INTRODUCCION AL ANALISIS NO LINEAL CON APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES E INTEGRALES

Antonio Cañada Villar

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

1.995

INDICE

PROLOGO

El objetivo fundamental de estas notas es recoger por escrito los contenidos básicos de los diferentes cursos de Doctorado que, sobre **Análisis no lineal y Ecuaciones diferenciales**, he impartido en la Universidad de Granada desde el curso 1.982/83 hasta la actualidad. En ellas se proporciona información general y resumida, sobre algunos de los métodos de Análisis no lineal más generales y útiles que se conocen y usan hoy en día en la investigación, como son los métodos topológicos y variacionales. Ésto se propone a través de una introducción, donde se motiva con diferentes ejemplos los contenidos que se tratarán posteriormente, y tres capítulos, dedicados, respectivamente, al **grado topológico**, al **método variacional** y a los **problemas semilineales en resonancia**, así como un apéndice donde se exponen los hechos básicos de la teoría de distribuciones y espacios de Sobolev.

Como sabemos, no existen métodos constructivos que permitan, en general, calcular las soluciones de ecuaciones no lineales, de tal forma que usualmente es necesario un estudio tan preciso como sea posible, de las propiedades cualitativas de ellas. Es en esta línea donde podemos situar la **teoría del grado topológico,** que tiene su origen en la noción de índice de una curva plana respecto de un punto y su uso para el cálculo de ceros de funciones holomorfas (*Cauchy, Gauss*). En el Capítulo 1, exponemos la teoría del grado topológico de *Brouwer* (dimensión finita), la de *Leray-Schauder* (dimensión infinita) y la teoría del grado topológico en conos. Quizás, la utilidad más inmediata sea la obtención de manera sencilla, de numerosos teoremas de punto fijo, como el **teorema del punto fijo de** *Brouwer*, de *Schauder* y los de **la comprensión y extensión del cono**, debidos a *Krasnoselskii.* Éstos a su vez pueden usarse para probar existencia de soluciones de problemas muy diversos que se plantean en ecuaciones diferenciales e integrales no lineales y por supuesto en otras disciplinas. Las aplicaciones que he seleccionados dan buena muestra de ello.

En el Capítulo 2 se pretende dar información básica sobre algunos de los resultados más relevantes del llamado **Cálculo de Variaciones,** disciplina tan antigua como el **Cálculo diferencial e integral** y que en la actualidad está teniendo un gran auge, debido sobre todo a sus diversas aplicaciones: Matemáticas, Física, Ingeniería, Economía, Biología, etc. La idea básica parte del Principio de *Hamilton* que relaciona la trayectoria que ha de describir una partícula que se mueve en el espacio bajo la acción de una fuerza conservativa, con la de la existencia de puntos críticos de un cierto funcional (la acción integral), definido en un espacio normado de funciones de dimensión infinita. Esto constituye en realidad una versión variacional de la conocida y mundialmente famosa segunda ley de *Newton*.

El método variacional es especialmente útil en el estudio de la existencia de soluciones débiles de problemas de contorno no lineales para e.d.o. o e.d.p., pues permite el uso de herramientas muy potentes del **Análisis Funcional**. En el capítulo, se exponen resultados importantes tanto en lo que se refiera al llamado **método directo**, como a los **métodos mini-max**, de desarrollo relativamente reciente.

En el último capítulo mostramos algunos resultados básicos concernientes con los **problemas semilineales en resonancia**. Su discusión la basamos en el **método alternativa**, iniciado por *Poincaré, Liapunov* y *Schmidt*, junto con la **teoría del grado de coincidencia** para perturbaciones L-compactas de aplicaciones lineales de *Fredholm* de índice cero, debida a *Mawhin*. Esto nos permite obtener diversos teoremas sobre existencia de soluciones de ecuaciones de operadores en espacios normados, con parte lineal no invertible, aplicándolos posteriormente a algunos de los problemas de contorno más representativos, como son el problema de contorno de *Dirichlet* y el problema periódico.

