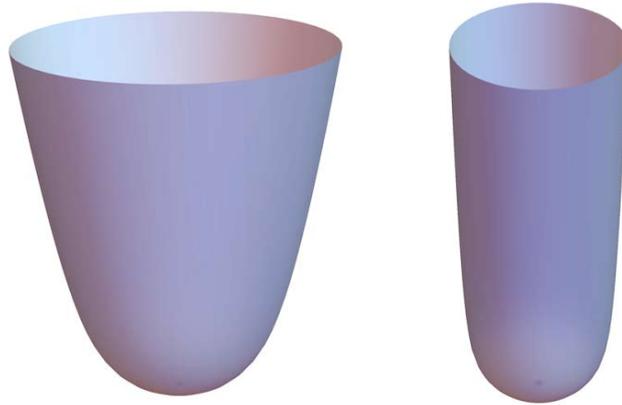
$$\begin{cases} u'' = (1 + u^2) \left( \dot{\varphi}(u) - \frac{u'}{x} \right) > 0, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

sobre el intervalo maximal de existencia  $] -\omega_+, \omega_+[$ . Finalmente, si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\omega_+} u(x) = \text{constante} < +\infty,$$

entonces por teoría clásica de prolongación de soluciones, tendríamos que  $\omega_+ = +\infty$  y  $u$  no podría ser globalmente convexa.  $\square$

**Definición 3.14.** Si  $\gamma$  es el grafo dado por el Teorema 3.13, a la superficie de revolución generada por la curva  $\gamma$  la llamaremos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol y la denotaremos también como  $\mathcal{B}^\varphi$ .



**Figura 3.4:**  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bolos para  $\dot{\varphi}(u) = e^{-1/u}$  y  $\dot{\varphi}(u) = u^2$ , respectivamente.

• EJEMPLOS NO CONVEXOS.

Ahora, estudiamos las soluciones de (3.19) con las siguientes condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 > 0, \quad z(0) = z_0 \in ]a, +\infty[, \quad \theta(0) = 0. \quad (3.23)$$

Por teoría estándar de ecuaciones diferenciales ordinarias, la existencia y unicidad de solución del problema de valores iniciales (3.19)-(3.23) está garantizada.

Sea  $] -s_-, s_+[$  el intervalo de existencia maximal y  $\gamma^+ = \gamma|_{[0, s_+[}$  la “rama” derecha de  $\gamma$ . Argumentando de la misma forma que en el

Teorema 3.13, podemos probar que  $\gamma^+$  es el grafo de una función convexa  $u = u(x)$  definida sobre un intervalo maximal  $]x_0, \omega_+[$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow \omega_+} u(x) = +\infty.$$

Para estudiar la “rama” izquierda de  $\gamma$ , vamos a considerar  $\gamma^-(s) = \gamma(-s)$  para  $s \in [0, s_-[$ . Entonces, tomando por  $\bar{x}(s) = x(-s)$ ,  $\bar{z}(s) = z(-s)$  y  $\bar{\theta}(s) = \theta(-s) + \pi$  para  $s \in [0, s_-[$ , tenemos que  $\{\bar{x}, \bar{z}, \bar{\theta}\}$  es una solución de (3.19) sobre  $]0, s_-[$  con las siguiente condiciones iniciales

$$\bar{x}(0) = x_0 > 0, \quad \bar{z}(0) = z_0 \in ]a, +\infty[, \quad \bar{\theta}(0) = \pi. \quad (3.24)$$

**Lema 3.15.** *Existe  $s_0 \in ]0, s_-[$  tal que  $2\bar{\theta}(s_0) = \pi$ .*

*Demostración.* Argumentamos por *contradicción*. Si  $\bar{\theta}(s) \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$  para todo  $s \in ]0, s_-[$ , del sistema (3.19), tenemos que  $\bar{x}' < 0$ ,  $\bar{\theta}' < 0$  y  $\bar{z}' > 0$  en el intervalo  $]0, s_-[$ . Así, los siguientes límites existen

$$\bar{x}_- = \lim_{s \rightarrow s_-} \bar{x}(s), \quad \bar{z}_- = \lim_{s \rightarrow s_-} \bar{z}(s), \quad \bar{\theta}_- = \lim_{s \rightarrow s_-} \bar{\theta}(s),$$

y, como  $] -s_-, s_+[$  es el intervalo maximal de existencia de  $\gamma$ , tenemos que o bien,  $\bar{x}_- = 0$  o bien,  $\bar{z}_- = +\infty$ . Por tanto,  $\gamma^-$  es el grafo de una función convexa  $\bar{u} = \bar{u}(\bar{x})$  sobre el intervalo  $]\bar{x}_-, x_0[$  tal que, o bien,  $\bar{x}_- = 0$  o bien,  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_-} \bar{u}(\bar{x}) = +\infty$ .

Supongamos que  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_-} \bar{u}(\bar{x}) = +\infty$ , de la convexidad de  $\bar{u}$  tenemos que  $\bar{\theta}_- = \frac{\pi}{2}$  y entonces, existe una sucesión  $s_n \rightarrow s_-$  tal que  $\bar{\theta}'(s_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Sin embargo, como

$$\bar{\theta}'(s_n) = \cos(\bar{\theta}(s_n))\dot{\varphi}(\bar{z}(s_n)) - \frac{\sin(\bar{\theta}(s_n))}{\bar{x}(s_n)} \leq \cos(\bar{\theta}(s_n))\dot{\varphi}(\bar{z}(s_n)) \leq 0,$$

tenemos que

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\bar{\theta}(s_n))\dot{\varphi}(\bar{z}(s_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\bar{\theta}(s_n))}{\bar{x}(s_n)} = \frac{1}{\bar{x}_-} \neq 0,$$

llegando a una contradicción. Finalmente, si  $\bar{x}_- = 0$ , de nuevo por el Teorema 2 de J. Serrin [71], tenemos que  $\lim_{\bar{x} \rightarrow 0} \bar{u}(\bar{x}) = +\infty$  y

razonando como en el caso anterior llegamos también a contradicción.  $\square$

**Lema 3.16.** *If  $s \in ]s_0, s_-[$ , then  $0 < 2\bar{\theta}(s) < \pi$ .*

*Demostración.* Es una consecuencia directa teniendo en cuenta que  $\bar{\theta}' < 0$  sobre  $\bar{\theta}^{-1}(\frac{\pi}{2})$  y  $\bar{\theta}' > 0$  sobre  $\bar{\theta}^{-1}(0)$ .  $\square$

**Lema 3.17.**  *$\bar{\theta}$  alcanza un mínimo en un punto  $s_1 \in ]s_0, s_-[$  y  $\bar{\theta}' > 0$  en  $]s_1, s_-[$ .*

*Demostración.* Argumentamos por contradicción. Si  $\bar{\theta}' < 0$  en todo el intervalo  $]s_0, s_-[$ , entonces, por el sistema (3.19) y el Lema 3.16, tenemos que  $\bar{x}, \bar{z}$  son estrictamente crecientes en  $]s_0, s_-[$  y los siguientes límites existen

$$\lim_{s \rightarrow s_-} \bar{x} = \bar{x}_-, \quad \lim_{s \rightarrow s_-} \bar{z} = \bar{z}_-, \quad \lim_{s \rightarrow s_-} \bar{\theta} = \bar{\theta}_- \in [0, \frac{\pi}{2}[. \quad (3.25)$$

En particular, existe una sucesión  $s_n \rightarrow s_-$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\theta}'(s_n) = 0.$$

En estas condiciones, podemos asegurar que  $\bar{\theta}_- \neq 0$  y  $\bar{x}_- < +\infty$ , pues en otro caso

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\theta}'(s_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \cos(\bar{\theta}(s_n)) \dot{\varphi}(\bar{z}(s_n)) - \frac{\sin(\bar{z}(s_n))}{\bar{x}(s_n)} \right) \\ &= \cos(\bar{\theta}_-) \lim_{n \rightarrow +\infty} \dot{\varphi}(\bar{z}(s_n)) \geq \cos(\bar{\theta}_-) \dot{\varphi}(z_0) > 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia,  $\gamma^-$  ha de ser el grafo de una función cóncava  $\bar{u} = \bar{u}(\bar{x})$  sobre el intervalo acotado  $]\bar{x}(s_0), \bar{x}_-[$  verificando

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_-} \bar{u}(\bar{x}) = +\infty.$$

Pero esto es también una contradicción pues  $\bar{\theta}$  es estrictamente decreciente en  $]s_0, s_-[$ . Este hecho nos permite asegurar la existencia

de  $s_1 \in ]s_0, s_-[$  tal que  $\bar{\theta}'(s_1) = 0$ . Además, del Lema (3.16), tenemos que

$$\bar{\theta}''(s_1) = \sin(\bar{\theta}(s_1)) \cos(\bar{\theta}(s_1)) \left( \ddot{\varphi}(\bar{z}(s_1)) + \frac{1}{\bar{x}(s_1)^2} \right) > 0,$$

y por tanto,  $s_1$  es un mínimo local de  $\bar{\theta}$ . □

Ahora, argumentando como en el Teorema 3.13, podemos probar que  $\gamma^-$  es el grafo de una función cóncava en  $]\bar{x}(s_1), \bar{x}_-[$  que verifica,

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_-} \bar{u}(\bar{x}) = +\infty.$$

**Lema 3.18.** *La curva generatriz  $\gamma$  es embebida.*

*Demostración.* Sea  $s_0 \in ]-s_-, 0[$  el punto dado por el Lema 3.16 y considera las ramas de  $\gamma$  determinadas por  $\gamma|_{]-s_-, s_0[}$  y  $\gamma|_{]s_0, s_+[}$  respectivamente, parametrizadas por

$$\begin{aligned} \gamma|_{]-s_-, s_0[} &= \text{Grafo}(u_+) = (x, u(x)) \text{ para } x \in ]x(s_0), x(s_-)[ \\ \gamma|_{]s_0, s_+[} &= \text{Grafo}(u_-) = (x, u(x)) \text{ para } x \in ]x(s_0), x(s_+)[, \end{aligned}$$

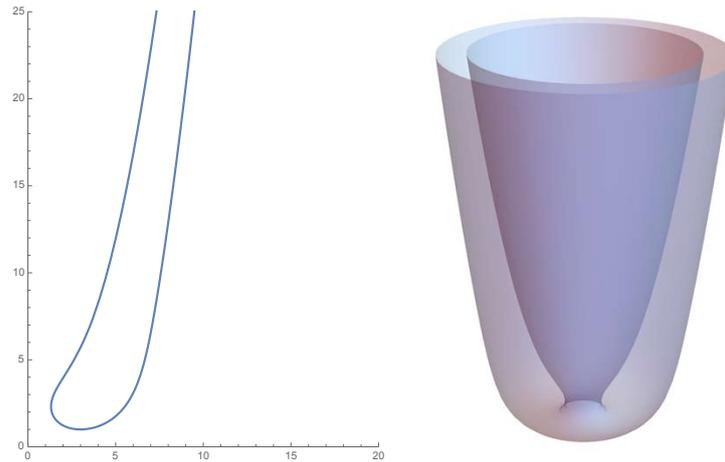
donde  $u$  es solución de la ecuación (3.11). Ahora, definimos la siguiente función  $d = u_+ - u_-$ . Nótese que  $d(x) > 0$  si  $x \in ]x(s_0), x(s_0) + \delta[$  para algún  $\delta > 0$ . Supongamos ahora que existe un primer  $r \geq x(s_0) + \delta$  tal que  $d(r) = 0$  y  $d'(r) \leq 0$ . Obsérvese que,  $u_+(x) > u_-(x)$  para cualquier  $x \in ]x(s_0), r[$ . Consecuentemente, de la ecuación (3.11), tenemos que

$$d'(r) = (1 + u^2)(\dot{\varphi}(u_+(r)) - \dot{\varphi}(u_-(r))) > 0,$$

llegando a contradicción. por tanto,  $d > 0$  en  $]x(s_-), x(s_+)[$  e integrando obtenemos que  $u_+(x) > u_-(x)$  para cualquier  $x \geq x(s_0)$ . □

De los Lemas 3.15, 3.16, 3.17 y 3.18 podemos garantizar la existencia de ejemplos no convexos con la topología de un anillo.

**Teorema 3.19.** Para cada  $x_0 > 0$  existe una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima completa embebida rotacionalmente simétrica con la topología de un anillo cuya distancia al eje de revolución es  $x_0$  y con curva generatriz  $\gamma$  de tipo ala.



**Definición 3.20.** Los ejemplos dados por el Teorema 3.19 serán denominados  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenoides.

A continuación, vamos a dar un resultado que motiva las condiciones en las que vamos a estudiar el comportamiento asintótico de los ejemplos rotacionalmente simétricos. Concretamente, veremos como el dominio de definición depende directamente del comportamiento polinomial de la función  $\varphi$ .

**Proposición 3.21.** En las condiciones anteriores, se tienen las siguientes propiedades,

(1) Si  $\dot{\varphi}$  tiene a lo sumo un crecimiento lineal, entonces

$$\omega_+ = +\infty \text{ y } \bar{x}_- = +\infty.$$

(2) Si  $\dot{\varphi}$  crece como  $u^\alpha$  para algún  $\alpha > 1$ , entonces  $\omega_+, \bar{x}_- \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Si  $\dot{\varphi}$  tiene a lo sumo un crecimiento lineal, entonces existe una constante  $c > 0$  tal que  $\dot{\varphi}(u)/u \leq c$  fuera de un compacto.

Así, de la ecuación (3.11), cuando  $x$  es suficientemente grande se tiene la siguiente desigualdad

$$x \geq \frac{u'}{\dot{\varphi}(u)}(x) \geq \frac{1}{c} \frac{u'}{u}(x). \quad (3.26)$$

Integrando ambos miembros de la desigualdad (3.26), tenemos que

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \geq \frac{1}{c} \log \left( \frac{u(x)}{u(x_0)} \right), \quad (3.27)$$

para algún  $x_0 > 0$ . Consecuentemente,  $\omega_+ = +\infty$  y  $\bar{x}_- = +\infty$ .

Supongamos ahora que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\varphi}(u)}{u^\alpha} = M \neq 0,$$

para algún  $\alpha > 1$  y que  $\omega_+ = +\infty$ . Entonces, de los Teoremas 3.13 y 3.19, la función  $f$  dada por

$$f(r) = \frac{u'(r)}{M u^\alpha(r)}$$

tiene, para  $r$  suficientemente grande, una primitiva  $F(u)(r)$  acotada y estrictamente monótona. Luego existe una sucesión estrictamente creciente  $r_n \rightarrow +\infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = 0. \quad (3.28)$$

**Afirmación:** La función  $f$  verifica que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f(r)}{r} = 0$ .

*Demostración de la afirmación.* Argumentamos por *contradicción*. Supongamos que existe  $\delta > 0$  y una sucesión estrictamente creciente  $s_n \rightarrow +\infty$  tal que

$$f(s_n) > \frac{f(s_n)}{s_n} > \delta.$$

Entonces, de (3.28), podemos asegurar que existe  $\delta > 0$  tal que  $f^{-1}(\delta)$  es un subconjunto no acotado de  $\mathbb{R}$  conteniendo una sucesión divergente a  $+\infty$ . Pero, de la ecuación (3.11), la función  $f$  satisface

$$f' = \left( \frac{\dot{\varphi}(u)}{M u^\alpha} - \frac{f(r)}{r} \right) + M^2 f^2 u^{2\alpha} \left( \frac{\dot{\varphi}(u)}{M u^\alpha} - \frac{f}{r} - \frac{\alpha}{M} u^{1-\alpha} \right), \quad (3.29)$$

y por tanto, ha de existir  $\hat{r} \in f^{-1}(\delta)$  tal que  $f'(r) > 1$  para todo  $r \in f^{-1}(\delta) \cap [\hat{r}, +\infty[$ , lo cuál es imposible porque  $f^{-1}(\delta)$  es no acotado.  $\square$

Finalmente, por (3.29), la afirmación anterior y usando que  $u \rightarrow +\infty$  tenemos que, para  $r$  suficientemente grande,

$$\frac{f'}{1+f^2} > 1.$$

Integrando en ambos miembros se contradice que  $\omega_+ = +\infty$ .  $\square$

**Nota 3.22.** Nótese que  $\omega_+ = +\infty$  no implica que  $\dot{\varphi}$  tiene al menos crecimiento lineal. Como contraejemplo basta considerar  $\dot{\varphi}(u) = u \log(u)$  con  $u \geq 1$ . En efecto, en este caso, al integrar ambos miembros de la desigualdad (3.26), tenemos que

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \geq \log \left( \log \left( \frac{u(x)}{u(x_0)} \right) \right),$$

para algún  $x_0 > 0$  y por tanto  $\omega_+ = +\infty$ , aunque la función  $\log(u)$  no está acotada.

### 3.2.3. Comportamiento asintótico de los ejemplos rotacionales.

La Proposición 3.21 motiva considerar  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable satisfaciendo (3.20) y con un crecimiento cuadrático, esto es, con el siguiente comportamiento asintótico

$$\dot{\varphi}(u) = \alpha u + \beta + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{u^n}, \quad a_n \in \mathbb{R}. \quad (3.30)$$

J. Clutterbuck, O. Schnürer y F. Schulze estudiaron en [14] el comportamiento asintótico de los solitones de traslación rotacionalmente simétricos. Ellos demostraron que el problema

$$\begin{cases} u'' = (1+u^2) \left(1 - \frac{u'}{r}\right), & r > R, \\ u(R) = u_0, \quad u'(R) = u_1. \end{cases} \quad (3.31)$$

tiene una única solución  $u \in \mathcal{C}^\infty([R, \infty[)$ . Además, cuando  $r \rightarrow +\infty$ , se verifica que

$$u(r) = \frac{r^2}{2} - \log(r) + O(r^{-2}).$$

En esta sección, vamos a generalizar el resultado de [14] a las soluciones del siguiente problema:

$$\begin{cases} u'' = (1 + u'^2) \left( \dot{\varphi}(u) - \frac{u'}{r} \right), & r > r_0 \geq 0, \\ u(r_0) = u_0 > a, \quad u'(r_0) = u_1 \geq 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

cuando, o bien,  $\alpha > 0$  y el primer coeficiente  $a_n$  no nulo es positivo, o bien,  $\alpha = 0$ ,  $\beta > 0$  y el primer coeficiente  $a_n$  no nulo es negativo,

**Nota 3.23.** Debido a la generalidad del problema (3.11), es imposible encontrar un comportamiento asintótico estándar de las soluciones. Por ejemplo, gracias a (3.11), si consideramos una función polinómica de grado arbitrario  $p = p(r)$ , podemos encontrar una función  $\varphi$  de forma que  $p$  sea solución del problema (3.11).

**Nota 3.24.** Nótese que si  $\alpha > 0$ , entonces  $u$  es solución de (3.11) si y sólo si  $v = u + \frac{\beta - \tilde{\beta}}{\alpha}$  es solución de

$$v'' = (1 + v'^2) \left( \dot{\psi}(v) - \frac{v'}{r} \right)$$

donde  $\psi(v) = \varphi\left(v - \frac{\beta - \tilde{\beta}}{\alpha}\right)$  verifica

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \ddot{\psi}(v) = \alpha \geq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} (\dot{\psi}(v) - \alpha v) = \tilde{\beta}.$$

Por otro lado, también es claro que

$$\frac{v'}{\dot{\psi}(v)} = \frac{u'}{\dot{\varphi}(u)}.$$

**Teorema 3.25.** [Caso  $\alpha > 0$ ] Si  $\dot{\varphi}(u_0) r_0 \geq u_1$  y  $\alpha > 0$ , entonces, el problema (3.32) tiene una única solución  $u \in \mathcal{C}^\infty([r_0, \infty[)$  estrictamente

convexa. Además, cuando  $r \rightarrow \infty$ , tenemos el siguiente comportamiento:

$$\dot{\varphi}(u)(r) = e^{\frac{1}{2}\alpha r^2 + o(r^2)} \quad (3.33)$$

$$\frac{u'}{\dot{\varphi}(u)}(r) = r - \alpha r \dot{\varphi}(u)^{-2}(r) + o(r \dot{\varphi}(u)^{-2}(r)), \quad (3.34)$$

*Demostración.* En primer lugar, argumentando como en el Teorema 3.13, Teorema 3.19 y Proposición 3.21, el problema (3.32) tiene una única solución  $u \in C^\infty([r_0, \infty[)$  la cuál es estrictamente convexa verificando  $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = \infty$ . Consecuentemente, de (3.11), obtenemos la siguiente desigualdad

$$r \dot{\varphi}(u) > u', \quad r \geq r_0. \quad (3.35)$$

De la Nota 3.24, para estudiar el comportamiento asintótico de  $\frac{u'}{\dot{\varphi}(u)}$  no es restricción suponer que  $\beta > 0$ . Tómesese  $\epsilon > 0$  tal que  $\beta > 2\epsilon$ , de (3.30) existe  $r_\epsilon$  tal que si  $r \geq r_\epsilon$ , entonces

$$-\epsilon < \dot{\varphi}(u)(r) - \alpha u(r) - \beta < \epsilon, \quad -\epsilon < \ddot{\varphi}(u)(r) - \alpha < \epsilon. \quad (3.36)$$

**Lema 3.26.** Sea  $R > r_0$  y

$$\zeta_R(r) := g_\epsilon \left( u(R) + \int_R^r t \dot{\varphi}(u)(t) dt \right), \quad r \geq R, \quad g_\epsilon = \frac{\beta - 2\epsilon}{\beta + \epsilon}.$$

Entonces, existe  $r_1 \in \mathbb{R}$ , dependiente solo de  $\epsilon$ , tal que para cualquier  $R \geq r_1$ ,  $\zeta_R$  verifica la siguiente desigualdad,

$$\zeta_R'' < (1 + \zeta_R'^2) \left( \dot{\varphi}(\zeta_R) - \frac{\zeta_R'}{r} \right), \quad r \geq R. \quad (3.37)$$

*Demostración.* De la desigualdad (3.35),  $\zeta_R(r) > u(r)g_\epsilon$  y por tanto de (3.36), cuando  $r$  es suficientemente grande, tenemos que

$$\dot{\varphi}(\zeta_R)(r) > \alpha g_\epsilon u(r) + \beta - \epsilon. \quad (3.38)$$

Usando (3.35) y (3.36), tenemos por un cálculo sencillo que

$$\zeta_R''(r) < g_\varepsilon \dot{\varphi}(u)(r)(1 + (\alpha + \varepsilon)r^2), \quad r \geq r_\varepsilon, \quad (3.39)$$

Por otro lado, de (3.36) y (3.38), cuando  $r \geq r_\varepsilon$ , se da la siguiente desigualdad

$$(1 + \zeta_R'^2) \left( \dot{\varphi}(\zeta_R) - \frac{\zeta_R'}{r} \right) > \varepsilon(1 + \dot{\varphi}(u)^2 r^2 g_\varepsilon^2). \quad (3.40)$$

La prueba del Lema 3.26 se termina usando (3.38), (3.39), (3.40) y teniendo en cuenta que  $u \rightarrow +\infty$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Lema 3.27.** *Para cualquier  $R \geq r_0$  existe  $r_R \geq R$  tal que  $u'(r_R) - \zeta_R'(r_R) > 0$ .*

*Demostración.* Argumentamos por *contradicción*, si  $u'(r) - \zeta_R'(r) \leq 0$  para cualquier  $r > R$ , entonces se tienen las siguientes desigualdades

$$\frac{u''(r)}{1 + u'^2(r)} \geq \frac{3\varepsilon}{\beta + \varepsilon} \dot{\varphi}(u)(r) > \frac{3\varepsilon}{\beta + \varepsilon} \dot{\varphi}(u)(r_0),$$

Integrando, podemos encontrar un radio finito  $\bar{r}$  tal que  $u' \rightarrow +\infty$  cuando  $r \rightarrow \bar{r}$ , llegando a una contradicción ya que la solución  $u$  está definida para todo  $r > r_0$ .  $\square$

Consideremos ahora la función  $d = u' - \zeta_R'$  definida en  $[R, \infty[$ . De los Lemas 3.26 y 3.27, podemos encontrar un  $R \geq r_0$  suficientemente grande verificando  $u(R) > 0$ ,  $d(R) > 0$  y tal que se verifica la desigualdad (3.37). Así, si existe un primer  $s \geq R$  tal que  $d(s) = 0$  y  $d'(s) < 0$ , tenemos que

$$0 > d'(s) = (1 + u'(s)^2)(\dot{\varphi}(u(s)) - \dot{\varphi}(\zeta_R(s))). \quad (3.41)$$

Por otro lado, como  $d(r) > 0$  para cualquier  $r \in ]R, s[$  tenemos por integración que,

$$u(s) > \zeta_R(s) + u(R) - \zeta_R(R) = \zeta_R(s) + \frac{3\varepsilon}{\beta + \varepsilon} u(R) > \zeta_R(s),$$

y por (3.20) se tiene  $d'(s) > \dot{\varphi}(u(s)) - \dot{\varphi}(\zeta_R(s)) > 0$  llegando a contradicción con (3.41).

Entonces,  $d(r) > 0$  para  $r$  suficientemente grande y usando la desigualdad (3.35), tenemos que,

$$\frac{u'(r)}{\dot{\varphi}(u)(r)} = r + \mathcal{V}_1(r), \quad \text{con} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{V}_1(r)}{r} = 0. \quad (3.42)$$

Además, de los límites anteriores (3.42) y la regla de L'Hôpital, también obtenemos que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log(\dot{\varphi}^2(u(r)))}{\alpha r^2} = 1$$

y por tanto,  $\dot{\varphi}(u)$  tiene el siguiente comportamiento asintótico,

$$\dot{\varphi}(u)(r) = e^{\frac{1}{2}\alpha r^2 + o(r^2)}. \quad (3.43)$$

**Lema 3.28.**  $\mathcal{V}_1 \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ .

*Demostración.* Como  $\mathcal{V}_1$  es sublineal,  $|\mathcal{V}_1(r)| < cr$  para todo  $c > 0$ . Además, de (3.32) y la desigualdad (3.35),  $\mathcal{V}_1$  es una función negativa y satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathcal{V}_1'(r) = -\frac{\mathcal{V}_1(r)}{r} (1 + \dot{\varphi}(u)^2(r)(r + \mathcal{V}_1(r))^2) - 1 - \ddot{\varphi}(u)(r)(r + \mathcal{V}_1(r))^2. \quad (3.44)$$

Tomando  $\varepsilon > 0$  y  $R$  suficientemente grande, si  $r \geq R$  y  $\mathcal{V}_1(r) \leq -\varepsilon$ , podemos suponer de la sublinealidad que  $-r/2 < \mathcal{V}_1(r)$  y,

$$\frac{r^2}{4} < (r + \mathcal{V}_1(r))^2 < (c + 1)^2 r^2. \quad (3.45)$$

Ahora, de (3.44) y las desigualdades (3.36) y (3.45), tenemos que

$$\mathcal{V}_1'(r) \geq -1 + \frac{\varepsilon}{r} + r \left( \frac{\varepsilon}{4} \dot{\varphi}(u)^2(r) - (\alpha + \varepsilon)(c + 1)^2 r \right). \quad (3.46)$$

Usando la hipótesis (3.20) y el comportamiento asintótico (3.43),  $R$  puede ser elegido tal que

$$\dot{\varphi}(u)^2(r) \geq \frac{4}{\varepsilon} \left( (\alpha + \varepsilon)(c + 1)^2 r + \frac{1}{r} \left( c + 1 - \frac{\varepsilon}{r} \right) \right), \quad r \geq R.$$

Así, para cualquier  $r \geq R$  tal que  $\mathcal{V}_1(r) \leq -\varepsilon$ , tenemos que  $\mathcal{V}_1(r) \geq c > 0$ . Consecuentemente,  $0 \geq \mathcal{V}_1(r) \geq -\varepsilon$  para  $r$  suficientemente grande, concluyéndose la prueba.  $\square$

**Lema 3.29.**  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \dot{\varphi}^2(u)(r) \mathcal{V}_1(r) = -\alpha$ .

*Demostración.* Si  $\lambda(r) = \frac{1}{r} \dot{\varphi}^2(u)(r) \mathcal{V}_1(r)$ , de (3.32) y (3.42) tenemos que,

$$\begin{aligned} \lambda'(r) = \dot{\varphi}^2(u)(r) & \left( 2\mathcal{V}_1(r) \left( \ddot{\varphi}(u)(r) \left( 1 + \frac{\mathcal{V}_1(r)}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \right) \\ & + \dot{\varphi}^2(u)(r) \left( \frac{(r + \mathcal{V}_1(r))^2}{r} (-\ddot{\varphi}(u)(r) - \lambda(r)) \right). \end{aligned}$$

Fijo  $\varepsilon > 0$  y  $R$  suficientemente grande. Para  $r \geq R$  tal que  $\lambda(r) \geq -\alpha + \varepsilon$ , se tiene la siguiente desigualdad

$$-\ddot{\varphi}(u)(r) - \lambda(r) \leq -\ddot{\varphi}(u)(r) + \alpha - \varepsilon \quad (3.47)$$

y, de (3.30) y (3.47), se deduce que

$$-\ddot{\varphi}(u)(r) - \lambda(r) \leq -\frac{\varepsilon\alpha}{2} < 0.$$

Consecuentemente,  $\lambda'(r) < -1$  y obtenemos que  $\lambda(r) \leq -\alpha + \varepsilon$ . De forma similar, se prueba que  $\lambda(r) \leq -\alpha - \varepsilon$  para valores de  $r$  suficientemente grandes.  $\square$

Es claro ahora que, de (3.42), (3.43) y los Lemas 3.28 y 3.29, se obtiene el comportamiento asintótico descrito en (3.34).  $\square$

**Teorema 3.30.** [Caso  $\alpha = 0$ ] Si  $\dot{\varphi}(u_0) r_0 \geq u_1$ ,  $\alpha = 0$  y  $\beta > 0$ , entonces, el problema (3.32) tiene una única solución  $u \in C^\infty([r_0, \infty[)$ . Además, si

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u \ddot{\varphi}(u) = 0, \quad (3.48)$$

se verifica lo siguiente:

$$\frac{u'}{\dot{\varphi}(u)}(r) = r - \frac{1}{\beta^2 r} + o(r^{-1}). \quad (3.49)$$

*Demostración.* Argumentando como en los Teoremas 3.13 y 3.19 y como en la Proposición 3.21, se puede ver que el problema (3.32) tiene una única solución  $u \in C^\infty([r_0, \infty[)$  la cuál es estrictamente convexa satisfaciendo que  $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = \infty$ . Como los Lemas 3.26 y 3.27 también funcionan en este caso, tenemos el siguiente comportamiento asintótico

$$\frac{u'}{\dot{\varphi}(u)}(r) = r + \mathcal{V}_1(r), \quad (3.50)$$

donde  $\mathcal{V}_1 \leq 0$  verifica la misma ecuación diferencial (3.44) y  $\mathcal{V}_1(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ . Además, de (3.30), podemos expresar  $\dot{\varphi}$  por

$$\dot{\varphi}(u)(r) = \beta + o(1). \quad (3.51)$$

Consideremos ahora, una nueva función  $\mathcal{V}_2(r) = r \dot{\varphi}^2(u)(r) \mathcal{V}_1(r)$ . Entonces,

$$\mathcal{V}_2' = r \dot{\varphi}^2 \left( 2\ddot{\varphi} \mathcal{V}_1(r + \mathcal{V}_1) - 1 + \frac{(r + \mathcal{V}_1)^2}{r^2} (-r^2 \ddot{\varphi} - \mathcal{V}_2) \right).$$

De la condición (3.48), el comportamiento (3.50) y la regla de L'Hôpital, tenemos que,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \ddot{\varphi}(u(r)) r = 0 \text{ y } \lim_{r \rightarrow +\infty} \ddot{\varphi}(u(r)) r^2 = 0, \quad (3.52)$$

y trabajando como en el Lema 3.29 podemos probar que  $\mathcal{V}_2(r) \rightarrow -1$ . Finalmente, la prueba se termina usando la expresión (3.50) cuando  $r \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Teorema 3.31.** Si  $\dot{\varphi}$  satisface (3.30), entonces cualquier solución  $u$  de (3.32) tiene el siguiente comportamiento asintótico:

(i) Si  $\alpha > 0$ ,

$$\varphi(u)(r) = C e^{\alpha r^2} + O(r^2), \quad C > 0, \quad (3.53)$$

(ii) Si  $\alpha = 0$ , salvo constante,

$$\mathcal{G}(u)(r) = \frac{r^2}{2} - \frac{1}{\beta^2} \log(r) + O(r^{-2}), \quad (3.54)$$

donde  $\mathcal{G}$  es la función estrictamente creciente dada por

$$\mathcal{G}(u) = \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\dot{\varphi}(\xi)}.$$

*Demostración.* Si  $\alpha > 0$ , de las fórmulas (3.42) y (3.43), tenemos que

$$\log(\dot{\varphi}(u))(r) = \frac{\alpha r^2}{2} + \Upsilon(r), \quad (3.55)$$

donde  $\Upsilon' = (\ddot{\varphi} - \alpha)r + \ddot{\varphi}\mathcal{V}_1$ . Consecuentemente, como el primer coeficiente no nulo  $a_k$  es positivo, para  $r$  suficientemente grande,  $\Upsilon$  es una función decreciente en  $r$  tal que  $-\infty < c = \lim_{r \rightarrow +\infty} \Upsilon(r)$  pues de lo contrario, del Lema 3.29, el comportamiento (3.30), la expresión (3.55) y usando la regla L'Hôpital tendríamos que,

$$\begin{aligned} +\infty &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \dot{\varphi}^2(u)(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{e^{2\Upsilon}}{e^{-\alpha r^2}} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2\Upsilon})'}{(e^{-\alpha r^2})'} \\ &= - \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\varphi}(u)^2(r) ((\ddot{\varphi}(u)(r) - \alpha)r + \ddot{\varphi}(u)(r)\mathcal{V}_1(r))}{\alpha r} = \alpha a_1, \end{aligned}$$

lo cuál es una contradicción.

