UNIVERSIDAD DE GRANADA

Escuela Internacional de Posgrado

Máster en Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Análisis del sistema electoral de Brasil y propuesta de mejora

Presentado por:

Sergio Fernández Sánchez

Curso académico 2021/2022

Sergio Fernández Sánchez *Análisis del sistema electoral de Brasil y propuesta de mejora*.

Trabajo de fin de Máster. Curso académico 2021/2022.

Responsables de tutorización Victoriano Ramírez González
Antonio Palomares Bautista

Máster en Matemáticas
Escuela Internacional de Posgrado
Universidad de Granada

Declaración de originalidad del TFM

D. /Dña. Sergio Fernández Sánchez, con DNI (NIE o pasaporte) 75939961-X , declaro que el presente Trabajo de Fin de Máster es original, no habiéndose utilizado fuentes sin ser citadas debidamente. De no cumplir con este compromiso, soy consciente de que, de acuerdo con la Normativa de Evaluación y de Calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada de 20 de mayo de 2013, *esto conllevará automáticamente la calificación numérica de cero [...] independientemente del resto de las calificaciones que el estudiante hubiera obtenido. Esta consecuencia debe entenderse sin perjuicio de las responsabilidades disciplinarias en las que pudieran incurrir los estudiantes que plagien*.

Y para que así conste firmo el presente documento.

En Granada, a 12 de junio de 2022

Análisis del sistema electoral de Brasil y propuesta de mejora

Sergio Fernández Sánchez

Universidad de Granada
Departamento de Matemática Aplicada
Granada, España
2022

Resumen. Dedicamos este trabajo a la propuesta de un sistema electoral alternativo en Brasil que suponga una mejora respecto al vigente en términos de representatividad y gobernabilidad. Se realiza en el capítulo 1 una lectura y síntesis de las leyes electorales y la constitución de Brasil con especial interés en los artículos que intervengan en el establecimiento del sistema electoral brasileño con el fin de que la mejora propuesta se ubique dentro del marco constitucional. Se exponen también los resultados de las últimas elecciones en Brasil para analizar los desequilibrios y faltas de representatividad y gobernabilidad así como para dar fundamento y planteamiento a la alternativa de empleo de un sistema biproporcional.

En el capítulo 2 se introducirá la axiomática de biproporcionalidad de matrices y profundizará en el empleo de métodos de divisores con el propósito de sentar una base matemática para la introducción de un algoritmo que realice un reparto biproporcional de escaños. Posteriormente este será introducido y desarrollado de forma que se explique cada paso e ilustre con ejemplos. También se incidirá en el empleo de índices para la medición la desproporcionalidad que serán introducidos y explicados al final del capítulo.

Finalmente, destinamos el capítulo 3 a la exposición de resultados. Se aplicará el algoritmo desarrollado a los datos de las últimas elecciones generales en Brasil para lo cual se empleará el software BAZI y Python. Posteriormente compararemos y analizaremos resultados, empleando como recurso para el análisis los índices de desproporcionalidad introducidos en el capítulo previo.

Notaciones

$\mathbb{R}_0^+$	Conjunto de los números reales no negativos (Sec. 1.1)
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales (Sec. 1.1)
$:=$	Definición (Sec. 1.1)
$\lfloor \cdot \rfloor$	Función de redondeo de parte entera por defecto (Sec. 1.1)
$\lceil \cdot \rceil$	Función de redondeo de parte entera por exceso (Sec. 1.1)
$\langle \cdot \rangle^-$	Función de redondeo estándar alterado (Sec. 1.1)
$v = (v_{ij})$	Matriz de votos, $v_{ij} \in [0, +\infty)$ (Sec. 1.1)
h_i	Número de escaños totales de la circunscripción i-ésima (Sec. 1.1)
q_i	Cociente electoral de la circunscripción i-ésima (Sec. 1.1)
q_{ij}	Cociente electoral partidario de la circunscripción i-ésima, partido j-ésimo (Sec. 1.1)
$\approx$	Aproximación (Sec. 1.1)
σ	Vector de restricciones del problema de proporcionalidad (Sec. 2.1)
$N = \{1, 2, \ldots, n\},\ i \in N$	Conjunto de índices para las circunscripciones (Sec. 2.1)
$M = \{1, 2, \ldots, m\},\ j \in M$	Conjunto de índices para los partidos (Sec. 2.1)
$r^-,\ r^+$	Vector de restricciones inferiores para filas; vector de restricciones superiores para filas (Sec. 2.1)
$c^-,\ c^+$	Vector de restricciones inferiores para columnas; vector de restricciones superiores para columnas (Sec. 2.1)
$h = \sum_{i \in N} h_i$	Total de escaños (Sec. 2.1)
(v, σ)	Problema de reparto proporcional (Sec. 2.1)
$R(\sigma)$	Región de asignaciones dado un vector de restricciones σ (Sec. 2.1)
$f = (f_{ij})$	Asignación de escaños (Sec. 2.1)
$F,\ A$	Método de asignación; método de reparto (Sec. 2.1)
$\langle \cdot \rangle$	Función de redondeo estándar (Sec. 2.1)
$\setminus$	Diferencia (conjuntos) (Sec. 2.1)
$[\cdot],\ [[\cdot]]$	Función de redondeo; regla de redondeo dada una función de redondeo $[\cdot]$ (Sec. 2.1)
$s(0),\ s(1),\ s(2)\ \ldots$	Secuencia de divisores (Sec. 2.1)
$A^{[[\cdot]]}$	Método de divisores con regla de redodeo $[[\cdot]]$ (Sec. 2.1)
$x = (x_{ij})$	Matriz de escaños (Sec. 2.1)
t	Paso del algoritmo (Sec. 2.2.1)
$I^+,\ I^-$	Filas sobrerrepresentadas; filas infrarrepresentadas (Sec. 2.2.1)
$c(\cdot)$	Error de representación (Sec. 2.2.1)
$\lambda_i,\ \mu_j$	Divisor de fila i-ésima; divisor de columna j-ésima (Sec. 2.2.2)
$I_L,\ J_L$	Conjunto de filas marcadas; conjunto de columnas marcadas (Sec. 2.2.2)
$n- = \{n-1, n\}$	Empate con opción de decrecimiento (Sec. 2.2.2)
$n+ = \{n, n+1\}$	Empate con opción de incremento (Sec. 2.2.2)
η	Factor de actualización para la creación de empates (Sec. 2.2.2)

ESQUEMA DE CONTENIDOS

CAPÍTULO 1

El sistema electoral de Brasil

Centramos este primer capítulo en la introducción y exposición de una serie de elementos característicos y descriptivos de Brasil y de su sistema electoral, sobre algunos de los cuales incidiremos en partes posteriores de este trabajo. De igual forma, nos resulta conveniente indicar algunos aspectos mejorables de este sistema y comentar enfoques de distintos autores al respecto.

Tratamos de esta forma de introducir el marco sociopolítico donde encaja el sistema en el que nos centramos, este es, el sistema electoral. Son empleadas numerosas fuentes para la elaboración del capítulo, de las cuales extraemos información de interés que comentamos de manera somera. Un documento bastante completo del sistema socioeconómico brasileño que ha sido consultado para diversas partes de este capítulo es [6], que junto a otros documentos será empleado para aportar una contextualización sintetizada al objeto de estudio de este trabajo.

1.1. El sistema vigente

Brasil, también conocido como República Federativa de Brasil (*República Federativa do Brasil*) es un estado ubicado en América del Sur. Es el quinto país más grande del mundo en términos de extensión territorial (8.5 millones de km^2 estimados) y de población (aproximadamente 212.6 millones de habitantes).

Unidad Federativa	Esc.	Población	Unidad Federativa	Esc.	Población
São Paulo	70	44169350	Amazonas	8	3893763
Minas Gerais	53	20777672	Rio Grande do Norte	8	3419550
Rio de Janeiro	46	16497395	Alagoas	9	3327551
Bahia	39	15150143	Mato Grosso	8	3236578
Rio Grande do Sul	31	11228091	Piauí	10	3198185
Paraná	30	11112062	Distrito Federal	8	2867869
Pernambuco	25	9297861	Mato Grosso do Sul	8	2630098
Ceará	22	8867448	Sergipe	8	2227294
Pará	17	8101180	Rondônia	8	1755015
Maranhão	18	6861924	Tocantins	8	1502759
Santa Catarina	16	6734568	Acre	8	795145
Goiás	17	6551322	Amapá	8	756500
Paraíba	12	3950359	Roraima	8	500826
Espíritu Santo	10	3894899	-	-	-

Tabla 1.1.: Distribución de escaños por unidad federativa.

El estado de Brasil es una república federal, esto es, está constituido por estados asociados regidos por leyes comunes mediante una confederación. En el caso de Brasil estos estados se denominan *unidades federativas*. Se tiene por tanto una serie de gobiernos regionales con una cierta soberanía para tratar asuntos internos y un *gobierno federal* que administra estos estados e interviene sólo ante determinadas situaciones establecidas en el artículo 34 de la constitución vigente en Brasil (*Constituição Federal de 1988*).

El territorio de Brasil se encuentra dividido en 5 regiones que integran en suma un total de 26 unidades federativas más el Distrito Federal, donde se encuentra la capital federal de Brasil, Brasilia, y se ubica el Congreso Nacional de Brasil (Congresso Nacional). El Congreso Nacional está constituido por la Cámara de los diputados (cámara baja) y el Senado (cámara alta). El Senado está compuesto de 3 representantes por unidad federativa, lo que lleva a un total de 81 senadores. La Cámara de los Diputados cuenta con un total de 513 diputados distribuidos por unidad federativa como se indica en la Tabla 1.1. La legislación vigente establece que el número de diputados por unidad federativa ha de ser mayor o igual a 8 y no superior a 70. Por otro lado, el número de integrantes de la Asamblea Legislativa de cada unidad federativa será del triple de la representación de la unidad federativa en la Cámara de los Diputados y, una vez alcanzado el número 36, este aumentará en tantos como diputados hay por encima de 12 (Art. 27 de la Constitución Federal de 1988). Lo referente a las Asambleas Legislativas presenta un interés ajeno al estudio a realizar en este trabajo y no será por tanto tratado en el mismo.

La organización político-administrativa de la República Federativa de Brasil versa sobre la unión, las unidades federativas y las municipalidades que componen estas últimas a excepción del Distrito Federal, que no las presenta (queda prohibido por el Art. 32 de la Constitución Federal de 1988). Los mandatos de diputados, senadores, gobernadores, prefectos o vereadores son todos de 4 años, tras lo cual se realizan elecciones a fin de escoger a los nuevos representantes de la población.

En este trabajo nos centramos en el método de asignación de escaños a ocupar en la Cámara de los Diputados del Congreso Nacional. Brasil emplea un sistema de votación basado en listas abiertas (*open party-list proportional representation*), esto es, cada partido presenta una lista ordenada de candidatos que optan a ocupar escaño pero los votantes pueden influir en el orden final en que estos candidatos los obtienen. En el caso de Brasil, de manera electrónica (desde el año 2000), cada partido y candidato presenta unos dígitos asociados que los votantes deben introducir en la urna electrónica para que sea votado. El elector vota o bien a un partido o a un candidato de alguno de los partidos. Cabe destacar que cerca del 10 % de los votos emitidos van a partidos, la gran mayoría van dirigidos a candidatos. El voto electrónico a su vez abre una serie de reflexiones interesantes que versan sobre los dilemas relacionados con la automatización, seguridad e integridad del voto e intereses cruzados que son tratados en [19].

Podemos contemplar en la legislación vigente (*Código Eleitoral - Lei nº 4.737, de 15 de julho de 1965*) el empleo de un método de reparto proporcional aplicado para la ocupación de escaños en cada circunscripción. El método se desarrolla para cada unidad federativa de la siguiente forma:

1. Se calcula el denominado cociente electoral (*cociente eleitoral*), que representa el coste de un escaño en la unidad federativa i-ésima, mediante

$$q_i := \left\langle \frac{v_i}{h_i} \right\rangle^-, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, 27\},$$

donde v_i representa el número de votos válidos, h_i el número de escaños en la unidad federativa i-ésima, y la función $\langle \cdot \rangle^- : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ es definida como

$$\langle x \rangle^- := \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & \text{si } x - \lfloor x \rfloor \leq 1/2, \\ \lceil x \rceil, & \text{si } x - \lfloor x \rfloor > 1/2, \end{cases} \tag{1.1}$$

con $\lfloor \cdot \rfloor$ la función parte entera (*floor*) y $\lceil \cdot \rceil$ el redondeo por exceso (*ceiling*).

2. Se computan los votos totales obtenidos por cada partido sumando los votos obtenidos por cada candidato. Denotamos estos valores como v_{ij}, donde i representa la circunscripción y j el partido.

3. Se calcula el cociente partidario siguiendo la expresión

$$q_{ij} := \left\lfloor \frac{v_{ij}}{q_i} \right\rfloor, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, 27\},\ j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

4. Sólo los candidatos registrados por un partido que hayan obtenido un número de votos iguales o superiores al 10 % del correspondiente cociente electoral serán elegidos en tantos puestos como venga indicado por el correspondiente cociente electoral partidario en orden de la votación nominal recibida por cada uno.

5. En caso de quedar escaños por cubrir se procede como sigue:

   i. Para cada partido se calcula el cociente

   $$\frac{v_{ij}}{h_{ij} + 1},$$

   donde notamos por h_{ij} al número de escaños obtenidos por el partido j-ésimo en la circunscripción i-ésima en pasos previos del método.

   ii. Se calcula el máximo de estos cocientes, y el partido para el que está presente dicho máximo será el que reciba el escaño.

   iii. Se repite el procedimiento hasta cubrir la totalidad de los escaños de la cámara baja. En caso de no haber más partidos con candidatos que cumplan los requisitos, los escaños serán distribuidos entre los partidos con promedios más altos.

   iv. Los partidos que hayan participado en la elección podrán competir por el reparto de escaños siempre que hayan obtenido al menos el 80 % del cociente electoral, y los candidatos un 20 % del mismo.

Notemos que el cociente electoral empleado en el método consiste en una cuota *Hare* a la que se le aplica un redondeo estándar mediante la función $\langle \cdot \rangle^-$. La primera parte del método busca el *verificar la cuota inferior* bajo la restricción indicada sobre los candidatos. Esta verificación de la cuota inferior hace referencia a que ningún partido reciba menos escaños de los que correspondan a su cuota inferior, que viene dada por

$$\left\lfloor h_i \frac{v_{ij}}{v_i} \right\rfloor.$$

Tras este paso, el método reparte los escaños compensando al que presente una mayor relación votos/escaños a fin de conseguir que la diferencia de estas relaciones entre los partidos sea mínima. En la sección 2.1 ahondaremos en este método y estudiaremos su equivalencia con el método de Jefferson también conocido como método d'Hondt.

Destacamos también el uso de barreras electorales variables empleadas en el método del 10, 20 y 80 % del cociente electoral que son aplicadas sobre partidos y candidatos que compiten por escaños. Estas barreras se denominan variables al presentar una cierta dependencia de determinados factores. En el caso de Brasil notemos que las barreras presentan una dependencia con el número de escaños y votos totales que tenga cada circunscripción (pues se definen en función del cociente electoral). En efecto, notemos cómo para una unidad federativa arbitraria la barrera del 80 % del cociente electoral a los partidos supone, empleando la notación anterior,

$$\begin{aligned} v_{ij} &\geq 0{,}8 q_i = 0{,}8 \, \langle v_i / h_i \rangle^- \\ \Rightarrow \frac{v_{ij}}{v_i} &\geq 0{,}8 \, \frac{\langle v_i / h_i \rangle^-}{v_i} \approx \frac{0{,}8}{h_i}. \end{aligned}$$

Esto es, una barrera electoral aproximada del $80/h_i$ % en la circunscripción i-ésima. La aproximación realizada anteriormente será demostrada en el capítulo siguiente en el cual desarrollaremos la base matemática detrás de las propuestas que más adelante procederemos a implementar.

Notemos que como consecuencia del uso de listas abiertas y de las barreras sobre partidos y candidatos se tiene que ya no sólo la concentración de los votos de un partido por regiones electorales puede perjudicar a la obtención de escaños por parte del propio partido (como sucede también en España o Francia entre otros), si no que además la propia dispersión de los votos dentro de un mismo partido entre sus candidatos puede también perjudicar al propio partido. Esto es debido a que puede darse el caso de que en una unidad federativa un partido aún teniendo más votos que otro los presente más repartidos entre sus candidatos de forma que ninguno supere la barrera impuesta para lograr escaño. Un ejemplo de esto se ve ilustrado en la Tabla 1.4 que comentaremos más adelante en el capítulo.

1.2. Inferencias del sistema electoral brasileño

El sistema electoral descrito anteriormente arroja (al igual que en cualquier otro caso) una serie de cuestiones y situaciones asociadas de interés, consecuencia del mismo. Estas cuestiones versan sobre los elementos que componen y describen el sistema planteado en la sección previa y algunos de ellos serán tratados a lo largo del trabajo.

Unidad Fed.	% Pobl.	% Esc.	Dif.	Unidad Fed.	% Pobl.	% Esc.	Dif.
São Paulo	21.73	13.65	8.08	Amazonas	1.92	1.56	0.36
Minas Gerais	10.22	10.33	-0.11	R. G. do Norte	1.68	1.56	0.12
Rio de Janeiro	8.11	8.97	-0.86	Alagoas	1.64	1.75	-0.11
Bahia	7.45	7.6	-0.15	Mato Grosso	1.59	1.56	0.03
R. G. do Sul	5.52	6.04	-0.52	Piauí	1.57	1.95	-0.38
Paraná	5.47	5.85	-0.38	Distrito Federal	1.41	1.56	-0.15
Pernambuco	4.57	4.87	-0.3	M. G. do Sul	1.29	1.56	-0.27
Ceará	4.36	4.29	0.07	Sergipe	1.1	1.56	-0.46
Pará	3.98	3.31	0.67	Rondônia	0.86	1.56	-0.7
Maranhão	3.38	3.51	-0.13	Tocantins	0.74	1.56	-0.82
Santa Catarina	3.31	3.12	0.19	Acre	0.39	1.56	-1.17
Goiás	3.22	3.31	-0.09	Amapá	0.37	1.56	-1.19
Paraíba	1.94	2.34	-0.4	Roraima	0.25	1.56	-1.31
Espíritu Santo	1.92	1.95	-0.03	-	-	-	-

Tabla 1.2.: Porcentajes de población y escaños presentes en cada una de las unidades federativas de Brasil. La tabla recoge los porcentajes y la diferencia de los porcentajes de población y de escaños.

1.2.1. La fragmentación del parlamento

En el método de representación proporcional vigente que se introdujo anteriormente se puede apreciar el uso de barreras electorales tanto para candidatos como para partidos. El propósito de estas barreras es el reducir la fragmentación del parlamento y en consecuencia facilitar la gobernabilidad o fomentar la formación de coaliciones mediante la imposición de condiciones adicionales sobre el número de votos del candidato/partido a ocupar escaño. Sin embargo, la efectividad de estas barreras dependen tanto del grado de severidad en que estas sean definidas así como del número de escaños de las circunscripciones electorales en que sean aplicadas, entre otros factores. Un ejemplo de la aplicación de barreras electorales con resultados poco efectivos lo podemos encontrar en [18].