En la exposición se tratan diversos problemas abiertos en la actualidad, tanto en lo que se refiere a métodos topológicos como a los variacionales. Pretendemos con ello que los lectores entiendan la importancia actual de la investigación en ecuaciones diferenciales e integrales no lineales.

Las demostraciones que expongo se limitan a exponer las ideas básicas para conseguir la conclusión. He procurado más bien insistir en los comentarios y notas de todo tipo, que pueden aclarar cuál es mi opinión al respecto. También me detengo en repetidas ocasiones en las principales dificultades (así como sugerencias para superarlas), que he observado en los alumnos para entender apropiadamente los contenidos propuestos. Una versión posterior de estas notas incluirá demostraciones detalladas, así como ejercicios resueltos y propuestos que ayudarán al lector a entender adecuadamente y madurar las ideas que aquí se exponen. Además se incluirán otros temas, como la teoría de operadores monónotonos y bifurcación.

En las notas finales que aparecen al final de cada capítulo, señalo otros aspectos diferentes e interesantes de los tratados, cuyo desarrollo detallado alargaría de manera excesiva esta exposición.

La bibliografía no pretende ser exhaustiva en modo alguno. He procurado, por el contrario, ser lo más concreto posible y, dentro de mi nivel de conocimientos, es la que considero más apropiada para estos contenidos.

He tratado, de poner de manifiesto, siempre que ello ha sido posible, la idea de que el campo de las ecuaciones diferenciales e integrales es un campo vivo, de gran interés, con una considerable investigación actual. Creo que, desde todos los puntos de vista, merece la pena hacer ver esto a los alumnos.

Agradezco de antemano cualquier opinión, crítica o sugerencia que los lectores estimen oportuno hacerme llegar sobre el presente trabajo.

Granada, Otoño de 1.995 A. Cañada

0. INTRODUCCION.

DESCRIPCION DE ALGUNOS PROBLEMAS QUE DAN ORIGEN A ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, ECUACIONES INTEGRALES Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES NO LINEALES

Las ecuaciones diferenciales (e.d) e integrales (e.i.) constituyen un modelo matemático para el estudio de problemas que surgen en disciplinas muy diversas. Desde sus comienzos en el siglo XVII la teoría de ecuaciones diferenciales e integrales ha contribuído de manera muy notable a solucionar muchas cuestiones y a interpretar numerosos fenómenos de la naturaleza. Por otra parte, el estudio de problemas relacionados con e.d. y e.i. ha motivado la creación y posterior desarrollo de partes muy significativas del Análisis no lineal. Es por ello por lo que creo muy interesante para el alumno, la introducción de un tema donde se presenten diversos ejemplos concretos de e.d. y e.i. motivados por situaciones sencillas del mundo real. Así, el alumno entiende que el tipo de problemas que se estudian en esta teoría puede venir motivado bien por su interés matemático bien por sus posibles aplicaciones a diferentes disciplinas.

A continuación resumo algunos de los principales problemas que, a mi juicio, se pueden exponer, entendiendo que el énfasis ha de ponerse en el origen e interés de los mismos y no en un planteamiento excesivamente riguroso de ellos:

1.- Ecuación diferencial de una familia de curvas. Dada una familia de curvas descrita por la ecuación

$$f(t,x,c)=0 \tag{0.1}$$

donde c hace el papel de parámetro, si f cumple condiciones adecuadas, podemos derivar implícitamente la anterior expresión, para tener una relación de la forma

$$g(t,x,x',c)=0 \tag{0.2}$$

y eliminando el parámetro c de ambas ecuaciones obtenemos, en general, una relación entre t, x y $x,'$ que satisfacen las curvas de la familia dada en (0.1).