Aplicando otra vez la regla de L'Hôpital a  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{e^{2\Upsilon} - e^{2c}}{e^{-\alpha r^2}}$ , tenemos

$$\dot{\varphi}^2(u)(r) = e^{\alpha r^2 + 2c} + O(1) \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} O(1) = \alpha a_1.$$

Así, del Lema 3.29 y del Teorema 3.25, se sigue,

$$\varphi(u)'(r) = r e^{\alpha r^2 + 2c} + \alpha a_1 r + o(r),$$

y (3.53) se prueba integrando ambas expresiones.

Si  $\alpha = 0$  entonces de (3.48) se prueba (3.50) y tenemos que

$$\frac{u'}{\dot{\varphi}(u)}(r) = r - \frac{1}{\beta^2 r} + o(r^{-1}). \quad (3.56)$$

Ahora, tomando  $\mathcal{V}_3(r) = (\mathcal{V}_2(r) + 1)r^2$  obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_3' &= \frac{2\mathcal{V}_3}{r} + r^3 \dot{\varphi}^2 \left( 2\ddot{\varphi}\mathcal{V}_1(r + \mathcal{V}_1) - 1 + \frac{(r + \mathcal{V}_1)^2}{r^2}(-r^2 \ddot{\varphi} + 1 - \frac{\mathcal{V}_3}{r^2}) \right) \\ &= r\dot{\varphi}^2 \left( \frac{2\mathcal{V}_3}{\dot{\varphi}^2 r^2} + 2r^4 \ddot{\varphi} \frac{\mathcal{V}_1(r + \mathcal{V}_1)}{r^2} - r^2 + \frac{(r + \mathcal{V}_1)^2}{r^2}(-r^4 \ddot{\varphi} + r^2 - \mathcal{V}_3) \right) \\ &= r\dot{\varphi}^2 \frac{(r + \mathcal{V}_1)^2}{r^2} \left( -r^4 \ddot{\varphi} + r^2 \left( 1 - \frac{r^2}{(r + \mathcal{V}_1)^2} \right) - \mathcal{V}_3 \right) \\ &\quad + r\dot{\varphi}^2 \left( \frac{2\mathcal{V}_3}{\dot{\varphi}^2 r^2} + 2r^4 \ddot{\varphi} \frac{\mathcal{V}_1(r + \mathcal{V}_1)}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, de la expresión (3.50) y la regla de L'Hôpital, deducimos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \ddot{\varphi}(u(r)) r^4 &= -\frac{4a_1}{\beta^2}, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \left( 1 - \frac{r^2}{(r + \mathcal{V}_1)^2} \right) &= -\frac{2}{\beta^2}. \end{aligned}$$

Y argumentando como en el Lema 3.29, podemos probar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{V}_3(r) = \frac{-2 + 4a_1}{\beta^2}.$$

De aquí,

$$\frac{u'}{\dot{\varphi}(u)}(r) = r - \frac{1}{\beta^2 r} - \frac{2 - 4a_1}{\beta^4 r^3} + o(r^{-3}),$$

y (3.54) se prueba integrando ambos miembros. □

# Capítulo 4

---

## Superficies $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas propiamente embebidas con $H \leq 0$ .

---

Motivados por los trabajos de B. White [75, 76] y R. Schoen [69] para superficies mínimas estables en  $\mathbb{R}^3$ ; de H. Rosenberg, R. Souam y E. Toubiana [66] para superficies estables con curvatura media constante en 3-variedades con geometría acotada y el trabajo de J. Spruck y L. Xiao [72] para solitones de traslación en  $\mathbb{R}^3$ , en este capítulo obtenemos una cota uniforme para el área intrínseca en discos geodésicos y demostramos, usando un argumento de tipo blow-up, una estimación de curvatura para la familia de superficies orientadas  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas con  $H \leq 0$  en  $\mathbb{R}_a^3$  cuando  $\varphi$  es estrictamente creciente y convexa en  $]a, +\infty[$  y presenta un crecimiento polinomial a lo sumo cuadrático. En la última parte del capítulo y bajo estas mismas condiciones, caracterizamos la convexidad de una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima propiamente embebida con  $H \leq 0$  en  $\mathbb{R}_a^3$  y género localmente acotado. Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en [56].

### 4.1. Ejemplos de superficies $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas estables.

A lo largo de este capítulo, supondremos que  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable verificando (3.20) para algún  $a \in \mathbb{R}$  y que  $\Sigma$  es una superficie orientada  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima conexa sin borde en  $\mathbb{R}_a^3$ .

**Definición 4.1.** Diremos que  $\Sigma$  es  $H$ -convexa si sólo si la curvatura media  $H$  de  $\Sigma$  es no positiva, esto es si  $H \leq 0$  en todo punto.

Recordamos que, por el Teorema 2.13,  $\Sigma$  es un punto crítico del

funcional area con peso (2.16) y de la definición 2.15,  $\Sigma$  es estable si y sólo si

$$0 \leq - \int_{\Sigma} u \mathcal{L}_{\varphi}(u) e^{\varphi} d\Sigma, \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\Sigma),$$

donde  $\mathcal{L}_{\varphi} : C^2(\Sigma) \rightarrow C^2(\Sigma)$  es el operador de estabilidad definido en (2.26). El primer resultado de este capítulo justifica las hipótesis elegidas en el preámbulo; pues nos asegura que bajo las condiciones (3.20), cualquier superficie  $\Sigma$  orientada  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima sin borde y  $H$ -convexa es estable.

**Proposición 4.2.** *Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una función diferenciable satisfaciendo (3.20) en  $]a, +\infty[$  para algún  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  y sea  $\Sigma$  una superficie orientada  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima  $H$ -convexa en  $\mathbb{R}_a^3$ . Entonces,  $\Sigma$  es estable.*

*Demostración.* Por el Teorema (2.22), podemos suponer que  $H < 0$  en todo  $\Sigma$  pues de lo contrario,  $\Sigma$  quedaría en un plano vertical y veremos, en el siguiente Corolario 4.3, que en tal caso  $\Sigma$  es también estable. En este caso,  $\eta_3 > 0$  y, por el Lema 2.19, si  $w = \log(\eta_3)$  se tiene que

$$\Delta^{\varphi} w = - \frac{|\nabla \eta_3|^2}{\eta_3^2} - |\mathcal{S}|^2 - \ddot{\varphi} |\nabla x_3|^2. \quad (4.1)$$

Sea  $\mathcal{K} \subset \Sigma$  un dominio compacto y  $u \in C_0^2(\Sigma)$  una función con soporte compacto contenido en  $\mathcal{K}$ . Aplicando el Teorema de la divergencia a la expresión  $\operatorname{div}(e^{\varphi} u^2 \nabla w)$  obtenemos,

$$\int_{\Sigma} e^{\varphi} u^2 (\Delta^{\varphi} w) d\Sigma = -2 \int_{\Sigma} e^{\varphi} u \langle \nabla u, \nabla w \rangle d\Sigma. \quad (4.2)$$

Así, de la expresiones (4.1) y (4.2), se sigue que

$$- \int_{\Sigma} u \mathcal{L}_{\varphi}(u) e^{\varphi} d\Sigma = \int_{\Sigma} e^{\varphi} \left( |\nabla u - \frac{u}{\eta_3} \nabla \eta_3|^2 + \ddot{\varphi} u^2 \right) d\Sigma \geq 0,$$

lo que concluye la demostración.  $\square$

Por otro lado, gracias a la caracterización de D. Fischer-Colbrie and R. Schoen en el Teorema 2.17, tenemos,

**Corolario 4.3.** *Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima completa y orientada en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces,*

- (i) Si  $\Sigma$  es un grafo con respecto a un campo de Killing  $V$  ortogonal a  $\vec{e}_3$ , entonces  $\Sigma$  es estable para cualquier función diferenciable  $\varphi$ .
- (ii) Si  $\varphi$  es una función diferenciable creciente y convexa y  $\Sigma$  es un grafo con respecto a la dirección  $\vec{e}_3$ , entonces  $\Sigma$  es estable.

*Demostración.* Solo tenemos que probar (i) pues (ii) es una consecuencia directa de la anterior Proposición 4.2 y la Definición 2.8.

Consideramos la siguiente función diferenciable  $\nu = \langle V, N \rangle$  donde  $N$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma$ . En las condiciones de (i), tenemos que  $\nu$  es una función positiva. Además, por el Lema 2.19,

$$\begin{aligned}\Delta\nu &= -\dot{\varphi}\langle V, \nabla\eta_3 \rangle - \ddot{\varphi}\eta_3\langle V, \nabla x_3 \rangle - |\mathcal{S}|^2\nu, \\ \langle \nabla\varphi, \nabla\nu \rangle &= -\dot{\varphi}\mathcal{S}(\nabla x_3, V) = \dot{\varphi}\langle \nabla\eta_3, V \rangle, \\ \langle V, \nabla x_3 \rangle &= \langle V, \vec{e}_3 - \eta_3 N \rangle = -\eta_3\nu,\end{aligned}\tag{4.3}$$

de donde se sigue que  $\mathcal{L}_\varphi(\nu) = 0$ . El Teorema 2.17 nos asegura entonces que  $\Sigma$  es estable.  $\square$

**Nota 4.4.** Cuando  $\ddot{\varphi} < 0$ , algunos resultados de estabilidad para superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas pueden encontrarse en [23]. Por ejemplo, si  $\Sigma$  es una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal completa, estable y  $\varphi$ -parabólica con  $\varphi$  una función diferenciable satisfaciendo  $\ddot{\varphi} \leq C$  para alguna constante  $C < 0$ , entonces  $\Sigma$  es un plano vertical.

## 4.2. Estimaciones para el area intrínseca.

Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una función diferenciable verificando (3.20) y tal que

$$\Gamma = \sup_{]a, +\infty[} (2\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) < +\infty,\tag{4.4}$$

para algún  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . En primer lugar y siguiendo el método utilizado por J. Spruck y L. Xiao, en [72], para solitones de traslación, vamos a establecer estimaciones del área intrínseca de una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima,  $H$ -convexa en  $\mathbb{R}_a^3$ .

**Nota 4.5.** La condición (4.4) nos indica cómo tiene que crecer nuestra función  $\varphi$  para poder obtener dicha estimación del área. Nótese que, si la función  $\varphi$  tiene un crecimiento a lo sumo cuadrático, entonces trivialmente se cumple la condición (4.4).

**Lema 4.6.** Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima  $H$ -convexa, orientada y sin borde en  $\mathbb{R}_a^3$  y denotemos por  $\mathcal{D}_\rho(p)$  un disco intrínseco en  $\Sigma$  de radio  $\rho$  centrado en un punto  $p \in \Sigma$ . Si  $\rho\dot{\varphi}(\rho + x_3(p)) < \sqrt{2}\pi$ , entonces  $\mathcal{D}_\rho(p)$  es disjunto al conjunto conjugado de  $p$  y se verifica la siguiente desigualdad,

$$\int_{\Sigma} |\mathcal{S}|^2 u^2 d\Sigma \leq e^{2\rho\dot{\varphi}(\rho+x_3(p))} \int_{\Sigma} (|\nabla u|^2 + \ddot{\varphi}\eta_3^2 u^2) d\Sigma \quad \forall u \in \mathcal{H}_0^2(\mathcal{D}_\rho(p)). \quad (4.5)$$

*Demostración.* Como  $|\nabla x_3|^2 \leq 1$ , es claro que para cualquier  $q \in \mathcal{D}_\rho(p)$ ,  $x_3(p) - \rho \leq x_3(q) \leq x_3(p) + \rho$ . Por tanto,

$$\varphi(x_3(p) - \rho) \leq \varphi(x_3(q)) \leq \varphi(\rho + x_3(p)), \quad q \in \mathcal{D}_\rho(p)$$

y obtenemos el siguiente control de la curvatura,

$$2K \leq H^2 \leq \dot{\varphi}^2(x_3(q)) \leq \dot{\varphi}^2(\rho + x_3(p)) \text{ on } \mathcal{D}_\rho(p).$$

Consecuentemente, del Teorema de comparación de Rauch (ver [20, Capítulo 10]),  $\mathcal{D}_\rho(p)$  es disjunto al conjunto conjugado de  $p$ . Finalmente, (4.5) es una consecuencia directa de las anteriores desigualdades, la Proposición 4.2 y la desigualdad de estabilidad (2.15).  $\square$

**Teorema 4.7. [Acotación del área]** Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima  $H$ -convexa en  $\mathbb{R}_a^3$  y sea  $\varphi$  una función diferenciable verificando (3.20) y (4.4) en  $]a, +\infty[$ . Si  $2\rho\dot{\varphi}(\rho + x_3(p)) < \log(2)$  y  $\sqrt{|\Gamma|} \rho < 1$ , entonces el disco geodésico  $\mathcal{D}_\rho(p)$  de radio  $\rho$  centrado en  $p$  es disjunto al conjunto conjugado de  $p$  y

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}_\rho(p)) < 4\pi\rho^2, \quad (4.6)$$

donde  $\mathcal{A}(\cdot)$  es el área intrínseca de  $\Sigma$  con respecto a la métrica Euclídea.

*Demostración.* Como  $|S|^2 = H^2 - 2K$ , de la condiciones (3.20), (4.4) y del Lema 4.6, tenemos que para cualquier  $u \in \mathcal{H}_0^2(\mathcal{D}_\rho(p))$

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Sigma} K u^2 d\Sigma &\leq e^{2\rho\dot{\varphi}(\rho+x_3(p))} \int_{\Sigma} (|\nabla u|^2 + \ddot{\varphi}\eta_3^2 u^2) d\Sigma - \int_{\Sigma} \dot{\varphi}^2 \eta_3^2 u^2 d\Sigma \quad (4.7) \\ &\leq 2 \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 d\Sigma + \Gamma \int_{\Sigma} \eta_3^2 u^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Además, por el Teorema de Gauss-Bonnet, la variación de la longitud  $l(s)$  del borde  $\partial\mathcal{D}_s(\rho)$  viene dada por,

$$l'(s) = \int_{\partial\mathcal{D}_s(p)} k_g d\sigma = 2\pi - \int_{\mathcal{D}_s(p)} K d\Sigma = 2\pi - K(s), \quad (4.8)$$

donde  $k_g$  es la curvatura geodésica de  $\partial\mathcal{D}_s(p)$ . Si  $u$  es una función radial satisfaciendo  $u' \leq 0$  y  $u(\rho) = 0$ , la fórmula de la coarea nos dice lo siguiente,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_s(p)} K u^2 d\Sigma &= \int_0^\rho u^2(s) \int_{\partial\mathcal{D}_s(p)} K d\sigma ds = \int_0^\rho u^2(s) K'(s) ds, \\ \int_{\mathcal{D}_s(p)} |\nabla u|^2 d\Sigma &= \int_0^\rho \int_{\partial\mathcal{D}_s(p)} |\nabla u|^2 d\sigma ds = \int_0^\rho (u'(s))^2 l(s) ds. \end{aligned}$$

En particular, si elegimos  $u(s) = 1 - \frac{s}{\rho}$ , aplicando integración por partes, usando (4.8) y las anteriores expresiones, tenemos que

$$\begin{aligned} -4\pi + 4 \frac{\mathcal{A}(\mathcal{D}_\rho(p))}{\rho^2} &= -\frac{4}{\rho} \int_0^\rho (2\pi - l'(s)) \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) ds \quad (4.9) \\ &\leq 2 \frac{\mathcal{A}(\mathcal{D}_\rho(p))}{\rho^2} + \Gamma \int_{\Sigma} \eta_3^2 u^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Si  $\Gamma \leq 0$ , entonces la desigualdad (4.6) trivialmente es cierta. Si  $\Gamma > 0$ , teniendo en cuenta que  $\sqrt{\Gamma}\rho < 1$  y (4.9) deducimos también que

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}_\rho(p)) \leq \frac{4\pi}{2 - \Gamma\rho^2} \rho^2 < 4\pi\rho^2.$$

Ahora, vamos a probar que  $\mathcal{D}_\rho(p)$  es disjunto al conjunto conjugado de  $p$ . De lo contrario, existe  $q \in \partial\mathcal{D}_{r_0}(p)$  que pertenece a dicho conjunto donde  $r_0 = \text{Inj}(\Sigma)(p) \leq \rho$  es el radio de inyectividad. En

este caso y como  $\rho\dot{\varphi}(\rho + x_3(p)) < \sqrt{2}\pi$ , el Lema 4.6 y un argumento de tipo Klingenberg (ver [64, Capítulo 5]) proporcionan la existencia de dos geodésicas uniendo  $p$  y  $q$  y encerrando un dominio acotado  $D \subset \mathcal{D}_{r_0}(p)$  con borde regular salvo una posible singularidad en  $p$ . Así, por el Teorema de Gauss-Bonnet,

$$2\pi = 2\pi - \int_{\partial D} k_g d\sigma = \int_D K d\Sigma \leq \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(r_0 + x_3(p))\mathcal{A}(D),$$

y

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}_{r_0}(p)) \geq \mathcal{A}(D) \geq 4\pi/\dot{\varphi}^2(r_0 + x_3(p)).$$

Pero entonces, de la estimación (4.6) para  $\rho = r_0$  y teniendo en cuenta que  $\rho\dot{\varphi}(\rho + x_3(p)) < \log(2)/2$ , se sigue que

$$4\pi > 4\pi r_0^2 \dot{\varphi}^2(r_0 + x_3(p)) \geq 4\pi,$$

lo que es una contradicción.  $\square$

### 4.3. Blow-up y estimación de la curvatura.

En esta sección abordamos el problema sobre la estimación de la curvatura para superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas propiamente embebidas,  $H$ -convexas en  $\mathbb{R}_a^3$ , con género localmente y con  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable satisfaciendo las condiciones (3.20) y (3.30) en  $]a, +\infty[$ .

Empezamos esta sección con un Teorema de compacidad para superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas. Este resultado es una consecuencia directa de [76, Teorema 2.1] y justifica el hecho de que nuestras superficies sean propiamente embebidas en  $\mathbb{R}_a^3$  y tengan género localmente acotado.

Sea  $\Sigma$  una superficie en una 3-variedad  $(M, g)$  y fijamos un punto  $p \in \Sigma$  arbitrario. Dado  $r > 0$  denotaremos por

$$\mathcal{D}_r(p) = \{v \in T_p\Sigma : |v| < r\}$$

al disco en el espacio tangente de radio  $r$  centrado en el origen. Consideramos  $T_p\Sigma$  como un subespacio vectorial de  $T_pM$  y sea  $N$  un

vector normal unitario del tangente  $T_p\Sigma$  en  $T_pM$ . Para un  $\epsilon > 0$ , denotaremos por  $W_{r,\epsilon}$  al cilindro sólido alrededor de  $p$  por,

$$W_{r,\epsilon}(p) = \{\exp_p(q + tN(q)) : q \in \mathcal{D}_r(p) \text{ y } |t| \leq \epsilon\},$$

donde  $\exp$  es la aplicación exponencial del espacio ambiente  $(M, g)$ . Dada una función  $u : \mathcal{D}_r(p) \rightarrow \mathbb{R}$ , el conjunto

$$\text{Grafo}(u) = \{\exp_p(q + u(q)N(q)) : q \in \mathcal{D}_r(p)\}$$

es denominado el grafo de  $u$  sobre el disco  $\mathcal{D}_r(p)$ .

**Definición 4.8.** Sea  $(M, g)$  una 3-variedad Riemanniana y  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de superficies conexas y embebidas. La sucesión  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en  $C^\infty$ -topología con multiplicidad finita a una superficie diferenciable y embebida  $\Sigma_\infty$  si

- (i) Para todo  $p \in \Sigma_\infty$  existe una sucesión de punto  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $p_n \in \Sigma_n$ , para cada  $n$  y  $p_n \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ .
- (ii) Para todo  $p \in \Sigma_\infty$ , existen  $r, \epsilon > 0$  tal que  $\Sigma_\infty \cap W_{r,\epsilon}(p)$  puede parametrizarse como el grafo de una función  $u$  sobre  $\mathcal{D}_r(p)$ .
- (iii) Para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, el conjunto  $\Sigma_n \cap W_{r,\epsilon}(p)$  consta de un número finito  $k$ , independiente de  $n$ , de grafos  $u_n^1, \dots, u_n^k$  sobre  $\mathcal{D}_r(p)$  los cuales convergen a  $u$  con  $C^\infty$ -topología.

Al número  $k$  se denomina multiplicidad del punto  $p$  en  $\Sigma_\infty$ .

**Definición 4.9.** Sea  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de superficies embebidas en una 3-variedad Riemanniana  $(M, g)$ .

- (i) Diremos que  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene area uniformemente acotada en subconjuntos compactos de  $M$  si para cualquier subconjunto compacto  $\mathcal{K}$  de  $M$  se tiene que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\Sigma_n \cap \mathcal{K}) < +\infty.$$

- (ii) Análogamente, diremos que  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene género uniformemente acotado en subconjuntos compactos de  $M$  si para cualquier subconjunto compacto  $\mathcal{K}$  de  $M$  se tiene que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \text{género}(\Sigma_n \cap \mathcal{K}) < +\infty.$$

**Teorema 4.10.** [76, Teorema 2.1] Sean,  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones diferenciables en  $\Omega$  convergiendo diferenciablemente a  $\varphi_\infty$  y  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  una sucesión de superficies mínimas en los correspondientes espacios de Ilmanen  $\mathcal{I}^{\varphi_n}$ . Supongamos también que el área y el género de  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  están uniformemente acotados en subconjuntos compactos de  $\Omega$ . Entonces, las curvaturas totales de  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  también están acotadas uniformemente en subconjuntos compactos de  $\Omega$ , y pasando a una sucesión parcial,  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a una superficie diferenciable mínima, propiamente embebida,  $\Sigma_\infty$ , en  $\mathcal{I}^{\varphi_\infty}$ . La convergencia es diferenciable salvo en un conjunto discreto de puntos  $\mathcal{C}$  y para cada componente conexa  $\Sigma_\infty^0$  de  $\Sigma_\infty$  se tiene que, o bien,

- (i) la convergencia a  $\Sigma_\infty^0$  es diferenciable con multiplicidad 1 y  $\mathcal{C} = \emptyset$ , o bien,
- (ii) la convergencia a  $\Sigma_\infty^0$  es diferenciable con multiplicidad mayor que 1 salvo en  $\Sigma_\infty \cap \mathcal{C}$ . En este caso, si  $\Sigma_\infty$  es two-sided, entonces  $\Sigma_\infty$  es estable.

Si las curvaturas totales de  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  están uniformemente acotadas por  $\beta$ , el conjunto  $\mathcal{C}$  tiene a lo sumo  $\beta/4\pi$  puntos.

A continuación, vamos a probar un resultado de compacidad de tipo Blow-up aplicando el Teorema que acabamos de enunciar que será clave para demostrar la estimación sobre la curvatura. Para ello, teniendo en mente la condición de que el área debe estar uniformemente acotada en compactos, probamos una fórmula de monotonicidad, análoga a la obtenida por B. White en [75] para superficies

mínimas en  $\mathbb{R}^3$ .

**Lema 4.11. [Fórmula de monoticidad]** *Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima en  $\mathbb{R}_a^3$  con  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando (3.20) en  $]a, +\infty[$ . Fijamos un punto cualquiera  $q \in \Sigma$  y consideramos  $B(q, r)$  la bola Euclídea de radio  $r$  centrada  $q$ . Denotaremos por  $\Sigma_r = \Sigma \cap B(q, r)$  y por  $\partial\Sigma_r = \Sigma \cap \partial B(q, r)$  y definimos  $A(r) = \mathcal{A}(\Sigma \cap B(q, r))$  y  $L(r) = \text{longitud}(\Sigma \cap \partial B(q, r))$ . Si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $0 \leq \varphi(\varepsilon) < 1$ , entonces la función*

$$\mathcal{O}_\Sigma(r) = \frac{\varphi(r)A(r)}{4\pi r^2}$$

es creciente en  $r$  sobre el intervalo  $]0, \varepsilon[$ .

*Demostración.* Si en  $\Sigma$  tomamos el campo de vectores  $X(p) = p - q$ , con  $p \in \Sigma$ , entonces, aplicando el Teorema de la Divergencia tenemos que

$$\begin{aligned} 2A(r) &= \int_{\Sigma_r} \text{div}(X) d\Sigma_r = \int_{\partial\Sigma_r} \langle X, \nu \rangle d\sigma_r - \int_{\Sigma_r} H \langle X, N \rangle d\Sigma_r \quad (4.10) \\ &= \int_{\partial\Sigma_r} \langle X, \nu \rangle d\sigma_r + \int_{\Sigma_r} \dot{\varphi} \eta \langle X, N \rangle d\Sigma_r \end{aligned}$$

donde  $\nu$  es el vector conormal a lo largo de  $\partial\Sigma_r$ ,  $d\Sigma_r$  es el elemento de volumen de  $\Sigma$  inducido por la métrica Euclídea y  $d\sigma_r$  es el elemento de longitud de  $\partial\Sigma_r$ . Por hipótesis, nosotros tenemos que  $0 \leq \varphi(r) \leq 1$  para todo  $r < \varepsilon$ . Además, el Teorema 3 de [75], nos asegura que  $L(r) \leq A'(r)$  para todo  $r$  y uniendo ambas desigualdades en la expresión (4.10), obtenemos

$$0 \leq rA'(r) + r\dot{\varphi}(r)A(r) - 2A(r). \quad (4.11)$$

Finalmente, multiplicando por  $r^{-3}\varphi(r)$  en (4.11), tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq r^{-2}\varphi(r)A'(r) + r^{-2}\dot{\varphi}(r)\varphi(r)A(r) - 2r^{-3}\varphi(r)A(r) \quad (4.12) \\ &\leq r^{-2}\varphi(r)A'(r) + r^{-2}\dot{\varphi}(r)A(r) - 2r^{-3}\varphi(r)A(r) = (r^{-2}\varphi(r)A(r))'. \end{aligned}$$

concluyéndose la demostración.  $\square$

**Teorema 4.12. [Blow-up]** Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima propiamente embebida,  $H$ -convexa en  $\mathbb{R}_a^3$ , con género localmente acotado y con  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable verificando (3.20) y (3.30) en  $]a, +\infty[$ . Si  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , es una sucesión de números reales divergente y suponemos que existe una sucesión de puntos  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\Sigma$  tal que  $\dot{\varphi}(x_3(p_n))/\lambda_n \rightarrow C$  para alguna constante  $C \geq 0$ . Entonces, después de pasar a una sucesión parcial, la sucesión  $\{\Sigma_n = \lambda_n(\Sigma - p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge diferenciablemente a

- (i) un plano, cuando  $C = 0$ ,
- (ii) uno de los siguientes solitones de traslación cuando  $C > 0$ :
  - (a) plano vertical,
  - (b) cilindro Grim reaper,
  - (c) cilindro Grim reaper ladeado,
  - (d) Bol solitón de traslación,
  - (e)  $\Delta$ -Wing.

*Demostración.* Se considera la sucesión de superficies propiamente embebidas  $\{\Sigma_n = \lambda_n(\Sigma - p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Cada  $\Sigma_n$  es una superficie mínima en el correspondiente espacio de Ilmanen  $\mathcal{I}^{\varphi_n}$  donde

$$\varphi_n(z) = \varphi\left(\frac{z}{\lambda_n} + x_3(p_n)\right) - \varphi(x_3(p_n)).$$

Está claro que por hipótesis, tenemos que

$$\varphi_n \rightarrow \varphi_\infty, \quad \text{con} \quad \varphi_\infty(z) = C z. \quad (4.13)$$

Dado un subconjunto compacto  $\mathcal{K}$  en  $\Omega$ , podemos considerar  $r$  suficientemente grande para que  $\mathcal{K}$  esté contenido en la bola Euclídea  $B(0, r)$  de radio  $r$  centrada en el origen. Entonces, aplicando la convergencia (4.13), para cualquier  $\epsilon_0 > 0$ ,  $n$  suficientemente grande se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\varphi_n}(\Sigma_n \cap \mathcal{K}) &\leq \int_{\Sigma_n \cap B(0,r)} e^{\varphi_n} d\Sigma_n = \int_{\Sigma_n \cap B(0,r)} e^{Cq+\epsilon_0} d\Sigma_n \\ &\leq \lambda_n^2 \int_{\Sigma \cap B(p_n, \frac{r}{\lambda_n})} e^{Cr+\epsilon_0} d\Sigma = e^{Cr+\epsilon_0} \lambda_n^2 \mathcal{A}(\Sigma \cap B(p_n, r/\lambda_n)). \end{aligned}$$

Como  $\varphi$  puede ser elegida salvo constante, podemos asumir que existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $0 < \varphi(\varepsilon) < 1$ . Además, como  $r/\lambda_n \rightarrow 0$ , del Lema 4.11, se sigue que existe un  $n_0$  tal que  $r/\lambda_n \leq \varepsilon$  y  $\mathcal{O}_\Sigma(r/\lambda_n) \leq \mathcal{O}_\Sigma(\varepsilon)$  para todo  $n \geq n_0$ . En consecuencia,

$$\mathcal{A}(\Sigma \cap B(p_n, r/\lambda_n)) \leq \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varphi(r/\lambda_n)} \left( \frac{r}{\lambda_n} \right)^2 \frac{\mathcal{A}(\Sigma \cap B(p_n, \varepsilon))}{\varepsilon^2}.$$

Uniendo ambas desigualdades tenemos que

$$\mathcal{A}^{\varphi_n}(\Sigma_n \cap \mathcal{K}) \leq \frac{e^{Cr+\epsilon_0} \varphi(\varepsilon)}{\varphi(r/\lambda_n)} r^2 \frac{\mathcal{A}(\Sigma \cap B(p_n, \varepsilon))}{\varepsilon^2} \leq 4\pi \frac{e^{Cr+\epsilon_0} \varphi(\varepsilon)}{\varphi(r/\lambda_n)} r^2,$$

y como  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , existe una constante positiva  $\Theta$ , dependiendo solo de  $\varphi$ , tal que

$$\mathcal{A}^{\varphi_n}(\Sigma_n \cap \mathcal{K}) \leq \Theta \pi e^{Cr} r^2.$$

Por tanto,  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene area uniformemente acotada en compactos de  $\mathbb{R}^3$  y el Teorema 4.10, prueba que  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a una superficie  $[\varphi_\infty, \vec{e}_3]$ -mínima  $\Sigma_\infty$  propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$ . Como, por la Proposición 4.2, cada  $\Sigma_n$  es estable,  $\Sigma_\infty$  debería ser un plano en  $\mathbb{R}^3$  si  $C = 0$  (ver [25]) o bien un soliton de traslación propiamente embebido en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media  $H \leq 0$  si  $C > 0$ . Usando ahora la clasificación de los solitones de traslación que son grafos completos, ver [30],  $\Sigma_\infty$  es, o un plano vertical, o un Grim reaper (posiblemente ladeado), o un Bol solitón de traslación, o un  $\Delta$ -Wing solitón.