En el caso de Brasil, la fragmentación del parlamento es un hecho, y son numerosos los autores que han tratado este tema. Algunos ejemplos de ello los vemos en [6, 9, 13], donde se señala que Brasil presenta posiblemente el sistema de partidos más fragmentado del mundo. El parlamento de Brasil se encuentra muy dividido y presenta actualmente un total de 30 partidos con representación en la Cámara de los Diputados. Esto es debido a que el sistema electoral tiende a producir diputados individualistas, diputados que se ven afectados por la ideología, características de la circunscripción, perspectivas electorales e incentivos que incluyen la conocida como *política del barril de cerdo* consultada en [11]. Esta consiste en una metáfora empleada para indicar el uso de fondos del estado de manera localizada con el fin de ganar favor y voto. Además, la votación mediante listas abiertas donde el orden en que se produce la ocupación de escaños por parte de candidatos de un partido viene determinado por los votantes fomenta la rivalidad y hace que dentro del propio partido los candidatos compitan entre ellos.

Los diputados se encuentran organizados en numerosos partidos muchos de ellos de ideologías cercanas que no distan de tener, algunos de ellos, una naturaleza clientelar. En [2] se indica que es debido a lo comentado anteriormente y a que las herramientas tradicionales de la disciplina de partido son débiles, que se requiere de la construcción de mayorías mediante la negociación de partidos. Se nos expone en [5] que es la dificultad presente para llevar a cabo estas negociaciones lo que deja a Brasil en esta situación de fragmentación total y no sólo en el gobierno sino en la propia oposición también, lo que en consecuencia afecta a su vez al propio proceso electoral.

1.2.2. Representación en distritos electorales

Convencionalmente el mal reparto de representación parlamentaria en el Congreso Nacional o en la Asamblea Legislativa se ha dicho que lleva al retroceso en el terreno político manifestado, usualmente en la historia, en forma de corrupción y clientelismo. En el caso de las municipalidades en Brasil, se aprecia en [8] la forma en que los senadores de municipalidades sobrerrepresentadas dominan las municipalidades clave mientras que los senadores de municipalidades infrarepresentadas tienden a compartir las municipalidades principales.

Por otro lado en lo referente a las unidades federativas y a las regiones, se tiene que estas presentan unas características socioeconómicas muy diversas. Actualmente la región del sudeste contribuye con más del 50 % del PIB a diferencia de la región del norte que lo hace con aproximadamente el 4.9 %. Esto ha llevado a diversos autores a la consideración de propuestas de redistribución territorial como se hace por ejemplo en [15]. También podemos observar discordancias en la representación parlamentaria de las distintas unidades federativas que podemos apreciar en las Tablas 1.1 y 1.2 , donde en la última se muestra una comparativa en función de la

Unidad Federativa	Esc.	Población	Unidad Federativa	Esc.	Población
São Paulo	70	44169350	Amazonas	10	3893763
Minas Gerais	54	20777672	Rio Grande do Norte	9	3419550
Rio de Janeiro	43	16497395	Alagoas	9	3327551
Bahia	39	15150143	Mato Grosso	8	3236578
Rio Grande do Sul	29	11228091	Piauí	8	3198185
Paraná	29	11112062	Distrito Federal	8	2867869
Pernambuco	24	9297861	Mato Grosso do Sul	8	2630098
Ceará	23	8867448	Sergipe	8	2227294
Pará	21	8101180	Rondônia	8	1755015
Maranhão	18	6861924	Tocantins	8	1502759
Santa Catarina	18	6734568	Acre	8	795145
Goiás	17	6551322	Amapá	8	756500
Paraíba	10	3950359	Roraima	8	500826
Espíritu Santo	10	3894899	-	-	-

Tabla 1.3.: Propuesta de reparto de escaños en las unidades federativas de Brasil. Para el reparto se ha empleado el método de Sainte-Laguë sujeto a restricciones mínimas y máximas de 8 y 70 escaños respectivamente por unidad federativa.

proporción de población y escaños por región. Resulta razonable afirmar que una unidad federativa que tenga menos población que otra no presenta ninguna razón justificada por la cual obtener una mayor representación parlamentaria, sin embargo observamos como por ejemplo Maranhão tiene un escaño más que Pará a pesar de tener aproximadamente 1200000 habitantes menos.

Una sencilla alternativa que se puede proponer para repartir escaños en las unidades federativas consiste en emplear un método de reparto proporcional sujeto a restricciones de mínimo y máximo (con valores de 8 y 70 respectivamente). Empleando como método de reparto proporcional el método de Sainte-Laguë (que será introducido de manera detallada en el capítulo siguiente) recogemos la distribución obtenida en la Tabla 1.3.

Partido	Votos	Escaños	Partido	Votos	Escaños
PSL	211699	1	PRB	38728	0
MDB	178113	2	NOVO	36367	0
PP	112498	1	PV	25042	0
PROS	93030	0	PR	22641	0
PODE	92074	1	PHS	11437	0
PT	87030	1	PSOL	9830	0
PTB	80630	1	PMN	8801	0
PSDB	70125	0	PMB	6516	0
PSB	69097	0	REDE	4975	0
PSD	63018	0	PRP	4631	0
SOLID.	55834	1	PATRI	3927	0
PPS	49562	0	PC do B	2546	0
PSC	49239	0	PTC	2283	0
DEM	48559	0	PPL	1491	0
PDT	41539	0	-	-	-

Tabla 1.4.: Reparto de escaños obtenido en la unidad federativa de Mato Grosso en las elecciones generales de Brasil de 2018.

1.2.3. La representación proporcional

El método de representación descrito en la primera sección presenta un sistema proporcional que primero busca la verificación de la cuota inferior para los partidos que presenten candidatos que cumplan las restricciones de voto especificadas en la sección anterior y luego reparte escaños tratando de procurar la mayor similitud posible votos/escaños en los partidos. Esto junto con la asignación de escaños por circunscripciones favorecería, en cierta medida, a la representación en las unidades federativas pero tiene efectos en la gobernabilidad y representación nacional. De hecho podemos observar en la Tabla 1.5 cómo en las últimas elecciones generales de Brasil, las de 2018, se aprecia la *paradoja de los votos*, esto es, partidos con menos votos que otros han obtenido una mayor representación parlamentaria.

Esta paradoja sucede en la mayoría de los estados modernos y tiene una explicación sencilla si tenemos en cuenta que estos realizan el reparto de escaños por circunscripciones electorales. Sin embargo que se dé la paradoja de los votos dentro de las circunscripciones electorales no es tan común, y es algo que podemos observar también en las elecciones generales de Brasil de 2018. En efecto, si atendemos a la distribución de escaños obtenida en Mato Grosso que recogemos en la Tabla 1.4 notamos por ejemplo (pues se pueden apreciar muchos casos paradójicos en la tabla) cómo el partido con siglas PROS no ha obtenido escaño y sin embargo tiene un mayor número de votos que otros cuatro partidos que han recibido escaños, alguno de ellos con apenas un 60 % de los votos obtenidos por PROS.

Estos casos paradójicos que se dan en las propias unidades federativas suceden por las restricciones sobre los candidatos que fueron expuestas anteriormente, pues notemos que en general, debido a la barrera del 10 % que se pone a los candidatos, no se verificará la cuota inferior. Puede darse el caso, y de hecho queda manifestado en la Tabla 1.4, en el que un partido que presente votos más que suficientes los tenga muy repartidos entre sus candidatos de forma que ninguno haya obtenido más del 10 % del cociente electoral, y en consecuencia no obtenga escaño alguno el partido.

Este problema podría ser evitado mediante la implementación de un método biproporcional de reparto de escaños que atienda a la proporcionalidad no sólo dentro de las circunscripciones sino que también en la totalidad del estado, primando esta última, y que también elimine o cambie las barreras sobre los candidatos.

El trabajo se centra en la aplicación de un método de reparto de escaños biproporcional para la obtención de un parlamento más representativo con la finalidad de atender tanto a la proporcionalidad global de las elecciones en general como a la local en el sentido de las unidades federativas de modo que se traten de evitar situaciones paradójicas como la explicada previamente. Serán empleadas a su vez consideraciones en el método de cara al favorecimiento de la gobernabilidad por medio de barreras electorales.

Destinamos los capítulos siguientes a la introducción y explicación de métodos matemáticos que nos permitan lograr la finalidad mencionada así como a la implementación y confección, en base a la matemática explicada, de la propuesta alternativa para el sistema electoral brasileño.

Partido	Votos	Escaños	Partido	Votos	Escaños
PSL	11457878	52	PSC	1765226	8
PT	10126611	56	PV	1592173	4
PSDB	5905541	29	PPS	1590084	8
PSD	5749008	34	PATRI	1432304	5
PP	5480067	37	PHS	1426444	6
MDB	5439167	34	PC do B	1329575	9
PSB	5386400	32	PRP	851368	4
PR	5224591	33	REDE	816784	1
PRB	4992016	30	PRTB	684976	0
DEM	4581162	29	PMN	634129	3
PDT	4545846	28	PTC	601814	2
PSOL	2783669	10	PPL	385197	1
NOVO	2748079	8	DC	369386	1
PODE	2243320	11	PMB	228302	0
PROS	2042610	8	PCB	61343	0
PTB	2022719	10	PSTU	41304	0
SOLID.	1953067	13	PCO	2785	0
Avante	1844048	7	-	-	-

Tabla 1.5.: Resultados de las elecciones generales de Brasil de 2018. En la tabla se muestran los partidos más votados, los votos obtenidos para cada uno de estos y los escaños que recibieron finalmente.

CAPÍTULO 2

Biproporcionalidad en matrices y su aplicación en la matemática electoral

La alternativa planteada para el sistema electoral brasileño radica principalmente en la aplicación de un método biproporcional en el sentido de que los escaños totales de cada partido traten de mantener una proporcionalidad global, en lo referido a los votos totales de cada partido en la totalidad del estado federal, y local en el sentido de repartir en cada una de las unidades federativas los escaños previamente establecidos.

Incorporamos este capítulo con el propósito de establecer unas bases matemáticas para entender y formular un algoritmo a emplear en la asignación biproporcional de escaños en las circunscripciones. La notación que emplearemos consistirá fundamentalmente en una combinación de las notaciones empleadas en [3] y [16], que constituyen las fuentes principalmente consultadas para su elaboración.

Se realizará una síntesis de algunos de los conceptos desarrollados en los artículos citados y se profundizará en aquellos que nos resulten de interés para la finalidad de este capítulo dentro del trabajo, incorporando algunos ejemplos académicos o con base real, diseñados por el autor o extraídos de algún documento debidamente citado.

2.1. Axiomática y nociones sobre la biproporcionalidad en matrices

Balinski y Demange plantearon y desarrollaron un análisis que toma como objeto de estudio la proporcionalidad entre matrices sujeta a ciertas restricciones, esto orientado a su aplicación en el cálculo de representación parlamentaria. El análisis parte de una matriz de números reales positivos que está sujeta a restricciones por filas y columnas, y es desarrollado en torno a la pregunta ¿cuándo podemos decir que en presencia de ciertas restricciones dos matrices son "proporcionales"?

Introduciremos algunas de las nociones definidas en [4] con el fin de construir un sistema lógico que dé respuesta a la pregunta formulada en función de las condiciones que consideremos. Para ello, incidiremos en el concepto de problema de reparto biproporcional que integra una matriz v de reales no negativos y una serie de restricciones, σ, sobre la solución que buscamos "proporcional" a v. En las secciones siguientes particularizaremos estos problemas a entradas enteras de la matriz, que representarán los votos obtenidos por partido y circunscripción electoral, y a restricciones relacionadas con el número de escaños a asignar en cada partido en términos globales y a cada circunscripción.

Definición 1. *Un* problema *es un par* (v, σ) *con* $v = (v_{ij}) \geq 0$ *para* $i \in N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $j \in M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ *que no presenta ninguna fila o columna nula, y* $\sigma = \{r^-, r^+, c^-, c^+, h\}$ *es un vector no negativo con* $r^- = (r_i^-)$, $r^+ = (r_i^+)$ *para* $i \in N$, *y* $c^- = (c_j^-)$, $c^+ = (c_j^+)$ *para* $j \in M$, *el valor* h *es un escalar positivo. Denotamos por* $R(\sigma)$ *a la* región de asignación *definida como*

$$R(\sigma) := \{f = (f_{ij}) \geq 0 : r_i^- \leq f_{iM} \leq r_i^+,\ i \in N,\ c_j^- \leq f_{Nj} \leq c_j^+,\ j \in M,\ f_{NM} = h\},$$

donde

$$f_{IJ} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{ij}, \quad I \subset N,\ J \subset M.$$

Notemos cómo la imposición de que la matriz v no contenga filas o columnas nulas nos indica la no simplificación del problema, pues en términos de la proporcionalidad, la información brindada por una fila/columna nula nos resulta totalmente superflua.

Se distinguen una serie de casos especiales en función de los parámetros de un problema. En el caso de que la matriz v sea positiva se dirá que se tiene un *problema positivo*. Si $r^- = r^+$ y $c^- = c^+$ el problema es con *restricciones de igualdad* y se denota $r = r^- = r^+$ y $c = c^- = c^+$. En el caso $r^- = 0$, $c^- = 0$, $r_i^+ \geq h$, para i en N y $c_j^+ \geq h$ para j en M el problema se denomina *libre*, y se denota (v, h) pues el resto de elementos del vector σ resultan superfluos. Para cualquiera de los casos $n = 1$ o $m = 1$ tendremos lo que se conoce como *problema vectorial*. Finalmente si para cualesquiera $I \subsetneq N$, $J \subsetneq M$ se tiene $r_I^- < h$ y $c_J^- < h$ y $r_i^+ > 0$, $c_j^+ > 0$ para i en I, j en J se dirá que el problema es *débilmente irreducible*, pues se excluyen casos de columnas o filas nulas para $f \in R(\sigma)$.

Un *método de asignación* F es una aplicación que para un problema (v, σ) dado le asigna como mínimo una asignación en $R(\sigma)$. La idea de proporcionalidad que se persigue nos lleva a una serie de propiedades que se esperaría cumpliera el método de asignación F. Estas propiedades, planteadas por Balinski y Demange como axiomas, son las siguientes:

Ax.1 (Exactitud). Si el problema (v, σ) es libre, entonces $f = (h/v_{NM})v = F(v, \sigma)$, pues las restricciones aceptan la noción convencional de proporcionalidad.

Ax. 2 (Relevancia). Si $F(v, \sigma) \cap R(\hat{\sigma}) \neq \emptyset$ y además $R(\hat{\sigma}) \subset R(\sigma)$, entonces se tiene que $F(v, \hat{\sigma}) = F(v, \sigma) \cap R(\hat{\sigma})$. "Si la asignación verifica condiciones más restrictivas, entonces es también asignación del problema más restrictivo asociado".

Ax. 3 (Uniformidad). Si $f \in F(v, \sigma)$ entonces para $I \subset N$, $J \subset M$ se tiene $f_{I \times J} \in F(v_{I \times J}, \sigma_{I \times J})$, donde $f_{I \times J} = (f_{ij})$, $v_{I \times J} = (v_{ij})$ y $\sigma_{I \times J}$ se compone de las restricciones por filas y columnas inferiores $r_i^- - f_{i\bar{J}}$, $c_j^- - f_{\bar{I}j}$, y superiores $r_i^+ - f_{i\bar{J}}$, $c_j^+ - f_{\bar{I}j}$ y suma f_{IJ}, para $\bar{I}$, $\bar{J}$ los complementarios de I, J en N y M respectivamente. Esto es, para un método de asignación y asignación dados, podemos obtener la asignación asociada a su subproblema al tomar las partes correspondientes del problema.

Ax. 4 (Monotonía). Si $f \in F(v, \sigma)$, $f' \in F(v', \sigma)$ y v únicamente difiere de v' en las posiciones (k, l) verificando $v_{kl} < v'_{kl}$, entonces se tiene $f_{kl} \leq f'_{kl}$.

Ax. 5 (Homogeneidad). En caso de que el problema (v, σ) sea con restricciones de igualdad y que dos columnas de v sean proporcionales y restringidas a la misma suma, entonces se tiene que esas dos columnas en la propia asignación $f \in F(v, \sigma)$ son iguales.

La búsqueda de una cierta "proporcionalidad" sujeta a las restricciones de un problema (v, σ) dado nos lleva a la noción de *matriz de reparto justo*, que dista de la proporcionalidad convencional mediante multiplicadores de filas y columnas. Para los vectores $\lambda = (\lambda_i)$, con i en N y $\mu = (\mu_j)$ con j en M diremos que f es una matriz de reparto justo para el problema (v, σ) si se pertenece a $R(\sigma)$ y verifica

$$f_{ij} = \delta \lambda_i \mu_j v_{ij}$$

para $i \in N$, $j \in M$. Además debe satisfacer $\lambda > 0$, $\mu > 0$ y $\delta > 0$ de forma que $\lambda_i > 1$ implique $f_{iM} = r_i^-$, y $\lambda_i < 1$ implique $f_{iM} = r_i^+$. Esto es, el multiplicador será menor/mayor a uno con el fin de dar con la restricción superior/inferior. Se requiere satisfacer a su vez la propiedad análoga en columnas, esto es,

$$\mu_j > 1 \Rightarrow f_{Nj} = c_j^-, \qquad \mu_j < 1 \Rightarrow f_{Nj} = c_j^+.$$

Las matrices de reparto justo presentan propiedades deseables que se acercan en lo posible a la "proporcionalidad" con restricciones. Deseamos en consecuencia obtener un método que dado un problema (v, σ) le asigne una matriz de reparto justo.

Además, en lo concerniente a lo que nos interesa de cara a este trabajo, nos centramos en el caso de asignaciones enteras no negativas, es decir, para un problema (v, σ) vamos a buscar *distribuciones* en $R(\sigma)$. Nuevamente incidimos en la cuestión de qué es decir que una distribución x en $R(\sigma)$ sea proporcional a v, y bajo que circunstancias estas distribuciones existen.

Un *método de distribución* A será, de manera similar a su análogo real, una aplicación que para un problema (v, σ) arroja como mínimo una distribución con valores enteros no negativos en $R(\sigma)$. Estos métodos suscitan nuevamente una serie de propiedades deseables, que se axiomatizan de la siguiente forma:

Ax. 1′ (Exactitud). Si f es una matriz de reparto justo asociada al problema real (v, σ) y presenta componentes todas enteras, entonces $A(v, \sigma) = f$.

Ax. 2′ (Relevancia). Si $A(v, \sigma) \cap R(\hat{\sigma}) \neq \emptyset$ para $\hat{\sigma}$ otro vector de restricciones que verifica $R(\hat{\sigma}) \subset R(\sigma)$, entonces $A(v, \hat{\sigma}) = A(v, \sigma) \cap R(\hat{\sigma})$.

Ax. 3′ (Uniformidad). Si $x \in A(v, \sigma)$ entonces para $I \subset N$, $J \subset M$ se tiene que $x_{I \times J} \in A(v_{I \times J}, \sigma_{I \times J})$, donde $x_{I \times J}$, $v_{I \times J}$ y $\sigma_{I \times J}$ son definidos de manera análoga a como se hizo en el axioma Ax. 3.

Ax. 4′ (Monotonía). Si $x \in A(v, \sigma)$ y $x' \in A(v', \sigma)$ de forma que v y v' difieren únicamente en la posición (i, j) en $N \times M$ con $v_{ij} < v'_{ij}$, entonces $x_{ij} \leq x'_{ij}$.