Lo anterior motiva el estudio de diversas e.d.o. no lineales de primer orden y nos permite exponer el problema de encontrar las trayectorias ortogonales de una familia dada de curvas. Este problema es interesante no sólo desde un punto de vista geométrico sino que tiene aplicaciones en otras disciplinas: por ejemplo, si en una lámina plana de material conductor fluye una corriente eléctrica, las líneas de igual potencial serán las trayectorias ortogonales de las líneas de flujo de la corriente.

2.- El péndulo simple. El movimiento de un péndulo que se balancea en un plano vertical viene descrito (bajo algunas hipótesis necesarias para poder establecer un modelo simple) por la e.d.o.

$$x''(t) + a \sin x(t) = 0 \tag{0.3}$$

donde $x(t)$ expresa la posición del péndulo en el tiempo t y a es una constante que depende de la longitud del mismo. La ecuación (0.3) se puede complicar si se tienen en cuenta otros factores que influyen en el movimiento tales como la posible resistencia a éste, causada por el medio donde se realiza el desplazamiento (entonces aparece en (0.3) un término que incluye $x'(t)$) o la existencia de alguna fuerza externa además de la gravedad (dicha fuerza se pone de manifiesto por la adición en (0.3) de un término del tipo $f(t, x(t))$.

En muchas situaciones se está interesado en la existencia de soluciones de (0.3) que tengan una posición determinada de antemano en dos tiempos distintos : esto motiva la definición de problema de contorno asociado a (0.3); o incluso podemos estar interesados en la existencia de soluciones periódicas de (0.3), lo que constituye un atractivo problema desde el punto de vista de las aplicaciones.

3.- Dinámica de poblaciones y ecuaciones diferenciales ordinarias. La **ley de** *Maltus* de crecimiento de poblaciones origina la e.d.o.

$$p'(t) = ap(t) \tag{0.4}$$

donde a es una constante dada. La solución de (0.4) se puede calcular de manera elemental, obteniéndose la conclusión de que la población crece exponencialmente con el tiempo; como sabemos esta es una conclusión válida sólo en situaciones muy particulares y en tanto en cuanto la población no crece demasiado. Un modelo más razonable, donde se tiene en cuenta la competición que se produce entre los individuos cuando la población alcanza un cierto nivel crítico, conduce a la e.d.o.

$$p'(t) = ap(t) - bp(t)^2 \tag{0.5}$$

donde a y b son constantes dadas. (0.5) es conocida con el nombre de **ecuación de crecimiento logístico** (*Verhulst*) y a los números a y b se les llama coeficientes vitales de la población. La solución de (0.5) puede calcularse de manera explícita, pudiéndose obtener de esta expresión conclusiones muy interesantes sobre el modelo, referentes por ejemplo al comportamiento asintótico de las soluciones, crecimiento y decrecimiento, etc.

En **Dinámica de poblaciones** se dispone también de ejemplos sencillos que motivan la introducción de sistemas de e.d.o. Un caso muy simple es cuando se estudia la evolución en el tiempo de dos especies x e y que tienen una interacción del tipo presa-depredador, obteniéndose un sistema de e.d.o. del tipo

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) &= -y(t)(c - dx(t)) \end{aligned} \tag{0.6}$$

donde a, b, c y d son constantes con su correspondiente interpretación biológica : a y c representan las tasas de natalidad (o mortandad) de las especies x e y respectivamente, mientras que b y d expresan la intensidad de la interacción entre las especies.
(0.6) constituye un ejemplo interesante para motivar al alumno la introducción y métodos de la teoría cualitativa de e.d.o. También nos ofrece la oportunidad de comentar algunos de los problemas actuales que están siendo estudiados en la teoría de ecuaciones diferenciales relacionados con Dinámica de poblaciones.