Finalmente, probamos que dicha convergencia es siempre diferenciable. De lo contrario, existiría una sucesión  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma_n$ ,  $q_n \rightarrow q \in \Sigma_\infty$  tal que  $T_{q_n} \Sigma_n$  no converge a  $T_q \Sigma_\infty$ . Argumentando como en [76, Teorema 2.4] existe una sucesión  $r_n \rightarrow \infty$  tal que, después de pasar a una sucesión parcial, las superficies  $\{\Sigma'_n = r_n(\Sigma_n - q_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

convergen diferenciablemente y con multiplicidad 1 a una superficie  $\Sigma'_\infty$  diferenciable completa propiamente embebida y no llana en  $\mathbb{R}^3$  de curvatura total finita. Pero, de la estabilidad,  $\Sigma'_\infty$  debería ser un plano lo cual es una contradicción.  $\square$

**Nota 4.13.** La construcción del ejemplo  $\Delta$ -Wing puede encontrarse en [30, Secciones 4 y 5] y se caracteriza por ser el único grafo solitón de traslación  $u : \mathbb{R} \times (-\Lambda, \Lambda) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Lambda > \frac{\pi}{2}$  tal que  $u(x, y) = u(x, -y)$ .

Ahora, combinando los métodos de H. Rosenberg, R. Souam y E. Toubiana en [66] y J. Spruck y L. Xiao en [72] demostramos nuestra estimación para la curvatura como consecuencia del Teorema de tipo blow-up 4.12.

**Teorema 4.14. [Estimación de curvatura]** *Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima propiamente embebida,  $H$ -convexa en  $\mathbb{R}_a^3$  con género localmente acotado y con  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable satisfaciendo (3.20) y (3.30) en  $]a, +\infty[$ . Entonces  $|\mathcal{S}|/\dot{\varphi}$  está acotado en  $\Sigma$ . En particular, si  $\alpha = 0$ ,  $|\mathcal{S}|$  está acotado y si  $\alpha \neq 0$ , entonces  $|\mathcal{S}|$  puede tender a infinito pero a lo sumo con un crecimiento lineal en altura.*

*Demostración.* Supongamos que existe una sucesión de puntos  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\Sigma$  tal que

$$\lambda_n = |\mathcal{S}|(p_n) \rightarrow +\infty, \quad \frac{\lambda_n}{\dot{\varphi}(x_3(p_n))} \rightarrow +\infty.$$

Entonces,  $\frac{\dot{\varphi}(x_3(p_n))}{\lambda_n} \rightarrow 0$  y por el Teorema 4.12, la sucesión  $\{\Sigma_n = \lambda_n(\Sigma - p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge diferenciablemente a un plano  $\Sigma_\infty$  en  $\mathbb{R}^3$ . Como,  $|\mathcal{S}_n(p_n)| = 1$  para cada  $n$ , tenemos que,  $|\mathcal{S}_\infty(0)| = 1$ , llegando a una contradicción.  $\square$

Usando la propiedad de minimalidad en el espacio de Ilmanen y el hecho de que, ser estable en el espacio Euclídeo (según la definición 2.15) equivale a ser estable en el espacio de Ilmanen, ver Teorema 2.34; podemos aplicar el Teorema 2.7, la fórmula para la curvatura seccional (2.13) y los resultados de H. Rosenberg, R. Souam, E.

Toubiana y B. White para superficies mínimas en 3-variedades en [66, 76, 78] en orden a probar los siguientes dos resultados,

**Teorema 4.15.** *Sea  $\varphi$  una función diferenciable tal que*

$$\frac{1}{2}e^{-\varphi} (|\max\{\dot{\varphi}^2, \ddot{\varphi}\}|) + |\max\{\dot{\varphi}^3, 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}, \ddot{\varphi}\}| \geq \rho,$$

*para alguna constante  $\rho > 0$  y sea  $\Sigma$  una superficie mínima (con posible frontera  $\partial\Sigma$  no vacía) en el espacio de Ilmanen y con curvatura total absoluta  $\lambda < 4\pi$ . Entonces, existe una constante  $C > 0$ , dependiendo solo de  $\lambda$  tal que*

$$|\mathcal{S}^\varphi| \min\{d_\varphi(p, \partial\Sigma), \mathcal{R}\} \leq C \text{ para todo } p \in \Sigma,$$

donde

$$\mathcal{R} = (\sup|\mathbb{K}^\varphi| + \sup|\bar{\nabla}^\varphi \mathbb{K}^\varphi|^{1/2})^{-1}$$

y  $d_\varphi$  es la distancia inducida por la métrica de Ilmanen.

**Teorema 4.16.** *Sea  $\varphi$  una función diferenciable tal que el espacio de Ilmanen es una variedad Riemanniana completa con geometría acotada y cuya curvatura seccional  $|\mathbb{K}^\varphi| \leq A$  para alguna constante  $A > 0$ . Para cualquier superficie mínima y estable  $\Sigma$  en el espacio de Ilmanen (con posible frontera  $\partial\Sigma$  no vacía), existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$|\mathcal{S}^\varphi| \min\{d_\varphi(p, \partial\Sigma), \pi/2\sqrt{A}\} \leq C,$$

donde  $d_\varphi$  es la distancia inducida por la métrica de Ilmanen.

#### 4.4. Caracterización sobre la convexidad.

J. Spruck y L. Xiao en [72] probaron, usando el principio del máximo de Omori-Yau para el operador Laplaciano  $\Delta$ , que cualquier soliton de traslación completo en  $\mathbb{R}^3$  con  $H \leq 0$  es convexo. Una demostración simplificada de este resultado fue presentada por D. Hoffman, T. Ilmanen, F. Martín y B. White en [31].

En esta sección, motivados por el comportamiento de los ejemplos rotacionales planteamos dicho problema para superficies completas

$[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas propiamente embebidas  $H$ -convexas en  $\mathbb{R}_a^3$  con género localmente acotado y  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaciendo (3.20), (3.30) con  $\ddot{\varphi} \leq 0$  en  $]a, +\infty[$ .

Recordamos que bajo dichas condiciones, la función  $\varphi$  es estrictamente creciente y convexa en  $]a, +\infty[$  con el siguiente comportamiento asintótico

$$\dot{\varphi}(u) = \alpha u + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{u^n},$$

con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales y tal que  $\ddot{\varphi} \leq 0$  en  $]a, +\infty[$ .

Para su posterior aplicación, empezaremos enunciado un Principio de Omori-Yau para el operador  $\Delta^\psi$ , ver [2, Teorema 3.2]:

**Teorema 4.17. [Principio de Omori-Yau para  $\Delta^\psi$ ]** Sea  $\Sigma$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  y  $\Delta^\psi$  el Laplaciano asociado a  $\psi \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ , ver (2.27). Supongamos que existe una función  $\gamma \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$  tal que

$$\gamma(p) \rightarrow +\infty \quad \text{cuando } p \rightarrow \infty, \quad (4.14)$$

$$\Delta^\psi \gamma \leq C \quad \text{fuera de un subconjunto compacto de } \Sigma, \quad (4.15)$$

$$|\nabla \gamma| \leq C \quad \text{fuera de un subconjunto compacto de } \Sigma, \quad (4.16)$$

para alguna constante  $C > 0$ . Si  $\delta \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$  y  $\delta^* = \sup_\Sigma \delta < +\infty$ , entonces existe una sucesión de puntos  $\{p_n\} \subset \Sigma$  satisfaciendo

$$(i) \delta(p_n) > \delta^* - \frac{1}{n}, \quad (ii) \Delta^\psi \delta(p_n) < \frac{1}{n}, \quad (iii) |\nabla \delta(p_n)| < \frac{1}{n}, \quad (4.17)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lema 4.18.** Sean  $k_i$  las curvaturas principales de una superficie  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{U}$  el conjunto de puntos totalmente umbilicales de  $\Sigma$ . Si  $\{v_i\}$  es una base ortonormal de direcciones principales de  $T\Sigma$ , entonces tenemos que en  $\Sigma \setminus \mathcal{U}$ ,

$$1. \nabla_{v_i} v_i = \alpha_i v_j, \quad \nabla_{v_j} v_i = \alpha_j v_j \quad \text{con } \alpha_i = -\alpha_j.$$

2. Los coeficientes  $\alpha_i$  están determinados por la fórmula,

$$\alpha_i = \frac{h_{12,i}}{k_1 - k_2} \text{ in } \Sigma - \mathcal{U}, \text{ donde } h_{ij,k} = (\nabla_{v_k} \mathcal{S})(v_i, v_j).$$

*Demostración.* El primer ítem se obtiene trivialmente derivando la expresión  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ . Por otro lado, derivando  $\mathcal{S}(v_1, v_2) = 0$  y usando el primer ítem,

$$0 = (\nabla_{v_i} \mathcal{S})(v_1, v_2) + \mathcal{S}(\nabla_i v_1, v_2) + \mathcal{S}(\nabla_{v_i} v_2, v_1) = h_{12,i} + \alpha_i(k_2 - k_1).$$

□

**Lema 4.19.** Si  $\Sigma$  es una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima en  $\mathbb{R}^3$ , entonces

$$\Delta^\varphi k_i = -|\mathcal{S}|^2 k_i - \eta_3 \nabla^2 \dot{\varphi}(v_i, v_i) + \mathcal{B}(v_i, v_i) + 2(-1)^{i+1} \frac{Q^2}{k_1 - k_2} \text{ en } \Sigma \setminus \mathcal{U},$$

donde  $\mathcal{B}$  es la forma bilineal definida en el Lema 2.19 y

$$Q^2 = h_{12,1}^2 + h_{12,2}^2 = h_{11,2}^2 + h_{22,1}^2.$$

*Demostración.* Solo probaremos la fórmula para la primera curvatura principal  $k_1$ , el razonamiento para  $k_2$  es análogo. Sea  $p \in \Sigma \setminus \mathcal{U}$  y  $\{u_1, u_2\}$  una base geodésica de  $T_p \Sigma$ . Entonces,

$$\Delta k_1 = \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{u_i} \nabla k_1, u_i \rangle = \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{u_i} \nabla \mathcal{S}(v_1, v_1), u_i \rangle. \quad (4.18)$$

Por el ítem 1. del Lema 4.18,  $\mathcal{S}(\nabla_{u_i} v_1, v_1) = 0$  y tenemos que,

$$\nabla \mathcal{S}(v_1, v_1) = \sum_{i=1}^2 ((\nabla_{u_i} \mathcal{S})(v_1, v_1)) u_i. \quad (4.19)$$

Así, usando (4.18) y (4.19), se tiene que

$$\Delta k_1 = \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{u_i} (\nabla_{u_i} \mathcal{S})(v_1, v_1) u_i, u_i \rangle = (\Delta \mathcal{S})(v_1, v_1) + 2 \frac{Q^2}{k_1 - k_2} \quad (4.20)$$

y la demostración se termina aplicando el ítem 6. del Lema 2.19. □

**Lema 4.20.** Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima en  $\mathbb{R}_a^3$  con  $k_1 < 0$  y curvatura media  $H = k_1 + k_2 < 0$ . Si para cualquier función diferenciable positiva  $\psi : \Sigma \rightarrow ]0, +\infty[$  tomamos el operador

$$\mathcal{J}^\psi := \Delta^{\varphi+2\log\psi},$$

entonces en  $\Sigma \setminus \mathcal{U}$  tenemos

$$\mathcal{J}^{\eta_3} \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) = -\ddot{\varphi} \langle \nabla x_3, v_2 \rangle^2 + \dot{\varphi} \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) (1 + 2\langle \nabla x_3, v_2 \rangle^2) - \frac{2}{\eta_3} \frac{Q^2}{k_1 - k_2}. \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-k_1} \left( \frac{\eta_3}{k_1} \right) &= \ddot{\varphi} \langle \nabla x_3, v_1 \rangle^2 \left( \frac{\eta_3}{k_1} \right)^2 - \dot{\varphi} \left( \frac{\eta_3}{k_1} \right) (1 + 2\langle \nabla x_3, v_1 \rangle^2) \\ &\quad - 2 \left( \frac{\eta_3}{k_1} \right) \frac{Q^2}{k_1(k_1 - k_2)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

En particular, si  $\ddot{\varphi} \leq 0$  en  $]a, +\infty[$  y  $\varphi$  verifica (3.20), entonces

$$\mathcal{J}^{\eta_3} \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) \geq 0 \text{ en } \{p \in \Sigma : k_2(p) > 0\}. \quad (4.23)$$

*Demostración.* No es difícil ver que,

$$\mathcal{J}^\eta \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) = \frac{\eta_3 \Delta^\varphi k_2 - k_2 \Delta^\varphi \eta_3}{\eta_3^2} \text{ y } \mathcal{J}^{-k_1} \left( \frac{\eta_3}{k_1} \right) = \frac{k_1 \Delta^\varphi \eta_3 - \eta_3 \Delta^\varphi k_1}{k_1^2}. \quad (4.24)$$

Además, del Lema 2.19 y el Lema 4.19, obtenemos que,

$$\begin{aligned} \eta_3 \Delta^\varphi k_i &= -|\mathcal{S}|^2 k_i \eta_3 - \eta_3^2 (\ddot{\varphi} \langle \nabla x_3, v_i \rangle^2 - \dot{\varphi} \eta_3 k_i) + 2\dot{\varphi} k_i \langle \nabla x_3, v_i \rangle^2 \\ &\quad - 2(-1)^{i+1} \eta_3 \frac{Q^2}{k_1 - k_2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$k_2 \Delta^\varphi \eta_3 = -\dot{\varphi} \eta_3 k_2 |\nabla x_3|^2 - |\mathcal{S}|^2 k_2 \eta_3, \quad (4.26)$$

$$k_1 \Delta^\varphi \eta_3 = -\dot{\varphi} \eta_3 k_1 |\nabla x_3|^2 - |\mathcal{S}|^2 k_1 \eta_3, \quad (4.27)$$

y la prueba se termina por (4.24), (4.25), (4.26) y (4.27).  $\square$

**Lema 4.21.** Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima, propiamente embebida, sin borde en  $\mathbb{R}_a^3$ , con  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando (3.20) y (3.30). Entonces,  $\Sigma$  es completa y se puede aplicar el principio del máximo de Omori-Yau para  $\Delta^\varphi$ .

*Demostración.* Si  $\gamma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  es la función dada por  $\gamma(p) = 2 \log |p|$ , entonces como  $\Sigma$  es propiamente embebida y  $\varphi$  satisface (3.20) y (3.30), tenemos que,

$$\gamma(p) \rightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad p \rightarrow \infty, \quad (4.28)$$

y fuera de un subconjunto compacto de  $\Sigma$

$$|\nabla \gamma(p)| = 2 \frac{|p^\top|}{|p|^2} \leq 2, \quad (4.29)$$

$$\Delta^\varphi \gamma(p) = -4 \frac{|p^\top|^2}{|p|^4} + \frac{2x_3(p)\dot{\varphi}(x_3(p)) + 4}{|p|^2} \leq 2A + 1. \quad (4.30)$$

para alguna constante  $A > 0$ . Así, por el Teorema 4.17, podemos aplicar el principio del máximo generalizado de Omori-Yau para  $\Delta^\varphi$ . Finalmente, tomando  $\gamma$  a lo largo de una geodésica divergente, es fácil ver, de (4.28) y (4.29), que cualquier superficie propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$  es necesariamente completa.  $\square$

Estamos ya en condiciones de abordar el segundo objetivo de este capítulo: caracterizar la convexidad de una familia de superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas haciendo uso del principio del máximo de Omori-Yau generalizado para  $\Delta^\varphi$  mencionado anteriormente.

**Teorema 4.22. [Caracterización de la convexidad]** *Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima, propiamente embebida y  $H$ -convexa en  $\mathbb{R}_a^3$ , con género localmente acotado y con  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable verificando (3.20),  $\ddot{\varphi} \leq 0$  en  $]a, +\infty[$  y*

$$\dot{\varphi}(u) = \alpha u + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{u^n}.$$

*Entonces,  $\Sigma$  es convexa si y sólo si la función  $\alpha K$  está acotada inferiormente.*

*Demostración.* Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima propiamente embebida en  $\mathbb{R}_a^3$  con  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaciendo (3.20), (3.30) y  $\ddot{\varphi} \leq 0$  en  $]a, +\infty[$ . Entonces, por el Teorema 2.22, podemos asumir que  $\eta_3 > 0$  en todo  $\Sigma$ . Supongamos que  $k_1 < 0$ ,  $k_1 \leq k_2$ ,  $H = k_1 + k_2 < 0$ .

Solo necesitamos probar que  $\Sigma$  es convexa cuando  $\alpha K$  está acotada inferiormente puesto que la otra implicación es trivial. Para ello, vamos a razonar por *contradicción*. Supongamos que existe un punto  $p_0 \in \Sigma$  tal que  $K(p_0) < 0$ . Entonces,

$$0 < \vartheta := \sup_{\Sigma} \frac{k_2}{\eta_3} = \sup_{\Omega^+} \frac{k_2}{\eta_3} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad (4.31)$$

donde  $\Omega^+ = \{p \in \Sigma \mid k_2(p) > 0\}$ .

**Afirmación 4.23.**  $\vartheta$  no se alcanza en  $\Sigma$ .

*Demostración.* Supongamos que se alcanza en un punto  $p$ , entonces de la ecuación (4.23) y del principio del máximo,  $\frac{k_2}{\eta_3}$  es constante en  $\Sigma$  y  $Q \equiv 0$ . Pero entonces, por el Lema 4.18, tenemos que  $\{v_1, v_2\}$  son paralelos y  $k_1 k_2 \equiv 0$  en  $\Sigma$ , llegando a una contradicción con (4.31).  $\square$

**Afirmación 4.24.** Si  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^+$  es una sucesión de puntos tal que  $\frac{k_2}{\eta_3}(p_n) \rightarrow \vartheta$ , entonces pasando a una sucesión parcial,  $x_3(p_n) \rightarrow +\infty$  y

1. si  $\alpha = 0$  y  $\frac{\eta_3}{k_1}(p_n) \rightarrow 0$ , entonces  $\eta_3(p_n) \rightarrow 0$ .
2. si  $\alpha \neq 0$ , entonces  $\eta_3(p_n) \rightarrow 0$  y  $\frac{\eta_3}{k_1}(p_n) \rightarrow 0$ .

*Demostración.* De la condición (3.30), la función  $2\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2$  está acotada superiormente en  $]a, +\infty[$  y podemos aplicar el Teorema 4.7, para demostrar que la sucesión  $\{\Sigma_n = \Sigma - p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene area uniformemente acotada en compactos de  $\mathbb{R}_a^3$ . Como cada  $\Sigma_n$  es una superficie  $[\varphi_n, \vec{e}_3]$ -mínima con

$$\varphi_n(u) = \varphi(u + x_3(p_n)) - \varphi(x_3(p_n)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad (4.32)$$

si  $\sup\{x_3(p_n)\} < +\infty$ , aplicando el Teorema de compacidad 4.10, tenemos que, pasando a una sucesión parcial,  $x_3(p_n) \rightarrow x_\infty \in \mathbb{R}$  y  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a una superficie propiamente embebida  $[\varphi_\infty, \vec{e}_3]$ -mínima  $\Sigma_\infty$  con  $H \leq 0$  donde  $\varphi_\infty(u) = \varphi(u + x_\infty) - \varphi(x_\infty)$ . Por el Teorema 4.14,

la norma de la segunda forma fundamental de cada  $\Sigma_n$  está acotada y, en consecuencia, la convergencia es diferenciable en el origen. De aquí, la función  $\frac{k_2}{\eta_3}$  alcanza su supremo en el origen, llegando a una contradicción con la Afirmación 4.23.

Si  $\alpha = 0$  y  $\frac{\eta_3}{k_1}(p_n) \rightarrow 0$ , consideramos  $\{\Sigma'_n = \lambda_n(\Sigma - p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $\lambda_n = -\frac{k_1}{\eta_3}(p_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, de las condiciones (3.20) y (3.30), pasando a una sucesión parcial, obtenemos que

$$\eta_3(p_n) \rightarrow \eta_\infty, \quad \frac{\dot{\varphi}(x_3(p_n))}{\lambda_n} = 1 + \frac{k_2}{k_1}(p_n) \rightarrow 0.$$

Aplicando el Teorema 4.12,  $\{\Sigma'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge diferenciablemente a un plano  $\Sigma_\infty$ , con curvaturas principales en el origen dadas por,

$$k_1 = -\eta_\infty \text{ y } k_2 = \eta_\infty,$$

lo cuál prueba que  $\eta_\infty = 0$ .

Si  $\alpha \neq 0$ , como  $\frac{k_1}{\eta_3} + \frac{k_2}{\eta_3} = -\dot{\varphi}$ , tenemos que  $\frac{\eta_3}{k_1}(p_n) \rightarrow 0$ . Supongamos que  $\eta_3(p_n) \rightarrow \eta_\infty \neq 0$ . Entonces,  $k_1(p_n) \rightarrow -\infty$  y  $k_2(p_n) \rightarrow \vartheta$ ; pero esto no puede ocurrir por estar  $\alpha K$  acotada inferiormente.  $\square$

Distinguimos el caso en que  $\dot{\varphi}$  esté acotada ( $\alpha = 0$ ) del caso no acotado ( $\alpha \neq 0$ ):

• **CASO  $\alpha = 0$ .** En este caso, de la condición (3.30) tenemos que en  $]a, +\infty[$ ,

$$0 < \dot{\varphi} < \sup_{]a, +\infty[} \dot{\varphi} = \beta. \quad (4.33)$$

**Afirmación 4.25.**  $\vartheta \neq +\infty$ .

*Demostración.* Si suponemos que existe una sucesión de puntos  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\frac{k_2}{\eta_3}(p_n) \rightarrow +\infty$ , entonces, usando que

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right) + 1 = -\dot{\varphi} \left(\frac{\eta_3}{k_2}\right), \quad \frac{k_1 + k_2}{\eta_3} = -\dot{\varphi}, \quad (4.34)$$

deducimos que  $(k_1/k_2)(p_n) \rightarrow -1$  y  $(\eta_3/k_1)(p_n) \rightarrow 0$ . En particular,

$$\tau = \sup_{\Sigma} \frac{\eta_3}{k_1} = 0. \quad (4.35)$$

y  $\tau$  no se alcanza en un punto interior. Ahora, aplicando el principio del máximo de Omori-Yau generalizado 4.17 para  $\Delta^\varphi$  podemos garantizar la existencia de una sucesión de puntos,  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ ,  $|q_n| \rightarrow +\infty$ , tal que

$$\frac{\eta_3}{k_1}(q_n) \rightarrow 0, \quad \left| \nabla \left( \frac{\eta_3}{k_1} \right) \right|(q_n) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \Delta^\varphi \left( \frac{\eta_3}{k_1} \right)(q_n) \leq 0. \quad (4.36)$$

Consecuentemente, de (4.34) y (4.36), se tiene que  $(k_2/\eta_3)(q_n) \rightarrow +\infty$  y para  $n$  suficientemente grande  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^+$ . En particular, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que (4.21) y (4.22) se dan para cualquier  $n \geq n_0$ .

Con objeto de simplificar la notación, en el resto de la demostración, supondremos que cualquier límite solo se considera en las adecuadas sucesiones de puntos. De la afirmación 4.24 y después de pasar una sucesión parcial, tenemos que  $x_3 \rightarrow +\infty$ ,  $\eta_3 \rightarrow 0$  y  $\frac{k_2}{k_1} = -\frac{\dot{\varphi}\eta_3}{k_1} - 1 \rightarrow -1$ . Así, del Lema 2.19,

$$\left| \frac{\nabla \eta_3}{k_1} \right|^2 = \langle \nabla x_3, v_1 \rangle^2 + \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^2 \langle \nabla x_3, v_2 \rangle^2 \rightarrow 1, \quad (4.37)$$

y por (4.36) y (4.37), deducimos que

$$\frac{\nabla \eta_3}{k_1} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \frac{\eta_3 \nabla k_1}{k_1 k_1} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} \neq 0. \quad (4.38)$$

Como

$$\frac{\eta_3 \nabla H}{k_1 k_1} = \frac{\eta_3 \nabla k_1}{k_1 k_1} + \frac{\eta_3 \nabla k_2}{k_1 k_1} = -\frac{\eta_3^2 \nabla \dot{\varphi}}{k_1 k_1} - \frac{\eta_3 \dot{\varphi} \nabla \eta}{k_1 k_1}, \quad (4.39)$$

del Lema 2.19, (4.38) y (4.39), se prueba que

$$\frac{\eta_3 h_{11,2}}{k_1 k_1} \rightarrow \langle \mathcal{X}, v_2 \rangle, \quad \frac{\eta_3 h_{22,1}}{k_1 k_1} \rightarrow -\langle \mathcal{X}, v_1 \rangle.$$

En particular,

$$\frac{\eta_3^2}{k_1^4} Q^2 \rightarrow |\mathcal{X}| = 1 \quad (4.40)$$

Multiplicando ahora por  $(\eta_3/k_1)$  en (4.22), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left(\frac{\eta_3}{k_1}\right) \Delta^\varphi \left(\frac{\eta_3}{k_1}\right) + 2 \left(\frac{\eta_3}{k_1}\right) \langle \nabla \left(\frac{\eta_3}{k_1}\right), \frac{\nabla k_1}{k_1} \rangle &= \ddot{\varphi} \langle \nabla x_3, v_1 \rangle^2 \left(\frac{\eta_3}{k_1}\right)^3 \\ - \ddot{\varphi} \left(\frac{\eta_3}{k_1}\right)^2 (1 + 2 \langle \nabla x_3, v_1 \rangle^2) - 2k_1 \left(\frac{\eta_3^2}{k_1^4}\right) \frac{Q^2}{k_1 - k_2}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Usando que  $k_2/k_1 \rightarrow -1$  junto con (3.20), (3.30), (4.36) y (4.40), si tomamos límites cuando  $n \rightarrow +\infty$  en la anterior desigualdad, obtenemos  $0 \leq -1$ , llegando a contradicción.  $\square$

**Afirmación 4.26.** Si  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  es una sucesión de puntos tal que  $\frac{k_2}{k_1} \rightarrow \vartheta < +\infty$ , entonces pasando a una sucesión parcial, se verifica que

$$x_3 \rightarrow +\infty, \quad \eta_3 \rightarrow 0, \quad \frac{k_1}{k_2} \rightarrow -\frac{\beta}{\vartheta} - 1.$$

*Demostración.* Considera la siguiente sucesión  $\{\Sigma_n = \Sigma - p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Argumentando de igual forma que la primera parte de la Afirmación 4.24, se prueba que, pasando a una sucesión parcial,  $x_3 \rightarrow +\infty$ . Además, de la expresión (4.32),

$$\varphi_n \rightarrow \varphi_\infty, \quad \text{con } \varphi_\infty(u) = \beta u,$$

y usando de nuevo el Teorema de compactidad 4.10, tenemos que, salvo paso a una parcial, la sucesión  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a un soliton de traslación  $\Sigma_\infty$  propiamente embebido,  $H$ -convexo en  $\mathbb{R}^3$  y conteniendo al origen. Por el Teorema 4.14 y como la norma de la segunda forma fundamental de cada  $\Sigma_n$  está acotada, la convergencia es diferenciable y podemos probar que  $\Sigma_\infty$  es un plano vertical, pues de lo contrario  $k_2/\eta_3$  alcanzaría su supremo en el origen, lo que contradice la Afirmación 4.23. Resumiendo,  $\eta_3 \rightarrow 0$  y

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{H}{k_2} - 1 = -\dot{\varphi} \frac{\eta_3}{k_2} - 1 \rightarrow \frac{\beta}{\vartheta} - 1,$$

lo que concluye esta Afirmación.  $\square$

**Afirmación 4.27.** El caso  $0 < \vartheta < +\infty$  no es posible.

*Demostración.* Si

$$0 < \vartheta = \sup_{\Sigma} \frac{k_2}{\eta_3} = \sup_{\Omega^+} \frac{k_2}{\eta_3} < \infty,$$

entonces por el Lema 4.21, el Teorema 4.17 y la Afirmación 4.23, existe una sucesión de puntos  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^+$ ,  $|p_n| \rightarrow +\infty$  tal que

$$\left(\frac{k_2}{\eta_3}\right) \rightarrow \vartheta, \quad \left|\nabla\left(\frac{k_2}{\eta_3}\right)\right| \rightarrow 0, \quad \Delta^\varphi\left(\frac{k_2}{\eta_3}\right)(p_n) \leq 0. \quad (4.42)$$

De la Afirmación 4.26, obtenemos que

$$\nabla x_3 \rightarrow \vec{e}_3, \quad x_3 \rightarrow +\infty, \quad \frac{k_1}{k_2} \rightarrow -\frac{\beta}{\vartheta} - 1,$$

y por el Lema 2.19,

$$\left|\frac{k_2}{\eta_3} \frac{\nabla \eta_3}{\eta_3}\right|^2 = \frac{k_2^4}{\eta_3^4} \left(\frac{k_1^2}{k_2^2} \langle \nabla x_3, v_1 \rangle^2 + \langle \nabla x_3, v_2 \rangle^2\right) \rightarrow C \neq 0,$$

donde  $C$  es una constante tal que  $C \in [\vartheta^4, 2\vartheta^4 + \vartheta^2(\beta^2 + 2\beta\vartheta)[$ . Así, por (4.42),

$$\frac{\nabla k_2}{\eta_3} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad \frac{k_2}{\eta_3} \frac{\nabla \eta_3}{\eta_3} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Y} \neq 0. \quad (4.43)$$

Argumentado de forma análoga a la Afirmación 4.26, se prueba que

$$\frac{h_{11,2}}{\eta_3} \rightarrow -\vartheta^2 \left(\frac{\beta}{\vartheta} + 1\right) \langle \vec{e}_3, v_2 \rangle, \quad \frac{h_{22,1}}{\eta_3} \rightarrow -\vartheta^2 \left(\frac{\beta}{\vartheta} + 1\right) \langle \vec{e}_3, v_1 \rangle, \quad (4.44)$$

y entonces,

$$\frac{Q^2}{\eta_3^2} = \frac{h_{11,2}^2 + h_{22,1}^2}{\eta_3^2} \rightarrow \vartheta^4 \left(\frac{\beta}{\vartheta} + 1\right)^2 \quad (4.45)$$

Multiplicando ahora por  $(k_2/\eta_3)$  en (4.21), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{k_2}{\eta_3} \Delta^\varphi \left(\frac{k_2}{\eta_3}\right) + 2 \frac{k_2}{\eta_3} \left\langle \nabla \left(\frac{k_2}{\eta_3}\right), \frac{\nabla \eta_3}{\eta_3} \right\rangle &= -\ddot{\varphi} \frac{k_2}{\eta_3} \langle \nabla x_3, v_2 \rangle^2 \\ + \ddot{\varphi} \left(\frac{k_2}{\eta_3}\right)^2 (1 + 2 \langle \nabla x_3, v_2 \rangle^2) - 2 \left(\frac{Q^2}{\eta_3^2}\right) \frac{k_2}{k_1 - k_2}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

y usando que  $\frac{k_1}{k_2} \rightarrow -\frac{\beta}{\vartheta} - 1$ , (3.20), (3.30), (4.42) y (4.45), podemos tomar límite cuando  $n \rightarrow +\infty$  en la desigualdad anterior y demostrar que

$$0 \geq 2 \frac{\vartheta^4 \left(\frac{\beta}{\vartheta} + 1\right)^2}{\frac{\beta}{\vartheta} + 2} > 0,$$

lo cuál es una contradicción.  $\square$

• **CASO  $\alpha \neq 0$ .** Como el supremo de  $k_2/\eta_3$  no se alcanza en  $\Sigma$ , podemos tomar una sucesión de puntos  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^+$  tal que  $k_2/\eta_3 \rightarrow \vartheta$ .

