Análisis Funcional Avanzado

Juan Francisco Mena Jurado

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada

Definición

Sea A un álgebra. Una norma $\|\cdot\|$ en A es ***submultiplicativa*** *o una* ***norma de álgebra*** *si verifica*

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\| \quad (x, y \in A)\,.$$

Definición

*Sea A un álgebra. Una norma $\|\cdot\|$ en A es **submultiplicativa** o una **norma de álgebra** si verifica*

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \quad (x, y \in A) \, .$$

*Se dice que $(A, \|\cdot\|)$ o, simplemente, A es un **álgebra normada**.*

Definición

Sea A un álgebra. Una norma $\|\cdot\|$ en A es ***submultiplicativa*** *o una* ***norma de álgebra*** *si verifica*

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \quad (x, y \in A) \, .$$

Se dice que $(A, \|\cdot\|)$ o, simplemente, A es un ***álgebra normada****. Si, además, la norma $\|\cdot\|$ es completa, se dice que A es un* ***álgebra de Banach****.*

Definición

Sea A un álgebra. Una norma $\|\cdot\|$ en A es ***submultiplicativa*** *o una* ***norma de álgebra*** *si verifica*

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \quad (x, y \in A).$$

Se dice que $(A, \|\cdot\|)$ o, simplemente, A es un ***álgebra normada****. Si, además, la norma $\|\cdot\|$ es completa, se dice que A es un* ***álgebra de Banach****. Se dice que un álgebra normada es* ***unital*** *si tiene unidad y la unidad tiene norma uno. La unidad siempre se denotará por I.*

Definición

Sea A un álgebra. Una norma $\|\cdot\|$ en A es ***submultiplicativa*** *o una* ***norma de álgebra*** *si verifica*

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \quad (x, y \in A).$$

Se dice que $(A, \|\cdot\|)$ o, simplemente, A es un ***álgebra normada****. Si, además, la norma $\|\cdot\|$ es completa, se dice que A es un* ***álgebra de Banach****. Se dice que un álgebra normada es* ***unital*** *si tiene unidad y la unidad tiene norma uno. La unidad siempre se denotará por I.*

Para evitar confusiones con la terminología algebraica, a partir de ahora llamaremos **homomorfismo topológico** a lo que hasta ahora hemos llamado homomorfismo, es decir, una aplicación lineal continua entre dos EVT que es abierta sobre su imagen. Análogamente, se usarán los términos monomorfismo topológico, epimorfismo topológico e isomorfismo topológico.

Definición

Sea A un álgebra. Una norma $\|\cdot\|$ *en* A *es* ***submultiplicativa*** *o una* ***norma de álgebra*** *si verifica*

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\| \quad (x, y \in A).$$

Se dice que $(A, \|\cdot\|)$ *o, simplemente,* A *es un* ***álgebra normada****. Si, además, la norma* $\|\cdot\|$ *es completa, se dice que* A *es un* ***álgebra de Banach****. Se dice que un álgebra normada es* ***unital*** *si tiene unidad y la unidad tiene norma uno. La unidad siempre se denotará por* I.

Para evitar confusiones con la terminología algebraica, a partir de ahora llamaremos **homomorfismo topológico** a lo que hasta ahora hemos llamado homomorfismo, es decir, una aplicación lineal continua entre dos EVT que es abierta sobre su imagen. Análogamente, se usarán los términos monomorfismo topológico, epimorfismo topológico e isomorfismo topológico.

Ejemplos

1) Si T es un espacio topológico, $\mathcal{C}_b(T)$ con el producto puntual es un álgebra de Banach conmutativa unital.

Ejemplos

1) Si T es un espacio topológico, $\mathcal{C}_b(T)$ con el producto puntual es un álgebra de Banach conmutativa unital. Si L es un espacio topológico localmente compacto y separado, $\mathcal{C}_0(L)$ es un ideal cerrado de $\mathcal{C}_b(L)$, por lo que $\mathcal{C}_0(L)$ es un álgebra de Banach conmutativa.

Ejemplos

1) Si T es un espacio topológico, $\mathcal{C}_b(T)$ con el producto puntual es un álgebra de Banach conmutativa unital. Si L es un espacio topológico localmente compacto y separado, $\mathcal{C}_0(L)$ es un ideal cerrado de $\mathcal{C}_b(L)$, por lo que $\mathcal{C}_0(L)$ es un álgebra de Banach conmutativa. En particular, si K es un espacio topológico compacto y separado, $\mathcal{C}(K)$ es un álgebra de Banach conmutativa unital.

Ejemplos

1) Si T es un espacio topológico, $\mathcal{C}_b(T)$ con el producto puntual es un álgebra de Banach conmutativa unital. Si L es un espacio topológico localmente compacto y separado, $\mathcal{C}_0(L)$ es un ideal cerrado de $\mathcal{C}_b(L)$, por lo que $\mathcal{C}_0(L)$ es un álgebra de Banach conmutativa. En particular, si K es un espacio topológico compacto y separado, $\mathcal{C}(K)$ es un álgebra de Banach conmutativa unital. $\mathcal{C}_0(L)$ tiene unidad si, y sólo si, L es compacto.

Ejemplos

1) Si T es un espacio topológico, $\mathcal{C}_b(T)$ con el producto puntual es un álgebra de Banach conmutativa unital. Si L es un espacio topológico localmente compacto y separado, $\mathcal{C}_0(L)$ es un ideal cerrado de $\mathcal{C}_b(L)$, por lo que $\mathcal{C}_0(L)$ es un álgebra de Banach conmutativa. En particular, si K es un espacio topológico compacto y separado, $\mathcal{C}(K)$ es un álgebra de Banach conmutativa unital. $\mathcal{C}_0(L)$ tiene unidad si, y sólo si, L es compacto.
2) Si X es un espacio normado, $L(X)$ con la composición de operadores como producto es un álgebra normada unital.

Ejemplos

1) Si T es un espacio topológico, $\mathcal{C}_b(T)$ con el producto puntual es un álgebra de Banach conmutativa unital. Si L es un espacio topológico localmente compacto y separado, $\mathcal{C}_0(L)$ es un ideal cerrado de $\mathcal{C}_b(L)$, por lo que $\mathcal{C}_0(L)$ es un álgebra de Banach conmutativa. En particular, si K es un espacio topológico compacto y separado, $\mathcal{C}(K)$ es un álgebra de Banach conmutativa unital. $\mathcal{C}_0(L)$ tiene unidad si, y sólo si, L es compacto.
2) Si X es un espacio normado, $L(X)$ con la composición de operadores como producto es un álgebra normada unital. Si X es completo, $L(X)$ es un álgebra de Banach unital y $K(X)$ y $W(X)$ son ideales biláteros cerrados de $L(X)$ por lo que son álgebras de Banach.

Ejemplos

1) Si T es un espacio topológico, $\mathcal{C}_b(T)$ con el producto puntual es un álgebra de Banach conmutativa unital. Si L es un espacio topológico localmente compacto y separado, $\mathcal{C}_0(L)$ es un ideal cerrado de $\mathcal{C}_b(L)$, por lo que $\mathcal{C}_0(L)$ es un álgebra de Banach conmutativa. En particular, si K es un espacio topológico compacto y separado, $\mathcal{C}(K)$ es un álgebra de Banach conmutativa unital. $\mathcal{C}_0(L)$ tiene unidad si, y sólo si, L es compacto.
2) Si X es un espacio normado, $L(X)$ con la composición de operadores como producto es un álgebra normada unital. Si X es completo, $L(X)$ es un álgebra de Banach unital y $K(X)$ y $W(X)$ son ideales biláteros cerrados de $L(X)$ por lo que son álgebras de Banach. $K(X)$ tiene unidad si, y sólo si, X es de dimensión finita y $W(X)$ tiene unidad si, y sólo si, X es reflexivo.

Ejemplos

3) Si K es un subconjunto de $\mathbb{C}$ con interior no vacío, sea A la subálgebra del álgebra compleja $\mathcal{C}(K)$ formada por todas las funciones que son continuas en K y holomorfas en el interior de K.

Ejemplos

3) Si K es un subconjunto de $\mathbb{C}$ con interior no vacío, sea A la subálgebra del álgebra compleja $\mathcal{C}(K)$ formada por todas las funciones que son continuas en K y holomorfas en el interior de K. Entonces, A es una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(K)$, por lo que es un álgebra de Banach conmutativa unital.