4.- Dinámica de poblaciones y ecuaciones integrales de *Volterra*. Para ciertos tipos de poblaciones, el modelo elaborado para estudiar su evolución en el tiempo responde a una ecuación integral. Más concretamente, sea $n(t)$ el número de elementos de la población que sobreviven en el tiempo t, n_0 la población inicial y $f(t)$ una función que expresa la fracción de supervivientes que tienen la edad t. Suponiendo que el ritmo de nacimientos de la población viene expresado por una función $r(t, n(t))$, tenemos que el total de individuos que, procedentes de nuevos nacimientos, se incorporan a la población en el tiempo t es

$$b(t) = \int_0^t f(t-\tau)r(\tau, n(\tau))\, d\tau \tag{0.7}$$

con lo que se tendrá

$$n(t) = n_0 f(t) + \int_0^t f(t-\tau)r(\tau)\, d\tau. \tag{0.8}$$

(0.8) es una **ecuación integral de *Volterra* de segunda clase.**

Otra clase de problemas que originan ecuaciones del tipo (0.8) son los problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Una función continua x es solución de la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds \tag{0.9}$$

(con f continua) si y solamente si x es solución del p.v.i.

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{0.10}$$

5.- Problemas de contorno y ecuaciones integrales de *Fredholm.* Supongamos que una partícula de masa 1 se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza f. La posición de la partícula viene descrita por una función $x(t)$ que nos indica, para cada tiempo t, el punto de la recta donde se encuentra. Suponiendo que la fuerza f depende tanto del tiempo como de la posición de la partícula, **la segunda ley de** *Newton*, establece que

$$x''(t) = f(t, x(t)), \ \forall t \in I. \tag{0.11}$$

donde I es un intervalo de R.

Muchas veces interesa estudiar la existencia de soluciones de (0.11) tales que en dos tiempos distintos t_1 y t_2, determinados de antemano, tengan posiciones x_1, x_2, respectivamente, también fijadas de antemano. Esto conduce al **problema de contorno**

$$\begin{aligned} &x''(t) = f(t, x(t)), \ \forall \ t \in [t_1, t_2], \\ &x(t_1) = x_1, \ x(t_2) = x_2. \end{aligned} \tag{0.12}$$

El problema (0.12) se puede transformarse, con la ayuda de la noción de **función de** *Green,* en una ecuación integral. Para ello, si $x_1 = x_2 = 0$, se prueba, en general, la existencia de una función

$$G : [t_1, t_2] \times [t_1, t_2] \to \mathbf{R}$$

, continua y simétrica, tal que $x \in C^2[t_1, t_2]$ es solución de (0.12) si y solamente si $x \in C[t_1, t_2]$ y

$$x(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t, s) f(s, x(s)) \, ds, \ \forall \ t \in [t_1, t_2]. \tag{0.13}$$

Para x_1 y x_2 números reales cualesquiera, se obtiene

$$x(t) = h(t) + \int_{t_1}^{t_2} G(t, s) f(s, x(s)) \, ds, \ \forall \ t \in [t_1, t_2]. \tag{0.14}$$

con h una función continua que depende de x_1 y x_2.

Las ecuaciones de la forma (0.14) se conocen con el nombre de **ecuaciones de** *Fredholm.*

Para el caso en que $x_1 = x_2 = 0$, si X denota al espacio de Banach real $C([t_1, t_2], \mathrm{R})$, con la norma uniforme y $T : X \to X$, se define como

$$Tx(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t,s) f(s, x(s))\, ds, \ \forall\, x \in X, \ \forall\, t \in [t_1, t_2], \tag{0.15}$$

se tendrá que (0.12) tiene solución si y solamente si, existe $x \in X$, tal que

$$x = Tx, \tag{0.16}$$

que es un problema de punto fijo en dimensión infinita. Estos problemas se abordarán mediante la **teoría del grado topológico de** *Leray-Schauder.*

