Apuntes de Teoría espectral de Operadores

Licenciatura en Matemáticas

Antonio Moreno Galindo

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Capítulo I

Espacios de Hilbert. Teoría de operadores.

Tema 1

Espacios prehilbertianos y espacios de Hilbert. Igualdad del paralelogramo. Teoremas de la proyección ortogonal y de Riesz-Fréchet.

Como J. Dieudonné explica en su Historia del Análisis Funcional [**Dieu3**], el estudio de lo que hoy llamamos espacios de Hilbert se inicia en un trabajo de David Hilbert publicado en 1906, en una época en que se produce la cristalización de una serie de ideas que habían ido gestándose lentamente durante el siglo XIX. En dicho trabajo, el primero de lo que hoy día llamamos teoría espectral, con el fin de profundizar en el trabajo anterior de Fredholm sobre las ecuaciones integrales que llevan su nombre, Hilbert llega de forma natural a la consideración del espacio ℓ_2 de las sucesiones de números reales de cuadrado sumable, de las formas bilineales que él llama *"acotadas"* en dicho espacio y las correspondientes formas cuadráticas en infinitas variables, así como de las transformaciones lineales igualmente *"acotadas"* de dicho espacio en sí mismo. La coincidencia en el tiempo del trabajo de Hilbert con la tesis doctoral de H. Lebesgue sobre la teoría de la integración (1902) y con el trabajo pionero de M. Fréchet (1906) sobre los espacios métricos abstractos, puede decirse que dio lugar al nacimiento del Análisis Funcional como hoy lo conocemos.

La teoría de los espacios de Hilbert se consolida, por una parte, a través de los trabajos del propio Fréchet y de uno de los más aventajados discípulos de Hilbert, E. Schmidt, publicados en 1908, que aplican ya sistemáticamente métodos geométricos (el trabajo de Schmidt contiene las nociones de producto escalar, norma, ortogonalidad y el Teorema de la proyección ortogonal) al estudio del espacio de Hilbert separable, explotando la similitud con la geometría euclídea en dimensión finita. Por otra parte, también en 1906-1907 F. Riesz y E. Fisher, aprovechando la preciosa herramienta que Lebesgue les había proporcionado, establecen el teorema que lleva su nombre sobre la complitud del espacio $L_2(I)$ de las (clases de) funciones de cuadrado integrable en un intervalo compacto I y el total isomorfismo de dicho espacio con ℓ_2, vía coeficientes de Fourier, ligando de por vida a los espacios de Hilbert con la teoría de la integración y la de las series de Fourier y abriendo el camino para la consideración de los espacios L_p y de los espacios de Banach en general.

El presente tema contiene, como no podía ser de otra forma, los conceptos básicos de la teoría de espacios de Hilbert y los métodos geométricos que hacen posible trabajar en tales espacios con una comodidad inalcanzable en espacios más generales. El Teorema de la proyección ortogonal y su principal consecuencia, el Teorema de representación de Riesz-Fréchet son, claro está, los resultados fundamentales. En una teoría tan perfecta y acabada como la de los espacios de Hilbert, la originalidad en el tratamiento, o la posibilidad de hacer alguna aportación poco conocida, están prácticamente vetadas. Sólo el tratamiento que hacemos del Teorema de aproximación óptima que incluye la existencia de *"centro"* para un conjunto convexo acotado en un espacio de Hilbert difiere del que puede encontrarse en cualquier texto de Análisis Funcional o en los no pocos dedicados exclusivamente a los espacios de Hilbert. Tratamos también con algo más detenimiento de lo usual las formas sesquilineales y cuadráticas continuas en espacios de Hilbert.

Definición 1.1.. *Si X e Y son espacios vectoriales, diremos que una aplicación de X en Y es* **conjugado-lineal** *si verifica que*

$$f(\lambda x_1 + x_2) = \overline{\lambda} f(x_1) + f(x_2) \qquad (x_1, x_2, \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$$

(en caso real "conjugado-lineal" es lo mismo que lineal).

Si ahora Z es otro espacio vectorial, una aplicación $\varphi : X \times Y \to Z$ es **sesquilineal** *cuando φ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda:*

$$\varphi(\lambda x_1 + x_2, \mu y_1 + y_2) =$$
$$= \lambda\overline{\mu}\varphi(x_1, y_1) + \lambda\varphi(x_1, y_2) + \overline{\mu}\varphi(x_2, y_1) + \varphi(x_2, y_2),$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in X,\ y_1, y_2 \in Y,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

En el caso $Z = \mathbb{K}$ decimos que φ es una **forma sesquilineal** *en $X \times Y$. Nos interesa fundamentalmente el caso $X = Y$; junto con una forma sesquilineal φ en $X \times X$ podemos considerar la aplicación $\hat{\varphi} : X \to \mathbb{K}$ definida por*

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x, x) \qquad (x \in X)$$

y decimos que una aplicación de X en $\mathbb{K}$ es una **forma cuadrática** *si coincide con $\hat{\varphi}$ para alguna forma sesquilineal φ en $X \times X$. Notemos que $\hat{\varphi}(\lambda x) = |\lambda|^2 \hat{\varphi}(x)$ para $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

En caso complejo una forma sesquilineal queda determinada por la forma cuadrática asociada a ella, en virtud del siguiente enunciado, de comprobación inmediata:

Lema 1.2.. **(Identidad de polarización).** *Si X es un espacio vectorial complejo, φ es una forma sesquilineal en X y $\hat{\varphi}$ la forma cuadrática asociada a φ, se tiene:*

$$4\varphi(x, y) = \hat{\varphi}(x + y) - \hat{\varphi}(x - y) + i\hat{\varphi}(x + iy) - i\hat{\varphi}(x - iy)$$

para cualesquiera $x, y \in X$. Como consecuencia, si φ, ψ son formas sexquilineales en X, $\varphi = \psi$ si, y sólo si, $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$.

En caso real la situación no es tan fácil; si la forma bilineal φ en $X \times X$ no es simétrica definiendo

$$\psi(x, y) = \varphi(y, x) \qquad (x, y \in X)$$

obtenemos otra forma bilineal $\psi \neq \varphi$ tal que $\hat{\psi} = \hat{\varphi}$. A cambio tenemos la ventaja de que $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ es otra forma bilineal simétrica que genera la misma forma cuadrática. Así pues, toda forma cuadrática en un espacio vectorial real procede de una forma bilineal simétrica que, como veremos enseguida, sí es única.

Volviendo al caso de un espacio vectorial complejo X, es imposible que una forma sesquilineal φ en $X \times X$ sea simétrica (salvo el caso trivial $\varphi \equiv 0$), pero definiendo

$$\psi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)} \qquad (x, y \in X)$$

sí obtenemos otra forma sesquilineal ψ en $X \times X$. La noción de *"simetría"* apropiada al caso complejo consiste por tanto en que se tenga $\varphi = \psi$. Puesto que, claramente, para las correspondientes formas cuadráticas $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ se tiene $\hat{\psi}(x) = \overline{\hat{\varphi}(x)}$ $(x \in X)$, el Lema 1.2 nos dice que $\varphi = \psi$ si, y sólo si, $\hat{\varphi}$ toma valores en $\mathbb{R}$. En realidad sólo estamos interesados en formas cuadráticas con valores reales no negativos.

Definición 1.3.. *Diremos que una forma sesquilineal* φ *en* $X \times X$, *donde* X *es un espacio vectorial (real o complejo) es* **hermítica**, *si verifica*

$$\varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)} \qquad (x, y \in X).$$

En caso real esto equivale a que φ sea simétrica y en caso complejo a que la forma cuadrática $\hat{\varphi}$ tome solamente valores reales. La prueba del siguiente lema es, otra vez, inmediata:

Lema 1.4.. *Sean* X *un espacio vectorial y* $Q : X \to \mathbb{R}$ *una forma cuadrática. Entonces existe una única forma sesquilineal hermítica* $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ *tal que*

$$Q(x) = \varphi(x,x) \qquad \forall x \in X.$$

De hecho se tiene:

$$4\,Re\,\varphi(x,y) = Q(x+y) - Q(x-y) \qquad (x, y \in X)$$

$$Im\,\varphi(x,y) = \ Re\,\varphi(x,iy) = -Re\,\varphi(ix,y).$$

Definición 1.5.. *Si* X *es un espacio vectorial, se dice que una forma cuadrática* $Q : X \to \mathbb{R}$ *(o la correspondiente forma sexquilineal hermítica) es* **positiva** *si* $Q(x) \geq 0$ *para todo* x *en* X *y* **definida positiva** *si para* $x \in X$, $x \neq 0$, *se tiene* $Q(x) > 0$. *Un* **producto escalar** *en* X *es una forma sexquilineal hermítica y definida positiva, de* $X \times X$ *en* $\mathbb{K}$. *Adoptaremos la notación usual* $(x,y) \to (x|y)$ *para un producto escalar. Notemos que los axiomas que definen a un producto escalar son, en resumidas cuentas, los siguientes:*

i) $(\lambda x_1 + x_2|y) = \lambda(x_1|y) + (x_2|y) \quad (x_1, x_2, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}).$
ii) $(y|x) = \overline{(x|y)} \quad (x, y \in X).$
iii) $x \in X,\ x \neq 0 \Rightarrow (x|x) > 0.$

Un **espacio prehilbertiano** *es un espacio vectorial en el que se tiene definido un producto escalar.*

Todo espacio prehilbertiano se convierte canónicamente en un espacio normado como consecuencia de:

Proposición 1.6.. *Sea* X *un espacio vectorial y* $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ *una forma sesquilineal hermítica positiva. Se verifican entonces:*

i) **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y) \qquad (x, y \in X).$$

ii) **Desigualdad de Minkowski**:

$$\varphi(x+y, x+y)^{1/2} \leq \varphi(x,x)^{1/2} + \varphi(y,y)^{1/2} \qquad (x, y \in X).$$

Por tanto, la aplicación $x \mapsto \varphi(x,x)^{1/2}$ *es una seminorma en* X, *y es una norma si, y sólo si,* φ *es definida positiva.*

Un espacio prehilbertiano X se considera canónicamente como espacio normado con la **norma** dada por:

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \qquad (x \in X).$$

La desigualdad de Minkowski se convierte en la desigualdad triangular para la norma $\|\cdot\|$ y la de Cauchy-Schwarz toma la forma:

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in X).$$

Como consecuencia el producto escalar es continuo en $X \times X$ y, considerándolo si queremos como aplicación $\mathbb{R}$-bilineal continua, tiene norma 1.

A su vez la norma determina al producto escalar, puesto que, por el Lema 1.4, tenemos

$$4\, Re\,(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \qquad (x, y \in X)$$

y en el caso complejo $Im\,(x|y) = Re\,(x|iy)$ $(x, y \in X)$.

Conviene resaltar que, como consecuencia inmediata de lo anterior, si X, Y son espacios prehilbertianos y $T : X \to Y$ es lineal e isométrica, entonces T conserva el producto escalar

$$(Tx_1|Tx_2) = (x_1|x_2) \qquad (x_1, x_2 \in X).$$

Dicho de otra forma, dos espacios prehilbertianos son totalmente isomorfos si son idénticos como espacios normados, es decir, isométricamente isomorfos.

Definición 1.7.. *Si la norma de un espacio prehilbertiano X es completa, decimos que X es un* **espacio de Hilbert**.

Surge de forma natural la pregunta ¿qué normas proceden de un producto escalar? De las innumerables respuestas satisfactorias que pueden darse a esta pregunta nos quedamos con la más clásica y no por ello menos útil.

Teorema 1.8.. **(Jordan-von Neumann).** *Sea $\|\cdot\|$ una norma en un espacio vectorial X. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) Existe un producto escalar $(\cdot|\cdot)$ en X tal que $\|x\|^2 = (x|x)$ $(x \in X)$.

ii) Se verifica la **igualdad del paralelogramo***:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (x, y \in X).$$

Pasemos a las consecuencias más directas del teorema anterior. Naturalmente cualquier propiedad de los espacios prehilbertianos que no compartan otros espacios normados será, de forma más o menos directa, consecuencia de la igualdad del paralelogramo. En primer lugar el que un espacio normado sea o no un espacio prehilbertiano lo deciden sus $\mathbb{R}$-subespacios dos dimensionales:

Corolario 1.9..

i) Si X es un espacio normado complejo, entonces X es prehilbertiano (su norma procede de un producto escalar) si, y sólo si, lo es $X_{\mathbb{R}}$, el espacio normado real subyacente a X.

ii) Si X es un espacio normado real con $dim(X) \geq 2$, entonces X es un espacio prehilbartiano si, y sólo si, cada subespacio bidimensional de X es prehilbertiano.

No estaría de más proponer a los alumnos que comprueben que una norma en $\mathbb{R}^2$ procede de un producto escalar si, y sólo si, la esfera unidad es una elipse. Pondremos así de manifiesto el contenido intrínsecamente geométrico de la noción de espacio prehilbertiano y justificaremos la denominación genérica de *"elipsoide"* que se utiliza para la bola unidad de un espacio prehilbertiano.

Puede ser un buen momento para que los alumnos decidan cuáles de los espacios de Banach que conocen son prehilbertianos (algo que indudablemente es antihistórico, pero instructivo). La conclusión más destacable debe ser la siguiente:

Ejemplo 1.10.. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y supongamos que existen dos conjuntos medibles disjuntos con medida positiva y finita (la condición natural para que $L_p(\mu)$ tenga dimensión mayor o igual que 2). Dado p con $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Banach $L_p(\mu)$ es un espacio de Hilbert si, y sólo si, $p = 2$. El producto escalar en $L_2(\mu)$ que genera su norma viene dado por:

$$(f|g) = \int_{\Omega} f\overline{g}d\mu \qquad (f, g \in L_2(\mu)).$$

Es ya el momento de abordar la consecuancia, con mucho, más importante de la igualdad del paralelogramo, el Teorema de aproximación óptima. El enunciado que damos engloba dicho teorema junto con la existencia de centro para un subconjunto acotado de un espacio de Hilbert. La siguiente nomenclatura trata de facilitar la interpretación geométrica:

Definición 1.11.. *Si (E, d) es un espacio métrico, A un subconjunto acotado de E y $x \in E$, se define el* **radio** *de A* **relativo** *a x, $R(A, x)$, por:*

$$R(A, x) = \sup\{d(a, x) : \ a \in A\}.$$

($R(A, x)$ es el mínimo de los radios de las bolas cerradas de centro x que contienen al conjunto A).

Si M es un subconjunto no vacío arbitrario de E, el radio de A relativo a M es, por definición,

$$R(A, M) = \inf\{R(A, x) : \ x \in M\}.$$

El caso más interesante se presenta cuando $M = E$ y tenemos el que se suele llamar **radio exterior** *de A y notar por $R(A)$:*

$$R(A) = \inf\{R(A, x) : \ x \in E\}$$

que es el ínfimo de los radios de las bolas cerradas que contienen al conjunto A. Si este ínfimo se alcanza para un punto $x_0 \in E$ es natural decir que x_0 es un **centro** *de A.*

TEOREMA 1.12.. *Sea H un espacio prehilbertiano, A un subconjunto no vacío acotado de H y M un subconjunto no vacío, convexo y completo de H. Existe un único punto $x_0 \in M$ tal que:*

$$R(A, x_0) = R(A, M)$$

Si H es completo, tomando $M = H$ obtenemos:

COROLARIO 1.13.. *Sea H un espacio de Hilbert y A un subconjunto no vacío y acotado de H. Existe un único punto $x_0 \in H$ tal que $R(A, x_0) = R(A)$. Sugestivamente, A tiene un único centro.*

Más importante es el caso en que el conjunto A se reduce a un punto, $A = \{a\}$; entonces $R(A, x) = d(a, x)$ y $R(A, M) = d(a, M)$, luego:

COROLARIO 1.14.. **(Teorema de aproximación óptima).** *Sea H un espacio prehilbertiano, M un subconjunto convexo y completo de H y $a \in H$. Existe un único punto $x_0 \in M$ tal que*

$$\|a - x_0\| \leq \|a - x\| \quad \forall x \in M,$$

esto es, a tiene única mejor aproximación en M.

Para llegar al Teorema de la proyección ortogonal, principal resultado de este tema, sólo nos queda obtener una sencilla caracterización de la mejor aproximación, independiente del anterior resultado y acorde, cómo no, con la intuición geométrica, e introducir la nomenclatura referente a la noción de ortogonalidad.

LEMA 1.15.. *Sea H un espacio prehilbertiano, M un subconjunto no vacío y convexo de H, $a \in H$. Dado $x_0 \in M$, son equivalentes:*

i) $\|a - x_0\| \leq \|a - x\| \quad \forall x \in M$.

ii) $Re\,(a - x_0 | x - x_0) \leq 0 \quad \forall x \in M$.

Si M es de hecho un subespacio, i) y ii) equivalen a:

iii) $(a - x_0 | x) = 0 \quad \forall x \in M$.

DEFINICIÓN 1.16.. *Decimos que dos vectores x, y en un espacio prehilbertiano H son* **ortogonales** *y escribimos $x \perp y$ cuando $(x|y) = 0$ (evidentemente $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$). Dado un subconjunto no vacío M de H notamos:*

$$M^{\perp} = \{y \in H : \; y \perp x \quad \forall x \in M\}.$$

Es claro que $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H, $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ y $M \subset M^{\perp\perp}$.

Si M es un subespacio completo de H, dado $a \in H$ existe, por el Corolario 1.14 una mejor aproximación x_0 para a en M; el lema anterior nos dice que $a - x_0 \in M^{\perp}$, luego $a = x_0 + (a - x_0) \in M + M^{\perp}$. Esta es la principal afirmación del siguiente enunciado y de ella se deducen inmediatamente las demás:

Teorema 1.17.. **(Teorema de la proyección ortogonal).** *Sean H un espacio prehilbertiano y M un subespacio completo de H. Entonces:*

i) $H = M \oplus M^{\perp}$.

ii) La proyección lineal P_M de H sobre M tal que $\mathrm{Ker}P_M = M^{\perp}$ *recibe el nombre de* **proyección ortogonal** *de H sobre M y verifica que:*

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in H),$$

en particular P_M es continua y, si $M \neq \{0\}$, $\|P_M\| = 1$. Además, para cada $x \in H$, $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M.

Notemos que, si H no es completo, la situación de M y $M^{\perp}$ en el teorema anterior no es simétrica; puesto que la aplicación $x \mapsto (P_M(x), x - P_M(x))$ es un isomorfismo isométrico de H sobre $M \times M^{\perp}$ usando en el producto la norma dada por

$$\|(y, z)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \quad (y \in M,\ z \in M^{\perp}),$$

si $M^{\perp}$ fuese completo también lo sería H. En el caso de que H sea completo y M cerrado, la situación es perfectamente simétrica y $P_{M^{\perp}} = I - P_M$ donde I es la identidad en H, con lo que $M = M^{\perp\perp}$. Si A es un subconjunto no vacío arbitrario del espacio de Hilbert H, podemos aplicar lo anterior, tomando como M el subespacio cerrado de H engendrado por A; puesto que claramente $A^{\perp} = M^{\perp}$ obtenemos:

Corolario 1.18.. *Sea A un subconjunto no vacío arbitrario de un espacio de Hilbert H. Entonces $A^{\perp\perp}$ es el mínimo subespacio cerrado de H que contiene al conjunto A. En particular, si Y es un subespacio de H se tiene $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$, luego Y es denso en H si, y sólo si, $Y^{\perp} = \{0\}$.*

Como principal aplicación del Teorema de la proyección ortogonal obtenemos la autodualidad de los espacios de Hilbert. Comenzamos por una observación elemental que podía haberse hecho inmediatamente después de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si H es un espacio prehilbertiano y $x \in H$ podemos considerar la aplicación $\tilde{x} : H \to \mathbb{K}$ definida por

$$\tilde{x}(y) = (y|x) \quad (y \in H);$$

tenemos claramente que $\tilde{x}$ es un funcional lineal continuo en H, esto es $\tilde{x} \in H^*$, y $\|\tilde{x}\| = \|x\|$. La aplicación $x \mapsto \tilde{x}$ es conjugado-lineal (lineal en caso real) e isométrica. Para que sea sobreyectiva H deberá ser completo, puesto que H^* siempre lo es. Recíprocamente, si H es completo y $f \in H^* \setminus \{0\}$ el núcleo de f es un subespacio cerrado propio de H. El Teorema de la proyección ortogonal nos da un vector $u \in (\mathrm{Ker}f)^{\perp}$ tal que $f(u) \neq 0$ y tomando

$$x = \frac{\overline{f(u)}}{\|u\|^2} u$$

obtenemos inmediatamente que $f = \tilde{x}$. Hemos probado:

TEOREMA 1.19.. **(Riesz-Fréchet).** *Sea H un espacio de Hilbert y $f \in H^*$. Existe un único vector $x \in H$ tal que $f(y) = (y|x)$ para todo $y \in H$. Como consecuencia la aplicación $x \mapsto \tilde{x}$, donde*

$$\tilde{x}(y) = (y|x) \quad (x, y \in H)$$

es una biyección conjugado-lineal isométrica de H sobre H^*.

COROLARIO 1.20.. *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

El tema concluye utilizando el teorema de Riesz-Fréchet para definir el adjunto de un operador. Recogemos los hechos básicos en el siguiente enunciado de demostración elemental.

TEOREMA 1.21.. *Sean X e Y espacios de Hilbert y $T \in BL(X,Y)$.*

i) Existe una única aplicación $T^* : Y \to X$ verificando que:

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \quad (x \in X, y \in Y).$$

ii) $T^* \in BL(Y,X)$ y $T^{**} = T$.

iii) $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$.

iv) *Para $T_1, T_2 \in BL(X,Y)$, se tiene*

$$(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*, \ (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*.$$

v) Si Z es otro espacio de Hilbert y $S \in BL(Y,Z)$, se tiene

$$(ST)^* = T^* S^*.$$

DEFINICIÓN 1.22.. *Llamaremos* **operador** *a una aplicación lineal continua entre dos espacios de Hilbert. Si $T \in BL(X,Y)$ es un operador, T^* recibe el nombre de operador* **adjunto** *de T.*

Conviene resaltar la rica estructura que, según el teorema anterior, tiene el espacio vectorial $BL(H)$ de los operadores de un espacio de Hilbert H en sí mismo, constituida por tres elementos: la norma de operadores, que convierte a $BL(H)$ en un espacio de Banach, el producto (composición) que lo convierte en un álgebra asociativa con unidad I (el operador identidad en H, I_H si hay lugar a confusión) y la aplicación $T \mapsto T^*$ que es una biyección antilineal que coincide con su inversa, esto es, una **involución**. Tenemos además una buena avenencia entre los tres tipos de estructura, que se concreta en las siguientes afirmaciones. En primer lugar, la norma es **submultiplicativa**

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\| \quad (S, T \in BL(H)),$$

equivalentemente, el producto es una aplicación bilineal continua de norma 1 (descartado el caso trivial $H = \{0\}$), y $\|I\| = 1$; estamos por tanto ante un ejemplo de *"álgebra de Banach unital"*. En segundo lugar, la involución es **multiplicativa**

$$(ST)^* = T^* S^* \quad (S, T \in BL(H)),$$

en particular $I^* = I$. Finalmente, norma e involución están ligadas por la crucial propiedad

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \quad (T \in BL(H))$$

denominada a veces **propiedad estelar de la norma** y también **axioma de Gelfand-Naimark** en honor de quienes pusieron de manifiesto su importancia. La única afirmación del Teorema 1.21 no recogida en los anteriores comentarios, el hecho de que la involución es isométrica, es una clara consecuencia de los mismos.

Las consideraciones hechas en la definición anterior sólo tienen la intención de poner de manifiesto la riqueza estructural de $BL(H)$, de la que depende en el fondo la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Pero volviendo a la visión *"espacial"* del asunto, obtenemos sin ninguna dificultad las siguientes relaciones entre las propiedades de un operador y las de su adjunto. Aprovechamos para caracterizar *"algebraicamente"* ciertas propiedades de un operador.

PROPOSICIÓN 1.23.. *Sean X e Y espacios de Hilbert, $T \in BL(X,Y)$.*

i) $Ker(T) = T^*(Y)^\perp$. *Como consecuencia, T es inyectivo sí, y sólo si, T^* tiene imagen densa.*

ii) T es un isomorfismo si, y sólo si, lo es T^*, en cuyo caso se tiene $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

iii) T es isométrico si, y sólo si, $T^*T = I_X$.

iv) T es un isomorfismo isométrico si, y sólo si,

$$T^*T = I_X \qquad TT^* = I_Y$$

esto es, T es biyectivo con $T^* = T^{-1}$.

Bibliografía. En los textos generales de Análisis Funcional dedicados a los espacios vectoriales topológicos se dedica poca atención a los espacios de Hilbert y sólo como ejemplos ilustrativos. Honrosas excepciones son por ejemplo los libros de Berberian [**Ber2**, §41, 42], Brown-Page [**BrPa**, §9.1, 9.2], Larsen [**Lar2**, §13.0-13.5], Pedersen [**Ped2**, §3.1] y Taylor-Lay [**TaLa**, §II.6, II.7], pero el más apropiado nos parece Conway [**Con2**, Chapter I] que inicia el Análisis Funcional por los espacios de Hilbert, de los que obtendrá la inspiración para posteriores abstracciones. Puesto que no supone prerrequisitos, su planteamiento es idéntico al nuestro en este momento. La práctica totalidad del presente tema está contenida en el Capítulo I del libro de Conway, en el que se puede encontrar además una colección de ejercicios interesantes. Igualmente recomendables para el alumno son los libros dedicados exclusivamente a los espacios de Hilbert, especialmente los de Berberian [**Ber1**, Capítulos II, III, V] y Halmos [**Hal2**, Chapter I]. Por otra parte, libros de Análisis Real como los de Rudin [**Rud1**, Chapter 4], Hewitt-Stromberg [**HeSt**, §16] o Choquet [**Cho1**, Chapitre VII, §14, 15], especialmente este último, tratan adecuadamente los espacios de Hilbert.

Nuestro tratamiento inicial, un tanto más extenso de lo usual, de las formas sesquilineales y cuadráticas está inspirado en Halmos [**Hal2**, §1-4] y para el resto del capítulo seguimos esencialmente a Conway [**Con2**], excepto la obtención simultánea del Teorema de aproximación óptima y del centro de un conjunto acotado, según ideas de Angel Rodríguez Palacios [**Rod5**].

Tema 2

Familias sumables en espacios normados. Bases ortonormales. Espacios de Hilbert "tipo".

La descripción, salvo isomorfismos totales, de todos los espacios de Hilbert, es el objetivo central del presente tema. En particular se obtiene la versión abstracta del teorema de Riesz-Fisher al probar la unicidad del espacio de Hilbert separable sobre $\mathbb{K}$. Hacemos un estudio previo de las familias sumables en espacios normados obteniendo la esencial equivalencia entre las nociones de familia sumable y serie incondicionalmente convergente.

El concepto de familia sumable de vectores de un espacio normado es bastante intuitivo, por lo que no precisa demasiada motivación. Si bien evitamos la terminología de redes, la idea que subyace es clara, las sumas finitas se aproximan tanto como se quiera a un cierto vector cuando el conjunto de vectores que se suman es suficientemente grande. Conviene insistir en que el conjunto de índices puede no ser numerable y en que no se involucra ningún orden en dicho conjunto, aún cuando posea algún orden natural.

Definición 2.1.. *Si Λ es un conjunto no vacío arbitrario, $\mathcal{F}(\Lambda)$ denotará el conjunto de las partes finitas de Λ. Si X es un espacio normado, se dice que una familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de vectores de X es* **sumable** *cuando existe un $x \in X$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda)$ tal que si $J \in \mathcal{F}(\Lambda)$ y $J_0 \subset J$, entonces*

$$\|\sum_{\lambda \in J} x_\lambda - x\| < \varepsilon.$$

Es evidente que el vector x, si existe, es único y se le llama **suma** *de la familia. Escribimos $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ para indicar simultáneamente que la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable y que x es su suma.*

Propiedades básicas del concepto que acabamos de introducir son la conmutatividad, carácter lineal de la suma y conservación por aplicaciones lineales continuas, todas ellas deducibles directamente de la definición:

Proposición 2.2.. *Sean X un espacio normado, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ e $\{y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ familias de vectores de X.*

i) Si $\sigma : I \to \Lambda$ es una aplicación biyectiva se tiene

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \Leftrightarrow x = \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}.$$

ii) Si $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda,\ y = \sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda$, $\alpha \in \mathbb{K}$, *entonces*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha x_\lambda + y_\lambda) = \alpha x + y.$$

iii) Si Y *es otro espacio normado y* $T \in BL(X,Y)$,

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \Rightarrow T(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} T(x_\lambda).$$

La condición necesaria de Cauchy para la sumabilidad de una familia toma el siguiente aspecto:

Definición 2.3.. *Se dice que una familia* $\{x_\lambda :\ \lambda \in \Lambda\}$ *de elementos de un espacio normado* X *verifica la* **condición de Cauchy** *si:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) :\ J \in \mathcal{F}(\Lambda),\ J \cap J_0 = \emptyset \Rightarrow \| \sum_{\lambda\in J} x_\lambda \| < \varepsilon.$$

Es inmediato que toda familia sumable verifica la condición de Cauchy, así como que esta condición implica que los elementos no nulos de la familia forman un conjunto numerable, pues si, para $n \in \mathbb{N}$, notamos J_n al conjunto finito J que aparece al aplicar la condición de Cauchy con $\varepsilon = 1/n$, es claro que $x_\lambda = 0$ para $\lambda \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Así pues:

Proposición 2.4.. *Sea* $\{x_\lambda :\ \lambda \in \Lambda\}$ *una familia de vectores de un espacio normado. Cada una de las siguientes afirmaciones implica la siguiente:*

i) $\{x_\lambda :\ \lambda \in \Lambda\}$ *es sumable.*
ii) $\{x_\lambda :\ \lambda \in \Lambda\}$ *verifica la condición de Cauchy.*
iii) $\{\lambda \in \Lambda :\ x_\lambda \neq 0\}$ *es numerable.*

La condición *iii)* podría inducir a pensar que basta limitarse al estudio de familias numerables. Sin embargo, puede interesarnos considerar "todas" las familias sumables con un mismo conjunto de índices Λ no numerable. Por otra parte, aunque Λ sea numerable la noción de sumabilidad es una cómoda reformulación de la convergencia incondicional o conmutativa de una serie:

Teorema 2.5.. *Dada una familia* $\{x_\lambda :\ \lambda \in \Lambda\}$ *de elementos de un espacio normado* X, *son equivalentes:*

i) $\{x_\lambda :\ \lambda \in \Lambda\}$ *es sumable.*
ii) El conjunto $A = \{\lambda \in \Lambda :\ x_\lambda \neq 0\}$ *es numerable y, para cualquier biyección* $\sigma : \mathbb{N} \to A$ *la serie* $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ *es convergente.*

Caso de que se cumplan i) y ii) se tiene que $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ *para cualquier biyección* $\sigma : \mathbb{N} \to A$.

Conviene resaltar que en la condición *ii)* del teorema anterior no se supone que todas las series de la forma $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ tengan la misma suma, sino que este hecho se obtiene como tesis. Aclarada la relación (esencialmente equivalencia) entre familias sumables y series incondicionalmente convergentes nos restringimos ya al caso completo para redondear la equivalencia entre sumabilidad y condición de Cauchy. Podemos evitar la complitud en términos de redes o bases de filtro simplemente aplicando el teorema anterior. Es obvio que si la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ verifica la condición de Cauchy, igual le ocurre a cualquiera de las series $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ que aparecen en el teorema anterior, luego:

Corolario 2.6.. *Una familia de vectores de un espacio de Banach es sumable si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.*

Es obvio que toda subfamilia de una familia que verifique la condición de Cauchy la sigue verificando, luego en espacios de Banach, toda subfamilia de una familia sumable es sumable. Sin demasiado esfuerzo adicional probamos un resultado general sobre asociatividad:

Corolario 2.7.. *Sea $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de vectores de un espacio de Banach y sea $\Lambda = \bigcup_{i\in I} \Lambda_i$ una partición arbitraria del conjunto Λ. Entonces, si la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable se tiene que para cada $i \in I$ la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda_i\}$ es sumable y, poniendo para cada $i \in I$, $S_i = \sum_{\lambda\in\Lambda_i} x_\lambda$, la familia $\{S_i : i \in I\}$ es sumable y*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = \sum_{i\in I} S_i = \sum_{i\in I} \left(\sum_{\lambda\in\Lambda_i} x_\lambda \right).$$

Definición 2.8.. *Se dice que la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de elementos de un espacio normado es* **absolutamente sumable** *cuando la familia de números $\{\|x_\lambda\| : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable.*

Como consecuencia inmediata del Corolario 2.6 obtenemos lo siguiente:

Corolario 2.9.. *Sean X un espacio de Banach, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de vectores de X y supongamos que existe $\alpha \in \ell_1^\Lambda$ tal que $\|x_\lambda\| \leq |\alpha(\lambda)|$ para $\lambda \in \Lambda$. Entonces la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable en X y se verifica que:*

$$\|\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)|.$$

En particular, en un espacio de Banach, toda familia absolutamente sumable es sumable.

En realidad, esta última propiedad caracteriza a los espacios de Banach entre los espacios normados ([**Cho2**, Proposicion III-2-§4.13]).

Cubiertos razonablemente los requisitos previos relativos a las familias sumables de vectores, volvemos a la teoría de los espacios de Hilbert, con el loable propósito de probar que todo espacio de Hilbert es totalmente isomorfo a uno de los llamados espacios de

Hilbert *"tipo"*, esto es, a un espacio ℓ_2^Λ para conveniente conjunto Λ. Todo el desarrollo que sigue puede motivarse muy bien considerando la *"base"* natural del espacio ℓ_2^Λ.

Si Λ es un conjunto no vacío arbitrario y para cada $\lambda \in \Lambda$, $e_\lambda \in \ell_2^\Lambda$ denota la función característica del conjunto $\{\lambda\}$, toda la estructura del espacio ℓ_2^Λ se reconstruye fácilmente a partir de la familia de vectores $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. En efecto, si $x \in \ell_2^\Lambda$ se tiene claramente

$$x(\lambda) = (x|e_\lambda) \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

luego

$$(x|y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \qquad (x, y \in \ell_2^\Lambda)$$

en particular

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

Si notamos M al subespacio vectorial de ℓ_2^Λ engendrado por el conjunto $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, es claro que $M^\perp = \{0\}$, luego M es denso en ℓ_2^Λ; más aún, si $x \in \ell_2^\Lambda$ y $J \in \mathcal{F}(\Lambda)$ se tiene claramente:

$$\|x - \sum_{\lambda\in J}(x|e_\lambda)e_\lambda\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\lambda\in J} |(x|e_\lambda)|^2$$

de donde deducimos inmediatamente que $\{(x|e_\lambda)e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia sumable de vectores de ℓ_2^Λ, con $x = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x|e_\lambda)e_\lambda$, lo que nos da una forma muy concreta de aproximar cada $x \in \ell_2^\Lambda$ mediante elementos de M. Finalmente conviene resaltar que

$$\|e_\lambda\| = 1, \quad (e_\lambda|e_\mu) = 0 \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \neq \mu).$$

Definición 2.10.. *Un* **sistema ortonormal** *en un espacio prehilbertiano X es un subconjunto no vacío $E = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de X, tal que $(x_\lambda|x_\mu) = 0$ para $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$ y $\|x_\lambda\| = 1$ para $\lambda \in \Lambda$. Para cada $x \in X$, la familia de escalares $\{(x|x_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es, por definición, la familia de los* **coeficientes de Fourier** *del vector x con respecto al sistema ortonormal E.*

El siguiente lema, no obstante la sencillez de su demostración, es fundamental para los resultados que siguen:

Lema 2.11.. *Sea $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano X.*

i) Si para $J \in \mathcal{F}(\Lambda)$ denotamos M_J al subespacio de X engendrado por $\{x_\lambda : \lambda \in J\}$ (M_J es finito-dimensional, luego completo) y P_J a la proyección ortogonal de X sobre M_J, se tiene:

$$P_J(x) = \sum_{\lambda\in J}(x|x_\lambda)x_\lambda \quad (x \in X).$$

En particular:

$$\|x - \sum_{\lambda\in J}(x|x_\lambda)x_\lambda\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\lambda\in J} |(x|x_\lambda)|^2 \quad (x \in X).$$

ii) Para cada $x \in X$, la familia $\{|(x|x_\lambda)|^2 : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable y se verifica:

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|x_\lambda)|^2 + [\mathrm{dist}(x, M)]^2 \quad (x \in X)$$

donde M es el subespacio de X engendrado por $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. En particular, se verifica la **desigualdad de Bessel**

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|x_\lambda)|^2 \leq \|x\|^2 \quad (x \in X).$$

Teorema 2.12.. *Sean $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano X y M el subespacio vectorial de X engendrado por $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|x_\lambda)|^2, \quad (x \in X)$.

ii) *M es denso en X.*

iii) $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda) x_\lambda$ $(x \in X)$ *(***Desarrollo de Fourier***).*

iv) $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda)(x_\lambda|y)$ $(x, y \in X)$ *(***Igualdad de Parseval***).*

Definición 2.13.. *Un sistema ortonormal $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ en un espacio prehilbertiano X, que verifique cualquiera de las afirmaciones del teorema anterior, recibe el nombre de* **base ortonormal** *de X. La igualdad $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda) x_\lambda$ recibe el nombre de* **desarrollo de Fourier** *del vector $x \in X$ con respecto a la base ortonormal $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, mientras que la afirmación iv) del teorema anterior suele conocerse como* **igualdad de Parseval**. *Recordemos que si Λ es un conjunto no vacío arbitrario y, para cada $\lambda \in \Lambda$, $e_\lambda \in \ell_2^\Lambda$ es la función característica del conjunto $\{\lambda\}$, el conjunto $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal de ℓ_2^Λ a la que suele denominarse* **base canónica** *de ℓ_2^Λ.*

Considerando la aplicación $x \mapsto \hat{x}$ de X en ℓ_2^Λ dada por $\hat{x}(\lambda) = (x|x_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ tenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.14.. *Si un espacio prehilbertiano X posee una base ortonormal $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, entonces X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de ℓ_2^Λ.*

Veremos más adelante que un espacio prehilbertiano puede carecer de base ortonormal. Damos ahora dos condiciones suficientes para la existencia de base ortonormal: separabilidad y complitud. En primer lugar, para un espacio prehilbertiano separable puede construirse explícitamente una base ortonormal a partir de una base de Hamel numerable para un subespacio denso:

Lema 2.15.. **(Método de Gram-Schmidt).** *Si $\{y_n\}$ es una sucesión de vectores linealmente independientes en un espacio prehilbertiano X, existe un sistema ortonormal $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en X tal que el subespacio engendrado por $\{x_k : 1 \le k \le n\}$ coincide con el engendrado por $\{y_k : 1 \le k \le n\}$, para todo natural n.*

Para ello considérese $x_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$ y construidos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ basta tomar $x_{n+1} = \frac{z}{\|z\|}$ donde $z = y_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (y_{n+1}|x_k)x_k$. Nótese que una construcción análoga a la anterior permite obtener, en el caso finito-dimensional, una base ortonormal a partir de cualquier base de Hamel. Enlazando los dos últimos resultados obtenemos:

Teorema 2.16..

i) Para cada $N \in \mathbb{N}$, ℓ_2^N es, salvo isomorfismo isométrico, el único espacio prehilbertiano de dimensión N.
ii) Un espacio prehilbertiano es separable si, y sólo si, posee una base ortonormal numerable.
iii) Todo espacio prehilbertiano separable infinito-dimensional es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de ℓ_2.
iv) ℓ_2 es, salvo isomorfismo isométrico, el único espacio de Hilbert infinito-dimensional separable.