**Afirmación 4.28.** Si  $\alpha \neq 0$  y  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  es una sucesión de puntos tal que  $\frac{k_2}{\eta_3} \rightarrow \vartheta < +\infty$  entonces, después de pasar a una sucesión parcial, tenemos

$$\frac{\eta_3}{k_1} \rightarrow 0, \quad x_3 \rightarrow +\infty, \quad \eta_3 \rightarrow 0, \quad \frac{k_2}{k_1} \rightarrow 0.$$

*Demostración.* Tomando  $\{\Sigma_n = \Sigma - p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , podemos también argumentar como en la primera parte de la Afirmación 4.24, para probar que, pasando a una sucesión parcial,  $x_3 \rightarrow +\infty$ . Como  $\frac{k_1 + k_2}{\eta_3} = -\dot{\varphi}$ , tenemos que  $\frac{\eta_3}{k_1} \rightarrow 0$  y por la Afirmación 4.24, después de pasar a una sucesión parcial, se sigue que  $\eta_3 \rightarrow 0$ . Finalmente, de nuestra hipótesis se tiene,

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{H}{k_2} - 1 = -\dot{\varphi} \frac{\eta_3}{k_2} \rightarrow -\infty.$$

$\square$

**Afirmación 4.29.** El caso  $0 < \vartheta < +\infty$  no es posible.

*Demostración.* Del Teorema 4.17 y la Afirmación 4.23 existe una sucesión de puntos  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega^+$ ,  $|q_n| \rightarrow +\infty$  tal que

$$\frac{k_2}{\eta_3}(q_n) \rightarrow \vartheta, \quad \left| \nabla \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) \right| (q_n) \rightarrow 0, \quad \Delta^\varphi \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) (q_n) \leq 0. \quad (4.47)$$

Por un simple cálculo

$$\begin{aligned}\frac{\eta_3^2}{k_1 k_2^2} \nabla k_2 &= \frac{\eta_3^3}{k_1 k_2^2} \nabla \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) + \frac{\eta_3}{k_1 k_2} \nabla \eta_3, \\ \frac{\eta_3^2}{k_1 k_2^2} \nabla k_1 &= -\frac{\eta_3^3}{k_1 k_2^2} \nabla \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) + \frac{\eta_3}{k_2^2} \nabla \eta_3 - \frac{\eta_3^3 \ddot{\varphi}}{k_1 k_2} \nabla x_3\end{aligned}$$

y usando la Afirmación 4.28 junto con (4.47),

$$\frac{\eta_3^2}{k_1 k_2^2} h_{22,1} \rightarrow \frac{1}{\vartheta} \langle \vec{e}_3, v_1 \rangle, \quad \frac{\eta_3^2}{k_1 k_2^2} h_{11,2} \rightarrow \frac{1}{\vartheta} \langle \vec{e}_3, v_2 \rangle.$$

En consecuencia,

$$\frac{\eta_3^4}{k_1^2 k_2^4} Q^2 = \frac{\eta_3^4}{k_1^2 k_2^4} (h_{11,2}^2 + h_{22,1}^2) \rightarrow \frac{1}{\vartheta^2} > 0. \quad (4.48)$$

Como la ecuación (4.21) se verifica en  $\Omega^+$ , multiplicando por  $\frac{\eta_3^3}{k_1 k_2^2}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\eta_3^3}{k_1 k_2^2} \Delta \varphi \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) + 2 \frac{\eta_3^3}{k_1 k_2^2} \left\langle \nabla \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right), \frac{\nabla \eta_3}{\eta_3} \right\rangle &= -\ddot{\varphi} \frac{\eta_3^3}{k_1 k_2^2} \langle \nabla x_3, v_2 \rangle^2 \\ + \ddot{\varphi} \frac{\eta_3^3}{k_1 k_2^2} \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) (1 + 2 \langle \nabla x_3, v_2 \rangle^2) &- 2 \frac{\eta_3^3}{k_1 k_2^2} \frac{1}{\eta_3} \frac{Q^2}{k_1 - k_2}\end{aligned} \quad (4.49)$$

y de nuevo, tomando límite cuando  $n \rightarrow +\infty$  en la expresión anterior, llegamos a una contradicción.  $\square$

**Afirmación 4.30.** El caso  $\vartheta = +\infty$  no es posible.

*Demostración.* Asumimos por contradicción que  $\vartheta = +\infty$ . Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  una función diferenciable y acotada verificando

$$\dot{g} \geq 0, \quad \text{en todo } \mathbb{R}, \quad (4.50)$$

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{en } [1, +\infty[. \quad (4.51)$$

Definamos la función  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $h(p) = g\left(\frac{k_2}{\eta_3}(p)\right)$ . Usando (4.21), podemos probar que,

$$\begin{aligned} \Delta^\varphi h + 2\left\langle \nabla h, \frac{\nabla \eta_3}{\eta_3} \right\rangle &= \dot{g} \left| \nabla \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) \right|^2 - \dot{g} \ddot{\varphi} \langle \nabla x_3, v_2 \rangle^2 \\ &+ \dot{g} \ddot{\varphi} \left( \frac{k_2}{\eta_3} \right) (1 + 2\langle \nabla x_3, v_2 \rangle^2) - 2 \frac{\dot{g}}{\eta_3} \frac{Q^2}{k_1 - k_2}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Como por hipótesis  $\vartheta = +\infty$ , está claro que

$$\sup_{\Sigma} \{h\} = 1, \quad (4.53)$$

y no se alcanza en  $\Sigma$ . Ahora, del Lema 4.21 podemos aplicar el Teorema 4.17 para probar la existencia de una sucesión divergente  $q_n \rightarrow \infty$  verificando

$$h \rightarrow 1, \quad |\nabla h| \rightarrow 0, \quad \text{y} \quad \Delta^\varphi h(q_n) \leq 0. \quad (4.54)$$

Esto es,  $\frac{k_2}{\eta_3} \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{\eta_3}{k_1} \rightarrow 0$  y, por la Afirmación 4.24, después de pasar a una sucesión parcial, también tenemos que  $x_3 \rightarrow +\infty$  y  $\eta_3 \rightarrow 0$ . Ahora, argumentando de igual forma que en la Afirmación 4.29, se sigue que

$$\frac{\eta_3}{k_1 k_2} h_{22,1} \rightarrow \langle \vec{e}_3, v_1 \rangle, \quad \frac{\eta_3}{k_1 k_2} h_{11,2} \rightarrow \langle \vec{e}_3, v_2 \rangle$$

y por tanto,

$$\frac{\eta_3^2}{k_1^2 k_2^2} Q^2 = \frac{\eta_3^2}{k_1^2 k_2^2} (h_{11,2}^2 + h_{22,1}^2) \rightarrow 1 > 0. \quad (4.55)$$

Usando ahora que  $\frac{k_2}{k_1} \in ]-1, 0[$  en  $\Omega^+$ , para  $n$  suficientemente grande se tiene,

$$\dot{g} \left( \frac{k_2}{\eta_3}(p_n) \right) = \frac{\eta_3^2}{k_2^2}(p_n), \quad \ddot{g} \left( \frac{k_2}{\eta_3}(p_n) \right) = -2 \frac{\eta_3^3}{k_2^3}(p_n).$$

Finalmente, si multiplicamos por  $\frac{\eta_3}{k_1}$  en la expresión (4.52) y tomamos límite cuando  $n \rightarrow +\infty$ , demostramos finalmente que,

$$0 \leq -\frac{2}{1-C} < 0,$$

donde  $C \in [-1, 0]$  es una constante tal que  $\frac{k_2}{k_1} \rightarrow C$ , lo cuál es una contradicción.  $\square$

De todas las afirmaciones anteriores, se tiene que la única posibilidad es que  $\vartheta \leq 0$ , lo cuál concluye la demostración.  $\square$

Terminamos este capítulo con dos resultados cuya demostración se sigue de los Teoremas 2.23, 4.12 y 4.22, razonando de igual forma que en [31, Corolario 2.3].

**Corolario 4.31.** *Sea  $\Sigma$  una superficie en las mismas condiciones que en el Teorema 4.22 con  $\alpha K$  acotada inferiormente. Si  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión divergente de puntos de  $\Sigma$  y  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  verifica,*

$$\frac{\dot{\varphi}(x_3(p_n))}{\lambda_n} \rightarrow C,$$

*para alguna constante  $C > 0$ , entonces,  $\{\Sigma_n = \lambda_n(\Sigma - p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge diferenciablemente, después de pasar a una sucesión parcial, a un plano vertical, o bien, a un Grim reaper soliton de traslación (posiblemente ladeado).*

**Corolario 4.32.** *Sea  $\Sigma$  una superficie en las mismas condiciones que en el Teorema 4.22 con  $\alpha K$  acotada inferiormente. Si  $K$  se anula en algún punto, entonces  $\Sigma$  es llana.*

# Capítulo 5

---

## Teoremas de unicidad gracias al comportamiento asintótico.

---

En este capítulo, vamos a caracterizar los ejemplos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol y cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario gracias a sus respectivos comportamientos asintóticos descritos en los Teoremas 3.31 y 3.3. Para ello, usaremos una metodología análoga a los trabajos [50, 51]. En primer lugar, probaremos que nuestra superficie, cuando es diferenciablemente asintótica a un  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol, es simétrica respecto de cualquier plano vertical conteniendo al eje  $OZ$  usando el método de Alexandrov por planos verticales introducido en [1] junto con las ideas de R. Schoen en [70] en su estudio de las superficies mínimas en el espacio Euclídeo. Y en segundo lugar, gracias a un principio del máximo, demostraremos que un grafo  $C^\infty$ -asintótico a un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario es invariante bajo translaciones en el eje  $OY$ . Dichas caracterizaciones pueden encontrarse en [53, 52], respectivamente.

### 5.1. Caracterización del ejemplo $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol.

A lo largo de esta sección, vamos a suponer que  $\Sigma$  es una superficie completa propiamente embebida  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima con un solo final en  $\mathbb{R}_a^3$  y  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable estrictamente creciente y convexa, para  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  y con un crecimiento a lo sumo cuadrático, de forma que fuera de un compacto podemos expresarla

de la siguiente forma

$$\dot{\varphi}(u) = \alpha u + \beta + \sum_{i=1}^n \frac{a_n}{u^n},$$

donde  $\alpha, \beta \geq 0$  y  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de números reales.

Dado  $\theta \in [0, 2\pi[$ , consideramos  $\vec{v} = (\cos(\vec{v}), \sin(\vec{v}), 0)$  y denotamos por  $\Pi_{\vec{v}}(t)$  al plano vertical

$$\Pi_{\vec{v}}(t) = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{v} \rangle = t\}. \quad (5.1)$$

**Definición 5.1.** Sean  $\Sigma_1, \Sigma_2$  dos subconjuntos arbitrarios de  $\mathbb{R}^3$ . Diremos que  $\Sigma_1$  está a la derecha de  $\Sigma_2$  con respecto a  $\Pi_{\vec{v}}(t)$  y escrito por  $\Sigma_1 \geq_{\vec{v}} \Sigma_2$  si y sólo si para todo punto  $q \in \Pi_{\vec{v}}(t)$  tal que

$$\pi^{-1}(q) \cap \Sigma_1 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \pi^{-1}(q) \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$$

se verifica la siguiente desigualdad

$$\inf\{\langle p, \vec{v} \rangle : p \in \pi^{-1}(q) \cap \Sigma_1\} \geq \sup\{p \in \pi^{-1}(q) \cap \Sigma_2\},$$

donde  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi_{\vec{v}}(t)$  denota la proyección ortogonal sobre  $\Pi_{\vec{v}}(t)$ .

Para un subconjunto arbitrario  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  también vamos a considerar los siguientes subconjuntos

$$\begin{aligned} \Sigma_+(t) &= \{p \in M : \langle p, \vec{v} \rangle \geq t\}, \\ \Sigma_-(t) &= \{p \in M : \langle p, \vec{v} \rangle \leq t\}, \\ \Sigma_+^*(t) &= \{p + 2(t - \langle p, \vec{v} \rangle)\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : p \in \Sigma_+(t)\}, \\ \Sigma_-^*(t) &= \{p + 2(t - \langle p, \vec{v} \rangle)\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : p \in \Sigma_-(t)\}, \\ Z_t &= \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{e}_3 \rangle \geq t\}. \end{aligned}$$

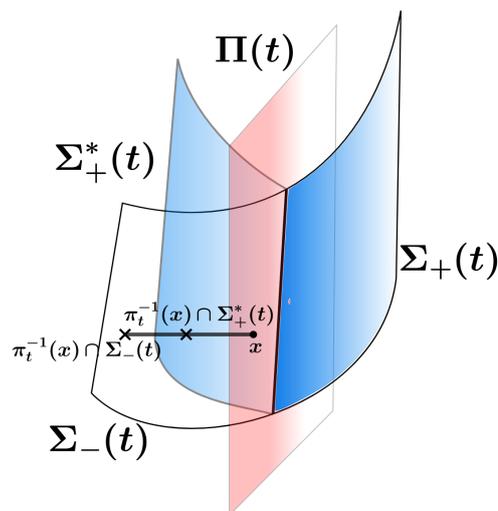
Por otro lado, de los Teoremas 3.13 3.31 que, bajo dichas hipótesis, podemos garantizar la existencia de  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Boles que son grafos enteros rotacionalmente simétricos cuyo comportamiento asintótico se puede expresar, salvo una constante, por

$$\varphi(u)(x) = C e^{\alpha|x|^2} + O(|x|^2) \quad \text{si} \quad \alpha > 0, \quad (5.2)$$

donde  $C$  es una constante positiva, o bien, si  $\alpha = 0$  y  $\beta > 0$  por

$$\mathcal{G}(u)(x) = \frac{|x|^2}{2} - \frac{1}{\beta^2} \log(|x|) + O(|x|^{-2}), \quad (5.3)$$

donde  $\mathcal{G}$  es una función definida en el Teorema 3.31.



**Figura 5.1:** Boceto de la definición 5.1.

**Definición 5.2.** Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima con un solo final. Diremos que  $\Sigma$  es diferenciablemente asintótica a un ejemplo de tipo rotacional si  $\Sigma$  puede expresarse, fuera de un conjunto compacto, como un grafo  $u_\Sigma$  verificando (5.2) si  $\alpha > 0$ , o bien verificando (5.3) si  $\alpha = 0$  y  $\beta > 0$ .

Sea  $\Sigma$  una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima con un solo final diferenciablemente asintótica a un ejemplo rotacional  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol. Entonces, existe un  $R > 0$  suficientemente largo tal que  $\Sigma \cap (\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R))$  es el grafo de una función  $u_\Sigma$  verificando (5.2) si  $\alpha > 0$ , o bien, (5.3) si  $\alpha = 0$  y  $\beta > 0$ , donde  $B(0, R)$  es la bola Euclídea en  $\mathbb{R}^3$  centrada en el origen de radio  $R$ .

**Lema 5.3.** Existe  $r_1 > R$  tal que si  $t > r_1$  entonces  $\Sigma_+(t)$  es un grafo sobre  $\Pi_{\vec{v}}(t)$ .

*Demostración.* Está claro que cuando  $t > R$ ,  $\Sigma_+(t)$  tiene una única componente conexa no acotada. Además, si  $\alpha > 0$  entonces por el comportamiento dado en (5.2), tenemos que

$$\dot{\varphi}(u_\Sigma)(x)(du_\Sigma)_x(\vec{v}) \geq 2\alpha e^{\alpha|x|^2} \langle x, \vec{v} \rangle \left( C + e^{-\alpha|x|^2} g(|x|) \right),$$

donde

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(|x|)}{|x|^2} = 0.$$

Consecuentemente, existe  $r_1$  suficientemente grande tal que si  $\langle x, \vec{v} \rangle \geq r_1$ , entonces  $(du_\Sigma)_x(\vec{v}) > 0$  y, en este caso, dado que  $\Sigma$  es embebida y  $\Sigma_+(r_1) \cup \pi(\Sigma_+(r_1))$  encierra un dominio de  $\mathbb{R}^3$  se demuestra que  $\Sigma_+(t)$  es un grafo sobre  $\Pi_{\vec{v}}(t)$ .

Cuando  $\alpha = 0$  un argumento similar también funciona.  $\square$

Del Lema 5.3, si fijamos  $t > r_1$ ,  $\Sigma_+^*(t) \cap \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{e}_3 \rangle > R\}$  es un grafo vertical de una función  $u_t^*$  satisfaciendo

$$u_t^*(x) = u_\Sigma(x + 2(t - \langle x, \vec{v} \rangle)\vec{v}) \quad (5.4)$$

**Lema 5.4.** *Se considera  $a > 0$  independientemente de  $R$  y  $\epsilon_0 > 0$ . Entonces, para  $R$  suficientemente grande y  $t > a + \langle x, \vec{v} \rangle$ , tenemos que*

$$u_t^*(x) - u_\Sigma(x) > \epsilon_0 > 0.$$

*Demostración.* Si  $\alpha > 0$  entonces, de (5.2) y (5.4), obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(u_t^*)(x) - \varphi(u_\Sigma)(x) &\geq C e^{\alpha|x|^2} \left( e^{4\alpha t(t - \langle x, \vec{v} \rangle)} - 1 \right) \\ &\quad - M \left( 2|x|^2 + 4t(t - \langle x, \vec{v} \rangle) \right), \end{aligned}$$

para alguna constante  $M > 0$ . Tomando  $\lambda$  tal que

$$\frac{1 + \sqrt{1 + \lambda}}{\lambda} < \frac{R}{2t}$$

y  $R > \alpha^{-1}$ , tenemos que  $4t(t - \langle x, \vec{v} \rangle) \leq \lambda|x|^2$  y

$$\varphi(u_t^*)(x) - \varphi(u_\Sigma)(x) > C e^{\alpha R^2} \left( e^{4\alpha R a} - 1 - M e^{-\alpha R^2} (\lambda + 2) R^2 \right) > 0$$

para  $R$  suficientemente grande. Finalmente, la prueba se termina por que  $\varphi$  es estrictamente creciente. Cuando  $\alpha = 0$ , podemos estimar  $\mathcal{G}(u_t^*)(x) - \mathcal{G}(u_\Sigma)(x)$  como en [51, Afirmación 1, Paso 3] y usar el hecho de que  $\mathcal{G}$  es una función estrictamente creciente.  $\square$

Con estos preliminares, estamos en condiciones de demostrar la unicidad de un  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol gracias a su comportamiento asintótico.

**Teorema 5.5.** *Sea  $\Sigma$  una superficie completa  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima propiamente embebida en  $\mathbb{R}_a^3$  con un solo final y diferenciablemente asintótica a un  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol. Entonces,  $\Sigma$  es un  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol.*

*Demostración.* La principal idea es usar el principio de reflexión de Alexandrov en [1] para probar que  $\Sigma$  es simétrica respecto de cualquier plano vertical  $\Pi_{\vec{v}}(0)$  (Este método puede encontrarse también en [44, Sección 4.1]). Fijado un vector horizontal unitario  $\vec{v}$  de forma arbitraria, el objetivo será probar que  $0 \in \mathcal{A}$  donde

$$\mathcal{A} = \{t \geq 0 : \Sigma_+(t) \text{ es un grafo sobre } \Pi_{\vec{v}}(t) \text{ y } \Sigma_+^*(t) \geq_{\vec{v}} \Sigma_-(t)\},$$

pues usando un argumento simétrico demostraríamos que  $\Sigma_+(0) \geq_{\vec{v}} \Sigma_-^*(0)$  y por lo tanto,  $\Sigma_+^*(0) = \Sigma_-(0)$  y  $\Sigma$  sería simétrica con respecto al plano  $\Pi_{\vec{v}}(0)$ . Consecuentemente, gracias a la arbitrariedad del vector  $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ,  $\Sigma$  sería una superficie de revolución respecto a la dirección vertical  $\vec{e}_3$  intersectando el eje de rotación de forma ortogonal, por lo que  $\Sigma$  tendría que ser un  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol.

**Paso 1.** El conjunto  $\mathcal{A}$  es no vacío. Además, trivialmente tenemos que si  $s \in \mathcal{A}$  entonces  $[s, +\infty) \subset \mathcal{A}$ .

*Demostración del paso 1.* Por el Lema 5.3, existe  $r_1 > R$  tal que para cualquier  $t > r_1$  se tiene que  $\Sigma_+(t)$  es un grafo sobre  $\Pi_{\vec{v}}(t)$ . Por otro lado, gracias al Lema 5.4, podemos considerar un  $r_2 > r_1$  suficientemente grande, un  $a$  independientemente de  $r_2$  y un  $\epsilon_0 > 0$  tal que

para  $t > a + \langle x, \vec{v} \rangle$  tenemos que

$$u_t^*(x) - u_\Sigma(x) > \epsilon_0 > 0.$$

De dicha desigualdad, tenemos que

$$\Sigma_+^*(t+a) \cap \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{v} \rangle \leq t\} \geq_{\vec{v}} \Sigma_-(t+a) \cap \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{v} \rangle \leq t\}.$$

Además, como  $\Sigma_+(t)$  es un grafo sobre  $\Pi_{\vec{v}}(t)$ , deducimos que

$$\Sigma_+^*(t+a) \cap \{p \in \mathbb{R}^3 : t \leq \langle p, \vec{v} \rangle \leq t+a\} \geq_{\vec{v}} \Sigma_-(t+a) \cap \{p \in \mathbb{R}^3 : t \leq \langle p, \vec{v} \rangle \leq t+a\}$$

probando que  $]t+a, +\infty[ \subset \mathcal{A}$ .  $\square$

**Paso 2.** El conjunto  $\mathcal{A}$  es un subconjunto cerrado en  $[0, +\infty[$ .

*Demostración del paso 2.* Supongamos que  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de puntos en  $\mathcal{A}$  convergiendo a  $t_0$ . El objetivo será probar que  $t_0 \in \mathcal{A}$ . En primer lugar, nótese que gracias al Paso 1, el intervalo  $]t_0, +\infty[ \subset \mathcal{A}$ . Nuestro objetivo será probar que  $\Sigma_+(t_0)$  es un grafo sobre el plano  $\Pi_{\vec{v}}(t_0)$  y que  $\Sigma_+^*(t_0) \geq_{\vec{v}} \Sigma_-(t_0)$ . Supongamos por *contradicción* que  $\Sigma_+(t_0)$  no se puede expresar como un grafo sobre  $\Pi_{\vec{v}}(t_0)$ , es decir, existen dos puntos diferentes  $p, q \in \Sigma_+(t_0)$  tal que  $\pi(p) = \pi(q)$  con  $\langle p, \vec{v} \rangle < \langle q, \vec{v} \rangle$ . Entonces, tenemos que  $t_0 = \langle p, \vec{v} \rangle$  ya que para cualquier  $s > t_0$ , se tiene que  $s \in \mathcal{A}$ . Ahora, tómesese

$$t = \frac{\langle q, \vec{v} \rangle + 3t_0}{4} > t_0.$$

Como  $\pi(p) = \pi(q)$ , tenemos que  $\Sigma_+^*(t)$  no puede estar a la derecha de  $\Sigma_-(t)$  con respecto al plano  $\Pi_{\vec{v}}(t)$ , lo cuál es una contradicción pues  $t \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto, el conjunto  $\Sigma_+(t_0)$  se puede expresar como un grafo sobre  $\Pi_{\vec{v}}(t_0)$ . Consecuentemente, gracias a la continuidad, se tiene que  $\Sigma_+^*(t_0) \geq_{\vec{v}} \Sigma_-(t_0)$  y por lo tanto,  $t_0 \in \mathcal{A}$  como queríamos demostrar.  $\square$

**Paso 3.** El mínimo del conjunto  $\mathcal{A}$  es 0.

*Demostración del paso 3.* Argumentamos por *contradicción*. Supongamos que  $s_0 = \min \mathcal{A} > 0$ . Vamos a probar que existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $s_0 - \epsilon \in \mathcal{A}$ .

**Afirmación 1:** Existe un  $\epsilon_1 > 0$  tal que  $\Sigma_+(s_0 - \epsilon_1)$  es un grafo sobre  $\Pi_{\vec{v}}(s_0 - \epsilon_1)$ .

*Demostración de la afirmación 1.* En efecto; gracias al comportamiento asintótico, existe un  $\alpha > 0$  suficientemente grande y un  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $\Sigma_+(s_0 - \epsilon_0) \cap Z_\alpha$  es un grafo sobre el plano  $\Pi_{\vec{v}}(s_0 - \epsilon_0)$  y además

$$\Sigma_+^*(s_0 - \epsilon - 0) \cap Z_\alpha \geq_{\vec{v}} \Sigma_-(s_0 - \epsilon_0) \cap Z_\alpha.$$

Consider ahora el conjunto compacto

$$\mathcal{K} = \Sigma \cap \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{e}_3 \rangle \leq \alpha\}.$$

Como  $s_0 \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $\mathcal{K}_+(s_0)$  es un grafo sobre  $\Pi_{\vec{v}}(s_0)$ . Además, no existe ningún punto de  $\mathcal{K}_+(s_0)$  con vector normal  $N$  incluido en  $\Pi_{\vec{v}}(s_0)$ . Por el contrario, aplicando el principio del máximo en la frontera 2.5, demostramos que  $\Sigma$  sería simétrica respecto del plano  $\Pi_{\vec{v}}(s_0)$  llegando a una contradicción pues  $s_0 > 0$  y no sería asintótico al  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol. Consecuentemente,

$$N(\mathcal{K}_+(s_0)) \cap \Pi_{\vec{v}}(s_0) = \emptyset.$$

Por continuidad, existe un  $\epsilon_1 \in ]0, \epsilon_0]$  suficientemente pequeño tal que para cualquier  $t \in [s_0 - \epsilon_1, s_0]$ ,  $N(\mathcal{K}_+(t)) \cap \Pi_{\vec{v}}(t) = \emptyset$  y por lo tanto,  $\mathcal{K}_+(t)$  se puede representar como un grafo sobre  $\Pi_{\vec{v}}(t)$  para todo  $t \in [s_0 - \epsilon_1, s_0]$ . Así,  $\Sigma_+(s_0 - \epsilon_1)$  es un grafo sobre  $\Pi_{\vec{v}}(s_0 - \epsilon_1)$ .  $\square$

**Afirmación 2:** Existe  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  tal que  $\Sigma_+^*(s_0 - \epsilon_2) \geq_{\vec{v}} \Sigma_-(s_0 - \epsilon_2)$ .

*Demostración de la afirmación 2.* En primer lugar, nótese que para cualquier  $t \geq s_0 - \epsilon_1$  se tiene

$$(\Sigma_+^*(t) \cap \Sigma_-(t) \cap \mathcal{K}) - (\partial\Sigma_+(t)) \subset \mathcal{K}_-(s_0 - \epsilon_1). \quad (5.5)$$

Además, como  $\Sigma_+^*(s_0) \geq_{\vec{v}} \Sigma_-(s_0)$ ,

$$\Sigma_+^*(s_0) \cap \Sigma_-(s_0) = \partial\Sigma_+(s_0).$$

Ahora vamos a probar que existe un  $\epsilon_2 \in ]0, \epsilon_1]$  tal que

$$\Sigma_+^*(t) \cap \Sigma_-(t) \cap \mathcal{K} = \partial\Sigma_+(t) \cap \mathcal{K},$$

para todo  $t \geq s_0 - \epsilon_2$ . Argumentamos por *contradicción*; supongamos que existe una sucesión creciente  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergiendo a  $s_0$  tal que

$$(\Sigma_+^*(t_n) \cap \Sigma_-(t_n) \cap \mathcal{K}) - (\partial \Sigma_+(t_n)) \neq \emptyset.$$

Denotaremos por  $p_n$  un punto cualquiera del anterior conjunto para cada  $n$ . De (5.5), se tiene que  $\langle p_n, \vec{v} \rangle \leq s_0 - \epsilon_1$ . Por compacidad de  $\mathcal{K}$ , podemos pasar a una sucesión parcial para asumir que  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a un punto  $p_\infty \in \mathcal{K}$ . Por continuidad, tenemos que  $\langle p_\infty, \vec{v} \rangle \leq s_0 - \epsilon_1$ . Pero,

$$p_0 \in \Sigma_+^*(s_0) \cap \Sigma_-(s_0) \cap \mathcal{K} = \partial \Sigma_+^*(s_0) \cap \mathcal{K},$$

llegando a una contradicción. Por lo tanto,  $\Sigma_+^*(t) \cap \Sigma_-(t) = \partial \Sigma_+(t)$  para todo  $t \in ]s_0 - \epsilon_2, s_0]$  y por un argumento de continuidad,  $\Sigma_+^*(t) \geq_{\vec{v}} \Sigma_-(t)$ . Demostrándose que  $\Sigma_+^*(s_0 - \epsilon_2) \geq \Sigma_-(s_0 - \epsilon_2)$ .  $\square$

En consecuencia, de las afirmaciones 1 y 2,  $s_0 - \epsilon_2 \in \mathcal{A}$  lo cual no es posible.  $\square$

Del paso 3, deducimos que  $\Sigma$  es simétrica respecto al plano  $\Pi_{\vec{v}}(0)$  y de la arbitrariedad del vector horizontal  $\vec{v}$ ,  $\Sigma$  es una superficie rotacionalmente simétrica con respecto a la dirección vertical  $\vec{e}_3$  e intersectando al eje de rotación  $OZ$  de forma ortogonal. En consecuencia,  $\Sigma$  es un  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol.  $\square$

## 5.2. Caracterización del cilindro $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarior.

En esta sección, caracterizamos el cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarior gracias a su comportamiento asintótico. La estrategia será probar que, en las condiciones del Teorema 5.18, nuestra superficie sea invariante por traslaciones en la dirección  $\vec{e}_2$  demostrando que la función ángulo  $\eta_2 \equiv 0$ .