Ejemplos

3) Si K es un subconjunto de $\mathbb{C}$ con interior no vacío, sea A la subálgebra del álgebra compleja $\mathcal{C}(K)$ formada por todas las funciones que son continuas en K y holomorfas en el interior de K. Entonces, A es una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(K)$, por lo que es un álgebra de Banach conmutativa unital. Si $K = \mathbb{D}$ a A se la nota por $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ y se le llama el **álgebra disco.**

Ejemplos

4) Sea $\ell_1(\mathbb{Z}) = \left\{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x(k)| < \infty\right\}$ con la norma

$$\|x\| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x(k)| \,.$$

Ejemplos

4) Sea $\ell_1(\mathbb{Z}) = \left\{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x(k)| < \infty\right\}$ con la norma

$$\|x\| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x(k)| \,.$$

Definamos para $x, y \in \ell_1(\mathbb{Z})$,

$$(x * y)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(n-k)y(k) \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

Ejemplos

4) Sea $\ell_1(\mathbb{Z}) = \left\{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x(k)| < \infty\right\}$ con la norma

$$\|x\| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x(k)| \,.$$

Definamos para $x, y \in \ell_1(\mathbb{Z})$,

$$(x * y)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(n-k)y(k) \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

entonces se tiene

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |(x * y)(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x(n-k)|\,|y(k)|$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |y(k)| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n-k)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |y(k)|\,\|x\| = \|x\|\,\|y\| \,.$$

Teniendo en cuenta que

$$e_n * e_m = e_{n+m} \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$

y la continuidad del producto, se sigue que el producto es asociativo y conmutativo y, por tanto, $\ell_1(\mathbb{Z})$ con el producto definido es un álgebra de Banach conmutativa unital que recibe el nombre de **álgebra de Wiener**.

Ejemplos

5) En $L_1(\mathbb{R})$ consideremos el producto de convolución: Si $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$ se define

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Ejemplos

5) En $L_1(\mathbb{R})$ consideremos el producto de convolución: Si $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$ se define

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\, dy.$$

Utilizando los Teoremas de Fubini y Tonelli se tiene:

Ejemplos

5) En $L_1(\mathbb{R})$ consideremos el producto de convolución: Si $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$ se define

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Utilizando los Teoremas de Fubini y Tonelli se tiene:

$$\|f * g\| = \int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)| \; dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| \; dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \; dx \right) \; dy = \|f\| \, \|g\| \, .$$

Ejemplos

5) En $L_1(\mathbb{R})$ consideremos el producto de convolución: Si $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$ se define

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Utilizando los Teoremas de Fubini y Tonelli se tiene:

$$\|f * g\| = \int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)|\ dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\ dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\ dx \right)\ dy = \|f\|\,\|g\|\,.$$

Es rutinario comprobar que el producto de convolución es asociativo y conmutativo con lo que $L_1(\mathbb{R})$ se convierte en un álgebra de Banach conmutativa.

Proposición

1. El cierre de una subálgebra (resp. ideal) de un álgebra normada es una subálgebra (resp. ideal).

Proposición

1. El cierre de una subálgebra (resp. ideal) de un álgebra normada es una subálgebra (resp. ideal).
2. El cociente de un álgebra normada (resp. de Banach) por un ideal cerrado es un álgebra normada (resp. de Banach).

Proposición

1. El cierre de una subálgebra (resp. ideal) de un álgebra normada es una subálgebra (resp. ideal).
2. El cociente de un álgebra normada (resp. de Banach) por un ideal cerrado es un álgebra normada (resp. de Banach).

Proposición

Sea A un álgebra normada. Existe un álgebra de Banach $\hat{A}$ y un isomorfismo isométrico de álgebras ϕ de A sobre una subálgebra densa de $\hat{A}$.

Proposición

1. El cierre de una subálgebra (resp. ideal) de un álgebra normada es una subálgebra (resp. ideal).
2. El cociente de un álgebra normada (resp. de Banach) por un ideal cerrado es un álgebra normada (resp. de Banach).

Proposición

Sea A un álgebra normada. Existe un álgebra de Banach $\hat{A}$ y un isomorfismo isométrico de álgebras ϕ de A sobre una subálgebra densa de $\hat{A}$. El par $(\hat{A}, \phi)$ es único, salvo isomorfismos de álgebras isométricos, y se dice que $\hat{A}$ es la **completación** del álgebra normada A.

Proposición

1. El cierre de una subálgebra (resp. ideal) de un álgebra normada es una subálgebra (resp. ideal).
2. El cociente de un álgebra normada (resp. de Banach) por un ideal cerrado es un álgebra normada (resp. de Banach).

Proposición

Sea A un álgebra normada. Existe un álgebra de Banach $\hat{A}$ y un isomorfismo isométrico de álgebras ϕ de A sobre una subálgebra densa de $\hat{A}$. El par $(\hat{A}, \phi)$ es único, salvo isomorfismos de álgebras isométricos, y se dice que $\hat{A}$ es la **completación** del álgebra normada A. Como es usual, se identifica A con $\phi(A)$, con lo que A es una subálgebra de $\hat{A}$.

Proposición

1. El cierre de una subálgebra (resp. ideal) de un álgebra normada es una subálgebra (resp. ideal).
2. El cociente de un álgebra normada (resp. de Banach) por un ideal cerrado es un álgebra normada (resp. de Banach).

Proposición

Sea A un álgebra normada. Existe un álgebra de Banach $\hat{A}$ y un isomorfismo isométrico de álgebras ϕ de A sobre una subálgebra densa de $\hat{A}$. El par $(\hat{A}, \phi)$ es único, salvo isomorfismos de álgebras isométricos, y se dice que $\hat{A}$ es la **completación** del álgebra normada A. Como es usual, se identifica A con $\phi(A)$, con lo que A es una subálgebra de $\hat{A}$. Si A tiene unidad I, entonces I es unidad de $\hat{A}$ y $\hat{A}$ es conmutativa si, y sólo si, A es conmutativa.

Proposición

Sea A un álgebra normada. En el espacio vectorial $A \times \mathbb{K}$ se define el producto:

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \beta\alpha) \quad (x, y \in A, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K})$$

Proposición

Sea A un álgebra normada. En el espacio vectorial $A \times \mathbb{K}$ se define el producto:

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \beta\alpha) \quad (x, y \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K})$$

y la norma

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha| \quad (x \in A,\ \alpha \in \mathbb{K}).$$

Proposición

Sea A un álgebra normada. En el espacio vectorial $A \times \mathbb{K}$ se define el producto:

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \beta\alpha) \quad (x, y \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K})$$

y la norma

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha| \quad (x \in A,\ \alpha \in \mathbb{K}).$$

Entonces $A \times \mathbb{K}$ es un álgebra normada unital que es completa si, y sólo si, lo es A.

Proposición

Sea A un álgebra normada. En el espacio vectorial $A \times \mathbb{K}$ se define el producto:

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \beta\alpha) \quad (x, y \in A, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K})$$

y la norma

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha| \quad (x \in A, \ \alpha \in \mathbb{K}).$$

Entonces $A \times \mathbb{K}$ es un álgebra normada unital que es completa si, y sólo si, lo es A. Si se identifica A con $A \times \{0\}$, A es un ideal cerrado de $A \times \mathbb{K}$.

Proposición

Sea A un álgebra normada. En el espacio vectorial $A \times \mathbb{K}$ se define el producto:

$$(x,\alpha)(y,\beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \beta\alpha) \quad (x, y \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K})$$

y la norma

$$\|(x,\alpha)\| = \|x\| + |\alpha| \quad (x \in A,\ \alpha \in \mathbb{K}).$$

Entonces $A \times \mathbb{K}$ es un álgebra normada unital que es completa si, y sólo si, lo es A. Si se identifica A con $A \times \{0\}$, A es un ideal cerrado de $A \times \mathbb{K}$. Se nota a $A \times \mathbb{K}$ por A_1 y se le llama la **unitización** de A.

Proposición

Sea A un álgebra normada. Se define, para cada $a \in A$, la aplicación L_a de A en A mediante $L_a(x) = ax \quad (x \in A)$. Se verifica:

Proposición

Sea A un álgebra normada. Se define, para cada $a \in A$, la aplicación L_a de A en A mediante $L_a(x) = ax \quad (x \in A)$. Se verifica:

1. $L_a \in L(A)$ y $\|L_a\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$.

Proposición

Sea A un álgebra normada. Se define, para cada $a \in A$, la aplicación L_a de A en A mediante $L_a(x) = ax \quad (x \in A)$. Se verifica:

1. $L_a \in L(A)$ y $\|L_a\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$.
2. La aplicación $\psi : A \to L(A)$ definida por

$$\psi(a) = L_a \quad (a \in A)$$

   es un homomorfismo de álgebras continuo.

Proposición

Sea A un álgebra normada. Se define, para cada $a \in A$, la aplicación L_a de A en A mediante $L_a(x) = ax \quad (x \in A)$. Se verifica:

1. $L_a \in L(A)$ y $\|L_a\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$.
2. La aplicación $\psi : A \to L(A)$ definida por
$$\psi(a) = L_a \quad (a \in A)$$
es un homomorfismo de álgebras continuo.
3. Si A tiene unidad $I \neq 0$, ψ es un monomorfismo topológico. En consecuencia, si se define
$$|||a||| = \|L_a\| \quad (a \in A)$$
se obtiene una norma equivalente en A con la cual A es un álgebra normada unital.