Pasamos a la segunda condición suficiente para la existencia de base ortonormal. Es claro que toda base ortonormal es un sistema ortonormal maximal, ya que el desarrollo de Fourier nos hace ver que sólo el vector cero puede ser ortogonal a todos los elementos de una base ortonormal. Es obvio que la familia de todos los sistemas ortonormales de un espacio prehilbertiano está ordenada inductivamente por inclusión. Del Lema de Zorn deducimos:

Lema 2.17.. *En un espacio prehilbertiano, todo sistema ortonormal está contenido en un sistema ortonormal maximal.*

Es el momento de involucrar el teorema de la proyección ortogonal que hasta ahora no se había usado (nótese que la primera parte del Lema 2.11 no utiliza en realidad dicho teorema). Si $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es un sistema ortonormal maximal en un espacio de Hilbert H, y M es el subespacio de H engendrado por dicho sistema, la maximalidad nos dice que $M^\perp = \{0\}$ y el Corolario 1.18 nos permite concluir que M es denso en H. Obtenemos así la primera parte del siguiente resultado, que clasifica, salvo isomorfismos isométricos, todos los espacios de Hilbert.

Teorema 2.18..

i) En un espacio de Hilbert, todo sistema ortonormal maximal es una base ortonormal.
ii) Todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal.
iii) Si $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert H, entonces H es isométricamente isomorfo a ℓ_2^Λ.
iv) Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal, llamado **dimensión hilbertiana** *del espacio.*

v) Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana.

Del teorema anterior se deduce nueva información sobre sistemas ortonormales arbitrarios, no necesariamente maximales, en un espacio de Hilbert, que merece ser destacada. En esencia se trata de una mejora del Lema 2.11 en ambiente de complitud:

COROLARIO 2.19.. *Sea $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert H.*

i) Si $\{\alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de escalares, la familia de vectores $\{\alpha_\lambda x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable si, y sólo si, lo es la familia de escalares $\{|\alpha_\lambda|^2 : \lambda \in \Lambda\}$.

ii) Si M es el subespacio cerrado de H engendrado por el conjunto $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ y P_M es la proyección ortogonal de H sobre M, se tiene

$$P_M(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x|x_\lambda)x_\lambda \quad (x \in H).$$

El primer apartado del corolario anterior nos proporciona abundantes ejemplos de familias sumables en espacios de Hilbert que no son absolutamente sumables; el ejemplo más sencillo es $\{\frac{1}{n}e_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $\{e_n\}$ es la base canónica de ℓ_2. La comparación entre las nociones de base ortonormal y base de Hamel debe también comentarse. Es claro que si H es un espacio de Hilbert de dimensión finita, toda base ortonormal de H es una base de Hamel y la dimensión algebraica de H coincide con su dimensión hilbertiana. Por el contrario, ninguna base ortonormal infinita puede ser una base de Hamel. Si Λ es un conjunto infinito, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert H, y Λ_0 es un subconjunto infinito numerable de Λ, $\Lambda_0 = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, el vector $x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x_{\lambda_n} \in H$ no puede expresarse como combinación lineal de elementos de $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Es fácil comprobar que la dimensión algebraica de ℓ_2 es el cardinal de $\mathbb{R}$, estrictamente mayor que la dimensión hilbertiana.

Concluimos nuestro estudio de las bases ortonormales mostrando que la hipótesis de separabilidad en el Teorema 2.16 y la de complitud en el Teorema 2.18 son imprescindibles:

EJEMPLOS 2.20..

(1) *En un espacio prehilbertiano un sistema ortonormal maximal puede no ser una base ortonormal.* Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base canónica de ℓ_2 y $x \in \ell_2$ la sucesión dada por $x(n) = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Si X es el subespacio de ℓ_2 engendrado por $\{x\} \cup \{e_n : n \geq 2\}$, se comprueba fácilmente que $\{e_n : n \geq 2\}$ es un sistema ortonormal maximal en X y no es una base ortonormal.

(2) *Un espacio prehilbertiano sin base ortonormal.* Consideremos los espacios de Hilbert ℓ_2 y $\ell_2^{\mathbb{R}}$ y pongamos $H = \ell_2 \times \ell_2^{\mathbb{R}}$ que es claramente un espacio de Hilbert con el producto escalar obvio. Utilizando el hecho, ya comentado, de que la dimensión algebraica de ℓ_2 es el cardinal de $\mathbb{R}$, podemos conseguir una base de Hamel de ℓ_2 de la forma: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la base (ortonormal) canónica de ℓ_2. Sea por otra parte $\{y_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ la base ortonormal canónica de $\ell_2^{\mathbb{R}}$ y $T : \ell_2 \to \ell_2^{\mathbb{R}}$ la aplicación lineal que verifica

$T(e_n) = 0$ para $n \in \mathbb{N}$ y $T(x_\lambda) = y_\lambda$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Finalmente sea X la gráfica de T:

$$X = \{(x, T(x)) : \ x \in \ell_2\}.$$

Es fácil probar que X es denso en H (véase que $\ell_2 \times \{0\} \subset \overline{X}$ y $\{0\} \times \ell_2^{\mathbb{R}} \subset \overline{X}$). Se sigue que toda base ortonormal de X es también una base ortonormal de H, luego X no puede tener una base ortonormal numerable. Sin embargo, todo sistema ortonormal en X es numerable. En efecto, si $\{u_\gamma : \ \gamma \in \Gamma\}$ es un sistema ortonormal en X, para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia $\{|(e_n|u_\gamma)|^2 : \ \gamma \in \Gamma\}$ es sumable (Lema 2.11) luego el conjunto $\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma : \ u_\gamma(n) \neq 0\}$ es numerable (Proposición 2.4) y $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ también lo es.

Concluimos este tema con una generalización, meramente formal, de algunos resultados anteriores, en términos de la siguiente noción abstracta:

Definición 2.21. *Sea $\{X_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ una familia arbitraria de espacios prehilbertianos; consideremos el conjunto:*

$$X = \left\{ x \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : \ \{\|x(\lambda)\|^2 : \ \lambda \in \Lambda\} \text{ es sumable} \right\}.$$

Se comprueba que X es un subespacio de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, que para cualesquiera $x, y \in X$ la familia de escalares $\{(x(\lambda)|y(\lambda)) : \ \lambda \in \Lambda\}$ es sumable y que definiendo

$$(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x(\lambda)|y(\lambda)) \quad (x, y \in X)$$

se obtiene un producto escalar en X. El espacio prehilbertiano así obtenido recibe el nombre de **suma hilbertiana** *(suma ortogonal o ℓ_2-suma) de la familia $\{X_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ y escribiremos $X = \overset{\ell_2}{\underset{\lambda\in\Lambda}{\bigoplus}} X_\lambda$.*

Proposición 2.22.. *Sea $\{M_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ una familia de subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H, dos a dos ortogonales, esto es $M_\lambda \subset M_\mu^\perp$ para $\lambda, \mu \in \Lambda, \ \lambda \neq \mu$; notemos M al subespacio cerrado de H engendrado por $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.*

i) Si $x_\lambda \in M_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y la familia $\{\|x_\lambda\|^2 : \ \lambda \in \Lambda\}$ es sumable, entonces la familia $\{x_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ también es sumable y con suma en M.

ii) Recíprocamente, cada vector $x \in M$ se expresa de manera única en la forma $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ con $x_\lambda \in M_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, verificándose que $\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|^2$.

En resumen M es (isométricamente isomorfo a) la suma hilbertiana $\overset{\ell_2}{\underset{\lambda\in\Lambda}{\bigoplus}} M_\lambda$. Escribimos también en este caso $M = \overset{\ell_2}{\underset{\lambda\in\Lambda}{\bigoplus}} M_\lambda$.

La proposición anterior, mera extensión formal de resultados anteriores, pone de manifiesto, en el caso de que Λ sea finito, una consecuencia del teorema de la proyección ortogonal que hasta ahora no habíamos comentado.

Corolario 2.23.. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert tales que $M \subset N^\perp$. Entonces $M + N$ es cerrado.*

La hipótesis $M \subset N^\perp$ no puede suprimirse:

Ejemplo 2.24.. *Dos subespacios cerrados de un espacio de Hilbert cuya suma no es cerrada*. Se considera el operador $T \in BL(\ell_2)$ dado por:

$$T(x)(n) = \frac{1}{n}x(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

y notemos que la imagen de T es densa en ℓ_2 (contiene a la base canónica) pero T no es sobreyectivo (la sucesión $\{1/n\}$ no está en la imagen de T). Sea entonces H la suma hilbertiana de ℓ_2 consigo mismo, M la gráfica de T y $N = \{(x, 0) : \ x \in \ell_2\}$. Es claro que M y N son subespacios cerrados y que $M + N = \{(x, T(y)) : \ x, y \in \ell_2\}$. Puesto que $T(\ell_2)$ no es cerrado, tampoco lo es $M + N$.

Bibliografía. Para la parte inicial del tema, referente a las familias sumables, hemos seguido el texto de Choquet [**Cho1**, Chapitre VII, §9, 10], si bien limitándonos al ambiente de los espacios normados que nos parece más que suficiente.

Toda la discusión referente a las bases ortonornales es archiconocida. Aparte del texto de Choquet ya citado [**Cho1**, Chapitre VII, §16] podemos seguir cualquiera de los libros mencionados en la bibliografía del tema anterior, entre los que destacamos los de Berberian [**Ber1**] y [**Ber2**, §41, 42], Conway [**Con2**], Halmos [**Hal2**, §14-16], Larsen [**Lar2**, §13.6] y Pedersen [**Ped2**, §3.1]. A pesar de que la pregunta sobre la existencia de un espacio prehilbertiano sin base ortonormal surge de forma muy natural, casi todos los textos consultados evitan incluso plantear tal pregunta. El ejemplo dado aquí aparece en el texto de Mukherjea-Pothoven [**MuPo**, Problem 6.2.12], propuesto como ejercicio y con referencia a un trabajo de S. Gudder aparecido en Amer. Math. Monthly en 1974; el resultado se debe al parecer a P. R. Halmos, aunque ninguno de los libros de dicho autor sobre espacios de Hilbert [**Hal2**], [**Hal3**] lo menciona.

Tema 3

Integración de funciones valuadas en un espacio de Banach. Funciones holomorfas en un espacio de Banach. Teorema de Dunford.

En este tema extendemos la conocida integral de Riemann-Stieltjes a funciones valuadas en un espacio de Banach con el objeto de establecer el concepto de integral, a lo largo de una curva, de una función valuada en un espacio de Banach complejo. Establecido el concepto natural de holomorfía, probamos la correspondiente versión del Teorema de Cauchy para ciclos nulhomólogos, sentando así las bases para el desarrollo de una teoría de funciones analíticas, en completo paralelismo con la teoría clásica. También probamos el bonito Teorema de Dunford acerca de la equivalencia entre holomorfía y holomorfía débil.

Sean α, β dos números reales y γ una aplicación del intervalo $[\alpha, \beta]$ en $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Denotamos por $\mathcal{P}([\alpha, \beta])$ el conjunto de las particiones de $[\alpha, \beta]$ y para cada $P \in \mathcal{P}([\alpha, \beta])$, $P = \{\alpha = t_o < t_1 < ... < t_n = \beta\}$,

$$\ell(\gamma, P) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

Si el conjunto $\{\ell(\gamma, P) : P \in \mathcal{P}([\alpha, \beta])\}$ está acotado se dice que γ es de **variación acotada** y al supremo de dicho conjunto se conoce con el nombre de la **variación total** de γ en $[\alpha, \beta]$ y lo notaremos por $V(\gamma)$. Si suponemos que γ es una curva, es decir, γ es continua, y además es de variación acotada, se dice entonces que γ es una **curva rectificable**. En tal caso a $V(\gamma)$ se le llama la **longitud** de γ y se suele representar por $\ell(\gamma)$. Si γ es un **camino**, es decir γ es continua, y existe una partición $P = \{\alpha = t_o < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ tal que la restricción de γ a $[t_{k-1}, t_k]$ para todo $k = 1, ..., n$ es de clase C^1, entonces es bien conocido que $\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt$.

La conocida integral de Riemann-Stieltjes puede extenderse a funciones valuadas en un espacio de Banach de la siguiente manera:

Definición 3.1.. *Dados un espacio de Banach X, una aplicación $f : [a, b] \to X$, una función $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$ y una partición $P = \{\alpha = t_o < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ perteneciente a $\mathcal{P}([\alpha, \beta])$ junto con n puntos s_k tales que $t_k \leq s_k \leq t_k, k = 1, \ldots, n$; notemos por*

$$S_P(f, \gamma) = \sum_{k=1}^{n} f(s_k)(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

y por

$$|P| = \text{ Max } \{t_k - t_{k-1} : k = 1, ..., n\}.$$

Pues bien, se dice que f es **integrable Riemann-Stieltjes** *respecto de γ si existe $\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\gamma)$, es decir: existe un vector en X que notaremos por $\int_\alpha^\beta f(t)d\gamma(t)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si P pertenece $\mathcal{P}([a,b])$ con $|P| < \delta$, entonces $\| \int_\alpha^\beta f(t)d\gamma(t) - S_P(f,\gamma)\| < \varepsilon$ para cualquier elección de los puntos s_k tales que $t_{k-1} \le s_k \le t_k, 1 \le k \le n$. Si $\gamma(t) = t$ la integral se llama de Riemann.*

Los bien conocidos argumentos para funciones numéricas pueden ser trasladados para probar:

Teorema 3.2.. *Si $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{K}$ es de variación acotada y X es un espacio de Banach, entonces toda función continua $f : [\alpha,\beta] \to X$ es integrable Riemann-Stieltjes respecto de γ. Además si T es un operador lineal continuo de X en otro espacio de Banach Y, entonces*

$$T\left(\int_\alpha^\beta f(t)d\gamma(t)\right) = \int_\alpha^\beta (T\circ f)(t)d\gamma(t).$$

Dado un espacio de Banach X, notaremos por $C([\alpha,\beta]),X)$ al espacio de Banach de las funciones continuas de $[\alpha,\beta]$ en X con la norma del supremo.

Corolario 3.3.. *Sean $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{K}$ de variación acotada y X un espacio de Banach. Entonces la aplicación $f \mapsto \int_\alpha^\beta f(t)d\gamma(t)$ del espacio de Banach $C([\alpha,\beta],X)$ en X es una aplicación lineal continua, de norma menor o igual a $V(\gamma)$:*

$$\| \int_\alpha^\beta f(t)d\gamma(t)\| \le V(\gamma)\mathrm{Max}\{\|f(t)\| : \alpha \le t \le \beta\}.$$

Por consiguiente si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas de $[\alpha,\beta]$ en X que converge uniformemente hacia una función f en $[\alpha,\beta]$, entonces $\{\int_\alpha^\beta f_n(t)d\gamma(t)\} \to \int_\alpha^\beta f(t)d\gamma(t)$.

Si $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ es una curva rectificable y f es una función continua del soporte de γ ($= \mathrm{Img}(\gamma)$) y que como es habitual notaremos por $sop(\gamma)$) en un espacio de Banach complejo X, entonces a $\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))d\gamma(t)$ se le conoce con el nombre de **integral** de f a lo largo de γ que notaremos por $\int_\gamma f(z)dz$. Análogamente a lo que ocurre con funciones complejas de variable compleja se tiene que si γ es un camino, entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz \;=\; \int_\alpha^\beta f((\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt.$$

De donde se deduce que

$$\left\|\int_\gamma f(z)dz\right\| \le \ell(\gamma)\mathrm{Max}\{\|f(z)\| : z \in sop(\gamma)\}.$$

Si consideramos un **ciclo** Γ (= unión de caminos cerrados $\gamma_k,\ k = 1,\dots,n$) podemos extender, de forma natural, la integral de una función f perteneciente a las continuas de $sop(\Gamma)$ en X, definiendo

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

No se hará excesivo hincapié en las demostraciones de los resultados expuestos debido a su carácter rutinario y a su analogía con los del caso en que la función f está escalarmente valuada. Así, algunas de estas demostraciones se dejarán como ejercicio al igual que la de otros resultados no explícitamente enunciados, como el teorema fundamental del cálculo para la integral de Riemann.

Definición 3.4. . *Dados un espacio normado complejo X, Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to X$ se dice que f es* **derivable** *en $z_0 \in \Omega$ si existe el límite:*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0) \in X.$$

Al vector $f'(z_0)$ se le llama **derivada** *de f en z_0. En el caso de que f sea derivable en todo punto de Ω diremos que f es* **holomorfa** *en Ω. Si para cada $\varphi \in X^*$ se tiene que $\varphi \circ f$ es una función holomorfa diremos que f es* **débilmente holomorfa**.

Claramente toda función holomorfa es débilmente holomorfa. El recíproco también es cierto, resultado que era probado por N. Dunford (1.938), como una bonita aplicación del Teorema de Banach-Steinhaus, junto con el Teorema de Hahn-Banach y la fórmula de Cauchy para funciones holomorfas escalarmente valuadas. Antes de proceder a su prueba establecemos un par de lemas que tienen interés por sí mismos.

Lema 3.5.. *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y $f : \Omega \to X$ una aplicación débilmente holomorfa. Entonces f es continua.*

Lema 3.6.. *Sean γ un camino, X un espacio de Banach complejo y $\phi : sop(\gamma) \to X$ una función continua. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la función $f_n : \mathbb{C} \backslash sop(\gamma) \to X$ definida por*

$$f_n(z) = \int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w - z)^n} dw$$

es holomorfa. Además $f_n'(z) = n f_{n+1}(z)$ para todo n.

Recordemos que un ciclo Γ con soporte contenido en Ω se dice **nulhomólogo** si el índice $n(\Gamma, w)$ es cero para todo $w \notin \Omega$.

Teorema 3.7.. **(Dunford).** *Sean X un espacio de Banach complejo, Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y una función $f : \Omega \to X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *f es débilmente holomorfa en Ω.*

ii) *f es continua y para todo ciclo nulhomólogo Γ con soporte en Ω se verifica que $\int_\Gamma f(w)dw = 0$.*

iii) *f es continua y para todo ciclo nulhomólogo Γ con soporte en Ω se verifica que*

$$n(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \forall z \notin sop(\Gamma).$$

iv) *f es holomorfa en Ω.*

La prueba puede hacerse como en [**HiPh**, Theorem 3.10.1] con las convenientes simplificaciones. La fórmula fundamental de Cauchy puede trasladarse del caso complejo-valuado al caso Banach-valuado sin más ayuda que el Teorema de Hahn-Banach. Tenemos pues establecidas las bases fundamentales que permiten desarrollar una teoría de funciones holomorfas valuadas en un espacio de Banach, con total analogía al caso clásico: desarrollos de Taylor y Laurent, equivalencia entre holomorfía y analiticidad, Teorema de Liouville, existencia de derivadas de cualquier orden, desigualdades de Cauchy, etc. Estas cuestiones se presentarán al alumno según las necesidades del momento. No se trata de dar una lista interminable de resultados, sino de convencer al alumno de que gran parte de los resultados conocidos para la integral de Riemann de funciones escalarmente valuadas se pueden extender a funciones Banach-valuadas, mediante demostraciones rutinarias vía el Teorema de Dunford y el Teorema de Hahn-Banach. Sólo destacamos el siguiente resultado que puede obtenerse directamente del Teorema 3.7.

COROLARIO 3.8. . *Sean X un espacio de Banach complejo, Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to X$ una función holomorfa en Ω. Entonces f tiene derivadas de todos los ordenes en Ω.*

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que algunos de los resultados más familiares de la teoría de funciones complejo-valuadas, pueden dejar de ser ciertos al trasladarlos a funciones vector-valuadas.

EJEMPLO 3.9.. Consideremos el espacio de Banach $\mathbb{C}^2$ provisto de la norma del máximo y $f : D(0,1) \to \mathbb{C}^2$ definida por $f(z) = (1, z)$. Claramente f es una función holomorfa no constante y sin embargo $\|f(z)\| = \text{Max}\{1, |z|\} = 1$, lo que pone de manifiesto que el conocido Principio del módulo máximo deja de ser cierto para funciones holomorfas valuadas en un espacio de Banach. No obstante es fácil probar (ver por ejemplo [**Tayl**, V.1.5]) la siguiente versión de dicho resultado: *Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y $f : \Omega \to X$ una función holomorfa. Si $\|f(z)\|$ alcanza un máximo en Ω, entonces $\|f(z)\|$ es constante en Ω.*

Bibliografía. Veasen los textos [**BoDu3**], [**Chae**], [**Con1**], [**Dieu1**], [**DuSc**], [**HiPh**], [**Rud1**], [**Rud2**] y [**Tayl**]. El alumno interesado en profundizar en las ideas que aparecen en el tema puede consultar por ejemplo [**Con1**], [**HiPh**] y [**Rud2**].

Tema 4

Operadores parcialmente definidos. Operadores cerrados.

Este tema pretende ser una introducción a la teoría de los operadores parcialmente definidos entre espacios de Banach con especial énfasis en los operadores cerrados. A partir del Teorema de la gráfica cerrada se determina cuando un operador cerrado es continuo. Tras definir el operador adjunto T^*, se estudian diversas relaciones entre los dominios y las imagenes de T y su adjunto T^* así como la inversibilidad. Al final del tema se introducen los conceptos de resolvente y espectro y se termina probando que la función resolvente es holomorfa.

Definición 4.1. . *Sean X, Y espacios de Banach. Un* **operador parcialmente definido** *T de X en Y es una aplicación lineal de un subespacio vectorial, el dominio de T $Dom(T)$, de X en Y. Si T es inyectiva en su dominio se dirá que T tiene* **inverso** *y T^{-1} designará el operador parcialmente definido de Y en X con dominio igual a la imagen de T, $Im(T)$, y determinado por $T^{-1}(T(x)) = x, \ \forall T(x) \in Im(T)$. Un operador parcialmente definido se dice* **cerrado** *si su gráfica $\{(x, Tx) : x \in Dom(T)\}$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.*

Como ejemplo de operador cerrado bien conocido por el alumno se puede proponer el operador parcialmente definido $T : f \mapsto f'$ del espacio de Banach $C([0, 1])$ en sí mismo (f derivable con derivada continua). En lo que sigue, X e Y denotarán dos espacios de Banach. Una primera observación obvia será de gran utilidad.

Nota 4.2.. Si un operador cerrado T de X en Y tiene inverso, entonces T^{-1} es también un operador cerrado.

Igualmente será útil la siguiente reformulación del Teorema de la gráfica cerrada.

Proposición 4.3.. *Sea T un operador cerrado del espacio de Banach X en el espacio de Banach Y. Entonces T es continuo si, y sólo si, el dominio de T es cerrado en X. En particular, si T tiene inverso, T^{-1} es continuo si, y sólo si, la imagen de T es cerrada en Y.*

La segunda afirmación es consecuencia de que $Dom(T^{-1}) = Im(T)$ y de que la gráfica de T es cerrada en $X \times Y$ si, y sólo si, la gráfica de T^{-1} es cerrada en $Y \times X$.

Introduciremos ahora el concepto de operador adjunto T^* de un operador parcialmente definido T de X en Y con dominio denso en X.

Definición 4.4.. *Sean X, Y espacios de Banach y T un operador parcialmente definido de X en Y tal que $Dom(T)$ es denso en X. Podemos definir un operador $g \mapsto g \circ T$ del subespacio $\{g \in Y^* : g \circ T \in (DomT)^*\}$ de Y^* en $(DomT)^*$. Como $(DomT)^* = X^*$, definimos $T^*(g)$ como la única extensión por continuidad de $g \circ T$ a X, obteniendo un operador parcialmente definido de Y^* en X^*.*

El interés de esta construcción con respecto a la aparición de operadores cerrados se destaca en el siguiente resultado de demostración elemental.

Proposición 4.5.. *Si T es un operador parcialmente definido de X en Y con dominio denso, entonces T^* es un operador cerrado.*

Si en la proposición anterior T es cerrado, entonces $Dom(T^*)$ es suficientemente grande como se especifica en el siguiente teorema cuya demostración sólo utiliza teoría elemental de dualidad.

Teorema 4.6.. *Si T es un operador cerrado de X en Y con dominio denso, entonces $Dom(T^*)$ es débil-$*$-denso en Y^*.*

Corolario 4.7.. *Sea T un operador cerrado de X en Y con dominio denso en X y supongamos Y reflexivo. Entonces T^* es un operador cerrado de Y^* en X^* con dominio denso en Y^*.*

El mismo tipo de técnicas permite demostrar los resultados que recogemos en el siguiente enunciado.

Proposición 4.8.. *Sea T un operador parcialmente definido de X en Y con dominio denso en X. Entonces se verifica:*

i) $[Im(T)]^{\perp} = Ker(T^*)$ *y en consecuencia* $Im(T) = [Ker(T^*)]_{\perp}$.
ii) $Im(T)$ *es denso en* Y *si, y sólo si,* T^* *tiene inverso.*
iii) *Si* $Im(T^*)$ *es débil-$*$-densa en* X^*, *entonces* T *tiene inverso.*
iv) *Si* T *y* T^* *tienen inverso, entonces* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ *y además* T^{-1} *es continuo si, y sólo si,* $(T^*)^{-1}$ *es continuo.*

Del apartado *iii)* de la proposición anterior y del Teorema de Banach-Steinhaus se obtiene la siguiente caracterización de la continuidad del inverso.

Proposición 4.9.. *Sea T un operador parcialmente definido de X en Y con dominio denso en X. Entonces T tiene inverso continuo si, y sólo si, $Im(T^*) = X^*$.*

Los anteriores resultados nos permiten ahora obtener:

Teorema 4.10.. *Sea T un operador cerrado de X en Y con dominio denso. Entonces T es inyectivo con $Im(T) = Y$ si, y sólo si, T^* es inyectivo con $Im(T^*) = X^*$.*

En lo que sigue X denotará un espacio de Banach complejo, T será un *"operador parcialmente definido en X"* (esto es, un operador parcialmente definido de X en X) e I denotará el operador identidad en X.

Definición 4.11. . *El conjunto* **resolvente**, *$\rho(T)$, de un operador parcialmente definido T de un espacio de Banach complejo X en sí mismo se define como:*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ es inyectivo con imagen densa e inverso continuo}\}.$$

La **función resolvente**, *$\rho(., T)$, de $\rho(T)$ en el álgebra de Banach $BL(X)$ está definida por $\rho(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}$. El* **espectro** *de T, $sp(T)$, se define como el complemento en $\mathbb{C}$ de $\rho(T)$.*

Si T es un operador cerrado, $\lambda \in \rho(T)$ si, y sólo si, $\lambda I - T$ es inyectivo con $Im(\lambda I - T) = X$ (Proposición 4.3). De la definición del espectro y como consecuencia del Teorema 4.10 se tiene:

Corolario 4.12.. *Si T es un operador cerrado de dominio denso entonces $sp(T) = sp(T^*)$.*

Para finalizar el tema demostraremos el siguiente interesante resultado:

Teorema 4.13.. *Si T es un operador cerrado en el espacio de Banach complejo X, el conjunto resolvente $\rho(T)$ es abierto y la función resolvente $\lambda \mapsto \rho(\lambda, T)$ es holomorfa en $\rho(T)$.*

Bibliografía. Para el seguimiento del tema pueden usarse [**BaNa**], [**Davi**], [**DuSc**] y [**HiPh**]. Pueden tambien consultarse [**Istr**] y [**RiNa**] para el peculiar comportamiento de las ideas desarrolladas, en el caso particular de los espacios de Hilbert, cuestión ésta que eventualmente, y en función del tiempo disponible, se podría ampliar al alumno.

Tema 5

Operadores continuos.

En este tema concretamos el estudio hecho en el tema anterior al caso particular de operadores (totalmente definidos) lineales continuos entre espacios de Banach. Un tal operador es siempre trivialmente cerrado y de dominio denso, con lo que todos los resultados del tema anterior le son aplicables. Como se puede imaginar, ahora se tienen ventajas ambientales que permitirán perfeccionar grandemente los resultados. Una tal ventaja, que se usará sin previo aviso, es el hecho de que el adjunto T^* de un operador lineal continuo T de X en Y (espacios de Banach) es ahora un operador lineal continuo (igualmente totalmente definido) de Y^* en X^*. Ello nos permitirá considerar el operador T^{**} de X^{**} en Y^{**} que se recalcará ser una extensión de T (vía las correspondientes inyecciones canónicas, $X \subset X^{**}$, $Y \subset Y^{**}$). También se caracterizará la inversibilidad de un operador en el álgebra de Banach $BL(X)$ de los operadores lineales y continuos sobre un espacio de Banach X.

Como aperitivo convendrá reformular en nuestro nuevo ambiente el contenido de la Proposición 4.9, sin argumento adicional alguno.

PROPOSICIÓN 5.1.. *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in BL(X,Y)$. Entonces T es un homeomorfismo de X sobre su imagen si, y sólo si, T^* es sobreyectivo.*

La consideración de este resultado motiva perfectamente el siguiente, que restablece la simetría respecto al anterior.

TEOREMA 5.2.. *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in BL(X,Y)$. Entonces T es sobreyectivo si, y sólo si, T^* es un homeomorfismo de Y^* sobre su imagen.*

La demostración de la parte *"si"* del anterior teorema puede hacerse como en [**Ber2**, Lemma 57.15 y Theorem 57.16 (a)$\Rightarrow$ (b)] donde en una primera etapa se prueba que T es casi abierto para finalmente concluir su sobreyectividad. En cuanto a la parte *"sólo si"*, puede usarse la descomposición $T = F \circ \pi$, donde π es la proyección canónica de X sobre X/M ($M := Ker(T)$) y F es un homeomorfismo lineal (por el Teorema de los isomorfismos de Banach) de X/M sobre Y, y tener en cuenta la siguiente observación:

Si M es un subespacio cerrado de X, entonces $i \circ \psi = \pi^*$, donde $\psi : (X/M)^* \to M^\perp$ es la identificación natural, $i : M^\perp \to X^*$ es la inclusión y $\pi^* : (X/M)^* \to X^*$ es la traspuesta de π.

Como consecuencia de los dos resultados anteriores se extraerá el siguiente

Corolario 5.3.. *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in BL(X,Y)$. Entonces T es biyectivo si, y sólo si, T^* es biyectivo.*

El corolario anterior merece, desde nuestro punto de vista, una sugestiva reformulación (que no aparece en la bibliografía consultada y que es muy fácilmente asimilable por el alumno debido a su analogía con el Teorema de los isomorfismos de Banach. Para ello convendría reconocer el conjunto $\{T^* : T \in BL(X,Y)\}$ como el conjunto de las funciones lineales débil-$*$-continuas de Y^* en X^* (es decir, funciones continuas de $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ en $(X^*, \sigma(X^*, X))$). Con esta observación se obtiene del Corolario 5.3 el siguiente:

Corolario 5.4.. *Sea F una función lineal biyectiva débil-$*$-continua de Y^* en X^*. Entonces F^{-1} es también débil-$*$-continua.*

La segunda parte del tema está dedicada al estudio de los operadores lineales continuos de un espacio de Banach en sí mismo, esto es, la situación particular en que $X = Y$. Así, $BL(X)$ $(= BL(X,X))$ aparece como álgebra de Banach típica en la que se ejemplificarán y caracterizarán conceptos que se tratarán en profundidad más tarde. Recordamos los conceptos de divisor de cero por la izquierda y por la derecha en un anillo (toda álgebra asociativa es en particular un anillo).

Definición 5.5.. *Un elemento a de un anillo A se dice* **divisor de cero por la izquierda** *(resp.* **por la derecha**, **bilátero***) si existe $x \in A$, $x \neq 0$, verificando que $ax = 0$ (resp. $xa = 0$, $ax = xa = 0$). Si A es un álgebra normada no es más restrictivo exigir que $\|x\| = 1$.*

Establecemos el siguiente resultado elemental.

Proposición 5.6.. *Si $T \in BL(X)$, entonces:*

i) T es divisor de cero por la izquierda en $BL(X)$ si, y sólo si, T no es inyectivo.

ii) T es divisor de cero por la derecha en $BL(X)$ si, y sólo si, $Im(T)$ no es densa en X.

Introduciendo, acto seguido, el concepto de divisor topológico de cero en un álgebra normada se podrá demostrar igualmente una caracterización de los divisores topológicos de cero en el álgebra $BL(X)$.

Definición 5.7.. *Se dice que un elemento a de un álgebra normada A es* **divisor topológico de cero (dtc) por la izquierda** *(resp.* **por la derecha, bilátero***) cuando existe una sucesión $\{x_n\}$ en la esfera unidad de A verificando que $\{\|ax_n\|\} \to 0$ (resp. $\{\|x_n a\|\} \to 0$, $\{\|ax_n\| + \|x_n a\|\} \to 0$).*

PROPOSICIÓN 5.8.. *Si $T \in BL(X)$, entonces T es un dtc por la izquierda en $BL(X)$ si, y sólo si, T no es un homeomorfismo de X sobre su imagen.*

Con el objetivo de caracterizar intrínsecamente los dtc por la derecha de $BL(X)$ establecemos el siguiente lema.

LEMA 5.9.. *T es un dtc por la derecha en $BL(X)$ si, y sólo si, T^* es un dtc por la izquierda en $BL(X)$.*

A partir de este resultado, como consecuencia directa de la Proposición 5.8 y del Teorema 5.2 deducimos:

PROPOSICIÓN 5.10.. *Si $T \in BL(X)$, entonces T es un dtc por la derecha en $BL(X)$ si, y sólo si, T no es sobreyectivo.*

Los resultados hata aquí expuestos confluyen en la siguiente caracterización de los elementos singulares de $BL(X)$.

TEOREMA 5.11.. *Para $T \in BL(X)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
i) T no es inversible en $BL(X)$.
ii) T es divisor de cero por la derecha o dtc por la izquierda en $BL(X)$.
iii) T es divisor de cero por la izquierda o dtc por la derecha en $BL(X)$.