### 5.2.1. Definición de $C^k$ -asintótico.

Teniendo en cuenta la geometría que tiene el cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarior descrito en el Teorema 3.3, la siguiente definición es clave para entender el comportamiento asintótico de una superficie bajo las restricciones del Teorema 5.18.

**Definición 5.6.** Sea  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un difeomorfismo creciente tal que  $e^{-\varphi} \in L^1(]a, +\infty[)$  y sea  $\mathcal{G}^h$  un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarior en  $\mathbb{R}^3$  con condición inicial  $h \in ]a, +\infty[$ .

Diremos que una superficie diferenciable  $\Sigma$  es  $C^k$ -asintótico a la parte derecha  $\mathcal{G}_+^h(0)$  de  $\mathcal{G}^h$  si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\Sigma$  parametrizarse como un grafo sobre  $\mathcal{G}^h$  por

$$\tilde{F} : T_{\delta, h}^+ \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \tilde{F} = F + \bar{u} N_F,$$

donde  $T_{\delta, h}^+ := ]\Lambda_h - \delta, \Lambda_h[ \times \mathbb{R}$ ,  $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2, u(x_1))$  parametriza  $\mathcal{G}^h$  en  $T_{\delta, h}^+$ ,  $u$  es solución de (3.2) con  $u(0) = h$ ,  $\bar{u} : T_{\delta, h}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función en  $C^k(T_{\delta, h}^+(+))$  tal que

$$\sup_{T_{\delta, h}^+} |\bar{u}| < \varepsilon, \quad \sup_{T_{\delta, h}^+} |D^j \bar{u}| < \varepsilon, \quad \text{for any } j \in \{1, \dots, k\}.$$

y  $N_F$  es el vector normal unitario exterior a  $\mathcal{G}^h$ . Análogamente, diremos que una superficie diferenciable  $\Sigma$  es  $C^k$ -asintótica a la parte izquierda  $\mathcal{G}_-^h(0)$  de  $\mathcal{G}^h$  si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $\Sigma$  puede parametrizarse como un grafo sobre  $\mathcal{G}^h$  por

$$\tilde{F} : T_{\delta, h}^- \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \tilde{F} = F + \bar{u} N_F,$$

donde  $T_{\delta, h}^- := ]-\Lambda_h, -\Lambda_h + \delta[ \times \mathbb{R}$ ,  $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2, u(x_1))$  parametriza  $\mathcal{G}^h$  sobre  $T_{\delta, h}^-$ ,  $u$  es una solución de (3.2) con  $u(0) = h$ ,  $\bar{u} : T_{\delta, h}^- \rightarrow \mathbb{R}$  es una función en  $C^k(T_{\delta, h}^-)$  tal que

$$\sup_{T_{\delta, h}^-} |\bar{u}| < \varepsilon, \quad \sup_{T_{\delta, h}^-} |D^j \bar{u}| < \varepsilon, \quad \text{para cualquier } j \in \{1, \dots, k\}.$$

En particular, diremos que  $\Sigma$  es  $C^k$ -asintótica a  $\mathcal{G}^h$  si y sólo si  $\Sigma$  es  $C^k$ -asintótica a  $\mathcal{G}_+^h(0)$  y  $\mathcal{G}_-^h(0)$ . Además, diremos que una superficie diferenciable  $\Sigma$  es  $C^k$ -asintótica a  $\mathcal{G}^h$ , fuera de un cilindro, si existe

un cilindro sólido  $\mathfrak{c}$  cuyo eje es  $\mathcal{G}^h \cap \Pi(0)$  y el conjunto  $\Sigma - \mathfrak{c}$  consiste en dos componentes conexas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  las cuáles son  $C^k$ -asintóticas a  $\mathcal{G}_+^h(0)$  y  $\mathcal{G}_-^h(0)$ , respectivamente.

Teniendo en mente nuestra estrategia de probar  $\eta_2 \equiv 0$ , vamos a controlar el comportamiento asintótico del cociente  $\eta_2/\eta_3$ . En el siguiente razonamiento expresamos dicha función cuando parametrizamos  $\Sigma$  como un grafo sobre  $\mathcal{G}^h$ .

Considera un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario  $\mathcal{G}^h$  contenido en  $]-\Lambda_h, \Lambda_h[ \times \mathbb{R}^2$  parametrizado por

$$F(x_1, x_2) = (x_1, x_2, u(x_1)) \quad (x_1, x_2) \in ]-\Lambda_h, \Lambda_h[ \times \mathbb{R},$$

donde  $u$  es una función diferenciable satisfaciendo (3.2) con  $u(0) = h$  para algún  $h \in ]a, +\infty[$ . Ahora, supongamos que nuestra superficie  $\Sigma$  es un grafo  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimo  $C^\infty$ -asintótico a  $\mathcal{G}^h$ , fuera de un cilindro. Entonces, para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que la parte derecha  $\Sigma_+(\Lambda_h - \delta)$  puede parametrizarse por  $\tilde{F} : T_{\delta, h}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  donde  $\tilde{F} = F + \bar{u}N_F$  y  $\bar{u} : T_{\delta, h}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable tal que

$$\sup_{T_{\delta, h}^+} \{|\bar{u}|\} < \varepsilon \quad \text{and} \quad \sup_{T_{\delta, h}^+} \{|D^j \bar{u}|\} < \varepsilon \quad \text{for any } j \in \mathbb{N},$$

y  $N_F$  es el vector normal unitario a  $\mathcal{G}^h$  dado por,

$$N_F = \left( \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{1+u'^2}} \right). \quad (5.6)$$

Ahora, calculamos el normal  $N_{\tilde{F}}$  de  $\Sigma$  con respecto a la base ortogonal  $\{\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, N_F\}$ . Nótese que,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = (1, 0, u') \quad \text{and} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = (0, 1, 0). \quad (5.7)$$

Si denotamos por

$$E_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{1+u'^2}}, 0, \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \right) \quad \text{and} \quad E_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad (5.8)$$

entonces,

$$\frac{\partial N_F}{\partial x_1} = \dot{\varphi} E_1 \quad \text{and} \quad \frac{\partial N_F}{\partial x_2} = 0. \quad (5.9)$$

Consecuentemente, de (5.7), (5.8) y (5.9), obtenemos que

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1} = (\sqrt{1+u'^2} + \bar{u}\dot{\varphi})E_1 + \bar{u}_{x_1}N_F, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_2} = E_2 + \bar{u}_{x_2}N_F, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_2} = -\bar{u}_{x_1}E_1 - (\sqrt{1+u'^2} + \bar{u}\dot{\varphi})\bar{u}_{x_2}E_2 + (\sqrt{1+u'^2} + \bar{u}\dot{\varphi})N_F. \quad (5.12)$$

Entonces, de las ecuaciones (5.10), (5.11) y (5.12), el normal  $N_{\tilde{F}}$  puede expresarse por

$$N_{\tilde{F}} = \frac{\left(-\frac{\bar{u}_{x_1}}{1+u'^2}\right) \frac{\partial F}{\partial x_1} - \bar{u}_{x_2} \left(1 + \bar{u} \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1+u'^2}}\right) \frac{\partial F}{\partial x_2} + \left(1 + \bar{u} \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1+u'^2}}\right) N_F}{\sqrt{\frac{\bar{u}_{x_1}^2}{1+u'^2} + (1 + \bar{u}_{x_2}^2) \left(1 + \bar{u} \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1+u'^2}}\right)^2}}. \quad (5.13)$$

Por otro lado, de las ecuaciones (5.6) y (5.7), tenemos que

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \vec{e}_2 \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_2}, \vec{e}_2 \right\rangle = 1, \quad \langle N_F, \vec{e}_2 \rangle = 0, \quad (5.14)$$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \vec{e}_3 \right\rangle = u', \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_2}, \vec{e}_3 \right\rangle = 0, \quad \langle N_F, \vec{e}_3 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1+u'^2}}. \quad (5.15)$$

Consecuentemente, aplicando (5.13), (5.14), (5.15) y teniendo en cuenta que el razonamiento para la parte izquierda es análogo, probamos el siguiente resultado.

**Proposición 5.7.** *En las condiciones anteriores, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tal que*

$$\frac{\eta_2}{\eta_3} = \bar{u}_{x_2} \sqrt{1+u'^2} \left( \frac{1 + \bar{u} \left( \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1+u'^2}} \right)}{1 + \bar{u}_{x_1} \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} + \bar{u} \left( \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1+u'^2}} \right)} \right) \text{ sobre } T_{\delta,h}^{\pm} \quad (5.16)$$

respectivamente, donde  $\bar{u} : T_{\delta,h}^{\pm} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable dada por la definición 5.6 verificando

$$\sup_{T_{\delta,h}^{\pm}} \{|\bar{u}|\} < \varepsilon \quad \text{y} \quad \sup_{T_{\delta,h}^{\pm}} \{|D^j \bar{u}|\} < \varepsilon \quad \text{para cualquier } j \in \mathbb{N}.$$

**Nota 5.8.** Nótese que ser  $C^k$ -asintótico no implica que la convergencia sea en  $C^k$ -topología. Sin embargo, de los Teoremas 3.3, 3.4 junto a las ecuaciones (5.6)-(5.9), si  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  y  $c \in \mathbb{R}$  es una función diferenciable estrictamente monótona y todas las derivadas  $j$ -ésimas de  $\varphi$  están acotadas para cualquier  $j \in \{1, \dots, k\}$ , entonces  $C^k$ -asintótica implica  $C^k$ -topología.

### 5.2.2. Teorema de compacidad gracias a un principio del máximo de barrera.

Un paso fundamental para la unicidad del cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario es el comportamiento de nuestras superficies bajo traslaciones en la dirección horizontal  $\vec{e}_2$ . En esta sección, probaremos que las traslaciones en el eje  $OY$  de cualquier grafo  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimo  $\Sigma$  convergen a un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario cuando  $\Sigma$  es  $C^\infty$ -asintótico a un  $\mathcal{G}^h$ , fuera de un cilindro. Dicho resultado de compacidad es una consecuencia del Teorema de B. White 4.10 junto con un principio del máximo de barrera para el conjunto de puntos blow-up del area dado por

$$\mathcal{Z} := \{p \in \Omega : \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}^\varphi(\Sigma_n \cap B_r(p)) = +\infty \text{ for any } r > 0\},$$

donde  $B_r(p)$  es la bola Euclídea centrada en  $p$  de radio  $r$ . Este resultado fue probado también por B. White en [77] con enunciado

**Teorema 5.9.** (Principio de barrera) *Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones diferenciables que convergen diferenciablemente a  $\varphi_\infty$  en  $\Omega$ . Considera  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  una sucesión de superficies mínimas en el correspondiente espacio de Ilmanen  $\mathcal{I}^{\varphi_n}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  tal que la longitud de  $\{\partial \Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  esté uniformemente acotado en conjuntos compactos de  $\Omega$  y supongamos que existe un dominio cerrado  $D$  en  $\Omega$  con frontera diferenciable tal que  $\mathcal{Z} \subset D$  y  $\langle H_{\partial D}, \nu \rangle \leq 0$  donde  $\nu$  es el vector normal unitario a  $\partial D$  que apunta al interior de  $D$  y  $H_{\partial D}$  la curvatura media del borde de  $D$ . Si  $\mathcal{Z}$  contiene cualquier punto de  $\partial D$ , entonces  $\partial D \subset \mathcal{Z}$ .*

La idea principal para demostrar nuestro resultado de compacidad será probar que  $\mathcal{Z} = \emptyset$  gracias al Teorema 5.9 con el fin de aplicar el Teorema de compacidad 4.10; puesto que, una de las hipótesis

cruciales es que el area esté uniformemente acotada en conjuntos compactos de  $\mathbb{R}^3$ .

**Nota 5.10.** Si aplicamos el Teorema 4.7 para la acotación del area intrínseca, se prueba que si  $\varphi$  es una función diferenciable estrictamente creciente y convexa tal que  $\sup\{2\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2\} < +\infty$ , entonces cualquier sucesión de traslaciones horizontales  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas y  $H$ -convexas en  $\mathbb{R}^3$  tiene area uniformemente acotada en compactos de  $\Omega$  con respecto a la métrica de Ilmanen. En el siguiente Teorema, gracias a que nuestra superficie  $\Sigma$  es  $\mathcal{C}^\infty$ -asintótica a un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario  $\mathcal{G}^h$  podemos relajar las condiciones sobre la función  $\varphi$ .

**Teorema 5.11.** *Sea  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$   $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  y  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un difeomorfismo estrictamente creciente y convexo. Consideramos  $\Sigma$  una superficie conexa propiamente embebida  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima con género localmente acotado y  $\mathcal{C}^\infty$ -asintótica a  $\mathcal{G}^h$  para algún  $h \in ]a, +\infty[$ , fuera de un cilindro. Supongamos que  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión divergente de números reales y consideramos la sucesión de superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas  $\{\Sigma_n = \Sigma - (0, b_n, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces, después de pasar a una sucesión parcial,  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge diferenciablemente con multiplicidad 1 a una superficie diferenciable  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima  $\Sigma_\infty$  con el mismo comportamiento asintótico que  $\Sigma$ .*

*Demostración.* Por hipótesis, nuestra superficie  $\Sigma$  es  $\mathcal{C}^\infty$ -asintótica a  $\mathcal{G}^h$ , fuera de un cilindro  $\mathfrak{c}$ . Salvo un movimiento rígido, podemos considerar  $\mathfrak{c}$  tal que

$$\mathfrak{c} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + (x_3 - h)^2 \leq r_0^2\}.$$

De la definición 5.6, cada  $\Sigma_n \setminus \mathfrak{c}$  consiste en dos componentes conexas  $\Sigma_{n,1}, \Sigma_{n,2}$  las cuáles son  $\mathcal{C}^\infty$ -asintóticas  $\mathcal{G}_+^h(0)$  y  $\mathcal{G}_-^h(0)$ , respectivamente. Para un  $z \in \mathbb{R}$  arbitrario, denotamos por

$$\mathcal{R}_z^+ = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{e}_3 \rangle \geq z\} \text{ y } \mathcal{R}_z^- = \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{R}_z^+.$$

Dividimos cada  $\Sigma_n$  en las siguientes partes

$$\Sigma_{n,k}^+(z) = \Sigma_{n,k} \cap \mathcal{R}_z^+ \text{ con } k \in \{1, 2\} \text{ y } \Sigma_n^-(z) = \Sigma_n \setminus \left( \bigcup_{k=1}^2 \Sigma_{n,k}^+(z) \right).$$

**Afirmación 1.** Existe  $z_1$  suficientemente grande tal que para todo  $z \geq z_1$  la sucesión  $\{\Sigma_{n,k}^+(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene área uniformemente acotada en compactos de  $\Omega$  con respecto a la métrica de Ilmanen.

*Demostración de la Afirmación 1.* Solo vamos a probar el caso  $k = 1$  ya que el caso  $k = 2$  es análogo. Sea  $\mathcal{K}$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^3$  y  $B(0, r)$  la bola de radio  $r$  centrada en el origen y conteniendo a  $\mathcal{K}$ . Denotamos por  $\mathcal{U}_{n,z}$  la proyección de  $\Sigma_{n,1}^+(z) \cap \mathcal{K}$  a  $] -\Lambda_h, \Lambda_h[ \times \mathbb{R}$ . De la definición 5.6 y tomando  $z_1$  suficientemente grande, se tiene que para cualquier  $z \geq z_1$  y cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta$  (dependiendo solo de  $\varepsilon$ ) tal que podemos parametrizar  $\Sigma_{n,1}^+(z) \cap \mathcal{K}$  por  $\tilde{F}_n$  sobre  $\mathcal{U}_{n,z} \cap T_{\delta,h}^+$ . Consecuentemente, el área sobre este conjunto compacto viene dada por,

$$\mathcal{A}^\varphi(\Sigma_{n,1}^+(z) \cap \mathcal{K}) = \int_{\mathcal{U}_{n,z} \cap T_{\delta,h}^+} e^{\varphi(\langle \tilde{F}_n(x_1, x_2), \vec{e}_3 \rangle)} \left| \frac{\partial \tilde{F}_n}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \tilde{F}_n}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2.$$

Consecuentemente, de la monotonía de  $\varphi$ , el Teorema 2.30 y la expresión (5.12), existe una constante  $C(R, \varepsilon) > 0$  (dependiendo solo de  $R$  y  $\varepsilon$ ) tal que

$$\mathcal{A}^\varphi(\Sigma_{n,1}^+(z) \cap \mathcal{K}) \leq e^{\varphi(R+\varepsilon)} C(R, \varepsilon) \mathcal{A}(\mathcal{U}_{n,z}) \leq e^{\varphi(R+\varepsilon)} C(R, \varepsilon) \mathcal{A}(\mathcal{K}).$$

□

**Afirmación 2.** Existe un  $z_2 \geq z_1$  tal que para todo  $z \geq z_2$  la sucesión de superficies  $\{\Sigma_n^-(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene área uniformemente acotada en  $\Omega$  con respecto a la métrica de Ilmanen.

*Demostración de la afirmación 2.* Argumentando como en la afirmación anterior, vamos a probar que la sucesión  $\{\partial \Sigma_n^-(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene longitud uniformemente acotada en conjuntos compactos. Nótese que cada  $\partial \Sigma_n^-(z)$  tiene dos componentes conexas  $\partial \Sigma_{n,k}^-(z)$  con  $k \in \{1, 2\}$ . De nuevo, solo vamos a probar el caso  $k = 1$ . Fijo un conjunto compacto  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{R}^3$  y  $B(0, r)$  la bola Euclídea de radio  $r$  centrada en el origen y conteniendo al compacto  $\mathcal{K}$ . Tomando  $z_2 \geq z_1$  suficientemente grande, tenemos que para cualquier  $z \geq z_2$  y cualquier  $\varepsilon > 0$  existe

un  $\delta$  (dependiendo solo de  $\varepsilon$ ) tal que  $\partial\Sigma_{n,1}^-(z) \cap \mathcal{K}$  puede parametrizarse como una curva plana  $\gamma_n : I_n \subset \mathbb{R} \rightarrow \Pi(r_n)$  dada por  $\gamma_n(t) = \tilde{F}_n(r_n, t)$  con  $r_n \in ]\Lambda_h - \delta, \Lambda_h[$ ,  $I_n$  denota la proyección de  $\partial\Sigma_{n,1}^-(z) \cap \mathcal{K}$  a  $\{r_n\} \times \mathbb{R}$  y  $\tilde{F}_n$  dado en la definición 5.6. Consecuentemente, de la ecuación (5.11), podemos estimar la longitud por,

$$\int_{I_n} e^{\varphi(\langle \gamma_n(t), \vec{e}_3 \rangle)} \|\gamma_n'(t)\| dt \leq e^{\varphi(R+\varepsilon)} \int_{I_n} \|\gamma_n'(t)\| dt \leq C(\varepsilon, r) e^{\varphi(R+\varepsilon)},$$

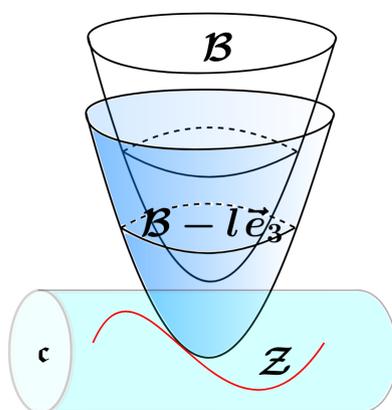
donde  $C(\varepsilon, r) > 0$  es una constante dependiendo solamente de  $\varepsilon$  y  $r$ .

Por otro lado, de la afirmación 1, tenemos que el conjunto de puntos blow-up del area  $\mathcal{Z}$  está contenido en un cilindro horizontal  $\mathcal{c}'$  de radio mayor o igual que  $z_2$ . Nótese que, la tercera coordenada  $x_3$  está acotada en  $\mathcal{Z}$ . Del Teorema 3.13, podemos asegurar la existencia de un  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol  $\mathcal{B}$  tal que  $\mathcal{B} \cap \mathcal{c}' = \emptyset$ . Trasladando  $\mathcal{B}$  en la dirección  $-\vec{e}_3$ , existe un primer  $l > 0$  tal que  $\mathcal{B} - l\vec{e}_3$  tiene un punto de contacto tangencial  $p$  con  $\mathcal{Z}$ . Entonces, gracias a la estimación uniforme de la longitud, podemos aplicar el Teorema 5.9 para demostrar que  $\mathcal{B} - l\vec{e}_3$  está contenido en  $\mathcal{c}'$  el cuál contradice el comportamiento asintótico de  $\mathcal{B}$  dado en el Teorema 3.25. Finalmente, me gustaría apuntar que el  $[\varphi, \vec{e}_3]$ - Bol trasladado es un grafo  $[\varphi_l, \vec{e}_3]$ -mínimo, que sigue siendo  $H$ -convexo, con  $\varphi_l(x_3) = \varphi(x_3 + l)$ .  $\square$

De las afirmaciones 1. y 2. la sucesión  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene area uniformemente acotada en compactos  $\mathbb{R}^3$  con respecto a la métrica de Ilmanen. Consecuentemente, del Teorema 4.10,  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a una superficie diferenciablemente  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima  $\Sigma_\infty$  propiamente embebida. Nótese que  $\Sigma_\infty \neq \emptyset$  porque  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene puntos de acumulación gracias al comportamiento asintótico. Ya que cada  $\Sigma_{n,k}^+(z)$  es un grafo sobre  $\mathcal{G}^h$  y  $\Sigma_n$  es conexa, deducimos que la multiplicidad es 1 en todos los puntos y por tanto, la convergencia es diferenciable. Además, observa que cada componente de  $\Sigma_\infty \cap \mathcal{R}_z^+$  puede parametrizarse como un grafo de una función diferenciable  $\bar{u}_\infty$  el cual es límite de una sucesión de grafos  $\{\bar{u}_n = \bar{u}(s - b_n, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces,  $\Sigma_\infty$  tiene el mismo comportamiento asintótico que  $\Sigma$ . Finalmente,  $\Sigma_\infty$  es conexa pues de otra manera, existe una componente conexa propiamente embebida  $\mathcal{S}_\infty$  en el interior de  $\mathcal{c}$  llegando a una contradicción pues

la tercera componente de dicha componente conexa estaría acotada.  $\square$

**Nota 5.12.** Nótese que la superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol es una grafo globalmente convexo rotacionalmente simétrico que interseca al eje de revolución de forma ortogonal definido sobre un disco  $\mathbb{D}$  centrado en el origen y tal que  $u(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow \partial\mathbb{D}$ . La convexidad de  $\varphi$  es crucial en la prueba del Teorema 3.13 para garantizar la propiedad de ser globalmente convexa y asegurar la divergencia de  $u$  en el borde  $\partial\mathbb{D}$ .



**Figura 5.2:** Esquema de la demostración del Teorema 5.11.

### 5.2.3. Demostración de la unicidad del cilindro $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario.

En esta sección, vamos a probar nuestro resultado de unicidad para el cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario gracias al comportamiento asintótico. Las claves de esta demostración serán el método de reflexión de Alexandrov [1] por planos verticales, aplicado de igual forma que en el Teorema de unicidad del  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol 5.5, junto con el principio del máximo 2.21 para probar que la función ángulo  $\eta_2 \equiv 0$ . Consecuentemente, nuestro grafo  $\Sigma$  será invariante por traslaciones horizontales en la dirección  $\vec{e}_2$  y por lo tanto,  $\Sigma$  será un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario.

**Lema 5.13.** Sea  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una

función diferenciable estrictamente creciente y convexa tal que  $e^{-\varphi} \in L^1(]a, +\infty[)$ . Si  $\Sigma$  es una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima  $C^\infty$ -asintótica a un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario  $\mathcal{G}^h$  para algún  $h \in ]a, +\infty[$ , fuera de un cilindro, entonces  $\Sigma$  está estrictamente contenida en la banda  $]-\Lambda_h, \Lambda_h[ \times \mathbb{R}^2$ .

*Demostración.* Argumentamos por contradicción. Sea  $x_1$  la primera coordenada de  $\Sigma$  y asumimos que  $\lambda = \sup_{\Sigma} \{x_1\} > \Lambda_h$ , donde  $\Lambda_h$  está definida en la ecuación 3.5. Consideramos el siguiente subconjunto de  $\Sigma$ ,

$$\mathcal{S}_{h,\lambda} = \Sigma_+ \left( \frac{\Lambda_h}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) \quad \text{con} \quad \partial \mathcal{S}_{h,\lambda} = \Sigma \cap \Pi \left( \frac{\Lambda_h}{2} + \frac{\lambda}{2} \right).$$

El comportamiento asintótico de  $\Sigma$  con respecto a  $\mathcal{G}_+^h(0)$  implica que existe un máximo local en el interior de  $\mathcal{S}_{h,\lambda}$ . De la ecuación 2. del Lema 2.19, obtenemos que

$$\sup_{\mathcal{S}_{h,\lambda}} \{x_1\} = \sup_{\partial \mathcal{S}_{h,\lambda}} \{x_1\}.$$

Consecuentemente, existe un punto  $p \in \partial \mathcal{S}_{h,\lambda}$  tal que

$$\frac{\Lambda_h}{2} + \frac{\lambda}{2} = x_1(p) \geq \lambda,$$

llegando a contradicción ya que  $\lambda > \Lambda_h$ . Por otro lado, si se da la igualdad, comparando con el plano vertical  $\Pi(\Lambda_h)$  con  $\Sigma$  llegamos a una contradicción con el principio del máximo en el interior 2.5. Por lo tanto,  $\sup_{\Sigma} \{x_1\} < \Lambda_h$ .

Similarmente, podemos probar que  $\inf_{\Sigma} \{x_1\} > -\Lambda_h$  gracias al comportamiento asintótico de  $\Sigma$  con respecto a  $\mathcal{G}_-^h(0)$ .  $\square$

**Lema 5.14.** Sea  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función diferenciable estrictamente creciente tal que  $e^{-\varphi} \in L^1(]a, +\infty[)$ . Si  $\Sigma$  es una superficie  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima  $C^\infty$ -asintótica a un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario  $\mathcal{G}^h$  para algún  $h \in ]a, +\infty[$ , fuera de un cilindro, entonces  $\Sigma$  es simétrica respecto del plano vertical  $\Pi(0)$ .

*Demostración.* Vamos a usar un argumento análogo al Teorema 5.5, demostrando los Lemas 5.3 y 5.4 adaptados en esta situación. Fijo

$t > 0$  y considero la reflexión de  $\Sigma_+(t)$  con respecto a  $\Pi(t)$

$$\Sigma_+^*(t) = \{(2t - x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma_+(t)\}.$$

Del Lema 5.13, vamos a definir el siguiente conjunto

$$\mathcal{A} = \{t \in [0, \Lambda_h[ : \Sigma_+(t) \text{ es un grafo sobre } \Pi(0) \text{ y } \Sigma_+^*(t) \geq \Sigma_-(t)\},$$

donde  $\geq$  significa en este caso  $\geq_{\vec{e}_2}$  definido en 5.1. Vamos a probar de nuevo que  $0 \in \mathcal{A}$ . En este caso, tendríamos que  $\Sigma_+^*(0) \geq \Sigma_-(0)$  y de nuevo, por un argumento simétrico, demostramos que  $\Sigma_+^*(0) = \Sigma_-(0)$ .