Proposición

Sea A un álgebra normada. Se define, para cada $a \in A$, la aplicación L_a de A en A mediante $L_a(x) = ax \quad (x \in A)$. Se verifica:

1. $L_a \in L(A)$ y $\|L_a\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$.
2. La aplicación $\psi : A \to L(A)$ definida por
$$\psi(a) = L_a \quad (a \in A)$$
es un homomorfismo de álgebras continuo.
3. Si A tiene unidad $I \neq 0$, ψ es un monomorfismo topológico. En consecuencia, si se define
$$|||a||| = \|L_a\| \quad (a \in A)$$
se obtiene una norma equivalente en A con la cual A es un álgebra normada unital.
4. Si A es unital, entonces ψ es isométrica.

Corolario

Si A es un álgebra normada, existe un espacio de Banach X y un isomorfismo de álgebras, isométrico, de A sobre una subálgebra de $L(X)$.

Corolario

Si A es un álgebra normada, existe un espacio de Banach X y un isomorfismo de álgebras, isométrico, de A sobre una subálgebra de $L(X)$.

Vamos ya a realizar el estudio de la inversibilidad en un álgebra de Banach unital, donde aparecerán los resultados más importantes del tema. En nuestro estudio nos será de utilidad el siguiente concepto.

Definición

Sea A un álgebra normada y $a \in A$, se define el ***radio espectral*** *de a, $r(a)$, mediante*

$$r(a) = \inf \left\{ \|a^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definición

*Sea A un álgebra normada y $a \in A$, se define el **radio espectral** de a, $r(a)$, mediante*

$$r(a) = \inf \left\{ \|a^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Es claro de la definición que $0 \leq r(a) \leq \|a\|$ y que $r(\lambda a) = |\lambda|\, r(a)$ para cualesquiera $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Definición

Sea A un álgebra normada y $a \in A$, se define el ***radio espectral*** *de a, $r(a)$, mediante*

$$r(a) = \inf \left\{ \|a^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Es claro de la definición que $0 \leq r(a) \leq \|a\|$ y que $r(\lambda a) = |\lambda|\, r(a)$ para cualesquiera $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Lema

Si A es un álgebra normada, se verifica que

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

para cada $a \in A$.

Definición

Si A es un álgebra con unidad I, se dice que un elemento $a \in A$ es ***inversible*** *si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = I$, en cuyo caso b es único, se llama el* ***inverso*** *de a y se le nota por $b = a^{-1}$.*

Definición

Si A es un álgebra con unidad I, se dice que un elemento $a \in A$ es ***inversible*** *si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = I$, en cuyo caso b es único, se llama el* ***inverso*** *de a y se le nota por $b = a^{-1}$. Se nota $Inv(A)$ al conjunto de los elementos inversibles de A. Es claro que $Inv(A)$, con el producto de A, es un grupo.*

Definición

*Si A es un álgebra con unidad I, se dice que un elemento $a \in A$ es **inversible** si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = I$, en cuyo caso b es único, se llama el **inverso** de a y se le nota por $b = a^{-1}$. Se nota $Inv(A)$ al conjunto de los elementos inversibles de A. Es claro que $Inv(A)$, con el producto de A, es un grupo.*

Proposición

Sea A un álgebra de Banach unital. Si $a \in A$ y $r(a) < 1$, entonces la serie $\sum_{n \geq 0} a^n$ es convergente, $I - a \in Inv(A)$ y $(I - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach unital.

1. Si $a \in A$ con $\|I - a\| < 1$, entonces $a \in Inv(A)$ y $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - a)^n$.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach unital.

1. Si $a \in A$ con $\|I - a\| < 1$, entonces $a \in Inv(A)$ y $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I - a)^n$.
2. $Inv(A)$ es un subconjunto abierto de A. De hecho, si $a \in Inv(A)$ entonces

Teorema

Sea A un álgebra de Banach unital.

1. Si $a \in A$ con $\|I - a\| < 1$, entonces $a \in Inv(A)$ y $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I - a)^n$.
2. $Inv(A)$ es un subconjunto abierto de A. De hecho, si $a \in Inv(A)$ entonces

$$B(a, \left\|a^{-1}\right\|^{-1}) \subseteq Inv(A).$$

Teorema

Sea A un álgebra de Banach unital.

1. Si $a \in A$ con $\|I - a\| < 1$, entonces $a \in Inv(A)$ y $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I - a)^n$.
2. $Inv(A)$ es un subconjunto abierto de A. De hecho, si $a \in Inv(A)$ entonces
$$B(a, \left\|a^{-1}\right\|^{-1}) \subseteq Inv(A).$$
3. La aplicación $J : Inv(A) \to Inv(A)$ definida por
$$J(a) = a^{-1} \quad (a \in Inv(A))$$
es una biyección Fréchet diferenciable

Teorema

Sea A un álgebra de Banach unital.

1. Si $a \in A$ con $\|I - a\| < 1$, entonces $a \in Inv(A)$ y $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I - a)^n$.
2. $Inv(A)$ es un subconjunto abierto de A. De hecho, si $a \in Inv(A)$ entonces
$$B(a, \left\|a^{-1}\right\|^{-1}) \subseteq Inv(A).$$
3. La aplicación $J : Inv(A) \to Inv(A)$ definida por
$$J(a) = a^{-1} \quad (a \in Inv(A))$$
es una biyección Fréchet diferenciable con
$$DJ(a)(x) = -a^{-1}xa^{-1} \quad (a \in Inv(a),\ x \in A).$$

Corolario

Sea A un álgebra de Banach unital y M un ideal propio de A, entonces $d(I, M) = 1$. En consecuencia, se verifica:

Corolario

Sea A un álgebra de Banach unital y M un ideal propio de A, entonces $d(I, M) = 1$. En consecuencia, se verifica:

1. $\overline{M}$ es un ideal propio de A.

Corolario

Sea A un álgebra de Banach unital y M un ideal propio de A, entonces $d(I, M) = 1$. En consecuencia, se verifica:

1. $\overline{M}$ es un ideal propio de A.
2. Todo ideal maximal de A es cerrado.

Corolario

Sea A un álgebra de Banach unital y M un ideal propio de A, entonces $d(I, M) = 1$. En consecuencia, se verifica:

1. $\overline{M}$ es un ideal propio de A.
2. Todo ideal maximal de A es cerrado.
3. El cociente de A por un ideal propio cerrado es tambien un álgebra de Banach unital.

Corolario

Sea A un álgebra de Banach unital y M un ideal propio de A, entonces $d(I, M) = 1$. En consecuencia, se verifica:

1. $\overline{M}$ es un ideal propio de A.
2. Todo ideal maximal de A es cerrado.
3. El cociente de A por un ideal propio cerrado es tambien un álgebra de Banach unital.

Definición

Se dice que un elemento a de un álgebra normada A es ***divisor topológico de cero por la izquierda*** *(resp.* ***por la derecha, bilátero****) si existe una sucesión* $\{x_n\}$ *en* S_A *tal que* $\{\|ax_n\|\} \to 0$ *(resp.* $\{\|x_n a\|\} \to 0$, $\{\|ax_n\| + \|x_n a\|\} \to 0$).

Corolario

Sea A un álgebra de Banach unital y M un ideal propio de A, entonces $d(I, M) = 1$. En consecuencia, se verifica:

1. $\overline{M}$ es un ideal propio de A.
2. Todo ideal maximal de A es cerrado.
3. El cociente de A por un ideal propio cerrado es tambien un álgebra de Banach unital.

Definición

*Se dice que un elemento a de un álgebra normada A es **divisor topológico de cero por la izquierda** (resp. **por la derecha, bilátero**) si existe una sucesión $\{x_n\}$ en S_A tal que $\{\|ax_n\|\} \to 0$ (resp. $\{\|x_n a\|\} \to 0$, $\{\|ax_n\| + \|x_n a\|\} \to 0$). Es claro que si A tiene unidad, un divisor topológico de cero no puede ser inversible.*

Lema

Sea A un álgebra de Banach unital y $\{a_n\}$ una sucesión en $Inv(A)$, convergente hacia un elemento $a \notin Inv(A)$. Entonces $\{\|a_n^{-1}\|\} \to +\infty$.

Lema

Sea A un álgebra de Banach unital y $\{a_n\}$ una sucesión en $Inv(A)$, convergente hacia un elemento $a \notin Inv(A)$. Entonces $\{\|a_n^{-1}\|\} \to +\infty$.

Proposición

Si A es un álgebra de Banach unital, todo elemento de la frontera del conjunto de los inversibles de A es divisor topológico de cero bilátero.