NOTA 5.12.. Las técnicas en las demostraciones de nuestros últimos resultados en el tema son bastante elementales (ver [**Ber2**, Section 57]) y en esencia se reducen a la observación de que la aplicación $T \mapsto T^*$ es un antihomomorfismo isométrico del álgebra $BL(X)$ en el álgebra $BL(X^*)$ y a la oportuna consideración, para $x \in X$ y $f \in X^*$, del operador $x \otimes f \in BL(X)$ definido por
$$(x \otimes f)(y) := f(y)x, \quad \forall y \in X,$$
para el que se verifica $(x \otimes f)^* = f \otimes J_X(x)$ y $\|x \otimes f\| = \|x\| \, \|f\|$.

Bibliografía. Pueden consultarse para este tema elemental los siguientes textos: [**Ber2**], [**DuSc**], [**Istr**], [**Rick**] y [**Wil1**].

Tema 6

Operadores compactos en espacios de Banach. La Teoría de Riesz-Schauder.

Vamos a tratar en este tema una serie de resultados cuyo descubrimiento por F. Riesz en las primeras décadas de este siglo significó en gran medida el nacimiento del Análisis Funcional. El intento de formalizar matemáticamente los trabajos de Fredholm sobre las ecuaciones integrales que llevan su nombre, fue el detonante para el estudio de la teoría espectral de operadores compactos, primero en espacios de Hilbert y después en espacios de Banach más generales.

En una primera parte de este tema tratamos las propiedades básicas de los operadores compactos entre espacios de Banach, discutiendo el problema de la aproximación a un operador compacto por operadores de rango finito. Como resultados un poco más relevantes, probamos que un operador es compacto cuando su imagen está contenida en la de un operador compacto y discutimos brevemente la relación entre operadores compactos y operadores "completamente continuos". Concluimos esta primera parte del tema probando la equivalencia entre la compacidad de un operador y la de su adjunto (Teorema de Schauder). La parte final del tema contiene los resultados más relevantes de la llamada "Teoría de Riesz-Schauder" incluyendo una perfecta descripción del espectro de un operador compacto y la formulación abstracta de la alternativa de Fredholm, cuya versión más clásica se obtiene después como corolario inmediato. En esta última parte, hemos usado el concepto de índice de Fredholm de un operador que facilita las demostraciones.

DEFINICIÓN 6.1.. *Sean X e Y espacios de Banach. Se dice que una aplicación lineal $T : X \to Y$ es un* **operador compacto** *si $\overline{T(B_X)}$ es un subconjunto compacto de Y, equivalentemente, si T transforma cada subconjunto acotado de X en un subconjunto precompacto de Y, o si, para cualquier sucesión acotada $\{x_n\}$ en X, la sucesión $\{Tx_n\}$ admite una parcial convergente. Notaremos $K(X,Y)$ al conjunto de los operadores compactos de X en Y, y escribiremos simplemente $K(X)$ en lugar de $K(X,X)$.*

Ya que la compacidad relativa implica la acotación, es claro que $K(X,Y)$ es un subespacio de $BL(X,Y)$. Si Z es otro espacio de Banach, $T \in BL(X,Y)$, $S \in BL(Y,Z)$, es también evidente que $ST \in K(X,Z)$ siempre que $T \in K(X,Y)$ o $S \in K(Y,Z)$; en particular $K(X)$ es un ideal bilátero del álgebra de Banach $BL(X)$. Si X tiene dimensión infinita, dicho ideal es propio, ya que $I \notin K(X)$ como consecuencia obvia del Teorema generalizado de la esfera de Riesz. Igualmente, del mismo teorema, se sigue que si T es un operador continuo y abierto con imagen infinito-dimensional entonces T no puede ser compacto. En particular, los isomorfismos entre espacios de Banach infinito-dimensionales no son operadores compactos.

El Teorema de Hahn-Banach nos permite construir operadores compactos no nulos entre dos espacios de Banach arbitrarios.

Definición 6.2.. *Si X e Y son espacios de Banach, $u \in X^*$, $v \in Y$ definimos:*

$$[u \otimes v](x) = u(x)v \quad (x \in X).$$

Es claro que $u \otimes v \in BL(X,Y)$, $\|u \otimes v\| = \|u\|\|v\|$; si $u, v \neq 0$, la imagen de $u \otimes v$ es el subespacio unidimensional de Y engendrado por v. En general llamamos **rango** *de un operador $T \in BL(X,Y)$ a la dimensión (algebraica) de la imagen de T. Notamos $F(X,Y)$ al subespacio de $BL(X,Y)$ formado por los* **operadores de rango finito**. *Se tiene que $F(X,Y) \subset K(X,Y)$.*

Si Z es otro espacio de Banach, $T \in BL(X,Y)$ y $S \in BL(Y,Z)$, entonces $ST \in F(X,Z)$ siempre que $T \in F(X,Y)$ o $S \in F(Y,Z)$; en particular $F(X) := F(X,X)$ es un ideal bilátero de $BL(X)$.

Nuestra primera observación no evidente sobre operadores compactos consiste en que $K(X,Y)$ es siempre cerrado en $BL(X,Y)$. También, si $T \in K(X,Y)$, entonces $T(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT(B_X)$ es separable, ya que $T(B_X)$ es separable al ser un espacio métrico precompacto. Agrupamos estas observaciones con otra serie de hechos elementales, en el siguiente enunciado:

Proposición 6.3.. *Sean X e Y espacios de Banach.*

i) $F(X,Y)$ es el subespacio de $BL(X,Y)$ engendrado por el conjunto

$$\{u \otimes v : \ u \in X^*, \ v \in Y\},$$

equivalentemente, todo operador $T \in F(X,Y)$ se expresa en la forma $T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ con $n \in \mathbb{N}$, $u_k \in X^*$, $v_k \in Y$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

ii) $K(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $BL(X,Y)$ y $\overline{F(X,Y)} \subset K(X,Y)$. En particular, $K(X)$ es un ideal bilátero cerrado de $L(X)$.

iii) Si $T \in K(X,Y)$, $\overline{T(X)}$ es un espacio de Banach separable.

La afirmación $\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$ es falsa en general (véase el contraejemplo de Enflo [**Enfl**]). Sin embargo, podemos conformarnos con el siguiente resultado que cubre muchos casos interesantes:

Proposición 6.4. . *Sean X e Y espacios de Banach; supongamos que existe una red $\{S_\lambda\}$ en $F(Y)$ verificando que $\sup_\lambda \{\|S_\lambda\|\} < \infty$ y $\{\|S_\lambda y - y\|\} \to 0$, $\forall y \in Y$. Entonces $K(X,Y) = \overline{F(X,Y)}$. En particular, si Y posee una base de Schauder, se tiene $K(X,Y) = \overline{F(X,Y)}$.*

Una sencilla aplicación del Teorema de la gráfica cerrada nos permitirá obtener fácilmente el hecho, en cierto modo sorprendente, de que la compacidad de un operador puede deducirse con frecuencia del sólo conocimiento de su imagen:

Teorema 6.5.. *Un operador entre espacios de Banach es compacto si (y sólo si) su imagen está contenida en la de un operador compacto. Más concretamente:*

Sean X e Y espacios de Banach, $T \in BL(X,Y)$; si existe un espacio de Banach Z y un operador $S \in K(Z,Y)$ tales que $T(X) \subset S(Z)$, entonces T es compacto.

Observamos a continuación el comportamiento de los operadores compactos con respecto a las topologías débiles, estableciendo que un operador compacto es "más que continuo", que a la vez justifica el sinónimo de operadores "completamente continuos" que a veces se encuentra en la literatura.

Teorema 6.6.. *Sean X e Y espacios de Banach. Si $T \in K(X,Y)$, entonces T es secuencialmente continuo cuando se considera en X la topología débil y en Y la topología de la norma. Si X es reflexivo, es cierto el recíproco.*

Notemos que la hipótesis de reflexividad no puede suprimirse en el Teorema anterior. La identidad de (ℓ_1, w) en $(\ell_1, \|\cdot\|)$ es secuencialmente continua y no es un operador compacto. En la demostración anterior ha aparecido una idea que merece ser destacada, es nueva incluso para espacios de Hilbert:

Corolario 6.7.. *Si X es un espacio de Banach reflexivo, Y un espacio de Banach arbitrario y $T \in K(X,Y)$, entonces la imagen por T de la bola cerrada unidad de X es cerrada.*

Concluimos nuestro breve estudio general de los operadores compactos entre espacios de Banach con el siguiente resultado importante:

Teorema 6.8.. **(Schauder).** *Sean X e Y espacios de Banach; un operador $T \in BL(X,Y)$ es compacto si, y sólo si, lo es T^*.*

Pasamos a considerar ahora la teoría espectral para los operadores compactos en espacios de Banach. Los resultados que siguen se deben a F. Riesz, salvo los que involucran al operador adjunto, que de alguna forma precisan el teorema anterior y se deben a J. Schauder, de ahí el nombre de "Teoría de Riesz-Schauder" con que se conocen estos resultados, a los que el Análisis Funcional debe en gran medida su propia existencia.

Teorema 6.9.. *Sean X un espacio de Banach complejo, $T \in K(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.*

i) El espacio $\ker(\lambda I - T)$ es finito-dimensional.

ii) El espacio $(\lambda I - T)(X)$ es cerrado y

$$[\ker(\lambda I - T)]^\circ = (\lambda I - T^*)(X^*)$$

$$[\ker(\lambda I - T^*)]^\circ = (\lambda I - T)(X),$$

donde los polares se toman en el par dual (X, X^*).

Si $T : X \longrightarrow X$ es una aplicación lineal, la sucesión de espacios $\ker T^n$ es creciente. Si $\ker T^n \neq \ker T^{n+1}$ para todo n, diremos que el **ascendente** de T es $+\infty$; en otro caso, diremos que T tiene **ascendente finito** y se define su ascendente como el menor natural n tal que $\ker T^n = \ker T^m$ para todo m posterior a n. La sucesión $T^n(X)$ es decreciente; si no estaciona se dice que T tiene **descendente** infinito, en otro caso, se define el descendente como el mínimo natural n tal que $T^n(X) = T^m(X)$ para todo m posterior a n. En el resultado que sigue usaremos el Lema de Riesz clásico.

Teorema 6.10.. *Si T es un operador compacto en un espacio de Banach X, entonces para $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se verifica que $\lambda I - T$ tiene ascendente y descendente finito.*

Definición 6.11.. *Un operador $T \in BL(X,Y)$ (X, Y espacios de Banach) se dice de* **Fredholm** *si el subespacio $\ker T$ tiene dimensión finita y $T(X)$ tiene codimensión finita. En este caso, se define el* **índice de Fredholm** *de T ($\mathrm{Ind}\ T$) como la diferencia entre la dimensión de $\ker T$ y la codimensión de $T(X)$.*

El siguiente resultado es fundamental en la teoría de Fredholm:

Proposición 6.12. . *Sean $T : X \longrightarrow Y$ y $S : Y \longrightarrow Z$ aplicaciones lineales de Fredholm. Entonces ST es Fredholm y se verifica que $\mathrm{Ind}\ ST = \mathrm{Ind}\ S + \mathrm{Ind}\ T$.*

Damos la siguiente inmediata aplicación del concepto de índice de Fredholm:

Teorema 6.13.. *Sean X un espacio de Banach, $T \in K(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.*

i) El operador $\lambda I - T$ es de Fredholm y tiene índice cero.

ii) Si n es el ascendente finito de $\lambda I - T$, entonces $X = \ker(\lambda I - T)^n \oplus (\lambda I - T)^n(X)$.

Corolario 6.14.. *El operador $\lambda I - T$ es inyectivo si, y sólo si, es sobreyectivo.*

Disponemos ya de todos los elementos para conseguir la siguiente descripción del espectro de un operador compacto:

Teorema 6.15.. *Sea T un operador compacto en un espacio de Banach complejo X, entonces el espectro de T es compacto numerable, todo elemento $\lambda \neq 0$ del espectro es un autovalor de T (esto es, $Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$) y el origen es su único posible punto de acumulación. Además si λ es un autovalor no nulo de T, entonces*

$$\dim\ \ker(\lambda I - T) = \dim\ \ker(\lambda I - T^*).$$

La información dada por el anterior teorema sobre el espectro de un operador compacto es imperfeccionable en el sentido de que todo compacto K de $\mathbb{C}$ que contenga a cero como único (eventual) punto de acumulación es el espectro de algún operador compacto. Siendo fácil el caso en que K es finito, el resto se sigue de la siguiente proposición, donde como es usual el símbolo $x \otimes y$, para x, y en un espacio de Hilbert X, designa el operador en X de rango uno dado por $(x \otimes y)(z) := (z|y)x$, $(z \in X)$.

Proposición 6.16.. *Sean $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números complejos convergente a cero, X un espacio de Hilbert complejo infinito-dimensional y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal en X. Entonces la serie $\sum \lambda_n\, x_n \otimes x_n$ converge en la topología de la norma de $BL(X)$ y $T := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, x_n \otimes x_n$ es un operador compacto en X cuyo espectro es $\{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Es fácil ver que el operador T en la anterior proposición es **normal** ($T^*T = TT^*$) y **diagonalizable** (existe una base ortonormal $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de X tal que todos sus elementos son autovectores o vectores propios para T: $\forall\lambda \in \Lambda \ \ \exists\alpha_\lambda \in \mathbb{C} \ / \ Te_\lambda = \alpha_\lambda e_\lambda$). Este hecho no es anecdótico y motiva perfectamente la presentación del siguiente resultado importante.

Teorema 6.17.. ([**Con2**, Theorem II.7.6]). *Para cada operador compacto normal T en un espacio de Hilbert complejo (infinito-dimensional) X existe un sistema ortonormal numerable $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión de números complejos $\{\lambda_n\}$ convergente a cero tales que $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, x_n \otimes x_n$.*

Particularizando a operadores simétricos, recordando que el adjunto de un operador compacto en un espacio de Hilbert es también compacto y observando que para cada operador $T \in BL(X)$ se tiene $T = S_1 + iS_2$ con $S_1 := \frac{1}{2}(T + T^*)$ y $S_2 := \frac{1}{2i}(T - T^*)$ simétricos, obtenemos:

Corolario 6.18.. *$K(X) = \overline{F(X)}$, esto es, todo operador compacto en un espacio de Hilbert complejo es límite en la topología de la norma de una sucesión de operadores lineales continuos de rango finito.*

Nada mejor para concluir este tema que un brillante ejemplo de aplicación del Teorema 6.15. Daremos precisamente el ejemplo que motivó a F. Riesz para crear su teoría:

Ejemplo 6.19.. Sea $X = C[a, b]$ el espacio de Banach de las funciones complejas continuas en un intervalo compacto $[a, b]$ de la recta real. Consideremos una función continua

$$k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$$

y pongamos

$$[Tx](s) = \int_a^b k(s, t)x(t)\, dt \qquad (x \in X, a \le s \le b).$$

Es fácil ver que $Tx \in X$ para $x \in X$, y de hecho $T \in BL(X)$, verificándose

$$\|Tx\| \le M\|x\| \qquad (x \in X)$$

donde $M = \max\{|k(s, t)| : s, t \in [a, b]\}$. El operador T así definido recibe el nombre de **operador integral de Fredholm** de núcleo k. Aplicando el Teorema de Ascoli-Arzelá se comprueba que T es un operador compacto. Para sacar todo el partido posible, es conveniente hacer la siguiente observación acerca del operador adjunto T^*. Consideremos la aplicación $J : X \to X^*$ definida por

$$[Jx](y) = \int_a^b y(t)x(t)\, dt.$$

Es claro que $Jx \in X^*$ para $x \in X$ y se prueba fácilmente que

$$\|Jx\| = \int_a^b |x(t)|\ dt$$

con lo que la aplicación J es inyectiva. Aplicando el Teorema de Fubini, para $x, y \in X$ tenemos:

$$[T^* Jx]\,(y) = \left[J(\widehat{T}x)\right](y)$$

donde $\widehat{T}$ es el operador integral de Fredholm cuyo núcleo $\widehat{k}$ viene dado por

$$\widehat{k}(s,t) = k(t,s) \qquad (s,t \in [a,b]).$$

Así pues $T^*J = J\widehat{T}$ y las propiedades de T^* que resultan del Teorema 6.15 pueden traducirse en términos de $\widehat{T}$.

Aplicando el Teorema 6.15, y teniendo en cuenta las observaciones del ejemplo anterior obtenemos:

Corolario 6.20.. **(Alternativa de Fredholm).** *Sea $[a,b]$ un intervalo compacto en la recta real, $k : [a,b]^2 \to \mathbb{C}$ una función continua y μ un número complejo no nulo.*

Se verifica una de las siguientes afirmaciones:

a) *Las ecuaciones*

$$x(s) = y(s) + \mu \int_a^b k(s,t)x(t)\ dt \qquad a \leq s \leq b \tag{6.1}$$

$$x(s) = y(s) + \mu \int_a^b k(t,s)x(t)\ dt \qquad a \leq s \leq b \tag{6.2}$$

tienen solución única $x \in C[a,b]$ para cada $y \in C[a,b]$.

b) *Las ecuaciones*

$$x(s) = \mu \int_a^b k(s,t)x(t)\ dt \qquad a \leq s \leq b \tag{6.3}$$

$$x(s) = \mu \int_a^b k(t,s)x(t)\ dt \qquad a \leq s \leq b \tag{6.4}$$

tienen soluciones $x \in C[a,b]$ no idénticamente nulas.

Si se verifica b), las soluciones de las ecuaciones (6.3) y (6.4) son subespacios de $C[a,b]$ con la misma dimensión finita; fijada $y \in C[a,b]$, la ecuación (6.1) (resp. (6.2)) tiene solución $x \in C[a,b]$ si, y sólo si, $\int_a^b y(s)z(s)\ ds = 0$ para cualquier solución z de la ecuación (6.4) (resp. (6.3)).

Finalmente, el conjunto de los números complejos no nulos μ para los cuales se verifica b) es numerable y carece de puntos de acumulación.

Bibliografía. La literatura sobre un tema tan clásico como el de los operadores compactos entre espacios de Banach es amplísima. En la primera parte, nuestra exposición es bastante similar a la que aparece en los textos de Conway [**Con2**, §VI.3], Dunford-Schwartz [**DuSc**, §VI.5] y Taylor-Lay [**TaLa**, §V.7]. El libro de Diestel [**Dies**, Chapter I,II] también merece ser consultado, pues contiene varios ejercicios muy interesantes.

Para la teoría de Riesz-Schauder, hemos seguido el ejemplo del texto de Murphy [**Murp**, §I.4]. Pensamos que trabajar usando el concepto de índice de Fredholm puede aligerar un poco las demostraciones sobre la descripción del espectro de un operador compacto. El texto de Brown-Page [**BrPa**, §6.6] contiene la prueba más elemental del teorema de descripción del espectro de un operador compacto, por tanto más en el espíritu de las demostraciones originales. El Corolario 6.20 se ha tomado también, literalmente, del texto de Brown-Page [**BrPa**, §6.8]. Otros textos de consulta son [**Dieu1**], [**HiPh**] y [**RiNa**].

0

ÁLGEBRAS DE BANACH.

Capítulo II

Teoría general de álgebras de Banach.

Tema 7

Álgebras normadas. Unitización. Renormaciones equivalentes y radio espectral. Complexificación.

Comenzamos en este capítulo lo que hoy denominamos "Teoría Espectral", parte fundamental del Análisis Funcional y de hecho, históricamente, la parte más antigua. A pesar de que la teoría espectral nace al mismo tiempo que el propio Análisis Funcional (operadores en espacios de Hilbert) y de que, sin temor a exagerar, puede decirse que cualquier espacio de Banach clásico está provisto de forma más o menos natural de un producto que le convierte en álgebra de Banach, el estudio abstracto de las álgebras de Banach tiene un origen relativamente reciente, que puede fecharse en 1940, cuando se publican los trabajos pioneros de I. Gelfand.

El presente tema tiene un carácter principalmente preparatorio. Precisamos gran parte de la nomenclatura algebraica que va a usarse en este capítulo e introducimos formalmente el concepto abstracto de álgebra de Banach. Repasamos los procedimientos canónicos (renormación equivalente, completación, unitización, paso a cociente por un ideal cerrado, la complexificación de un álgebra normada real) que permiten, hasta cierto punto, como suele ocurrir con este tipo de procedimientos, mejorar progresivamente las propiedades de un álgebra normada hasta situarse en el caso más agradable: un álgebra de Banach compleja unital. De paso obtenemos un resultado bastante vistoso, debido a Gelfand, que a veces se conoce como "teorema de la representación regular" y que muestra cualquier álgebra normada (asociativa) como subálgebra del álgebra $BL(X)$ de los operadores lineales y continuos en un espacio de Banach X. Asímismo, la consideración de todas las normas de álgebra equivalentes a la norma de un álgebra normada nos lleva a introducir el concepto de radio espectral de un elemento, del que estudiamos sus primeras propiedades.

Todas las álgebras que van a aparecer en este capítulo son álgebras asociativas reales o complejas. Concretamos por tanto el significado que tendrá la palabra *"álgebra"* junto con alguna nomenclatura de caracter puramente algebraico:

Definición 7.1. . *Diremos que un espacio vectorial A es un* **álgebra** *cuando se tenga definida una aplicación bilineal de $A \times A$ en A, llamada* **producto** *y denotada por yuxtaposición, $(a, b) \mapsto ab \quad (a, b \in A)$, que sea* **asociativa***, esto es, $(ab)c = a(bc)$ $(a, b, c \in A)$.*

Dados dos subconjuntos no vacíos M y N de A escribiremos

$$MN = \{xy \ : \ x \in M, \ y \in N\}.$$

Una **subálgebra** *de A es un subespacio vectorial M de A que verifica $MM \subset M$. Si de hecho se tiene que $AM \subset M$ y $MA \subset M$ diremos que M es un* **ideal** *de A. Un álgebra A se dice* **simple** *si es de producto no nulo y $\{0\}$ y A son los únicos ideales.*

Si ahora B es otra álgebra sobre el mismo cuerpo que A, una aplicación lineal

$$T : A \to B \ / \ T(xy) = T(x)T(y) \quad (x, y \in A)$$

recibirá el nombre de **homomorfismo de álgebras**. *Cuando T sea inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva) diremos que T es un* **monomorfismo** *(resp.* **epimorfismo**, **isomorfismo** *) de álgebras. Si $T : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras, $T(A)$ es una subálgebra de B y $\ker T$ es un ideal de A. También, si M es un ideal de un álgebra A, entonces el espacio vectorial cociente A/M es un álgebra para el producto definido por*

$$(x + M)(y + M) = xy + M \qquad (x, y \in A),$$

denominada **álgebra cociente** *de A por M, y la proyección canónica $Q : A \to A/M$ es un epimorfismo de álgebras con $\ker Q = M$. En general, si $T : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras, $A/\ker T$ y $T(A)$ son naturalmente álgebras isomorfas.*

Una **unidad** *para un álgebra A es un elemento $e \in A$ (evidentemente único) que verifica $ea = ae = a \quad (a \in A)$. Si M es un ideal de A, entonces $e + M$ es la unidad del álgebra cociente A/M.*

Dada un álgebra A sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, podemos considerar el espacio vectorial $A \times \mathbb{K}$, que es un álgebra con el producto definido por

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$$

para $a, b \in A, \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Es inmediato que $A \times \mathbb{K}$ con este producto es un álgebra con unidad $e = (0, 1)$, que recibe el nombre de **unitización** *de A y se denota por A_1. La aplicación $a \mapsto (a, 0)$ de A en A_1 es un monomorfismo de álgebras y su imagen $A \times \{0\}$ es un ideal de A_1. Es costumbre identificar A con $A \times \{0\}$ y considerar A como un ideal de A_1. Cada elemento $x \in A_1$ se expresa entonces de manera única, en la forma $x = a + \lambda e$ con $a \in A$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Finalmente diremos que un álgebra A es **conmutativa** *cuando lo sea su producto, esto es $ab = ba \quad (a, b \in A)$. Es claro que la conmutatividad se hereda por subálgebras y se conserva en el paso a cociente y en el paso de un álgebra a su unitización.*

Si en un álgebra A disponemos de una norma $\|\cdot\|$, el axioma natural de buena avenencia entre la norma y el producto de A consiste en que el producto sea una aplicación bilineal continua, esto es, que exista una constante $M > 0$ tal que

$$\|ab\| \leq M\|a\| \, \|b\| \quad (a, b \in A).$$

Poniendo $|a| := M\|a\| \quad (a \in A)$, tenemos una norma equivalente en A que verifica

$$|ab| \leq |a| \, |b| \quad (a, b \in A),$$

luego no es restrictivo suponer que $M = 1$.

Definición 7.2.. *Se dice que una norma* $\|\cdot\|$ *en un álgebra* A *es* **submultiplicativa**, *o que es una* **norma de álgebra** *cuando verifica que*

$$\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\| \quad (a, b \in A)$$

y diremos también que $(A, \|\cdot\|)$, *o simplemente* A, *es un* **álgebra normada**. *Si, además, la norma* $\|\cdot\|$ *es completa, decimos que* A *es un* **álgebra de Banach**. *Dos álgebras normadas* A *y* B *se dirán* **topológicamente isomorfas** *cuando exista un isomorfismo topológico de* A *sobre* B *que sea también un isomorfismo de álgebras. Dos álgebras normadas* **isométricamente isomorfas** *son idénticas a todos los efectos.*

Si un álgebra normada $A \neq \{0\}$ *posee unidad* e, *entonces claramente* $\|e\| \geq 1$. *Diremos que un álgebra normada* A *es* **unital** *si tiene unidad* e, *verificándose que* $\|e\| = 1$.

Ejemplos 7.3..

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales y la norma determinada por el valor absoluto o el módulo respectivamente, es un álgebra de Banach unital.
2. $BL(X)$, el álgebra de los operadores lineales y acotados de un espacio normado X en sí mismo con la norma de operadores y la composición como producto es un álgebra normada unital. Además $BL(X)$ es un álgebra de Banach si, y sólo si, X es un espacio de Banach.
3. Sea A un álgebra normada. Toda subálgebra de A es un álgebra normada. Como se recogerá en la Proposición 7.4, el cierre de una subálgebra es un álgebra normada y, si I es un ideal cerrado de A, el álgebra cociente A/I con la norma cociente también es un álgebra normada. El álgebra cociente A/I es unital si lo es A e $I \neq A$. Además A/I es de Banach si A lo es.
4. $\ell_\infty^S(\mathbb{K}) = \ell_\infty^S$, el conjunto de todas las aplicaciones acotadas de un conjunto arbitrario prefijado S en $\mathbb{K}$ con las operaciones algebraicas definidas puntualmente y la norma del supremo es un álgebra de Banach unital.
5. Si Ω es un espacio topológico Hausdorff, el conjunto $C_b(\Omega)$ de todas las funciones continuas, acotadas y complejo valuadas sobre Ω es una subálgebra cerrada de $\ell_\infty^\Omega(\mathbb{C})$. Así pues $C_b(\Omega)$ es un álgebra de Banach unital. Si Ω es compacto, $C(\Omega)$, el conjunto de todas las funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}$, es igual a $C_b(\Omega)$.
6. $C_0(\Omega)$, el álgebra de las funciones complejas continuas sobre un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto Ω que se anulan en el infinito (es decir, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\{x \in \Omega \ : \ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto), con las operaciones definidas puntualmente y la norma uniforme es un álgebra de Banach unital (es una subálgebra cerrada de $C_b(\Omega)$). Claramente $C_0(\Omega)$ es unital si Ω es compacto, en cuyo caso $C_0(\Omega) = C(\Omega)$.
7. $A(\mathbb{D})$, el álgebra de todas las funciones continuas en el disco unidad cerrado de $\mathbb{C}$ que son holomorfas en su interior es una subálgebra cerrada de $C(D)$ que se conoce como el **álgebra disco**.
8. $L_1(\mathbb{R})$, el álgebra de las funciones complejas integrables Lebesgue en $\mathbb{R}$ con la norma $\|f\| = \int |f|$ y el **producto de convolución**

$$(f * g)(s) = \int f(t) g(s-t) dt \quad (s \in \mathbb{R})$$

es conocida como el **álgebra grupo** de $\mathbb{R}$.

9. W, el álgebra de las funciones de la forma:

$$f(t) \ = \ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \ \exp(ikt)$$

con $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < \infty$, con las operaciones definidas puntualmente y norma $\|f\| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|$, llamada el **álgebra de Wiener**.

La primera parte del siguiente enunciado se deduce claramente de la continuidad del producto en un álgebra normada. Para la segunda, aparte de una comprobación rutinaria, se debe recordar que el cociente de un espacio normado (resp. de Banach) por un subespacio cerrado, es un espacio normado (resp. de Banach).

PROPOSICIÓN 7.4..
i) *En un álgebra normada el cierre de una subálgebra (resp. ideal) es una subálgebra (resp. ideal).*
ii) *Si A es un álgebra normada (resp. de Banach) e I es un ideal cerrado de A, entonces el álgebra cociente A/I es un álgebra normada (resp. de Banach) con la norma cociente.*

Bueno será comentar brevemente las construcciones que permiten conseguir ciertas perfecciones. La completación de un álgebra normada se obtiene fácilmente a partir de la de un espacio normado, usando el teorema de extensión de aplicaciones bilineales continuas:

PROPOSICIÓN 7.5.. *Si A es un álgebra normada, existe un álgebra de Banach $\hat{A}$ y un isomorfismo isométrico de álgebras ϕ de A sobre una subálgebra densa de $\hat{A}$. El par $(\hat{A}, \phi)$ es único salvo isomorfismo isométrico de álgebras y se dice que $\hat{A}$ es la* ***completación*** *del álgebra normada A. Suele identificarse A con $\phi(A)$ y considerar A como una subálgebra densa de $\hat{A}$. Si A tiene unidad e, entonces e también es unidad de $\hat{A}$; $\hat{A}$ es conmutativa (asociativa) si, y sólo si, lo es A.*

La unitización de un álgebra normada puede convertirse de varias formas en un álgebra normada. La siguiente es la más sencilla.

PROPOSICIÓN 7.6.. *Sea A un álgebra normada; definiendo*

$$\|a + \lambda e\| = \|a\| + |\lambda| \qquad (a \in A, \lambda \in \mathbb{K})$$

se obtiene una norma de álgebra en la unitización A_1 del álgebra A, que convierte a A_1 en un álgebra normada unital y hace que A sea un ideal cerrado de A_1. Además A_1 es completa si, y sólo si, lo es A.

El siguiente enunciado recoge algunas propiedades de la que suele denominarse **representación regular** de un álgebra normada. En particular obtenemos que un álgebra normada con unidad puede renormarse equivalentemente para hacerla unital. La demostración es completamente elemental.

Proposición 7.7.. *Sea A un álgebra normada. Para cada $a \in A$ consideremos el* **operador de multiplicación** *por la izquierda por a, esto es, la aplicación $L_a : A \to A$ dada por $L_a(x) = ax \quad (x \in A)$. Entonces:*

i) $L_a \in BL(A)$ *y* $\|L_a\| \leq \|a\| \quad \forall a \in A$.
ii) La aplicación $\lambda : A \to BL(A)$ definida por $\lambda(a) = L_a \quad (a \in A)$, es un homomorfismo de álgebras continuo.
iii) Si A tiene unidad $e \neq 0$, entonces λ es un monomorfismo topológico ($\|e\|^{-1}\|a\| \leq \|L_a\| \leq \|a\|$). Por tanto, definiendo $|a| = \|L_a\| \quad (a \in A)$ se obtiene una norma equivalente en A con la cual A es un álgebra normada unital.
iv) Si A es unital, entonces λ es isométrica.

El álgebra normada $BL(X)$ es algo más que un simple ejemplo como pone de manifiesto el siguiente corolario, deducido de las tres proposiciones anteriores, resultado que, aunque bastante vistoso, tiene una utilidad bastante limitada, como suele ocurrir con este tipo de teoremas de representación tan generales.

Corolario 7.8. **(Gelfand).** *Si A es un álgebra normada, existe un espacio de Banach X y un isomorfismo de álgebras, isométrico, de A sobre una subálgebra de $BL(X)$.*

El hecho de que la norma de la unidad de un álgebra normada valga uno es de suma utilidad, de ahí el interés del apartado *iii)* de la anterior proposición. Dicho resultado puede también obtenerse a partir del siguiente resultado general tomando $S = \{e\}$.

Teorema 7.9.. [**BoDu3**, Theorem 4.1]. *Sea A un álgebra normada y S un subsemigrupo (multiplicativo) de A. Entonces existe una norma p equivalente a la dada en A que es submultiplicativa y tal que $p(s) \leq 1 \quad \forall s \in S$. Además, si A tiene unidad e, entonces podemos tomar p tal que $p(e) = 1$.*

El concepto de radio espectral de un elemento de un álgebra normada juega un importante papel en la teoría. Nuestro próximo objetivo va a consistir en probar que es un invariante algebraico-topológico y que es una seminorma de álgebra si el álgebra es conmutativa.

Teorema 7.10.. **(Beurling)** [**BoDu3**, Proposition 2.8]. *Sea A un álgebra normada. Para todo a en A la sucesión $\{\|a^n\|^{1/n}\}$ es convergente con límite igual a $inf\{\|a^n\|^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$.*

Definición 7.11. *Para todo elemento a de un álgebra normada, el número* $lim\{\|a^n\|^{1/n}\}$ $(= inf\{\|a^n\|^{1/n} \ : \ n \in \mathbb{N}\})$ *se llama* **radio espectral** *de a y se nota $r(a)$.*

A pesar de su definición en términos de la norma, el radio espectral de un elemento es el mismo para todas las normas equivalentes, tratándose de un invariante algébrico-topológico. De hecho la prueba del Teorema 7.10 depende exclusivamente de la asociatividad de las potencias y de la submultiplicidad de la norma. En consecuencia, para toda norma de álgebra p equivalente a la dada tenemos:

$$r(a) = lim\{\|a^n\|^{1/n}\} = lim\{p(a^n)^{1/n}\} = inf\{p(a^n)^{1/n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Como consecuencia del Teorema 7.9 obtenemos

Corolario 7.12..

i) [**BoKa**] *Sea A un álgebra normada (con unidad), N el conjunto de todas las normas de álgebra sobre A equivalentes a la dada (y que en la unidad valen 1). Entonces para todo elemento a en A se verifica que*

$$r(a) = inf\{p(a) \ : \ p \in N\}.$$

ii) Sean a, b elementos de un álgebra normada A que commutan entre sí, $ab = ba$. Entonces

$$r(a+b) \leq r(a) + r(b), \quad r(ab) \leq r(a)r(b).$$

Por último nos ocupamos del proceso de **complexificación**. La complexificación de un álgebra normada real A consiste en sumergir isométrica y $\mathbb{R}$-isomórficamente dicha álgebra A en una cierta álgebra normada compleja. La parte algebraica es muy simple: en el conjunto producto $A \times A$ se definen las operaciones dadas por $(a, b, u, v \in A; \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$(a, b) + (u, v) = (a + u, b + v)$$
$$(\alpha + \beta i)(a, b) = (\alpha a - \beta b, \alpha b + \beta a)$$
$$(a, b)(u, v) = (au - bv, av + bu)$$

Con estas operaciones $A \times A$ es un álgebra compleja, notada $A_{\mathbb{C}}$, y llamada **álgebra complexificada** de A. La aplicación $a \mapsto (a, 0)$ de A en $A_{\mathbb{C}}$ es un $\mathbb{R}$-homomorfismo inyectivo de álgebras. Más difícil es el problema de dotar a $A_{\mathbb{C}}$ de una norma de álgebra tal que la inmersión $a \mapsto (a, 0)$ de A en $A_{\mathbb{C}}$ sea isométrica.

Proposición 7.13.. [**BoDu3**, Proposition 13.3]. *Sean $(A, \|.\|)$ un álgebra normada real y $A_{\mathbb{C}}$ la complexificación de A. Sean $U = \{a \in A \ : \ \|a\| < 1\}$, $V = |co|(U \times \{0\})$ (la envolvente absolutamente convexa de $U \times \{0\}$ en $A_{\mathbb{C}}$) y p el funcional de Minkowski de V. Entonces*

i) p es una norma de álgebra sobre $A_{\mathbb{C}}$.
ii) $p(a, 0) = \|a\|$ $(a \in A)$.
iii) $(A_{\mathbb{C}}, p)$ es completa si, y sólo si, $(A, \|.\|)$ es completa.

El álgebra $(A_{\mathbb{C}}, p)$ suele llamarse **complexificación normada** de $(A, \|.\|)$.

Bibliografía. De los textos consultados, el de Zelazko [**Zela**] se ocupa de algunas cuestiones referentes a álgebras topológicas de diverso tipo. Salvo este detalle los demás textos son muy parecidos en el tratamiento de este tema: [**Ber2**], [**BoDu3**], [**GeRS**], [**Naim**], [**Rick**] y [**Rud2**].

Tema 8

Elementos Inversibles y casi-inversibles. Teoremas de Nagumo y Lorch.