Ocurre con frecuencia que la fuerza f no es una función continua respecto de la variable t; por ejemplo, en numerosas ocasiones f se expresa de la forma $f(t, x(t)) = g(x(t)) + a(t)$ donde a se considera como una fuerza externa al sistema físico considerado. Ahora bien, si a partir de un cierto tiempo t_0, se incorpora una fuerza adicional, entonces a es de la forma

$$a(t) = \begin{cases} a_1(t), \ t \le t_0, \\ a_1(t) + a_2(t), \ t > t_0, \end{cases} \tag{0.17}$$

con a_1 y a_2 funciones continuas tales que $a_2(t_0) \neq 0$.
En estos casos, el concepto de solución del problema de contorno (0.12) ha de debilitarse, puesto que no pueden existir soluciones que sean de clase $C^2[t_1, t_2]$. Tales tipos de problemas se abordarán usando los **espacios de** *Sobolev.*

6.- Ecuaciones de evolución de tipo parabólico. Otro tipo de problemas muy interesantes en las aplicaciones se relacionan con el **problema de la propagación del calor.** En el caso particular en que se considera una varilla delgada de longitud π cuyos extremos se mantienen a 0^o centígrados y cuya superficie lateral está aislada, *Fourier* dedujo que la función $u(x,t)$ que representa la temperatura en la sección x y en el tiempo t, debe satisfacer

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + g(x,t,u(x,t)), && 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi \end{aligned} \tag{0.18}$$

donde $f(x)$ es la distribución inicial de temperatura y g una función que, en general, tiene una dependencia no lineal respecto de u.
(0.18) es un **problema no lineal de tipo mixto.**

Si se trata el problema de la **difusión del calor** en un cuerpo $n-$dimensional, la ecuación que surge es

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + g(x,t,u(x,t)), \tag{0.19}$$

donde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{0.20}$$

es el **operador Laplaciano.**

Ecuaciones como (0.19) o muy similares se presentan también en otros tipos de problemas relacionados en general con procesos de **difusión.** En particular, merece la pena destacarse el problema de la **evolución en el tiempo de dos o más especies que viven en un dominio común** Ω. Este problema ya lo hemos expuesto en el apartado 3 (ecuación (0.6)), pero sin tener en cuenta la **distribución espacial de las especies.** Cuando ésto se considera, y aparecen por tanto **procesos de difusión** de las especies de un lugar a otro de Ω, *Kolmogorov* sugirió el siguiente modelo

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = u(x,t)\,[a - bu(x,t) + cv(x,t)]\,, \ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),\\
&\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \Delta v(x,t) = v(x,t)\,[e - fv(x,t) + gu(x,t)]\,, \ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),\\
&\qquad u(x,t) = v(x,t) = 0, \ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,\infty),\\
&\qquad u(x,0) = u_0(x), \ v(x,0) = v_0(x), \ x \in \overline{\Omega},
\end{aligned} \tag{0.21}$$

donde u y v representan las densidades respectivas de las especies, en distintos puntos x de Ω y en distintos tiempos t, las funciones a y e expresan, respectivamente, la "razón de natalidad"de dichas especies, b y f vienen a poner de manifiesto el efecto de autolimitación que puede causar la superpoblación, mientras que las funciones c y g marcan el "tipo de interacción"que tienen entre sí u y v. Por su parte, u_0 y v_0 nos informan sobre la situación inicial, mientras que la condición sobre $\partial\Omega$ significa que las especies no pueden permanecer en ella (porque, por ejemplo, Ω es un lago o $\partial\Omega$ es un río). Debemos resaltar que el **operador Laplaciano**, presente en ambas ecuaciones, modela precisamente la difusión de las especies en el dominio Ω.