Corolario

Sea B un álgebra de Banach unital y A una subálgebra cerrada de B tal que $I \in A$. Entonces $Inv(A) \subseteq Inv(B)$ y la frontera de $Inv(A)$ está contenida en la frontera de $Inv(B)$.

Corolario

Sea B un álgebra de Banach unital y A una subálgebra cerrada de B tal que $I \in A$. Entonces $Inv(A) \subseteq Inv(B)$ y la frontera de $Inv(A)$ está contenida en la frontera de $Inv(B)$.

Corolario

Sea A una subálgebra cerrada de un álgebra de Banach unital B tal que $I \in A$. Entonces $Inv(A)$ es la unión de una cierta familia de componentes conexas del conjunto $Inv(B) \cap A$.

Definición

*Sea A un álgebra compleja con unidad I y $x \in A$, se define el **espectro** de x mediante*

$$Sp(A, x) = \{z \in \mathbb{C} : zI - x \notin Inv(A)\}$$

y se escribe $Sp(x)$ si no hay lugar a confusión.

Definición

Sea A un álgebra compleja con unidad I y $x \in A$, se define el ***espectro*** *de x mediante*

$$Sp(A, x) = \{z \in \mathbb{C} : zI - x \notin Inv(A)\}$$

y se escribe $Sp(x)$ si no hay lugar a confusión. Se define la ***función resolvente*** *del elemento x por*

$$R(x, \cdot) : \mathbb{C} \setminus Sp(x) \to A$$

$$R(x, z) = (zI - x)^{-1} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus Sp(x)).$$

Ejemplos

1. Si A es el álgebra de las fracciones racionales en una indeterminada con coeficientes complejos, todo elemento de A que no sea múltiplo de la unidad tiene espectro vacío.

Ejemplos

1. Si A es el álgebra de las fracciones racionales en una indeterminada con coeficientes complejos, todo elemento de A que no sea múltiplo de la unidad tiene espectro vacío.
2. Si A es el álgebra de las funciones polinómicas de $[0, 1]$ en $\mathbb{C}$, entonces el espectro de cualquier elemento que no sea un múltiplo de la unidad es $\mathbb{C}$.

Ejemplos

1. Si A es el álgebra de las fracciones racionales en una indeterminada con coeficientes complejos, todo elemento de A que no sea múltiplo de la unidad tiene espectro vacío.
2. Si A es el álgebra de las funciones polinómicas de $[0,1]$ en $\mathbb{C}$, entonces el espectro de cualquier elemento que no sea un múltiplo de la unidad es $\mathbb{C}$.
3. Si T es cualquier espacio topológico y A es el álgebra compleja $\mathcal{C}_b(T)$, entonces, para $f \in A$, se tiene $Sp(A,f) = \overline{f(T)}$.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach compleja unital, $x \in A$ y R la función resolvente de x.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach compleja unital, $x \in A$ y R la función resolvente de x.

1) $Sp(x)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. De hecho,

$$Sp(x) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r(x)\}.$$

Teorema

Sea A un álgebra de Banach compleja unital, $x \in A$ y R la función resolvente de x.

1) $Sp(x)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. De hecho,

$$Sp(x) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r(x)\}.$$

2) R es una función holomorfa en $\mathbb{C} \backslash Sp(x)$ con

$$R'(z) = -R(z)^2 \quad (z \in \mathbb{C} \backslash Sp(x)).$$

Teorema

Sea A un álgebra de Banach compleja unital, $x \in A$ y R la función resolvente de x.

1) $Sp(x)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. De hecho,

$$Sp(x) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r(x)\}.$$

2) R es una función holomorfa en $\mathbb{C} \backslash Sp(x)$ con

$$R'(z) = -R(z)^2 \quad (z \in \mathbb{C} \backslash Sp(x)).$$

3) Si $|z| > r(x)$, entonces

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z^{n+1}}.$$

Teorema

4) Si $|z| > \|x\|$, entonces

$$\|R(z)\| \leq \frac{1}{|z| - \|x\|}$$

y, en particular, $\lim_{z \to \infty} R(z) = 0$.

Teorema

4) Si $|z| > \|x\|$, entonces

$$\|R(z)\| \leq \frac{1}{|z| - \|x\|}$$

y, en particular, $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$.

5) $Sp(x)$ es no vacío.

Teorema

4) Si $|z| > \|x\|$, entonces

$$\|R(z)\| \leq \frac{1}{|z| - \|x\|}$$

y, en particular, $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$.

5) $Sp(x)$ es no vacío.

Corolario

El espectro de un elemento de un álgebra normada compleja con unidad no es vacío.

Corolario (Teorema de Gelfand-Mazur)

$\mathbb{C}$ es la única álgebra normada compleja con unidad en la que todo elemento no nulo es inversible.

Corolario (Teorema de Gelfand-Mazur)

$\mathbb{C}$ es la única álgebra normada compleja con unidad en la que todo elemento no nulo es inversible.

Corolario

Sea A un álgebra de Banach compleja unital que no tiene divisores topológicos de cero biláteros. Entonces A es isométricamente isomorfa a $\mathbb{C}$

Corolario (Teorema de Gelfand-Mazur)

$\mathbb{C}$ es la única álgebra normada compleja con unidad en la que todo elemento no nulo es inversible.

Corolario

Sea A un álgebra de Banach compleja unital que no tiene divisores topológicos de cero biláteros. Entonces A es isométricamente isomorfa a $\mathbb{C}$

Teorema (Fórmula de Gelfand-Beurling)

Sea A un álgebra de Banach compleja unital y $x \in A$. Se verifica

$$\max\{|z| : z \in Sp(x)\} = r(x).$$

Proposición

Sea B un álgebra de Banach unital, A una subálgebra cerrada de B que contiene a la unidad de B y $x \in A$. Se verifica:

Proposición

Sea B un álgebra de Banach unital, A una subálgebra cerrada de B que contiene a la unidad de B y $x \in A$. Se verifica:

1. $Sp(B, x) \subseteq Sp(A, x)$.

Proposición

Sea B un álgebra de Banach unital, A una subálgebra cerrada de B que contiene a la unidad de B y $x \in A$. Se verifica:

1. $Sp(B, x) \subseteq Sp(A, x)$.
2. $Fr\ Sp(A, x) \subseteq Fr\ Sp(B, x)$. En particular, si $Sp(A, x)$ tiene interior vacío, se tiene que $Sp(A, x) = Sp(B, x)$.

Proposición

Sea B un álgebra de Banach unital, A una subálgebra cerrada de B que contiene a la unidad de B y $x \in A$. Se verifica:

1. $Sp(B,x) \subseteq Sp(A,x)$.
2. $Fr\ Sp(A,x) \subseteq Fr\ Sp(B,x)$. En particular, si $Sp(A,x)$ tiene interior vacío, se tiene que $Sp(A,x) = Sp(B,x)$.
3. $Sp(A,x)$ es la unión de $Sp(B,x)$ con una cierta familia (posiblemente vacía) de componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus Sp(B,x)$.

Proposición

Sea B un álgebra de Banach unital, A una subálgebra cerrada de B que contiene a la unidad de B y $x \in A$. Se verifica:

1. $Sp(B,x) \subseteq Sp(A,x)$.
2. $Fr\ Sp(A,x) \subseteq Fr\ Sp(B,x)$. En particular, si $Sp(A,x)$ tiene interior vacío, se tiene que $Sp(A,x) = Sp(B,x)$.
3. $Sp(A,x)$ es la unión de $Sp(B,x)$ con una cierta familia (posiblemente vacía) de componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \backslash Sp(B,x)$. En consecuencia, si $\mathbb{C} \backslash Sp(B,x)$ es conexo (por ejemplo, si $Sp(B,x) \subseteq \mathbb{R}$), entonces $Sp(A,x) = Sp(B,x)$.

Corolario

Sea B un álgebra de Banach unital, $x \in B$ y Γ un subconjunto de $\mathbb{C}$ que corte a cada componente conexa acotada de $\mathbb{C} \backslash Sp(B, x)$.

Corolario

Sea B un álgebra de Banach unital, $x \in B$ y Γ un subconjunto de $\mathbb{C}$ que corte a cada componente conexa acotada de $\mathbb{C} \backslash Sp(B, x)$. Sea A la mínima subálgebra cerrada de B tal que $I, x \in A$ y $(zI - x)^{-1} \in A$ para todo $z \in \Gamma$.