Uno de los objetivos de este tema es probar la *"abundancia"* de elementos inversibles en un álgebra de Banach con unidad A, pues se demuestra que el conjunto de dichos elementos, que notaremos por $Inv(A)$, es un abierto de A y que la operación de paso a inverso es Frechet diferenciable, resultando así que $Inv(A)$ con la topología inducida es un grupo topológico con respecto a la multiplicación. Sin embargo no cabe esperar que el conocimiento del grupo $Inv(A)$ determine la estructura del álgebra (si A no es commutativa, ella y el algebra revertida A^o son antiisomorfas y sin embargo $Inv(A) = Inv(A^o)$). También es cierto que el conocimiento de $Inv(A)$ proporciona importante información sobre el álgebra.

Con el pretexto de destacar un subconjunto distinguido de dicho grupo se introduce la función exponencial (quizás una de las más importantes en la teoría de las álgebras de Banach). El Teorema de Nagumo afirma que $exp(A) := \{exp(a) \ : \ a \in A\}$ es la unión de todos los subgrupos abelianos conexos de $Inv(A)$. El Teorema de Lorch establece que, cuando A es compleja y conmutativa, el grupo $Inv(A)$ o bien es conexo o tiene infinitas componentes conexas, siendo éste un primer resultado que pone de manifiesto una diferencia entre el caso complejo y el real en la teoría de la álgebras de Banach.

Los resultados antes expuestos no tienen sentido cuando el álgebra carece de unidad. Se podrían aplicar los anteriores resultados al álgebra unitizada de A e interpretarlos en términos del álgebra original A. No obstante, es más fácil e instructivo idear un procedimiento que permita realizar esto de forma intrínseca a A definiendo una nueva operación en A llamada casi-producto.

Definición 8.1.. *Si A es un álgebra con unidad e, un elemento $a \in A$ es* **inversible** *o* **regular** *en A cuando existe $b \in A$ tal que $ab = ba = e$; el tal elemento b es único, se le denomina* **inverso** *de a y escribimos $b = a^{-1}$. Un elemento no inversible es llamado* **singular**. *Notaremos por $Inv(A)$ al conjunto de los elementos inversibles de A.*

Es claro que $Inv(A)$, con el producto heredado de A, es un grupo (multiplicativo).

En lo que sigue A denotará un álgebra normada real o compleja y siempre que en un enunciado nos refiramos al grupo $Inv(A)$ deberá entenderse que implícitamente se está suponiendo que A tiene unidad a la que denotaremos por e.

El siguiente lema recoge una serie de desigualdades de frecuente uso.

Lema 8.2.. *Para $a, b \in Inv(A)$ se verifica:*

i) $\|b^{-1} - a^{-1}\| \leq \|b^{-1}\| \, \|a^{-1}\| \, \|a - b\|$.

ii) $\left| \frac{1}{\|a^{-1}\|} - \frac{1}{\|b^{-1}\|} \right| \leq \|a - b\|$.

Si además $\|a-b\| \leq \frac{1}{2}\|a^{-1}\|^{-1}$, *entonces también se verifica:*

iii) $\|b^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|$.

iv) $\|b^{-1} - a^{-1}\| \ \leq \ 2\,\|a^{-1}\|^2 \ \|a-b\|$.

v) $\|a^{-1} - b^{-1} + b^{-1}(a-b)b^{-1}\| \ \leq \ 2\,\|a^{-1}\|^2 \ \|b^{-1}\|\,\|a-b\|^2$.

Como consecuencia del apartado *iv)* se obtiene la siguiente proposición que fue probada por primera vez por Arens.

PROPOSICIÓN 8.3.. *Con la topología inducida por la topología de la norma de* A, $Inv(A)$ *es un grupo topológico y la aplicación* $a \mapsto a^{-1}$ *es un homeomorfismo de* $Inv(A)$ *sobre sí mismo.*

Como es bien conocido y elemental, si α es un número complejo de módulo menor que uno, entonces la serie $\sum_{n\geq 0}\alpha^n$ es absolutamente convergente y su suma es $(1-\alpha)^{-1}$. Esta propiedad se puede trasladar *"mutatis mutandis"* al caso de álgebras de Banach con unidad.

PROPOSICIÓN 8.4.. *Sea* A *un álgebra de Banach unital y sea* e *la unidad de* A. *Si* $a \in A$ *y* $\|a\| < 1$, *entonces* $e - a \in Inv(A)$ *y* $(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

Este resultado tiene una consecuencia importante acerca de los ideales de un álgebra de Banach con unidad (resultado que, sin más que utilizar la representación regular izquierda, puede establecerse a nivel no asociativo general). De paso consideramos los cocientes de una tal álgebra:

COROLARIO 8.5.. *Sea* A *un álgebra de Banach con unidad (unital). Si* M *es un ideal* **propio** *de* A, *esto es* $(M \neq A)$, *se tiene* $dist(e,M) \geq 1$ $(dist(e,M) = 1)$. *Como consecuencia,* $\overline{M}$ *es un ideal propio de* A *y todo ideal maximal de* A *es cerrado. El cociente de* A *por un ideal propio cerrado, con la norma cociente, es un álgebra normada completa con unidad (unital).*

La Proposición 7.10 nos va a permitir afinar un poquito más la última proposición (obsérvese que $r(a) \ \leq \ \|a\|$).

PROPOSICIÓN 8.6.. *Sea* A *un álgebra de Banach unital y sea* e *la unidad de* A. *Si* $a \in A$ *y* $r(a) < 1$, *entonces la serie* $\sum_{n\geq 0} a^n$ *es convergente,* $e - a \in Inv(A)$ *y se verifica que* $(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

Resaltamos la importancia de la hipótesis de complitud en este resultado (recuérdese que un espacio normado es completo si, y sólo si, toda serie normalmente convergente es convergente). Observemos de pasada que si $lim\ a^n = 0$ entonces $r(a) < 1$ por lo que, cuando A es completa, se tiene la curiosa equivalencia:

$$\sum_{n\geq 0} a^n \text{ converge } \Leftrightarrow lim\ a^n = 0.$$

De los resultados anteriores se deduce el siguiente teorema.

TEOREMA 8.7.. *Sea A un álgebra de Banach unital y sea e la unidad de A.*

i) *$Inv(A)$ es un subconjunto abierto de A. Concretamente, si $a \in Inv(A)$ entonces la bola abierta $B(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|})$ está contenida en $Inv(A)$.*

ii) *La aplicación $J : Inv(A) \to A$ dada por $J(a) = a^{-1}$ es Frechet-difereciable y se verifica:*

$$DJ(a)(x) = -a^{-1}xa^{-1}$$

para cualesquiera $a \in Inv(A)$, $x \in A$. En particular la aplicación $\lambda \mapsto (a+\lambda e)^{-1}$, definida en un entorno del cero en el cuerpo base, es derivable en $\lambda = 0$ con derivada $-(a^{-1})^2$.

Para tratar el caso en que el álgebra A no tiene unidad introducimos el *"casi-producto"*.

DEFINICIÓN 8.8.. *Definimos el* **casi-producto** *en un álgebra A mediante*

$$a \circ b := a + b - ab \quad \forall a, b \in A.$$

Esta operación es asociativa y tiene como elemento neutro al cero (aunque no es bilineal y de ahí el nombre de casi-producto). Si A tiene unidad e entonces

$$(e - a)(e - b) = e - a \circ b.$$

Así, la aplicación $a \mapsto a^q := e - a$ de A sobre sí misma verifica $(a \circ b)^q = a^q \circ b^q$, es decir es un isomorfismo de semigrupos.

DEFINICIÓN 8.9. . *Un elemento $a \in A$ es* **casi-inversible** *en A cuando existe $b \in A$ tal que $a \circ b = b \circ a = 0$; el tal elemento b es único, se le denomina* **casi-inverso** *de A y escribiremos $b = a^o$. Notaremos por $q - Inv(A)$ al conjunto de los elementos casi-inversibles.*

Teniendo en cuenta que $a \in q - Inv(A)$ si, y sólo si, $1 - a \in Inv(A_1)$, y que en tal caso $a^o = 1 - (1 - a)^{-1}$, los resultados anteriores se traducen enseguida para casi-inversos.

PROPOSICIÓN 8.10.. *Sea A un álgebra de Banach. Entonces se verifica:*

i) *Todo elemento $a \in A$ con $r(a) < 1$ es casi-inversible y $a^o = -\sum_{n=1}^{\infty} a^n$.*

ii) *El conjunto $q - Inv(A)$ es abierto y la aplicación $a \mapsto a^o$ de $q - Inv(A)$ sobre sí mismo es Frechet-diferenciable.*

En lo que sigue A denotará un álgebra de Banach con unidad. Recordamos que la función exponencial está definida por $exp(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $(a \in A)$, y establecemos el siguiente resultado de demostración elemental.

Proposición 8.11.. [**BoDu3**, Proposition 8.2]. *Sea A un álgebra de Banach con unidad.*

i) $exp(a+b) = exp(a)\ exp(b) \quad \forall a, b \in A\ :\ ab = ba.$

ii) $exp(-a) = (exp(a))^{-1} \quad \forall a \in A$. *En particular,* $exp(A) \subseteq Inv(A)$.

Del último resultado se deduce que el conjunto $exp(A) := \{exp(a)\ :\ a \in A\}$ está contenido en $Inv(A)$. El siguiente lema que establece una condición suficiente para que un elemento posea un logaritmo, será útil en lo que sigue y puede probarse por técnicas elementales, sin necesidad de recurrir al Cálculo funcional holomorfo, utilizando el hecho de que la función exponencial es derivable.

Lema 8.12.. *Si A es un álgebra de Banach con unidad, entonces*

$$\{a \in A\ :\ r(e-a) < 1\} \subseteq exp(A).$$

El conjunto $Inv(A)$ es unión de subconjuntos conexos disjuntos: sus **componentes conexas** (que además son abiertos pues $Inv(A)$ es abierto y todo espacio normado es localmente conexo). Llamaremos **componente principal** de $Inv(A)$ y la notaremos por G_1 a la componente conexa de $Inv(A)$ que contiene la unidad.

Teorema 8.13.. *Si A es un álgebra de Banach con unidad e, entonces*

i) G_1 *es un subgrupo normal de* $Inv(A)$.

ii) [**BoDu3**, Proposition 8.7], [**Zela**, Theorem 7.3] G_1 *es el subgrupo de* $Inv(A)$ *engendrado por* $exp(A)$.

iii) *Si A es conmutativa, entonces* $G_1 = exp(A)$.

En el caso no conmutativo la descripción de $exp(A)$ es dada por el siguiente teorema debido a Nagumo.

Teorema 8.14.. **(Nagumo).** [**Zela**, Theorem 7.5] *El conjunto $exp(A)$ es la unión de todos los subgrupos abelianos conexos de $Inv(A)$.*

Concluimos el tema estableciendo el teorema de Lorch a partir del siguiente lema que tiene interés en sí mismo.

Lema 8.15.. [**Rick**, Lem 1.4.13] *Si A es un álgebra de Banach compleja con unidad y $a \in Inv(A)$ es de orden finito ($\exists n \in \mathbb{N} : a^n = e$), entonces $a \in G_1$.*

Nótese que el lema anterior es falso para $A = \mathbb{R}$.

Teorema 8.16. . **(Lorch).** [**Rick**, Theorem 1.4.14] *Sea A un álgebra de Banach compleja y conmutativa. Entonces el grupo $Inv(A)$ o bien es conexo o bien tiene infinitas componentes conexas.*

La demostración consiste en probar que si $a \in A \setminus G_1$ entonces las distintas potencias de a están en distintas componentes de $Inv(A)$. Por otra parte las componentes de $Inv(A)$ pueden ser numerables o infinitas no numerables [**Rick**, A.2.1 y A.2.10].

Bibliografía. De los libros citados en el tema caben destacar los de Bonsall y Duncan [**BoDu3**], Rickart [**Rick**] y Zelazko [**Zela**]. Pueden consultarse también [**Aup1**], [**Ber2**], [**Bou3**], [**Con2**], [**Dieu2**], [**GeRS**], [**HiPh**], [**Lar1**], [**Naim**], [**Rud2**] y [**Simm**].

Tema 9

Divisores topológicos de cero. Teorema de Arens. La frontera de $Inv(A)$.

Como decíamos en el tema anterior, la abundancia de elementos inversibles en un álgebra repercute en su mejor conocimiento. Por otra parte es bien conocida la técnica algebraica de sumergir un álgebra en otra *"más grande"* y aprovechar las perfecciones de esta última para lograr el mejor conocimiento de la primera. En este tema nos vamos a ocupar de detectar, en el ambiente de las álgebras de Banach con unidad, aquellos elementos que no son inversibles ni siquiera en sus *"posibles agrandamientos"*. Aparece así de forma natural (o como una extensión del concepto algebraico de divisor de cero) el concepto de divisor topológico de cero debido a Shilöv. Establecemos algunas condiciones necesarias y suficientes para que un elemento de un álgebra de Banach sea un divisor topológico de cero. En particular probamos el Teorema de Arens que establece que en un álgebra de Banach conmutativa con unidad A, un elemento es un divisor topológico de cero si es un elemento singular en toda superálgebra de Banach que contenga a A. También se verá que la frontera del conjunto de los elementos inversibles de un álgebra de Banach con unidad, está formada por divisores topológicos de cero.

DEFINICIÓN 9.1.. *Sea A un álgebra normada. Un elemento a de A es llamado un* **divisor topológico de cero** *(***d.t.c.***)* **por la izquierda** *(***derecha***) en A si existe una sucesión $\{b_n\}$ en A tal que $\|b_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $lim\ ab_n = 0$ ($lim\ b_na = 0$). Si existe una sucesión $\{b_n\}$ en A con $\|b_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $lim\ ab_n = lim\ b_na = 0$ diremos simplemente que a es un* **divisor topológico de cero.**

Aunque la anterior definición se ha dado en términos de la norma de A, es fácil ver que el hecho de que un elemento sea divisor topológico de cero (izquierdo, derecho) no se altera por paso a normas de álgebra equivalentes. Claramente todo divisor de cero (izquierdo, derecho) (Definición 5.5) es un divisor topológico de cero (izquierdo, derecho). La siguiente proposición muestra una condición suficiente para que un elemento sea divisor topológico de cero.

PROPOSICIÓN 9.2.. [**Lar1**, Propositión 1.6.1] *Sea A un álgebra de Banach con unidad. Si $a \in A$ es tal que $r(a) = 0$, entonces a es un divisor topológico de cero.*

Sea A un álgebra normada. Si para cada a en A notamos

$$\lambda(a) = inf\{\|ab\| : \|b\| = 1\} \quad \text{y} \quad \mu(a) = inf\{\|ba\| : \|b\| = 1\},$$

es claro que a es un divisor topológico de cero (izquierdo, derecho) si, y sólo si, $\lambda(a) = \mu(a) = 0$ ($\lambda(a) = 0, \mu(a) = 0$). Fácilmente se obtiene que

$$|\lambda(a) - \lambda(b)| \leq \|a - b\| \quad \text{y} \quad |\mu(a) - \mu(b)| \leq \|a - b\|,$$

de donde resulta:

PROPOSICIÓN 9.3.. *En toda álgebra normada el conjunto de los divisores topológicos de cero (izquierdos, derechos) es cerrado.*

DEFINICIÓN 9.4.. *Un álgebra normada B con unidad e se dice ser una* **superálgebra** *de un álgebra normada con unidad A si A es una subálgebra de B que contiene a e y la restricción de la norma de B a A es equivalente a la norma de A. Un elemento de A es llamado* **permanentemente singular** *si es singular en cualquier superálgebra B de A.*

El concepto de elemento permanentemente singular es debido a Lorch. El hecho de que los divisores topológicos de cero (izquierdos, derechos) son elementos permanentemente singulares es consecuencia de que un tal elemento nunca puede ser inversible, por lo que podemos enunciar la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 9.5.. *Todo divisor topológico de cero (izquierdo, derecho) en un álgebra normada con unidad es permanentemente singular.*

Antes hemos obtenido una condición necesaria y suficiente para que un elemento sea un divisor topológico de cero (izquierdo, derecho). La próxima proposición, de fácil demostración, recoge esta y otras caracterizaciones que en otros textos son tomadas como definición. Recordemos que L_a (R_a) denota el operador de multiplicación por la izquierda (derecha) en A determinado por el elemento a.

PROPOSICIÓN 9.6. . [**Lar1**, Proposition 1.6.2] *Sea A un álgebra de Banach y a un elemento de A. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *a no es divisor topológico de cero izquierdo (derecho).*
ii) $\lambda(a) > 0$ ($\mu(a) > 0$).
iii) *Existe una constante $k > 0$ tal que* $\|ab\| \geq k\|b\|$ ($\|ba\| \geq k\|b\|$), $\forall b \in A$.
iv) *a no es un divisor de cero izquierdo (derecho) y $L_a(A)$ ($R_a(A)$) es un ideal derecho (izquierdo) cerrado en A.*
v) *L_a (R_a) posee un inverso continuo considerado como aplicación lineal de A sobre su imagen.*

La Proposición 9.5 asegura que todo divisor topológico de cero en un álgebra de Banach con unidad es permanentemente singular. El recíproco no tiene por qué ser cierto (ver [**Lar1**, pág. 45-46]), de ahí el interés del siguiente teorema.

Teorema 9.7.. **(Arens).** [**Lar1**, Theorem 1.6.3] *Sean A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y a un elemento de A. Entonces:*

$$a \text{ es un d.t.c. en } A \Leftrightarrow a \text{ es permanentemente singular.}$$

El siguiente resultado, además de ser interesante por sí mismo, nos será útil en el estudio de la frontera del grupo de los elementos inversibles de un álgebra de Banach.

Lema 9.8.. *Sean A un álgebra de Banach con unidad y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos inversibles de A, convergente a un elemento $a \in A$. Si a no es inversible, entonces $\{\|a_n^{-1}\|\} \to +\infty$.*

Este lema puede demostrarse fácilmente haciendo uso del Lema 8.2,*ii)* y *iv)*.

Teorema 9.9.. *Sea A un álgebra de Banach con unidad. Todo elemento de la frontera de $Inv(A)$ es un divisor topológico de cero.*

Corolario 9.10.. *Sean B un álgebra de Banach con unidad e y A una subálgebra cerrada de B tal que $e \in A$. Entonces*

i) $Inv(A) \subseteq Inv(B)$.
ii) $Fr(Inv(A)) \subseteq Fr(Inv(B))$.

Dicho de una forma más sugestiva, si A es un álgebra de Banach con unidad, los elementos de la frontera del conjunto de los elementos inversibles de A siguen sin ser inversibles por mucho que *"agrandemos"* el álgebra A, esto es, son permanentemente singulares. El corolario anterior se visualiza todavía mejor si tenemos en cuenta una elemental observación topológica: si U y V son subconjuntos abiertos de un espacio topológico A, tales que $V \subset U$ y la frontera de V tiene intersección vacía con U, entonces V es la unión de una cierta familia de componentes conexas de U. Con la notación del corolario anterior, podemos tomar $U = Inv(B) \cap A$ y $V = Inv(A)$, con lo que obtenemos:

Corolario 9.11.. *Sean B un álgebra de Banach con unidad e y A una subálgebra cerrada de B que contiene a la unidad e. Entonces $Inv(A)$ es unión de componentes conexas de $A \cap Inv(B)$.*

Concluimos el tema obteniendo a partir del hecho de que un elemento a de un álgebra de Banach con unidad A es inversible si, y sólo si, L_a es inversible en el álgebra de Banach $BL(A)$ y de la caracterización de los operadores lineales continuos singulares en un espacio de Banach, el siguiente resultado.

Teorema 9.12.. *Sea A un álgebra de Banach con unidad. Entonces A se puede sumergir de manera homomórfica y homeomórfica (isométrica si A es unital) en el álgebra de Banach con unidad $BL(A)$, de tal manera que los elementos singulares de A se convierten en divisores topológicos de cero.*

Bibliografía. Entre los textos que hemos consultado para elaborar el tema, es el libro de Rickart [**Rick**] el que se ocupa más extensamente de estas cuestiones. En [**Lar1**] se incluyen el Teorema de Arens y abundantes ejemplos de divisores topológicos de cero en diversas álgebras de Banach. También es oportuno consultar [**Ber2**], donde se hace un interesante estudio de los divisores topológicos de cero en álgebras de operadores. Otros textos que pueden consultarse a este respecto son [**Aup1**], [**BoDu3**], [**Bou3**], [**Con2**], [**Dieu2**], [**GeRS**], [**HiPh**], [**Naim**], [**Rud2**] y [**Simm**].

Tema 10

Espectro de un elemento en un álgebra de Banach. Fórmula de Gelfand-Beurling. Álgebras normadas de división. Teorema de Gelfand-Mazur.

Comenzamos el tema introduciendo el concepto de espectro de un elemento de un álgebra compleja con unidad para enseguida extenderlo al caso sin unidad y al caso real. Pasamos después a establecer uno de los más importantes teoremas de las álgebras de Banach, debido a Gelfand, que establece la no vaciedad del espectro en álgebras normadas. De él se deduce inmediatamente el Teorema de Gelfand-Mazur describiendo las álgebras normadas de división complejas. Asímismo obtenemos la correspondiente versión real, el Teorema de Gelfand-Mazur-Frobenius.

El radio espectral de un elemento de un álgebra normada es un invariante algebraico topológico; ahora en presencia de complitud se prueba que es un invariante algebraico y en concreto que es el radio del más pequeño disco centrado en el origen que contiene al espectro del elemento en cuestión (Fórmula de Gelfand-Beurling). Nos ocupamos finalmente de discutir algunas relaciones entre los espectros de un elemento calculados en diferentes álgebras.

Los conocimientos acerca de los elementos inversibles, el Teorema de Hahn-Banach y resultados clásicos de la teoría de funciones analíticas como el Teorema de Liouville, el desarrollo de Laurent y el Principio del Módulo Máximo, son las herramientas claves en el desarrollo de este tema.

Definición 10.1.. *El* **espectro** *de un elemento a de un álgebra compleja A con unidad e, notado $sp(a, A)$ (o $sp(a)$ cuando no haya lugar a confusión), se define por:*

$$sp(a, A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \notin Inv(A)\}.$$

Si A carece de unidad se define como el espectro en la unitización, $sp(a, A) := sp(a, A_1)$.

Como el álgebra A es un ideal propio de A_1, se sigue que A carece de elementos inversibles en A_1 y por consiguiente $0 \in sp(a, A) := sp(a, A_1)$ para todo a en A. Por otra parte, si el álgebra A posee unidad e entonces, $a - \lambda e \notin Inv(A), \lambda \neq 0$, si, y sólo si, $\frac{a}{\lambda} \notin q - Inv(A)$, por lo que ambos casos pueden unificarse definiendo

$$sp(a, A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \frac{a}{\lambda} \notin q - Inv(A)\}(\cup\{0\} \text{ si } a \notin Inv(A))$$

independientemente de que el álgebra tenga o no unidad (recuérdese que $a \in q - Inv(A) \Leftrightarrow a \in q - Inv(A_1)$).

El concepto de espectro que acabamos de definir es puramente algebraico y la definición dada tiene sentido para elementos de un álgebra sobre un cuerpo arbitrario. Sin embargo el concepto general de espectro así obtenido no es de gran utilidad pues, por ejemplo, tal espectro puede ser vacío incluso para álgebras normadas reales (considérese por ejemplo $\mathbb{C}$ vista como real y tómese $a = i$). Por otra parte en álgebras normadas complejas el espectro nunca es vacío, lo que hace del mismo un concepto especialmente útil. Esta es la razón por la que la definición anterior se reserva para álgebras complejas. Con objeto de incluir álgebras reales se pasa a la complexificación.

Definición 10.2. . *Sea A un álgebra real. El* **espectro** *de un elemento a de A se define como el espectro de dicho elemento en el álgebra $A_{\mathbb{C}}$ complexificada de A, $sp(a, A) := sp(a, A_{\mathbb{C}})$.*

La siguiente proposición caracteriza el espectro de un elemento de un álgebra real en términos intrínsecos al álgebra.

Proposición 10.3.. *Sea a un elemento de un álgebra real A. Entonces:*

i) $0 \in sp(a, A) \Leftrightarrow a \notin Inv(A)$.

ii) Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, entonces:

$$\lambda \in sp(a, A) \Leftrightarrow \frac{1}{|\lambda|^2}\ (2Re(\lambda)a - a^2) \notin q - Inv(A).$$

De hecho la caracterización anterior fue tomada originalmente por Kaplansky para definir el espectro en álgebras reales.

Definición 10.4.. *El conjunto $\mathbb{C} \setminus sp(a, A)$ se llama conjunto* **resolvente** *del elemento a y se suele notar $\rho(a, A)$ (o $\rho(a)$).*

Si A es el álgebra de los polinomios en una indeterminada con coeficientes complejos, se tiene que $sp(a, A) = \mathbb{C}$ para cualquier $a \in A$ que no sea múltiplo de la unidad. Así pues, el espectro de un elemento puede ser no acotado, pero esta patología desaparece en ambiente completo. Teniendo en cuenta que en un álgebra de Banach compleja con unidad A la operación de paso a inverso es continua, el conjunto $Inv(A)$ es abierto y $1 - \frac{a}{\lambda} \in Inv(A)$ para $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > r(a)$ (Teorema 8.7 *i)* y Proposición 8.6) se obtiene que $\rho(a, A)$ es un abierto no acotado de $\mathbb{C}$, en concreto $\rho(a, A)$ contiene al conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} :| \lambda |> r(a)\}$ por lo que podemos enunciar:

Teorema 10.5.. *El espectro de un elemento de un álgebra de Banach es un subconjunto compacto del plano complejo.*

Definición 10.6.. *Dado un elemento a de un álgebra de Banach compleja A con unidad e, la función de $\rho(a, A)$ en A dada por $\rho(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1}$ se llama* **función resolvente** *del elemento a.*

El siguiente lema se deduce fácilmente a partir de la que suele llamarse **identidad resolvente**

$$\rho(\lambda) - \rho(\mu) = \rho(\mu)\ \left[\rho(\mu)^{-1} - \rho(\lambda)^{-1}\right] \rho(\lambda) = (\mu - \lambda)\rho(\mu)\rho(\lambda).$$

Lema 10.7.. *Sea A un álgebra de Banach compleja con unidad. La función resolvente de un elemento a es holomorfa y nula en el infinito. En concreto:*

i) $\rho(.)$ *es derivable en todo punto* $\lambda \in \rho(a, A)$ *con derivada* $\rho^{'}(\lambda) = -\rho(\lambda)^2$.

ii) $\lim_{\lambda \to \infty} \rho(\lambda) = 0$.

En consecuencia, para todo funcional lineal continuo $f \in A^*$ se verifica:

iii) La función $\lambda \mapsto f(\rho(\lambda))$ es holomorfa en $\rho(a, A)$ y nula en el infinito.

A partir del lema anterior y del Teorema de Liouville establecemos el siguiente teorema fundamental debido a Gelfand.

Teorema 10.8.. **(Gelfand** 1941**).** *El espectro de un elemento de un álgebra normada es no vacío.*

Como consecuencia directa del Teorema de Gelfand obtenemos la descripción de las álgebras complejas normadas de división.

Definición 10.9.. *Un álgebra asociativa A con unidad se dice ser de* **división** *si todo elemento no cero es inversible.*

Teorema 10.10.. **(Gelfand-Mazur).** *Toda álgebra compleja normada de división es isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Establecemos para álgebras reales la versión del Teorema de Gelfand-Mazur que en la literatura se conoce con el nombre de Teorema de Gelfand-Mazur-Frobenius. La estrategia seguida en la demostración es probar en primer lugar que un álgebra real normada de división es cuadrática, lo cual resulta evidente a partir de que el espectro de una tal álgebra es no vacío (Teorema 10.8) y de la caracterización intrínseca del espectro en un álgebra real (Proposición 10.3). La segunda fase es púramente algebraica y consiste en probar que toda álgebra (asociativa) real cuadrática de división es isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o **H** (cuaterniones reales de Hamilton), como consecuencia de los resultados clásicos de Frobenius (1877) [**Hers**, Theorem 7.E], [**BoDu3**, §14].

Teorema 10.11.. **(Gelfand-Mazur-Frobenius).** *Toda álgebra real normada de división es isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o* **H**.

Una consecuencia inmediata del hecho de que, el conjunto resolvente de un elemento a contenga al conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} :\mid \lambda \mid > r(a)\}$, es que

$$Max\{\mid \lambda \mid : \lambda \in sp(a, A)\} \leq r(a).$$

La igualdad entre ambos números es lo que se conoce en la literatura por fórmula de Gelfand-Beurling y constituye uno de los resultados más útiles de la teoría de las álgebras de Banach. Se obtiene a partir del desarrollo de Laurent de la función resolvente y el Teorema de Beurling (Proposición 7.10).

Teorema 10.12.. **(Fórmula de Gelfand-Beurling).** *Para todo elemento a de un álgebra de Banach compleja con unidad A se verifica que:*

$$r(a) = Max\{|\lambda| : \lambda \in sp(a, A)\}.$$

Merece la pena detenerse a considerar el siguiente ejemplo sencillo, para resaltar que los resultados anteriores dan toda la información que se puede tener en general para el espectro de un elemento de un álgebra de Banach compleja unital: es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$.

Ejemplo 10.13.. Sea K un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$ y consideremos el álgebra de Banach (conmutativa) $C(K)$ de las funciones continuas de K en $\mathbb{C}$, con la norma uniforme y el producto puntual. Si ponemos $u(z) = z \quad (z \in K)$, es evidente que $sp(u, C(K)) = K$.

La dependencia del espectro respecto del álgebra ambiente se deduce fácilmente de los resultados del tema anterior (Corolarios 9.10 y 9.11):

Proposición 10.14.. *Sea A una subálgebra cerrada de un álgebra de Banach unital B y supongamos que A contiene a la unidad e de B. Para $a \in A$ se verifica:*

i) $sp(a, A) \supset sp(a, B)$.

ii) $Fr(sp(a, A)) \subset Fr(sp(a, B))$. *En particular, si $sp(a, A)$ tiene interior vacío, entonces $sp(a, A) = sp(a, B)$.*

iii) $sp(a, A)$ *es la unión de $sp(a, B)$ con una cierta familia (posiblemente vacía) de componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus sp(a, B)$.*

Como consecuencia, si $\mathbb{C} \setminus sp(a, B)$ es conexo (en particular, si se verifica que $sp(a, B) \subset \mathbb{R}$), entonces $sp(a, A) = sp(a, B)$.

La utilidad de la proposición anterior estriba en la posibilidad de *"localizar"* el espectro, esto es, fijada el álgebra B y el elemento $x \in B$, tratar de buscar la mínima subálgebra A de B tal que $e, x \in A$ y se tenga $sp(x, B) = sp(x, A)$. Trivialmente, si hacemos que $(\lambda e - x)^{-1} \in A$ para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus sp(x, B)$ tendremos la igualdad de espectros. La segunda parte de la proposición anterior nos dice que es suficiente hacer que $(\lambda e - x)^{-1} \in A$ para un valor λ en cada componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus sp(x, B)$:

Corolario 10.15.. *Sean B un álgebra de Banach unital, $x \in B$ y Λ un subconjunto de $\mathbb{C}$ que tenga intersección no vacía con cada componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus sp(x, B)$. Sea A la mínima subálgebra cerrada de B tal que $e, x \in A$ y $(\lambda e - x)^{-1} \in A$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Entonces*

$$sp(x, A) = sp(x, B).$$

En particular, si $\mathbb{C} \setminus sp(x, B)$ es conexo, se puede tomar $\Lambda = \emptyset$ y A es la subálgebra cerrada de B engendrada por $\{e, x\}$.

Concluimos este tema con un resultado sencillo que nos da una importante propiedad del espectro, la función $a \mapsto sp(a)$ es *"semicontinua superiormente"*, como función multivaluada:

Proposición 10.16.. *Sean A un álgebra de Banach unital, $a \in A$ y Ω un abierto de $\mathbb{C}$ tal que $sp(a) \subset \Omega$. Existe un $\delta > 0$ tal que,*

$$b \in A \ , \quad \|b - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad sp(b) \subset \Omega.$$

En [**Rick**, Pág. 282] (ver también [**Aup2**, Pág. 49]) puede verse un ejemplo debido a S. Kakutani mostrando que el radio espectral no es continuo.

Bibliografía. Los textos básicos para seguir el tema son [**Ber2**], [**BoDu3**], [**HiPh**], [**Rud2**]. Otros textos que pueden consultarse son [**GeRS**], [**Hers**], [**Lar1**], [**Rick**] y [**Zela**].

Tema 11

Álgebras de Banach conmutativas. Teoría de representación de Gelfand.

Existe una especie de principio general de estrategia, útil para el estudio de cualquier estructura matemática: examinar los morfismos de un objeto con dicha estructura en el más sencillo no trivial de los objetos que la posean. La teoría de dualidad en espacios localmente convexos es el exponente manifiesto de la utilidad de un tal principio. La aplicación del mismo a la estructura de álgebra de Banach compleja nos lleva directamente a la consideración de los funcionales lineales multiplicativos de una tal álgebra en $\mathbb{C}$. Un magistral trabajo de I. Gelfand, (*"Normierte Ringe"*, Mat. Sbornik, 9 (1941), 3-24), demuestra la utilidad de tal forma de proceder, al menos en el ambiente de las álgebras de Banach conmutativas.

En este tema nos ocupamos de presentar la teoría de estructura de Gelfand para álgebras de Banach conmutativas lo que nos va a poner de manifiesto que, en gran medida, el conocimiento de tales álgebras se reduce al conocimiento de $C(\Omega)$ (y $C_0(\Omega)$) de las funciones complejas continuas (que se anulan en el infinito) sobre un espacio topológico Ω (localmente) compacto de Hausdorff con las operaciones definidas puntualmente y norma uniforme. Pero además la teoría de Gelfand tiene sus aplicaciones a álgebras de Banach no conmutativas por *"localización"* en subálgebras conmutativas.

La teoría de Gelfand tiene su base en la siguiente observación: como ya conocemos, la bola unidad $B(X^*)$ del dual de un espacio de Banach X es débil-$*$-compacta (Teorema de Alaoglu) y vía la inmersión canónica de X en su bidual, todo elemento x de X puede verse como una función continua $\hat{x}$ sobre dicha bola, lo que permite ver todo espacio de Banach como un subespacio cerrado de $C(\Omega)$ con $\Omega = B(X^*)$. Si queremos llevar esta idea al contexto de un álgebra de Banach, A, más nos vale asegurarnos de que la aplicación $a \mapsto \hat{a}$ sea un homomorfismo de álgebras por lo que nos vemos obligados a considerar el subconjunto Ω_A de $B(A^*)$, formado por aquellos elementos que son homomorfismos de álgebra. Ahora si $f \in \Omega_A \setminus \{0\}$, dado que $Ker(f)$ es un subespacio maximal que además es ideal, se tiene que $A/Ker(f)$ es un álgebra unidimensional y por tanto isomorfa a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$. Todo ello lleva a detectar aquellos ideales cerrados, M, del álgebra A tales que el cociente A/M sea un álgebra de divisón pues, si A es conmutativa, los teoremas de Gelfand-Mazur nos dan que A/M es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, lo que nos dice, entre otras cosas, que debemos considerar álgebras de Banach conmutativas.

Vamos a establecer el Teorema de representación de Gelfand para álgebras de Banach reales o complejas, sin exigir la presencia de unidad lo que nos lleva a considerar cierto tipo de ideales llamados *"modulares"* que hacen que el álgebra cociente posea unidad.

Definición 11.1.. *Un ideal izquierdo I de un álgebra A se dice que es un* **ideal izquierdo modular** *si existe un elemento u (***unidad modular derecha***) perteneciente a A tal que $A(1-u) \subseteq I$ (esto es, $a - au \in I$, $\forall a \in A$). (Análogas definiciones se dan para ideales derechos o biláteros). Diremos en tal caso que I es u-modular.*

Si el álgebra A posee unidad, claramente todo ideal izquierdo es modular. Es de fácil demostración la siguiente proposición con las propiedades elementales.

Proposición 11.2..

i) La unidad modular nunca pertenece a un ideal modular izquierdo propio.

ii) Si J es un ideal izquierdo conteniendo a un ideal izquierdo u-modular I, entonces J es u-modular.

iii) Si I es un ideal propio u-modular, entonces A/I es un álgebra con unidad $u+I$.

iv) Todo ideal izquierdo modular propio está contenido en un ideal izquierdo máximal (y modular).

v) Si A es un álgebra de Banach e I un ideal izquierdo u-modular propio, entonces $\|u-x\| \geq 1$ $(x \in I)$ y $\overline{I}$ es un ideal izquierdo u-modular propio.

vi) Los ideales izquierdos modulares maximales de un álgebra de Banach son cerrados.

La hipótesis de conmutatividad es esencial en el siguiente resultado.