Ax. 5′ (Homogeneidad). Para $x \in A(v, \sigma)$ definimos los conjuntos

$$I^- = \{i \in N : x_{iM} = r_i^-\}, \qquad I^+ = \{i \in N : x_{iM} = r_i^+\},$$

y de manera análoga en columnas definimos J^- y J^+. Si $\delta > 0$, $\alpha = (\alpha_i) > 0$ y $\beta = (\beta_j) > 0$ con (i, j) en $N \times M$ de forma que

$$\begin{aligned} \alpha_i > 1 \Rightarrow i \in I^+, &\qquad \alpha_i < 1 \Rightarrow i \in I^-, \\ \beta_j > 1 \Rightarrow j \in J^+, &\qquad \beta_j < 1 \Rightarrow j \in J^-, \end{aligned}$$

entonces $x \in A(\delta \alpha v \beta, \sigma)$. Esto es algo que se espera de los métodos de distribución dado que naturalmente sucede con asignaciones de reparto justo que verifican los axiomas 1 al 5.

Ax. 6′ (Completitud). Si $v^s \longrightarrow v$ y $a \in A(v^s, \sigma)$ para todo s, entonces $a \in A(v, \sigma)$.

Resulta conveniente para desarrollar más sobre los métodos de reparto incidir en la familia de métodos más empleada y con propiedades interesantes dentro de los mismos, estos son los *métodos de divisores*. Antes de introducir estos métodos vamos a definir una serie de conceptos necesarios para este fin. Las definiciones son extraídas de [16] y serán explicadas en detalle a continuación.

Definición 2. *Una* función de redondeo, $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{N}$, *es una función definida en los reales no negativos con valores en los enteros no negativos que verifica*

$$f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b),\ a, b \in \mathbb{R}_0^+.$$

Ejemplos de funciones de redondeo conocidas son las funciones parte entera *floor*, $\lfloor \cdot \rfloor$, y *ceiling*, $\lceil \cdot \rceil$, y las funciones *redondeo estándar* $\langle \cdot \rangle$ y alterado $\langle \cdot \rangle^-$ definido en (1.1). Una propiedad que presentan $\langle \cdot \rangle$ y $\langle \cdot \rangle^-$ empleada en el capítulo previo que resulta de interés para el análisis de barreras electorales en Brasil es la siguiente:

Proposición. *Para a, b números enteros positivos con $a > b$ y a suficientemente grande, se tiene:*

$$\frac{\langle a/b \rangle}{a} \approx \frac{1}{b} \approx \frac{\langle a/b \rangle^-}{a}.$$

Demostración. La demostración parte de propiedades conocidas de las funciones de redondeo parte entera. Dado que a es mayor que b podemos expresar a en términos de b como $a = bc + d$ con c y d en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ los respectivos cociente y resto de la división a/b. Notemos también que

$$\langle a/b \rangle = \left\langle \frac{bc + d}{b} \right\rangle = \left\langle c + \frac{d}{b} \right\rangle = c + \langle d/b \rangle,$$

donde hemos empleado que tanto $\lfloor \cdot \rfloor$ como $\lceil \cdot \rceil$ verifican que la imagen por la función de la suma de un entero positivo y un cociente es la suma del entero positivo y la imagen del cociente.

Si hacemos el desarrollo

$$\begin{aligned}\frac{\langle a/b \rangle}{a} &= \frac{c}{a} + \frac{\langle d/b \rangle}{a} = \frac{(a-d)/b}{a} + \frac{\langle d/b \rangle}{a} \\ &= \frac{1}{b} - \frac{d}{ab} + \frac{\langle d/b \rangle}{a},\end{aligned}$$

y notamos además que, dado que $d < b$, $\langle d/b \rangle$ toma valores en $\{0, 1\}$, tenemos entonces dos posibilidades:

i) $d/b \geq 0{,}5$. En cuyo caso

$$\frac{\langle a/b \rangle}{a} = \frac{1}{b} - \frac{d}{ab} + \frac{\langle d/b \rangle}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1 - d/b}{a},$$

y notemos que $1 - d/b < 0{,}5$.

ii) $d/b < 0{,}5$. En consecuencia

$$\frac{\langle a/b \rangle}{a} = \frac{1}{b} - \frac{d}{ab} = \frac{1}{b} - \frac{d/b}{a}.$$

Hemos obtenido que el valor de $\langle a/b \rangle / a$ es igual a $1/b$ más/menos (en función del valor de $\langle d/b \rangle$) el cociente entre un número menor a 0,5 y a. Si consideramos a suficientemente grande podemos despreciar ese cociente que sumamos/restamos. De esta forma se obtiene

$$\frac{\langle a/b \rangle}{a} \approx 1/b.$$

Para el caso $\langle \cdot \rangle^-$ el desarrollo es análogo. □

Nuestro interés en las funciones de redondeo radica en su aplicación para el cálculo de escaños de partidos en función de su número de votos. Nos disponemos a extender la noción de función de redondeo con el fin de, de manera rigurosa, dar solución a situaciones límite que puedan surgir y que, en caso de emplear únicamente funciones de redondeo, darían lugar a un bloqueo. Ilustramos este tipo de situaciones con dos ejemplos que desarrollamos a continuación:

Ejemplo 1. *Consideremos la función de redondeo $\langle \cdot \rangle^-$ y supongamos que queremos repartir tres escaños entre tres partidos que han recibido 6, 5 y 1 (en escala $1 : 10000$) votos respectivamente. Una forma de proceder que resulta razonable y se usa con asiduidad es emplear como divisor la cuota Hare y aplicar el redondeo al cociente resultante. Siguiendo esto obtenemos para cada partido*

$$\left\langle 6 \cdot \frac{3}{12} \right\rangle^- = 1, \quad \left\langle 5 \cdot \frac{3}{12} \right\rangle^- = 1, \quad \left\langle 1 \cdot \frac{3}{12} \right\rangle^- = 0.$$

La suma de los escaños resultantes resulta inferior al número de escaños a repartir. Normalmente un recurso empleado en este tipo de situaciones consiste en la multiplicación del divisor empleado (en este caso $12/3$) por un factor lo más próximo posible a 1 de forma que altere lo menos posible la distribución de los pesos (pues naturalmente un valor superior a 1 perjudica más a los partidos más votados y uno inferior a 1 a los menos votados) pero que procure la asignación de todos los escaños.

Sin embargo notemos en este caso que para el partido con 6 votos el cociente obtenido se encuentra en el límite justo para ganar un escaño más. Sería por tanto razonable que *este partido ganara un escaño adicional, pues empleando la forma de proceder indicada anteriormente, para cualquier valor inferior a* 1 *(podemos tomarlo por tanto tan próximo como queramos) si lo tomamos como multiplicador del divisor se tendría que el partido ganaría el escaño que falta por repartir. Lo que resta es tener este multiplicador lo suficientemente próximo a* 1 *de forma que no afecte en la asignación de escaños a los otros partidos.*

$\triangle$

Ejemplo 2. *Empleamos la función de redondeo de parte entera* $\lfloor \cdot \rfloor$. *Supongamos que queremos repartir* $6k-1$ *escaños entre tres partidos que han obtenido* n, $2n$ *y* $3n$ *votos respectivamente, con* n, k *dos enteros positivos. Nuevamente, procedemos inicialmente empleando como divisor la cuota Hare. Obtenemos*

$$\left\lfloor n \cdot \frac{6k-1}{6n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6k-1}{6} \right\rfloor = k-1,$$

$$\left\lfloor 2n \cdot \frac{6k-1}{6n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6k-1}{3} \right\rfloor = 2k-1,$$

$$\left\lfloor 3n \cdot \frac{6k-1}{6n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6k-1}{2} \right\rfloor = 3k-1.$$

El total de escaños recibidos es inferior al total de escaños a repartir. Tratamos entonces de buscar un factor que multiplicar al divisor empleado que procure que alguno de los tres partidos reciba un escaño más.

Una forma de abordar este tipo de problemas es buscar para cada partido el factor más próximo a 1 *que multiplicado por el divisor permita obtener un escaño más, y luego tomar de entre los factores obtenidos para cada partido el mayor (pues notemos que dado que queremos obtener más escaños, el factor habrá de ser inferior a* 1*). Para este caso particular se tiene que el factor* $(6k-1)/6k$ *actúa como factor límite en la obtención de un escaño más para los 3 partidos en el sentido de que cualquier valor menor a este ocasiona que cada partido reciba un escaño adicional con respecto a la asignación original.*

Sin embargo en caso de aplicar tal factor tenemos que el número total de escaños asignados es $6k$, *es decir, sobra un escaño. Surge entonces una pregunta nueva ante tal situación: ¿Qué partido se habría de prescindir de la asignación de un escaño adicional? ¿Bajo que criterio?*

$\triangle$

Estos dos ejemplos motivan la implementación de una noción que hereda propiedades de las funciones de redondeo y que difieren de ellas en los valores críticos. Estos son los umbrales presentes en la asignación de valores por parte de las propias funciones de redondeo. Estos valores son aquellos que en caso de superarlos por más o menos hacen que la función tome un valor u otro. Esta noción es la de *regla de redondeo*, y podemos definirla en torno a una función de redondeo incorporando en los valores críticos los valores que la función de redondeo tomaría en caso de tanto rebajar como superar tal umbral, y el conjunto formado por el valor que la función de redondeo tomaría en otro caso. En consecuencia una regla de redondeo devuelve conjuntos formados por dos elementos (al ser evaluadas en los umbrales de evaluación de la función de redondeo asociada) o unitarios (en otro caso). Ejemplos de reglas de redondeo son las siguientes:

1. *Regla de redondeo por defecto*, $\lfloor\lfloor\cdot\rfloor\rfloor$, que hereda de la función de redondeo $\lfloor\cdot\rfloor$ y se define para los reales no negativos como sigue:

$$\lfloor\lfloor t\rfloor\rfloor = \begin{cases} \{\lfloor t\rfloor\}, & t \notin \mathbb{N}\setminus\{0\}, \\ \{t-1,t\}, & t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

2. *Regla de redondeo por exceso*, $\lceil\lceil\cdot\rceil\rceil$, que hereda de la función de redondeo $\lceil\cdot\rceil$ y se define para los reales no negativos como sigue:

$$\lceil\lceil t\rceil\rceil = \begin{cases} \{\lceil t\rceil\}, & t \notin \mathbb{N}\setminus\{0\}, \\ \{t,t+1\}, & t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

3. *Regla de redondeo estándar*, $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$, que hereda de la función de redondeo $\langle\cdot\rangle$, o igualmente de $\langle\cdot\rangle^{-}$, y se define para los reales no negativos como sigue:

$$\langle\langle t\rangle\rangle = \begin{cases} \{\langle t\rangle\}, & t \notin \{0{,}5+n : n\in\mathbb{N}\}, \\ \{t-0{,}5,t+0{,}5\}, & t \in \{0{,}5+n : n\in\mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Para una función de redondeo dada, $[\cdot]$, denotaremos de ahora en adelante su regla de redondeo asociada por $[[\cdot]]$. Los casos en los que una regla de redondeo arroja un conjunto formado por dos valores serán denominados *situaciones de empate* o simplemente *empates* y cobrarán importancia en el desarrollo del método biproporcional para el reparto de escaños que será explicado en la siguiente sección. Estos casos de empate hemos visto que son producidos cuando la regla de redondeo es aplicada a un valor crítico $s(n)$ con n entero positivo que hace que un valor t en $[n-1,n]$ sea redondeado por la función de redondeo a n, que es devuelto en forma de conjunto unitario, si t supera el umbral $s(n)$ o a $n-1$ si se encuentra por debajo de dicho umbral. En ambos casos devolviendo los valores en forma de conjuntos unitarios. Es por ello que estos valores críticos son denominados *divisores*, en el sentido que dividen la recta real positiva en regiones de redondeo.

Definición 3. *Una* secuencia de divisores, $s(0), s(1), s(2), \ldots$ *es una sucesión de reales no negativos que es caracterizada por las siguientes propiedades:*

- *El primer elemento de la secuencia es* 0, $s(0) = 0$.

- *Los divisores subsecuentes pertenecen a los intervalos enteros consecutivos:*

$$s(n) \in [n-1, n], \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

- *Si un elemento de la secuencia toma el valor límite inferior positivo de su intervalo de localización entonces todos los divisores son inferiores a su límite superior, y si algún elemento de la secuencia toma el valor del límite superior entonces todos los divisores, a excepción del divisor $s(1)$ (en general), son mayores que sus límites inferiores:*

$$s(m) = m-1 \;\; \textit{para}\; m \geq 2 \Rightarrow s(n) < n \; \forall n \geq 1,$$
$$s(n) = n \;\; \textit{para}\; n \geq 1 \Rightarrow s(m) > m-1 \; \forall m \geq 2.$$

La secuencia se denominará permeable *si verifica $s(1) > 0$ e* impermeable *en caso contrario $s(1) = 0$.*

Esta noción resulta fundamental para introducir de manera rigurosa los métodos de divisores, pues nos permite definir el concepto de regla de redondeo con mayor precisión no ya a partir de una función de redondeo sino de una secuencia de divisores.

Definición 4. *Una regla de redondeo, $[[\cdot]]$, se define mediante una secuencia de divisores $s(0), s(1), s(2), \ldots$ tomando $[[0]] := \{0\}$ y para t en $\mathbb{R}^+$, n en $\mathbb{N}$.*

$$[[t]] := \begin{cases} \{n\}, & t \in (s(n), s(n+1)), \\ \{n-1, n\}, & t = s(n) > 0. \end{cases}$$

Una regla de redondeo se denominará permeable o impermeable si así lo es la secuencia de divisores.

Una regla de redondeo, $[[\cdot]]$, se dirá "compatible" con una función de redondeo, $[\cdot]$, cuando se verifique $[t] \in [[t]]$ para todo t real no negativo. Esto nos lleva a la primera mención abordada sobre el concepto de reglas de redondeo en las que eran construidas en base a una función de redondeo. Se deducen de manera inmediata dos propiedades:

- *No-decrecimiento de la función*. Pues para $t < T$ se tiene que para todo n en $[[t]]$ y N en $[[T]]$ se verifica $n \leq N$.
- *Relación fundamental*. Esta propiedad hace referencia a la relación presente entre la regla de redondeo y la secuencia de divisores sobre la cual la primera se construye. Se formula como

$$n \in [[t]] \Leftrightarrow s(n) \leq t \leq s(n+1).$$

Estos conceptos son empleados para introducir uno de los objetos de mayor interés en este trabajo que constituyen el pilar sobre el cual elaboramos un método para la distribución biproporcional de escaños.

Definición 5. *El método de divisores con regla de redondeo $[[\cdot]]$ y tamaño h consiste en una aplicación A que lleva el vector de votos $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ en el conjunto de soluciones*

$$A^{[[\cdot]]}(v,h) = \left\{ x \in \mathbb{N}^m : x_M = h,\ x_1 \in \left[\left[\frac{v_1}{D}\right]\right], x_2 \in \left[\left[\frac{v_2}{D}\right]\right], \dots, x_m \in \left[\left[\frac{v_m}{D}\right]\right],\ D > 0 \right\}.$$

Los cocientes v_j/D serán denominados cocientes internos*, además un método de divisores hereda el calificativo permeable/impermeable de la regla de redondeo sobre la que se construye el mismo.*

Esta definición atiende a un problema vectorial de asignación de escaños, pero para volver al estudio de métodos de distribución precisamos de una extensión de esta definición para el caso de matrices de votos. Algunos ejemplos de métodos de divisores conocidos son los métodos de Webster o Sainte-Laguë (que emplea la regla de redondeo estándar), Adams (que emplea la regla de redondeo por exceso) y Jefferson o d'Hondt (que emplea la regla de redondeo por defecto).

Inciso. *Notemos para el caso del método d'Hondt como puede describirse de la forma en que se realiza la asignación de escaños en Brasil introducida en el primer capítulo. Manteniendo la notación supongamos que queremos repartir un número entero $h > 0$ de escaños entre m partidos que han obtenido $v = (v_j) \geq 0$ votos, con j en M. Supongamos además que*

$$\sum_{j \in M} \text{máx} \left\lfloor \left\lfloor v_j \cdot \frac{h}{v_M} \right\rfloor \right\rfloor < h.$$

Como se describió en los ejemplos 1 y 2, la forma de proceder convencional es la de multiplicar el divisor del cociente, v_M/h en este caso, por un factor que procure haber repartido en suma un escaño más, y repetir el proceso hasta haber repartido la totalidad de los escaños. Queremos obtener el factor más próximo a 1 que de lugar a un nuevo empate y a la asignación en consecuencia de un escaño adicional. Denotando el cociente v_M/h por D tenemos que este factor vendrá dado por

$$\lambda = \text{máx} \left\{ \frac{v_j/D}{\lfloor v_j/D + 1 \rfloor} :\ v_j > 0,\ j \in M \right\}.$$

El partido k (o partidos) para el que se alcance este máximo verificará en el nuevo reparto de escaños

$$\left\lfloor \left\lfloor \frac{v_k}{D\lambda} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{v_k}{D} \cdot \frac{\lfloor v_k/D + 1 \rfloor}{v_k/D} \right\rfloor \right\rfloor = \lfloor \lfloor \lfloor v_k/D + 1 \rfloor \rfloor \rfloor = \{ \lfloor v_k/D \rfloor, \lfloor v_k/D \rfloor + 1 \}.$$

En el caso del resto de los partidos para los que no se alcance el máximo tenemos

$$\begin{aligned}\left\lfloor\left\lfloor \frac{v_j}{D\lambda} \right\rfloor\right\rfloor &= \left\lfloor\left\lfloor \frac{v_j}{D} \cdot \frac{\lfloor v_k/D+1 \rfloor}{v_k/D} \right\rfloor\right\rfloor \leq \left\lfloor\left\lfloor \frac{v_j}{D} \cdot \frac{\lfloor v_j/D+1 \rfloor}{v_j/D} \right\rfloor\right\rfloor \\ &= \lfloor\lfloor \lfloor v_j/D+1 \rfloor \rfloor\rfloor,\end{aligned} \tag{2.1}$$

con $\leq$ *en el sentido*

$$\lfloor\lfloor A \rfloor\rfloor \leq \lfloor\lfloor B \rfloor\rfloor \Leftrightarrow a \leq b,\ (a,b) \in \lfloor\lfloor A \rfloor\rfloor \times \lfloor\lfloor B \rfloor\rfloor.$$

Sabiendo que $\lfloor v_j/D+1 \rfloor$ *se encuentra en la secuencia de divisores* $s(\cdot)$ *y que* $\frac{v_j}{D}\frac{\lfloor v_k/D+1 \rfloor}{v_k/D}$ *es menor estricto, se tiene la desigualdad estricta en* (2.1)*, luego el resto de partidos no reciben escaños extras.*

Notemos que la coordenada k *en* M *(o coordenadas) para la que se obtenga* λ *también lo será para la que se alcance*

$$\text{máx}\left\{ \frac{v_j}{\lfloor v_j/D+1 \rfloor} \,:\, v_j > 0,\ j \in M \right\},$$

que es la forma en que se asignaban los escaños que sobraban tras una asignación previa en el método descrito en el primer capítulo. Esto nos muestra que esa formulación del desarrollo del método es equivalente a la explicada en la definición de métodos de divisores basado en la regla de redondeo $\lfloor\lfloor \cdot \rfloor\rfloor$ *, esto es, el método D'Hont.*

Combinando la definición de métodos de divisores anterior extraída de [16] con las ideas de matrices de reparto justo desarrolladas por Balinski y Demange obtenemos la siguiente definición de métodos de divisores en problemas de distribución matriciales:

Definición 6. *Un método de divisores,* $A^{[[\cdot]]}$ *, aplicado a un problema* (v,σ) *obtiene una matriz* x *de la forma*

$$x = (x_{ij}) = ([[\delta\lambda_i v_{ij}\mu_j]]), \quad x \in R(\sigma),$$

donde $\lambda > 0$*,* $\nu > 0$ *y* $\delta > 0$ *satisfacen*

$$\begin{aligned}\lambda_i > 1 \Rightarrow x_{iM} = r_i^-, &\qquad \lambda_i < 1 \Rightarrow x_{iM} = r_i^+, \\ \mu_j > 1 \Rightarrow x_{Nj} = c_j^-, &\qquad \mu_j < 1 \Rightarrow x_{Nj} = c_j^+.\end{aligned}$$

Los multiplicadores (λ,μ,δ) *se denominarán* propios *para* x *en* $A^{[[\cdot]]}(v,\sigma)$ *y los valores* $\delta\lambda_i v_{ij}\mu_j$ *de igual forma a la definición previa se denominan cocientes internos.*

El interés que presentamos en estos métodos para su aplicación en el método de asignación biproporcional de escaños viene sustentado principalmente por dos propiedades fundamentales que son formuladas y demostradas en [4]. Estas propiedades son que el método $A^{[[\cdot]]}(v,\sigma)$ es no vacío si y solo si el conjunto

$$R^*(v,\sigma) = \{f \in R(\sigma) : \; v_{ij} > 0 \Rightarrow f_{ij} \geq 1, \; v_{ij} = 0 \Rightarrow f_{ij} = 0\}$$

es no vacío. Además para cualquier caso en el que exista una distribución $x \in A^{[[\cdot]]}(v,\sigma)$ se tiene que este es único salvo por situaciones de empate (ilustraremos esto con ejemplos más adelante). En el caso $v > 0$, $R^* \neq \emptyset$ se obtiene que un método de distribución satisface los axiomas 1′ a 6′ si y solo si este método es de divisores, además se tiene que para un problema positivo, un método verifica los axiomas 1′ al 6′ si y solo si es de divisores y permeable.