Problemas como (0.21) son de una gran interés en la investigación matemática actual, formando parte del campo general conocido con el nombre de **sistemas del tipo reacción-difusión.**

En numerosas ocasiones es muy interesante, tanto desde el punto de vista de las aplicaciones como desde un punto de vista teórico, el estudio de la existencia de **soluciones de equilibrio** de las ecuaciones de evolución. Por ejemplo en problemas del tipo (0.21) puede llegar un momento en que la población de las especies se estabilice y sea independiente del tiempo futuro; en el problema de la vibración de una membrana, ésta puede alcanzar una situación de equilibrio y por tanto, dejar de vibrar, etc. Este tipo de situaciones conducen a ecuaciones elípticas no lineales de la forma

$$-\Delta u(x) = g(x, u(x)). \tag{0.22}$$

El **principio del máximo-mínimo** sugiere que los tipos de problemas "naturales" a considerar para (0.22) son los problemas de contorno.

Otros problemas conducen también a ecuaciones como (0.22) o muy similares, tales como los relacionados con **potenciales electrostáticos, potenciales gravitacionales,** etc.

7.- Existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales periódicas no lineales. Las e.d. periódicas constituyen frecuentemente un buen modelo matemático para el estudio de problemas de índole muy diversa. Esto ocurre, por ejemplo, en aquellos problemas donde se tienen en cuenta las condiciones ambientales (que suelen repetirse de manera más o menos periódica), en los movimientos de los astros y, en general, en los fenómenos de naturaleza periódica que con tanta profusión se presentan en la Naturaleza. Se comprende pues la importancia que, para este tipo de ecuaciones, tiene la existencia de soluciones periódicas.

Restringiéndonos a un caso simple, consideremos la e.d.o.

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{0.23}$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, es continua y ω-periódica, respecto de la variable t. Si f es lineal, el **Teorema de la alternativa de** *Fredholm*, proporciona un método útil para decidir sobre la existencia de soluciones ω-periódicas de (0.23). Ahora bien, ¿cómo podemos abordar el problema si f es no lineal?. El método que se describe a continuación, conocido con el nombre de **método del operador de** *Poincaré*, relaciona este problema con el de la existencia de puntos fijos de aplicaciones continuas definidas en espacios normados de dimensión finita.

Supongamos que el p.v.i.

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{0.24}$$

tiene solución única, definida en $\mathbb{R}$, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$; notemos por $x(t, x_0)$ a dicha solución. Entonces $x(t, x_0)$ es ω-periódica si y solamente si

$$x_0 = x(\omega, x_0). \tag{0.25}$$

Por tanto, si $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se define como

$$H(x_0) = x(\omega, x_0), \ \forall \ x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{0.26}$$

el teorema de dependencia continua de la solución de (0.24) prueba H es continua y además, (0.23) tiene soluciones ω-periódicas si y solamente si H tiene puntos fijos. Este problema se tratará mediante la **teoría del grado topológico de** *Brouwer*.

Actividades complementarias recomendadas

Localizar, con ayuda de los libros de caracter histórico que se recomiendan, algunos otros problemas concretos que hayan surgido en la teoría de las e.d. y e.i. desde el siglo XVII hasta nuestros días y que estén relacionados con ecuaciones no lineales.

Bibliografía recomendada

[8], [11], [16], [34], [37], [53], [60], [63], [64]

1. El Método topológico.

El planteamiento de diferentes problemas que se presentan tanto en **ecuaciones diferenciales e integrales,** como en otras disciplinas, conduce frecuentemente al estudio de ecuaciones del tipo

$$Tx = p$$

donde T es una aplicación definida en un subconjunto Ω de un espacio de *Banach* X, con valores en X y $p \in X$. Usualmente T no es lineal.

Existen métodos muy diversos para el estudio de la ecuación anterior. El hecho de escoger uno u otro, depende de las propiedades de T y X, así como de la clase de información que se quiera obtener (¿existe solución?, ¿es única?, ¿cuáles son las propiedades topológicas del conjunto de soluciones?, ¿cómo pueden aproximarse?, etc.).
En general, no es posible encontrar la solución (o soluciones) de manera constructiva, de tal forma que se hace necesario un estudio tan preciso como sea posible de las propiedades cualitativas de ellas. En esta línea podemos situar la teoría del grado topológico, uno de los métodos de **Análisis no lineal** más útiles que se conocen y que proporciona información fundamentalmente sobre la existencia de soluciones así como sobre su multiplicidad.
La idea básica puede explicarse de manera intuitiva en un caso muy sencillo: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua. ¿Qué información puede obtenerse sobre las soluciones de la ecuación