Proposición 11.3.. *Un álgebra conmutativa con unidad es de división si, y sólo si, es simple.*

A partir de los resultados anteriores y del Teorema de Gelfand-Mazur-Frobenius obtenemos:

Proposición 11.4.. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa y M un ideal modular maximal, entonces el álgebra cociente A/M es isomorfa a $\mathbb{C}$ en el caso complejo y a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$ en el caso real.*

Definición 11.5.. *Un* **carácter** *de un álgebra A, también llamado* **funcional lineal multiplicativo**, *es un homomorfismo no nulo de A en el cuerpo base. Notaremos por Ω_A el espacio de los caracteres del álgebra A.*

La proposición siguiente es elemental en el caso complejo y el caso real se reduce a aquel vía la biyección de Ω_A en $\Omega_{A_{\mathbb{C}}}$ dada por $\psi \mapsto \hat{\psi}$, donde $\hat{\psi}(a,b) = \psi(a) + i\psi(b)$, para todo (a,b) en $A_{\mathbb{C}}$.

Proposición 11.6.. *Sea A un álgebra real o compleja y $\psi \in \Omega_A$, entonces $\psi(a) \in sp(a)$ para todo a en A. Como consecuencia todo carácter sobre un álgebra de Banach A es continuo de norma menor o igual que 1. Si además A es unital, entonces $\|\psi\| = \psi(e) = 1$.*

En la teoría de Gelfand el conjunto Ω_A de los caracteres de un álgebra de Banach A se considera siempre como un espacio topológico con la topología que en dicho conjunto induce la topología debil-$*$ del dual topológico A^* del espacio de Banach A. De la misma manera se considera el conjunto $\Omega_A^\infty = \Omega_A \cup \{\psi_\infty\}$ donde ψ_∞ denota el funcional lineal nulo sobre A. En este contexto a la topología indicada se le llama **topología de Gelfand**, y el espacio topológico Ω_A es conocido como el **espectro** de A.

Como consecuencia del teorema de Alaoglu y de la definición de Ω_A^∞ (téngase en cuenta que si A tiene unidad e, $\psi \in \Omega_A \Leftrightarrow \psi \in \Omega_A^\infty$ y $\psi(e) = 1$) obtenemos la siguiente

Proposición 11.7.. *Sea A un álgebra de Banach. Entonces Ω_A con la topología de Gelfand es un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff y Ω_A^∞ es la compactación por un punto de Ω_A. Si A tiene unidad Ω_A es compacto.*

Si A es un álgebra de Banach y $\psi \in \Omega_A$ entonces $Ker(\psi)$ es un ideal modular maximal (cualquier elemento $u \in A$ tal que $\psi(u) = 1$ es una unidad modular). La siguiente proposición establece que el recíproco también es cierto (considérese $\psi = f \circ \pi$ donde f es el isomorfismo cuya existencia viene asegurada por la Proposición 11.4 y π es la proyección canónica de A sobre A/M), por lo que se obtiene que la existencia de caracteres equivale a la de ideales modulares maximales.

Proposición 11.8.. *Sea A un álgebra de Banach. La aplicación $\psi \mapsto Ker(\psi)$ en el caso complejo, y $\psi \mapsto ker(\hat{\psi})$ en el caso real, es una biyección del conjunto Ω_A sobre el conjunto de los ideales maximales modulares de A o $A_{\mathbb{C}}$ respectivamente.*

El resultado anterior junto al hecho de que en un álgebra conmutativa con unidad todo elemento singular está contenido en un ideal maximal (téngase en cuenta que Aa es un ideal propio conteniendo al elemento a), conduce fácilmente a:

Proposición 11.9.. *Sea a un elemento de un álgebra de Banach A. Entonces se tiene que $sp(a, A)\backslash\{0\} \subseteq \{\psi(a) : \psi \in \Omega_A\}$. En el caso de que el álgebra tenga unidad entonces $sp(a, A) = \{\psi(a) : \psi \in \Omega_A\}$.*

Definición 11.10.. *El* **radical** *de un álgebra conmutativa A, $Rad(A)$, se define como la intersección de todos los ideales modulares maximales de A. Un álgebra se llama* **de radical** *si carece de ideales modulares propios, en cuyo caso se define $Rad(A) = A$. Un álgebra se llama* **semisimple** *si $Rad(A) = 0$.*

Un ejemplo de álgebra de radical puede verse en [**BoDu3**, Proposition 18.24]. Nótese que $Rad(A)$ es un ideal cerrado de A y que el álgebra $A/Rad(A)$ es semisimple. Según las Proposiciones 11.8 y 11.9 en un álgebra de Banach conmutativa A se tiene:

$$a \in Rad(A) = \bigcap_{\psi \in \Omega_A} Ker\ \psi \Leftrightarrow \psi(a) = 0\ \forall \psi \in \Omega_A \Leftrightarrow sp(a, A) = \{0\} \Leftrightarrow r(a) = 0.$$

Sólo nos queda ya interpretar adecuadamente los resultados anteriores.

Definición 11.11. . *La* **representación** *o* **transformación de Gelfand** *de un álgebra de Banach conmutativa A es la aplicación $a \mapsto \hat{a}$ de A en $C_0(\Omega_A)$ definida por $\hat{a}(\psi) = \psi(a)\ \forall \psi \in \Omega_A$. Suele decirse que $\hat{a}$ es la* **transformada de Gelfand** *del elemento a.*

Nótese que la continuidad de $\hat{a}$ es automática. De hecho la topología de Gelfand es la más débil que hace continuas a tales aplicaciones. Además si $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{\psi \in \Omega_A : |\hat{a}(\psi)| \geq \varepsilon\}$ es compacto en Ω_A, luego $\hat{a}$ se anula en infinito sobre Ω_A. Si A tiene unidad Ω_A es compacto y $C_0(\Omega_A)$ coincide entonces con $C(\Omega_A)$. Resumimos los resultados obtenidos en el siguiente teorema, resultado fundamental de este tema.

Teorema 11.12.. **(Teorema de representación de Gelfand, 1.941)**. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa, Ω_A su espectro y $a \mapsto \hat{a}$ la representación de Gelfand. Entonces:*

i) *Ω_A es un espacio de Hausdorff localmente compacto y si A tiene unidad Ω_A es compacto.*
ii) *La aplicación $a \mapsto \hat{a}$ es un homomorfismo de A en $C_0(\Omega_A)$.*
iii) *$\hat{a}(\Omega_A)\backslash\{0\} = sp(a, A)\backslash\{0\}$ y si A tiene unidad $\hat{a}(\Omega_A) = sp(a, A)$.*
iv) *$\|\hat{a}\| = \sup\{|\hat{a}(\psi)| : \psi \in \Omega_A\} = r(a)$ y, en consecuencia, $a \mapsto \hat{a}$ es continua de norma menor o igual que uno.*
v) *$a \notin q - Inv(A) \Leftrightarrow \exists \psi \in \Omega_A\ :\ \hat{a}(\psi) = 1$ y, si A tiene unidad*
$a \notin Inv(A) \Leftrightarrow \exists \psi \in \Omega_A\ :\ \hat{a}(\psi) = 0$.
vi) *$Rad(A)$ es el núcleo de la transformación de Gelfand.*

Corolario 11.13.. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Equivalen:*

i) *A es semisimple.*
ii) *Ω_A separa puntos en A.*
iii) *La representación de Gelfand es inyectiva.*
iv) *El radio espectral es una norma de álgebra sobre A.*

El Corolario 11.13, la Proposición 11.6 y el Teorema de la gráfica cerrada permiten establecer un primer resultado sobre continuidad automática y un teorema de unicidad de la norma.

Teorema 11.14.. **(Teorema de continuidad automática de Gelfand).** *Todo homomorfismo de un álgebra de Banach en un álgebra de Banach conmutativa y semisimple es continuo.*

Corolario 11.15.. **(Teorema de unicidad de la topología de la norma de Gelfand)**. *Todas las normas de álgebra completas sobre un álgebra conmutativa y semisimple son equivalentes.*

La siguiente proposición permite localizar el espectro de un elemento de un álgebra de Banach en una subálgebra cerrada y conmutativa. Es claro que si B es una subálgebra de un álgebra A con unidad e, tal que $e \in B$, entonces $Inv(B) \subseteq B \cap Inv(A)$. La inclusión puede ser estricta (tómense A y B las funciones racionales y polinómicas respectivamente).

Definición 11.16.. *Una subálgebra B de un álgebra A (con unidad $e \in B$) se dice* **plena** *si $q - Inv(B) = B \cap q - Inv(A)$ $(Inv(B) = B \cap Inv(A))$.*

Proposición 11.17..

i) *Todo conjunto conmutativo de un álgebra no conmutativa puede sumergirse en un conjunto conmutativo maximal.*
ii) *Todo conjunto conmutativo maximal B de un álgebra de Banach A es automáticamente una subálgebra cerrada plena de A. En consecuencia, para $b \in B$ es $sp(b, B) = sp(b, A)$.*

A partir de las Proposiciones 11.9 y 11.17 se sigue fácilmente este último resultado que constituye una pequeña muestra de como la teoría de Gelfand puede sernos útil en el contexto de las álgebras de Banach no conmutativas.

Proposición 11.18.. *Sean A un álgebra de Banach, $a_1, a_2, ..., a_n$ elementos de A que conmutan dos a dos. Entonces:*

i) $sp(a_1 + a_2 + ... + a_n) \subseteq sp(a_1) + sp(a_2) + ... + sp(a_n)$.

ii) $sp(a_1 a_2 ... a_n) \subseteq sp(a_1)sp(a_2)...sp(a_n)$.

Bibliografía. Cualquiera de los textos específicos sobre álgebras de Banach trata con detenimiento la teoría de Gelfand, por tratarse de un capítulo imprescindible: [**BoDu3**, §15, 16, 17], [**GeRS**, Chapter I], [**Naim**, §11] y [**Rick**, §III.1]. En varios textos de Análisis Funcional se concede también a la teoría de Gelfand la importancia que se merece. Citemos los textos de [**Con2**, §VII.8], [**Ped2**, §4.2] y [**Rud2**, Chapter 11]. Los textos de Loomis [**Loom**] y de Katznelson [**Katz**] son de utilidad en cuanto a las aplicaciones al Análisis Armónico. Pueden consultarse también [**Ber2**], [**Bou3**], [**Lar1**] y [**Zela**].

Tema 12

Cálculo funcional holomorfo en un elemento de un álgebra de Banach.

Nos ocupamos en este tema de dar sentido a la expresión $f(a)$ donde a es un elemento de un álgebra de Banach compleja unital A y f es una función compleja holomorfa en un entorno Ω del espectro de a. La integración de funciones vectoriales junto con ciertas dosis de Análisis Complejo en una variable y el Teorema de Fubini son las herramientas necesarias. Nos ocupamos en primer lugar de la aplicación $f \mapsto f(a)$ que recibe el nombre de *"cálculo funcional holomorfo en el elemento a"*, probando, como resultado principal, que se trata del único homomorfismo de álgebras continuo de $H(\Omega)$ en A que transforma la función constantemente igual a 1 en la unidad de A y la función identidad en el elemento a. En particular, dicho cálculo funcional extiende al cálculo funcional racional, definible en ambiente puramente algebraico, pero además, sigue verificando la fórmula fundamental de transformación del espectro (*"spectral mapping theorem"*):

$$sp(f(a)) = f(sp(a)).$$

Ello nos permite obtener otra propiedad importante del cálculo funcional holomorfo, su buen comportamiento con respecto a la composición de aplicaciones:

$$f(g(a)) = (f \circ g)(a)$$

del que se deducen, como aplicación interesante, condiciones suficientes para la existencia de *"raíces n-ésimas"* y *"logaritmos"* del elemento a.

En una segunda parte del tema pasamos a considerar la aplicación $a \mapsto f(a)$, donde ahora f es una función fija, holomorfa en un abierto del plano, obteniéndose una función definida en un abierto del álgebra A, con valores en A. La diferenciabilidad de la función $a \mapsto f(a)$ en el sentido de Fréchet (holomorfía), junto con el cálculo explícito de su derivada, es ahora el resultado más relevante. Obtenemos así ejemplos verdaderamente sustanciosos de aplicaciones diferenciables en un espacio de Banach de dimensión arbitraria siendo la estructura superpuesta de álgebra de Banach la que da lugar a tales ejemplos.

Conviene observar que el Cálculo funcional holomorfo para operadores en espacios de Banach complejos es mucho más antiguo que la teoría abstracta de las álgebras de Banach, y de hecho era conocido por F. Riesz en los años veinte. De ahí el nombre de *"Cálculo funcional de Riesz"* que a veces se le da. Por otra parte, algunos de los resultados de este tema son no triviales incluso para álgebras de dimensión finita (cálculo funcional en una matriz cuadrada).

Dado un conjunto abierto Ω de $\mathbb{C}$, denotamos por $P(\Omega)$ el álgebra de las funciones polinómicas complejas sobre Ω, y $R(\Omega)$ el álgebra de las funciones racionales en Ω sin polos en Ω. Sea A un álgebra compleja con elemento unidad e y sea $a \in A$. Dado $p(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, z^k$ en $P(\Omega)$, la expresión

$$p(a) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ a^k$$

tiene perfecto sentido (se entiende que $a^0 = e$, la unidad del álgebra A). Es inmediato que la aplicación $p \mapsto p(a)$, del álgebra de los polinomios en A, es un homomorfismo de álgebras, su imagen es la subálgebra de A engendrada por $\{e, a\}$. Una propiedad fundamental de este elemental **cálculo funcional polinómico** es la siguiente:

$$sp(p(a)) = p(sp(a)) = \{p(\lambda) : \ \lambda \in sp(a)\}. \tag{12.1}$$

Esta expresión permite considerar una extensión natural, todavía puramente algebraica, a $R(\Omega)$. Cada $r \in R(\Omega)$ puede expresarse en la forma $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ donde p y q son polinomios y $q(z) \neq 0$ para $z \in sp(a)$, por lo que $0 \notin sp(q(a))$, esto es $q(a) \in Inv(A)$. Así, podemos considerar el elemento de A dado por $r(a) = p(a)q(a)^{-1}$. Usando la conmutatividad de la subálgebra engendrada por $\{e, a\}$, se comprueba sin dificultad que $r(a)$ está bien definido, esto es, no depende de la forma de expresar r como cociente de polinomios, sigue siendo cierto que la aplicación $r \mapsto r(a)$ es un homomorfismo de álgebras, llamado **cálculo funcional racional** y la igualdad (12.1) sigue siendo válida cuando sustituimos el polinomio p por una función racional. En ambiente puramente algebraico, poco o nada más puede hacerse. Sin embargo, si A es un álgebra de Banach compleja con unidad e, la posibilidad de introducir procesos de convergencia abre nuevos caminos que ahora vamos a explorar. Por ejemplo, si f es una función entera, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \ z^n \quad (z \in \mathbb{C})$, la serie $\sum_{n \geq 0} \alpha_n \ a^n$ es absolutamente convergente, e invita a definir $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \ a^n$ obteniéndose un **cálculo funcional entero** que extiende al definido anteriormente para polinomios, aunque no cubre el caso de una función racional.

Ahora pretendemos extender el cálculo funcional racional a $H(\Omega)$, el álgebra de las funciones holomorfas sobre Ω con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de Ω. A partir de ahora A denotará un álgebra de Banach compleja con unidad e, a un elemento de A y Ω será un abierto de $\mathbb{C}$ conteniendo a $sp(a, A)$. Un **cálculo funcional holomorfo para** a es un homomorfismo del álgebra $H(\Omega)$ en A tal que a la función constante 1 hace corresponder la unidad del álgebra e, y a la función identidad z hace corresponder el elemento a.

Recordemos que si Ω es un abierto de $\mathbb{C}$ y K un compacto contenido en Ω, existe un ciclo γ nulhomólogo respecto de Ω tal que todo punto de K tiene índice 1 respecto de γ. A tal un γ lo llamaremos una **envolvente del par** (K, Ω). Como consecuencia del teorema de Cauchy para funciones holomorfas con valores vectoriales obtenemos:

LEMA 12.1.. *La integral* $\int_\gamma f(z)(ze - a)^{-1} dz$ *no depende de la envolvente* γ *del par* $(sp(a), \Omega)$ *elegida.*

Hemos motivado la siguiente definición y justificado las afirmaciones que en ella se hacen:

Definición 12.2.. *Sean a un elemento de un álgebra de Banach compleja con unidad A y sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ tal que $Sp(a) \subset \Omega$. Llamaremos* **contorno espectral** *para a en Ω a toda envolvente del par $(sp(a), \Omega)$, esto es, todo ciclo γ nulhomólogo con respecto a Ω y verificando que los puntos de $sp(a)$ tienen índice 1 respecto de γ:*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = 0 \quad (w \in \mathbb{C} \setminus \Omega), \quad \int_\gamma \frac{dz}{z-w} = 2\pi i \quad (w \in sp(a)).$$

Para $f \in H(\Omega)$ escribiremos

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(ze-a)^{-1}\, dz$$

donde γ es cualquier contorno espectral para a en Ω. La aplicación

$$f \mapsto f(a),$$

de $H(\Omega)$ en A, recibe el nombre de **cálculo funcional holomorfo** *en el elemento a.*

Teorema 12.3.. *Sean A un álgebra de Banach compleja con unidad, $a \in A$ y Ω un abierto de $\mathbb{C}$ tal que $sp(a) \subseteq \Omega$. Pongamos*

$$\Phi(f) = f(a) \quad (f \in H(\Omega)).$$

Entonces Φ, el cálculo funcional holomorfo en el elemento a, es el único homomorfismo de álgebras de $H(\Omega)$ en A que es continuo cuando en $H(\Omega)$ se considera la topología de la convergencia uniforme sobre compactos y en A la topología de la norma, y que verifica $\Phi(f_0) = e$, $\Phi(f_1) = a$ donde $f_0, f_1 \in H(\Omega)$ vienen dadas por:

$$f_0(z) = 1, \quad f_1(z) = z \quad (z \in \Omega).$$

La unicidad es consecuencia de que las funciones racionales son densas en $H(\Omega)$ (Teorema de Runge) y de que Φ es un homomorfismo continuo que extiende el cálculo funcional racional.

Lo hecho para álgebras con unidad puede hacerse también para álgebras de Banach complejas sin unidad por medio del siguiente artificio. Sea A una tal álgebra, A_1 su unitización y $H_0(\Omega)$ (donde $\Omega \supseteq sp(a)$) el álgebra de las funciones holomorfas en Ω que se anulan en $z = 0$ ($\in sp(a)$). Para $f \in H_0(\Omega)$ se define $f(a) := f((a, 0))$. Hemos de ver que $f((a, 0)) \in A$. Para ello sea $\psi : A_1 \to \mathbb{C}$ definido por $\psi(a, \lambda) = \lambda$, el cual es un carácter de A_1 con $ker(\psi) = A$. Fácilmente se comprueba que $\psi(f((a, 0))) = 0$, por lo que $f((a, 0)) \in A$.

La caracterización del cálculo funcional holomorfo dada por el Teorema 12.3 es, en muchas ocasiones, más útil que la propia definición. Por ejemplo, de ella se deduce fácilmente el siguiente corolario, que deja las cosas bastante claras, al mostrarnos que el cálculo funcional holomorfo extiende a los cálculos funcionales polinómico, racional y entero, que habíamos usado como motivación.

Corolario 12.4.. *Sean A un álgebra de Banach compleja con unidad y $a \in A$.*

i) Si $p(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, z^k$ es una función polinómica en $\mathbb{C}$, se tiene

$$p(a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, a^k.$$

ii) Sean ahora p y q polinomios con coeficientes complejos y supongamos que $q(z) \neq 0$ para $z \in sp(a)$, con lo que $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; q(z) \neq 0\}$ es un abierto del plano que contiene al espectro de a. Poniendo $r(z) = p(z)q(z)^{-1} \quad (z \in \Omega)$, se tiene que $q(a) \in Inv(A)$ y que:

$$r(a) = p(a)q(a)^{-1}.$$

iii) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y Ω un disco abierto de centro z_0 que contenga al espectro de a. Para $f \in H(\Omega)$ se tiene

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(a - z_0 e)^n$$

y la serie del segundo miembro converge absolutamente. En particular, si f es una función entera, se tiene:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} a^n.$$

Otra consecuencia importante del Teorema 12.3 es la siguiente regla para el cálculo de espectros, conocida en inglés como *"spectral mapping theorem"*.

Corolario 12.5. . **(Teorema de transformación del espectro).** *Sean A un álgebra de Banach compleja con unidad, $a \in A$ y f una función holomorfa en un abierto que contenga al espectro de a. Entonces:*

$$sp(f(a)) = f(sp(a)) = \{f(\lambda) : \; \lambda \in sp(a)\}.$$

Para probar este resultado puede usarse la teoría de Gelfand sumergiendo a en un conjunto conmutativo maximal B. Entonces (ver Proposición 11.17 *ii)*) claramente se tiene que $f(a) \in B$ y

$$sp(f(a), A) = sp(f(a), B) = \{\psi(f(a)) : \psi \in \Omega_B\} =$$

(Teorema 12.3)

$$= \{f(\psi(a)) : \psi \in \Omega_B\} = f(sp(a, B)) = f(sp(a, A)).$$

El resultado anterior permite tratar fácilmente el comportamiento del cálculo funcional holomorfo con respecto a la composición de aplicaciones, que es el que cabe esperar:

Corolario 12.6.. *Sean A un álgebra de Banach compleja con unidad, $a \in A$, Ω un abierto de $\mathbb{C}$ tal que $sp(a) \subseteq \Omega$ y $f \in H(\Omega)$. Sean G otro abierto de $\mathbb{C}$ tal que $f(\Omega) \subseteq G$ y $g \in H(G)$. Entonces*

$$(g \circ f)(a) = g\,(f(a))\,.$$

Una de las aplicaciones más vistosas del cálculo funcional holomorfo consiste en obtener condiciones suficientes para la existencia de *"logaritmos"* y *"raíces n-ésimas"* de un elemento de un álgebra de Banach compleja con unidad. Si a es un tal elemento, como caso particular del Corolario 12.4, tenemos definida su exponencial, en la forma:

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \exp(z)(ze-a)^{-1}\, dz$$

donde γ puede ser cualquier circunferencia centrada en el origen, con radio mayor que $r(a)$ y orientada positivamente.

Corolario 12.7.. *Sea A un álgebra de Banach compleja con unidad.*

i) *Para $a \in A$ se tiene $sp(\exp(a)) = \{e^\lambda :\ \lambda \in sp(a)\}$. En particular $\exp(a) \in Inv(A)$ y $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.*

ii) *Si $a, b \in A$ verifican $ab = ba$, se tiene $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$.*

iii) *Si $a \in A$ y existe un abierto simplemente conexo Ω del plano, tal que $sp(a) \subset \Omega$ y $0 \notin \Omega$, entonces:*

- *a admite un logaritmo, esto es, $\exists b \in A\ /\ \exp(b) = a$.*
- *a admite raices de todos los ordenes: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists b \in A\ /\ b^n = a$. Si además $sp(a) \subseteq \mathbb{R}^+$, las raices pueden elegirse satisfaciendo la misma condición.*
- *Para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p tal que $\|a^{-1} - p(a)\| < \varepsilon$.*

La existencia de logaritmos probada en el corolario anterior mejora el resultado de la Proposición 8.6, si $r(e-a) < 1$, es claro que podemos tomar $\Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| < 1\}$ y obtener que $a = \exp(b)$ para algún $b \in A$. Dicha afirmación *iii)* no es trivial ni siquiera en el caso finito dimensional como se afirma en [**Rud2**]. Si a es una matriz cuadrada $n \times n$ con coeficientes complejos, y es inversible, $sp(a)$ es finito, luego hay una semirrecta que parte del origen y tiene intersección vacía con $sp(a)$; el complemento de dicha semirrecta es un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ que contiene a $sp(a)$, luego existe una matriz b tal que $\exp(b) = a$. Así pues, toda matriz cuadrada inversible es la exponencial de otra matriz.

Si un elemento a de A es **idempotente** (esto es, $a^2 = a$), claramente se tiene que $sp(a) \subseteq \{0, 1\}$ por lo que $sp(a)$ es no conexo. Otra típica aplicación del cálculo funcional holomorfo es la siguiente.

Corolario 12.8.. *Supongamos que un álgebra de Banach compleja con unidad A contiene un elemento cuyo espectro no es conexo; entonces existe en A un idempotente no trivial, esto es, existe $a \in A$ tal que*

$$a^2 = a, \quad a \neq 0, \quad a \neq e.$$

Concluimos este breve estudio del cálculo funcional holomorfo, y con él este tema, cambiando completamente de punto de vista. En lugar de fijarnos en la función $f \mapsto f(a)$ de $H(\Omega)$ en A, parece más sugestivo estudiar la función $a \mapsto f(a)$, donde $f \in H(\Omega)$ queda fija. Dicha función está definida para los elementos $a \in A$ que verifiquen $sp(a) \subset \Omega$.

Notación 12.9.. En lo sucesivo A seguirá siendo un álgebra de Banach compleja con unidad e y Ω será un subconjunto abierto del plano complejo. Escribiremos

$$A_\Omega = \{a \in A : \ sp(a) \subset \Omega\}.$$

Por la Proposición 10.16, A_Ω es un subconjunto abierto de A y $A_\Omega \neq \emptyset$, ya que $\lambda e \in A_\Omega$ para $\lambda \in \Omega$. Fijada $f \in H(\Omega)$ pondremos

$$\widetilde{f}(a) = f(a) \quad (a \in A_\Omega)$$

obteniendo una función $\widetilde{f} : A_\Omega \to A$. Nótese que $\widetilde{f}(\lambda e) = f(\lambda)e$ para $\lambda \in \Omega$, con lo que $\widetilde{f}$ puede considerarse como una extensión de f.

Como cabría esperar, $\widetilde{f}$ es una función holomorfa:

Teorema 12.10.. *Para $f \in H(\Omega)$, la función $\widetilde{f}$ es Frechet diferenciable en A_Ω y se tiene:*

$$\left[D\widetilde{f}(a)\right](x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(ze-a)^{-1}x(ze-a)^{-1}\,dz$$

para $x \in A, \ a \in A_\Omega$, donde γ es cualquier contorno espectral para a en Ω.

Corolario 12.11.. *Sea A un álgebra de Banach compleja con unidad. Sea $f \in H(\Omega)$ y supongamos que f es inyectiva en Ω. Entonces $\widetilde{f}$ es un difeomorfismo de A_Ω sobre $A_{f(\Omega)}$.*

Bibliografía. El cálculo funcional holomorfo está claramente expuesto en los textos clásicos de Gelfand-Raikov-Shilov [**GeRS**], de Hille-Philips [**HiPh**], de Dunford-Schwartz [**DuSc**] y de Rudin [**Rud2**] (donde se estudian las propiedades analíticas de la función $a \mapsto \widetilde{f}(a)$). También pueden consultarse [**Ber2**], [**BoDu3**], [**Lar1**], [**Naim**], [**Rick**] y [**Zela**].

Tema 13

Representaciones irreducibles. Lema de Schur y Teorema de densidad de Jacobson. Radical de Jacobson.

Incluimos en este tema los preliminares algebraicos imprescindibles para la demostración del teorema de Johnson acerca de la unicidad de la topología de la norma completa en álgebras semisimples, del cual nos ocuparemos en el tema próximo. Como afirma Rickart *"es cada vez más evidente que, a pesar de la profunda y continua influencia del Análisis en la teoría de las álgebras de Banach, la esencia de la misma como disciplina independiente radica en su desarrollo algebraico"*. Este tema, aparte del objetivo indicado al principio, contiene la información algebraica básica cuyo conocimiento consideramos indispensable para todo aquel que desee trabajar provechosamente en álgebras normadas. En particular se incluye la teoría del radical de Jacobson con cierto detalle pues es justamente dicha teoría la que ha permitido resolver con éxito multitud de problemas de la teoría de las álgebras de Banach. De hecho, para tales álgebras, el radical de Jacobson está caracterizado por una propiedad que es la generalización natural de la definición clásica del radical para álgebras de dimensión finita.

Iniciamos el tema presentando los conceptos de representación de un álgebra A y de A-módulo, notando que ambos son esencialmente los mismos.

Definición 13.1.. *Sean A un álgebra y X un espacio vectorial, ambos sobre el mismo cuerpo. Una* **representación** *de A sobre X es un homomorfismo (de álgebras) de A en $L(X)$.*

Definición 13.2.. *Sean A un álgebra y X un espacio vectorial, ambos sobre el mismo cuerpo. Se dice que X es un* **A-módulo izquierdo** *si está definida una aplicación bilineal de $A \times X$ en X, $(a, x) \mapsto ax$ (producto de módulo) que es pseudoasociativa: $(ab)x = a(bx)$ para cualesquiera $a, b \in A$, $x \in X$.*

Dada una representación π de A sobre X, se considera X automáticamente dotado de estrucutura de A-módulo izquierdo con el producto de módulo definido por

$$ax = \pi(a)x \quad (a \in A, x \in X). \tag{13.1}$$

Recíprocamente, dado un A-módulo izquierdo X, la representación de A sobre X es el homomorfismo π de A en $L(X)$ definido por (13.1). Así resulta que hablar de A-módulos izquierdos o de representaciones de A es esencialmente lo mismo y la elección de una u otra terminología es, en parte, una cuestión de gusto personal.

Las representaciones interesantes de un álgebrra sobre un espacio vectorial son aquellas en las que el álgebra imagen es suficientemente rica.

DEFINICIÓN 13.3. . *Sean A un álgebra y X un espacio vectorial, ambos sobre el mismo cuerpo. Un conjunto $S \subseteq L(X)$ se llama* **irreducible** *si los únicos subespacios de X invariantes por S son los triviales. Una representación π de A sobre X se llama irreducible si su imagen $\pi(A)$ es un conjunto irreducible.*

El importante papel jugado por los ideales modulares maximales en la teoría de las álgebras conmutativas, particularmente puesto de relieve al estudiar la teoría de Gelfand (donde dichos ideales aparecen como los núcleos de los caracteres), es desempeado en el caso general no conmutativo por los ideales *"primitivos"*. Notemos que si L es un ideal izquierdo del álgebra A el conjunto $(L : A) = \{a \in A : aA \subseteq L\}$ es un ideal bilátero de A.

DEFINICIÓN 13.4.. *Sea A un álgebra. Los ideales de la forma $(M : A) = \{a \in A : aA \subseteq M\}$ en que M es un ideal izquierdo modular maximal son llamados* **ideales primitivos**. *Se dice que A es un* **álgebra primitiva** *si el ideal cero es primitivo.*

Es sencillo ver que toda álgebra primitiva es isomorfa a un álgebra irreducible de operadores lineales sobre un espacio vectorial. La importancia de los ideales primitivos procede del hecho de que el cociente de un álgebra por un ideal primitivo es un álgebra primitiva, y por ello, tales ideales son justamente los núcleos de las representaciones irreducibles del álgebra. El interés de todo esto deriva de que las álgebras irreducibles de operadores lineales sobre un espacio vecorial son la generalización natural de las álgebras de matrices en un sentido que precisa el teorema de densidad de Jacobson.

DEFINICIÓN 13.5.. *Dados un espacio vectorial X, un subconjunto S de $L(X)$ se llama* **denso** *si*

$$\left.\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N} \\ \forall x_1, \cdots, x_k \in X \textit{ linealm. indep.} \\ \forall y_1, \cdots, y_k \in X \end{array}\right\} \exists\, T \in S \;/\; T(x_i) = y_i, 1 \leq i \leq k.$$

LEMA 13.6.. **(Schur).** *Sean X un espacio vectorial y B una subálgebra irreducible de $L(X)$. Entonces el* **centralizador** *$\mathcal{D}$ de B en $L(X)$, esto es*

$$\mathcal{D} = \{T \in L(X) : TS = ST \ \forall S \in B\},$$

es un álgebra de división.

El siguiente teorema es de extraordinaria importancia en la teoría de estructura de álgebras.

TEOREMA 13.7. . **(Teorema de densidad de Jacobson).** *Sean X un espacio vectorial, B una subálgebra irreducible de $L(X)$ y $\mathcal{D}$ el centralizador de B en $L(X)$. Entonces B es un álgebra densa de operadores lineales sobre X considerado como espacio vectorial sobre $\mathcal{D}$, esto es,*

$$\left.\begin{array}{l}\forall k \in \mathbb{N} \\ \forall x_1, \cdots, x_k \in X \ \mathcal{D}\text{-linealm. indep.} \\ \forall y_1, \cdots, y_k \in X\end{array}\right\} \exists\, T \in B \ / \ T(x_i) = y_i, 1 \leq i \leq k.$$

En resumen, si P es un ideal primitivo de un álgebra A, el cociente A/P puede verse como un álgebra densa de operadores lineales sobre un $\mathcal{D}$-espacio vectorial X. Indiquemos que cuando se imponen condiciones de finitud, tales álgebras densas coinciden con la totalidad y además X resulta ser de dimensión finita sobre $\mathcal{D}$ por lo que tales álgebras son álgebras de matrices sobre una cierta álgebra de división.

DEFINICIÓN 13.8. . *El* **radical de Jacobson** *de un álgebra A se define como la intersección de todos los ideales primitivos de A y se nota $Rad(A)$. Un álgebra A se llama* **de radical** *si carece de ideales primitivos en cuyo caso se define $Rad(A) = A$. Un álgebra se llama* **semisimple** *si $Rad(A) = 0$.*

No es difícil probar que $A/Rad(A)$ es semisimple y que si I es un ideal de A entonces $Rad(I) = I \cap Rad(A)$. La siguiente proposición incluye diversas caracterizaciones del radical.

PROPOSICIÓN 13.9..

i) *$Rad(A)$ es la intersección de todos los ideales izquierdos modulares maximales.*
ii) *$Rad(A) = \{a \in A : aA \subseteq q - Inv(A)\}$.*
iii) *$Rad(A) = \{a \in A : Aa \subseteq q - Inv(A)\}$.*
iv) *$Rad(A)$ es el más grande ideal de A contenido en $q - Inv(A)$.*

En un álgebra de Banach A los ideales izquierdos modulares maximales son cerrados (Proposición 11.2 *vi)*) y por tanto $Rad(A)$ es un ideal cerrado de A. Se tiene además la siguiente caracterización del radical en términos del radio espectral.

PROPOSICIÓN 13.10.. *Sea A un álgebra de Banach, entonces*

$$\begin{aligned} Rad(A) &= \{a \in A : r(ab) = 0 \ \forall b \in A\} \\ &= \{a \in A : r(ba) = 0 \ \forall b \in A\} \end{aligned}$$

Bibliografía. La referencia fundamental para las cuestiones de que nos hemos ocupado en este tema es el libro de Jacobson [**Jac2**]. El libro de Bonsall-Duncan [**BoDu3**] incluye también todos los resultados citados y es de gran utilidad por su concisión y claridad de exposición. También el libro de Rickart [**Rick**] se ocupa de algunas de las cuestiones tratadas en este tema. Además pueden consultarse [**Aup1**] y [**Sin2**].

Tema 14

Unicidad de la topología de la norma en álgebras de Banach. Teorema de Johnson.

Como veíamos en el tema dedicado a espacios vectoriales finito dimensinales, todas las normas sobre un espacio vectorial finito-dimensional son equivalentes mientras que si un espacio normado (completo) es de dimensión infinita, entonces es posible encontrar una norma (completa) sobre él que no es equivalente a la de partida. En otras palabras, salvo dimensión finita, la topología de la norma (completa) de un espacio normado no es única. Por otra parte hemos visto (Corolario 11.15) que en el caso de un álgebra conmutativa semisimple, todas las normas que la dotan de estructura de álgebra de Banach son equivalentes. Es obvio que no cabe esperar que esta propiedad sea cierta para cualquier álgebra de Banach, ya que todo espacio normado completo puede considerarse como un álgebra de Banach con producto cero, por lo que resulta natural la búsqueda de condiciones de tipo algebraico que aseguren que, si dos normas completas sobre un álgebra A hacen continuo el producto de A, entonces necesariamente han de ser equivalentes (situación a la que nos referiremos diciendo que el álgebra A tiene una única topología normable completa). Este es probablemente una de los más apasionantes cuestiones de la teoría general de las álgebras de Banach.

Suprimiendo la conmutatividad y fortaleciendo otras hipótesis (semisimplicidad y densidad de la imagen) en el teorema de continuidad automática de Gelfand, obtendremos el teorema de continuidad automática de Rickart y como corolario la unicidad de la topología normable para las álgebras de Banach *"fuertemente semisimples"*. Por último, una respuesta más fuerte a la cuestión de la unicidad de la topología normable completa que la de Gelfand y Rickart fue dada en 1967 por B. E. Johnson, quien demostró que toda álgebra de Banach semisimple tiene una única topología normable.

Brown y McCoy (1947) extienden de forma natural el concepto de radical para un álgebra conmutativa, definiendo el radical *"fuerte"* de un álgebra A. Rickart (1.950) utiliza este concepto para establecer un teorema de unicidad de la norma para álgebras con radical fuerte cero.

Definición 14.1.. *El* **radical fuerte** $s - Rad(A)$ *de un álgebra A es la intersección de todos los ideales (biláteros) modulares maximales. A se dice* **fuertemente semisimple** *si* $s - Rad(A) = 0$.