Corolario

Sea B un álgebra de Banach unital, $x \in B$ y Γ un subconjunto de $\mathbb{C}$ que corte a cada componente conexa acotada de $\mathbb{C} \backslash Sp(B, x)$. Sea A la mínima subálgebra cerrada de B tal que $I, x \in A$ y $(zI - x)^{-1} \in A$ para todo $z \in \Gamma$. Entonces

$$Sp(A, x) = Sp(B, x).$$

Corolario

Sea B un álgebra de Banach unital, $x \in B$ y Γ un subconjunto de $\mathbb{C}$ que corte a cada componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus Sp(B, x)$. Sea A la mínima subálgebra cerrada de B tal que $I, x \in A$ y $(zI - x)^{-1} \in A$ para todo $z \in \Gamma$. Entonces

$$Sp(A, x) = Sp(B, x).$$

En particular, si $\mathbb{C} \setminus Sp(B, x)$ es conexo, se puede tomar $\Gamma = \emptyset$ y A es la subálgebra cerrada de B engendrada por I y x.

Corolario

Sea B un álgebra de Banach unital, $x \in B$ y Γ un subconjunto de $\mathbb{C}$ que corte a cada componente conexa acotada de $\mathbb{C} \backslash Sp(B, x)$. Sea A la mínima subálgebra cerrada de B tal que $I, x \in A$ y $(zI - x)^{-1} \in A$ para todo $z \in \Gamma$. Entonces

$$Sp(A, x) = Sp(B, x).$$

En particular, si $\mathbb{C} \backslash Sp(B, x)$ es conexo, se puede tomar $\Gamma = \emptyset$ y A es la subálgebra cerrada de B engendrada por I y x.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach unital, $x \in A$ y Ω un abierto de $\mathbb{C}$ con $Sp(x) \subseteq \Omega$. Existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in A, \ \|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad Sp(y) \subseteq \Omega.$$

Lema

Sea A un álgebra de Banach y f un homomorfismo de A en $\mathbb{K}$ Entonces f es continuo y $\|f\| \leq 1$. Además, si A es unital y $f \neq 0$, se verifica que $\|f\| = f(I) = 1$.

Lema

Sea A un álgebra de Banach y f un homomorfismo de A en $\mathbb{K}$ Entonces f es continuo y $\|f\| \leq 1$. Además, si A es unital y $f \neq 0$, se verifica que $\|f\| = f(I) = 1$.

Lema

Sea A un álgebra de Banach unital. El conjunto de los homomorfismos no nulos de A en $\mathbb{K}$ es un subconjunto w^*-compacto de la esfera unidad de A^*.

Lema

Sea A un álgebra de Banach y f un homomorfismo de A en $\mathbb{K}$ Entonces f es continuo y $\|f\| \leq 1$. Además, si A es unital y $f \neq 0$, se verifica que $\|f\| = f(I) = 1$.

Lema

Sea A un álgebra de Banach unital. El conjunto de los homomorfismos no nulos de A en $\mathbb{K}$ es un subconjunto w^*-compacto de la esfera unidad de A^*.

Lema

Sea A un álgebra conmutativa con unidad.

1. Todo elemento no inversible de A pertenece a un ideal maximal de A.

Lema

Sea A un álgebra de Banach y f un homomorfismo de A en $\mathbb{K}$ Entonces f es continuo y $\|f\| \leq 1$. Además, si A es unital y $f \neq 0$, se verifica que $\|f\| = f(I) = 1$.

Lema

Sea A un álgebra de Banach unital. El conjunto de los homomorfismos no nulos de A en $\mathbb{K}$ es un subconjunto w^*-compacto de la esfera unidad de A^*.

Lema

Sea A un álgebra conmutativa con unidad.

1. Todo elemento no inversible de A pertenece a un ideal maximal de A.
2. Si M es un ideal maximal de A entonces A/M es un álgebra de división (todo elemento no nulo es inversible).

Teorema

Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa unital. Los ideales maximales de A coinciden con los núcleos de los homomorfismos no nulos de A en $\mathbb{C}$

Definición

*Un **álgebra de Gelfand** es un álgebra de Banach compleja y conmutativa.*

Definición

*Un **álgebra de Gelfand** es un álgebra de Banach compleja y conmutativa. Si A es una tal álgebra, un **carácter** de A es un epimorfismo de álgebras de A en* $\mathbb{C}$.

Definición

Un ***álgebra de Gelfand*** *es un álgebra de Banach compleja y conmutativa. Si A es una tal álgebra, un* ***carácter*** *de A es un epimorfismo de álgebras de A en $\mathbb{C}$. Notaremos por Ω_A al conjunto de caracteres de A. Los resultados precedentes ponen de manifiesto que $\Omega_A \neq \emptyset$ si A es un álgebra de Gelfand unital.*

Definición

*Un **álgebra de Gelfand** es un álgebra de Banach compleja y conmutativa. Si A es una tal álgebra, un **carácter** de A es un epimorfismo de álgebras de A en $\mathbb{C}$. Notaremos por Ω_A al conjunto de caracteres de A. Los resultados precedentes ponen de manifiesto que $\Omega_A \neq \emptyset$ si A es un álgebra de Gelfand unital. En Ω_A consideraremos siempre la topología débil-$*$ que convierte a Ω_A en un espacio topológico compacto y separado.*

Definición

*Un **álgebra de Gelfand** es un álgebra de Banach compleja y conmutativa. Si A es una tal álgebra, un **carácter** de A es un epimorfismo de álgebras de A en $\mathbb{C}$. Notaremos por Ω_A al conjunto de caracteres de A. Los resultados precedentes ponen de manifiesto que $\Omega_A \neq \emptyset$ si A es un álgebra de Gelfand unital. En Ω_A consideraremos siempre la topología débil-$*$ que convierte a Ω_A en un espacio topológico compacto y separado. Si A es un álgebra de Gelfand unital y $a \in A$, la aplicación $\widehat{a} : \Omega_A \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\widehat{a}(f) = f(a) \quad (f \in \Omega_A)$$

*recibe el nombre de **transformada de Gelfand** del elemento a.*

Definición

*Un **álgebra de Gelfand** es un álgebra de Banach compleja y conmutativa. Si A es una tal álgebra, un **carácter** de A es un epimorfismo de álgebras de A en $\mathbb{C}$. Notaremos por Ω_A al conjunto de caracteres de A. Los resultados precedentes ponen de manifiesto que $\Omega_A \neq \emptyset$ si A es un álgebra de Gelfand unital. En Ω_A consideraremos siempre la topología débil-$*$ que convierte a Ω_A en un espacio topológico compacto y separado. Si A es un álgebra de Gelfand unital y $a \in A$, la aplicación $\widehat{a} : \Omega_A \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\widehat{a}(f) = f(a) \quad (f \in \Omega_A)$$

*recibe el nombre de **transformada de Gelfand** del elemento a. Puesto que evidentemente $\widehat{a} \in \mathcal{C}(\Omega_A)$, $\forall a \in A$, aparece una aplicación $a \mapsto \widehat{a}$, de A en $\mathcal{C}(\Omega_A)$, que se denomina **transformación de Gelfand** de A y cuya imagen notaremos por $\widehat{A} = \{\widehat{a} : a \in A\}$.*

Teorema

Sea A un álgebra de Gelfand unital.

Teorema

Sea A un álgebra de Gelfand unital.

1. La transformación de Gelfand es un homomorfismo de álgebras de A en $\mathcal{C}(\Omega_A)$ que aplica la unidad de A en la unidad de $\mathcal{C}(\Omega_A)$.

Teorema

Sea A un álgebra de Gelfand unital.

1. La transformación de Gelfand es un homomorfismo de álgebras de A en $\mathcal{C}(\Omega_A)$ que aplica la unidad de A en la unidad de $\mathcal{C}(\Omega_A)$.
2. Para cada $a \in A$, $Sp(A, a) = \{\widehat{a}(f) : f \in \Omega_A\} = Sp(\mathcal{C}(\Omega_A), \widehat{a})$.

Teorema

Sea A un álgebra de Gelfand unital.

1. La transformación de Gelfand es un homomorfismo de álgebras de A en $\mathcal{C}(\Omega_A)$ que aplica la unidad de A en la unidad de $\mathcal{C}(\Omega_A)$.
2. Para cada $a \in A$, $Sp(A, a) = \{\widehat{a}(f) : f \in \Omega_A\} = Sp(\mathcal{C}(\Omega_A), \widehat{a})$.
3. $||\widehat{a}|| = r(a) \leq ||a||$ para todo $a \in A$. En consecuencia, la transformación de Gelfand es continua y de norma uno.

Teorema

Sea A un álgebra de Gelfand unital.

1. La transformación de Gelfand es un homomorfismo de álgebras de A en $\mathcal{C}(\Omega_A)$ que aplica la unidad de A en la unidad de $\mathcal{C}(\Omega_A)$.
2. Para cada $a \in A$, $Sp(A,a) = \{\widehat{a}(f) : f \in \Omega_A\} = Sp(\mathcal{C}(\Omega_A), \widehat{a})$.
3. $||\widehat{a}|| = r(a) \leq ||a||$ para todo $a \in A$. En consecuencia, la transformación de Gelfand es continua y de norma uno.
4. El núcleo de la transformación de Gelfand coincide con la intersección de todos los ideales maximales de A y también coincide con el conjunto

$$\{a \in A : r(a) = 0\} = \{a \in A : Sp(A,a) = \{0\}\}.$$

Teorema

Sea A un álgebra de Gelfand unital.