Primero probamos que  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ . Del comportamiento asintótico con respecto a  $\mathcal{G}_+^h(0)$ , tenemos que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $t_0 > 0$  tal que  $\Sigma_+(t)$  puede parametrizarse por

$$\tilde{F} : T_{t,h} := ]t, \Lambda_h[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \tilde{F} = F + \bar{u} N_F \quad \text{para cualquier } t \geq t_0,$$

donde  $F$  es la parametrización de  $\mathcal{G}^h$  sobre  $T_t$  y  $\bar{u} : T_{t,h} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable tal que

$$\sup_{T_{t,h}} |\bar{u}| < \varepsilon \quad , \quad \sup_{T_{t,h}} |D\bar{u}| < \varepsilon. \quad (5.17)$$

Considera,

$$\tilde{u}(x_1) = \langle \tilde{F}, \vec{e}_3 \rangle = u(x_1) - \frac{\bar{u}(x_1, x_2)}{\sqrt{1 + u'(x_1)^2}} \quad (5.18)$$

y definimos  $\tilde{u}^*$  la reflexión con respecto  $\Pi(t)$  dada por

$$\tilde{u}^*(x_1) = u(2t - x_1) - \frac{\bar{u}(2t - x_1, x_2)}{\sqrt{1 + u'(2t - x_1)^2}}. \quad (5.19)$$

Del Teorema 3.3, las ecuaciones (5.17), (5.18) y (5.19), se obtiene la siguiente desigualdad,

$$\tilde{u}^*(x_1) - \tilde{u}(x_1) > u(2t - x_1) - u(x_1) - 2\varepsilon$$

Eligiendo una constante  $a > 0$  (independiente de  $t_0$ ) y  $t_1 \geq t_0$  suficientemente grande tal que  $u'(x_1) \geq \varepsilon/a$  para  $a < t_1 - x_1$ , entonces existe un  $\epsilon_0 > 0$  tal que

$$\tilde{u}^*(x_1) - \tilde{u}(x_1) > 2(u'(x_1)a - \varepsilon) > \epsilon_0 > 0,$$

Consecuentemente, de la desigualdad anterior y del Paso 1. del Teorema 5.5, tenemos que

$$\begin{aligned} \Sigma_+^*(t+a) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq t\} \\ \geq \Sigma_-(t+a) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq t\}, \end{aligned}$$

para todo  $t \geq t_1$ . Además, del hecho de que  $\Sigma_+(t)$  es un grafo sobre  $\Pi(t)$  deducimos que

$$\begin{aligned} \Sigma_+^*(t+a) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : t \leq x_1 \leq t+a\} \\ \geq \Sigma_-(t+a) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : t \leq x_1 \leq t+a\}. \end{aligned}$$

Consecuentemente,  $[t_1 + a, \Lambda_h[ \subset \mathcal{A}$ . Además, es fácil ver que si  $s \in \mathcal{A}$  entonces  $]s, \Lambda_h[ \subset \mathcal{A}$ . Ahora, supongamos por *contradicción* que  $s_0 = \min(\mathcal{A}) > 0$ . Argumentando como en la Afirmación 1. del Paso 3. del Teorema 5.5, existe un  $\varepsilon_1 \in ]0, \varepsilon_0]$  tal que la superficie  $\Sigma_+(s_0 - \varepsilon_1)$  puede parametrizarse como un grafo sobre  $\Pi(0)$ . Consecuentemente,  $\Sigma_+(t)$  es un grafo sobre  $\Pi(0)$  para todo  $t \geq s_0 - \varepsilon_1$ . Además, para dicho  $\varepsilon_1$  y usando ahora la Afirmación 2. del paso 3. del Teorema 5.5, podemos probar que  $\Sigma_+^*(s_0 - \varepsilon_1) \geq \Sigma_-(s_0 - \varepsilon_1)$  y por lo tanto,  $s_0 - \varepsilon_1 \in \mathcal{A}$  llegando a una contradicción.  $\square$

**Lema 5.15.** *Sea  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función estrictamente creciente y convexa tal que  $e^{-\varphi} \in L^1(]a, +\infty[)$  y  $\Sigma$  una superficie completa, conexa,  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima  $C^\infty$ -asintótica a un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario  $\mathcal{G}^h$  para algún  $h \in ]a, +\infty[$ , fuera de un cilindro. Considera la curva  $\Gamma = \Sigma \cap \Pi(0)$ . Si la función tercera coordena  $x_3|_\Gamma$  de  $\Gamma$  alcanza un extremo global  $\Gamma$ , entonces  $\Sigma$  es un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario.*

*Demostración.* En primer lugar, supongamos que existe un punto  $p \in \Gamma$  tal que  $\tau = \max_\Gamma \{x_3\} = x_3(p)$ . Observamos que,

$$\partial \Sigma_+(0) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \leq \tau\}.$$

Para  $t \in \mathbb{R}$  considera una traslación horizontal de  $\mathcal{G}_+^\tau(0)$  dado por

$$\mathcal{G}_+^{\tau, t}(0) = \{(x_1, x_2, u(x_1 - t)) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in [t, \Lambda_\tau + t]\}$$

donde,  $\Lambda_\tau \leq \Lambda_h$  gracias al Teorema 3.3. Ahora definamos el siguiente conjunto

$$\mathcal{Q} = \{t \in ]-\infty, 0[ : \mathcal{G}_+^{\tau,t}(0) \cap \Sigma_+(0) = \emptyset\}.$$

Trivialmente,  $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ . Por otro lado, si  $t \in \mathcal{Q}$  entonces  $] - \infty, t[ \subset \mathcal{Q}$ . Además, podemos afirmar que

$$t_0 = \sup\{\mathcal{Q}\} = 0.$$

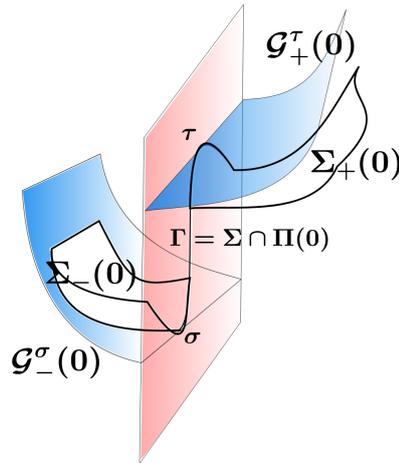
En efecto, argumentémoslo por *contradicción*. Supongamos que  $t_0 < 0$ . Si no pertenece a  $\mathcal{Q}$ , entonces existe un primer punto de contacto ya que, por el Teorema 3.3, las fronteras de ambas superficies no se tocan cuando  $t < 0$ . Aplicando el principio del máximo en el interior 2.5, deducimos que  $\Sigma = \mathcal{G}^{\tau,t_0}$  llegando a contradicción con el comportamiento asintótico de  $\Sigma$ . Consecuentemente, podemos asumir que  $t_0 \in \mathcal{Q}$ . En este caso, ya que la distancia entre las fronteras es positiva y  $\mathcal{G}_+^{\tau,t}(0)$ ,  $\Sigma_+(0)$  tienen diferentes comportamientos asintóticos, existe una sucesión de puntos  $\{p_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, p_{3,n})\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma_+(0)$  tal que  $\{p_{3,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada,  $\{p_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es divergente y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(p_n, \mathcal{G}_+^{\tau,t_0}(0)) = 0.$$

Del Teorema 5.11, tenemos que la sucesión  $\{\Sigma_n = \Sigma - (0, p_{2,n}, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge diferenciablemente, despues de pasar a una sucesión parcial, a una superficie  $\Sigma_\infty$  conexa propiamente embebida  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima con el mismo comportamiento asintótico que  $\Sigma$ . Sin embargo,  $\Sigma_\infty$  y  $\mathcal{G}_+^{\tau,t_0}(0)$  tienen un punto interior de contacto y llegamos de nuevo a contradicción. Consecuentemente, tenemos que  $t_0 = 0$ . Entonces,  $\mathcal{G}_+^{\tau}(0)$  y  $\Sigma_+(0)$  tiene un punto de contacto  $p$  en el borde. Observamos que el plano tangente en  $p$  de ambas superficies es horizontal por el Lema 6.8 y entonces, por el principio del máximo en el borde 2.5, ambas superficies coinciden como queríamos probar. Por otro lado, si existe un  $q \in \Gamma$  tal que  $\sigma = \min_\Gamma \{x_3\} = x_3(q)$ , el mismo razonamiento funciona comparando  $\Sigma_+(0)$  con  $\mathcal{G}_-^{\sigma,-t}(0)$  para  $t \geq 0$ .  $\square$

**Nota 5.16.** Me gustaría decir en este punto que este argumento no funciona cuando  $e^{-\varphi} \notin L^1(]a, +\infty[)$  porque no podemos asegurar la

existencia de un primer punto de contacto debido a que la inclinación del plano asintótico de  $\mathcal{G}^h$ , dado por el Teorema 3.3, medida a partir de cualquier plano horizontal es decreciente con respecto a la condición inicial, esto es, el límite  $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} u'(x_1)$  es decreciente con respecto a  $h$ .



**Figura 5.3:** Comparando  $\mathcal{G}_+^\tau(0)$  y  $\mathcal{G}_-^\sigma(0)$  con  $\Sigma$  en los puntos de  $\Gamma$ .

**Proposición 5.17.** Sea  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un difeomorfismo estrictamente creciente y convexo tal que  $e^{-\varphi} \in L^1(]a, +\infty[)$  y sea  $\Sigma$  una superficie conexa  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima la cual es  $C^\infty$ -asintótica a un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario  $\mathcal{G}^h$  para algún  $h \in ]a, +\infty[$ , fuera de un cilindro. Para cualquier sucesión de puntos  $\{(p_{1,n}, p_{2,n}, p_{3,n})\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\Sigma$  tal que  $\{p_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  diverge y  $\{p_{3,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada, la sucesión  $\{\Sigma_n = \Sigma - (0, p_{2,n}, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge diferenciablemente, después de pasar a una sucesión parcial, a algún cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario con el mismo comportamiento asintótico que  $\mathcal{G}^h$ .

*Demostración.* Pasando a una sucesión parcial, podemos asumir que  $\{p_{3,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es estrictamente monótona convergiendo, o bien, a su supremo o bien, a su ínfimo. Del Teorema 5.11, sabemos que  $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge diferenciablemente a una superficie conexa  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima  $\Sigma_\infty$  propiamente embebida con el mismo comportamiento asintótico que  $\Sigma$ . Teniendo en cuenta la manera con la que hemos construido

dicho limite, tenemos que

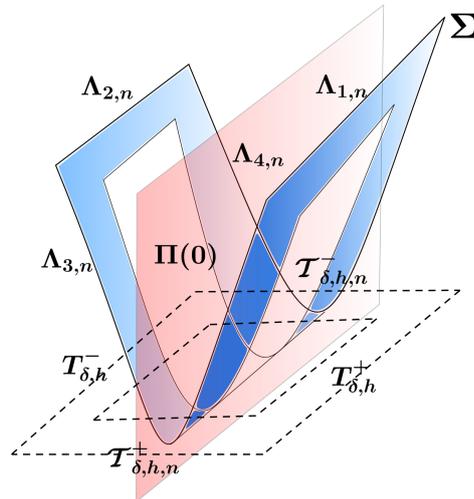
$$\max_{\Pi(0) \cap \Sigma_\infty} \{x_3\} = x_3|_{\Sigma_\infty}((0, 0, p_{3,\infty})) \text{ o,} \tag{5.20}$$

$$\min_{\Pi(0) \cap \Sigma_\infty} \{x_3\} = x_3|_{\Sigma_\infty}((0, 0, p_{3,\infty})). \tag{5.21}$$

Consecuentemente, del Lema 5.15 y (5.20) o (5.21), probamos que  $\Sigma_\infty$  coincide con algún cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario con el mismo comportamiento que  $\mathcal{G}^h$ .  $\square$

Con todos estos preliminares, estamos en condiciones de caracterizar el cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario gracias a su comportamiento asintótico.

**Teorema 5.18.** *Sea  $\varphi : ]a, +\infty[ \rightarrow ]b, c[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  y  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un difeomorfismo estrictamente creciente convexo tal que  $e^{-\varphi} \in L^1(]a, +\infty[)$  y cociente acotado  $\ddot{\varphi}/\dot{\varphi}$ . Si  $\Sigma$  es un grafo completo conexo  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimo  $C^\infty$ -asintótico a un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario  $\mathcal{G}^h$  para algún  $h \in ]a, +\infty[$ , fuera de un cilindro, entonces  $\Sigma$  coincide con un cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario con el mismo comportamiento asintótico que  $\mathcal{G}^h$ .*



**Figura 5.4:** Exhaustión compacta  $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\Sigma$ .

*Demostración.* Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dos sucesiones estrictamente crecientes de números reales positivos. Consideramos una exhaustión compacta  $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  cuya frontera consiste en las siguientes cuatro curvas,

$$\begin{aligned}\Lambda_{1,n} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma : x_1 > 0, -a_n \leq x_2 \leq b_n, x_3 = n\}, \\ \Lambda_{2,n} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma : x_1 < 0, -a_n \leq x_2 \leq b_n, x_3 = n\}, \\ \Lambda_{3,n} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma : x_2 = -a_n, x_3 \leq n\}, \\ \Lambda_{4,n} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma : x_2 = b_n, x_3 \leq n\}.\end{aligned}$$

Del comportamiento asintótico dado por la definición 5.6, fijamos un  $n_1$  suficientemente grande y un  $n \geq n_1$  arbitrario para que dado un  $\varepsilon > 0$  exista un  $\delta > 0$  (dependiendo solo de  $\varepsilon$ ) tal que un entorno de  $\Lambda_{1,n}$  puede parametrizarse como un grafo sobre  $\mathcal{G}_+^h(0)$  por

$$\tilde{F} : T_{\delta,h}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{F} = F + \bar{u} N_F,$$

donde  $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2, u(x_1))$  parametriza  $\mathcal{G}^h$  sobre  $T_{\delta,h}^+$  con  $u$  solución de (3.1),  $\bar{u} : T_{\delta,h}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable tal que

$$\sup_{T_{\delta,h}^+} |\bar{u}| < \varepsilon, \quad \sup_{T_{\delta,h}^+} |D^j \bar{u}| < \varepsilon, \quad \text{for any } j \in \mathbb{N}.$$

y  $N_F$  es el normal unitario de  $\mathcal{G}^h$ . De la ecuación (5.16), podemos escribir

$$\frac{\eta_2}{\eta_3} = \bar{u}_{x_2} \sqrt{1 + u'^2} \left( \frac{1 + \bar{u} \left( \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1+u'^2}} \right)}{1 + \bar{u}_{x_1} \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} + \bar{u} \left( \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1+u'^2}} \right)} \right) \quad \text{on } T_{\delta,h}^+. \quad (5.22)$$

Vamos a examinar el comportamiento de  $\eta_2/\eta_3$  a lo largo de  $\Lambda_{1,n}$ . Como para cualquier  $x_2$  fijo, tenemos que  $\lim_{x_1 \rightarrow \Lambda_h} |\bar{u}| = \lim_{x_1 \rightarrow \Lambda_h} |D\bar{u}| = 0$ , entonces

$$|\bar{u}_{x_2}(x_1, x_2)| = \left| - \int_{x_1}^{\Lambda_h} \bar{u}_{x_1 x_2}(s, x_2) ds \right| \leq (\Lambda_h - x_1) \varepsilon. \quad (5.23)$$

Además, del Teorema 3.3 y la regla de L'Hôpital, los siguiente límites existen

$$\lim_{x_1 \rightarrow \Lambda_h} \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{1 + u'^2}}, \quad \lim_{x_1 \rightarrow \Lambda_h} (\Lambda_h - x_1) \sqrt{1 + u'^2(x_1)}. \quad (5.24)$$

Consecuentemente, de (5.23) y (5.24), existe un  $n_2 \geq n_1$  tal que para cualquier  $n \geq n_2$ , se tiene la siguiente estimación para la función (5.22),

$$\sup_{\Lambda_{1,n}} |\eta_2/\eta_3| < \varepsilon. \quad (5.25)$$

Además, de la simetría dada por el Lema 5.14, la desigualdad anterior (5.25) también funciona en un entorno de  $\Lambda_{2,n}$ . Por otro lado, de la Proposición 5.17, podemos argumentar de forma análoga para las curvas  $\Lambda_{3,n}$  y  $\Lambda_{4,n}$  pues ambas curvas son  $\mathcal{C}^\infty$ -asintóticas a algún  $\mathcal{G}^{h'}$  con el mismo comportamiento asintótico que  $\mathcal{G}^h$ , esto es,  $\Lambda_{h'} = \Lambda_h$ . Consecuentemente, de la definición de convergencia (4.8), existe  $n_3 \geq n_2$  tal que para cualquier  $n \geq n_3$ , un entorno de  $\Lambda_{3,n}$  puede parametrizarse como un grafo sobre  $\mathcal{G}^{h'}$  por

$$\tilde{F}_n : \mathcal{T}_{\delta,h,n}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \tilde{F}_n = F + \bar{u}_n N_F,$$

donde  $\mathcal{T}_{\delta,h,n}^+ = ] - \Lambda_{h'} + \delta, \Lambda_{h'} - \delta[ \times ] m_{1,n}, m_{2,n}[$ ,  $\delta > 0$  solo depende de  $n_3$ ,  $\{m_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{m_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones estrictamente monótonas con  $m_{1,n} < m_{2,n}$  y cada  $\bar{u}_n : \mathcal{T}_{\delta,h,n}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable satisfaciendo las siguientes desigualdades

$$\sup_{\mathcal{T}_{\delta,h,n}^+} |\bar{u}_n| < \varepsilon, \quad \sup_{\mathcal{T}_{\delta,h,n}^+} |D^j \bar{u}_n| < \varepsilon, \quad \text{for any } j \in \mathbb{N}.$$

Nótese que en este caso,  $x_1$  no tiende a  $\pm \Lambda_h$  y por el Teorema 3.3,  $u'$  está acotada. Consecuentemente, el mismo argumento anterior funciona puesto que los límites (5.24) existen para cualquier sucesión de puntos divergente. Por lo tanto, la desigualdad (5.25) es cierta en  $\Lambda_{3,n}$ . Análogamente, tomando  $n_4 \geq n_3$  suficientemente grande y parametrizando un entorno de  $\Lambda_{4,n}$  como un grafo sobre  $\mathcal{G}^{h'}$  por  $\bar{v}_n : \mathcal{T}_{\delta,h,n}^- = ] - \Lambda_{h'} + \delta, \Lambda_{h'} - \delta[ \times ] - m_{2,n}, -m_{1,n}[ \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$\sup_{\mathcal{T}_{\delta,h,n}^-} |\bar{v}_n| < \varepsilon, \quad \sup_{\mathcal{T}_{\delta,h,n}^-} |D^j \bar{v}_n| < \varepsilon \quad \text{para cualquier } j \in \mathbb{N},$$

la desigualdad (5.25) también es cierta en  $\Lambda_{4,n}$ . Por lo tanto, la función  $\eta_2/\eta_3$  tiende a cero cuando  $p \rightarrow \infty$ . En particular, existe un punto interior donde la función  $\eta_2/\eta_3$  alcanza o un máximo local en  $\{\eta_2 > 0\}$  o bien un mínimo local en  $\{\eta_2 < 0\}$ . Del Corolario 2.21 y la convexidad de  $\varphi$ , deducimos que  $\eta_2 \equiv 0$  y por lo tanto,  $\Sigma$  es invariante bajo translaciones en la dirección de  $\vec{e}_2$  como queríamos demostrar.  $\square$

**Nota 5.19.** Nótese que si  $\Lambda_\lambda$  es estrictamente creciente con respecto a la condición inicial  $\lambda$ , entonces podemos asegurar que  $\Sigma$  coincide con  $\mathcal{G}^h$ . En efecto, en la última parte de la demostración, si  $\eta_2$  se anula en todo punto, entonces  $\Sigma = \mathcal{G}^{\tilde{h}}$  con  $\Lambda_{\tilde{h}} = \Lambda_h$  debido al comportamiento asintótico. Por lo tanto, si la función  $\Lambda_\lambda \rightarrow \lambda$  es inyectiva, entonces  $h = \tilde{h}$  y por la unicidad del problema (3.1)-(3.3), probamos que  $\Sigma = \mathcal{G}^h$ .

**Nota 5.20.** Como una consecuencia directa de la demostración, podemos cambiar las hipótesis de ser grafo en el Teorema 5.18 por las siguientes condiciones. Supongamos que  $\varphi$  es un difeomorfismo estrictamente creciente convexo con un crecimiento a lo sumo cuadrático y tal que  $\ddot{\varphi} \leq 0$ . Asumimos que  $\Sigma$  es una superficie conexa completa  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima propiamente embebida,  $H$ -convexa con género localmente acotado, curvatura de Gauss acotada inferiormente y  $\mathcal{C}^\infty$ -asintótica a  $\mathcal{G}^h$ , fuera de un cilindro. De los Teoremas 4.7 y 4.22, tenemos que  $\Sigma$  tiene area uniformemente acotada en conjuntos compactos y  $K \geq 0$ . Si probamos que  $\eta_2 \equiv 0$ , entonces existe un punto donde la curvatura de Gauss se anula. Así, de los Teoremas 2.23 y 3.7,  $\Sigma$  debe de coincidir con algún cilindro  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenario.



# Capítulo 6

## Una correspondencia de tipo Calabi

*E. Calabi probó en [9] que, localmente, existe una correspondencia biyectiva entre grafos mínimos en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^3$  y grafos espaciales en el espacio de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$ ; la cual se ha aplicado de forma exitosa para obtener nuevos ejemplos de superficies o para estudiar propiedades geométricas y topológicas de estas familias de superficies. En este último capítulo, presentamos una extensión de esta correspondencia entre grafos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos en  $\mathbb{R}^3$  y grafos espaciales  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -máximos en  $\mathbb{L}^3$ , usando la metodología descrita en [9]. Finalmente, aplicaremos dicha correspondencia para describir nuevos ejemplos de superficies a partir de propiedades geométricas ya conocidas. Esta correspondencia de tipo Calabi puede encontrarse en [54].*

### 6.1. Ecuación de los grafos $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos.

Sea  $u : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable sobre un dominio simplemente conexo  $\Omega_1$  y consideramos  $\psi(x, y) = (x, y, u(x, y))$  su grafo. Entonces, la métrica inducida  $g$ , la aplicación de Gauss  $N$  y el vector curvatura media  $\mathbf{H}$  de  $\psi$  vienen dados por

$$g = (1 + u_x^2)dx^2 + (1 + u_y^2)dy^2 + 2u_x u_y dx dy, \quad (6.1)$$

$$N = \frac{1}{W}(-u_x, -u_y, 1), \quad W = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{W^3} \mathcal{L}u N, \quad (6.3)$$

donde

$$\mathcal{L}u = (1 + u_x^2)u_{yy} + (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy}.$$

De la ecuación (1.8), sabemos que  $\psi$  es un grafo  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimo si y sólo si  $u$  es solución de la siguiente ecuación diferencial de tipo elíptico

$$(1 + u_x^2)u_{yy} + (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} = \dot{\varphi}(u)W^2. \quad (6.4)$$

Usando (6.4), se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 + u_y^2}{W} e^{\varphi(u)} \right)_x - \left( \frac{u_x u_y}{W} e^{\varphi(u)} \right)_y &= -\frac{u_x e^{\varphi(u)} \mathcal{L}u}{W^3} + \frac{u_x e^{\varphi(u)} \dot{\varphi}(u)}{W} = 0, \\ \left( \frac{1 + u_x^2}{W} e^{\varphi(u)} \right)_y - \left( \frac{u_x u_y}{W} e^{\varphi(u)} \right)_x &= -\frac{u_y e^{\varphi(u)} \mathcal{L}u}{W^3} + \frac{u_y e^{\varphi(u)} \dot{\varphi}(u)}{W} = 0. \end{aligned}$$

Consecuentemente, aplicando el Lema de Poincaré, la ecuación (6.4) es equivalente a la integrabilidad del siguiente sistema

$$\phi_{xx} = \frac{1 + u_x^2}{W} e^{\varphi(u)}, \quad \phi_{xy} = \frac{u_x u_y}{W} e^{\varphi(u)}, \quad \phi_{yy} = \frac{1 + u_y^2}{W} e^{\varphi(u)}, \quad (6.5)$$

para una función convexa  $\phi : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$  (única módulo polinomios lineales).

De la ecuaciones (6.1) y (6.4), el operador de Laplace-Beltrami  $\Delta_g$  de  $g$  está dado por

$$W^2 \Delta_g = (1 + u_x^2) \partial_{yy}^2 + (1 + u_y^2) \partial_{xx}^2 - 2u_x u_y \partial_{xy}^2 - \dot{\varphi}(u)(u_x \partial_x + u_y \partial_y), \quad (6.6)$$

y por lo tanto, se puede deducir las siguientes ecuaciones

$$\Delta_g \psi = (\overline{\nabla} \varphi)^\perp = \langle N, \vec{e}_3 \rangle \dot{\varphi}(u) N, \quad (6.7)$$

$$\Delta_g \phi_x = \frac{e^{\varphi(u)} \dot{\varphi}(u)}{W} u_x = \langle N, \vec{e}_3 \rangle e^{\varphi(u)} \dot{\varphi}(u) u_x, \quad (6.8)$$

$$\Delta_g \phi_y = \frac{e^{\varphi(u)} \dot{\varphi}(u)}{W} u_y = \langle N, \vec{e}_3 \rangle e^{\varphi(u)} \dot{\varphi}(u) u_y, \quad (6.9)$$

$$\Delta_g \left( \int e^{\varphi(u)} du \right) = e^{\varphi(u)} \dot{\varphi}(u) = \langle N, \vec{e}_3 \rangle e^{\varphi(u)} \dot{\varphi}(u) W. \quad (6.10)$$

## 6.2. La ecuación de las superficies $\varphi$ -maximales.

Sea  $\mathbb{L}^3$  el espacio de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}^3$  con la métrica

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = dx^2 + dy^2 - dz^2. \quad (6.11)$$

Una superficie en  $\mathbb{L}^3$  se denomina espacial si la métrica inducida sobre la superficie es una métrica Riemanniana definida positiva. Una superficie espacial  $\tilde{\Sigma}$  en  $\mathbb{L}^3$  es  $\varphi$ -*maximal* si su vector curvatura media  $\tilde{\mathbf{H}}$  satisface

$$\tilde{\mathbf{H}} = \left( \overline{\nabla}^{\mathbb{L}^3} \varphi \right)^\perp, \quad (6.12)$$

donde  $\overline{\nabla}^{\mathbb{L}^3}$  denota al operador gradiente en  $\mathbb{L}^3$  y  $\varphi$  es una función diferenciable sobre un dominio de  $\mathbb{L}^3$  conteniendo  $\tilde{\Sigma}$ .

Como en el caso Euclídeo, una superficie espacial  $\varphi$ -máximal puede verse, o bien, como un punto crítico bajo variaciones normales de soporte compacto del siguiente funcional de área con peso

$$\tilde{V}_\varphi(\tilde{\Sigma}) := \int_{\tilde{\Sigma}} e^\varphi d\tilde{\Sigma}, \quad (6.13)$$

donde  $d\tilde{\Sigma}$  es el elemento de volumen inducido por la métrica  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ ; o bien, como una superficie máxima espacial con el siguiente cambio conforme de métrica

$$\tilde{G}_\varphi := e^\varphi \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle. \quad (6.14)$$

**Definición 6.1.** Si  $\varphi$  solo depende de la tercera coordenada, cualquier superficie espacial con vector curvatura media satisfaciendo (6.12) se denominará  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -máximal.

**Nota 6.2.** Ejemplos conocidos de superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -máximas son las clásicas superficies máximas y los solitones de traslación espaciales en  $\mathbb{L}^3$ , ver por ejemplo [10, 19]. En analogía con el caso Euclídeo, una superficie espacial  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -máximal con  $\varphi(p) = \alpha \log \langle p, \vec{e}_3 \rangle$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$  se denominará superficie  $\alpha$ -*maximal singular*.

Si  $\Omega_{-1}$  es un dominio plano simplemente conexo, no es difícil probar que un grafo vertical en  $\mathbb{L}^3$  de una función  $\bar{u} : \Omega_{-1} \rightarrow \mathbb{R}$  es una superficie espacial  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -máxima si y sólo si  $\bar{u}$  es solución de la siguiente ecuación diferencial elíptica

$$(1 - \bar{u}_x^2)\bar{u}_{yy} + (1 - \bar{u}_y^2)\bar{u}_{xx} + 2\bar{u}_x\bar{u}_y\bar{u}_{xy} + \dot{\varphi}(\bar{u})\bar{W}^2 = 0, \quad (6.15)$$

donde  $\bar{W} = \sqrt{1 - \bar{u}_x^2 - \bar{u}_y^2}$ . De las ecuaciones (6.11) y (6.15), el operador de Laplace-Beltrami  $\Delta_{\bar{g}}$  de la métrica inducida  $\bar{g}$  viene dado por

$$\bar{W}^2 \Delta_{\bar{g}} = (1 - \bar{u}_x^2)\partial_{yy}^2 + (1 - \bar{u}_y^2)\partial_{xx}^2 + 2\bar{u}_x\bar{u}_y\partial_{xy}^2 - \dot{\varphi}(\bar{u})(\bar{u}_x\partial_x + \bar{u}_y\partial_y), \quad (6.16)$$

y la ecuación (6.15) es equivalente a la integrabilidad del siguiente sistema

$$\bar{\phi}_{xx} = \frac{1 - \bar{u}_x^2}{\bar{W}} e^{\varphi(\bar{u})}, \quad \bar{\phi}_{xy} = -\frac{\bar{u}_x\bar{u}_y}{\bar{W}} e^{\varphi(\bar{u})}, \quad \bar{\phi}_{yy} = \frac{1 - \bar{u}_y^2}{\bar{W}} e^{\varphi(\bar{u})} \quad (6.17)$$

para una función convexa  $\bar{\phi} : \Omega_{-1} \rightarrow \mathbb{R}$  (única módulo polinomios lineales).

### 6.3. La correspondencia.

E. Calabi en [9], observó que existe una correspondencia natural entre las soluciones de la ecuación de las superficies mínimas en  $\mathbb{R}^3$  con las superficies espaciales maximales en  $\mathbb{L}^3$ .

Vamos a demostrar como se puede extender esta correspondencia a la familia de grafos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos de  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 6.3.** *Sea  $\Omega_1$  un dominio plano simplemente conexo,  $\psi : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\psi(x, y) = (x, y, u)$  un grafo  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimo en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\phi$  una solución del sistema (6.5) y  $\vartheta$  una función primitiva de  $e^\varphi$  (es decir,  $\dot{\vartheta} = e^\varphi$ ). Entonces  $\tilde{\psi} : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{L}^3$  dada por*

$$\tilde{\psi} = (\phi_x, \phi_y, \vartheta(u)), \quad (6.18)$$

es un grafo espacial  $[-\varphi \circ \vartheta^{-1}, \vec{e}_3]$ -máximal en el espacio de Lorentz-Minkowski cuya aplicación de Gauss  $\tilde{N}$  viene dada por

$$\tilde{N} = (u_x, u_y, W), \quad (6.19)$$

Las métricas inducidas  $g$  y  $\tilde{g}$  de  $\psi$  y  $\tilde{\psi}$ , respectivamente, son conformes y la curvatura media  $H$  ( $\tilde{H}$ ) junto con la curvatura de Gauss  $K$  ( $\tilde{K}$ ) de  $\psi$  ( $\tilde{\psi}$ ) satisfacen

$$\tilde{H} + W^2 e^{-\varphi(u)} H = 0, \quad (6.20)$$

$$\tilde{K} + W^4 e^{-2\varphi(u)} K = 0. \quad (6.21)$$

*Demostración.* De las ecuaciones (6.5), (6.18) y (6.19), tenemos que

$$\langle\langle \tilde{\psi}_x, \tilde{N} \rangle\rangle = \langle\langle \tilde{\psi}_y, \tilde{N} \rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle\rangle = -1, \quad (6.22)$$

$$\tilde{g} = \langle\langle d\tilde{\psi}, d\tilde{\psi} \rangle\rangle = (d\phi_x)^2 + (d\phi_y)^2 - (d\vartheta)^2 = \frac{e^{2\varphi(u)}}{W^2} g. \quad (6.23)$$

Entonces,  $\tilde{\psi}$  es un grafo espacial con aplicación de Gauss  $\tilde{N}$ . Como las métricas  $\tilde{g}$  y  $g$  son conformes, de (6.8), (6.9), (6.19) y (6.23), deducimos que

$$\tilde{\mathbf{H}} = \Delta_{\tilde{g}} \tilde{\psi} = -\frac{W\dot{\varphi}(u)}{e^{\varphi(u)}} \tilde{N} = -\frac{d\varphi}{d\vartheta} W \tilde{N} = \left( -\nabla^{\mathbb{L}^3} \varphi \circ \vartheta^{-1} \right)^\perp.$$

Consecuentemente,  $\tilde{\psi}$  es una superficie  $[-\varphi \circ \vartheta^{-1}, \vec{e}_3]$ -máximal.

Finalmente, de (6.5) y (6.19), obtenemos que

$$\langle\langle \tilde{\psi}_x, \tilde{N}_x \rangle\rangle = \frac{e^{\varphi(u)}}{W} u_{xx} = -e^{\varphi(u)} \langle\psi_x, N_x\rangle, \quad (6.24)$$

$$\langle\langle \tilde{\psi}_x, \tilde{N}_y \rangle\rangle = \frac{e^{\varphi(u)}}{W} u_{xy} = -e^{\varphi(u)} \langle\psi_x, N_y\rangle, \quad (6.25)$$

$$\langle\langle \tilde{\psi}_y, \tilde{N}_y \rangle\rangle = \frac{e^{\varphi(u)}}{W} u_{yy} = -e^{\varphi(u)} \langle\psi_y, N_y\rangle. \quad (6.26)$$

y por lo tanto los operadores forma  $A$  ( $\tilde{A}$ ) de  $\psi$  ( $\tilde{\psi}$ ) están relaciones por

$$\tilde{A} + e^{-\varphi(u)} W^2 A = 0, \quad (6.27)$$

lo cual, junto con (6.23) probamos las ecuaciones (6.20) y (6.21).  $\square$

**Nota 6.4.** Obsérvese que  $\tilde{\psi}$  es un grafo sobre un dominio  $\Omega_{-1}$  resultado de aplicar la transformada de Legendre de  $\phi$ , ver [24, Capítulo 3].

**Nota 6.5.** La correspondencia (6.18) puede darse globalmente como sigue

$$\tilde{\psi} = \int e^{\varphi(\langle \psi, \vec{e}_3 \rangle)} (\vec{e}_3 \wedge (d\psi \wedge N) + \langle d\psi, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3), \quad (6.28)$$

donde  $\wedge$  denota al producto vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . Además, las singularidades de  $\tilde{\psi}$  se dan en los puntos donde la función  $\langle \vec{e}_3, N \rangle$  se anula.

Argumentando como en el Teorema 6.3, podemos probar la correspondencia recíproca.