Dado que el $Rad(A)$ se caracteriza (Proposición 13.9) como la intersección de todos los ideales izquierdos modulares maximales, tenemos que $s - Rad(A) \supset Rad(A)$ y por tanto toda álgebra fuertemente semisimple es semisimple. Si el álgebra A es conmutativa entonces es claro que $s - Rad(A) = Rad(A)$.

Las ideas básicas de la prueba del teorema de continuidad automática de Rickart se pueden resumir de la siguiente manera:

Si X e Y son dos espacios de Banach y F una aplicacion lineal de X en Y, se define el **separador** de F, notado $S(F)$, como

$$S(F) = \{y \in Y : \exists \{x_n\}, x_n \in X, \{x_n\} \to 0 \ / \ \{F(x_n)\} \to y\}.$$

Es fácil probar que $S(F)$ es un subespacio cerrado de Y (incluso si no hay complitud) y claramente F es continuo si, y sólo si, $S(F) = 0$, equivalentemente la gráfica de F, $Gr(F)$, es cerrada.

Si ahora A y B son dos álgebras de Banach y ϕ un homomorfismo de A en B se tiene que $r(\phi(a)) \leq r(a)$ (en el caso complejo con unidad es trivial y si no es éste el caso se unitiza y/o complexifica). Si se supone que ϕ tiene rango denso en B entonces $S(\phi)$ es un ideal bilátero cerrado. En el caso en que B sea simple con unidad e es fácil probar que $S(\phi) = 0$. Si B no es simple pero posee radical fuerte cero entonces el razonamiento anterior se aplica al homomorfismo $\pi \circ \phi : A \to B/M$, (donde M es cualquier ideal modular maximal de B y π la proyección canónica de B en B/M), para concluir, dada la arbitrariedad de M, con $S(\phi) = 0$. Podemos pues enunciar.

Teorema 14.2.. **(Teorema de continuidad automática de Rickart).** *Sean A, B álgebras de Banach, B fuertemente semisimple y ϕ un homomorfismo de A en B con rango denso. Entonces ϕ es continuo.*

Corolario 14.3.. **(Teorema de unicidad de la norma de Rickart).** *Toda álgebra de Banach fuertemente semisimple tiene una única topología normable completa.*

A pesar de que el teorema de unicidad de la norma de Rickart extiende al de Gelfand, no es del todo satisfactorio pues como es bien sabido si X es un espacio de Banach infinito dimensional, entonces, todo ideal no nulo de $BL(X)$ contiene a los operadores de rango finito y por consiguiente $BL(X)$ no es fuertemente semisimple, resultando así que el teorema de Rickark no *da* información en una de las álgebras de Banach por excelencia. El resultado de Johnson sí que cubrirá dicho caso.

La demostración clásica del teorema de Johnson es una elegante combinación de Álgebra y Análisis que involucra, entre otros, el lema de Schur, el teorema de densidad de Jacobson, el teorema de Gelfand-Mazur-Frobenius, así como el teorema de los isomorfismos de Banach, el teorema de Banach-Steinhaus y alguno más. La demostración sigue una estrategia usual en las álgebras de Banach: reducir el problema de alguna forma al caso primitivo y entonces usar el teorema de densidad de Jacobson para representar el álgebra como un álgebra densa de operadores lineales. En la demostración del teorema se obtiene un resultado importante por sí mismo afirmando la continuidad automática de toda representación irreducible ϕ de un álgebra de Banach A sobre un espacio normado X con tal de que la imagen $\phi(A)$ esté contenida en $BL(X)$. Tal resultado lo obtrendremos como consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 14.4. . *Sean $(X, \|.\|)$ un espacio normado, A un álgebra irreducible de operadores lineales sobre X tal que $A \subseteq BL(X)$. Notemos $\|.\|$ la norma canónica de operadores en $BL(X)$ y sea $|.|$ cualquier norma completa de álgebra en A. Entonces existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leq M|T|$ para todo T en A.*

Teorema 14.5. . **(Teorema principal de Johnson).** *Sean $(X, \|.\|)$ un espacio normado, $(A, |.|)$ un álgebra de Banach y $\phi : A \to L(X)$ una representación irreducible de A sobre X tal que $\phi(A) \subseteq BL(X)$. Entonces ϕ es continua.*

Teorema 14.6. . **(Teorema de continuidad automática de Johnson, 1967).** *Sean A, B álgebras de Banach y supongamos que B es semisimple. Entonces todo homomorfismo sobreyectivo ϕ de A en B es automáticamente continuo.*

Esquema de la prueba: Para cualquier ideal izquierdo modular maximal M de B considérese $X = B/M$ como un B-módulo de Banach irreducible y su representación irreducible asociada $\psi : B \to BL(X)$ que es continua. Entonces, por el teorema principal de Johnson, $\psi \circ \phi : A \to BL(X)$ es continua. Si $b \in S(\phi)$, entonces de la continuidad de ψ y $\psi \circ \phi$ se deduce que $b \in ker\psi = (M : B)$. De la arbitrariedad del ideal izquierdo modular maximal M de B concluimos que $S(\phi) \subseteq Rad(B) = 0$.

Corolario 14.7.. **(Teorema de unicidad de la norma de Johnson).** *Sea A un álgebra semisimple. Todas las normas completas de álgebra sobre A son equivalentes.*

Recientemente T. J. Ransford ha dado una breve prueba de este resultado [**Rans**], usando una forma del teorema de los tres círculos de Hadamard y sin usar teoría de representación.

Si X es un espacio de Banach y $x \in X \setminus \{0\}$, en virtud del Teorema de Hahn-Banach existe un funcional $f \in X^*$ tal que $f(x) = 1$. El operador $x \otimes f$ de X en X dado por $(x \otimes f)(y) = f(y)x$ es un operador de rango finito no casi-inversible, por lo que $BL(X)$ es semisimple.

Corolario 14.8.. *El álgebra de Banach $BL(X)$ tiene una única topología normable completa.*

Llegados a este punto nos parece oportuno que el alumno retenga el siguiente resumen:

TEOREMAS DE CONTINUIDAD AUTOMATICA. *Sean A, B álgebras de Banach y ϕ un homomorfismo de A en B. Entonces ϕ es continuo si*

GELFAND: *B es conmutativa y semisimple.*
RICKART: *B es fuertemente semisimple y $\phi(A)$ denso en B.*
JOHNSON: *B es semisimple y ϕ sobreyectiva.*

Estos tres teoremas son independientes (si bien el Teorema de Gelfand puede deducirse del Teorema de Rickart con ayuda de la teoría de Gelfand: toda subálgebra cerrada de un álgebra de Banach conmutativa semisimple es semisimple).

TEOREMAS DE UNICIDAD DE LA NORMA. *Un álgebra de Banach A tiene unicidad de la topología de la norma completa si*

GELFAND: *A es conmutativa y semisimple.*
RICKART: *A es fuertemente semisimple.*
JOHNSON: *A es semisimple.*

Estos tres teoremas no son independientes:

$$\textit{JOHNSON} \Rightarrow \textit{RICKART} \Rightarrow \textit{GELFAND}.$$

Por último comentar el problema abierto sobre el homomorfismo de rango denso. Si A y B son álgebras de Banach, B semisimple y ϕ un homomorfismo de A en B con rango denso, es ϕ continuo?. B. Aupetit recoge en [**Aup2**, Theorem 5.5.4] una solución parcial afirmativa cuando $dim(B/\phi(A))$ es numerable. Tambien en dicho texto puede encontrarse un teorema de continuidad automática [**Aup2**, Theorem 5.5.2], que generaliza al teorema de Johnson pues es aplicable tambien a antihomomorfismos y Jordan homomorfismos (esto es, $\phi(a^2) = \phi(a)^2$).

Bibliografía. El texto que expone con más detalle y claridad el teorema de Johnson es el texto de Bonsall-Duncan [**BoDu3**, §25]. Es también instructiva una consulta al libro de Rickart [**Rick**] que por estar publicado en 1960 incluye la información que se tenía hasta ese momento del problema de la unicidad de la norma. También puede consultarse [**Sin2**]. Algunos de los últimos resultados en continuidad automática pueden verse en [**Aup2**] y [**John**]. Mención aparte requiere el artículo de Rodríguez [**Rod1**] donde se introduce un nuevo concepto de radical para álgebras no necesariamente asociativas y se obtiene un teorema de unicidad de la norma en el caso normado completo del que se deduce entre otros el famoso teorema de Johnson.

Capítulo III

Álgebras de Banach con involución.

Tema 15

Álgebras de Banach con involución. Álgebras hermitianas. Teoremas de Pták y Shirali-Ford.

La teoría de las álgebras de Banach involutivas constituye un capítulo especial de la teoría general de las álgebras de Banach. Ello se debe a que los trabajos pioneros de Gelfand y Naimark condicionaron fuertemente el desarrollo posterior de dicha teoría, la cual se elaboró con métodos específicos hasta cierto punto independientes de la teoría general. No ha sido hasta recientemente, en los aos 70, cuando gracias a los trabajos de Harrison, Palmer, Pták, Ford y otros matemáticos, se han elaborado técnicas propias de la teoría general de las álgebras de Banach que han permitido obtener resultados de gran belleza y sencillez en el estudio de las álgebras de Banach involutivas. Incluimos en este tema algunos de los resultados más notables, concretamente, damos la caracterización de Shirali-Ford de las álgebras hermitianas y el Teorema de Pták que afirma que en un álgebra hermitiana la función $a \mapsto \sqrt{r(a^*a)}$ es una B^*-seminorma.

Iniciamos el tema introduciendo el concepto de álgebra involutiva.

DEFINICIÓN 15.1.. *Una* **involución** *en un álgebra compleja A es un antiautomorfismo conjugado-lineal de periodo dos, esto es, una aplicación $a \mapsto a^*$ de A en A verificando:*

$$(a+b)^* = a^* + b^*,\ (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*,\ (ab)^* = b^* a^*,\ a^{**} = a \qquad \forall a, b \in A,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

En tal caso a A se le llama **álgebra involutiva**, *(*∗**-álgebra** *o* **álgebra con involución**). *Al elemento a^* se le llama* **adjunto** *de a. Si $a^* = a$ se dice que a es* **simétrico**; *a es* **normal** *si $aa^* = a^*a$ y si el álgebra posee unidad e y $aa^* = a^*a = e$ diremos que a es* **unitario**. *Todo elemento a de un álgebra involutiva admite una única descomposición en la forma $a = h + ik$ con h, k simétricos y a es normal si, y sólo si, $hk = kh$.*

PROPOSICIÓN 15.2.. *Sea A un álgebra involutiva con unidad e. Entonces:*

i) $e^* = e$.
ii) $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1} \quad \forall a \in Inv(A)$.
iii) $sp(a^*) = \overline{sp(a)}$.
iv) El conjunto de los elementos unitarios es un subgrupo del grupo $Inv(A)$.

El siguiente resultado, debido a Ford y perfeccionado por Bonsall, es una aplicación vistosa del cálculo funcional holomorfo.

Proposición 15.3.. *Sea A un álgebra de Banach con unidad. Si a es un elemento de A tal que $sp(a) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, entonces existe un único elemento b en A tal que $b^2 = a$ y $sp(b) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > 0\}$. Si además A es involutiva y a es simétrico, entonces b es simétrico.*

Sea S un subconjunto de un álgebra involutiva A y $S^* = \{a^* : a \in S\}$, si los elementos de $S \cup S^*$ conmutan dos a dos se dice que S es **normal**. Si S es una subálgebra y $S = S^*$ diremos que S es una **subalgebra autoadjunta**.

Los dos siguientes resultados serán de frecuente uso, el primero de ellos se obtiene como aplicación del lema de Zorn. El segundo, conjeturado por Rickart, es una consecuencia del Teorema de unicidad de la norma de Johnson.

Lema 15.4.. **(Civin-Yood).** *Sea A un álgebra de Banach con involución y S un subconjunto normal de A, entonces existe una subálgebra cerrada B, conmutativa y autoadjunta que contiene a S y es plena. En consecuencia $sp(b, B) = sp(b, A)$ para todo $b \in B$.*

Teorema 15.5.. *La involución de toda álgebra de Banach involutiva semisimple es continua.*

Habíamos visto (Corolario 12.7) que si a es un elemento de un álgebra de Banach compleja y cero pertenece a la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus sp(a)$, entonces a admite una raiz cuadrada. El siguiente resultado, probado por Bonsall haciendo uso del Teorema del punto fijo de Banach, afina un poco más.

Lema 15.6.. ([**BoDu3**, Proposition 8.13]). *Sea A un álgebra de Banach con unidad e y $a \in A$ tal que $r(e-a) < 1$. Entonces existe un único $b \in A$ tal que $b^2 = a$ y $r(e-b) < 1$.*

Ahora se deduce fácilmente:

Teorema 15.7.. **(Lema de Ford).** *Sea A un álgebra de Banach con involución y unidad e, y sea $h \in A$ un elemento simétrico tal que $r(e-h) < 1$. Entonces existe un único elemento simétrico $k \in A$ tal que $k^2 = h$ y $r(e-k) < 1$.*

Notemos que el interés del Lema 15.4 y del Teorema 15.7 es que no se ha supuesto que la involución sea continua.

Definición 15.8.. *Un álgebra de Banach con involución se llama* **hermitiana** *si todo elemento simétrico posee espectro real.*

El álgebra de Banach $BL(H)$ de los operadores lineales continuos de un espacio de Hilbert complejo H es el primer ejemplo de álgebra hermitiana. Si A es un álgebra involutiva, su unitizada A_1 es de forma natural un álgebra involutiva definiendo $(a+\lambda e)^* = a^* + \bar{\lambda} e$ y es claro que un álgebra es hermitiana si, y sólo si, lo es su unitizada. Por esta razón en la teoría de las álgebras hermitianas puede suponerse siempre la presencia de unidad.

La existencia de álgebras involutivas no hermitianas está asegurada, a título de ejemplo puede considerarse $\mathbb{C}^2$ definiendo $(a,b)^* = (\bar{b}, \bar{a})$ o el álgebra disco definiendo $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$.

El siguiente teorema recopila una serie de resultados debidos esencialmente a V. Pták que han simplificado notáblemente la teoría de las álgebras hermitianas. Si a pertenece a un álgebra de Banach con involución, $a \geq 0$ significa que a es simétrico y $sp(a) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, y diremos que a es **positivo**.

Teorema 15.9. . **(Pták)** ([**Ωák**], [**Aup1**, Theorem 4.2.2]). *Sea A un álgebra de Banach hermitiana y para $a \in A$ notemos $|a| = \sqrt{r(a^*a)}$. Se verifica:*

i) $r(a) \leq |a| \quad \forall a \in A$, *y* $r(a) = |a|$ *si a es normal.*
ii) $r(hk) \leq r(h)r(k) \quad \forall h,k \in A$ *simétricos.*
iii) $|ab| \leq |a|\,|b| \quad \forall a,b \in A$, *y* $r(ab) \leq r(a)r(b) \quad \forall a,b \in A$ *normales.*
iv) $Rad(A) = \{a : |a| = 0\}$.
v) *Si* $h \geq 0, k \geq 0$ *entonces* $h+k \geq 0$.
vi) $r(h+k) \leq r(h) + r(k) \quad \forall h,k \in A$ *simétricos.*
vii) $r(\frac{a+a^*}{2}) \leq |a| \quad \forall a \in A$.
viii) $|a+b| \leq |a| + |b| \quad \forall a,b \in A$.
ix) $|a^*a| = |a|^2 \quad \forall a \in A$.

Dada un álgebra de Banach involutiva A, una seminorma p en A verificando que $p(ab) \leq p(a)p(b)$ y $p(a^*a) = p(a)^2$ se llamará una B^***-seminorma**. Así, las propiedades *iii)* y *ix)* del Teorema de Pták pueden reformularse diciendo que en toda álgebra de Banach hermitiana $|a| := \sqrt{r(a^*a)}$ es una B^*-seminorma.

A partir del teorema anterior puede probarse el siguiente resultado conjeturado por Kaplansky y demostrado por primera vez por Shirali si bien su demostración contenía un error que fué rectificado por Ford. Otras demostraciones han sido dadas por Palmer, Pták y Harris.

Teorema 15.10.. **(Shirali-Ford)** ([**Aup1**, Theorem 4.2.3], [**BoDu3**, Theorem 41.5], [**DoBe**, Theorem 32.2]). *En un álgebra de Banach involutiva A son equivalentes:*

i) *A es hermitiana.*
ii) $a^*a \geq 0 \ \ \forall a \in A$.
iii) $(e + a^*a) \in Inv(A) \ \ \forall a \in A$.

El Teorema 15.9 *i)* afirma que en un álgebra hermitiana se verifica $r(a) \leq |a| := \sqrt{r(a^*a)}$. Nuestro objetivo final va a consistir en probar que esta desigualdad es característica de las álgebras hermitianas.

Lema 15.11.. ([**DoBe**, Lemma 33.3]). *Sean A un álgebra de Banach compleja con unidad y $a \in A$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $sp(a) \subseteq \mathbb{R}$.

ii) $r(\exp(\lambda i a)) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $\exists \alpha > 0 \ : \ r(\exp(\lambda i a)) \leq \alpha \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

iv) $\displaystyle\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \to 0} \frac{r(1 + \lambda a) - 1}{|\lambda|} = 0$.

Ahora el Lema de Civin-Yood 15.4, el Teorema 15.5, la Teoría de Gelfand y el lema anterior, entre otros, llevan a la prueba de:

Teorema 15.12.. ([**Aup1**, Theorem 4.2.4]). *Sea A un álgebra de Banach con involución. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) A es hermitiana.

ii) $r(a) \leq \sqrt{r(a^* a)} \quad \forall a \in A$.

iii) $\exists \alpha > 0 \ : \ r(a) \leq \alpha \sqrt{r(a^* a)} \quad \forall a \in A$ *normal.*

En el caso de que A posea unidad, estas propiedades son también equivalentes a:

iv) $\exists \alpha > 0 \ : \ r(\exp(ih)) \leq \alpha \quad \forall h \in A$ *simétrico.*

Bibliografía. Los resultados que recogemos en el tema son parte sustancial de una joven e importante teoría que se puede seguir en los textos Aupetit [**Aup1**], Bonsall-Duncan [**BoDu3**] y Doran-Belfi [**DoBe**]. Otras muchas caracterizaciones de las álgebras hermitianas pueden verse en [**DoBe**] y [**Ωák**]. Es interesante la lectura de los trabajos de Harris [**Har2**] y Pták [**Ωák**].

Tema 16

C^*-álgebras.
Teorema conmutativo de Gelfand-Naimark.
Cálculo funcional continuo.

Este tema y el siguiente lo vamos a dedicar, fundamentalmente, a obtener sendos teoremas de caracterización de una clase de álgebras de Banach con involución, las C^*-álgebras, B^*-álgebras o álgebras estelares, que han contribuido en gran parte al desarrollo del Análisis que pudieramos llamar moderno. Las C^*-álgebras, definidas inicialmente como las subálgebras nórmicamente cerradas y autoadjuntas del álgebra $BL(H)$ de los operadores lineales continuos sobre un espacio de Hilbert complejo H, fueron caracterizadas intrínsecamente (de lo que nos ocuparemos en el próximo tema) por medio de sencillos y bellos axiomas en un clarificador y famosísimo trabajo de I. M. Gelfand y M. A. Naimark en 1943. Desde entonces la teoría de las C^*-álgebras ha sido desarrollada por gran cantidad de matemáticos atraidos sin duda por la belleza interna de la estructura como por sus importantes aplicaciones.

En este tema la teoría de Gelfand de las álgebras de Banach conmutativas alcanza sus resultados más sobresalientes y definitivos: la representación de Gelfand $a \mapsto \hat{a}$ de A en $C_0(\Omega_A)$ (que en general no es inyectiva ni sobreyectiva) resulta ser un isomorfismo isométrico si y sólo si el álgebra de partida A es una C^*-álgebra. Resultado éste de importantes consecuencias y diversas interpretaciones, entre las primeras se tiene la posibilidad de extender el cálculo funcional holomorfo a un cálculo funcional continuo para elementos de una C^*-álgebra no necesariamente conmutativa obteniendo que las C^*-álgebras son localmente álgebras de funciones (Teorema de la aplicación espectral) y entre las segundas se encuentra el hecho de que establece una correspondencia biyectiva entre espacios topológicos Hausdorff localmente compactos (salvo homeomorfismos) y C^*-álgebras conmutativas (salvo $*$-isomorfismos).

Ya que toda C^*-álgebra es un álgebra de Banach hermitiana, los resultados obtenidos para éstas en el tema anterior son de aplicación a aquellas, apareciendo a veces con perfecciones adicionales que analizaremos. Ello nos permite estudiar cómodamente la estructura de orden en una C^*-álgebra. Incluimos también el sencillo pero utilísimo procedimiento debido a Yood que permite prolongar al álgebra unitizada A_1 de una C^*-álgebra A la estructura de C^*-álgebra de A, lo que permite suponer en muchas ocasiones que nuestra C^*-álgebra tiene unidad sin pérdida de generalidad.

Definición 16.1.. *Una C^*-álgebra es un álgebra de Banach involutiva A verificando $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo a en A, igualdad a la que nos referiremos con el nombre usual de* **axioma de Gelfand-Naimark** *o* **propiedad estelar**.

Ejemplos de C^*-álgebras son las álgebras de Banach $C_0(\Omega)$ (funciones complejas continuas que se anulan en el infinito sobre un espacio topológico Hausdorff localmente compacto Ω) con involución la operación conjugación compleja y las álgebras $BL(H)$ (H

espacio de Hilbert complejo) con involución la operación paso a adjunto, así como las subalgebras cerradas y autoadjuntas de $BL(H)$. En este tema veremos que las primeras son exactamente las C^*-álgebras conmutativas y en el tema siguiente que las segundas son los ejemplos universales de C^*-álgebras.

La primera consecuencia inmediata de la definición de C^*-álgebra y de la submultiplicidad de la norma es que la involución de una C^*-álgebra es isométrica. Una segunda consecuencia es que si una C^*-álgebra posee unidad e entonces $\|e\| = 1$.

Como observábamos en el tema anterior si A es un álgebra de Banach con involución, su unitizada, con la única involución que extiende la de A, vuelve a ser del mismo tipo. La situación es distinta si A es una C^*-álgebra, por ejemplo si $A = \mathbb{C}$ el elemento $(-2, 1) \in A_1$ es tal que $\|(-2, 1)\|^2 = 9$, mientras que $\|(-2, 1)^*(-2, 1)\| = 1$. No obstante, situaciones como la que acabamos de describir son fácilmente salvables, así si A es una C^*-álgebra con unidad e, entonces la aplicación F de A_1 en la ℓ_∞-suma de las C^*-álgebras A y $\mathbb{C}$ definida por $F(a + \lambda e) = (a + \lambda e, \lambda)$ es un isomorfismo que conserva las involuciones ($*$-isomorfismo). Ahora basta elegir en A_1 la norma $\|a + \lambda e\| = \|F(a + \lambda e)\|$ que dota a A_1 de estructura de C^*-álgebra y extiende la norma de A.

Aprovechando ahora que la representación regular izquierda es isométrica no es difícil probar que trasladando la norma de operadores en $BL(A)$ a A_1 ésta se convierte en una C^*-álgebra. Se tiene pues:

Teorema 16.2.. **(Yood).** *Si A es una C^*-álgebra sin unidad, entonces su unitización algebraica A_1 es una C^*-álgebra para la única involución que extiende la de A y para conveniente norma que extiende la norma de A.*

Esta reducción al caso con unidad nos es útil para establecer:

Proposición 16.3.. *Toda C^*-álgebra es un álgebra hermitiana.*

Conviene hacer notar la existencia de álgebras de Banach hermitianas que no son C^*-álgebras. Un ejemplo concreto lo constituye el álgebra de los operadores de Hilbert-Schmidt sobre un espacio de Hilbert complejo.

La Fórmula de Beurling para el radio espectral y el axioma de Gelfand-Naimark conducen a la siguiente proposición.

Proposición 16.4.. *Sea A una C^*-álgebra. Entonces $r(a) = \|a\|$ para todo elemento normal a en A.*

Ya que a^*a es normal en toda $*$-álgebra, se tiene que en toda C^*-álgebra A se verifica que $\|a\| = \sqrt{r(a^*a)}$ lo que nos dice que en una C^*-álgebra la norma está determinada por la estructura algebraica y la involución.

Un homomorfismo estre dos álgebras involutivas que conserva la involución se llama un **$*$-homomorfismo**. De lo anterior se deduce:

Proposición 16.5.. *Todo $*$-isomorfismo entre C^*-álgebras es isométrico. Todo $*$-homomorfismo entre C^*-álgebras es continuo y de norma menor o igual que uno.*

Teorema 16.6.. *Sea A una C^*-álgebra. Entonces se verifica:*

i) *A es semisimple.*
ii) $r(ab) \leq r(a)r(b) \quad \forall a, b \in A$ *normales.*
iii) *Si* $h \geq 0, k \geq 0$, *entonces* $h + k \geq 0$.
iv) $a^*a \geq 0 \quad \forall a \in A$.

La afirmación *iv)* del Teorema 16.6 fue una conjetura sin resolver durante muchos aos. De hecho en el trabajo inicial de Gelfand y Naimark dicha propiedad se incluía como axioma en la definición de C^*-álgebra, pero enseguida Gelfand y Naimark en una nota a pie de página se preguntaban si dicho axioma era superfluo. Ellos mismos consiguieron probar con un delicado argumento dependiendte del concepto de *"frontera de Shilov"* que así era efectivamente en el caso conmutativo. Tres aos más tarde en 1946 Arens dió una prueba mucho más sencilla de la simetría de toda C^*-álgebra conmutativa.

Teorema 16.7.. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa.*

i) *La transformación de Gelfand es una isometría si, y sólo si,* $\|a^2\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A$.
ii) *A es semisimple y su imagen en la transformación de Gelfand, $\hat{A}$, es cerrada en $C_0(\Omega_A)$ si, y sólo si,* $\exists k > 0 \ : \ \|a\|^2 \leq k\|a^2\| \quad \forall a \in A$.

Consideremos ahora una C^*-álgebra conmutativa A y $G : A \to C_0(\Omega_A)$ la representación de Gelfand de A. Por la Proposición 16.4 se tiene $\|a^2\| = r(a^2) = r(a)^2 = \|a\|^2$ para todo a en A, y por el Teorema 16.7 *i)*, G es isométrica, luego $G(A)$ es una suálgebra cerrada de $C_0(\Omega_A)$. Por la Proposición 16.3, si $h \in Sim(A)$, entonces $G(h)$ es una función que toma valores reales y, en consecuencia, G es un $*$-homomorfismo y $G(A)$ es una subálgebra autoadjunta de $C_0(\Omega_A)$. Además es evidente que dados $\psi, \phi \in \Omega_A$, $\psi \neq \phi$, existe $a \in A$ con $G(a)(\psi) = \psi(a) \neq \phi(a) = G(a)(\phi)$, luego $G(A)$ separa puntos en Ω_A y es trivial que la suáblgebra $G(A)$ no se anula en ningún punto de Ω_A luego, en virtud del Teorema de Stone-Weierstrass, $G(A)$ es densa en $C_0(\Omega_A)$ y, en consecuencia, $G(A) = C_0(\Omega_A)$. En resumen:

Teorema 16.8.. **(Teorema conmutativo de Gelfand-Naimark).** *La tranformación de Gelfand de una C^*-álgebra A es un $*$-isomorfismo isométrico de A sobre $C_0(\Omega_A)$.*

Notemos que si A tiene unidad entonces Ω_A es compacto y por tanto $C_0(\Omega_A) = C(\Omega_A)$.
Ya que toda C^*-álgebra es hermitiana, la siguiente proposición, que será de gran utilidad en lo que sigue, es consecuencia directa de la Proposición 10.14.

Proposición 16.9.. *Sean A una C^*-álgebra (con unidad) y B una subálgebra cerrada y autoadjunta de A (que contiene la unidad de A), entonces B es una subálgebra plena de A. En consecuencia* $sp(b, B) \setminus \{0\} = sp(b, A) \setminus \{0\}$ ($sp(b, B) = sp(b, A)$) *para todo b en B.*

El siguiente resultado es fundamental en toda la teoría de las C^*-álgebras y consiste en una extensión del Cálculo funcional holomorfo a un **Cálculo funcional continuo** para elementos normales de una C^*-álgebra. Nos dice que, "localmente", una C^*-álgebra es un álgebra de funciones.

TEOREMA 16.10.. *Sean A una C^*-álgebra con elemento unidad, a un elemento normal de A y B la C^*-álgebra engendrada por $\{e, a, a^*\}$. Notemos por f_0, f_1 las funciones constantemente* 1 *e inclusión de $sp(a)$ en $\mathbb{C}$. Entonces se verifica:*

i) *Existe un único $*$-homomorfismo $\phi_a : C(sp(a)) \to A$ tal que $\phi_a(f_0) = e$ y $\phi_a(f_1) = a$.*
ii) *La imagen de ϕ_a es B y ϕ_a es isométrico.*
iii) *$sp(f(a)) = f(sp(a))$ donde $f(a)$ denota el elemento $\phi_a(f) \in A$.*
iv) *Si f es holomorfa en $sp(a)$ entonces $f(a) = \hat{f}(a)$ ($\hat{f}(a)$, el elemento dado por el Cálculo funcional holomorfo).*

La prueba del teorema anterior se sigue de las siguientes observaciones. Si por (e, a, a^*) denotamos la $*$-subálgebra de A engendrada por $\{e, a, a^*\}$, es evidente que $B = \overline{(e, a, a^*)}$ con lo que B es una C^*-álgebra conmutativa con unidad. Ahora utilizando el Teorema conmutativo de Gelfand-Naimark no es difícil ver que la aplicación $\psi \to \psi(a)$ es un homeomorfismo del espacio de los caracteres de B, Ω_B, sobre $sp(a, B)$ $(= sp(a, A))$, lo que a su vez conduce a que la aplicación $G^t : C(sp(a)) \to C(\Omega_B)$ dada por $G^t(f)(\psi) = f(\psi(a))$ sea un $*$-isomorfismo. Ahora $\phi_a = G^{-1} \circ G^t$ donde G denota la transformada de Gelfand de B en $C(\Omega_B)$ es el $*$-isomorfismo buscado. La afirmación *iv)* es una consecuencia directa del Teorema 12.3.

Si Ω es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y Ω^∞ es la compactación de Alexandroff de Ω, entonces la C^*-álgebra $C_0(\Omega)$ es $*$-isomorfa a la subálgebra de $C(\Omega^\infty)$ formada por aquellas funciones $f \in C(\Omega^\infty)$ tales que $f(\infty) = 0$. Este hecho permite extender el Teorema 16.10 al caso sin unidad sin más que sutituir el álgebra $C(sp(a))$ por el álgebra C de las funciones $f \in C(sp(a))$ tales que $f(0) = 0$.

COROLARIO 16.11.. **(Teorema espectral de Hilbert-Neumann).** *Sean H un espacio de Hilbert complejo y T un operador normal en $BL(H)$. Si $C^*(T)$ denota la más pequeña subálgebra $*$-invariante y norma-cerrada de $BL(H)$ conteniendo a T y al operador identidad, I, entonces existe un $*$-isomorfismo isométrico de $C(sp(T))$ en $C^*(T)$ que a la función inclusión de $sp(T)$ en $\mathbb{C}$ la aplica en T y a la constantemente* 1 *la aplica en I.*

El Teorema 15.9 *v)* nos dice que los elementos positivos de un álgebra de Banach hermitiana, A, constituyen un cono convexo que induce un orden parcial en el conjunto $Sim(A)$ de los elementos simétricos de A, definiendo $a \leq b$ si $b - a \geq 0$. Si A es C^*-álgebra, con ayuda de la Proposición 16.4 podemos probar que la relación es un orden. Nuestro objetivo final va a consistir en ver como el Cálculo funcional continuo permite obtener más información sobre el conjunto $Pos(A)$ de los positivos de A. La Proposición 16.4 nos dice que si $a \in Sim(A)$, entonces $sp(a) \subseteq [-\|a\|, \|a\|]$. Este hecho junto al Teorema 16.10 dan:

LEMA 16.12.. *Sean A una C^*-álgebra con unidad e, $a \in Sim(A)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \geq \|a\|$. Entonces, $a \geq 0 \Leftrightarrow \|a - \alpha e\| \leq \alpha$. En particular $a \geq 0 \Leftrightarrow \|a - \|a\|e\| \leq \|a\|$.*

Del lema anterior se deduce que $Pos(A)$ es un cono cerrado. Esto unido al Teorema de Shirali-Ford, permite obtener nuestro teorema final.

TEOREMA 16.13.. *Sea A una C^*-álgebra con unidad. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $a \geq 0$.
ii) $\exists(!)b \in Pos(A) \ : \ a = b^2$.
iii) $\exists b \in Sim(A) \ : \ a = b^2$.
iv) $\exists b \in A \ : \ a = b^* b$.

Además $Pos(A)$ es un cono cerrado y propio.

Bibliografía. Las referencias básicas son [**Dix1**] y [**DoBe**] a las que conviene unir [**BoDu3**], [**Murp**] y [**Ped2**]. En el libro de Doran-Belfi [**DoBe**] se puede uno deleitar con una preciosa perspectiva histórica, a la que se une la evolución de la axiomática original de Gelfand-Naimark. Otras referencias son [**Ber2**], [**Bou3**], [**DoWi**], [**GeRS**], [**KaRi**], [**Naim**], [**Ped1**], [**Ωák**], [**Rick**], [**Rud2**], [**Take**] y [**Zela**].

Tema 17

Funcionales lineales positivos y representaciones de una C^*-álgebra. Teorema no conmutativo de Gelfand-Naimark.

En el tema anterior se vió que toda C^*-álgebra conmutativa es totalmente isomorfa a un álgebra $C_0(\Omega)$. El objetivo que perseguimos con este tema es llegar a probar que toda C^*-álgebra puede ser vista como una subálgebra cerrada y autoadjunta de la C^*-álgebra $BL(H)$ para algún espacio de Hilbert complejo H, resultado conocido como Teorema de Gelfand-Naimark. Asumiendo la existencia de unidad en la C^*-álgebra A (lo que no supone restricción alguna), la prueba de dicho teorema consta de tres etapas: probar la existencia de funcionales lineales positivos, asociar a cada uno de ellos una representación de A sobre un espacio de Hilbert (construcción de Gelfand-Naimark-Segal) y *"sumar"* las representaciones obtenidas para logar el $*$-homomorfismo isométrico de A en $BL(H)$ deseado.

El problema de obtener a partir de una C^*-álgebra A un espacio de Hilbert H y un $*$-homomorfismo isométrico de A en $BL(H)$ tiene cierta analogía con el planteamiento inicial de la teoría de Gelfand. Allí, dada un álgebra de Banach conmutativa A debía construirse un espacio topológico localmente compacto Hausdorff, Ω_A, y un homomorfismo de A en $C_0(\Omega_A)$. Como sabemos los puntos de Ω_A son los caracteres de A o, si se prefiere, los ideales modulares maximales de A. La situación es bien distinta si el áálgebra A no es conmutativa (por ejemplo, el áálgebra de las matrices complejas de orden $n \times n$ es simple, luego el único ideal maximal (automáticamente modular) es cero). En nuestra situación actual podemos preguntarnos +qué aspectos intrínsecos de la C^*-álgebra debe reflejar el espacio de Hilbert H a construir?. Para responder a esta pregunta supongamos que $F : A \to BL(H)$ es un $*$-homomorfismo y $u \in H$. Entonces la aplicación $f : A \to \mathbb{C}$ definida por $f(a) = (F(a)u \mid u)$ es lineal, continua y verifica que $f(a^*a) \geq 0$ para todo a en A, es decir, f conserva los positivos y por tanto el orden. +Existen este tipo de funcionales lineales *"positivos"*?. De existir, +es posible obtener a partir de ellos una representación de A en un $BL(H)$?. La respuesta afirmativa a estas preguntas es uno de los puntos claves para establecer el Teorema de Gelfand-Naimark. Hemos motivado así la siguiente definición:

Definición 17.1.. *Sea A una C^*-álgebra, un funcional (lineal) $f : A \to \mathbb{C}$ se dice que es un funcional* **positivo**, *si $f(a^*a) \geq 0$ para todo a en A. Una* **representación** *de A sobre un espacio de Hilbert complejo H es un $*$-homomorfismo de A en $BL(H)$.*

Puesto que, como hemos visto en el tema anterior, toda C^*-álgebra sin unidad puede considerarse sumergida mediante un $*$-homomorfismo isométrico en una C^*-álgebra con unidad, no resulta restrictivo suponer la presencia de unidad, así que desde ahora en adelante A va a designar una C^*-álgebra con unidad e. Por otra parte el Teorema 16.13 nos dice que la positividad de un funcional lineal sobre A, f, es equivalente al hecho de que $f(a) \geq 0$ para todo a perteneciente a $Pos(A)$ o lo que es equivalente a que f conserve el orden en $Sim(A)$. El siguiente resultado es una caracterización geométrica de los funcionales positivos sobre A establecida por H. F. Bohnenblust y S. Karlin, [**BoKa**], que probamos con la ayuda del Lema 16.12.