Con esta teoría como base buscamos el desarrollo de un algoritmo que dado un problema (v,σ) nos permita obtener un reparto justo proporcional que implementaremos para el caso del sistema electoral de Brasil. Posteriormente compararemos los resultados de aplicar el método desarrollado con respecto al vigente empleando una serie de indicadores que midan la desproporcionalidad de los resultados electorales.

2.2. Algoritmo Tie-and-transfer

Partiendo de la axiomática y definiciones introducidas en la sección previa, Balinski y Demange confeccionan en [3] un algoritmo para la obtención de la matriz proporcional asociada a un problema (v,σ) haciendo uso de un método de divisores, $A^{[[\cdot]]}$, dado. Dedicaremos esta sección al desarrollo del mencionado algoritmo que es conocido como *Tie-and-transfer*. Con este fin replicaremos y detallaremos los pasos seguidos en [16] para la introducción y explicación del algoritmo. Antes de proceder con lo explicado definimos la noción de v-ciclo como preámbulo para la construcción de caminos de transferencia de escaños y para la obtención de un resultado sobre unicidad.

2.2.1. Introducción del algoritmo: v-ciclos y unicidad

El concepto de ciclo a través de las filas $i_1, i_2, \ldots, i_q$ y de columnas $j_1, j_2, \ldots, j_q$ verificando $i_p \neq i_q$ para $p \neq q$ de una matriz $v = (v_{ij})$, con $(i,j) \in N \times M$ hace referencia al ciclo formado por la secuencia de elementos de v en las posiciones

$$(i_1,j_1),\; (i_2,j_1),\; (i_2,j_2),\; (i_3,j_2),\; \ldots, (i_q,j_{q-1}),\; (i_q,j_q),\; (i_1,j_q).$$

La motivación detrás del uso de ciclos de cara al algoritmo radica en la transferencia de escaños ante situaciones de empate siguiendo una serie de índices de construcción similar a la de un ciclo con la excepción de no terminar en la misma fila de partida. Este apunte hace razonable las restricciones $v_{i_p,j_p} > 0$, $v_{i_{p+1},j_p} > 0$, $j \in \{1, 2, \ldots q\}$ pues un partido no votado bajo ninguna razón habría de obtener escaño. Esto incentiva la dotación de un nombre distintivo para los ciclos que únicamente siguen en su recorrido posiciones de elementos positivos de la matriz v.

Definición 7. *Dada una matriz de votos/pesos $v = (v_{ij})$, con $(i, j) \in N \times M$, un v-*ciclo *consiste en un ciclo a través de unas filas $i_1, i_2, \ldots, i_q$ y columnas $j_1, j_2, \ldots, j_q$ que verifica $v_{i_pj_p} > 0$, $v_{i_{p+1}j_p} > 0$, para $j \in \{1, 2, \ldots q\}$. El ciclo extiende la secuencia de filas y columnas a $i_1, i_2, i_3, \ldots$ y $j_1, j_2, j_3, \ldots$ respectivamente de forma que se verifica*

$$i_{q+n} = i_n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad j_{q+m} = j_m,\ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Por otro lado, la noción de v-ciclos nos permite obtener un interesante resultado sobre la unicidad de métodos de divisores $A^{[[\cdot]]}$ en función de los cocientes de su matriz de pesos asociada.

Teorema (Unicidad de los métodos de divisores)**.** *Sea $x \in A^{[[\cdot]]}(v, \sigma)$ una matriz del método de divisores $A^{[[\cdot]]}$ que verifica que no más de tres números de escaños x_{ij} con cocientes internos asociados $v_{ij}/(C_iD_j)$ son iguales a valores positivos de la secuencia de divisores que define la regla de redondeo $[[\cdot]]$. Entonces la matriz de escaños es única.*

Demostración. Supongamos dos matrices distintas en $A^{[[\cdot]]}(v, \sigma)$, x e y. La matriz diferencia $z = y - x$ es no nula, pero verifica $z_{iM} = y_{iM} - x_{iM} = 0$, $z_{N,j} = 0$ para $(i, j) \in N \times M$. Tomamos $q \geq 2$ filas y columnas distintas $i_1, i_2, \ldots, i_q$, $j_1, j_2, \ldots, j_q$ de forma que en el ciclo

$$(i_1, j_1),\ (i_2, j_1),\ (i_2, j_2),\ (i_3, j_2),\ \ldots, (i_q, j_{q-1}),\ (i_q, j_q),\ (i_1, j_q)$$

los valores de los elementos de la matriz z en esas posiciones vayan alternando los signos $-, +, -, +, \ldots$ de la forma siguiente: Empezamos con $z_{ij} < 0$, en j_1 buscamos i_2 de forma que $z_{i_2j_1}$ sea positivo, que notemos es posible ya que $z_{Nj_1} = 0$. Buscamos a continuación j_2 de forma que $z_{i_2j_2}$ sea negativo (el argumento es el mismo, ya que $z_{i_2M} = 0$), e iteramos el proceso hasta encontrar una fila o columna ya visitada. Descartando la secuencia inicial de índices hasta la primera aparición de la fila/columna que se vuelve a visitar al final obtenemos un ciclo que alterna signos y renombramos los índices. Si $z_{i_1j_1} < 0$ tenemos el ciclo que buscábamos. En otro caso tenemos que el ciclo recorre signos $+, -, +, -, \ldots, +, -$, de forma que sencillamente invertimos el orden de los índices en el ciclo para así comenzar la secuencia en un valor negativo de la matriz.

Se tiene que todos los pesos v_{ij} con i, j en el ciclo son positivos, pues si v_{ij} fuera nulo también lo serían x_{ij} e y_{ij} y en consecuencia z_{ij}. Hemos obtenido por tanto un v-ciclo.

Denotamos por C_i, D_j a los divisores de filas y columnas x y por E_i, F_j a los de y. La relación fundamental explicada en la sección previa nos dice

$$x_{ij} \in \left[\left[\frac{v_{ij}}{C_i D_j}\right]\right] \Leftrightarrow s(x_{ij}) \leq \frac{v_{ij}}{C_i D_j} \leq s(x_{ij}+1),$$
$$y_{ij} \in \left[\left[\frac{v_{ij}}{E_i F_j}\right]\right] \Leftrightarrow s(y_{ij}) \leq \frac{v_{ij}}{E_i F_j} \leq s(y_{ij}+1).$$

Empleando esto y la consideración $i_{q+1} = i_1$ obtenemos

$$\prod_{p\leq q} \frac{s(x_{i_p j_p})}{v_{i_p j_p}} \leq \prod_{p\leq q} \frac{1}{C_{i_p} D_{j_p}} = \prod_{p\leq q} \frac{1}{C_{i_{p+1}} D_{j_p}} \leq \prod_{p\leq q} \frac{s(x_{i_{p+1} j_p}+1)}{v_{i_{p+1} j_p}} \tag{2.2}$$

$$\prod_{p\leq q} \frac{s(y_{i_{p+1} j_p})}{v_{i_{p+1} j_p}} \leq \prod_{p\leq q} \frac{1}{E_{i_{p+1}} F_{j_p}} = \prod_{p\leq q} \frac{1}{E_{i_p} F_{j_p}} \leq \prod_{p\leq q} \frac{s(y_{i_p j_p}+1)}{v_{i_p j_p}} \tag{2.3}$$

Los signos de z sugieren que $x_{i_p j_p} > y_{i_p j_p}$ y $x_{i_{p+1} j_p} < y_{i_{p+1} j_p}$, además estos valores son todos enteros no negativos, luego $x_{i_p j_p} \geq y_{i_p j_p} + 1$ y $x_{i_{p+1} j_p} + 1 \leq y_{i_{p+1} j_p}$. Estas consideraciones, junto a la monotonía de la secuencia de divisores, $s(\cdot)$, y las ecuaciones (2.2) y (2.3) nos permiten obtener

$$\prod_{p\leq q} \frac{s(x_{i_p j_p})}{v_{i_p j_p}} \leq \prod_{p\leq q} \frac{s(x_{i_{p+1} j_p}+1)}{v_{i_{p+1} j_p}} \leq \prod_{p\leq q} \frac{s(y_{i_{p+1} j_p})}{v_{i_{p+1} j_p}} \leq \prod_{p\leq q} \frac{s(y_{i_p j_p}+1)}{v_{i_p j_p}} \leq \prod_{p\leq q} \frac{s(x_{i_p j_p})}{v_{i_p j_p}}.$$

En consecuencia se verifica la igualdad en la totalidad de la cadena de desigualdades anterior y en las ecuaciones (2.2) y (2.3). Además, los productos en (2.2) son todos ellos positivos, pues son iguales y $\prod_{p\leq q} 1/(C_{i_p} D_{j_p}) > 0$. En consecuencia el valor común también lo es, y las desigualdades de la relación fundamental son de hecho igualdades,

$$s(x_{i_p j_p}) = \frac{v_{i_p j_p}}{C_{i_p} D_{j_p}} > 0, \qquad s(x_{i_{p+1} j_p}) = \frac{v_{i_{p+1} j_p}}{C_{i_{p+1}} D_{j_p}} > 0.$$

Dado que el ciclo visita un mínimo de dos filas y columnas, tenemos que para x en $A^{[[\cdot]]}(v,\sigma)$ se da que cuatro o más cocientes internos $v_{ij}/(C_i D_j)$ tienen valores en la secuencia de divisores $s(\cdot)$ (e y de igual forma), lo que da por concluida la demostración. □

Cada paso del algoritmo Tie-and-transfer se basa en la idea siguiente: tras la realización de un reparto inicial de escaños que no verifique las restricciones de σ, un escaño será transferido de una posición "mala" a una "mejor" en el sentido de que la transferencia alivia el grado en que se incumplen las restricciones del problema de reparto. Vamos a plantear el algoritmo para un problema con restricciones de igualdad.

El algoritmo se inicia con un escalado de filas/columnas de forma que una de las restricciones (r, c) se haya satisfecho. Consideremos por ejemplo satisfacer c. Tenemos entonces que la matriz de escaños inicial, $x(0)$, verifica $x_{Nj}(0) = c_j$ para todo j en M. Dado que el algoritmo a cada paso mantiene el ajuste inicial realizado sobre las columnas únicamente nos centraremos en las filas en lo referente a la medición del error que viene dado por la expresión

$$c(x(t)) := \sum_{i \leq n} |x_{iM}(t) - r_i| = \sum_{i \in I^+(t)} x_{iM}(t) - r_i + \sum_{i \in I^-(t)} r_i - x_{iM}(t),$$

donde los conjuntos $I^+(t)$ e $I^-(t)$ son los de las columnas sobrerrepresentadas e infrarrepresentadas respectivamente:

$$I^+(t) := \{i \in N : \ x_{iM} > r_i\}, \qquad I^-(t) := \{i \in N : \ x_{iM} < r_i\}.$$

El proceso de transferencia de escaños será realizado secuencialmente desde una fila sobrerrepresentada hasta una infrarrepresentada siguiendo un camino a través de las distintas filas $i_1, i_2, \ldots, i_q$ y columnas $j_1, j_2, \ldots, j_{q-1}$ de forma que i_1 pertenece a $I^+(t)$ e i_q pertenece a $I^-(t)$:

$$(i_1, j_1) \to (i_2, j_1) \to (i_2, j_2) \to (i_3, j_2) \to \ldots \to (i_{q-1}, j_{q-1}) \to (i_q, j_{q-1}).$$

En cada paso $t = 0, 1, 2, \ldots$ el algoritmo sigue dos rutinas consistentes en, por un lado encontrar un camino a través del cual realizar la transferencia de escaños, y por otro lado en llevar a cabo la propia transferencia de escaños.

2.2.2. Actualización de la matriz de escaños. Búsqueda de empates

Esta primera parte del algoritmo se centra en el cálculo de multiplicadores de divisores por fila $\lambda_i(t+1)$ y por columna $\mu_j(t+1)$ de forma que los pesos actualizados

$$v_{ij}(t+1) = \frac{v_{ij}(t)}{\lambda_i(t+1)\mu_j(t+1)}$$

mantengan $x_{ij}(t) \in [[v_{ij}(t+1)]]$ pero genere un camino por $i_1, i_2, \ldots, i_q$ y $j_1, j_2, \ldots, j_{q-1}$ de forma que alterne entre empates con *opción de incremento*, que son empates en los que se ha tomado el valor menor de los dos presentes en el conjunto resultante de aplicar la regla de redondeo, y empates con *opción de decremento*, en los que el valor tomado del conjunto de dos elementos es el mayor.

La transferencia de escaños por el camino obtenido se realizará de forma que

$$v_{i_p j_p}(t+1) = s(x_{i_p j_p}(t)), \qquad v_{i_{p+1} j_p} = s(x_{i_{p+1} j_p}(t) + 1), \tag{2.4}$$

empezando en i_1 en $I^+(t)$ y terminando en i_q en $I^-(t)$.

El camino es obtenido mediante la multiplicación de los divisores de filas y columnas a fin de crear empates provocando opciones de decremento al hacer que los cocientes coincidan con el divisor inferior, $v_{ij}(t) = s(x_{ij}(t))$, que denotaremos $x_{ij}(t)-$, o provocar opciones de incremento al hacer que estos cocientes coincidan con el divisor superior, $v_{ij}(t) = s(x_{ij}(t)+1)$, que denotaremos $x_{ij}(t)+$. La idea radica en, una vez provocados los suficientes empates, poder diseñar un camino para la realización de la transferencia del escaño.

Tomando en consideración lo previamente explicado, este apartado del algoritmo podemos verlo dividido en dos partes: la búsqueda del camino de transferencia y la creación de empates. Estos dos procedimientos se van iterando hasta encontrar un camino adecuado o asegurar la imposibilidad de poder obtener una solución.

La búsqueda del camino opera en dos conjuntos, estos son el conjunto de "filas marcadas", I_L, y el de "columnas marcadas", J_L. Estas serán las filas y columnas candidatas a ser recorridas por el camino a diseñar. Inicialmente el conjunto de filas marcadas será igual al de filas sobrerrepresentadas $I_L = I^+(t)$, y el de columnas marcadas quedará vacío $J_L = \emptyset$. A continuación procedemos a actualizar estos conjuntos siguiendo el siguiente esquema:

1. Se recorre en $x(t)$ las filas en I_L. En caso de encontrar opciones de decremento, los índices de las columnas en las que esto suceda serán incorporados a J_L.
2. Se recorren ahora las columnas en J_L. En caso de encontrar opciones de incremento, los índices de las filas en las que esto surja serán incorporadas a I_L.
3. Repetimos los pasos 1 y 2 hasta que, o bien el índice de una fila infrarrepresentada sea incorporado a I_L, en cuyo caso mediante el proceso de marcado de filas y columnas obtenemos un camino válido y procedemos con la transferencia del escaño, o el proceso de actualización de los conjuntos de filas y columnas marcadas se estanque, en cuyo caso procederemos con la actualización de empates.

La creación de empates parte de la división de la matriz $x(t)$ en 4 bloques en función de las filas y columnas marcadas

$$\left(\begin{array}{c|c} I_L \times J_L & I_L \times J'_L \\ \hline I'_L \times J_L & I'_L \times J'_L \end{array}\right),$$

donde I'_L y J'_L denotan a los complementarios de los conjuntos I_L y J_L en N y M respectivamente. Notemos la información que nos brinda los bloques $I_L \times J'_L$ e $I'_L \times J_L$. La relación fundamental nos indica que $s(x_{ij}(t)) \leq v_{ij}(t)$, pero la desigualdad ha de ser estricta en $I_L \times J'_L$ pues de lo contrario estaríamos en el caso de opción de decremento y sabemos que $j \notin J_L$. Podemos razonar de manera similar en $I'_L \times J_L$ obteniendo de manera integrada lo siguiente:

$$\begin{aligned} s(x_{ij}(t)) &\leq v_{ij}(t), \qquad (i,j) \in I_L \times J'_L, \\ v_{ij}(t) &< s(x_{ij}(t)+1), \qquad (i,j) \in I'_L \times J_L. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Los bloques no diagonales $I_L \times J'_L$ e $I'_L \times J_L$ no proporcionarán información si alguno de los conjuntos marcados es vacío, o si $s(x_{ij}(t)), v_{ij}(t)$ se anula en alguno de estos conjuntos. Para una regla de redondeo permeable se tiene que $s(x_{ij}(t)) = 0 \Leftrightarrow v_{ij}(t) = 0$ además $v_{ij}(t) = 0$ si y solo si el número de votos en (i,j) es cero. De esta forma un bloque no informativo tiene suma 0 si $x_{I_L \times J'_L}(t) = 0$ o si $v_{I'_L \times J_L}(t) = 0$. Si ambas sumas verificaran esto chocaría con las desigualdades indicadas anteriormente en (2.5). Sin embargo estas desigualdades se consideran ciertas de antemano procurando unos datos iniciales adecuados. En consecuencia como mínimo uno de los dos bloques no diagonales es informativo, luego alguno de los siguientes factores es finito y positivo:

$$\begin{aligned} \alpha &:= \text{máx}\left\{0, \frac{s(x_{ij}(t))}{v_{ij}(t)} : \ i \in I_L,\ j \in J'_L,\ s(x_{ij}(t)) > 0\right\} \in [0,1), \\ \beta &:= \text{mín}\left\{+\infty, \frac{s(x_{ij}(t)+1)}{v_{ij}(t)} : \ i \in I'_L,\ j \in J_L,\ v_{ij}(t) > 0\right\} \in (1,+\infty]. \end{aligned}$$

Uno de estos factores será el empleado para crear nuevos empates. Notemos que si α es no nulo este generará, como mínimo, un nuevo empate en $I_L \times J'_L$, y si β es finito, este creará un nuevo empate como mínimo en un elemento de $I'_L \times J_L$. En caso de ser ambos finitos y positivos se tomará el valor más próximo a 1. De esta forma si tenemos que $\alpha \geq 1/\beta$ se tomará α como factor de multiplicación, y en caso contrario $1/\beta$. Denotando este factor como η,

$$\eta := \text{máx}\{\alpha, 1/\beta\},$$

la matriz de pesos será actualizada de la siguiente forma: los divisores de fila en I_L serán multiplicados por η y los divisores de columna de J_L serán divididos por η. Notemos que los bloques diagonales $I_L \times J_L$ y $I'_L \times J'_l$ se ven inalterados, uno por ser multiplicados simultáneamente por el factor y su inverso y el otro por no experimentar variación alguna en sus divisores. Notemos que en el caso $\eta = \alpha$ tenemos en $I_L \times J'_L$ que

$$s(x_{ij}(t)) \leq \alpha v_{ij}(t) < v_{ij}(t) \leq s(x_{ij}(t)+1),$$

luego $x_{ij}(t) \in [[\alpha v_{ij}(t+1)]]$, además como ya se ha mencionado anteriormente, se ha generado en este bloque como mínimo una opción de decremento. Observamos también que en $I'_L \times J_L$ tenemos

$$s(x_{ij}(t)) \leq v_{ij}(t) < \frac{v_{ij}(t)}{\alpha} \leq \beta v_{ij}(t) \leq s(x_{ij}(t)+1),$$

luego de igual forma $x_{ij}(t) \in [[v_{ij}(t+1)/\alpha]]$. Obtenemos que a excepción de los nuevos empates creados se mantiene la opción de mantener la asignación de $x(t)$. El razonamiento se da de forma análoga para el caso $\eta = 1/\beta$ con la excepción de que, como mínimo, se ha generado una nueva opción de incremento en $I'_L \times J_L$.