**Teorema 6.6.** Sea  $\Omega_{-1}$  un dominio plano simplemente conexo,  $\tilde{\psi} : \Omega_{-1} \rightarrow \mathbb{L}^3$ ,  $\tilde{\psi}(x, y) = (x, y, \bar{u})$  un grafo espacial  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximal en  $\mathbb{L}^3$ ,  $\bar{\phi}$  solución del sistema (6.17) y  $\vartheta$  una función primitiva de  $e^\varphi$ . Entonces la inmersión dada por

$$\psi = (\bar{\phi}_x, \bar{\phi}_y, \vartheta(\bar{u})), \quad (6.29)$$

es un grafo  $[-\varphi \circ \vartheta^{-1}, \vec{e}_3]$ -mínimo en  $\mathbb{R}^3$  sobre la transformada de Legendre de  $\bar{\phi}$ , cuya métrica inducida, curvatura media  $H$  y curvatura de Gauss  $K$  satisfacen

$$g = \frac{e^{2\varphi(\bar{u})}}{\bar{W}^2} \bar{g}, \quad (6.30)$$

$$H + e^{-\varphi(\bar{u})} \bar{W}^2 \bar{H} = 0, \quad (6.31)$$

$$K + e^{-2\varphi(\bar{u})} \bar{W}^4 \bar{K} = 0, \quad (6.32)$$

donde  $\bar{W} = \sqrt{1 - \bar{u}_x^2 - \bar{u}_y^2}$  y  $\bar{g}$ ,  $\bar{H}$  y  $\bar{K}$  son la métrica inducida, la curvatura media y la curvatura de Gauss del grafo espacial  $\bar{u}$ .

**Nota 6.7.** La correspondencia (6.29) también puede darse global-

mente por

$$\psi = \int e^{\varphi(\langle\langle\tilde{\psi}, \vec{e}_3\rangle\rangle)} \left( \vec{e}_3 \wedge_{\mathbb{L}^3} (d\tilde{\psi} \wedge_{\mathbb{L}^3} \overline{N}) - \langle\langle d\tilde{\psi}, \vec{e}_3 \rangle\rangle \vec{e}_3 \right), \quad (6.33)$$

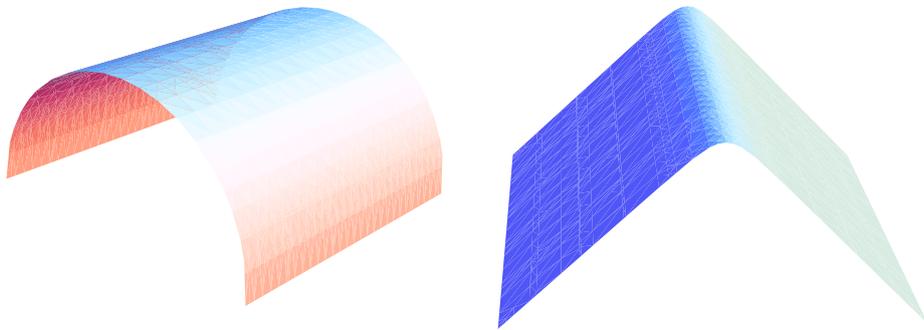
donde  $\wedge_{\mathbb{L}^3}$  denota al producto vectorial de  $\mathbb{L}^3$  y  $\overline{N}$  es la aplicación de Gauss de  $\tilde{\psi}$ . Los puntos singulares de  $\psi$  coinciden con los puntos donde la función  $\langle\langle \vec{e}_3, \overline{N} \rangle\rangle$  se anula.

**Definición 6.8.** Si  $\psi$  y  $\tilde{\psi}$  están relacionados como en (6.28) o bien, como en (6.33) diremos que  $(\psi, \tilde{\psi})$  es un par de Calabi.

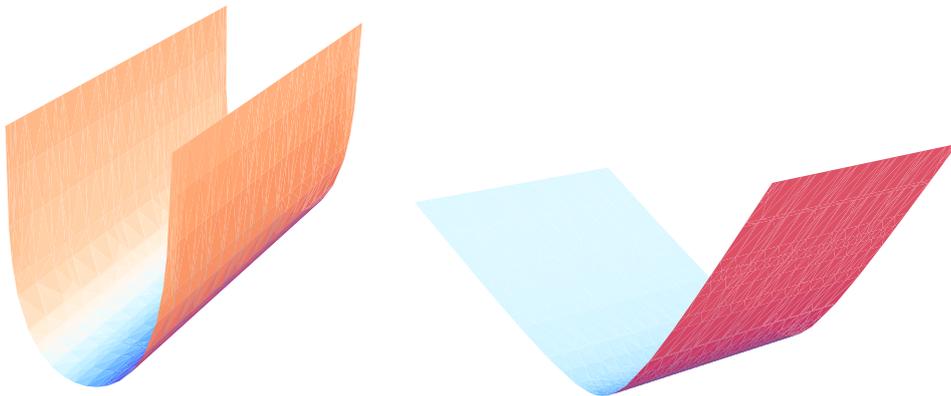
**Corolario 6.9.** Sea  $(\psi, \tilde{\psi})$  un par de Calabi.

- Si  $\tilde{\psi}$  es un solitón de traslación de  $\mathbb{L}^3$  entonces  $\psi$  es una superficie  $(-1)$ -minimal singular en  $\mathbb{R}^3$ , ver figura 6.1.
- Si  $\psi$  es un solitón de traslación de  $\mathbb{R}^3$  entonces  $\tilde{\psi}$  es una superficie espacial  $(-1)$ -maximal singular en  $\mathbb{L}^3$ , ver figura 6.2.

**Nota 6.10.** Observa que si una de las superficies en el par de Calabi es convexa (respectivamente, llana), entonces ambas son convexas (respectivamente, llanas).



**Figura 6.1:**  $(-1)$ -minimal singular en  $\mathbb{R}^3$  y su correspondiente solitón de traslación en  $\mathbb{L}^3$ .



**Figura 6.2:** Solitón de traslación en  $\mathbb{R}^3$  y su correspondiente superficie  $(-1)$ -maximal singular en  $\mathbb{L}^3$ .

#### 6.4. Aplicaciones.

En esta sección demostramos algunas aplicaciones para el estudio y descripción de nuevos ejemplos.

### 6.4.1. La simetría radial se preserva.

Las ecuaciones (6.4) y (6.15) tienen soluciones radialmente simétricas  $u(r)$  y  $\bar{u}(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , respectivamente, si y sólo si dichas funciones satisfacen, respectivamente, las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{u''}{1 + u'^2} = \dot{\varphi}(u) - \frac{u'}{r}, \quad (6.34)$$

$$\frac{\bar{u}''}{1 - \bar{u}'^2} = -\dot{\varphi}(\bar{u}) - \frac{\bar{u}'}{r}. \quad (6.35)$$

De estas ecuaciones deducimos que

$$\left( \frac{e^{\varphi(u)} r}{\sqrt{1 + u'^2}} \right)' = e^{\varphi(u)} \sqrt{1 + u'^2}, \quad (6.36)$$

$$\left( \frac{e^{\varphi(\bar{u})} r}{\sqrt{1 - \bar{u}'^2}} \right)' = e^{\varphi(\bar{u})} \sqrt{1 - \bar{u}'^2}. \quad (6.37)$$

Consecuentemente, si consideramos  $\phi$  y  $\bar{\phi}$  dos funciones radiales

$$\phi = \int e^{\varphi(u)} r \cos(z) dr, \quad \bar{\phi} = \int e^{\varphi(\bar{u})} r \cosh(z) dr \quad (6.38)$$

donde

$$u'(r) = \tan z, \quad \bar{u}'(r) = \tanh z,$$

tenemos que

$$\phi'' = \frac{e^{\varphi(u)}}{\cos(z)}, \quad \bar{\phi}'' = \frac{e^{\varphi(\bar{u})}}{\cosh(z)}. \quad (6.39)$$

De las ecuaciones (6.38), (6.39), podemos probar que  $\phi$  y  $\bar{\phi}$  son, respectivamente, soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (6.5) y (6.17). Entonces, por los Teoremas 6.3 y 6.6, deducimos el siguiente resultado.

#### Proposición 6.11.

- Sea  $\psi := (r \cos t, r \sin t, u(r))$  una superficie de revolución  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínima en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, la superficie espacial correspondiente

$[-\varphi \circ \vartheta^{-1}, \vec{e}_3]$ -maximal en (6.18) es una superficie rotacional de tipo elíptico dada por

$$\tilde{\psi} = \left( \dot{\vartheta}(u) r \cos(z) \cos t, \dot{\vartheta}(u) r \cos(z) \sin t, \vartheta(u) \right),$$

- Sea  $\tilde{\psi} := (r \cos t, r \sin t, \bar{u}(r))$  una superficie de revolución espacial  $[\bar{\varphi}, \vec{e}_3]$ -maximal de tipo elíptico en  $\mathbb{L}^3$ . Entonces, la superficie correspondiente  $[-\varphi \circ \vartheta^{-1}, \vec{e}_3]$ -mínima en (6.29) es una superficie rotacional dada por,

$$\psi = \left( \dot{\vartheta}(\bar{u}) r \cosh(z) \cos t, \dot{\vartheta}(\bar{u}) r \cosh(z) \sin t, \vartheta(\bar{u}) \right),$$

donde

$$u'(r) = \tan z \quad \text{y} \quad \bar{u}'(r) = \tanh z.$$

#### 6.4.2. Solitones y $\alpha$ -maximales singulares con $\alpha > 1$ .

El comportamiento de una superficie rotacional  $\beta$ -minimal singular  $\psi$  en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\beta \leq 1$ , fue descrito en [45, Teorema 8]. De hecho, si

$$\gamma(s) = (x(s), 0, u(s)), \quad s \in [0, L],$$

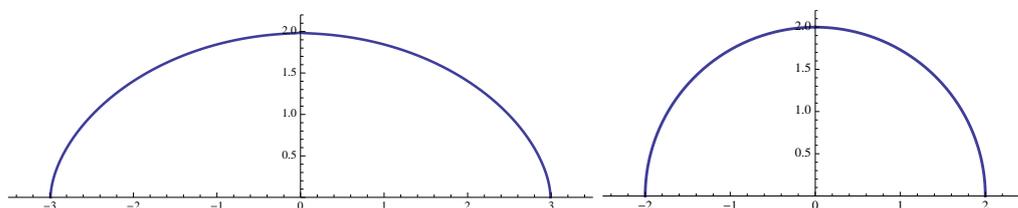
es la curva generatriz de  $\psi$  parametrizada por el arco, entonces solo existen dos posibilidades, a saber

CASO I:  $\gamma$  INTERSECA AL EJE DE ROTACIÓN.

En este caso, a pesar de que la ecuación diferencial ordinaria asociada al problema tiene una singularidad en  $x = 0$ , ver (6.34), la curva  $\gamma$  es el grafo de una función  $u(x)$  simétrica y cóncava,  $u \in \mathcal{C}^2(\cdot - R, R)$  e interseca ortogonalmente al eje de rotación y al eje  $OX$ , ver Figura 6.3. En particular,

**(a)**  $u(0) = u(L) = 0, x(0) = -R, x(L) = R, x'(0) = x'(L) = 0.$

**(b)**  $x(L/2) = 0, u(L/2) > 0, u'(L/2) = 0.$

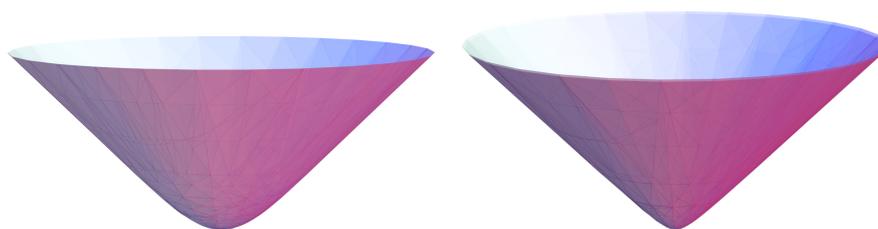


**Figura 6.3:** Curva generatriz de  $\gamma$  para  $\beta = -1$  y  $\beta = -2$ .

**Teorema 6.12.**[Existencia de Boles espaciales  $\alpha$ -maximales singulares de tipo elíptico]

- (i) Existe un grafo entero rotacionalmente simétrico espacial solitón de traslación estrictamente convexo y con crecimiento lineal, ver Figura 6.4 izquierda, (ver [19, 38] para una prueba basada en teoría de EDOs).
- (ii) Para cualquier  $\alpha > 1$ , existe un grafo entero rotacionalmente simétrico espacial  $\alpha$ -maximal singular estrictamente convexo y con un crecimiento lineal (único salvo homotecia), ver Figura 6.4 derecha.

Estos ejemplos serán denominados Boles  $\alpha$ -maximales singulares de tipo elíptico.



**Figura 6.4:** Boles solitón de traslación y 2-maximal singular de tipo elíptico en  $\mathbb{L}^3$ .

*Demostración.* Como  $\gamma$  es la curva generatriz de  $\psi$ , de las ecuaciones

(6.34), (6.38) y (6.39), tenemos que

$$x'(s) = \cos z(s) \quad u'(s) = \sin z(s), \quad (6.40)$$

$$z'(s) = \frac{\beta \cos z(s)}{u(s)} - \frac{\sin z(s)}{x(s)}, \quad (6.41)$$

De la Proposición 6.11, la curva  $\tilde{\gamma} = (\lambda, 0, \vartheta(u))$  con

$$\lambda = u^\beta x \cos z, \quad \frac{d\vartheta}{du} = \dot{\vartheta}(u) = u^\beta, \quad (6.42)$$

es la curva generatriz de, o bien, una superficie espacial rotacionalmente simétrica  $\frac{\beta}{\beta+1}$ -maximal singular de tipo elíptico con  $\beta < -1$ , u o bien, de un solitón de traslación con  $\beta = -1$  en  $\mathbb{L}^3$ ,  $\tilde{\psi}$  dado por

$$\tilde{\psi} = (\lambda \cos(t), \lambda \sin(t), \vartheta(u)).$$

De (a), (b), (6.36), (6.40), (6.41) y (6.42) se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow 0, L} \frac{d\lambda}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0, L} u^\beta = \infty, \quad \lim_{s \rightarrow 0, L} \frac{d\vartheta}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0, L} u^\beta \sin z = -\infty$$

Consecuentemente,  $\lambda(s)$  crece en  $]0, L[$  desde  $-\infty$  hasta  $\infty$  y

$$\lim_{s \rightarrow 0, L} \vartheta(s) = -\infty.$$

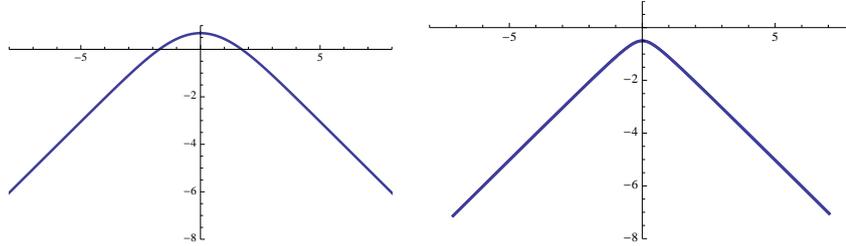
Además

$$\lim_{s \rightarrow L/2} \lambda(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow L/2} \vartheta = \frac{u(L/2)^{\beta+1}}{\beta+1}, \quad (= \log u(L/2)) \quad \text{if } \beta < -1 \quad (\beta = -1).$$

Finalmente, de (6.40), (6.41) y (6.42) obtenemos que

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \sin z, \quad \frac{d^2\vartheta}{d\lambda^2} = \frac{\beta \cos^2 z}{u^{\beta+1}} - \frac{\sin 2z}{2xu^\beta} \leq 0. \quad (6.43)$$

Entonces,  $\vartheta$  es una función de  $\lambda$  satisfaciendo que  $\vartheta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ , cóncava, tiene un máximo en el origen y tiene un crecimiento lineal, ver Figura 6.5. El Bol  $\alpha$ -maximal singular convexo con  $\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}$  que buscamos se obtiene por la reflexión con respecto al plano  $z = 0$  de  $\tilde{\psi}$ . Por otro lado, la unicidad es una consecuencia del principio



**Figura 6.5:** Curva generatriz  $\tilde{\gamma}$  para  $\beta = -1$  y  $\beta = -2$ .

del máximo 2.5 para superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas y grafos espaciales  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximales, teniendo en cuenta que las traslaciones verticales de un solitón de traslación es otro solitón de traslación en el espacio Euclídeo y que las homotecias Euclídeas con centro el origen lleva una superficie espacial  $\alpha$ -maximal singular en otra superficie espacial  $\alpha$ -maximal singular.  $\square$

Si consideramos  $f(\bar{u}) = 1$  ó  $f(\bar{u}) = \alpha/\bar{u}$ , para algún  $\alpha > 1$ . Entonces, obtenemos el siguiente resultado consecuencia del anterior Teorema

**Corolario 6.13.** *Para cada número real positivo  $a$ , el problema de valores iniciales*

$$\frac{\bar{u}''}{1 - \bar{u}'^2} = f(\bar{u}) - \frac{\bar{u}'}{r}, \quad r \in ]0, \infty[, \quad (6.44)$$

$$\bar{u}(0) = a > 0, \quad \bar{u}'(0) = 0. \quad (6.45)$$

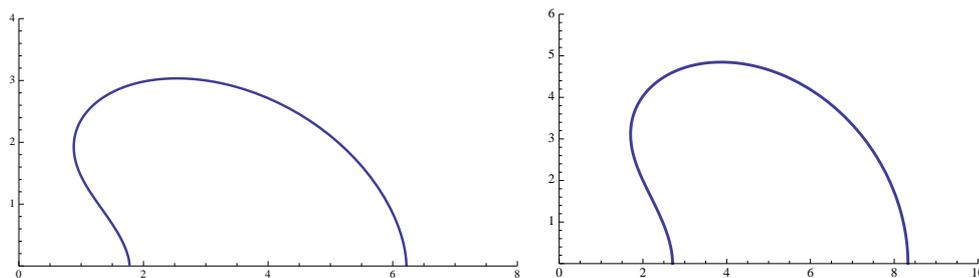
*tiene una única solución  $\bar{u} \in \mathcal{C}^2[0, \infty[$  convexa y tal que*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{u}' = 1.$$

CASE II:  $\gamma$  NO INTERSECA AL EJE DE ROTACIÓN.

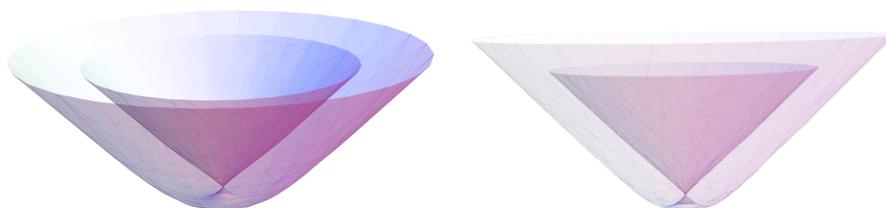
En este caso,  $\gamma$  es embebida, tiene una forma de ala e interseca ortogonalmente al eje  $OX$  exactamente en dos puntos, ver Figura 6.6, esto es

- (c)  $u(0) = u(L) = 0$ ,  $x'(0) = x'(L) = 0$ .
- (d) Existe  $s_1 \in ]0, L[$ , tal que  $x'(s_1) = 0$ ,  $u(s_1) > 0$  y  $u$  es cóncava en  $[s_1, L]$ .



**Figura 6.6:** Curvas generatrices  $\gamma$  para  $\beta = -1$  y  $\beta = -1,5$ .

**Teorema 6.14.** [Existencia de superficies singulares espaciales  $\alpha$ -maximales de tipo catenoide] Para cualquier  $\alpha > 1$ , existen, salvo homotecia (traslación), dos grafos espaciales  $\alpha$ -maximales singulares (solitones de traslación) en  $\mathbb{L}^3$  con crecimiento lineal, una singularidad aislada en el origen y asintóticos al cono de luz.



**Figura 6.7:** Superficies de tipo catenoide solitón de traslación (izquierda) y 3-maximal singular (derecha) en  $\mathbb{L}^3$ .

*Demostración.* Como en la demostración del Teorema 6.12, la curva  $\tilde{\gamma} = (\lambda, 0, \vartheta(u))$  con

$$\lambda = u^\beta x \cos z, \quad \dot{\vartheta}(u) = u^\beta, \quad (6.46)$$

es la curva generatriz de una superficie espacial  $\frac{\beta}{\beta+1}$ -maximal de revolución de tipo elíptico (respectivamente, solitón de traslación) con  $\beta < -1$  (respectivamente, con  $\beta = -1$ ) en  $\mathbb{L}^3$ ,  $\tilde{\psi}$  dado por

$$\tilde{\psi} = (\lambda \cos(t), \lambda \sin(t), \vartheta(u)),$$

la cuál verifica

$$\frac{d\lambda}{ds} = u^\beta, \quad \frac{d\vartheta}{ds} = u^\beta \sin z$$

Consecuentemente,  $\lim_{s \rightarrow 0, L} \frac{d\lambda}{ds} = \infty$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0, L} \frac{d\vartheta}{ds} = -\infty$  y  $\lambda(s)$  crece en  $]0, L[$  desde  $-\infty$  hasta  $\infty$  y  $\lim_{s \rightarrow 0, L} \vartheta(s) = -\infty$ . Por otro lado

$$\lim_{s \rightarrow s_1} \lambda(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow s_1} \vartheta = \frac{u(s_1)^{\beta+1}}{\beta+1}, \quad (= \log u(s_1)) \quad \text{si } \beta < -1 \quad (\beta = 1).$$

y

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \sin z \quad \frac{d^2\vartheta}{d\lambda^2} = \frac{\beta \cos^2 z}{u^{\beta+1}} - \frac{\sin 2z}{2xu^\beta}.$$

Finalmente

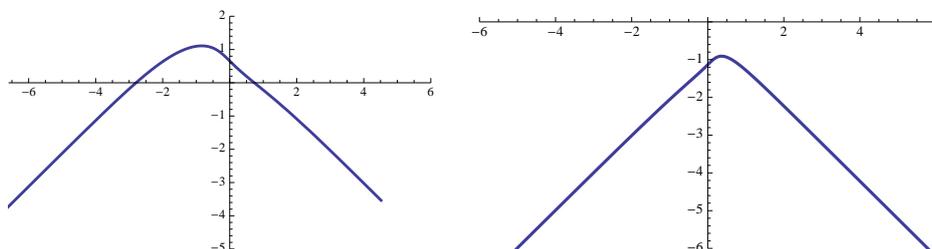
$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty, \infty} \frac{d\vartheta}{d\lambda} = -1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d\vartheta}{d\lambda} = 1,$$

y por tanto, la singularidad es asintótica al cono de luz. Además, como función de  $\lambda$ ,  $\vartheta$  tiene un crecimiento lineal (ver Figura 6.8). La unicidad se deduce de la unicidad de solución (6.40) y (6.41) con la misma condición inicial en  $s_1$  y teniendo en cuenta que la traslación vertical de un solitón de traslación es otro solitón de traslación y una homotecia con respecto al origen de una superficie espacial  $\alpha$ -maximal singular es otro superficie espacial  $\alpha$ -maximal singular. En la figura 6.7 tenemos imágenes de superficies rotacionales con curva generatriz  $(\lambda, 0, -\vartheta(u))$  para  $\beta = -1$  y para  $\beta = -\frac{3}{2}$ .  $\square$

Si  $f(\bar{u}) = 1$  o  $f(\bar{u}) = \alpha/\bar{u}$ , para algún  $\alpha > 1$ , obtenemos el resultado gracias al Teorema 6.14.

**Corolario 6.15.** Para cada número real positivo  $a$ ,

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}''}{1 - \bar{u}'^2} = f(\bar{u}) - \frac{\bar{u}'}{r}, & r \in ]0, \infty[, \\ \bar{u}(0) = a > 0, & \bar{u}'(0) = -1 \end{cases} \quad (6.47)$$



**Figura 6.8:** Curva generatriz  $\tilde{\gamma}$  con  $\beta = -1$  y  $\beta = -\frac{3}{2}$ .

tiene una única solución  $\bar{u} \in \mathcal{C}^2([0, \infty[)$ . Además, es estrictamente convexa, tiene un mínimo en  $]0, \infty[$  y satisface

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{u}' = 1.$$

Además,

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}''}{1 - \bar{u}'^2} = f(\bar{u}) - \frac{\bar{u}'}{r}, & r \in ]0, \infty[, \\ \bar{u}(0) = a > 0, & \bar{u}'(0) = 1 \end{cases} \quad (6.48)$$

tiene una única solución  $\bar{u} \in \mathcal{C}^2[0, \infty[$  verificando que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{u}' = 1.$$

**Nota 6.16.** Nótese que, de los Corolarios 6.13, 6.15, damos solución a problemas del Análisis matemático gracias a las aplicaciones de nuestra correspondencia dando una conexión entre diferentes ramas de las matemáticas.

### 6.4.3. Superficies rotacionales de tipo hiperbólico.

En esta sección, estudiamos superficies  $\alpha$ -maximales singulares de revolución de tipo hiperbólico en  $\mathbb{L}^3$ . Estas superficies son invariantes por un grupo uniparamétrico de rotaciones hiperbólicas del grupo de Lorentz que fijan la dirección espacial  $\vec{e}_1$ . Tales superficies, con curva generatriz espacial  $\tilde{\gamma} = (x(s), 0, u(s))$ ,  $u > 0$  parametriza por

el arco, viene dada por,

$$\tilde{\psi}(s, t) = (x(s), u(s) \sinh(t), u(s) \cosh(t)), \quad (s, t) \in I \times \mathbb{R}, \quad (6.49)$$

con

$$x'(s) = \cosh(z(s)), \quad u'(s) = \sinh(z(s)). \quad (6.50)$$

La aplicación de Gauss de  $\tilde{\psi}$  se escribe por

$$\tilde{N}(s, t) = (\sinh(z(s)), \cosh(z(s)) \sinh(t), \cosh(z(s)) \cosh(t)), \quad (6.51)$$

y los coeficientes de la segunda forma fundamental vienen dados por

$$\begin{aligned} \langle\langle \tilde{\psi}_s, \tilde{\psi}_s \rangle\rangle &= 1, & \langle\langle \tilde{\psi}_s, \tilde{N}_s \rangle\rangle &= z'(s), \\ \langle\langle \tilde{\psi}_t, \tilde{\psi}_t \rangle\rangle &= u(s)^2, & \langle\langle \tilde{\psi}_t, \tilde{N}_t \rangle\rangle &= u(s) \cosh(z(s)), \\ \langle\langle \tilde{\psi}_s, \tilde{\psi}_t \rangle\rangle &= 0, & \langle\langle \tilde{\psi}_s, \tilde{N}_t \rangle\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (6.52)$$

De 6.52, el vector curvatura media de  $\tilde{\psi}$  viene dado por

$$\tilde{\mathbf{H}} = \left( \frac{u z' + \cosh(z)}{u} \right) \tilde{N} = \left( \frac{u \mathcal{K} + \cosh(z)}{u} \right) \tilde{N}, \quad (6.53)$$

donde  $\mathcal{K}$  es la curvatura de  $\tilde{\gamma}$ . Consecuentemente, de (6.12), (6.49) y (6.51), la superficie espacial  $\tilde{\psi}$  es  $\alpha$ -maximal singular si y sólo si

$$\frac{z'(s)}{\cosh(z(s))} + \frac{1 + \alpha}{u(s)} = 0, \quad (6.54)$$

o equivalentemente

$$\cosh(z) u^{\alpha+1} = k, \quad \text{para alguna constante positiva } k. \quad (6.55)$$

Además, de (6.54) y (6.55), la curvatura de  $\tilde{\gamma}$  satisface

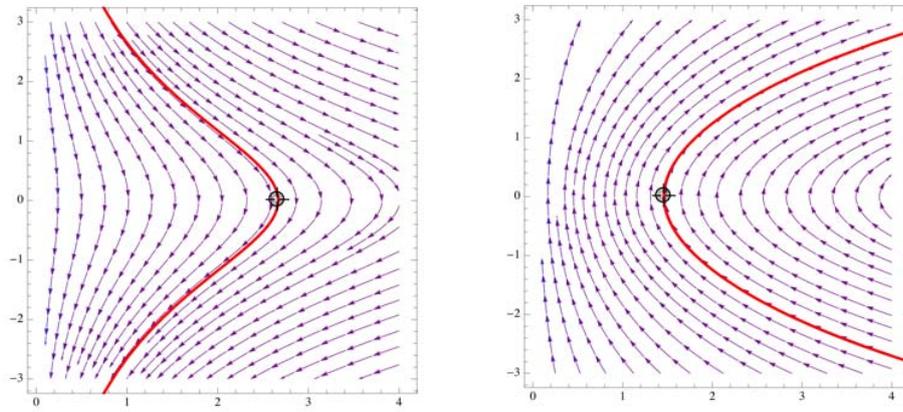
$$\mathcal{K} = -(1 + \alpha)k u^{-\alpha-2}. \quad (6.56)$$

De la condición 'ser espacial', (6.50), (6.54) y (6.56), si  $1 + \alpha > 0$  (respectivamente,  $1 + \alpha < 0$ ), la curva generatriz  $\tilde{\gamma}$  es el grafo de una función  $u(x)$  cóncava (respectivamente, convexa) solución de la siguiente EDO

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\alpha + 1}{u} \left(1 - \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right), \quad (6.57)$$

o equivalentemente

$$\frac{du}{dx} = \tanh(z), \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1 + \alpha}{u}. \quad (6.58)$$



**Figura 6.9:** Diagrama de fases del sistema (6.58) para  $\alpha = 1$  (izquierda) y para  $\alpha = -3$  (derecha).

Como (6.55) es una primera integral de este sistema; si  $1 + \alpha \neq 0$ , existe un único  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $u'(x_0) = 0$  (ver Figura 6.9 para una representación de trayectorias del sistema (6.58)). Entonces, salvo una traslación en el eje  $OX$ , podemos asumir que  $x_0 = 0$  y considerar las soluciones de (6.58) satisfaciendo

$$u(0) = u_0 > 0, \quad \frac{du}{dx}(0) = 0. \quad (6.59)$$

Tomando  $\bar{u}(x) = u(-x)$ , es fácil ver que, si  $1 + \alpha \neq 0$ , una solución de (6.57)-(6.59) es par y, de las expresiones (6.55) y (6.58), está definido en el intervalo  $] -\Lambda_{u_0}, \Lambda_{u_0}[$ , donde

$$\Lambda_{u_0} = |\alpha + 1| \int_0^\infty \frac{u_0 d\tau}{(\cosh \tau)^{\frac{1}{\alpha+1}}}. \quad (6.60)$$

Entonces, de (6.55), (6.58) y (6.60), obtenemos el siguiente resultado.