PROPOSICIÓN 17.2.. *Para todo funcional f sobre A son equivalentes:*

i) f es positivo.
ii) f es continuo y $\|f\| = f(e)$.

Una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach es que si X es un espacio normado, M un subespacio cerrado de X y $x \in X \setminus M$, entonces existe un funcional f sobre X tal que $\|f\| = 1$, $f(M) = 0$ y $f(x) = d(x, M)$. Si ahora elegimos $a \in A$ y $z \in sp(a)$, el resultado anterior aplicado al caso de $X = A$, M el subespacio cerrado engendrado por $a - ze$ y $x = e$, y ya que $d(e, M) = 1$, nos dice que existe f funcional en A tal que $\|f\| = f(e) = 1$. En una C^*-álgebra unital los funcionales lineales f tales que $\|f\| = f(e) = 1$ se llaman **estados**. La proposición anterior nos dice que todo funcional lineal positivo es multiplo positivo de un estado. Ahora la proposición anterior y la Proposición 16.4 permiten establecer la abundancia de funcionales positivos sobre A.

TEOREMA 17.3.. *Si a es un elemento normal en una C^*-álgebra con unidad A, entonces existe un funcional positivo f sobre A tal que $\|f\| = 1$ y $|f(a)| = \|a\|$. En particular, para todo a en A existe un estado f_a, tal que $f_a(a^*a) = \|a\|^2$.*

Todo funcional positivo f sobre una C^*-álgebra A define una forma sesquilineal positiva sobre A dada por $(a, b) \mapsto f(b^*a)$. Esta observación es la clave para la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 17.4.. **(Construcción de Gelfand-Naimark-Segal).** *Sean A una C^*-álgebra con unidad y f un estado sobre A. Entonces existe un espacio de Hilbert H_f, una representación $\pi_f : A \to BL(H_f)$ que conserva unidades, y un vector $u \in H_f$ tal que $f(a) = (\pi_f(a)u \mid u)$ para todo a en A.*

Esquema de la demostración: Con objeto de obtener a partir de f un producto escalar se pasa a cociente por el ideal izquierdo $N_f = \{a \in A \ : \ f(y^*a) = 0 \ \ \forall y \in A\}$. Definiendo $(a + N_f \mid y + N_f) := f(y^*a)$ el espacio vectorial A/N_f es prehilbertiano. Cada elemento $a \in A$ define un operador acotado T_a sobre A/N_f dado por $T_a(y + N_f) = ay + N_f$. Como $f((ab)^*ab) \leq \|a\|^2 f(b^*b)$ se deduce que $\|T_a\| \leq \|a\|$, y la aplicación $a \mapsto T_a$ es un $*$-homomorfismo que conserva unidades. Definimos ahora H_f como el espacio de Hilbert obtenido a partir de A/N_f y se extienden los operadores T_a a H_f. Finalmente el vector u no es otro que la clase $e + N_f$.

En el proceso que acabamos de describir, en general la representación obtenida a partir de f no es inyectiva, propiedad ésta que se asegura eligiendo un f apropiado. En efecto, si ahora $a \in A\setminus\{0\}$, y f es un estado tal que $f(a^*a) = \|a\|^2$, entonces, para la representación asociada a f se tiene:

$$\|a\|^2 = f(a^*a) = (T_a(e+N_f) \mid T_a(e+\ N_f)) = \|T_a(e+N_f)\|^2 \leq$$
$$\|T_a\|^2\|e+N_f\|^2 = \|T_a\|^2 f(e) = \|T_a\|^2$$

Luego $\|a\| \leq \|T_a\|$ lo que, junto con $\|T_a\| \leq \|a\|$ da $\|T_a\| = \|a\|$. Ya sólo resta poner juntos los resultados anteriores y la suma hilbertiana de espacios de Hilbert para obtener:

Teorema 17.5.. **(Gelfand-Naimark).** *Dada una C^*-álgebra A existe un espacio de Hilbert H y un $*$-homomorfismo isométrico de A en $BL(H)$.*

La representación que hemos construido suele llamarse la **representación universal** de la C^*-álgebra A. El hecho de que una C^*-álgebra tenga muchas representaciones isométricas sobre distintos espacios de Hilbert da lugar a que en la teoría de las C^*-álgebras se distingan dos aspectos: el estudio de la estructura intrínseca y el estudio de las distintas representaciones. Por supuesto ambos aspectos están estrechamente relacionados y un método para estudiar la estructura algebraica de una C^*-álgebra es representarla de forma conveniente. Por ejemplo podemos preguntarnos si es posible representar la C^*-álgebra como una subálgebra de algún $BL(H)$ cerrada para la topología fuerte de operadores, pues como se verá en un próximo tema ello tiene importantes consecuencias sobre la estructura algebraica de la C^*-álgebra en cuestión.

Concluimos el tema con un par de aplicaciones del Teorema de Gelfand-Naimark.

Si A es un álgebra involutiva, el áálgebra de las matrices de orden $n \times n$, $M_n(A)$, es de manera natural una nueva álgebra involutiva ($(a_{ij})^* = (a^*_{ji})$) y todo $*$-homomorfismo $F : A \to B$ entre álgebras involutivas puede ser extendido a un $*$-homomorfismo entre $M_n(A)$ y $M_n(B)$ definiendo $(a_{ij}) \mapsto (F(a_{ij}))$. Por otra parte si H es un espacio de Hilbert complejo y notamos por $H^{(n)}$ la suma ortogonal de n copias de H, existe un $*$-isomorfismo canónico $\varphi : M_n(BL(H)) \to BL(H^{(n)})$ definido por

$$\varphi(M)(h_1, ..., h_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} m_{1j}(h_j), ..., \sum_{j=1}^{n} m_{nj}(h_j)\right)$$

que permite dotar a $M_n(BL(H))$ de estructura de C^*-álgebra definiendo $\|M\| = \|\varphi(M)\|$. Ahora con ayuda del Teorema de Gelfand-Naimark se puede fácilmente probar:

Teorema 17.6.. *Si A es una C^*-álgebra, entonces existe una única norma en $M_n(A)$ que la convierte en C^*-álgebra.*

La segunda aplicación constituye una útil caracterización de los elementos positivos en una C^*-álgebra. El siguiente lema pone en equivalencia el hecho de que un operador $T \in BL(H)$ sea positivo como operador en un espacio de Hilbert ($(T(x) \mid x) \geq 0\ \ \forall x \in H$) con el hecho de que T sea positivo, visto como elemento de la C^*-álgebra $BL(H)$.

Lema 17.7.. ([**Murp**, Theorem 2.3.5]). *Sea H un espacio de Hilbert complejo. Un elemento $T \in BL(H)$ es positivo si, y sólo si, $(T(x) \mid x) \geq 0 \quad \forall x \in H$.*

Teorema 17.8.. *Sea a un elemento simétrico de una C^*-álgebra A. Entonces*

$$a \in Pos(A) \Leftrightarrow f(a) \geq 0 \text{ para todo funcional positivo } f \text{ sobre } A.$$

Bibliografía. El desarrollo del tema puede seguirse por los textos [**Ber2**], [**Dix1**], [**DoBe**], [**KaRi**], [**Murp**] y [**Rud2**]. Al igual que en el tema anterior recomendamos la lectura de la detallada historia y demostración del Teorema de Gelfand-Naimark que aparece en el texto de Doran-Belfi [**DoBe**], donde lo que se prueba es que un álgebra de Banach involutiva verificando $\|a^*a\| = \|a^*\| \|a\|$ es una C^*-álgebra. También puede consultarse [**BoDu3**] donde se obtiene el Teorema de Gelfand-Naimark (con unidad) a partir del Teorema de Vidav-Palmer. Otras generalizaciones del Teorema de Gelfand-Naimark se deben a Araki y Eliot quienes eliminan la hipótesis de ser la norma submultiplicativa. Pueden consultarse también [**GeRS**], [**Naim**], [**Ped2**], [**Ωák**], [**Rick**], [**Take**] y [**Zela**].

Tema 18

Álgebras de von Neumann.
Resolución espectral de un operador autoadjunto.

Este tema y el siguiente los dedicamos a cubrir algunos resultados básicos de la teoría de las álgebras de von Neumann. En concreto en este tema vamos a establecer el Teorema de Gelfand-Stone afirmando que el espectro de toda álgebra de von Neumann conmutativa es un espacio topológico Hausdorff estoneano lo que va a poner de manifiesto la abundancia de idempotentes autoadjuntos en una tal álgebra. Hecho que nos va a permitir establecer la resolución espectral de un operador autoadjunto. Omitimos así toda referencia a cuestiones propias de la teoría de la medida y seguimos el punto de vista de caracter algebraico, en el estudio de las álgebras de von Neumann, acorde con el carácter fundamentalmente algebraico de la Teoría de Gelfand. Para disponer de la terminología adecuada se introduce el concepto de álgebra de von Neumann y con objeto de demostrar que toda red creciente y acotada de operadores autoadjuntos tiene un mínimo mayorante, lo cual es fundamental para nuestros propositos, se estudian algunas propiedades básicas de las topologías fuerte y débil de operadores.

Desde ahora en adelante H denotará un espacio de Hilbert complejo. Iniciamos el tema recordando que la **topología fuerte**, que denotaremos por s, sobre $BL(H)$ es la topología localmente convexa y separada en $BL(H)$ inducida por la familia de seminormas $F \mapsto \|F(x)\|$, $(x \in H)$. Por consiguiente $F_\lambda \xrightarrow{s} F$ si, y sólo si, $F_\lambda(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} F(x)$ para todo x en H, lo que nos dice que s no es otra que la topología de la convergencia puntual en $BL(H)$.

La **topología débil**, denotada por w, sobre $BL(H)$ es la topología localmente convexa y separada en $BL(H)$ inducida por la familia de seminormas $F \mapsto |(F(x)|y)|$, $(x, y \in H)$. Por consiguiente $F_\lambda \xrightarrow{w} F$ si, y sólo si, $(F_\lambda(x)|y) \to (F(x)|y)$ para cualesquiera x, y en H, de donde, como consecuencia del Teorema de Riesz-Frechet, se tiene que $F_\lambda \xrightarrow{w} F$ si, y sólo si, para todo x en H $F_\lambda(x) \to F(x)$ en la topología débil de H visto como espacio de Banach. Por otra parte la aplicación $(x, y) \mapsto w_{x,y}$ de $H \times H$ en $BL(H)^*$ determinada por $w_{x,y}(F) = (F(x)|y)$ es una forma sesquilineal, por lo que utilizando la fórmula de polarización se tiene que $w_{x,y} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k w_{x+i^k y, x+i^k y}$. Así pues la envolvente lineal de los funcionales $w_{x,x}$ coincide con la envolvente lineal de los funcionales $w_{x,y}$ y por tanto las seminormas $F \mapsto |(F(x)|x)|$ determinan la topología débil de operadores en $BL(H)$ y $F_\lambda \xrightarrow{w} F$ si, y sólo si, $(F_\lambda(x)|x) \to (F(x)|x)$ para todo x en H.

Ya que $|(F(x)|y)| \leq \|F(x)\|\,\|y\| \leq \|F\|\,\|x\|\,\|y\|$ se sigue inmediatamente que la topología débil es más débil que la topología fuerte y ésta a su vez más débil que la de la norma.

También de la igualdad $|(F(x)|y)| = |(F^*(y)|x)|$ se sigue que la adjunción de operadores, $*$, es débilmente continua. Sin embargo no se puede decir lo mismo si se considera la topología fuerte a menos que restrinjamos $*$ al conjunto de operadores normales, que tiene la desventaja de no ser un subespacio de $BL(H)$. El producto en $BL(H)$ es separadamente continuo en ambas topologías y es (juntamente) continuo para s cuando una de las variables se mueve en un conjunto $\|.\|$-acotado (utilícese que $FG-F_0G_0 = F(G-G_0)+(F-F_0)G_0 = (F-F_0)G + F_0(G-G_0)$).

Definición 18.1.. *Una C^*-álgebra en la que toda red creciente y mayorada de elementos simétricos admite supremo se llamará* **monótonamente completa** *o* **monótonamente cerrada**.

Teorema 18.2.. **(Vigier).** *$BL(H)$ es (una C^*-álgebra) monótonamente completa. Más concretamente, toda red de operadores simétricos en $BL(H)$ creciente (resp. decreciente) y mayorada (resp. minorada) es fuertemente convergente.*

Cuando la C^*-álgebra $C(\Omega)$ (Ω espacio topológico Hausdorff compacto) es monótonamente completa?.

Definición 18.3.. *Un espacio topológico Hausdorff compacto Ω se dice ser* **estoneano** *o* **extremadamente disconexo** *si el cierre de todo abierto de Ω es un abierto de Ω.*

Puede ser probado [**Take**] que si Ω es un espacio topológico Hausdorff compacto estoneano entonces $C(\Omega)$ es una C^*-álgebra monótonamente completa. A nosotros nos interesa probar que el recíproco es cierto.

Proposición 18.4.. *Si Ω es un espacio topológico Hausdorff compacto tal que $C(\Omega)$ es una C^*-álgebra monótonamente completa, entonces Ω es estoneano.*

Si $\mathcal{S}$ es un subconjunto de $BL(H)$, notaremos por $\mathcal{S}^c$ el **conmutante** de $\mathcal{S}$ es decir, $\mathcal{S}^c = \{F \in BL(H) : FS = SF, \forall S \in \mathcal{S}\}$. Claramente $\mathcal{S}^c$ es una subálgebra plena de $BL(H)$ y ya que el producto de $BL(H)$ es separadamente débil continuo se tiene que $\mathcal{S}^c$ es cerrado para la topología débil, por consiguiente también es s-cerrado y $\|.\|$-cerrado. Luego si se supone que $\mathcal{S}$ es autoadjunto, se tiene que $\mathcal{S}^c$ es una C^*-subálgebra unital de $BL(H)$. Notaremos por $\mathcal{S}^{cc} = (\mathcal{S}^c)^c$ y $\mathcal{S}^{ccc} = (\mathcal{S}^{cc})^c$. Si $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ entonces $\mathcal{S}_1^c \supset \mathcal{S}_2^c$ y ya que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^{cc}$ se tiene que $\mathcal{S}^{ccc} \subset \mathcal{S}^c \subset \mathcal{S}^{ccc}$ con lo que el proceso de tomar conmutantes se estabiliza al menos cada dos etapas.

Definición 18.5.. *Un* **álgebra de von Neumann** *es una subálgebra autoadjunta A de $BL(H)$ tal que $A = A^{cc}$.*

Por ejemplo, $BL(H)$ es un álgebra de von Neumann ya que $BL(H)^c = \mathbb{C}I$. De las observaciones previas se sigue que:

Proposición 18.6.. *Toda álgebra de von Neumann es una C^*-subálgebra unital de $BL(H)$ que es débilmente cerrada y por consiguiente lo es fuertemente.*

Dado que el orden inducido por una C^*-álgebra en una C^*-subálgebra es el orden de la C^*-subálgebra, la proposición anterior junto al Teorema de Vigier 18.2 permiten enunciar:

Proposición 18.7.. *Toda álgebra de von Neumann es monótonamente completa.*

Sea ahora A un álgebra de von Neumann conmutativa. El Teorema conmutativo de Gelfand-Naimark nos dice que A es totalmente isomorfa a un $C(\Omega)$. Esto unido a las Proposiciones 18.4 y 18.7 permiten enunciar:

Teorema 18.8.. **(Gelfand-Stone).** *Toda álgebra de von Neumann conmutativa es totalmente isomorfa a un $C(\Omega)$ con Ω estoneano.*

Si F es un operador normal en $BL(H)$, entonces $\{F, F^*\}$ es un subconjunto conmutativo autoadjunto de $BL(H)$ y por consiguiente $\{F, F^*\}^{cc}$ es un álgebra de von Neumann conmutativa que contiene a F. Esta observación junto al teorema anterior son las piezas clave para probar el siguiente teorema que en el caso de ser H finito dimensional no es más que la familiar diagonalización de matrices autoadjuntas relativa a bases ortonormales. Recordemos que una **proyección** en un álgebra involutiva es un idempotente autoadjunto.

Teorema 18.9.. **(Resolución espectral de un operador autoadjunto).** *Sean F un operador autoadjunto sobre el espacio de Hilbert H y A un álgebra de von Neumann conmutativa que contiene a F. Entonces existe una familia de proyecciones $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ en A tal que:*

i) $E_\lambda = 0$ *si* $\lambda < -\|F\|$, *y* $E_\lambda = I$ *si* $\|F\| \le \lambda$.
ii) $E_\lambda \le E_\mu$ *si* $\lambda \le \mu$.
iii) $E_\lambda = \operatorname{Inf}\{E_\mu : \mu > \lambda\}$.
iv) $FE_\lambda \le \lambda E_\lambda$ *y* $\lambda(I - E_\lambda) \le F(I - E_\lambda)$ *para todo* λ.
v) $F = \int_{-\|F\|}^{\|F\|} \lambda dE_\lambda$ *en el sentido de las sumas de Riemann-Stieltjes; y por consiguiente F es el límite en norma de combinaciones lineales finitas con coeficientes en $sp(F)$ de proyecciones ortogonales $(E_\mu - E_\lambda)$.*

Con $A \cong C(\Omega)$ como en el Teorema de Gelfand-Stone 18.8 *y si f y e_λ en $C(\Omega)$ corresponden a F y a E_λ en A, entonces e_λ es la función característica del mayor conjunto abierto y cerrado X_λ de Ω sobre el cual f no toma valores mayores que λ.*

Una familia de proyecciones $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, satisfaciendo las condiciones *ii)* y *iii)* del teorema anterior y con Inf $E_\lambda = 0$ y Sup $E_\lambda = I$ se llama una **resolución de la identidad**. Establecemos ahora la unicidad de la resolución espectral obtenida en el Teorema 18.9.

Teorema 18.10.. *Si* $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *es una resolución de la identidad y* F *es un operador autoadjunto tal que* $FE_\lambda \leq \lambda E_\lambda$ *y* $\lambda(I-E_\lambda) \leq F(I-E_\lambda)$ *para todo* λ*; o si* $F = \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda dE_\lambda$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *mayor o igual que un cierto* $\alpha_0 \in \mathbb{R}$*, entonces* $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *es la resolución de la identidad para* F *en el álgebra de von Neumann engendrada por* F *e* I.

Concluimos el tema con algunos bonitos corolarios al Teorema 18.9.

Corolario 18.11.. *Toda álgebra de von Neumann es el cierre en la topología de la norma de la envolvente lineal de sus proyecciones.*

Como consecuencia de que $BL(H)^c = \mathbb{C}I$ y el corolario anterior aplicado a A^c se tiene:

Corolario 18.12.. *Sea* A *un álgebra de von Neumann. Entonces* $A = BL(H)$ *si, y sólo si,* 0 *e* I *son las únicas proyecciones en* A^c.

Bibliografía. Textos básicos para seguir el tema son [**Helm**], [**KaRi**], [**Murp**], [**Ped1**], [**Saka**] y [**Take**]. Dada la importancia de las álgebras de von Neumann, existen varias monografías dedicadas al tema. En [**Dix2**], [**StZs**] y [**Topp**] el alumno podrá profundizar en la teoría. Recomendamos también la lectura de [**Hal2**] y [**Hal4**]. Los textos que tratan sobre teoría de operadores, por ejemplo [**DuSc**], suelen traer un capítulo dedicado a la resolución espectral de un operador autoadjunto.

Tema 19

Teoremas del biconmutante de von Neumann y de densidad de Kaplansky.

En el tema anterior hemos visto que toda álgebra de von Neumann es débilmente (fuertemente) cerrada, ahora vamos a probar que dicha propiedad caracteriza a las álgebras de von Neumann entre las subálgebras autoadjuntas con unidad de $BL(H)$. Este resultado, establecido en 1.929 y conocido como Teorema del biconmutante de von Neumann, es quizás el más importante de la teoría de las álgebras de von Neumann. El otro objetivo es probar otro resultado fundamental de dicha teoría conocido como Teorema de densidad de Kaplansky.

Denotaremos por H un espacio de Hilbert complejo. Nuestro primer resultado da una descripción de los funcionales débil y fuertemente continuos sobre $BL(H)$.

Proposición 19.1.. *Sea f un funcional lineal sobre $BL(H)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) Existen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_n \in H \quad / \quad f(F) = \sum_{i=1}^{n}(F(x_i)|y_i) \quad \forall F \in BL(H)$.
ii) f es débilmente continuo.
iii) f es fuertemente continuo.

Consecuencia de la proposición anterior es el siguiente corolario.

Corolario 19.2.. *El cierre de un subconjunto convexo de $BL(H)$ en las topologías débil y fuerte es el mismo. En particular todo subespacio de $BL(H)$ fuertemente cerrado lo es débilmente.*

El corolario anterior, la identificación entre $BL(H^{(n)})$ y $M_n(BL(H))$ y bastante ingenio, entre otras cosas, permiten establecer el siguiente teorema.

Teorema 19.3. . **(Teorema del biconmutante de von Neumann).** ([**KaRi**, Theorem 5.3.1], [**Ped2**, Theorem 4.6.7]). *Sea A una subálgebra autoadjunta de $BL(H)$ que contiene la unidad. Las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

i) $A = A^{cc}$.
ii) A es débilmente cerrada en $BL(H)$.
iii) A es fuertemente cerrada en $BL(H)$.

Es usual en los textos definir las álgebras de von Neumann como aquellas subálgebras autoadjuntas de $BL(H)$ que satisfacen *i)* o *ii)* del teorema anterior (von Neumann las llamaba anillos de operadores). De los comentarios previos a la Definición 18.5 se sigue que, si $\mathcal{S}$ es cualquier subconjunto autoadjunto de $BL(H)$, entonces $\mathcal{S}^c$ es un álgebra de von Neumann. En particular si $\mathcal{S}$ es un álgebra de von Neumann $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^c$ es una nueva álgebra de von Neumann y es justamente el centro común de las dos álgebras. Si $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^c = \mathbb{C}I$ se dice que $\mathcal{S}$ es un **factor** ($\mathcal{S}$ es lo más anticonmutativa que puede serlo). $BL(H)$ es un factor y lo sorprendente es que existan muchos, así, se sabe que hay un número infinito numerable de factores no isomorfos sobre un espacio de Hilbert complejo infinito dimensional numerable.

El Corolario 18.11 y el Teorema 19.3 constituyen resultados sobre aproximación en Teoría de operadores. En la misma linea está el Teorema de densidad de Kaplansky. Para proceder a su demostración necesitamos determinar la continuidad fuerte de ciertas aplicaciones.

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua, por el Corolario 16.11 (Teorema espectral de Hilbert-Neumann), sabemos que para cada operador simétrico F en $BL(H)$ (o para cada operador normal F en $BL(H)$), $f(F)$ está definido y es un operador normal en $BL(H)$. Si se verifica que siempre que una red de operadores simétricos $F_\lambda \xrightarrow{s} F$ también $f(F_\lambda) \xrightarrow{s} f(F)$, se dice que f es **fuertemente continua** sobre el conjunto de los operadores autoadjuntos (normales) de $BL(H)$.

Lema 19.4.. ([**KaRi**, Proposition 5.3.2]). *Toda función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (o $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) es fuertemente continua sobre conjuntos acotados de operadores autoadjuntos (normales) en $BL(H)$.*

La aplicación que a cada operador autoadjunto $F \in Sim\,(BL(H))$ asocia el operador unitario $(F - iI)(F + iI)^{-1}$ se llama **transformación de Cayley**. Dicha transformación es una biyección de $Sim\,(BL(H))$ sobre el conjunto de los operadores unitarios U con $1 \notin sp(U)$. La siguiente proposición es de demostración elemental.

Proposición 19.5.. *La transformación de Cayley es fuertemente continua.*

Haciendo uso del Lema 19.4, de la Proposición 19.5 y de que el conjunto de los operadores unitarios está evidentemente acotado, se demuestra:

Teorema 19.6.. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y se anula en infinito, entonces f es fuertemente continua sobre $Sim\,(BL(H))$.*

Podemos ya, con ayuda de este teorema, probar:

Teorema 19.7. **(Teorema de densidad de Kaplansky).** ([**KaRi**, Theorem 5.3.5]). *Sea A una subálgebra autoadjunta de $BL(H)$. Entonces se verifica que $B(\overline{A}) \subset \overline{B(A)}$ y $Sim\ B(\overline{A}) \subset \overline{Sim\,B(A)}$, donde la letra B denota la bola unidad del espacio respectivo y $\overline{}$ denota el cierre para la topología fuerte.*

Dado que el producto en $BL(H)$ es fuertemente continuo cuando nos restringimos a conjuntos acotados, el teorema anterior nos lleva a:

COROLARIO 19.8. *Sea A una subálgebra autoadjunta de $BL(H)$. Entonces $Pos\,(B(\overline{A})) \subseteq \overline{Pos\,(B(A))}$.*

Bibliografía. A las referencias bibliográficas del tema anterior se les puede añadir [**Aver**] y [**Ped2**].

Capítulo IV

Geometría de las álgebras de Banach.

Tema 20

Rango numérico.
La fórmula exponencial y sus primeras aplicaciones.

El objetivo que se persigue con este último capítulo es dar una caracterización geométrica de las C^*-álgebras entre las álgebras de Banach complejas con unidad. El punto de partida consiste en explotar la caracterización geométrica, independiente de la involución, de los funcionales positivos sobre una C^*-álgebra, que fué utilizada por Lumer (1.961) para definir el concepto de *"estado"* y *"elemento hermitiano"* en un álgebra de Banach compleja arbitraria. Conceptos que pueden ser llevados al caso de un espacio normado arbitrario en el que se ha seleccionando un elemento de norma uno con la ventaja de no sólo extender resultados, sobre "rango numérico" en álgebras de Banach unitales, a un contexto más general, sino a veces mejorar y clarificar aquellos. Con este primer tema se pretende cubrir una serie de resultados sobre el rango numérico de un elemento en un álgebra normada unital que serán la base del posterior desarrollo de la teoría. El principal resultado es la fórmula exponencial para el rango numérico de un elemento en un álgebra de Banach unital.

DEFINICIÓN 20.1.. *Un* **espacio de rango numérico** *es un par (X, u) formado por un espacio normado X en el que se ha seleccionado un elemento, u, de norma uno. El* **espacio de estados** *viene definido por el conjunto $D(X, u) = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1, f(u) = 1\}$. Y el* **rango numérico** *de un elemento x viene dado por $V(X, x) = \{f(x) : f \in D(X, u)\}$, que notaremos por $V(x)$ cuando no haya lugar a confusión.*

A partir de los teoremas de Hahn-Banach y Banach-Alaoglu se sigue que $D(X, u)$ es un subconjunto no vacio de X^*, convexo y débil-$*$-compacto. Por consiguiente $V(x)$ es un subconjunto convexo compacto no vacío de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una primera observación es que el rango numérico de un elemento $V(X, x)$ no varía si consideramos subespacios Y de X con tal de que $u \in Y$ ($V(X, x) = V(Y, x)$) disponiendo así de la ventaja de poder trabajar en muchos casos con el subespacio engendrado por $\{x, u\}$. La siguiente proposición recoge una serie de propiedades elementales del rango numérico.

PROPOSICIÓN 20.2. . *Sea (X, u) un espacio de rango numérico. Para $x, y \in X$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ se tiene:*

i) $V(\lambda u + \mu x) = \lambda + \mu V(x)$.
ii) $V(x + y) \subseteq V(x) + V(y)$.
iii) $|\alpha| \leq \|x\| \quad \forall \alpha \in V(x)$.

Una primera determinación del rango numérico viene dada por la siguiente proposición cuya demostración (ver [**BoDu3**, Lemma 10.5]) utiliza como único ingrediente el Teorema de Hanh-Banach.

Proposición 20.3.. *Sea* (X, u) *un espacio de rango numérico. Entonces para cada* $x \in X$ *se tiene*

$$V(x) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{K}} \overline{B_{\mathbb{K}}}(\lambda, \|\lambda u - x\|)$$

donde $\mathbb{K}$ *(*$= \mathbb{R}, \mathbb{C}$*) designa el cuerpo base y, para* $\lambda \in \mathbb{K}$ *y* $\varepsilon \geq 0$,

$$\overline{B_{\mathbb{K}}}(\lambda, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{K} : |z - \lambda| \leq \varepsilon\}.$$

Una primera consecuencia de la proposición anterior es que las aplicaciones lineales contractivas que conservan los elementos distingidos, entre espacios de rango numérico, *"achican"* rangos numéricos y, en particular, el caracter *"local"* del rango numérico. Una segunda consecuencia que tiene interé*s*, sobre todo, cuando se consideran cocientes de álgebras de Banach unitales respecto a ideales propios cerrados, es el siguiente corolario.

Corolario 20.4.. *Sea* (X, u) *un espacio de rango numérico y* M *un subespacio cerrado de* X *tal que* $\|u + M\| = 1$. *Entonces* $(X/M, u + M)$ *es un espacio de rango numérico (a* M *se le llama un* **ideal de rango numérico***) y para cada* $x \in X$ *se tiene*

$$V(X/M, x + M) = \bigcap_{m \in M} V(X, x + m).$$

Si A es un álgebra normada unital, entonces A se considerará siempre canónicamente como un espacio de rango numérico en el que se ha elegido la unidad e como elemento distinguido. También de la proposición anterior se obtiene:

Corolario 20.5.. *Para todo elemento* a *de un álgebra de Banach unital se verifica que* $sp(a) \cap \mathbb{K} \subseteq V(a)$.

Si (X, u) es un espacio de rango numérico, con X espacio normado real, entonces la Proposición 20.3 nos dice que $V(x) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} [\lambda - \|\lambda u - x\|, \lambda + \|\lambda u - x\|]$ y por consiguiente

$$\operatorname{Max} V(x) = \operatorname{Inf} \{\lambda + \|\lambda u - x\| : \lambda \in \mathbb{R}\} = \lim_{\lambda \to \infty} \{\lambda + \|\lambda u - x\|\},$$

donde para obtener la última igualdad hemos aplicado que la función $\lambda \mapsto \lambda + \|\lambda u - x\|$ es decreciente. Sustituyendo λ por $\frac{-1}{\alpha}$ se tiene pues

$$\operatorname{Max} V(x) = \operatorname{Inf} \left\{ \frac{\|u + \alpha x\| - 1}{\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}^+ \right\} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u + \alpha x\| - 1}{\alpha} .$$

Si (X, u) es un espacio de rango numérico, con X espacio normado complejo y notamos por $X_{\mathbb{R}}$ el espacio real subyacente a X, entonces la aplicación $f \mapsto Re(f)$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal isométrica de X^* en $(X_{\mathbb{R}})^*$ que aplica biyectivamente $D(X, u)$ en $D(X_R, u)$ y en consecuencia $V(X_{\mathbb{R}}, x) = Re(V(X, x))$.

Teniendo en cuenta las dos observaciones anteriores podemos enunciar:

Proposición 20.6.. *Sea (X,u) un espacio de rango numérico. Entonces $\forall x \in X$,*

$$\operatorname{Max} Re\, V(x) = \operatorname{Inf}\left\{\frac{\|u+\alpha x\|-1}{\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}^+\right\} = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|u+\alpha x\|-1}{\alpha}\ .$$

Ahora estamos en condiciones de establecer el principal resultado del tema, la **fórmula exponencial** para el rango numérico de un elemento en un álgebra de Banach unital, la cual juega un importante papel en la teoría.

Teorema 20.7.. **(Fórmula exponencial).** ([**DoBe**, Theorem 42.1]). *Sea A un álgebra de Banach unital. Entonces para cada $a \in A$ se verifica:*

$$\operatorname{Max} Re\, V(a) = \operatorname{Sup}\left\{\frac{\log\|exp(\alpha a)\|}{\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}^+\right\} = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\log\|exp(\alpha a)\|}{\alpha}.$$

Esquema de la demostración: Se considera la función $\phi(a) = \log\|\exp(\alpha a)\|$. Utilizando el hecho de que $\exp(\alpha a) = e + \alpha a + O(\alpha^2)$, la proposición anterior y la Regla de la Cadena para las derivadas, se deduce fácilmente que $\operatorname{Max} Re\, V(a) = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\phi(\alpha)}{\alpha}$. Establecer la otra igualdad requiere un poco más de tecnicismo. Se puede utilizar el hecho de que ϕ es subaditiva o bien que

$$\exp(\frac{1}{\alpha})\|\exp(a)\| = \|\exp(\frac{1}{\alpha})\exp(a)\| = \|\exp(a+\frac{e}{\alpha})\| \leq \exp\|a+\frac{e}{\alpha}\|,$$

de donde $\|\exp(a)\| \leq \exp\left(\frac{\|e+\alpha a\|-1}{\alpha}\right)$ y por consiguiente $\|\exp(a)\| \leq \exp(\operatorname{Max} Re\, V(a))$.

El resto del tema está dedicado a obtener las consecuencias más elementales del teorema anterior.

Definición 20.8.. *Dado un elemento x de un espacio de rango numérico se define el* **radio numérico** *de x, denotado por $v(x)$, como $v(x) := \operatorname{Max}\{|\lambda| : \lambda \in V(x)\}$.*

Si a es un elemento de un álgebra de Banach compleja unital, el Corolario 20.5 y la Proposición 20.2 *iii)* dan: $r(a) \leq v(a) \leq \|a\|$, propiedad que utilizaremos en lo sucesivo sin previo aviso.

Si A es un álgebra normada compleja unital, una sencilla consecuencia del teorema anterior, las fórmulas de Cauchy para la función entera $z \mapsto \exp(za)$ y el hecho de que la inclusión de A en su completada es isométrica, es el siguiente corolario.

Corolario 20.9.. **(Crabb).** *Sea A un álgebra normada compleja unital. Entonces para cada $a \in A$ y cada natural $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\|a^n\| \leq n!\big(\frac{e}{n}v(a)\big)^n$, donde e denota el número real e. En particular para $n = 1$ se tiene que $\|a\| \leq e\, v(a)\ \ \forall a \in A$ (*__Teorema de Bohnenblust-Karlin__ [**BoKa**]*).*

Se comprueba fácilmente que en $\mathbb{C}$, vista como álgebra de Banach unital real, $V(i) = \{0\}$, por lo que el resultado anterior no es válido en el caso real. Consecuencia inmediata del anterior corolario es este otro.

Corolario 20.10..

i) *En toda álgebra normada compleja unital A, el espacio de estados de A separa los puntos de A.*

ii) *La unidad de un álgebra de Banach unital es un punto extremo de la bola unidad. Más generalmente, si (X, u) es un espacio de rango numérico en el que el radio numérico $v(.)$ es una norma, entonces u es un punto extemo de la bola unidad.*

Introducimos ahora los conceptos de elemento disipativo y elemento hermitiano y como consecuencia del Teorema 20.7 se obtiene una caracterización de dichos conceptos.

Definición 20.11.. *Un elemento x de un espacio de rango numérico (X, u) se dice* **disipativo** *si $Re\, V(x) \subseteq \mathbb{R}_0^-$; si X es complejo y $V(x) \subseteq \mathbb{R}$, diremos que x es* **hermitiano**. *Al conjunto de dichos elementos los notaremos repestivamente por $Dis(X)$ y $H(X)$.*

Proposición 20.12.. *Sea A un álgebra de Banach unital y a un elemento de A. Entonces:*

i) *a es disipativo $\Leftrightarrow \|\exp(\alpha a)\| \leq 1 \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$.*

ii) *Si A es compleja, a es hermitiano $\Leftrightarrow \|\exp(i\alpha a)\| = 1 \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.*

Si A es un álgebra normada compleja unital y $a \in H(A) \cap iH(A)$, la Proposición 20.2 *i)* nos da que $V(a) = 0$ y el Corolario 20.10 *i)* nos dice que $a = 0$, por lo que la suma $H(A) + iH(A)$ es directa. Si se supone que A es también completa, podemos enunciar:

Proposición 20.13.. *Si A es un álgebra de Banach compleja unital, entonces se tiene que $H(A) \cap iH(A) = 0$ y $H(A) \oplus iH(A)$ es un subespacio cerrado.*

En conexión con la proposición anterior conviene hacer notar que $H(A) + iH(A)$ no es necesariamente una subálgebra de A. Utilizando la caracterización de los elementos disipativos (Proposición 20.12) se prueba:

Proposición 20.14.. *Sean (X, u) un espacio complejo completo de rango numérico, T un elemento disipativo del álgebra de Banach unital $BL(X)$ con $T(u) = 0$ y $x \in H(X)$. Entonces $T(x) \in H(X)$. En particular si $F \in H(BL(X))$ con $F(u) = 0$, $\ iF(x) \in H(X)$.*

A partir de la última afirmación de est proposición obtenemos:

Corolario 20.15.. *Sean A un álgebra normada compleja unital y $h, k \in H(A)$. Entonces $i(hk - kh) \in H(A)$.*

Bibliografía. El contenido de este tema constituye la parte más clásica y elemental de la teoría de rango numérico en álgebras de Banach unitales. Hemos seguido el texto de Rodríguez [**Rod2**], donde el autor, mediante novedosas desmostraciones, logra una sistematización y simplificación del material expuesto. Otros textos más clasicos son [**BoKa**], [**BoDu1**], [**BoDu3**, §10], [**DoBe**] y [**Istr**].