Una vez finalizado el proceso de actualización de empates, se reanuda la búsqueda de camino de forma que estos dos procedimientos se alternan hasta o bien hallar un camino válido o bien agotar las posibilidades por presencia de ceros en los bloques no diagonales.

2.2.3. Transferencia de escaños

Una vez encontrado un camino válido desde una fila sobrerrepresentada a una infrarrepresentada se efectúa la transferencia de escaños siguiendo el camino hallado. Esta rutina es inmediata y se expresa sencillamente por las ecuaciones (2.4).

Notemos que la única fila que pierde escaños es la fila i_1 y la única que gana es la fila i_q, pues el resto de filas obtienen y ceden escaños simultáneamente en columnas diferentes. De esta forma las restricciones por columnas se siguen satisfaciendo y en el caso de las filas observamos que hemos logrado disminuir los números de filas sobrerrepresentadas e infrarrepresentadas en uno cada una. En consecuencia se tiene que

$$c(x(t+1)) = c(x(t)) - 2.$$

El algoritmo será repetido hasta realizar un paso t_f que verifique $c(x(t_f)) = 0$.

2.2.4. Aplicación del algoritmo. Ejemplos

Procedamos ahora de manera ilustrativa a mostrar el algoritmo con un ejemplo de autoría propia que haga realizar un paso completo siguiendo Tie-and-transfer, e indicar con otros ejemplos situaciones en las que el algoritmo no de una solución única o sencillamente no pueda dar solución alguna relacionándolo con la teoría previamente expuesta.

Ejemplo 3. *Supongamos el problema de reparto asociado a la matriz*

$$\begin{pmatrix} 73 & 50 & 110 & 43 \\ 127 & 120 & 200 & 107 \\ 200 & 153 & 150 & 60 \end{pmatrix}$$

con restricciones $\sigma = \{r = (4,6,7),\ c = (5,4,6,2),\ h = 17\}$ *y empleando como método de divisores* $A^{\{\{\cdot\}\}}$. *La distribución de pesos inicial la hacemos de forma que se satisfagan las exigencias o bien por filas o por columnas. Si las hacemos por columnas y empleamos como divisores las cuotas Hare*

$$D_{ij} = \frac{v_{Nj}}{c_j},$$

y aplicamos el método de divisores $A^{\langle\langle\cdot\rangle\rangle}$ *durante el cual se actualizan los pesos resultando la matriz de la siguiente forma*

$$v(0) = \begin{pmatrix} 0{,}91 & 0{,}62 & 1{,}43 & 0{,}41 \\ 1{,}59 & 1{,}48 & 2{,}61 & 1{,}02 \\ 2{,}5 & 1{,}9 & 1{,}96 & 0{,}57 \end{pmatrix}$$

que se traduce en la siguiente distribución de escaños una vez aplicado el método:

Circ/Part	p1	p2	p3	p4	Total	Dif.
c1	1	1	1	0	4	-1
c2	2	1	3	1	6	1
c3	2+	2	2	1	7	0
Total	5	4	6	2	17	-

Tenemos entonces que la segunda fila se halla sobrerrepresentada y la primera infrarrepresentada. Luego procedemos a aplicar el algoritmo y tratar de buscar un camino de la segunda a la primera fila. Inicialmente $I_L = \{2\}$ *y* $J_L = \emptyset$. *Dado que en la segunda fila no encontramos opciones de decremento, procedemos con la rutina de creación de empates. Buscamos*

$$\alpha = \text{máx}\left\{0, \frac{s(x_{ij}(0))}{v_{ij}(0)} :\ i \in I_L = \{2\},\ j \in J'_L = \{1,2,3,4\},\ s(x_{ij}(0)) > 0\right\},$$

$$\beta = \text{mín}\left\{+\infty, \frac{s(x_{ij}(0)+1)}{v_{ij}(0)} :\ i \in I'_L = \{1,3,4\},\ j \in J_L = \emptyset,\ v_{ij}(0) > 0\right\} = +\infty.$$

Obtenemos $\eta = \alpha \approx 0{,}958$, que multiplicamos a los divisores de fila de I_L y dividimos a los de columna de J_L. Como resultado la matriz de pesos $v(1)$ queda

$$v(1) = \begin{pmatrix} 0{,}91 & 0{,}62 & 1{,}43 & 0{,}41 \\ 1{,}52 & 1{,}42 & 2{,}5 & 0{,}98 \\ 2{,}5 & 1{,}9 & 1{,}96 & 0{,}57 \end{pmatrix}$$

que se traduce en escaños como:

Circ/Part	p1	p2	p3	p4	Total	Dif.
c1	1	1	1	0	4	-1
c2	2	1	3-	1	6	1
c3	2+	2	2	1	7	0
Total	5	4	6	2	17	-

Podemos ahora actualizar J_L añadiendo la columna tercera de forma que el proceso de búsqueda de camino se estanca nuevamente con $I_L = \{2\}$ y $J_L = \{3\}$. Calculando de nuevo el factor de actualización obtenemos $\eta \approx 0{,}987$, que al aplicar como multiplicador/divisor de los divisores de fila de I_L y de columna de J_L respectivamente obtenemos

$$v(2) = \begin{pmatrix} 0{,}91 & 0{,}62 & 1{,}45 & 0{,}41 \\ 1{,}5 & 1{,}4 & 2{,}5 & 0{,}97 \\ 2{,}5 & 1{,}9 & 1{,}99 & 0{,}57 \end{pmatrix},$$

de forma que se ha generado una opción de decremento en la primera columna, luego

Circ/Part	p1	p2	p3	p4	Total	Dif.
c1	1	1	1	0	4	-1
c2	2-	1	3-	1	6	1
c3	2+	2	2	1	7	0
Total	5	4	6	2	17	-

$J_L = \{1, 3\}$. Además, en la tercera fila de la primera columna encontramos una opción

de incremento, de forma que $I_L = \{2,3\}$. *Nuevamente se ha estancado el proceso de búsqueda de camino, luego reanudamos el proceso de creación de empates con las filas y columnas marcadas actualizadas. Obtenemos* $\eta \approx 0{,}967$, *y tras el cálculo de pesos actualizados y su posterior conversión a escaños observamos resultados:*

Circ/Part	p1	p2	p3	p4	Total	Dif.
c1	1	1	1+	0	4	-1
c2	2-	1	3-	1	6	1
c3	2+	2	2	1	7	0
Total	5	4	6	2	17	-

Hemos conseguido una opción de incremento en la fila infrarrepresentada, luego podemos transferir un escaño siguiendo el camino $(2,3) \longrightarrow (1,3)$, *de forma que la asignación resultante satisface todas las restricciones de* σ:

Circ/Part	p1	p2	p3	p4	Total	Dif.
c1	1	1	2-	0	4	0
c2	2-	1	2+	1	6	0
c3	2+	2	2	1	7	0
Total	5	4	6	2	17	-

$\triangle$

Un ejemplo trivial que nos muestra la imposibilidad de aplicar en general el algoritmo puede ser formulado de una manera muy sencilla:

Ejemplo 4. *Consideremos el problema dado por las restricciones* $\sigma = \{r = (r_1, r_2),\ c = (c_1, c_2),\ h\}$ *donde* $r_1 + r_2 = c_1 + c_2 = h > 0$ *y además se tiene* $r_1 \neq c_1$ *y* $r_2 \neq c_2$. *Consideremos además que la matriz de votos es diagonal. Si nos centramos en resolver primero las restricciones por columnas cualquier método de divisores arrojará la siguiente distribución de escaños:*

Dado que $r_1 \neq c_1$ *y* $r_2 \neq c_2$ *el problema queda irresoluble y el algoritmo no puede proceder al verse en las condiciones comentadas en la sección anterior de* $x_{I_L \times J'_L}(t) = 0$ *y* $v_{I'_L \times J_L}(t) = 0$.

$\triangle$

Circ/Part	p1	p2	Total	Dif.
circ.1	c_1	0	r_1	$c_1 - r_1$
circ.2	0	c_2	r_2	$c_2 - r_2$
Total	c_1	c_2	h	-

Sobre la no-unicidad de los métodos en general podemos ver en [16] (pág. 295) un ejemplo donde tras el empleo de los pasos correspondientes del algoritmo se nos presentan los escaños de la siguiente forma:

Circ/Part	p1	p2	p3	Total	Dif.
c1	0	1-	1-	1	1
c2	1-	0+	0+	1	0
c3	0+	0+	0+	1	-1
Total	1	1	1	3	-

Se tiene claramente que existen cuatro soluciones distintas del problema, sin embargo no es sorpresa si nos fijamos que no se verifican las condiciones del teorema de unicidad demostrado al inicio de la sección. Podemos observar en la tabla que se dan más de tres situaciones de empate, lo que permite realizar diferentes configuraciones de escaños todas ellas soluciones al problema.

2.3. Medidas de desproporcionalidad

Finalmente terminamos el capítulo aportando unas herramientas diseñadas para la evaluación del grado de desproporcionalidad de los resultados electorales una vez finalizada la asignación de escaños. Nos disponemos a introducir lo que se conoce como *índices de desproporcionalidad* que operan tomando como argumentos para cada partido los porcentajes de votos y escaños recibidos sobre el total.

Estos índices, que recogemos de [7] y [10] han de ser entendidos en la misma manera en que hemos de entender la diversidad presente en los métodos de reparto proporcional, pues todos ellos buscan minimizar la desproporcionalidad pero esta entendida, o dicho de mejor manera, enfocada, desde perspectivas diversas, y estos enfoques los hemos de tener en consideración de cara a realizar un análisis de la medida de desproporcionalidad al aplicar estos índices.

Los índices de desproporcionalidad, que aplicamos a un ejemplo real y mostramos en la Tabla 2.1, son los siguientes:

- *Índice de Loosemore-Hanby*. Mide la desproporcionalidad en términos absolutos mediante la diferencia entre el porcentaje de votos y de escaños. El índice se calcula mediante la suma de las diferencias en valor absoluto y posteriormente se divide el total a la mitad,

$$I_{L-H} = \sum_{j \in M} \frac{|v_j - x_j|}{2}.$$

  Se trata de un índice que se centra puramente en la diferencia de los porcentajes votos-escaños sin atender nada más. Es por ello que se trata de un índice que es minimizado por el *método de Hamilton* de los restos mayores consistente en la asignación de escaños a los partidos mediante el redondeo por defecto del cociente obtenido al dividir los votos de cada partido por la cuota Hare y posteriormente repartir los escaños que queden por repartir a los partidos cuyos cocientes presenten la mayor parte decimal.

  El principal problema del método de Hamilton radica en la aparición de paradojas. Esto hace que el índice de Loosemore-Hanby, que es minimizado por este método, las herede. Tenemos en [7] un ejemplo académico en el cual observamos como la paradoja de Alabama se hace presente en este índice al señalar en unas elecciones que es menos proporcional una opción de escaños frente a otra, pero indica lo contrario en las mismas circunstancias de votos y escaños ante la inclusión de un nuevo partido que no recibe escaño alguno.

- *Índice de Rae*. Consiste en una modificación del índice de Loosemore-Hanby en la que se considera en la suma únicamente los partidos que hayan ganado más del 0,5 % de los votos y posteriormente se divide entre el total de partidos considerados,

$$I_R = \sum_{j \in M^*} \frac{|v_j - x_j|}{|M^*|}, \quad M^* = \{j \in M : \; v_j > 0{,}5\}.$$

  Se trata de un índice que se centra en la medición de la desproporcionalidad por partido, a diferencia del índice anterior, y el resto que se detallan a continuación, que lo hacen por elección. Al igual que en el caso del índice de Loosemore-Hanby, este índice está también sujeto a paradojas.

- *Índice de Gallagher*. También denominado índice de mínimos cuadrados, se trata de un índice ampliamente usado en la ciencia y matemática en general. Se formula como

$$I_G = \sqrt{\sum_{j \in M} \frac{(v_j - x_j)^2}{2}}.$$

Mide, al igual que en el caso del índice de Loosemore-Hanby, la desproporcionalidad por elección y presenta menos discrepancias que los anteriores índices. Sin embargo también se encuentra sujeto a paradojas.

- *Índice de Sainte-Laguë*. Este índice, a diferencia de los dos primeros, emplea una diferencia relativa, no absoluta. Tiene como fórmula

  $$I_{S-L} = \sum_{j \in M} \frac{(v_j - x_j)^2}{v_j},$$

  y notemos cómo este índice toma valores desde 0 (proporcionalidad total) hasta infinito (si algún partido no votado de alguna forma recibiera un escaño). Se trata de un índice de difícil interpretación debido al amplio rango de valores que puede tomar, pero presenta la virtud de no estar sometido a paradojas.

- *Índice d'Hondt*. Parte de la propia idea del método Jefferson; reducir en la medida de lo posible la sobrerrepresentación del partido más sobrerrepresentado. Es por ello que el índice es tomado como el máximo de los cocientes escaño/-voto,

  $$I_J = \text{máx}\{x_j/v_j : \ j \in M\}.$$

  Se trata de un índice muy sensible a producir valores muy altos ante el caso de sobrerrepresentación de partidos pequeños. Es por ello que se diseñaron variaciones de este índice a fin de dar solución al problema mencionado mediante la condición de considerar el máximo de los cocientes en partidos cuyo porcentaje de votos sea superior a un valor previamente establecido.

En la práctica para evaluar el grado de desproporcionalidad de los resultados que obtengamos daremos importancia a la propiedad de evitar paradojas. Es por ello que trataremos de emplear los índices de Sainte-Laguë y d'Hondt principalmente. Además tenemos garantizado que ningún partido que no haya sido votado recibirá escaño, luego no obtendremos valores indeterminados en los índices.

Partido	% Votos	% Esc.	I_{L-H}	I_R	I_G	I_{S-L}	I_J
PT	10.3	10.92	0.62	0.62	0.38	0.04	1.06
PSL	11.65	10.14	1.51	1.51	2.28	0.2	0.87
PP	5.57	7.21	1.64	1.64	2.69	0.48	1.29
PSD	5.85	6.63	0.78	0.78	0.61	0.1	1.13
MDB	5.53	6.63	1.1	1.1	1.21	0.22	1.2
PR	5.31	6.43	1.12	1.12	1.25	0.24	1.21
PSB	5.48	6.24	0.76	0.76	0.58	0.11	1.14
PRB	5.08	5.85	0.77	0.77	0.59	0.12	1.15
PSDB	6.01	5.65	0.36	0.36	0.13	0.02	0.94
DEM	4.66	5.65	0.99	0.99	0.98	0.21	1.21
PDT	4.62	5.46	0.84	0.84	0.71	0.15	1.18
SOLID.	1.99	2.53	0.54	0.54	0.29	0.15	0.0
PODE	2.28	2.14	0.14	0.14	0.02	0.01	0
PSOL	2.83	1.95	0.88	0.88	0.77	0.27	0
PTB	2.06	1.95	0.11	0.11	0.01	0.01	0
PC do B	1.35	1.75	0.4	0.4	0.16	0.12	0
NOVO	2.79	1.56	1.23	1.23	1.51	0.54	0
PROS	2.08	1.56	0.52	0.52	0.27	0.13	0
PSC	1.8	1.56	0.24	0.24	0.06	0.03	0
PPS	1.62	1.56	0.06	0.06	0.0	0.0	0
AVANTE	1.88	1.36	0.52	0.52	0.27	0.14	0
PHS	1.45	1.17	0.28	0.28	0.08	0.05	0
PATRI	1.46	0.97	0.49	0.49	0.24	0.16	0
PV	1.62	0.78	0.84	0.84	0.71	0.44	0
PRP	0.87	0.78	0.09	0.09	0.01	0.01	0
PMN	0.64	0.58	0.06	0.06	0.0	0.01	0
PTC	0.61	0.39	0.22	0.22	0.05	0.08	0
REDE	0.83	0.19	0.64	0.64	0.41	0.49	0
PPL	0.39	0.19	0.2	0	0.04	0.1	0
DC	0.38	0.19	0.19	0	0.04	0.1	0
PRTB	0.7	0.0	0.7	0.7	0.49	0	0
PMB	0.23	0.0	0.23	0	0.05	0	0
PCB	0.06	0.0	0.06	0	0.0	0	0
PSTU	0.04	0.0	0.04	0	0.0	0	0
PCO	0.0	0.0	0.0	0	0.0	0	0
Índice	-	-	9.58	0.64	2.91	4.73	1.29

Tabla 2.1.: Índices de desproporcionalidad aplicados a las elecciones generales de Brasil de 2018. Tabulados se recogen los términos de interés para las construcciones explicadas de los índices que vienen recogidos en la última fila.

CAPÍTULO 3

Propuesta de reparto proporcional. Resultados

Integramos las consideraciones y apuntes sobre el método de reparto de escaños vigente en Brasil señalados en el primer capítulo junto a las diferentes nociones matemáticas desarrolladas en el capítulo previo con el propósito de introducir la propuesta alternativa de sistema electoral, exponer simulaciones de la misma y realizar una comparativa entre esta y el sistema vigente.

Destinamos este capítulo a la implementación de un algoritmo para el reparto biproporcional de escaños en el que aplicamos de manera justificada unos métodos de divisores específicos que procuren la gobernabilidad y representatividad en la medida de lo posible, y al empleo de barreras electorales que serán analizadas de manera somera en torno a una serie de criterios. Finalmente mostraremos los resultados de tal implementación que serán sometidos a un análisis de desproporcionalidad global y local.

3.1. Aplicación del algoritmo. Resultados

El algoritmo diseñado se basa en una particularización del Tie-and-transfer y sigue los pasos desarrollados en el capítulo previo. A diferencia del algoritmo Tie-and-transfer, el algoritmo construido no contempla todas las posibles soluciones extraídas en [3], que son obtenidas empleando como caminos de transferencia de escaños los obtenidos de una red de flujo asociada a las posiciones de las filas y columnas de la matriz de empates asociada a un problema de reparto y a unos métodos de divisores, que son marcadas similarmente a como se hace en la sección 2.2. En su lugar el algoritmo busca un camino válido empleando una búsqueda de fuerza bruta, y este es el que emplea para realizar la transferencia de escaño.