**Proposición 6.17.** *Sea  $\tilde{\gamma} = (x, 0, u(x))$  la curva generatriz de una superficie espacial  $\alpha$ -maximal singular rotacionalmente simétrica de tipo hiperbólica, ver Figura 6.10. Entonces, salvo una traslación horizontal, tenemos que*

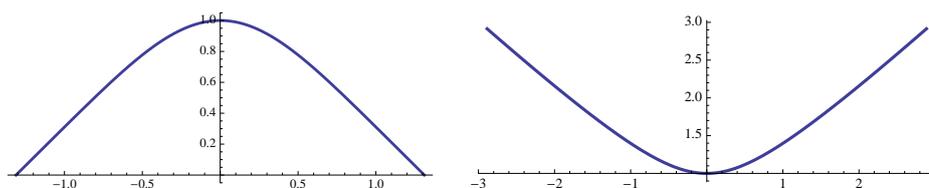
- Si  $1 + \alpha > 0$ ,  $\tilde{\gamma}$  es el grafo de una función simétrica estrictamente cóncava  $u(x)$  sobre un intervalo acotado  $]-\Lambda_{u_0}, \Lambda_{u_0}[$  la cuál tiene un máximo en 0 e interseca (asintóticamente al cono de luz) al eje  $OX$  en  $\pm\Lambda_{u_0}$ , esto es

$$\lim_{x \rightarrow \pm\Lambda_{u_0}} u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\Lambda_{u_0}} \frac{du}{dx} = -1.$$

- Si  $1 + \alpha < 0$ ,  $\tilde{\gamma}$  es el grafo de una función simétrica estrictamente convexa  $u(x)$  en  $] -\infty, \infty[$  el cuál tiene un mínimo en 0 y con un crecimiento lineal, de hecho

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{du}{dx} = 1.$$

- Si  $1 + \alpha = 0$ , entonces  $\tilde{\gamma}$  es una línea recta.



**Figura 6.10:** Curva generatriz  $\tilde{\gamma}$  para  $\alpha = 1$  (izquierda) y para  $\alpha = -2$  (derecha).

**Nota 6.18.** Obsérvese que, de (6.49), (6.52) y (6.55), la curvatura de Gauss de  $\tilde{\psi}$  está determinada por

$$K = (\alpha + 1) \frac{k^2}{u^{2\alpha+4}}.$$

Consecuentemente

**Teorema 6.19.** *Sea  $\tilde{\psi}$  un grafo espacial  $\alpha$ -maximal singular, parametrizado por (6.49) con  $\tilde{\gamma} = (x, 0, u(x))$  como en la Proposición 6.17, entonces*

- *si  $1 + \alpha > 0$ , la curvatura de Gauss de  $\tilde{\psi}$  es positiva (la segunda forma fundamental es semidefinida y no degenerada). Además,*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\Lambda_0} K = \infty.$$

- *si  $1 + \alpha < 0$ ,  $\tilde{\psi}$  es un grafo entero, estrictamente convexo y asintóticamente llano, esto es,*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} K = 0.$$

*(Estos ejemplos se denominarán Boles  $\alpha$ -maximales de tipo hiperbólico.)*

- *Si  $\alpha = -1$ ,  $\tilde{\psi}$  es llana.*

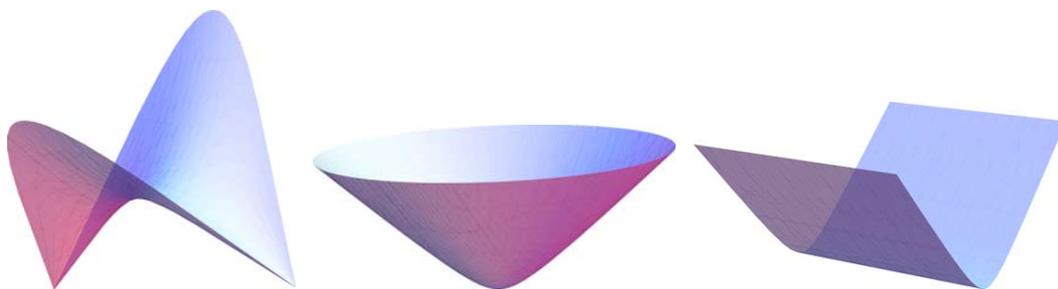
**Nota 6.20.** Obsérvese que, de la ecuación (6.55), la curva generatriz  $\tilde{\gamma}$  de un Bol  $\alpha$ -maximal de tipo hiperbólico es divergente y tiene longitud infinita si y sólo si

$$\int_0^{\infty} u^{\alpha+1} dx = \infty.$$

Como  $u$  tiene un crecimiento lineal, solo tiene longitud infinita cuando  $\alpha + 2 \geq 0$ . Entonces, un Bol  $\alpha$ -maximal de tipo hiperbólico es completo si y sólo si  $-1 > \alpha \geq -2$ .

#### 6.4.4. Par de Calabi para superficies espaciales $\alpha$ -maximales singulares rotacionales de tipo hiperbólico.

Para finalizar la memoria, estudiamos los pares de Calabi  $(\psi, \tilde{\psi})$  con  $\tilde{\psi}$  una superficie espacial  $\alpha$ -maximal singular rotacional de tipo hiperbólico.

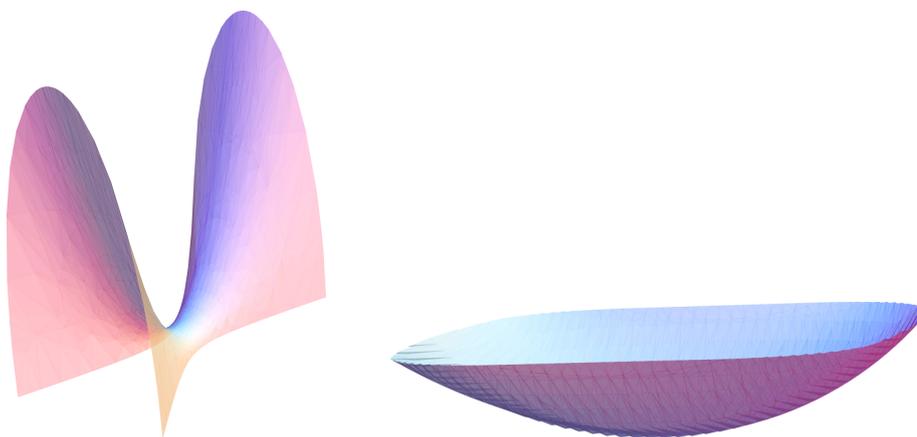


**Figura 6.11:** Boles  $\alpha$ -maximales de tipo hiperbólico para  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = -2$  y  $\alpha = -1$ .

Sea  $\tilde{\psi}$  una superficie rotacional  $\alpha$ -maximal singular de tipo hiperbólico dada por (6.49) con aplicación de Gauss (6.51). Si  $(\psi, \tilde{\psi})$  es un par de Calabi, entonces por el Teorema 6.6 y la expresión (6.33),  $\psi$  es, o bien, una superficie  $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ -mínima singular si  $\alpha + 1 \neq 0$ , o bien, un solitón de traslación si  $\alpha + 1 = 0$  en  $\mathbb{R}^3$  parametrizado por,

$$\psi(s, t) = \int u(s)^\alpha \cosh^\alpha t \left( \vec{e}_3 \wedge_{\mathbb{L}^3} (d\tilde{\psi} \wedge_{\mathbb{L}^3} \tilde{N}) - \langle d\tilde{\psi}, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3 \right). \quad (6.61)$$

CASO I: SI  $\psi$  ES UNA SUPERFICIE  $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ -MÍNIMA SINGULAR.



**Figura 6.12:** Superficies  $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ -mínimas singulares para  $\alpha = 1$  y  $\alpha = -2$ .

Por los Teoremas 6.6 6.19, la Proposición 6.17 y la nota 6.18,

obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 6.21.** *Sea  $(\psi, \tilde{\psi})$  un par de Calabi tal que  $\tilde{\psi}$  es una superficie espacial rotacional  $\alpha$ -maximal singular de tipo hiperbólico con  $\alpha + 1 \neq 0$  dada por (6.49). Entonces  $\psi$  es*

- o bien  $\psi$  es una  $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ -mínima singular en  $\mathbb{R}^3$  cuya curvatura de Gauss es estrictamente negativa si  $1 + \alpha > 0$ .
- o bien  $\psi$  es una superficie  $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ -mínima singular estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^3$  si  $1 + \alpha < 0$ .

En ambos casos, una parametrización de  $\psi$  está dada por

$$\psi(x, t) = \left( -\frac{k u'(x)}{(\alpha + 1)} \cosh^{\alpha+1}(t), k \int \cosh^{\alpha}(t) dt, \frac{u^{\alpha+1}(x) \cosh^{\alpha+1}(t)}{\alpha + 1} \right),$$

donde  $k = u_0^{\alpha+1}$  y  $u(x)$  es la solución de (6.57)-(6.59) satisfaciendo las propiedades descritas en la Proposición 6.17, ver Figura 6.12.

CASO II: SI  $\psi$  ES UNA SOLITÓN DE TRASLACIÓN ( $\alpha = -1$ ).

De la Proposición 6.17,  $\tilde{\psi}$  puede parametrizarse, salvo traslación, por,

$$\tilde{\psi}(x, t) = (x, (\tanh(z_0)x + u_0) \sinh(t), (\tanh(z_0)x + u_0) \cosh(t)), \quad (6.62)$$

para algún  $z_0, x_0 \in \mathbb{R}$ , donde  $t \in \mathbb{R}$  y  $\tanh(z_0)x + u_0 > 0$ . Consecuentemente, de (6.61) y (6.62), obtenemos el siguiente Teorema,

**Teorema 6.22.** *Sea  $(\psi, \tilde{\psi})$  un par de Calabi tal que  $\tilde{\psi}$  es una superficie espacial  $(-1)$ -maximal de revolución de tipo hiperbólica dada por (6.62). Entonces,  $\psi$  es, o bien, un Grim reaper ladeado parametrizado por*

$$\psi(y, t) = \left( \frac{y}{\lambda} - \lambda \log(\cosh(t)), 2\sqrt{1 + \lambda^2} \arctan(\tanh(t/2)), y + \cosh(t) \right),$$

si  $\lambda = \sinh(z_0) \neq 0$ , o bien un Grim reaper si  $\lambda = 0$  parametrizado por,

$$\psi(y, t) = \left( -\frac{y}{u_0}, 2 \arctan(\tanh(t/2)), \log(u_0 \cosh(t)) \right).$$

## Futuras líneas de investigación

---

En este último capítulo, planteamos una lista de problemas abiertos y futuras líneas de investigación en el estudio de la geometría de superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^3$ . Estos problemas están motivados por la teoría clásica de superficies mínimas y algunos resultados recientes sobre la teoría de solitones de traslación y  $\alpha$ -mínimas singulares en  $\mathbb{R}^3$ . Planteamos la construcción de nuevos ejemplos de superficies completas  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas en  $\mathbb{R}^3$ , la clasificación de los grafos completos y superficies de tipo semigrafo, nuevas caracterizaciones de los ejemplos tipo Bol y aplicaciones de la correspondencia de tipo Calabi para a la descripción y clasificación de nuevos ejemplos de superficies en  $\mathbb{L}^3$ .

### Motivación y planteamiento de algunos problemas.

- (I) *Motivados por los Teoremas 3.3, 3.4 y 3.7 del capítulo 3, y con el objetivo de clasificar todas las superficies completas  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas y llanas planteamos: **Estudiar, sin hipótesis de monotonía sobre  $\varphi$ , la existencia de ejemplos completos de tipo catenario invariantes por traslaciones horizontales.***
- (II) *Teniendo en mente la caracterización de los cilindros  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenarios en el Teorema 5.18, nos preguntamos por su posible extensión a otros casos, como por ejemplo: **Dada una superficie completa  $\alpha$ -mínima singular propiamente embebida conexa con género localmente acotado y  $\mathcal{C}^\infty$ -asintótica a un cilindro  $\alpha$ -catenario ¿es dicha superficie otro cilindro  $\alpha$ -catenario?***
- (III) *R. López demostró en [45] que no existen grafos enteros  $\alpha$ -mínimos singulares para  $\alpha < 0$ , J.C.C Nitsche estudió la no existencia de cilindros  $\alpha$ -catenarios en el caso 2-dimensional en [59] y L. Shariyari probó en [68] que no existen solitones de traslación completos que sean grafos verticales sobre dominios acotados*

del plano  $\mathbb{R}^2$ . Estos resultados motivan: **buscar condiciones suficientes y necesarias sobre  $\varphi$  que garanticen la existencia de grafos enteros  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos.**

- (IV) En conexión al problema (IV) y motivados por los trabajos de C. Bao, Y. Shi [4] y K. Kunikawa [40] proponemos **probar Teoremas tipo Bernstein para grafos completos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos.**
- (V) Motivados por la clasificación de los grafos completos de traslación obtenida por D. Hoffman, T. Ilmanen, F. Martín and B. White en [30] y por el comportamiento de una  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -superficie cuando  $\varphi$  es estrictamente creciente, convexa, con  $\ddot{\varphi} \leq 0$  en  $]a, +\infty[$  y con un crecimiento a lo sumo cuadrático, planteamos **probar existencia y unicidad para ejemplos “tipo a  $\Delta$ -Wings”, que permitan, bajo estas condiciones sobre  $\varphi$ , clasificar los grafos completos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos en  $\mathbb{R}_a^3$ .**
- (VI) Una superficie de tipo semigrafo es una superficie  $\Sigma$  propiamente embebida conteniendo un conjunto discreto de rectas verticales  $L \subset \Sigma$ , tal que  $\Sigma \setminus L$  es un grafo vertical. Gracias a los trabajos de X.H.Nguyen [58] y D. Hoffman, F. Martín y B. White [33, 34], sabemos de la existencia de solitones de traslación completos de tipo semigrafo: familias 1-paramétricas y 2-paramétricas de solitones de traslación análogos a los ejemplos de superficies mínimas de tipo Scherk doblemente periódicos, de tipo Helicoides, de Scherk-noids y de tridentes simplemente periódicos. Así como una nueva subfamilia 1-paramétrica de estos ejemplos simplemente periódicos con topología finita y con un crecimiento de area cuadrático denominados Pitchforks. Nos preguntamos: **¿Bajo qué condiciones sobre  $\varphi$ , podemos construir ejemplos  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimos de tipo semigrafo análogos a los anteriores?**
- (VII) En [34, Sección 9] se conjetura que, salvo un caso especial en el que la superficie contiene al eje vertical  $\vec{e}_3$  y tal que  $\Sigma \setminus \vec{e}_3$  es un grafo en  $\{(x, y) : y \neq 0\}$ , los únicos solitones de traslación en  $\mathbb{R}^3$  de tipo semigrafo son los citados en el problema (VI). Nos preguntamos: **¿es cierta esta conjetura?** Y en relación con el problema anterior y bajo las condiciones en las que la función  $\varphi$

responda positivamente al problema (VI), **¿es posible encontrar una clasificación análoga al [34, Teorema 34]?**

- (VIII) **¿Bajo que condiciones, existen superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas completas en  $\mathbb{R}^3$  conexas, con curvatura total finita y género arbitrario análogas a la superficie mínima de Costa?** En general, encontrar ejemplos con género arbitrario no es posible; a saber, por [79, Teorema 1], si  $\Sigma$  es una superficie orientable, conexa, completa y con curvatura total finita, sabemos que  $\Sigma$  es homeomorfa a una superficie compacta punteada  $\Sigma_{g,k}$  con género  $g$  y  $k$  finales. Por otro lado, si asumimos  $\Sigma$  está contenida en un semiespacio y cualquier final de  $\Sigma$  no es asintótico a un plano vertical, es decir, si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un compacto  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $\eta_3^2 \leq 1 - \varepsilon$  en  $\Sigma \setminus \mathcal{K}$ , entonces por los resultados de [51, Teorema C, Teorema 4.1] obtenemos que  $g \leq 1$ . Además, si  $\Sigma$  es embebida entonces  $g = 0$  y  $\Sigma$  ha de ser un dominio plano.
- (IX) Gracias a las fórmulas de tipo Weierstrass obtenidas en [39, 42, 55, 57] para solitones de traslación y  $\alpha$ -mínimas singulares en  $\mathbb{R}^3$  proponemos **estudiar la veracidad del Teorema de Osserman [60] para estas superficies cuando son completas, embebidas y tienen curvatura total finita.**
- (X) En el Teorema 4.22 caracterizamos la convexidad de superficies  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimas  $H$ -convexas en  $\mathbb{R}_a^3$  cuando  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface (3.20), (3.30) y  $\ddot{\varphi} \leq 0$  en  $]a, +\infty[$ . Resultado que motiva la siguiente cuestión: **en estas condiciones sobre  $\varphi$ , ¿es convexo cualquier grafo entero  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimo en  $\mathbb{R}^3$ ?**
- (XI) De los trabajo de X. Wang [74] y J. Spruck y L. Xiao en [72] sabemos que el único grafo entero de traslación es el Bol. En este sentido, si el problema (X) tuviera una respuesta afirmativa, es también natural preguntarnos: **¿Es un  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -Bol el único grafo entero  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -mínimo en  $\mathbb{R}^3$  cuando  $\varphi$  verifica las condiciones del problema (X)?**
- (XII) J. Spruck y L. Xiao dieron otra caracterización del Bol solitón de traslación en [72]. Probaron que si tenemos un solitón de traslación completo  $H$ -convexo tal que  $H(p) \rightarrow 0$  cuando  $p \rightarrow \infty$ , en-

tonces, salvo una traslación, dicho solitón es el Bol. Siguiendo la idea de los dos problemas anteriores, planteamos **caracterizar, por el comportamiento asintótico de la curvatura media, un  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -bol, cuando  $\varphi$  está en las condiciones del problema (X),**

- (XIII) Usando la clasificación de los solitones de traslación dada en [30] junto con la correspondencia tipo Calabi descrita en el capítulo 6, sería interesante **dar una clasificación de los grafos completos espaciales  $(-1)$ -maximales en  $\mathbb{L}^3$ ; al menos cuando  $\varphi$  sea estrictamente creciente y podamos controlar su crecimiento asintótico**
- (XIV) Por otro lado, sería interesante **saber si los ejemplos de superficies descritos en el Teorema 6.14 son los únicos solitones maximales de traslación o  $\alpha$ -máximal singulares superficies que son grafos sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .**
- (XV) Motivados por los trabajos de H. Lee, J.M. Manzano [43] y J.A. Pelegrín, A. Romero y R.M. Rubio [62], planteamos también **estudiar teoremas de tipo Berstein para superficies espaciales  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -maximales en  $\mathbb{L}^3$ .**

## Bibliografía

---

- [1] A.D. Alexandrov. *Uniqueness theorems for surfaces in the large*, Vestnik. Leninger. Univ. Math.11 (1956) 5-17. XIX, 33, 115, 119, 130
- [2] L. Alías, P. Mastrolia y M.Rigoli. *Maximum Principles and Geometric Applications*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2016. XVIII, 31, 102
- [3] L. Andersson y J. Metzger. *The area of horizons and the trapped region*, Commun. Math. Phys. 290 (2009), 941-972. <https://doi.org/10.1007/s00220-008-0723-y>. 23
- [4] C. Bao y Y. Shi. *Gauss map of translating solitons of mean curvature flow*, Proc. Am. Math. Soc. 142(12), 4333-4339 (2014). XXII, 36, 164
- [5] R. Bartnik. *Maximal surfaces and general relativity*, J. Hutchinson (Ed.), Proc. Miniconf. on Anal. Geom. (Austral. Nat. Univ.) Centre for Math. Anal. (ANU), 1986. 23
- [6] S.N. Bersntein. *Sur une théorème de géometrie et ses applications aux équations dérivées partielles du type elliptique*, Comm. Soc. Math. Kharkov, 15: 38–45. XXII, 36
- [7] R. Böme, S. Hildebrant y E. Tausch. *The two-dimensional analogue of the catenary*, Pacific J. Math.88 No. 2 (1980) 247-278. XII, 26
- [8] H. Bray. *Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem*, Journal of Differential Geometry, 59 (2),177-267. MR 1908823. 23

- [9] E. Calabi. *Examples of Bernstein problems for some non-linear equationse*, Proc. Sympos. Pure Math. 15 (1970), 222-230. 34, 141, 144
- [10] S.Y. Cheng y S.T. Yau. *Maximal spacelike surfaces in Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. of Math. 104 (1976) 407-419. 143
- [11] J. Cheeger, M. Gromov y M. Taylor. *Finite propagation speed, kerner estimates for functions of the Laplace operator and the geometry of complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom, 17 (1982), pp 15-53. 45
- [12] X. Cheng, T. Mejia y D. Zhou. *Stability and compactness for complete  $f$ -minimal surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc, 367 (2015) no.6, pp 4041-4059. 53
- [13] C. Gresy. *Considération sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles*, Mem. Reale Accad. Sci. Torino 21(1), 259-294, 1818. 24
- [14] J. Clutterbuck, O. Schnürer y F. Schulze. *Stability of translating solutions to mean curvature flow*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations,29 (2007), no 3, 387-394. XVI, 30, 61, 71, 80, 81
- [15] T.H. Colding y W.P. Minicozzi II. *Estimates for parametric elliptic integrands*, Int. Math. Res. Not.6 (2002), 291-297. XVI, 31
- [16] T.H. Colding y W.P. Minicozzi II. *A course in minimal surfaces*, Graduate studies in Mathematics v.121, American Mathematical Society, Providence, R.I. 2011. XVI, 31
- [17] U. Dierkes. *Singular Minimal Surfaces*, S. Hildebrandt et. al (eds.), Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, (2003) 177-193. XIII, 26
- [18] U. Dierkes y G. Huisken. *The  $N$ -dimensional analogue of the catenary: Prescribed area*, J. Jost (ed) Calculus of Variations and Geometric Analysis. International Press, (1996) 1-13. XIII, 26

- [19] Q. Ding. *Entire spacelike translating solitons in Minkowski spaces*, J. Funct. Anal. 265 (2013) 3133-3162. 143, 151
- [20] Do Carmo. *Riemannian Geometry*, Mathematics: Theory and Applications (1992). 92
- [21] W. Dunn. *The principles of dome construction: I and II*, J. Royal Institute of British Architects, 23 (1908), 401-412. 23
- [22] J.H. Eschenburg. *Maximum principle for hypersurfaces*, Manuscr. Math.64 (1989), 55-75. 44
- [23] J. M. Espinar. *Gradient Schrödinger operators, manifolds with density and applications*, J. Math. Anal. Appl. 455(2017), no. 2, 1505-1528. 91
- [24] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematic. Volum 19. American Mathematica Society. xx, 57, 146
- [25] D. Fischer-Colbrie y R. Schoen. *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), 199-211. 53, 99
- [26] D. Gilbarg y N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin,2001. 55, 57, 58
- [27] S. Hildebrant. *On the regularity of solutions of two-dimensional variational problems with obstructions*, Comm. Pure Appl. Math.25(1972), 479-496. XII, 26
- [28] S. Hildebrant. *Interior  $C^{1+\alpha}$ -regularity of solutions of two-dimensional variational problems with obstacles*, Math. Z,131 (1973), 233-240. XII, 26
- [29] S. Hildebrant y H. Kaul. *Two-dimensional variational problems with obstructions and Plateau's problem for  $H$ -surfaces in a Riemannian manifold*, Comm. Pure Appl. Math,25(1972), 187-223. XII, 26

- [30] D. Hoffman, T. Ilmanen, F. Martín y B. White. *Graphical translators for mean curvature flow*, Calc. Var. PDE's 58, Art 117 (2019) XIII, XXII, 26, 33, 36, 99, 100, 164, 166
- [31] D. Hoffman, T. Ilmanen, F. Martín y B. White. *Notes on translating solitons for mean curvature flow*, Preprint (2019). arXiv: 1901.09101v1. 101, 114
- [32] D. Hoffman y H. Karcher. *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, In R. Osserman, editor, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 90, Geometry V, pages 5-93. Springer-Verlag, 1997. MR1490038, Zbl 0890. 53001. XII, 26
- [33] D. Hoffman, F. Martín y B. White. *Scherk-like translators for Mean Curvature Flow*, Preprint (2019). arXiv: 1903.04617. XXII, 36, 164
- [34] D. Hoffman, F. Martín y B. White. *NGuyen's tridents and the classification of semigraphical translators for mean curvature flow*, Preprint (2019). arXiv: 1909.09241. XXII, 36, 164, 165
- [35] D. Hoffman y W.H. Meeks. *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*, Invent. math 101, 373-377 (1990). XXII, 36
- [36] T. Ilmanen. *Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature*, Men. Amer. Math. Soc, 108 no. 520 (1994). XII, 25, 42
- [37] J.H. Jellett. *Die Grundlehren der Variationsrechnung*. Braunschweig, Verlag der Hofbuchhandlung v. Leibrock, 1860. 24
- [38] H. Y. Jian. *Translating solitons of mean curvature flow of non-compact spacelike hypersurfaces in Minkowski space*, J. Differential Equations 220 (2006) 147-162. 151
- [39] M. Kokubo. *Weierstrass representation for minimal surfaces in hyperbolic space*, Tôhoku Math. J. 49 (1997), 367-377. 165
- [40] K. Kunikawa. *Bernstein-type theorem of translating solitons in arbitrary codimension with flat normal bundle*, Calc. Var. DOI 10.1007/s00526-015-0826-1. XXII, 36, 164

- [41] J.L. Lagrange. *Mécanique analytique*. Oeuvre tome onzieme. 24
- [42] H. Lee. *The H-flow translating solitons in  $\mathbb{R}^3$  and  $\mathbb{R}^4$* , Preprint (2012). arXiv: 1204.0243. 165
- [43] H. Lee y J. M. Manzano. *Generalized Calabi correspondence and complete spacelike surfaces*, Ann. Glob. Anal. Geom. 53 (2018), 521-541. 166
- [44] R. López. *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary*, Springer Monographs in Mathematics (2010). 44, 119
- [45] R. López. *Invariant singular minimal surfaces*, Ann. Glob. Anal. Geom. 53 (2018), 521-541. XIII, XXII, 26, 36, 69, 150, 163
- [46] R. López. *What is the shape of a Cupola ?*, Preprint (2021). arXiv: 2111.07920. XIII, 23, 26
- [47] R. López. *The Dirichlet problem for the  $\alpha$ -singular minimal surface equation*, Arch. Math. (Basel)112 (2019), 213-222. XIII, 26
- [48] R. López. *Uniqueness of critical points and maximum principles of the singular minimal surface equation*, J. Differential Equations, 266 (2019), 3927-3941. XIII, 26
- [49] R. López. *Compact singular minimal surfaces with boundary*, Amer. J. Math.142 (2020), 521-541. XIII, 26
- [50] F. Martín, J. Pérez-García, A. Savas-Halilaj y K.Smoczyk. *A characterization of the grim reaper cylinder*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (2016), 1-28. XIII, XIX, 26, 34, 115
- [51] F. Martín, A. Savas-Halilaj y K.Smoczyk. *On the topology of translating solitons of the mean curvature flow*, Calc. Var. (2015) 54: 2853-2882. XIII, XIX, 26, 28, 34, 115, 119, 165
- [52] A.L. Martínez-Triviño y J.P. dos Santos. *Uniqueness of the  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -catenary cylinders by their asymptotic behavior*, Preprint (2021). arXiv: 2107.13918. 115

- [53] A. Martínez y A. L. Martínez-Triviño. *Equilibrium of Surfaces in a Vertical Force Field*, Mediterr. J. Math. 19 (2022), no. 1, Paper No. 3. 61, 115
- [54] A. Martínez y A. L. Martínez-Triviño. *A Calabi's type correspondence*, Nonlinear Analysis. 191 (2020) 111637. 141
- [55] A. Martínez y A. L. Martínez-Triviño. *A Weierstrass type representation for translating solitons and singular minimal surfaces*, Preprint (2022). arXiv: 2201.01192. 165
- [56] A. Martínez, A.L. Martínez-Triviño y J.P. dos Santos. *Mean convex properly embedded  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Rev. Mat. Iberoam. DOI: 10.4177/RMI/1352. 89
- [57] F.Mercuri, S. Montaldo y P.Piu. *A Weierstrass representation formula for minimal surfaces in  $\mathbb{H}^3$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Acta Mathematica Sinica, English Series, Nov., 2006, Vol.22, No.6, pp.1602-1612. 165
- [58] X.H. Nguyen. *Translating tridents*, Comm. Partial Differential Equations, 34 (2009), no. 1-3, 257-280. xxii, 36, 164
- [59] J.C.C. Nitsche. *A nonexistence theorem for the two-dimensional analogue of the catenary*, Analysis, 6(1986), 143-156. xxii, 36, 163
- [60] R. Osserman. *A survey of Minimal Surfaces*, Dover Publications, New York, 2nd edition, 1986, MR0852409, Zbl 0209.52901. 165
- [61] F. Otto. *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Bd. I, II. Berlín, Frankfurt/M., Wien: Ullstein 1962, 1966. xiii, 23, 26
- [62] J. A. Pelegrín, A. Romero y R.M. Rubio. *An extension of Calabi's correspondence between the solutions of two Bernstein problems to more general elliptic nonlinear equations*, Math. Notes 105 (2019), no 1-2m 280-284. 166
- [63] J. Pérez-García. *Translating solitons of the mean curvature flow*, Ph. D. Thesis, Universidad de Granada (2016). xxii, 36

- [64] P. Petersen. *Riemannian Geometry*, Third Edition Springer, (2016). 94
- [65] S. D. Poisson. *Sur les surfaces elastique*, Men. CL. Sci. Math. Phys. Inst. France, deux, (1975), 167-225. XI, XIII, 24, 27, 39
- [66] H. Rosenberg, R. Souam y E. Toubiana. *General curvature estimates for stable  $H$ -surfaces in 3-manifolds and applications*, J. Differential Geom, 84 (2010) no. 3, pp 623-648. XVI, 30, 89, 100, 101
- [67] A. Savas-Halilaj y K. Smoczyk . *Bernstein theorems for length and area decreasing minimal map*, Calc. Var. 50 (2014), 549-577. XIII, 28, 55, 59
- [68] L. Shahriyari. *Translating graphs by mean curvature flow*, Geom. Dedicata 175 (2015), 57-64. XXII, 36, 163
- [69] R. Schoen. *Estimates for stable minimal surfaces in three-dimensional manifolds*, Seminar on minimal submanifolds, 111-126, Ann. of Math. Stud., 103, Princenton Univ. Press, Princenton, NJ (1983). XVI, 30, 89
- [70] R. Schoen. *Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces*, J. Differ. Geom. 18 (1984), 791-809. XIX, 33, 115
- [71] J. Serrin. *Removable singularities of solutions of elliptic equations. II*, Arch. Rational Mech. Anal. 20 (1965) 163-169. 69, 75
- [72] J. Spruck y L. Xiao. *Complete translating solitons to the mean curvature flow in  $\mathbb{R}^3$  with nonnegative mean curvature*, Amer. J. Math. 142 (2020), no.3, 993-1015. XIII, XVI, XVIII, XXII, 26, 31, 33, 36, 89, 91, 100, 101, 165
- [73] E. Tausch. *A class of variational problems with linear growth*, Math. Z, 164 (1978), 159-178. XII, 26
- [74] X. Wang. *Convex solutions to the mean curvature flow*, Annals of Mathematics, 173 (2011), 1185-1239. XIII, XXII, 26, 36, 165

- 
- [75] B. White. *Lectures on minimal surfaces theory*, Preprint (2016). arXiv: 1308.3325v4. xvii, 31, 89, 96, 97
- [76] B. White. *On the compactness theorem for embedded minimal surfaces in 3-manifolds with locally bounded area and genus*, *Comm. Anal. Geom.* 26 (2018), no. 3, 659-678. xvi, xviii, 31, 32, 89, 94, 96, 99, 101
- [77] B. White. *Controlling area blow-up in minimal or bounded mean curvature varieties*, *J. Differential Geom.* Volume 102, no. 3 (2016), 501-535. 126
- [78] B. White. *Curvature estimates and compactness theorems in 3-manifolds for surfaces that are stationary for parametric elliptic functionals*, *Invent. Math.* 88 (1987), 243-256. 101
- [79] B. White. *Complete surfaces of finite total curvature*, *J. Differential Geometry*, 26 (1987), 315-326. 165