$$f(x) = p$$

en (a, b), usando sólo los valores de f en la frontera de $[a, b]$?. Una manera simple de proceder puede ser la siguiente: Si $f = I$, la aplicación identidad, la anterior ecuación tendrá solución en (a, b) si $p \in (a, b)$. Para f general, es intuitivo desde el punto de vista geométrico, que la ecuación anterior tendrá solución si la curva $y = f(x)$ puede "deformarse de manera continua" en la curva $y = x$, suponiendo que en la deformación, ningún punto de la frontera de $[a, b]$ cruce la línea $y = p$.
Las dos ideas anteriores pueden generalizarse y constituyen la base de la definición de grado topológico de la aplicación f, relativo a (a, b) y a p. Ya desde el principio se puede intuir la extraordinaria potencia que puede tener esta teoría en orden a estudiar ecuaciones no lineales, pero también se comprende desde el principio su seria limitación, marcada por su gran generalidad.

El Capítulo lo iniciamos con la **teoría del grado topológico de** *Brouwer,* para aplicaciones continuas definidas en espacios de *Banach* de dimensión finita. Es en esta parte donde nos encontramos con las dificultades técnicas más grandes, tanto para su definición, como para probar la unicidad del grado. Seguidamente, extendemos la teoría a espacios de *Banach* de dimensión infinita. Previamente mostramos mediante un ejemplo sencillo que no es posible la extensión directa de la misma. Sin embargo, los ejemplos más interesantes en dimensión infinita se presentan cuando el operador T es de la forma $T = I - F$, con F compacta. La propiedad de aproximación uniforme que tienen las aplicaciones compactas por aplicaciones también compactas, pero cuyo rango se encuentra incluido en subespacios de dimensión finita, hace posible definir un grado para perturbaciones compactas de la identidad: el grado de *Leray-Schauder.* La última parte del Capítulo la dedicamos a la teoría del grado topológico en conos, muy útil cuando se trata de determinar la existencia de soluciones positivas.

La consecuencia más inmediata de lo que vamos a exponer es la obtención de numerosos teoremas de punto fijo, que a su vez pueden aplicarse para el estudio de muchos problemas planteados en ecuaciones diferenciales e integrales. Entre ellos destacaremos los clásicos teoremas del punto fijo de *Brouwer* y *Schauder* así como los de la expansión y comprensión del cono, debidos a *Krasnoselskii* (por cierto que, a partir del grado topológico, las demostraciones de todos ellos son tremendamente simples).

Hoy en día, la teoría del grado ha llegado a ser una herramienta estándar en el Análisis no lineal, siendo de gran utilidad en el estudio de las ecuaciones no lineales. He seleccionado diferentes aplicaciones a problemas no lineales: existencia de soluciones periódicas de e.d.o. periódicas, sobreyectividad de aplicaciones definidas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, e.d.o. en espacios de *Banach*, problemas de contorno para e.d.o., existencia de soluciones positivas de ecuaciones integrales con retraso, etc. Ellos constituyen sólo una muestra pequeñísima de las posibilidades de aplicación que proporciona la teoría del grado y en las notas complementarias se comenta cómo se pueden llevar a cabo otras.

Existen diferentes formas de introducir el grado topológico. Puede hacerse a partir de nociones de topología algebraica, de geometría diferencial o desde el punto de vista analítico. He optado por éste último camino, para poner de manifiesto el uso de distintas herramientas del Análisis, como el teorema de aproximación de *Weierstrass* o el lema de *Sard.*

Según mi opinión, en términos generales, debe aprenderse a manejar adecuadamente las propiedades del grado topológico, más bien que conocer los tediosos detalles de su construcción. Como se verá en el desarrollo que hacemos, hay multitud de ejemplos para conseguir este objetivo.