Notemos que este algoritmo supone una simplificación en lo referente a la magnitud teórica del mismo con respecto al diseñado por Balinski y Demange. Sin embargo, también abre una cuestión en lo referente a la generalidad con la que el algoritmo encuentra soluciones ante problemas de reparto en los cuales existen dichas soluciones, y esta es si en este tipo de escenarios podemos garantizar que el algoritmo encuentre siempre alguna solución. A todos los problemas académicos y reales con solución que han sido utilizados en este trabajo se les ha podido extraer esta (en caso de haber más de una solución se obtenía una de ellas) por medio del algoritmo, no obstante conjeturamos la existencia de problemas que presenten solución/es que no puedan ser extraídas haciendo uso del algoritmo diseñado. La razón por la cual se conjetura esto es el hecho de que el algoritmo toma para la transferencia de escaño el primer camino válido que encuentre, y este primer camino puede impedir formar los siguientes caminos de manera que no se pueda realizar alguna de las siguientes transferencias de escaños. Es por ello que no se puede recomendar el uso del algoritmo en general, aunque indicamos que el algoritmo ha resultado válido para este trabajo y naturalmente ha sido más sencillo de implementar que el expuesto en [3].

Antes de comenzar, se ha de partir de un problema (v, σ) adecuado, en este caso del tipo de restricciones de igualdad, que nos permitirá obtener una solución en $R(\sigma)$. Este problema se compone naturalmente de la matriz de votos v, obtenida tras la finalización de las elecciones, del número de escaños a repartir en cada una de las circunscripciones (en el caso de Brasil son los recogidos en la Tabla 1.1) y del número total de escaños de la Cámara de los Diputados (513 en el caso de Brasil).

Sin embargo precisamos de un elemento más para la formulación del problema, esto es, el vector de restricciones para columnas $c = (c_j) > 0$ para j en M. Lo construimos de la forma

$$c \in A^{\lfloor\lfloor\cdot\rfloor\rfloor}(v^*, h),$$

con $v^* = (v_{Nj})$, con j en M. Esto es, hemos empleado el método d'Hondt para obtener una asignación global de escaños para cada partido, que es lo que imponemos como condición a las columnas y de esta forma conformar el problema (v, σ) finalmente. Este problema se encuentra ya listo para la aplicación del algoritmo, que tratará de encontrar una asignación de escaños biproporcional empleando el método de Sainte-Laguë.

3.1.1. Métodos d'Hondt y Sainte-Laguë ¿Por qué?

Presenta una muy razonable importancia la elección del método de divisores a emplear en el algoritmo. En consecuencia hemos de atender a una serie de propiedades que presentan los métodos de reparto proporcional algunas de las cuales recogidas y desarrolladas en [17], que extraemos y analizamos. Posteriormente se habrá de establecer, bajo una opinión razonada, cuales de ellas prevalecen frente a las otras dado el contexto, y seleccionar el método de entre los posibles que presenten algunas de estas propiedades deseadas.

Como ya se ha indicado anteriormente, la asignación se apoya en el uso de los métodos d'Hondt y Sainte-Laguë en dos momentos específicos del proceso: d'Hondt para establecer las restricciones por columna, estas son, el total de escaños obtenido por cada partido; y Sainte-Laguë para el reparto biproporcional de escaños entre partidos y circunscripciones.

La razón principal del uso de métodos de divisores radica en una característica fundamental que presentan los mismos, y esta es que cualquier método de divisores tiene la propiedad de evitar paradojas. Por otro lado se tiene que ambos métodos, d'Hondt y Sainte-Laguë verifican las propiedades de *monotonía*, que de manera similar al Ax.4' indica que en caso de aumentar/reducir los votos de un partido, el número de escaños del mismo no habría de reducirse/aumentar, o que el aumentar el total de escaños no debería afectar negativamente a ningún partido. También verifican la propiedad de *consistencia*, que similarmente al Ax.3' hace referencia a la propiedad de un problema sea consistente con sus partes, que una vez aplicado a una parte de la votación reproduce los mismos resultados (en esa parte).

Otras dos propiedades muy interesantes y decisivas para la elección de estos métodos fueron la propiedad de fortalecer coaliciones, esto es, castigar la escisión de partidos; y la de imparcialidad, no beneficiar a partidos grandes ni pequeños. Estas propiedades las presentan d'Hondt y Sainte-Laguë respectivamente. Notemos como la primera favorece la gobernabilidad y la segunda la podemos enmarcar más en el terreno de la representatividad. También se consigue representatividad al asignar los escaños totales en proporción a los votos totales de cada partido. La representatividad y gobernabilidad son nociones clave de cara a diseñar un sistema de reparto proporcional y habitualmente se hallan enfrentadas en el sentido de que primar una generalmente dificulta la otra y viceversa.

En términos globales, de asignación de escaños a partidos en función los votos totales percibidos, se ha optado por emplear el método d'Hondt ya que verifica la cuota inferior y fomenta la gobernabilidad como se ha explicado anteriormente; mediante el favorecimiento de la formación de coaliciones. Además se tiene, como se explica en [14], que el método d'Hondt es el único método de divisores que garantiza, para el caso en el que el total de escaños sea impar (como en el caso de Brasil), la mayoría absoluta de escaños cuando se tiene la mayoría absoluta de votos. Este resultado se verifica cuando tenemos una única circunscripción, en consecuencia se valida para los resultados globales de la elección, pues se dan en la totalidad del estado de manera conjunta, sin ningún tipo de división.

El principal aliciente del método de Sainte-Laguë, que lo diferencia del resto de métodos de divisores, es la imparcialidad que presenta y que deseamos para la distribución de escaños por columnas, esto es, la distribución dentro de un partido de escaños por circunscripciones electorales. Notemos que el hecho de que el método de Sainte-Laguë no favorezca la formación de coaliciones nos es indiferente pues se están distribuyendo escaños dentro de un mismo partido.

3.1.2. Software empleado

Para la obtención de resultados numéricos han sido empleados dos recursos principalmente: el software Bazi y un programa en Python de autoría propia que implementa el algoritmo de reparto biproporcional y los métodos de divisores empleados dentro del mismo.

Bazi es un programa gratuito desarrollado en Java que tiene implementados los principales métodos de reparto proporcional así como métodos biproporcionales siguiendo los algoritmos de Tie-and-transfer y de Alternating-scaling, este último no tratado en el trabajo. El programa permite, haciendo uso de una interfaz sencilla, realizar el cálculo de escaños mediante la introducción manual de datos o la carga de ficheros .bazi creados, descargados o presentes en la base de datos que el programa incorpora. Podemos encontrar un manual detallando cada uno de los aspectos del mismo por los autores del programa en [12].

El programa de Python elaborado por el autor lo podemos encontrar en el siguiente repositorio público de Github: Proportional-representation [1]. El código será explicado de manera somera en el anexo A, donde se mostrarán partes de interés del código a la par que se van explicando las ideas y objetivos detrás de su implementación.

3.1.3. Resultados

Para la muestra y análisis de resultados emplearemos los escrutinios obtenidos en las dos últimas elecciones generales de Brasil, las de 2018 y 2014. Indicamos en

[1]Dirección web: https://github.com/serfersan/Proportional-representation

Partido	Votos	Esc.	Esc.*	Partido	Votos	Esc.	Esc.*
PSL	11457878	52	61	PSC	1765226	8	9
PT	10126611	56	54	PV	1592173	4	8
PSDB	5905541	29	31	PPS	1590084	8	8
PSD	5749008	34	30	PATRI	1432304	5	7
PP	5480067	37	29	PHS	1426444	6	7
MDB	5439167	34	29	PC do B	1329575	9	7
PSB	5386400	32	29	PRP	851368	4	4
PR	5224591	33	28	REDE	816784	1	4
PRB	4992016	30	26	PRTB	684976	0	3
DEM	4581162	29	24	PMN	634129	3	3
PDT	4545846	28	24	PTC	601814	2	3
PSOL	2783669	10	15	PPL	385197	1	2
NOVO	2748079	8	14	DC	369386	1	1
PODE	2243320	11	12	PMB	228302	0	1
PROS	2042610	8	11	PCB	61343	0	0
PTB	2022719	10	10	PSTU	41304	0	0
SOLID.	1953067	13	10	PCO	2785	0	0
Avante	1844048	7	9	-	-	-	-

Tabla 3.1.: Resultados obtenidos a partir del escrutinio de las elecciones generales de Brasil de 2018. En las columnas se muestran los votos totales recibidos por cada partido, los escaños asignados originalmente en la columna "Esc." y los repartidos por el algoritmo en "Esc.*".

el anexo B la procedencia de los datos utilizados. Los repartos globales de escaños a los partidos son recogidos en las Tablas 3.1 y 3.2 donde se muestran las asignaciones originales de escaños y las obtenidas por medio del algoritmo empleando los métodos de divisores indicados en el apartado previo.

Naturalmente el interés del algoritmo empleado no radica únicamente en la distribución global de escaños, sino también en el reparto de los mismos en las circunscripciones electorales, que es lo que lleva a cabo el algoritmo; en otro caso lo mostrado en las tablas anteriormente mencionadas sería un mero reparto empleando d'Hondt. Recogemos en el anexo C los resultados electorales de las elecciones indicadas en cada una de las unidades federativas.

Partido	Votos	Esc.	Esc.*	Partido	Votos	Esc.	Esc.*
PT	13554166	69	73	PC do B	1913015	10	10
PSDB	11073631	54	60	PSOL	1745470	5	9
PMDB	10791949	66	58	PHS	926664	5	5
PP	6429791	38	35	PT do B	812497	1	4
PSB	6267878	34	34	PSL	808710	1	4
PSD	5967953	36	32	PRP	724825	3	3
PR	5635519	34	30	PTN	723182	4	3
PRB	4423993	21	24	PEN	667983	2	3
DEM	4085487	21	22	PSDC	509936	2	2
PTB	3914193	25	21	PMN	467777	3	2
PDT	3469168	19	18	PRTB	454190	1	2
SD	2689701	15	14	PTC	338117	2	1
PSC	2520421	13	13	PSTU	188473	0	1
PV	2004464	8	10	PPL	141254	0	0
PROS	1977117	11	10	PCB	66979	0	0
PPS	1955689	10	10	PCO	12969	0	0

Tabla 3.2.: Resultados obtenidos a partir del escrutinio de las elecciones generales de Brasil de 2014. Mostramos los resultados originales y los obtenidos mediante el uso del algoritmo de manera similar a como se hace en la Tabla 3.1.

3.1.4. Barreras electorales

El empleo de barreras electorales tiene una finalidad clara: favorecer la gobernabilidad limitando el acceso a escaños a partidos/candidatos que presenten un mínimo de votos. Se trata de una herramienta que sacrifica representatividad y prima la gobernabilidad que perjudica generalmente a partidos más pequeños o que no presentan el voto lo suficientemente concentrado.

La duda que surge de cara al uso de barreras radica en que tipo emplear (fijas, continuas, variables, etc) o qué tan severas han de ser. Observando el panorama internacional existe un predominio en el uso de barreras ubicadas en el rango $3-5\,\%$ de los votos totales. Cabe mencionar la necesidad de evaluar la eficiencia de estas barreras, pues encontramos casos como el de España, que establece como barrera el $3\,\%$ de los votos en el reparto de escaños de cada circunscripción (no a nivel de votos totales), con lo cual es una barrera superflua salvo en Madrid y Barcelona,

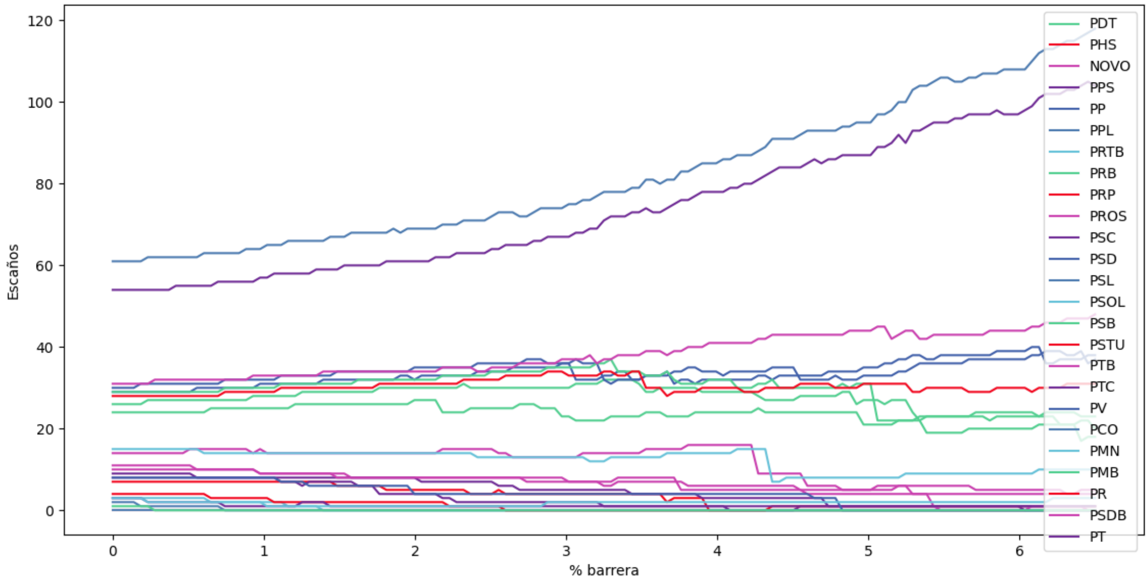

Figura 3.1.: Gráfica de la evolución del número de escaños de los partidos para las elecciones de Brasil de 2018. Se muestra el número de escaños obtenidos haciendo uso del algoritmo y métodos descritos aplicando las barreras electorales indicadas en el eje de abcisas. Se aprecian tres bloques principales: partidos muy votados, que se ven beneficiados por el uso de barreras tanto más cuanto más elevadas son; partidos menos votados, cuya representación se ve reducida por las barreras elevadas; y partidos medianos cuyas variaciones se muestran más difusas.

donde apenas tiene incidencia. Por otro lado se tiene el caso de Turquía, que presenta la barrera electoral más alta de Europa (10 %) que supone un duro golpe a la representatividad expuesto y analizado en [1].

En efecto el uso de barreras electorales ha de ser atendido con sumo cuidado, una barrera demasiado elevada favorecerá en gran medida a partidos grandes hasta el punto de casi duplicar sus escaños como podemos observar en la Tabla 3.5, donde notemos para el caso de emplear una barrera del 6,0 % los partidos más votados obtienen unas exageradas cantidades de escaños adicionales superiores a 40 en número.

Ilustramos la evolución de los escaños obtenidos por los partidos en función de la barrera electoral empleada para el caso de las elecciones generales de Brasil de 2018 en la Figura 3.1. En ella podemos observar como los partidos más votados perciben un beneficio inmediato por el uso de barreras elevadas, mientras que los partidos pequeños son castigados por las mismas. Se aprecia también una zona más difusa, relacionada con partidos medianos cuya evolución del número de escaños en función de las barreras presenta un comportamiento más errático.

3.2. Medición de la desproporcionalidad de los resultados

Calculamos los índices de Gallagher, Sainte-Laguë y d'Hondt para medir la desproporcionalidad de los resultados obtenidos en la sección anterior. Comparamos estos resultados con los originales cuyos índices ya fueron calculados y mostrados en la Tabla 2.1. Obtenemos:

Índices/Resultados	I_G	I_{LH}	I_J	I_{S-L}
Resultados originales 2018	2.91	9.58	1.29	4.72
Resultados obtenidos 2018	0.41	1.43	1.04	0.21
Resultados originales 2014	2.16	5.96	1.3	2.86
Resultados obtenidos 2014	0.51	1.7	1.03	0.27

Obtenemos que los valores de desproporcionalidad para el reparto obtenido al emplear el algoritmo son todos ellos inferiores. Este resultado era esperable, pues se ha primado en el algoritmo la asignación global de los escaños en los partidos al distribuirse al principio los escaños totales entre cada partido y ya posteriormente repartirlos en las distintas circunscripciones. Teniendo en consideración que el sistema vigente únicamente reparte los escaños en cada circunscripción no es sorpresa que los índices de desproporcionalidad sean más altos, pues por ejemplo se da el caso que un partido con menos votos que otro haya obtenido más escaños (paradoja de los votos) al tener el voto más concentrado en menos candidatos.

Mostramos en la Tabla 3.4 índices de desproporcionalidad evaluados ahora en los resultados obtenidos en las unidades federativas y observemos como para este caso no podemos decir en general que unos resultados presenten una menor desproporcionalidad frente a los otros. Esto es consecuencia de que el algoritmo diseñado prioriza el reparto global a diferencia del vigente, que realiza el reparto de escaños en las circunscripciones electorales sin atender a la proporcionalidad total votos-escaños de los partidos.

Naturalmente la aplicación de barreras electorales en general aumenta la desproporcionalidad, pues puede privar de escaños a partidos con votos suficientes, y estos ser ganados por partidos que queden más sobrerrepresentados. Exponemos este lógico aumento de la desproporcionalidad para las elecciones generales de Brasil de 2018 y 2014 aplicando distintos valores de barreras fijas que recogemos en la Tabla 3.3. Nuevamente indicamos la necesidad de atender al grado de severidad

Index/Barriers	Orig.	0.0 %	1.0 %	1.5 %	2.0 %	3.0 %	4.0 %	5.0 %	6.0 %
BR-2018: I_G	2.91	0.41	1.54	2.34	2.84	4.16	6.18	8.12	10.26
BR-2018: I_J	1.29	1.04	1.1	1.14	1.18	1.27	1.48	1.65	1.84
BR-2018: I_{S-L}	4.72	0.21	1.97	3.47	5.09	7.88	14.53	21.85	28.57
BR-2014: I_G	2.16	0.51	1.42	1.91	2.33	3.91	5.89	7.76	9.24
BR-2014: I_J	1.3	1.04	1.08	1.09	1.12	1.21	1.36	1.5	1.63
BR-2014: I_{S-L}	2.86	0.27	1.89	2.89	2.65	6.32	10.72	17.06	21.51

Tabla 3.3.: Efecto de las barreras electorales en la desproporcionalidad medida en los resultados de las elecciones generales de Brasil de 2018 y 2014 empleando el algoritmo desarrollado en el trabajo. En las columnas indicamos el porcentaje empleado para la aplicación de barreras fijas.

de las barreras a emplear y preguntarse hasta qué punto primar la gobernabilidad frente a la representatividad.

3.3. Conclusiones

Los resultados obtenidos nos indican que conseguimos una mejora en relación con tanto la representatividad como la gobernabilidad. La aplicación del algoritmo descrito integrando los métodos d'Hondt y Sainte-Laguë ha arrojado unos resultados considerablemente distintos a los resultados originales de ambas elecciones tomadas como ejemplo.

En lo referente a las asignaciones totales de escaños por partido se ha obtenido en ambas elecciones que el reparto realizado por el algoritmo arroja valores para los índices de desproporcionalidad notablemente inferiores a los obtenidos en las asignaciones originales. En consecuencia se tiene que la representatividad a nivel global es (en los términos en los que se ha estudiado) superior para el caso de la asignación realizada por el algoritmo. A nivel regional, veíamos en la Tabla 3.4 que no se puede afirmar con la misma rotundidad que una asignación sea superior a la otra en términos de desproporcionalidad medida mediante los índices anteriores.