1. La transformación de Gelfand es un homomorfismo de álgebras de A en $\mathcal{C}(\Omega_A)$ que aplica la unidad de A en la unidad de $\mathcal{C}(\Omega_A)$.
2. Para cada $a \in A$, $Sp(A, a) = \{\widehat{a}(f) : f \in \Omega_A\} = Sp(\mathcal{C}(\Omega_A), \widehat{a})$.
3. $||\widehat{a}|| = r(a) \leq ||a||$ para todo $a \in A$. En consecuencia, la transformación de Gelfand es continua y de norma uno.
4. El núcleo de la transformación de Gelfand coincide con la intersección de todos los ideales maximales de A y también coincide con el conjunto
$$\{a \in A : r(a) = 0\} = \{a \in A : Sp(A, a) = \{0\}\}.$$
5. $\widehat{A}$ es una subálgebra plena de $\mathcal{C}(\Omega_A)$, es decir, $Inv(\mathcal{C}(\Omega_A)) \cap \widehat{A} = Inv(\widehat{A})$.

Teorema

Sea A un álgebra de Gelfand unital.

1. La transformación de Gelfand es un homomorfismo de álgebras de A en $\mathcal{C}(\Omega_A)$ que aplica la unidad de A en la unidad de $\mathcal{C}(\Omega_A)$.
2. Para cada $a \in A$, $Sp(A, a) = \{\widehat{a}(f) : f \in \Omega_A\} = Sp(\mathcal{C}(\Omega_A), \widehat{a})$.
3. $||\widehat{a}|| = r(a) \leq ||a||$ para todo $a \in A$. En consecuencia, la transformación de Gelfand es continua y de norma uno.
4. El núcleo de la transformación de Gelfand coincide con la intersección de todos los ideales maximales de A y también coincide con el conjunto
$$\{a \in A : r(a) = 0\} = \{a \in A : Sp(A, a) = \{0\}\}.$$
5. $\widehat{A}$ es una subálgebra plena de $\mathcal{C}(\Omega_A)$, es decir, $Inv(\mathcal{C}(\Omega_A)) \cap \widehat{A} = Inv(\widehat{A})$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Entonces

$$r(a+b) \leq r(a)+r(b), \quad r(ab) \leq r(a)r(b) \quad \forall a,b \in A.$$

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Entonces

$$r(a+b) \leq r(a) + r(b), \quad r(ab) \leq r(a)r(b) \quad \forall a, b \in A.$$

Definición

Sea A un álgebra de Gelfand unital. El núcleo de la transformación de Gelfand

$$Rad(A) = \{a \in A : \widehat{a} = 0\} = \{a \in A : r(a) = 0\} = \{a \in A : Sp(A, a)$$

recibe el nombre de ***radical*** *de A.*

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Entonces

$$r(a+b) \leq r(a) + r(b), \quad r(ab) \leq r(a)r(b) \quad \forall a, b \in A.$$

Definición

Sea A un álgebra de Gelfand unital. El núcleo de la transformación de Gelfand

$$Rad(A) = \{a \in A : \widehat{a} = 0\} = \{a \in A : r(a) = 0\} = \{a \in A : Sp(A, a)$$

*recibe el nombre de **radical** de A. Se dice que A es **semisimple** si $Rad(A) = \{0\}$, es decir, si la transformación de Gelfand es inyectiva.*

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

1. A es semisimple.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

1. A es semisimple.
2. Ω_A separa los puntos de A.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

1. A es semisimple.
2. Ω_A separa los puntos de A.
3. El radio espectral es una norma en A.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

1. A es semisimple.
2. Ω_A separa los puntos de A.
3. El radio espectral es una norma en A.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

1. A es semisimple.
2. Ω_A separa los puntos de A.
3. El radio espectral es una norma en A.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach compleja y B un álgebra de Gelfand unital semisimple. Todo homomorfismo de álgebras de A en B es continuo.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

1. A es semisimple.
2. Ω_A separa los puntos de A.
3. El radio espectral es una norma en A.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach compleja y B un álgebra de Gelfand unital semisimple. Todo homomorfismo de álgebras de A en B es continuo.

Corolario

Sea $(A, ||\cdot||)$ un álgebra de Gelfand unital semisimple. Cualquier norma completa en A que haga el producto continuo es equivalente a $||\cdot||$.

Lema

Sea A un álgebra de Gelfand unital y consideremos:

$$\alpha = \inf\{||a^2|| : a \in S_A\}, \quad \beta = \inf\{r(a) : a \in S_A\}.$$

Lema

Sea A un álgebra de Gelfand unital y consideremos:

$$\alpha = \inf\{||a^2|| : a \in S_A\}, \quad \beta = \inf\{r(a) : a \in S_A\}.$$

Entonces $\beta^2 \leq \alpha \leq \beta$.

Lema

Sea A un álgebra de Gelfand unital y consideremos:

$$\alpha = \inf\{||a^2|| : a \in S_A\}, \quad \beta = \inf\{r(a) : a \in S_A\}.$$

Entonces $\beta^2 \leq \alpha \leq \beta$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

Lema

Sea A un álgebra de Gelfand unital y consideremos:

$$\alpha = \inf\{||a^2|| : a \in S_A\}, \quad \beta = \inf\{r(a) : a \in S_A\}.$$

Entonces $\beta^2 \leq \alpha \leq \beta$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

1. A es semisimple y $\widehat{A}$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(\Omega_A)$.

Lema

Sea A un álgebra de Gelfand unital y consideremos:

$$\alpha = \inf\{||a^2|| : a \in S_A\}, \quad \beta = \inf\{r(a) : a \in S_A\}.$$

Entonces $\beta^2 \leq \alpha \leq \beta$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

1. A es semisimple y $\widehat{A}$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(\Omega_A)$.
2. La transformación de Gelfand es un monomorfismo topológico.

Lema

Sea A un álgebra de Gelfand unital y consideremos:

$$\alpha = \inf\{||a^2|| : a \in S_A\}, \quad \beta = \inf\{r(a) : a \in S_A\}.$$

Entonces $\beta^2 \leq \alpha \leq \beta$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

1. A es semisimple y $\widehat{A}$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(\Omega_A)$.
2. La transformación de Gelfand es un monomorfismo topológico.
3. El radio espectral es una norma en A equivalente a la de partida.

Lema

Sea A un álgebra de Gelfand unital y consideremos:

$$\alpha = \inf\{||a^2|| : a \in S_A\}, \quad \beta = \inf\{r(a) : a \in S_A\}.$$

Entonces $\beta^2 \leq \alpha \leq \beta$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. Son equivalentes:

1. A es semisimple y $\widehat{A}$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(\Omega_A)$.
2. La transformación de Gelfand es un monomorfismo topológico.
3. El radio espectral es una norma en A equivalente a la de partida.
4. Existe $\alpha > 0$ tal que $||a^2|| \geq \alpha ||a||^2$ para todo $a \in A$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. La transformación de Gelfand es una isometría si, y sólo si, $||a^2|| = ||a||^2,$ para todo $a \in A$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. La transformación de Gelfand es una isometría si, y sólo si, $||a^2|| = ||a||^2,$ para todo $a \in A$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Se verifica una de las afirmaciones que siguen:

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. La transformación de Gelfand es una isometría si, y sólo si, $||a^2|| = ||a||^2$, para todo $a \in A$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Se verifica una de las afirmaciones que siguen:

1. Existe $f \in \Omega_A$ tal que $f(a_k) = 0, \ \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital. La transformación de Gelfand es una isometría si, y sólo si, $||a^2|| = ||a||^2$, para todo $a \in A$.

Corolario

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Se verifica una de las afirmaciones que siguen:

1. Existe $f \in \Omega_A$ tal que $f(a_k) = 0, \ \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$.
2. Existen $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ tales que $\sum_{k=1}^{n} x_k a_k = I$.