Tema 21

El Teorema de Sinclair para elementos hermitianos de un álgebra de Banach compleja unital.

Como ya conocemos, un hecho decisivo en el desarrollo de la teoría de C^*-álgebras es que para elementos normales, en particular simétricos, el radio espectral coincide con la norma. Por otra parte no es difícil probar, utilizando la propiedad estelar, las Proposiciones 20.6 y 20.12 y el Corolario 20.10 que, en el caso de C^*-álgebras unitales, un elemento es simétrico si, y sólo si, es hermitiano. Se comprende así enseguida la más que conveniencia de tener asegurada la coincidencia del radio espectral y la norma en elementos hermitianos de un álgebra de Banach compleja unital. Esta propiedad constituye una pieza clave para establecer el Teorema de Vidav-Palmer. En este tema vamos a probar algo más fuerte, en concreto se trata de probar que $r(\lambda e + \mu h) = \|\lambda e + \mu h\|$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ y h un elemento hermitiano de un álgebra de Banach compleja unital con unidad e, resultado conocido como Teorema de Sinclair.

Comenzamos recogiendo los dos siguientes lemas de la teoría de funciones de una variable compleja.

Lema 21.1.. [**BoDu2**, Lemma 26.3]. *Sea F una función entera tal que $|F(z)| \leq \exp(Im\, z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces se tiene que*

$$F(0)\cos\theta + F'(0)\,\mathrm{sen}\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n F(n\pi + \theta),$$

donde $\gamma_n = \frac{(-1)^n}{(n\pi+\theta)^2}\,\mathrm{sen}^2\theta$ y $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Lema 21.2.. [**BoDu2**, Lemma 26.8], [**Rod2**, Lema XI.3]. *Sea F una función entera verificando $F(n) = 0$ para todo número entero n y supongamos que existe $M > 0$ tal que $|F(z)| \leq M \exp|Im\,(\pi z)|$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Entonces $F(z) = F(\frac{1}{2})\,\mathrm{sen}\pi z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.*

Del Lema 21.1 y de la determinación del máximo de la parte real del rango numérico (Teorema 20.7) se obtiene:

PROPOSICIÓN 21.3.. *Sea h un elemento hermitiano de un álgebra de Banach compleja unital con $v(h) \leq 1$. Entonces para cada $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ se verifica que*

$$(\cos\theta)e + i(\operatorname{sen}\theta)h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n \exp(i(n\pi + \theta)h),$$

donde $\gamma_n = \frac{(-1)^n}{(n\pi+\theta)^2} \operatorname{sen}^2\theta$.

De la proposición anterior se sigue sin dificultad el siguiente resultado al que nos referiremos como el Teorema pequeo de Sinclair.

COROLARIO 21.4.. **(Teorema pequeo de Sinclair)** [**Rod2**, Teorema XI.1]. *Sea h un elemento hermitiano en un álgebra de Banach compleja unital. Entonces*

$$v(\lambda e + \mu h) = \|\lambda e + \mu h\| \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

La particularización de la Proposición 21.3 con $\theta = \frac{\pi}{2}$ junto con el Lema 21.2 y la observación de que 1 es un punto extemo de la bola unidad de $\mathbb{C}$ permite demostrar el siguiente:

TEOREMA 21.5.. [**Rod2**, Proposición XI.9]. *Sea h un elemento hermitiano de un álgebra de Banach compleja unital con $v(h) \leq 1$ y f un funcional lineal continuo verificando $\|f\| = f(e) = f(h) = 1$. Entonces f es multiplicativo en la subálgebra cerrada engendrada por $\{e, h\}$.*

La demostración del Teorema de Sinclair se termina ahora fácilmente usando el anterior teorema y el Teorema pequeo de Sinclair (Corolario 21.4).

TEOREMA 21.6.. **(Teorema de Sinclair)** [**Sin1**], [**Rod2**, Corolarios XI.6 y XI.7]. *Sea h un elemento hermitiano en un álgebra de Banach compleja unital. Entonces*

$$r(\lambda e + \mu h) = \|\lambda e + \mu h\| \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Una consecuencia inmediata del Teorema de Bohnenblust-Karlin (Corolario 20.9) es que si a es un elemento de un álgebra normada compleja unital tal que $v(a) = 0$ entonces $a = 0$. Esta propiedad no es cierta para álgebras reales como se puede comprobar fácilmente tomando $a = i$ en $\mathbb{C}$ vista como álgebra de Banach real. Esto pone de manifiesto el interés del próximo resultado cuya demostración es casi obvia vía complexificación y que más tarde nos será de utilidad.

Corolario 21.7.. *Sea A un álgebra de Banach real unital y sea $a \in A$ con $v(a) = 0$. Entonces $r(a) = \|a\|$. Si además $v(a^2) = 0$, entonces $a = 0$.*

Se insistirá en la no necesidad esencial de la complitud en los Teoremas 21.5 y 21.6, así como en los Corolarios 21.4 y 21.7. También el Teorema pequeo de Sinclair (Corolario 21.4) puede trasladarse al caso no-asociativo sin más que aplicarlo al operador de multiplicación por la izquierda por h, L_h, que es un elemento hermitiano del álgebra de Banach unital $BL(A)$.

Bibliografía. La estrategia de la demostración del Teorema de Sinclair sigue esencialmente los pasos de la misma dados en [**BoDu2**, §26], con algunas simplificaciones tomadas de [**Rod2**, §X, XI]. Pueden también consultarse [**BoDu1**], [**BoDu3**], [**Istr**] y el articulo de Sinclair [**Sin1**]. Extensiones no asociativas de los resultados centrales del tema aparecen en [**Mart**] y [**Rod2**].

Tema 22

Rango numérico de operadores. Transposición de Arens. Rango numérico en el bidual de un álgebra de Banach.

En este tema nos ocupamos de presentar parte de la teoría del *"rango numérico espacial"* para operadores lineales y continuos en un espacio de Banach. Esta teoría es muy anterior a la del rango numérico de elementos de álgebras de Banach unitales que hemos tratado en los temas inmediatamente anteriores y de hecho constituye, por medio de los resultados que aquí se expondrán, la inspiración de esta última. Una amplia resea histórica al respecto puede consultarse en la introducción de [**BoDu1**]. Asímismo estudiamos la transposición de Arens.

Si F es un operador lineal y acotado en un espacio de Banach X, el **rango numérico espacial**, $W(F)$, de F se define como:

$$W(F) := \{f(F(x)) : x \in X, f \in X^*, \|f\| = \|x\| = f(x) = 1\}.$$

Claramente $W(F)$ está contenido en el rango numérico, $V(F)$, de F como elemento del álgebra de Banach unital $BL(X)$. El objetivo principal de este tema será establecer la relación existente entre los conjuntos $W(F)$ y $V(F)$, no olvidando el especial comportamiento de esta relación en el caso particular de ser X un espacio de Hilbert (en cuyo caso, claramente, $W(F) = \{(F(x)|x) : x \in X, \|x\| = 1\}$) y extrayendo algunas consecuencias útiles.

Como primera providencia probaremos (siguiendo [**BoDu2**, Pags. 5-6]) el siguiente clásico teorema de Toepliz y Hausdorff.

TEOREMA 22.1.. *El rango numérico espacial de cada operador lineal continuo en un espacio de Hilbert es convexo.*

Dado un espacio de Banach X, notaremos

$$\pi(X) = \{(x, f) \in X \times X^* : \|x\| = \|f\| = f(x) = 1\}$$

y por Γ un subconjunto de $\pi(X)$ cuya proyección sobre X sea densa en la esfera unidad de X.

Utilizando que para todo $F \in BL(X)$ se tiene $W(F) \subset V(F)$, y la Proposición 20.6 probamos:

Lema 22.2.. [**BoDu1**, Lemma 9.2]. *Sea X un espacio de Banach. Entonces para cada $F \in BL(X)$ se tiene que*

$$\text{Inf } \left\{ \frac{\|I + \alpha F\| - 1}{\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}^+ \right\} = \text{Sup } Re \{ f(F(x)) : (x, f) \in \Gamma \}.$$

Ahora, como $\text{Max}\, Re\, V(F) = \text{Sup}\, Re\, \{f(F(f)) : (x, f) \in \Gamma\}$ (Proposición 20.6), unido al hecho de que $V(F)$ es convexo cerrado da, reemplazando F por un apropiado múltiplo escalar de él, el principal resultado del tema, estableciendo una relación entre $W(F)$ y $V(F)$.

Teorema 22.3.. *Sea X un espacio de Banach y sea Γ un subconjunto de $\pi(X)$ cuya proyección natural sobre X sea densa en la esfera unidad de X. Entonces para cada operador $F \in BL(X)$ se tiene:*

$$V(F) = \overline{co}\{f(F(x)) : (x, f) \in \Gamma\},$$

donde $\overline{co}$ denota la envolvente convexo-cerrada.

Corolario 22.4.. *El rango numérico de cada operador lineal y acotado en un espacio de Banach es la envolvente convexo cerrada del rango numérico espacial. Si el espacio de Banach es de hecho un Hilbert, el rango numérico es el cierre del rango numérico espacial.*

El Teorema de Bishop-Phelps nos dice que el conjunto de los f en la esfera unidad de X^* tal que $(x, f) \in \pi(X)$ para algún x, es norma denso en la esfera unidad de X^*, lo que unido al Teorema 22.3 da la siguiente expresión para el rango numérico de un elemento en $BL(X^*)$.

Corolario 22.5.. *Sea F un operador lineal continuo en el dual de un espacio de Banach X. Entonces*

$$V(F) = \overline{co}\{(Ff)(x) : (x, f) \in \pi(X)\}.$$

En estos momentos, y para obtener la principal aplicación de nuestros resultados (el Teorema de Vidad-Palmer, en el tema siguiente), se introduce la transposición de Arens [**Aren**].

Dados tres espacios normados X, Y, Z sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y una función $f : X \times Y \to Z$ bilineal y continua se define la **traspuesta de Arens** de f como la función bilineal y continua $f^* : Z^* \times X \to Y^*$ definida por $f^*(g, x)(y) := g(f(x, y))$. Esta construcción puede ser iterada para dar lugar a una aplicación bilineal continua $f^{***} : X^* \times Y^* \to Z^*$ que es de hecho una extensión de f una vez que se considera cada espacio sumergido en su bidual via la inyección canónica. A esta tercera traspuesta de f se le conoce con el nombre de la **extensión de Arens** de f y la denotaremos por f^t. También se define la revertida de f como la función bilineal continua $f^r : Y \times X \to Z$ dada por $f^r(y, x) := f(x, y)$. Ya que f^{rt} es una extensión de f^r, f^{rtr} es otra extensión de f. Surge así de modo natural la pregunta: ¿es $f^{rtr} = f^t$?, o lo que es equivalente: ¿es siempre cierto que $f^{rt} = f^{tr}$?. La respuesta es que la igualdad anterior no es siempre cierta, y en caso de que lo sea se dice que f es **Arens-regular**.

La siguiente proposición, de fácil demostración, establece algunas propiedades de continuidad relativa a la topología w^* de la extensión de Arens de una aplicación f.

Proposición 22.6.. *Sean X, Y, Z tres espacios normados sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$) y f una aplicación bilineal continua de $X \times Y$ en Z. Entonces*

i) $\|f^*\| = \|f\|$ y f^* es w^*-continua en la primera variable (es decir, $\forall x \in X$, la función $g \mapsto f^*(g, x)$ de Z^* en Y^* es $\sigma(Z^*, Z) \times \sigma(Y^*, Y)$ continua).

ii) f^{***} es w^*-continua en la segunda variable cuando la primera se fija en un elemento de X (visto X en su bidual).

Introducimos la **aplicación de dualidad** de un espacio de Banach X como la aplicación conjunto-valuada $x \mapsto D(X, x)$ de la esfera unidad $S(X)$ de X en los subconjuntos de la esfera unidad $S(X^*)$ de X^*. Si $\mathcal{T}$ es una topología sobre X^* diremos que la aplicación de dualidad es $\|.\| \times \mathcal{T}$**-semicontinua superiormente** en un punto $x \in S(X)$ si para todo V $\mathcal{T}$-entorno de cero en X^*

$$\exists \delta > 0 : \|y - x\| < \delta \quad (y \in S(X)) \quad \Rightarrow D(X, y) \subset D(X, x) + V.$$

A partir de los Teoremas de Krein-Milman y de separación de convexos de Hahn-Banach establecemos:

Teorema 22.7.. [**AOPR**, Theorems 5.1, 3.4]. *Sea X un espacio de Banach. Si $g \in S(X^*)$ y la aplicación dualidad de X^* es $\|.\| \times \|.\|$-semicontinua superiormente en g, entonces para cada $f \in X^*$ se verifica en el espacio de rango numérico (X^*, g) que*

$$V(f) = \overline{\{f(x) : x \in S(X), g(x) = 1\}}.$$

En las álgebras de Banach unitales se tiene el siguiente resultado:

Teorema 22.8.. [**MMPR**, Proposition 4.5]. *Si A es un álgebra de Banach unital, entonces la aplicación dualidad de A es $\|.\| \times \|.\|$-semicontinua superiormente en la unidad.*

Consecuencia directa de los dos resultados anteriores es el siguiente:

Corolario 22.9.. *Sea A un álgebra de Banach unital. Si A es el espacio dual de un espacio de Banach A_*, entonces para cada $a \in A$ se verifica que:*

$$V(a) = \overline{\{a(a_*) : a_* \in S(A_*), e(a_*) = 1\}}.$$

Si A es un álgebra normada y consideramos la extensión de Arens del producto de A, dicha extensión da lugar a un nuevo "producto" en A^{**} dado por $FG(f) = F([G, f])$, donde $F, G \in A^{**}$, $f \in A^*$ y $[G, f]$ es el elemento de A^* definido por $[G, f](a) = G(< f, a >)$, donde $< f, a > (b) = f(ab)$. Es inmediato comprobar que es asociativo y si A posee unidad entonces la inmersión canónica de dicha unidad en A^{**} es unidad para esta última. Estamos ahora en condiciones de enunciar el siguiente resultado que se obtiene como consecuencia del Corolario 22.5 o simplemente particularizando el corolario anterior.

Corolario 22.10.. [**BoDu1**, Theorem 12.2]. *Sea A un álgebra de Banach unital. Para cada $F \in A^{**}$ se verifica que*

$$V(F) = \overline{\{F(f) : \|f\| = f(e) = 1\}}.$$

Bibliografía. En este tema los textos básicos son los de Bonsal-Duncan [**BoDu1**], [**BoDu2**] y [**BoDu3**]. También pueden consultarse [**Har1**] y [**Istr**].

Tema 23

EL Teorema de Vidav-Palmer.

Concluimos este programa con el presente tema dedicado a la exposicin de la caracterización geométrica libre de producto de las C^*-álgebras unitales dada por el Teorema de Vidav-Palmer, que sin lugar a dudas representa uno de los más fructíferos resultados de la teoría de rango numérico en álgebras de Banach unitales.

A título de motivación se demostrará, como fácil consecuencia de la Proposición 20.6, la observación siguiente que constituye el punto de inspiración del teorema que reseamos.

Proposición 23.1.. *Si A es una C^*-álgebra unital, se tiene que $A = H(A) + iH(A)$; más concretamente: $H(A) = \{a \in A \ : \ a^* = a\}$.*

Ello nos dice que la involución de la C^*-álgebra A queda determinada por la geometría "local" del espacio de Banach subyacente y la unidad. Esta observación debió ser la que dió lugar a una famosa conjetura de Vidav hacia los años cincuenta, en el sentido de que el axioma $A = H(A) + iH(A)$ debe caracterizar a las C^*-álgebras entre las álgebras de Banach complejas unitales. Vidav [**Vida**] en 1.956 establecía el siguiente resultado:

Sea A un álgebra de Banach compleja unital tal que:

i) $A = H(A) + iH(A)$.
ii) Si $h \in H(A)$ entonces $h^2 = h_1 + ih_2$ con $h_1, h_2 \in H(A)$ verificando $h_1h_2 = h_2h_1$.

Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1) *La descomposición $a = h + ik$, con $h, k \in H(A)$ es única.*
2) *$* : h + ik \mapsto h - ik$ es una involución sobre A y $\|h^2\| = \|h\|^2 \ \ \forall h \in H(A)$.*
3) *$|a| = \|a^*a\|^{1/2}$ es una norma sobre A que la convierte en C^*-álgebra y es equivalente a la norma original.*

Tras diez años B. W. Glickfel y E. Berkson probaron que, de hecho A, es una C^*-álgebra con su norma original y en 1.968 T. W. Palmer probaba que la condición *ii)* es innecesaria a la vez que daba una simple prueba de que A es una C^*-álgebra bajo su norma original, estableciendo así la siguiente bella y útil caracterización de las C^*-álgebras unitales:

Teorema 23.2. . **(Teorema de Vidav-Palmer).** *Sea A un álgebra de Banach compleja unital satisfaciendo $A = H(A) + iH(A)$. Entonces A, bajo la involución $*$ definida por $(h+ik)^* = h - ik$, $(h, k \in H(A))$, es una C^*-álgebra.*

El objetivo de este tema es llegar a probar el teorema anterior. Hay que hacer notar que en virtud de la Proposición 20.13, si A satisface las hipótesis del Teorema 23.2, entonces la aplicación $* : h + ik \mapsto h - ik$ está unívocamente definida y es una involución sobre el espacio vectorial complejo subyacente a A, a la que llamaremos la **involución natural** de A. En la demostración del Teorema de Vidav-Palmer se distinguen dos etapas:

a) La involución natural $*$ de A es multiplicativa, es decir: $(ab)^* = b^*a^* \quad \forall a, b \in A$.
b) A satisface el axioma de Gelfand-Naimark: $\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A$.

Ambos resultados marcan dos etapas bien diferenciadas y cuya consecución ha sido históricamente bien distante (ver [**BoDu1**, Pag. 56-57]). La prueba de a) que presentamos se debe a A. Rodriguez [**Rod4**], que posee la ventaja de no necesitar la asociatividad del álgebra A.

Una primera observación es que si A es un álgebra de Banach compleja unital verificando $A = H(A) + iH(A)$ y consideramos la funciones bilineales g_1 y g_2 de $H(A) \times H(A)$ en $H(A)$ definidas por

$$hk = g_1(h, h) + ig_2(h, k) \quad (h, k \in H(A)),$$

entonces el hecho de que la involución natural sea multiplicativa equivale a que g_1 sea simétrica y g_2 sea antisimétrica. La simetría de g_1 se obtiene como una fácil consecuencia del Corolario 20.15 (utilícese $i(hk - kh) = i(g_1(h, k) - g_1(k, h)) - (g_2(h, k) - g_2(k, h))$, por lo que el problema se concentra en probar la antisimetría de g_2. Por otra parte el Teorema pequeo de Sinclair (Corolario 21.4) da que $\|k\| \leq \|h + ik\|$ (continuidad de $*$) y $\|h + i\lambda e\|^2 = \|h\|^2 + \lambda^2$ para todo $h, k \in H(A)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$; lo que unido a la igualdad

$$(h + i\mu e)(k + i\lambda e) = (g_1(h, k) - \lambda\mu e) + i(g_2(h, k) + \lambda h + \mu k),$$

permite deducir la siguiente propiedad para la función g_2:

Lema 23.3..

$$\|g_2(h, k) + \lambda h + \mu k\|^2 \leq \left(\|h\|^2 + \mu^2\right)\left(\|k\|^2 + \lambda^2\right) \quad \forall h, k \in H(A),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La antisimetría de g_2, y en consecuencia la afirmación a), se concluye con el siguiente resultado en cuya demostración se involucran gran parte de los resultados de los tres temas anteriores (Proposición 20.6, Teorema 20.7, Corolario 21.7 y Proposición 22.6), así como los Teoremas de Goldstine, Banach-Alaoglú y Krein-Milman. Dicha demostración puede verse claramente expuesta en [**Rod4**].

Proposición 23.4.. *Sean X un espacio de Banach real y $f : X \times X \to X$ una aplicación bilineal satisfaciendo*

$$\|f(x,y)+\lambda x+\mu y\|^2 \leq \left(\|x\|^2+\mu^2\right)\left(\|y\|^2+\lambda^2\right) \quad \forall x,y\in X,\ \forall \lambda,\mu\in \mathbb{R}.$$

Entonces f es antisimétrica.

La prueba de la afirmación b) utiliza como herramientas principales el Teorema de Ptak (Teorema 15.9) y el siguiente Teorema de Russo-Dye para C^*-álgebras que tiene interés en sí mismo.

Teorema 23.5.. **(Russo-Dye)** [**BoDu3**, Theorem 38.13]. *Sea B una C^*-álgebra unital. Entonces la bola unidad cerrada de B es la envolvente convexo cerrada del conjunto $\{\exp(ib) : b \in SimB\}$.*

La demostración de b) se concluye ahora como sigue: La parte a) nos dice que A es un álgebra involutiva donde $Sim(A) = H(A)$, luego el Corolario 20.5 nos dice que A es un álgebra de Banach hermitiana y en consecuencia el Teorema de Pták (Teorema 15.9) da que $|a| := \sqrt{r(a^*a)}$ es una B^*-seminorma en A. Por consiguiente la prueba quedará concluida en cuanto establezcamos la igualdad $\|a\| = |a|$ para todo a en A. En primer lugar se observa que el Teorema de Sinclair (Teorema 21.6) y la continuidad de $*$ nos dan que $|.|$ es una norma equivalente a $\|.\|$ y por consiguiente $(A, |.|)$ es una C^*-álgebra. Por aplicación del Teorema de Russo-Dye a la C^*-álgebra $(A, |.|)$ y de la Proposición 20.12 a A se deduce que $\|a\| \leq |a|$ para todo a en A. Finalmente la eventual posibilidad de desigualdad estricta lleva a contradicción pues, teniendo en cuenta la igualdad de las normas en los elementos simétricos, en la hipótesis de ser $\|a\| < |a|$ se llegaría a

$$\|a^*a\| \leq \|a^*\|\ \|a\| < |a^*|\ |a| = |a^*a| = \|a^*a\|.$$

Terminada la demostración del Teorema de Vidad-Palmer, en el capítulo de aplicaciones se pueden dar algunas como las siguientes:

Corolario 23.6.. *Sean A una C^*-álgebra y M un ideal cerrado de A. Entonces M es $*$-invariante y A/M, con la norma e involución cociente, es una nueva C^*-álgebra.*

Si A es un álgebra de Banach con involución continua, hay una manera natural de definir una involución en A^{**} de la forma: $F^*(f) = F(f^*)^*$, donde $f \in A^*$, $F \in A^{**}$ y $f^*(a) = \overline{f(a^*)}$ para $a \in A$. Usando además el Corolario 22.10 se obtiene:

COROLARIO 23.7.. *El bidual de toda C^*-álgebra, con el producto de Arens e involución doble traspuesta de la dada, es una C^*-álgebra.*

Bibliografía. El contenido de este tema puede seguirse a través de [**BoDu1**, §6,7], [**BoDu3**, §38], [**DoBe**], [**Istr**], [**Pal1**], [**Rod4**], [**Rod6**] y [**Vida**]. Más corolarios del Teorema de Vidad-Palmer pueden verse en [**BoDu1**, §7]. Para resultados en ambiente no asociativo son referencias obligadas [**KaMR**], [**Rod3**], [**Rod4**] y [**Youn**].

Bibliography

[AdEK] Adasch, N., B. Ernst and D. Keim. *Topological Vector Spaces. The Theory without Convexity Conditions.* Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[AOPR] Aparicio, C., F. Oca$\pm a, R.Payá and A.Rodríguez.A non-smooth extension of Frechet differentiability of the normwi$

[Aren] Arens, R. The adjoint of a bilinear operation. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2 (1951), 839-848.

[Aup1] Aupetit, B. *Propiétés spectrales des àlgebres de Banach.* Lect. Notes in Math. 735, Springer-Verlag, 1979.

[Aup2] Aupetit, B. *A primer on spectral theory.* Springer-Varlag, New York, 1991.

[Aver] Averson, W. *An invitation to C^*-algebras.* Springer-Verlag, 1976.

[BaNa] Bachman, G. y L. Narici. *Análisis Funcional.* Tecnos, 1981.

[Bana] Banach, S. *Theory of Linear Operations.* North Holland, Amsterdam, 1987.

[Beau] Beauzamy, B. *Introduction to Banach Spaces and their Geometry.* North Holland, Amsterdam, 1982.

[Ber1] Berberian, S. K. *Introducción al espacio de Hilbert.* Teide, Barcelona, 1970.

[Ber2] Berberian, S. K. *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory.* Springer-Verlag, New York, 1974.

[BoKa] Bohnenblust, H. F. and S. Karlin. Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras. *Ann. of Math.* 62 (1955), 217-229.

[BoDu1] Bonsall, F. F. and J. Duncan. *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras.* Lect. Notes Series 2, London Math. Soc., 1971.

[BoDu2] Bonsall, F. F. and J. Duncan. *Numerical ranges II.* Lect. Notes Series 10, London Math. Soc., 1973.

[BoDu3] Bonsall, F. F. and J. Duncan. *Complete Normed Algebras.* Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[Bou1] Bourbaki, N. *Topologie Générale.* Hermann, Paris, 1965.

[Bou2] Bourbaki, N. *Espaces Vectoriels Topologiques.* Hermann, Paris, 1966.

[Bou3] Bourbaki, N. *Théories Spectrales. Ch 1 et 2.* Hermann, Paris, 1967.

[BrPa] Brown, A. L. and A. Page. *Elements of Functional Analysis.* Van Nostrand, London, 1970.

[Chae] Chae, S. B. *Holomorphy and calculus in normed spaces.* Marcel Dekker, Inc. 1985.

[Cho1] Choquet, G. *Course D'Analyse. Tome II: Topologie.* Masson, Paris, 1964.

[Cho2] Choquet, G. *Topología.* Toray-Masson, Barcelona, 1971.

[Cohn] Cohn, D. L. *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, 1980.

[Con1] Conway, J. *Functions of One Complex Variable.* Springer-Verlag, New York, 1978.

[Con2] Conway, J. *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[CoCi] Cotlar, M. and R. Cignoly. *An Introduction to Functional Analysis.* North-Holland Publishing Company, 1974.

[Davi] Davies, E. B. *One-parameter semigroups.* Academic Press, 1980.

[Day] Day, M. *Normed Linear Spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[Dies] Diestel, J. *Sequences and Series in Banach Spaces.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[Dieu1] Dieudonné, J. *Fundamentos de Análisis Moderno.* Reverté, 1966.

[Dieu2] Dieudonné, J. *Elementos de Análisis Tomo II.* Reverté, 1977.

[Dieu3] Dieudonné, J. *History of Functional Analysis.* North Holland, Amsterdam, 1981.

[Dix1] Dixmier, J. *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars, 1969

[Dix2] Dixmier, J. *Les algèbres d'operateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann).* Gauthier-Villars, 1969

[DoBe] Doran, R. S. and V. A. Belfi. *Characterizations of C^*-algebras. The Gelfand-Naimark theorems.* Marcel Dekker, New York, 1986.

[DoWi] Doran, R. S. and J. Wichmann. The Gelfand-Naimark theorem for C^*-algebras. *L'Enseignement Mathématique* 23 (1977), 153-180.

[Dugu] Dugundji, J. *Topology.* Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[DuSc] Dunford, N. and J. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory.* Interscience, New York, 1957.

[Enfl] Enflo, P. A counterexample to the aproximation problem. *Acta Math.* 130 (1973), 309-317.

[Enge] Engelking, R. *General Topology.* Heldermann, Berlin, 1989.

[Flor] Floret, K. *Weakly compact sets.* Lect. Notes in Math. 801. Springer-Verlag, 1980.

[GeRS] Gelfand, I., D. Raikov and G. Shilov. *Commutative Normed Rings.* Chelsea, New York, 1964.

[Hal1] Halmos, P. R. *Measure Theory.* Van Nostrand, New York, 1950.

[Hal2] Halmos, P. R. *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity.* (Second Edition) Chelsea, New York, 1957.

[Hal3] Halmos, P. R. *A Hilbert Space Problem Book.* Van Nostrand, Pricenton, 1967.

[Hal4] Halmos, P. R. What does the spectral theory say?. *Amer. Math. Monthly* 70 (1973), 241-247.

[Har1] Harris, L. A. The numerical range of holomorphic functions. *American J. Math.* 93 (1971), 1005-1019.

[Har2] Harris, L. A. Banach algebras with involution and Möbius transformation. *J. Funct. Anal.* 11 (1972), 1-16.

[Helm] Helmberg, G. *Introduction to spectral theory in Hilbert space.* North Holland, 1969.

[Hers] Herstein, I. N. *Topics in Algebra.* Blaisdell, 1964.

[HeSt] Hewitt E and K. Stromberg. *Real and abstract Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[HiPh] Hille, E. and R. S. Phillips. *Functional Analysis and Semigrouops.* Amer. Math. Soc. Publ. 31, 1968.

[Holm] Holmes, R. *Geometric Functional Analysis and its Applications.* Springer-Verlag, New York, 1975.

[Horv] Horvath, J. *Topological Vector Spaces and Distributions.* Addison Wesley, Reading, 1966.

[Husa] Husain, T. *The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces.* Krieger, 1976

[Istr] Istratescu, V. I. *Introduction to linear operator theory.* Marcel Dekker, 1981.

[Jac1] Jacobson, N. *Lectures in Abstract Algebra II. Linear algebra.* Springer-Verlag, 1953.

[Jac2] Jacobson, N. *Structure of rings.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 37, 1968.

[Jams] James, R. C. A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 37 (1951), 174-177.

[Jamn] Jameson, G. *Topology and Normed Spaces.* Chapman and Hall, London, 1974.

[Jarc] Jarchow, H. *Locally Convex Spaces.* Teubner Stuttgart, 1981.

[John] Johnson, B. E. Continuity of generalized homomorphism. *Bull. London Math. Soc.* 19 (1987), 67-71.

[KaRi] Kadison R. V. and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol I.* Academic Press, 1983.

[KaMR] Kaidi, A. M., J. Martínez and A. Rodríguez. On a nonassociative Vidad-Palmer theorem. *Quart. J. Math. Oxford* 32 (1981), 435-442.

[Katz] Katznelson, Y. *An introduction to Harmonic Analysis.* John Wiley and Sons, New York, 1968.

[Kell] Kelley, J. *General Topology.* Springer-Verlag, New York, 1975.

[Köth] Köthe, G. *Topological Vector Spaces I.* Springer-Verlag, New York, 1969.

[Lar1] Larsen, R. *Banach algebras, an introduction.* Marcel Dekker, New York, 1973.

[Lar2] Larsen, R. *Functional Analysis, an introduction.* Marcel Dekker, New York, 1973.

[LiTz] Lindenstrauss, J. and L. Tzafriri. On the complemented subspaces problem. *Israel J. Math.* 9 (1971), 263-269.

[Loom] Loomis, L. H. *An introduction to abstrac harmonic Analysis.* Van Nostrand, 1953.

[Mart] Martínez, J. *Sobre álgebras de Jordan normadas completas. Tesis doctoral 149.* Universidad de Granada, 1977.

[MMPR] Martínez, J., J.F.Mena, R. Payá and A. Rodríguez. An approach to numerical ranges without Banach algebras theory. *Illinois J. Math.* 29 (1985), 609-626.

[MuPo] Mukherjea, A. and K. Pothoven. *Real and Functional Analysis.* Plenum Press, New York, 1978.

[Murp] Murphy, G. *C^*-algebras and operator theory.* Academic Press, New York, 1990.

[Naim] Naimark, M. *Normed Algebras.* Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.

[NaBe] Narici, L. and E. Beckenstein. *Topological Vector Spaces.* Marcel Dekker, New York, 1985.

[Pal1] Palmer, T. W. Characterization of C^*-algebras II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 148 (1970), 577-588.

[Pal2] Palmer, T. W. *Banach algebras and the general theory of $*$-algebras, Vol I Algebras and Banach algebras.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications **49**, Cambridge University Press, 1994

[Ped1] Pedersen, G. K. *C^*-algebras and their automorphism groups.* Academic Press, 1979.

[Ped2] Pedersen, G. K. *Analysis Now.* Springer-Verlag, New York, 1988.

[PfUn] Pflaumann, E. y H. Unger. *Análisis Funcional.* Alhambra, 1974.

[Pták] Ptak, V. Banach algebras with involutions. *Manuscripta Math.* 6 (1972), 245-290.

[Rans] Ransford, T. J. A short proof of Johnsons's uniqueness of norm theorem. *Bull. London Math. Soc.* 21 (1989), 487-488.

[Rick] Rickart, C. *General Theory of Banach Algebras.* Krieger, New York, 1960.

[RiNa] Riesz, F. and B. Sz.-Nagy. *Leçons d'Analyse Fonctionelle.* Gauthier-Villars, 1968.

[RoRo] Robertson, A. P. and W. J. Robertson. *Topological vector spaces.* Cambrigde Univ. Press., 1973.

[Rod1] Rodríguez, A. The uniqueness of complete norm topology in complete normed nonassociative algebras. *J. Funct. Anal.* 60 (1985), 1-15.

[Rod2] Rodríguez, A. *Rango numérico.* Curso monográfico. Universidad de Granada, 1977.

[Rod3] Rodríguez, A. A Vidad-Palmer theorem for Jordan C^*-algebras and related topics. *J. London Math. Soc. 22 (1980), 318-332.*

[Rod4] Rodríguez, A. Non-associative normed algebras spanned by hermitian elements. *Proc. London Math. Soc.* 47 (1983), 258-274.

[Rod5] Rodríguez, A. *Proyecto docente.* Granada, 1985.

[Rod6] Rodríguez, A. *Aspectos geométricos de las álgebras de Banach.* Curso Monográfico de Doctorado. Universidad de Granada, 1985-86.

[Role] Rolewicz, S. *Metric Linear Spaces.* Reidel, Dordrecht, 1985.

[Roy] Roy, N. M. Extreme points of convex sets in infinite dimensional spaces. *Amer. Math. Montly* 94 (1987), 409-422.

[Rud1] Rudin, W. *Real and Complex Analysis.* Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[Rud2] Rudin, W. *Functional Analysis.* Mc Graw-Hill, New York, 1973.

[Saka] Sakai, S. *C^*-Algebras and W^*-Algebras.* Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Scha] Schaefer, H. *Topological Vector Spaces.* Springer-Verlag, New York, 1971.

[Simm] Simmons, G. F. *Introduction to Topology and modern Analysis.* McGraw-Hill & Kogakusha, 1963.

[Sin1] Sinclair, A. M. The norm of a hermitian element in a Banach algebra. *Proc. Amer. Math. Soc.* 20 (1971), 446-450.

[Sin2] Sinclair, A. M. *Automatic continuity of linear operators.* Lect. Notes Series 21, London Math. Soc., 1976.

[Sing] Singer, I. *Bases in Banach Spaces I.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[StZs] Stratila, S. and L. Zsido. *Lectures on von Neumann algebras.* Editura Academiel (Bucaresti, Romania) and Abacus Press (tunbridge Wells, Kent, England), 1979.

[Take] Takesaki, M. *Theory of operator algebras I.* Springer-Verlag, 1979.

[Tayl] Taylor, A. E. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley and Sons, Inc. 1958.

[TaLa] Taylor, A. and D. Lay. *Introduction to Functional Analysis (Second Edition).* John Wiley and Sons, New York, 1980.

[Topp] Topping, D. M. *Lectures on von Neumann algebra.* Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.

[Vald] Valdivia, M. *Análisis Matemático V. Unidades didácticas 1-2-3.* U.N.E.D., Madrid, 1979.

[Vida] Vidav, I. Eine metrisch Kennzeichnung der selbstadjungierter Operatoren. *Math. Z.* 66 (1956), 121-128.

[Wil1] Wilansky, A. *Modern Methods in Topological Vector Spaces.* Mc Graw-Hill, New York, 1978.

[Wil2] Wilansky, A. *Functional Analysis.* Blaisdell, New York, 1964.

[Wil3] Wilansky, A. *Topology for Analysis.* John Wiley and Sons, New York, 1970.

[Will] Willard, S. *General Topology.* Addison-Wesley, Reading, 1970

[Yosi] Yosida, K. *Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1971.

[Youn] Youngson, M. A. Hermitian operators on Banach-Jordan algebras. *Proc. Edimburg Math. Soc.* 22 (1979), 93-104.

[Zela] Zelazko, W. *Banach Algebras.* Elsevier, Amsterdam, 1973.