La disminución de la desproporcionalidad de las asignaciones realizadas por el algoritmo supone que más partidos gozarán de representación, lo que ocasiona dificultades para la gobernabilidad. Sin embargo el empleo de barreras como se mostraba en la Tabla 3.5 favorece a partidos grandes y medianos siempre que la barrera no sea demasiado exigente, pues en caso de serlo sólo los partidos grandes se verían enormemente beneficiados. Este aumento de la representación de partidos grandes

UF	I_G	I_G^*	I_J	I_J^*	I_{S-L}	I_{S-L}^*	UF	I_G	I_G^*	I_J	I_J^*	I_{S-L}	I_{S-L}^*
BR-AC	18.84	14.04	6.13	2.28	101.75	32.42	BR-AL	10.63	10.9	2.24	2.96	26.27	35.08
BR-AP	17.63	23.86	3.31	2.92	90.26	95.3	BR-AM	14.12	13.42	3.86	2.66	47.19	33.6
BR-BA	4.51	3.99	2.42	2.61	7.58	11.89	BR-CE	5.9	5.43	1.66	2.39	6.19	11.6
BR-DF	15.46	13.98	3.26	2.56	71.65	54.53	BR-ES	11.15	11.19	3.16	2.12	33.82	23.32
BR-GO	8.3	6.96	2.28	2.37	22.15	18.89	BR-MA	7.75	6.51	1.99	1.65	13.7	12.63
BR-MS	11.76	11.17	1.89	1.87	18.02	21.73	BR-MT	16.85	14.83	3.32	2.61	60.59	44.4
BR-MG	3.99	2.91	3.5	1.76	8.65	4.86	BR-PA	9.94	6.36	2.59	2.09	23.98	12.85
BR-PB	11.92	8.06	2.1	2.08	24.0	17.04	BR-PR	6.66	4.26	2.22	3.05	14.84	12.37
BR-PE	6.22	5.18	2.67	2.27	19.15	17.2	BR-PI	9.94	10.82	2.39	2.37	23.77	24.48
BR-RN	15.86	14.91	2.59	2.34	51.41	48.62	BR-RS	5.46	3.65	1.34	2.29	6.1	5.45
BR-RJ	4.64	3.84	2.31	2.26	7.38	10.04	BR-RO	13.59	13.22	2.98	3.52	44.21	50.55
BR-RR	14.05	16.92	2.91	2.72	44.59	52.98	BR-SC	7.43	6.08	2.37	2.37	15.28	9.9
BR-SP	6.02	2.74	3.4	2.12	11.62	4.38	BR-SE	12.05	11.22	2.89	2.27	31.81	24.07
BR-TO	14.98	12.05	2.02	1.98	30.01	28.09	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 3.4.: Medición de la desproporcionalidad en las elecciones generales de Brasil de 2018. Mostramos para cada unidad federativa los índices de Gallagher, d'Hondt y Sainte-Laguë obtenidos en el reparto original y el adquirido por el algoritmo descrito indicado con "*". Indicamos las unidades federativas por su geocódigo ISO.

y medianos favorece la gobernabilidad. La cuestión que surge en lo referente al uso de barreras electorales es hasta que punto esto se supone "justo" en términos del sacrificio de la representatividad de los resultados que ocasiona el uso de las barreras.

Este balance representatividad-gobernabilidad es un dilema histórico con difícil solución al tratarse de dos conceptos que usualmente chocan entre sí y se afectan negativamente. Abordar este problema versa sobre primar uno frente al otro, de forma que se trate que la parte "damnificada" sea lo mejor posible. Tengamos por ejemplo el caso de las elecciones generales de Brasil de 2018, observemos en la Tabla 3.3 que podemos aplicar barreras electorales con el fin de lograr una mayor gobernabilidad y de forma que los valores de los índices de desproporcionalidad, aunque superiores al caso sin barreras, sean aún inferiores a los obtenidos con las asignaciones originales de escaños (por ejemplo empleando una barrera del 1,5 %).

En consecuencia podemos obtener, por medio del algoritmo y el empleo de barreras electorales, una asignación de escaños más representativa y que da lugar a un parlamento menos fragmentado, lo que favorece la gobernabilidad en mayor grado que la asignación original. Esto constituye un argumento a favor de la implementación de este tipo de algoritmos y métodos para la distribución de escaños en las elecciones generales de Brasil.

Partido/Barrera	0.0 %	0.5 %	1.0 %	1.5 %	2.0 %	3.0 %	4.0 %	5.0 %	6.0 %
PSL	61	62	65	67	69	74	85	95	108
PT	54	55	57	60	61	67	78	87	97
PSDB	31	32	33	34	34	37	41	44	44
PSD	30	31	32	34	35	36	34	33	37
PSB	29	29	30	31	32	35	32	31	20
PP	29	29	31	32	32	36	32	35	39
MDB	29	29	31	32	32	30	35	37	33
PR	28	28	29	30	31	34	30	31	30
PRB	26	27	28	29	30	30	29	27	23
PDT	24	24	25	26	27	23	24	21	24
DEM	24	24	25	26	27	26	26	27	20
PSOL	15	15	14	14	14	13	14	8	9
NOVO	14	15	14	14	14	13	16	5	4
PODE	12	12	11	11	11	8	1	1	1
PROS	11	11	9	9	8	8	5	5	5
SOLID.	10	10	10	7	7	5	2	3	3
PTB	10	10	9	8	8	7	6	4	0
PSC	9	9	9	8	8	5	3	1	1
Avante	9	9	8	8	7	7	8	9	6
PV	8	8	8	6	4	4	4	0	0
PPS	8	8	8	7	4	2	1	1	1
PATRI	7	7	6	5	5	3	2	2	2
PHS	7	7	7	6	5	4	0	0	0
PC do B	7	6	6	4	3	3	2	2	2
REDE	4	3	1	1	1	0	0	0	0
PRP	4	4	3	2	2	0	0	1	1
PMN	3	2	1	1	1	2	2	2	2
PTC	3	2	1	1	1	1	1	1	1
PRTB	3	3	2	0	0	0	0	0	0
PPL	2	1	0	0	0	0	0	0	0
PMB	1	0	0	0	0	0	0	0	0
DC	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 3.5.: Aplicación de barreras electorales junto al empleo del algoritmo con los datos electorales de las elecciones generales de Brasil de 2018. Podemos observar como los partidos grandes se ven claramente beneficiados por el aumento de estas barreras.

Bibliografía

[1] Sinan Alkin. Underrepresentative democracy: Why turkey should abandon europe's highest electoral threshold. *Wash. U. Global Stud. L. Rev.*, 10:347, 2011.

[2] Barry Ames. *The deadlock of democracy in Brazil*. University of Michigan Press, 2002.

[3] Michel L Balinski and Gabrielle Demange. Algorithms for proportional matrices in reals and integers. *Mathematical Programming*, 45(1):193–210, 1989.

[4] Michel L Balinski and Gabrielle Demange. An axiomatic approach to proportionality between matrices. *Mathematics of Operations Research*, 14(4):700–719, 1989.

[5] Juliano Zaiden Benvindo. The other side of the party fragmentation paradox in brazil: A re-election booster? *Blog of the International Journal of Constitutional Law - Analysis*, 2020.

[6] Dana De la Fontaine and Thomas Stehnken. *The Political System of Brazil*. Springer, 2016.

[7] Michael Gallagher. Proportionality, disproportionality and electoral systems. *Electoral studies*, 10(1):33–51, 1991.

[8] Taeko Hiroi and Pedro Neiva. Malapportionment and geographical bases of electoral support in the brazilian senate. *Journal of Politics in Latin America*, 5(1):127–150, 2013.

[9] Margaret Sarles Jenks. *Political parties in authoritarian Brazil*. Duke University, 1979.

[10] Alexander Karpov. Measurement of disproportionality in proportional representation systems. *Mathematical and Computer Modelling*, 48(9-10):1421–1438, 2008.

[11] Thomas D Lancaster. Electoral structures and pork barrel politics. *International Political Science Review*, 7(1):67–81, 1986.

[12] Sebastian Maier and Friedrich Pukelsheim. Bazi: A free computer program for proportional representation apportionment. 2007.

[13] José Alvaro Moisés. Elections, political parties and political culture in brazil: Changes and continuities. *Journal of Latin American Studies*, 25(3):575–611, 1993.

[14] Antonio Palomares and Victoriano Ramírez. Thresholds of the divisor methods. *Numerical Algorithms*, 34(2):405–415, 2003.

[15] Greisson Almeida Pereira and Tito Belchior Silva Moreira. A proposal to redesign the map of the regions of brazil: Agglomerating neighbouring and socioeconomically homogeneous municipalities. *Regional Science Policy & Practice*, 12(1):167–183, 2020.

[16] Friedrich Pukelsheim. *Proportional representation*. Springer, 2017.

[17] Victoriano Ramírez González, MA Fortes, P González, A López, ML Márquez, J Martínez, A Palomares, M Pasadas, C Ramírez, and B DELGADOMÁRQUEZ. Sistema electoral para el congreso de los diputados. *Editorial Universidad de Granada, Granada*, (14), 2013.

[18] Min Reuchamps, François Onclin, Didier Caluwaerts, and Pierre Baudewyns. Raising the threshold, fighting fragmentation? mechanical and psychological effects of the legal electoral threshold in belgium. *West European Politics*, 37(5):1087–1107, 2014.

[19] Pedro AD Rezende. Electronic voting systems–is brazil ahead of its time. *RSA CryptoBytes*, 7(2):20–24, 2004.

ANEXOS

A. Algoritmo de distribución biproporcional de escaños. Implementación en Python

La implementación del algoritmo sigue los pasos desarrollados en la sección 2.2. Indicamos a continuación algunos de los aspectos más relevantes del código.

Fundamentalmente los métodos que se explicarán y mostrarán a continuación son diseñados para trabajar con una clase de Python (o atributos de la misma) creada específicamente para el cálculo de resultados electorales. Esta es la clase *WeightSeatMatrix*. Que se define a partir de la matriz de votos que expresa los votos recibidos por el partido j-ésimo en la circunscripción i-ésima, los nombres de partidos y circunscripciones y el número de escaños de las distintas circunscripciones de la siguiente forma:

```python
class WeightSeatMatrix:
    def __init__(self, VoteMatrix, DistrictNames, PartyNames,
        DistrictSizes):
        self.VoteMatrix = VoteMatrix
        self.HouseSize = sum(DistrictSizes) # Obtenemos el total de
            esc.
        self.TotalPartyVotes = [sum(row[j] for row in self.
            VoteMatrix) for j in range(len(self.VoteMatrix[0]))]
             # Votos totales recibidos por cada partido
        self.TotalPartySeats = Jefferson(self.TotalPartyVotes, self.
            HouseSize) # restricciones por columnas
        self.DistrictSeats = DistrictSizes # Restricciones por filas
        self.TotalVotes = sum(self.TotalPartyVotes) # Votos totales
        self.Districts = DistrictNames
        self.DistrictsNumber = len(DistrictNames) # Total de circ.
        self.Parties = PartyNames
```

```
        self.PartiesNumber = len(PartyNames) # Total de partidos
        self.WeightMatrix = RoundPosMatrix([[self.VoteMatrix[i][j]*self.HouseSize/self.TotalVotes for j in range(
            self.PartiesNumber)] for i in range(self.DistrictsNumber)])
        self.SeatMatrix = []
        self.IncrDecrMatrix = []
        self.OverRepresentedDistricts = []
        self.UnderRepresentedDistricts = []
```

Los atributos de la clase que se inicializan vacíos son los asociados con la matriz de escaños, las filas sobrerrepresentadas e infrarrerpesentadas y la matriz indicadora de opciones de decremento e incremento. Estos valores dependen del atributo *WeightMatrix*, la matriz de cocientes. La clase tiene implementada un método, *UpdateSeatMatrix*, que actualiza estos atributos. La idea consiste en aplicar el método de Sainte-Laguë a cada una de las columnas bajo las restricciones ya definidas:

```
def UpdateSeatMatrix(self):
        AuxWebsterVector = [Webster([self.WeightMatrix[i][j] for i in range(
            self.DistrictsNumber)], self.TotalPartySeats[j]) for j in range(self.PartiesNumber)]
        AuxSeatMatrix = [[AuxWebsterVector[j][0][i] for j in range(
            self.PartiesNumber)] for i in range(self.DistrictsNumber)]
        self.WeightMatrix = RoundPosMatrix([[AuxWebsterVector[j][1][i] for j in range(self.PartiesNumber)] for i in range(
            self.DistrictsNumber)]) # Aplicamos Webster a columnas
        self.SeatMatrix = AuxSeatMatrix
        self.UnderRepresentedDistricts = [index for index in range(self.DistrictsNumber) if sum(
            [int(self.SeatMatrix[index][j]) for j in range(self.PartiesNumber)]) < self.DistrictSeats[index]] # Filas sobrerrep.
        self.OverRepresentedDistricts = [index for index in range(self.DistrictsNumber) if sum(
            [int(self.SeatMatrix[index][j]) for j in range(self.PartiesNumber)]) > self.DistrictSeats[index]] # Filas infrarrep.
```

Los métodos d'Hondt y Sainte-Laguë empleados son implementados antes de la clase en el script. Su implementación es sencilla y abundan ejemplos de la misma online. Se considera necesario señalar que los métodos implementados aplican factores a los cocientes de la matriz de votos/pesos a fin de repartir el número total de escaños, por tanto los métodos desarrollados alteran la matriz de pesos. En caso de que ya se hubiera actualizado la matriz de pesos, se emplea un método de Sainte-Laguë auxiliar que no recalcula ni factoriza pesos para únicamente asignar escaños a partir de los cocientes.

Se ha implementado también un método con el propósito de facilitar la multiplicación de filas y columnas de la matriz de pesos por factores dados:

```
def RowColumnDivisors(self, RowList=[], RowDivisor=1, ColList=[], ColDivisor=1):
        for index in RowList:
            for j in range(self.PartiesNumber):
                self.WeightMatrix[index][j] *= 1/RowDivisor
        for i in range(self.DistrictsNumber):
            for index in ColList:
                self.WeightMatrix[i][index] *= 1/ColDivisor
        self.WeightMatrix = RoundPosMatrix(self.WeightMatrix)
```

El método de Sainte-Laguë implementado tiene una peculiaridad ideada para facilitar la manipulación de empates: Cuando se dan empates y se escoge la opción menor de los dos posibles números, el número de escaños en la matriz se muestra sumado a 0,1, y en caso de escogerse la mayor, sumado a 0,01. En esta línea si por ejemplo observáramos un valor 2,01 en la matriz de escaños, esto indicaría que se han asignado dos escaños pero entra en empate con uno, que sería también una asignación válida en caso de que el total de escaños repartido sea el adecuado. Esta pintoresca manera de denotar los empates ha sido considerada al ser una forma de reducir la manipulación continua de objetos auxiliares para la indicación de empates. De esta forma al realizar una transferencia de escaños las opciones de incremento que pasen a ser de decremento son obtenidas mediante la suma del valor 0,91, mientras que para el caso contrario se restará tal valor.

A fin de visualizar mejor los empates, y para ser mejor manipulados por el algoritmo que se implementará más adelante, se ha diseñado un método que dada una matriz de escaños genera otra de las mismas dimensiones en la que se indica por "D" las opciones de decremento y por "I" las de incremento, en otro caso se muestra la celda vacía. Este método guarda la matriz resultante en el atributo *IncrDecrMatrix* de la clase.

```
def UpdateIncrDecrMatrix(self):
        self.IncrDecrMatrix = []
        if len(self.SeatMatrix) == 0:
            raise ValueError("Seat matrix is missing.")
        for i in range(self.DistrictsNumber):
            NewRow = []
            for j in range(self.PartiesNumber):
              # Si el valor no es entero entonces hay empate
```

```
                if isinstance(self.SeatMatrix[i][j], float):
                    if self.SeatMatrix[i][j] - ma.floor(self.
                        SeatMatrix[i][j]) > 0.02:
                      # La parte decimal es 0.1
                        NewRow += ["I"] # Opc. incremento
                    else:
                      # La parte decimal es 0.01
                        NewRow += ["D"] # Opc. decremento
                else:
                    NewRow += [" "] # No hay empate
            self.IncrDecrMatrix += [NewRow]
```

Finalmente, en lo referente a métodos relevantes implementados para la clase, se ha diseñado también un algoritmo de búsqueda del factor de actualización η definido en la sección 2.2. Este recibe la matriz de pesos y una lista de filas y columnas (que cuando sea empleado en el algoritmo biproporcional serán las marcadas) para realizar la búsqueda del valor más cercano a 1 que genera un empate nuevo siguiendo los pasos desarrollados en la sección anteriormente mencionada.

```
def SearchUpdateFactor(self, RowList, ColList=[]):
        RowListCompl = list(
            set([i for i in range(self.DistrictsNumber)]) - set(
                RowList))
        ColListCompl = list(
            set([i for i in range(self.PartiesNumber)])-set(ColList)
                )
        Alph = max([0]+[WebsterSignpost(self.SeatMatrix[i][j])/self.
            WeightMatrix[i][j]
                        for i in RowList for j in ColListCompl if
                            WebsterSignpost(self.SeatMatrix[i][j]) >
                             0])
        Beta = min([ma.inf]+[WebsterSignpost(self.SeatMatrix[i][j
            ]+1)/self.WeightMatrix[i][j]
                             for i in RowListCompl for j in ColList
                                if self.WeightMatrix[i][j] > 0])
        UpdateFactor = Alph
        if Alph < 1/Beta:
            UpdateFactor = 1/Beta
        return UpdateFactor
```

En lo referente al algoritmo construido, basado en el Tie-and-transfer, diseñamos una serie de funciones auxiliares de entre las cuales destacamos:

- *ColumnFinder*, que es una función que dada una lista de filas de interés (que serán las filas marcadas) y columnas prohibidas (también las marcadas) busca opciones de decremento en las columnas permitidas:

```
def ColumnFinder(List, ForbiddenColumns):
    ColumnOptions = [index for index in range(len(List)) if not(
        index in ForbiddenColumns) and List[index] == "D"]
    if len(ColumnOptions) > 0:
        return ColumnOptions # Se han encontrado opciones de decrec.
    else:
        return "E" # No hay opciones de decrec.
```

- *RowFinder*, en este caso dada una lista de columnas de interés y filas prohibidas (las filas y columnas marcadas) busca opciones de incremento en las filas permitidas:

```
def RowFinder(List, ForbiddenRows):
    RowOptions = [index for index in range(len(List)) if not(
        index in ForbiddenRows) and List[index] == "I"]
    if len(RowOptions) > 0:
        return RowOptions # Se han encontrado opciones de increm.
    else:
        return "E" # No hay opciones de increm.
```

- *PathFinder*, que dada la matriz indicadora de opciones de decremento e incremento y las filas sobrerrepresentadas e infrarrepresentadas devuelve un camino desde una fila sobrerrepresentada a una infrarrepresentada, y en caso de no ser posible "NP". La función va generando un camino que parte de una fila sobrerrepresentada de forma recursiva donde los topes se suceden cuando o bien en el camino llega a una fila infrarrepresentada, en cuyo caso devuelve la lista de índices recorridos, o bien cuando ha recorrido todos los caminos posibles sin solución, devolviendo NP.

```
def PathFinder(IncrDecrMatrix, StartRows, EndRows, Path=[],
   StartColumns=[], RowColumn="C"):
    if any(row in [coordinates[0] for coordinates in Path] for
        row in EndRows):
        return Path
    elif len(StartRows) == len(IncrDecrMatrix) or len(
        StartColumns) == len(IncrDecrMatrix[0]):
        return "NP"
```

Una idea importante del algoritmo radica en el parámetro *RowColumns*, que indica si en un paso dado se va a realizar una búsqueda de filas (opciones de incremento) o de columnas (opciones de decremento), pues por la forma en que se construye el camino, se habrían de ir intercalando.