Definición

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n$ elementos de A. El conjunto

$$Sp(a_1, a_2, ..., a_n) = \{(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)) : f \in \Omega_A\}$$

recibe el nombre de ***espectro conjunto*** *de $(a_1, a_2, ..., a_n)$.*

Definición

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $n \in \mathbb{N}$ *y* $a_1, a_2, ..., a_n$ *elementos de A. El conjunto*

$$Sp(a_1, a_2, ..., a_n) = \{(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)) : f \in \Omega_A\}$$

recibe el nombre de ***espectro conjunto*** *de* $(a_1, a_2, ..., a_n)$*. Claramente* $Sp(a_1, a_2, ..., a_n)$ *es un subconjunto compacto no vacío de* $\mathbb{C}^n$ *y*

$$Sp(a_1, a_2, ..., a_n) \subseteq Sp(a_1) \times Sp(a_2) \times \cdots \times Sp(a_n).$$

Definición

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $n \in \mathbb{N}$ *y* $a_1, a_2, ..., a_n$ *elementos de A. El conjunto*

$$Sp(a_1, a_2, ..., a_n) = \{(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)) : f \in \Omega_A\}$$

recibe el nombre de ***espectro conjunto*** *de* $(a_1, a_2, ..., a_n)$. *Claramente* $Sp(a_1, a_2, ..., a_n)$ *es un subconjunto compacto no vacío de* $\mathbb{C}^n$ *y*

$$Sp(a_1, a_2, ..., a_n) \subseteq Sp(a_1) \times Sp(a_2) \times \cdots \times Sp(a_n).$$

Sea $\mathcal{P}_n$ *el álgebra de los polinomios en* n *indeterminadas que conmutan con coeficientes complejos.*

Definición

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n$ elementos de A. El conjunto

$$Sp(a_1, a_2, ..., a_n) = \{(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)) : f \in \Omega_A\}$$

recibe el nombre de ***espectro conjunto*** *de $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Claramente $Sp(a_1, a_2, ..., a_n)$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}^n$ y*

$$Sp(a_1, a_2, ..., a_n) \subseteq Sp(a_1) \times Sp(a_2) \times \cdots \times Sp(a_n).$$

Sea $\mathcal{P}_n$ el álgebra de los polinomios en n indeterminadas que conmutan con coeficientes complejos. Entonces la aplicación $P \mapsto P(a_1, a_2, ..., a_n)$, de $\mathcal{P}_n$ en A, es un homomorfismo de álgebras cuya imagen es la subálgebra de A engendrada por $\{I, a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Definición

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n$ elementos de A. El conjunto

$$Sp(a_1, a_2, ..., a_n) = \{(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)) : f \in \Omega_A\}$$

*recibe el nombre de **espectro conjunto** de $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Claramente $Sp(a_1, a_2, ..., a_n)$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}^n$ y*

$$Sp(a_1, a_2, ..., a_n) \subseteq Sp(a_1) \times Sp(a_2) \times \cdots \times Sp(a_n).$$

*Sea $\mathcal{P}_n$ el álgebra de los polinomios en n indeterminadas que conmutan con coeficientes complejos. Entonces la aplicación $P \mapsto P(a_1, a_2, ..., a_n)$, de $\mathcal{P}_n$ en A, es un homomorfismo de álgebras cuya imagen es la subálgebra de A engendrada por $\{I, a_1, a_2, ..., a_n\}$. Si esta subálgebra es densa se dice que $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ es un **sistema de generadores** de A.*

Proposición

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un sistema de generadores de A y $K = Sp(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Proposición

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un sistema de generadores de A y $K = Sp(a_1, a_2, ..., a_n)$. La aplicación $\varphi : \Omega_A \to K$ definida por

$$\varphi(f) = (f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))$$

es un homeomorfismo.

Proposición

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un sistema de generadores de A y $K = Sp(a_1, a_2, ..., a_n)$. La aplicación $\varphi : \Omega_A \to K$ definida por

$$\varphi(f) = (f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))$$

es un homeomorfismo. Si se define $\Phi : A \to \mathcal{C}(K)$ mediante

$$\Phi(a)(z) = \widehat{a}(\varphi^{-1}(z)) \quad (z \in K,\ a \in A),$$

Proposición

Sea A un álgebra de Gelfand unital, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un sistema de generadores de A y $K = Sp(a_1, a_2, ..., a_n)$. La aplicación $\varphi : \Omega_A \to K$ definida por

$$\varphi(f) = (f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))$$

es un homeomorfismo. Si se define $\Phi : A \to \mathcal{C}(K)$ mediante

$$\Phi(a)(z) = \widehat{a}(\varphi^{-1}(z)) \quad (z \in K,\ a \in A),$$

entonces Φ es un homomorfismo continuo de álgebras y toda función de $\Phi(A)$ es límite uniforme en K de una sucesión de funciones polinómicas

Definición

Sea A un álgebra y E un subconjunto no vacío de A. El conjunto

$$E^c = \{a \in A : ax = xa \, \forall x \in E\}$$

*recibe el nombre de **conmutante** de E.*

Definición

Sea A un álgebra y E un subconjunto no vacío de A. El conjunto

$$E^c = \{a \in A : ax = xa \, \forall x \in E\}$$

recibe el nombre de ***conmutante*** *de E. Escribiremos E^{cc} en lugar de $(E^c)^c$, conjunto que denominamos* ***biconmutante*** *de E.*

Definición

Sea A un álgebra y E un subconjunto no vacío de A. El conjunto

$$E^c = \{a \in A : ax = xa \, \forall x \in E\}$$

recibe el nombre de ***conmutante*** *de E. Escribiremos E^{cc} en lugar de $(E^c)^c$, conjunto que denominamos* ***biconmutante*** *de E. Se dice que E es un* ***subconjunto conmutativo*** *de A si $E \subseteq E^c$ o, lo que es lo mismo, $xy = yx$, cualesquiera que sean $x, y \in E$.*

Lema

Sea A un álgebra y E un subconjunto no vacío de A.

Lema

Sea A un álgebra y E un subconjunto no vacío de A.

1. E^c es una subálgebra de A que contiene a la unidad si A la tiene y que es cerrada si A es un álgebra normada.

Lema

Sea A un álgebra y E un subconjunto no vacío de A.

1. E^c es una subálgebra de A que contiene a la unidad si A la tiene y que es cerrada si A es un álgebra normada.
2. Si E es conmutativo, E está contenido en un subconjunto conmutativo maximal de A.

Lema

Sea A un álgebra y E un subconjunto no vacío de A.

1. E^c es una subálgebra de A que contiene a la unidad si A la tiene y que es cerrada si A es un álgebra normada.
2. Si E es conmutativo, E está contenido en un subconjunto conmutativo maximal de A.
3. Si M es un subconjunto conmutativo maximal de A, entonces $M = M^{cc}$.

Lema

Sea A un álgebra y E un subconjunto no vacío de A.

1. E^c es una subálgebra de A que contiene a la unidad si A la tiene y que es cerrada si A es un álgebra normada.
2. Si E es conmutativo, E está contenido en un subconjunto conmutativo maximal de A.
3. Si M es un subconjunto conmutativo maximal de A, entonces $M = M^{cc}$.
4. Si A tiene unidad y $x \in Inv(A)$, entonces $x^{-1} \in \{x\}^{cc}$.

Proposición

Sea A un álgebra de Banach compleja unital y E un subconjunto conmutativo de A.

Proposición

Sea A un álgebra de Banach compleja unital y E un subconjunto conmutativo de A. Entonces existe una subálgebra cerrada B de A tal que B es conmutativa, $I \in B$, $E \subseteq B$ y

$$Sp(B, x) = Sp(A, x) \quad \forall x \in B.$$

Proposición

Sea A un álgebra de Banach compleja unital y E un subconjunto conmutativo de A. Entonces existe una subálgebra cerrada B de A tal que B es conmutativa, $I \in B$, $E \subseteq B$ y

$$Sp(B, x) = Sp(A, x) \quad \forall x \in B.$$

Corolario

Sea A un álgebra de Banach compleja unital y $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un subconjunto conmutativo de A.

Proposición

Sea A un álgebra de Banach compleja unital y E un subconjunto conmutativo de A. Entonces existe una subálgebra cerrada B de A tal que B es conmutativa, $I \in B$, $E \subseteq B$ y

$$Sp(B, x) = Sp(A, x) \quad \forall x \in B.$$

Corolario

Sea A un álgebra de Banach compleja unital y $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un subconjunto conmutativo de A.

1. $Sp(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \subseteq Sp(x_1) + Sp(x_2) + \cdots + Sp(x_n)$.

Proposición

Sea A un álgebra de Banach compleja unital y E un subconjunto conmutativo de A. Entonces existe una subálgebra cerrada B de A tal que B es conmutativa, $I \in B$, $E \subseteq B$ y

$$Sp(B, x) = Sp(A, x) \quad \forall x \in B.$$

Corolario

Sea A un álgebra de Banach compleja unital y $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un subconjunto conmutativo de A.

1. $Sp(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \subseteq Sp(x_1) + Sp(x_2) + \cdots + Sp(x_n)$.
2. $Sp(x_1 x_2 \cdots x_n) \subseteq Sp(x_1) Sp(x_2) \cdots Sp(x_n)$.

Proposición

Sea A un álgebra de Banach compleja unital y E un subconjunto conmutativo de A. Entonces existe una subálgebra cerrada B de A tal que B es conmutativa, $I \in B$, $E \subseteq B$ y

$$Sp(B, x) = Sp(A, x) \quad \forall x \in B.$$

Corolario

Sea A un álgebra de Banach compleja unital y $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un subconjunto conmutativo de A.

1. $Sp(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \subseteq Sp(x_1) + Sp(x_2) + \cdots + Sp(x_n)$.
2. $Sp(x_1 x_2 \cdots x_n) \subseteq Sp(x_1)Sp(x_2) \cdots Sp(x_n)$.
3. En particular, si $x, y \in A$ con $xy = yx$, se verifica:

$$r(x + y) \leq r(x) + r(y), \quad r(xy) \leq r(x)r(y).$$

Teorema

Sea K un espacio topológico compacto separado y f un funcional lineal en $\mathcal{C}(K)$. Son equivalentes:

Teorema

Sea K un espacio topológico compacto separado y f un funcional lineal en $\mathcal{C}(K)$. Son equivalentes:

1. f es un punto extremo de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ con $f(I) = 1$.

Teorema

Sea K un espacio topológico compacto separado y f un funcional lineal en $\mathcal{C}(K)$. Son equivalentes:

1. f es un punto extremo de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ con $f(I) = 1$.
2. Existe $t \in K$ tal que $f = \delta_t$.

Teorema

Sea K un espacio topológico compacto separado y f un funcional lineal en $\mathcal{C}(K)$. Son equivalentes:

1. f es un punto extremo de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ con $f(I) = 1$.
2. Existe $t \in K$ tal que $f = \delta_t$.
3. f es un carácter de $\mathcal{C}(K)$.

Corolario

Sean K y H espacios topológicos compactos y separados. Son equivalentes:

Corolario

Sean K y H espacios topológicos compactos y separados. Son equivalentes:

1. Las álgebras $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(H)$ son isomorfas.

Corolario

Sean K y H espacios topológicos compactos y separados. Son equivalentes:

1. Las álgebras $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(H)$ son isomorfas.
2. Los espacios de Banach $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(H)$ son isométricamente isomorfos.

Corolario

Sean K y H espacios topológicos compactos y separados. Son equivalentes:

1. Las álgebras $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(H)$ son isomorfas.
2. Los espacios de Banach $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(H)$ son isométricamente isomorfos.
3. K y H son homeomorfos.

Corolario

Sean K y H espacios topológicos compactos y separados. Son equivalentes:

1. Las álgebras $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(H)$ son isomorfas.
2. Los espacios de Banach $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(H)$ son isométricamente isomorfos.
3. K y H son homeomorfos.

Corolario

Sea T un espacio topológico completamente regular. Entonces el espacio de los caracteres de $\mathcal{C}_b(T)$ es homeomorfo a $\beta(T)$, la compactación de Stone-Čech de T.

Definición

Llamaremos ***álgebra de funciones*** *a cualquier subálgebra cerrada de un espacio del tipo $\mathcal{C}(K)$, siendo K un espacio topológico compacto de Hausdorff, que contenga a las constantes y separe los puntos de K.*

Definición

Llamaremos ***álgebra de funciones*** *a cualquier subálgebra cerrada de un espacio del tipo $\mathcal{C}(K)$, siendo K un espacio topológico compacto de Hausdorff, que contenga a las constantes y separe los puntos de K. Si es necesario especificar el compacto K, se utiliza la expresión "álgebra de funciones en K".*

Definición

*Llamaremos **álgebra de funciones** a cualquier subálgebra cerrada de un espacio del tipo $\mathcal{C}(K)$, siendo K un espacio topológico compacto de Hausdorff, que contenga a las constantes y separe los puntos de K. Si es necesario especificar el compacto K, se utiliza la expresión "álgebra de funciones en K".*

Teorema

Sea A un álgebra. Son equivalentes:

Definición

*Llamaremos **álgebra de funciones** a cualquier subálgebra cerrada de un espacio del tipo $\mathcal{C}(K)$, siendo K un espacio topológico compacto de Hausdorff, que contenga a las constantes y separe los puntos de K. Si es necesario especificar el compacto K, se utiliza la expresión "álgebra de funciones en K".*

Teorema

Sea A un álgebra. Son equivalentes:

1. A es un álgebra de funciones.

Definición

Llamaremos ***álgebra de funciones*** *a cualquier subálgebra cerrada de un espacio del tipo* $\mathcal{C}(K)$, *siendo* K *un espacio topológico compacto de Hausdorff, que contenga a las constantes y separe los puntos de* K. *Si es necesario especificar el compacto* K, *se utiliza la expresión "álgebra de funciones en* K*".*

Teorema

Sea A un álgebra. Son equivalentes:

1. A es un álgebra de funciones.
2. A es un álgebra de Gelfand unital y $||a^2|| = ||a||^2$ para todo $a \in A$.

Definición

*Llamaremos **álgebra de funciones** a cualquier subálgebra cerrada de un espacio del tipo $\mathcal{C}(K)$, siendo K un espacio topológico compacto de Hausdorff, que contenga a las constantes y separe los puntos de K. Si es necesario especificar el compacto K, se utiliza la expresión "álgebra de funciones en K".*

Teorema

Sea A un álgebra. Son equivalentes:

1. A es un álgebra de funciones.
2. A es un álgebra de Gelfand unital y $||a^2|| = ||a||^2$ para todo $a \in A$.

Además, si A es un álgebra de funciones en K, entonces existe un homeomorfismo φ de K sobre un subconjunto compacto de Ω_A tal que $\widehat{a}(\varphi(t)) = a(t)$, para cada $t \in K$.

Lema

La función $f(z) = z \quad (z \in \mathbb{D})$ es un generador del álgebra disco. Equivalentemente, las funciones polinómicas en $\mathbb{D}$ son densas en el álgebra disco.

Lema

La función $f(z) = z \quad (z \in \mathbb{D})$ es un generador del álgebra disco. Equivalentemente, las funciones polinómicas en $\mathbb{D}$ son densas en el álgebra disco.

Proposición

El espacio de los caracteres del álgebra disco es homeomorfo a $\mathbb{D}$ y su transformación de Gelfand se identifica con la inclusión de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ en $\mathcal{C}(\mathbb{D})$.

Lema

La función $f(z) = z \quad (z \in \mathbb{D})$ es un generador del álgebra disco. Equivalentemente, las funciones polinómicas en $\mathbb{D}$ son densas en el álgebra disco.

Proposición

El espacio de los caracteres del álgebra disco es homeomorfo a $\mathbb{D}$ y su transformación de Gelfand se identifica con la inclusión de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ en $\mathcal{C}(\mathbb{D})$.

Corolario

Sean $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ y supongamos que, para cada z en $\mathbb{D}$, existe $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $f_k(z) \neq 0$.

Lema

La función $f(z) = z \quad (z \in \mathbb{D})$ es un generador del álgebra disco. Equivalentemente, las funciones polinómicas en $\mathbb{D}$ son densas en el álgebra disco.

Proposición

El espacio de los caracteres del álgebra disco es homeomorfo a $\mathbb{D}$ y su transformación de Gelfand se identifica con la inclusión de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ en $\mathcal{C}(\mathbb{D})$.

Corolario

Sean $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ y supongamos que, para cada z en $\mathbb{D}$, existe $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $f_k(z) \neq 0$. Entonces existen $g_1, g_2, ..., g_n \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(z) f_k(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Teorema

Sea A el álgebra de Wiener $\ell_1(\mathbb{Z})$ con el producto de convolución.

Teorema

Sea A el álgebra de Wiener $\ell_1(\mathbb{Z})$ con el producto de convolución.

1. La aplicación $f \mapsto f(e_1)$ es un homeomorfismo del espacio de los caracteres Ω_A sobre $\mathbb{T}$.

Teorema

Sea A el álgebra de Wiener $\ell_1(\mathbb{Z})$ con el producto de convolución.

1. La aplicación $f \mapsto f(e_1)$ es un homeomorfismo del espacio de los caracteres Ω_A sobre $\mathbb{T}$.
2. Si $x \in \ell_1(\mathbb{Z})$, entonces

$$\widehat{x}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) f(e_1)^n \quad \forall f \in \Omega_A.$$

Teorema

Sea A el álgebra de Wiener $\ell_1(\mathbb{Z})$ con el producto de convolución.

1. La aplicación $f \mapsto f(e_1)$ es un homeomorfismo del espacio de los caracteres Ω_A sobre $\mathbb{T}$.
2. Si $x \in \ell_1(\mathbb{Z})$, entonces

$$\widehat{x}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) f(e_1)^n \quad \forall f \in \Omega_A.$$

Corolario (Teorema de Wiener)

Si la serie de Fourier de una función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ converge absolutamente y φ no se anula, la serie de Fourier de la función $\frac{1}{\varphi}$ también es absolutamente convergente.