Si buscamos columnas aplicamos la función *ColumnFinder* y secuencialmente para cada columna encontrada probamos a volver a aplicar la función esta vez buscando filas. Si en caso de emplear una columna se obtiene NP se pasaría a la siguiente.

```
if RowColumn == "C":
                row = Path[-1][0]
                Columns = ColumnFinder(IncrDecrMatrix[row], StartColumns)
                if Columns != "E":
                    for col in Columns:
                        if col not in StartColumns:
                            AuxPath = Path + [[row, col]]
                            AuxStartColumns = StartColumns + [col]
                            PossibleOutput = PathFinder(
                                IncrDecrMatrix, StartRows, EndRows, AuxPath, AuxStartColumns, "R")
                            if PossibleOutput == "NP":
                                next
                            else:
                                return PossibleOutput
                return "NP"
```

Buscaremos filas de manera análoga, volviendo a llamar a la función para las filas escogidas, y pasando a la siguiente en caso de obtener NP en alguna.

```
if RowColumn == "R":
                col = Path[-1][1]
                Rows = RowFinder([IncrDecrMatrix[row][col]
                                  for row in range(len(IncrDecrMatrix))], StartRows)
                if Rows != "E":
                    for row in Rows:
                        if row not in StartRows:
                            AuxPath = Path + [[row, col]]
                            AuxStartRows = StartRows + [row]
                            PossibleOutput = PathFinder(
                                IncrDecrMatrix, AuxStartRows, EndRows, AuxPath, StartColumns, "C")
                            if PossibleOutput == "NP":
                                next
                            else:
                                return PossibleOutput
```

```
                    return "NP"
```

- *UpdateLabeled*, que actualiza las filas y columnas marcadas. La función recibe como argumentos las listas de filas y columnas marcadas y la matriz de símbolos de incremento/decremento De manera recursiva procede a buscar opciones de decremento e incremento a partir de las filas y columnas marcadas respectivamente, y en caso de haber encontrado se llama a sí misma hasta no encontrar nuevas adiciones que marcar.

```
def UpdateLabeled(IncDecMatrix, LabeledRows, LabeledColumns):
    LRSize = len(LabeledRows)
    LCSize = len(LabeledColumns)
    for row in LabeledRows:
        NewLabeledColumns = ColumnFinder(IncDecMatrix[row],
            LabeledColumns)
        if NewLabeledColumns != "E":
            LabeledColumns += NewLabeledColumns
    for col in LabeledColumns:
        NewLabeledRows = RowFinder([IncDecMatrix[index][col]
                                    for index in range(len(
                                        IncDecMatrix))],
                                        LabeledRows)
        if NewLabeledRows != "E":
            LabeledRows += NewLabeledRows
    if LCSize == len(LabeledColumns) and LRSize == len(
        LabeledRows):
        return (LabeledRows, LabeledColumns)
    else:
        return UpdateLabeled(IncDecMatrix, LabeledRows,
            LabeledColumns) # Volvemos a llamar a la func.
```

Como se dijo en 3.1, no se pretende obtener todas las soluciones en caso de que existan empates, estas funciones auxiliares realizan una búsqueda de fuerza bruta, por lo cual es posible que eviten algunas soluciones válidas por el hecho de sencillamente haber encontrado otras primero.

Con estas funciones y la clase definida anteriormente se implementa el algoritmo, que recibe como argumento un objeto de la clase *WeightSeatMatrix* y se desarrolla como sigue:

1. Calculamos la sobrerrepresentación e infrarrepresentación, y obtenemos a su vez el error de asignación atendiendo a las restricciones por filas. Naturalmente si el error resultase nulo el proceso termina.

```
def BipropAllocation(VMatrix):
```

```
    OverRepresentation = sum([sum(VMatrix.SeatMatrix[row]) - VMatrix.DistrictSeats[row]
                              for row in VMatrix.OverRepresentedDistricts])
    UnderRepresentation = sum([VMatrix.DistrictSeats[row] - sum(VMatrix.SeatMatrix[row])
                               for row in VMatrix.UnderRepresentedDistricts])
    FlawCount = OverRepresentation + UnderRepresentation
    if FlawCount == 0:
        return None
```

2. Llamamos a la función *PathFinder*, en caso de encontrar un camino, lo seguimos realizamos la transferencia de escaños, actualizamos el atributo de matriz de escaños y calculamos el nuevo error. Si el error es no nulo volvemos a llamar a la función.

```
Path = PathFinder(VMatrix.IncrDecrMatrix,
                      VMatrix.OverRepresentedDistricts, VMatrix.UnderRepresentedDistricts)
    if Path != "NP":
        for index in Path:
            seat = VMatrix.SeatMatrix[index[0]][index[1]]
            if seat - ma.floor(seat) > 0.02:
                VMatrix.SeatMatrix[index[0]][index[1]] = round(seat + 0.91, 2)
            else:
                VMatrix.SeatMatrix[index[0]][index[1]] = round(seat - 0.91, 2)
        VMatrix.UpdateSeatMatrix()
        VMatrix.UpdateIncrDecrMatrix()
        FlawCount += -2
        if FlawCount == 0:
            return None
        else:
            return BipropAllocation(VMatrix)
```

3. En caso de no encontrar un camino, procedemos a crear empates y actualizar las filas y columnas marcadas. Tras esto buscamos nuevamente camino. En caso de encontrarlo y transferir escaño comprobamos si el error actualizado es nulo. En caso afirmativo termina la función, en caso negativo se llama a sí misma de nuevo.

```
LabeledRows = [VMatrix.OverRepresentedDistricts[0]]
    LabeledColumns = []
    (LabeledRows, LabeledColumns) = UpdateLabeled(
```

```
        VMatrix.IncrDecrMatrix, LabeledRows, LabeledColumns)
while OverRepresentation + UnderRepresentation == FlawCount:
    # Calculamos factor de act.
        updat = VMatrix.SearchUpdateFactor(LabeledRows,
           LabeledColumns)
        # Aplicamos el factor
        VMatrix.RowColumnDivisors(LabeledRows, 1/updat,
           LabeledColumns, updat)
        VMatrix.UpdateSeatMatrix()
        VMatrix.UpdateIncrDecrMatrix()
        # Buscamos nuevamente camino
        Path = PathFinder(VMatrix.IncrDecrMatrix,
                          VMatrix.OverRepresentedDistricts,
                             VMatrix.UnderRepresentedDistricts)
        if Path != "NP":
            for index in Path:
                seat = VMatrix.SeatMatrix[index[0]][index[1]]
                if seat - ma.floor(seat) > 0.02:
                    VMatrix.SeatMatrix[index[0]][index[1]
                                                 ] = round(seat
                                                     + 0.91, 2)
                else:
                    VMatrix.SeatMatrix[index[0]][index[1]
                                                 ] = round(seat
                                                     - 0.91, 2)
            VMatrix.UpdateSeatMatrix()
            VMatrix.UpdateIncrDecrMatrix()
            FlawCount += -2
            if FlawCount > 0:
                return BipropAllocation(VMatrix)
            else:
                return None
        # Actualiza fil/col marcadas y se vuelve a iterar
        (LabeledRows, LabeledColumns) = UpdateLabeled(
            VMatrix.IncrDecrMatrix, LabeledRows, LabeledColumns
               )
```

La función no devuelve ningun valor, pero actualiza la matriz de escaños del objeto *WeightSeatMatrix* de forma que se cumplan las restricciones.

El script completo lo podemos encontrar en `https://github.com/serfersan/Proportional-representation`. En él aparecen implementadas, de manera adicional a lo desarrollado en la sección, funciones auxiliares para la manipulación y muestra de resultados, los métodos de divisores d'Hondt, Sainte-Laguë y Sainte-Laguë auxiliar empleados en el algoritmo y en la clase *WeightSeatMatrix*, así como método de la clase y funciones auxiliares para la muestra de resultados en LaTeX.

B. Bases de datos electorales consultadas

I Brasil, 2018
`http://www.electionresources.org/br/deputies.php?election=2018`

II Brasil, 2014
`http://www.electionresources.org/br/deputies.php?election=2014`

C. Resultados en las elecciones de 2018 y 2014 en las unidades federativas

Mostramos a continuación los resultados obtenidos aplicando el algoritmo de reparto biproporcional y métodos de divisores descritos en el trabajo en cada una de las unidades federativas de Brasil para las elecciones generales de 2018 y 2014 sin emplear barreras electorales. Las marginales empleadas son las de la cuarta columna de las Tablas 3.1 y 3.2 de resultados de 2018 y 2014 respectivamente.

Partidos	BR-AC	BR-AL	BR-AP	BR-AM	BR-BA	BR-CE	BR-DF	BR-ES	BR-GO	Tot.
PSL	1	0	0	1	1	1	0	1	2	61
PT	1	0	0	2	8	2	1	1	1	54
PSDB	1	1	0	1	1	1	0	0	2	31
PSD	0	1	0	1	4	1	0	0	1	30
PSB	0	1	2	0	1	1	0	2	0	29
PP	1	1	0	1	3	1	0	1	1	29
MDB	2	1	0	0	1	1	0	0	1	29
PR	0	1	3	1	1	1	1	1	0	28
PRB	0	1	0	1	2	0	1	2	1	26
PDT	1	0	1	0	2	5	0	1	1	24
DEM	1	0	0	0	3	0	1	0	2	24
PSOL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
NOVO	0	0	0	0	1	0	1	0	0	14
PODE	0	0	0	0	1	0	0	0	1	12
PROS	0	0	1	0	0	3	1	0	0	11
SOLID.	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
PTB	0	1	0	0	0	1	0	0	1	10
PSC	0	0	0	0	1	0	0	0	1	9
Avante	0	0	0	0	3	0	0	0	0	9
PV	0	0	0	0	0	1	1	0	0	8
PPS	0	0	0	0	0	0	0	1	0	8
PATRI	0	0	0	0	0	1	0	0	0	7
PHS	0	0	0	0	2	0	0	0	0	7
PC do B	0	0	0	0	2	1	0	0	0	7
REDE	0	1	1	0	0	0	0	0	0	4
PRP	0	0	0	0	0	0	1	0	1	4
PMN	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
PTC	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
PRTB	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3
PPL	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2
PMB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
DC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 1.: Resultados electorales para las elecciones generales de Brasil de 2018. Las unidades federativas aparecen en la cabecera por su geocódigo ISO y ordenadas alfabéticamente desde Acre hasta Goiás.

Partidos	BR-MA	BR-MS	BR-MT	BR-MG	BR-PA	BR-PB	BR-PR	BR-PE	BR-PI	Tot.
PSL	1	2	2	6	1	1	3	1	0	61
PT	1	1	1	6	2	1	3	2	3	54
PSDB	0	2	1	4	2	2	1	0	0	31
PSD	1	1	0	2	2	0	5	1	1	30
PSB	1	0	0	2	1	1	2	5	1	29
PP	1	0	1	2	0	1	2	1	1	29
MDB	1	0	1	3	2	0	1	1	1	29
PR	2	0	0	2	1	1	1	1	1	28
PRB	1	0	0	2	1	1	1	1	0	26
PDT	1	1	0	1	1	1	1	1	1	24
DEM	1	1	0	1	1	1	1	1	0	24
PSOL	0	0	0	2	2	0	0	1	0	15
NOVO	0	0	0	3	0	0	1	0	0	14
PODE	1	0	1	1	0	0	1	1	0	12
PROS	0	0	1	2	0	0	1	1	0	11
SOLID.	0	0	0	1	0	0	0	1	0	10
PTB	1	0	0	1	1	1	0	0	0	10
PSC	0	0	0	1	0	1	1	1	0	9
Avante	0	0	0	4	0	0	0	0	0	9
PV	1	0	0	1	0	0	2	0	0	8
PPS	0	0	0	1	0	0	1	1	0	8
PATRI	0	0	0	2	0	0	0	2	0	7
PHS	0	0	0	2	0	0	1	1	0	7
PC do B	2	0	0	0	0	0	0	0	0	7
REDE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
PRP	0	0	0	0	0	0	0	1	0	4
PMN	2	0	0	0	0	0	0	0	0	3
PTC	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
PRTB	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3
PPL	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2
PMB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
DC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 2.: Resultados electorales para las elecciones generales de Brasil de 2018. Las unidades federativas aparecen en la cabecera por su geocódigo ISO y ordenadas alfabéticamente desde Maranhão hasta Piauí.

Partidos	BR-RN	BR-RS	BR-RJ	BR-RO	BR-RR	BR-SC	BR-SP	BR-SE	BR-TO	Tot.
PSL	1	3	11	1	1	4	16	0	0	61
PT	2	4	1	0	0	2	7	1	1	54
PSDB	0	2	1	1	1	2	5	0	0	31
PSD	0	1	3	0	1	1	2	1	0	30
PSB	1	2	2	0	0	1	3	0	0	29
PP	1	3	1	1	0	1	2	1	1	29
MDB	1	3	2	1	1	2	1	1	1	29
PR	0	1	1	0	1	0	5	1	1	28
PRB	0	1	2	0	2	1	5	0	0	26
PDT	0	2	1	1	0	0	1	0	0	24
DEM	0	1	3	1	0	0	4	0	1	24
PSOL	0	1	5	0	0	0	4	0	0	15
NOVO	0	3	1	0	0	1	3	0	0	14
PODE	0	0	1	1	0	0	3	0	0	12
PROS	0	0	0	0	0	0	1	0	0	11
SOLID.	1	0	1	0	1	0	1	1	2	10
PTB	0	2	0	0	0	0	1	0	0	10
PSC	0	0	1	0	0	0	0	1	1	9
Avante	0	0	1	0	0	0	1	0	0	9
PV	0	0	0	0	0	0	2	0	0	8
PPS	0	1	1	0	0	1	1	0	0	8
PATRI	0	0	0	0	0	0	1	1	0	7
PHS	0	0	1	0	0	0	0	0	0	7
PC do B	0	1	1	0	0	0	0	0	0	7
REDE	0	0	1	0	0	0	1	0	0	4
PRP	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4
PMN	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3
PTC	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
PRTB	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
PPL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
PMB	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
DC	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 3.: Resultados electorales para las elecciones generales de Brasil de 2018. Las unidades federativas aparecen en la cabecera por su geocódigo ISO y ordenadas alfabéticamente desde Rio Grande del Norte hasta Tocantins.

Partidos	BR-AC	BR-AL	BR-AP	BR-AM	BR-BA	BR-CE	BR-DF	BR-ES	BR-GO	Tot.
PT	4	0	1	0	9	4	1	1	2	73
PSDB	1	1	0	2	3	1	1	1	5	60
PMDB	1	1	1	1	2	3	1	1	2	58
PP	1	1	1	0	3	1	0	0	1	35
PSB	1	0	1	0	1	0	1	2	0	34
PSD	0	0	0	2	4	0	1	0	1	32
PR	0	1	1	1	1	2	0	0	1	30
PRB	0	0	0	0	2	1	1	1	0	24
DEM	0	0	0	1	4	1	1	1	0	22
PTB	0	0	0	0	2	0	0	0	1	21
PDT	0	1	1	0	1	1	0	1	1	18
SD	0	1	0	0	2	1	0	1	1	14
PSC	0	0	1	0	2	0	0	0	0	13
PV	0	0	0	0	0	0	0	1	0	10
PROS	0	1	1	0	0	3	1	0	0	10
PPS	0	0	0	1	0	1	0	0	1	10
PC do B	0	0	0	0	2	1	0	0	0	10
PSOL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
PHS	0	0	0	0	0	1	0	0	0	5
PT do B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
PSL	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4
PTN	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3
PRP	0	1	0	0	0	0	0	0	1	3
PEN	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
PMN	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
PSDC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
PRTB	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
PTC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
PSTU	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 4.: Resultados electorales para las elecciones generales de Brasil de 2014. Las unidades federativas aparecen en la cabecera por su geocódigo ISO y ordenadas alfabéticamente desde Acre hasta Goiás.

Partidos	BR-MA	BR-MS	BR-MT	BR-MG	BR-PA	BR-PB	BR-PR	BR-PE	BR-PI	Tot.
PT	1	1	3	11	2	1	3	2	2	73
PSDB	1	1	1	8	2	2	3	3	0	60
PMDB	2	1	3	4	2	3	3	1	1	58
PP	0	1	0	4	0	1	3	2	1	35
PSB	1	1	1	3	0	1	2	7	2	34
PSD	1	1	0	3	2	1	1	1	1	32
PR	0	0	0	2	1	1	1	2	1	30
PRB	1	0	0	1	1	0	0	0	0	24
DEM	0	0	0	3	1	1	1	0	0	22
PTB	1	0	0	2	1	1	2	3	1	21
PDT	1	0	0	1	1	0	0	1	1	18
SD	1	0	0	1	1	0	1	0	0	14
PSC	0	0	0	1	1	0	3	1	0	13
PV	1	0	0	1	0	0	2	0	0	10
PROS	0	1	0	0	1	0	0	0	0	10
PPS	1	0	0	1	0	0	2	0	0	10
PC do B	1	0	0	1	0	0	1	1	0	10
PSOL	0	1	0	0	1	0	0	0	0	9
PHS	0	0	0	1	0	0	1	0	0	5
PT do B	1	0	0	2	0	0	0	0	0	4
PSL	1	0	0	0	0	0	0	1	0	4
PTN	0	0	0	1	0	0	1	0	0	3
PRP	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
PEN	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
PMN	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2
PSDC	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
PRTB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
PTC	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
PSTU	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 5.: Resultados electorales para las elecciones generales de Brasil de 2014. Las unidades federativas aparecen en la cabecera por su geocódigo ISO y ordenadas alfabéticamente desde Maranhão hasta Piauí.

Partidos	BR-RN	BR-RS	BR-RJ	BR-RO	BR-RR	BR-SC	BR-SP	BR-SE	BR-TO	Tot.
PT	1	7	4	1	0	2	9	1	0	73
PSDB	1	2	2	1	3	1	14	0	0	60
PMDB	1	5	6	3	0	4	2	1	3	58
PP	0	5	4	0	1	2	2	0	1	35
PSB	0	2	1	0	0	1	4	1	1	34
PSD	1	1	3	0	0	3	3	1	1	32
PR	1	0	6	1	1	1	5	0	0	30
PRB	0	1	3	0	2	0	8	1	1	24
DEM	1	1	1	0	0	1	3	0	1	22
PTB	0	2	1	1	0	0	2	1	0	21
PDT	0	3	1	1	1	0	1	0	0	18
SD	0	0	1	0	0	0	2	1	0	14
PSC	0	0	0	0	0	0	3	1	0	13
PV	0	0	1	0	0	0	4	0	0	10
PROS	1	0	1	0	0	0	0	0	0	10
PPS	0	0	0	0	0	1	2	0	0	10
PC do B	0	1	1	0	0	0	1	0	0	10
PSOL	0	1	4	0	0	0	2	0	0	9
PHS	0	0	1	0	0	0	1	0	0	5
PT do B	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4
PSL	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4
PTN	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
PRP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
PEN	0	0	1	0	0	0	1	0	0	3
PMN	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
PSDC	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
PRTB	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
PTC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
PSTU	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

Tabla 6.: Resultados electorales para las elecciones generales de Brasil de 2014. Las unidades federativas aparecen en la cabecera por su geocódigo ISO y ordenadas alfabéticamente desde Rio Grande del Norte hasta Tocantins.