Sea $\mathbf{R}^n$. Notemos por Σ al conjunto formado por las ternas (f, Ω, y) que cumplen la propiedad P_1 siguiente:

P_1: Ω es un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^n$ es continua y además $y \in \mathbf{R}^n$ es tal que $y \notin f(\partial\Omega)$.

El resultado principal de la primera parte del Capítulo es el siguiente referente a la existencia y unicidad del llamado grado topológico de *Brouwer*:

Teorema 1.1 . *Existe una única aplicación $d_B : \Sigma \to \mathbb{Z}$, satisfaciendo las propiedades siguientes:*
d1)

$$d_B(I, \Omega, y) = 1 \tag{1.1}$$

si $y \in \Omega$.
d2) Si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos y disjuntos de Ω tales que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, entonces

$$d_B(f, \Omega, y) = d_B(f, \Omega_1, y) + d_B(f, \Omega_2, y).$$

d3) Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^n$, $y : [0,1] \to \mathbf{R}^n$, son aplicaciones continuas tales que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, $\forall\, t \in [0,1]$, entonces $d_B(h(t,.), \Omega, y(t))$ es independiente de $t \in [0,1]$.

A $d_B(f, \Omega, y)$ se le llama **grado topológico de *Brouwer* de f, relativo a Ω y a y.**

La propiedad d1) se conoce con el nombre de **propiedad de normalización**; d2) se llama **propiedad de aditividad-escisión** y expresa el hecho de que para calcular el grado $d_B(f, \Omega, y)$, se puede prescindir de aquellas partes del dominio, donde de antemano se sabe que la ecuación

$$f(x) = y, \tag{1.2}$$

no tiene solución. Esta propiedad es muy útil para probar resultados sobre localización y multiplicidad de soluciones de (1.2) en el dominio Ω. Por su parte, d3) expresa la igualdad de grados en Ω, de aplicaciones homotópicas continuas $h(0,.)$ y $h(1,.)$, relativas a $y(0)$ y a $y(1)$, respectivamente, siempre que la familia de ecuaciones

$$h(t, x) = y(t), \ t \in [0,1],$$

no tenga solución en $\partial\Omega$. Esta propiedad es de gran utilidad para calcular el grado de numerosas aplicaciones que son homotópicas a otras cuyo grado es conocido (por ejemplo, la identidad). Observemos que la homotopía puede ser al mismo tiempo en la función f y en la variable y.

Demostración del Teorema 31.1: Es larga y pesada. Se prueba por una parte la existencia y por otra la unicidad. En lo que respecta a la existencia, se parte de la situación más sencilla posible, donde la definición de grado topológico se hace a partir de las soluciones de la ecuación (1.2), para ir complicando el proceso gradualmente. Las principales ideas son las siguientes:

a) Sea $(f,\Omega,y) \in \Sigma$, tal que $f \in C^1(\Omega)$. Definamos los conjuntos

$$A_f = \{ x \in \Omega : f(x) = y \},$$
$$B_f = \{ x \in \Omega : J_f(x) = 0 \},$$

donde $J_f(x)$ es el Jacobiano de f en x.
Si

$$A_f \cap B_f = \emptyset, \tag{1.3}$$

entonces A_f es un conjunto finito (puesto que A_f es un compacto con todos sus puntos aislados). Esto permite definir

$$d_B(f,\Omega,y) = \sum_{x\in A_f} sign\ J_f(x), \tag{1.4}$$

donde $sign\ J_f(x)$ indica el signo de $J_f(x)$.
Si A_f fuese vacío, el anterior grado se define como cero.

b) En esta etapa, se elimina la hipótesis (1.3). Para ello, sea $(f,\Omega,y) \in \Sigma$, tal que $f \in C^1(\overline{\Omega})$. El **lema de** *Sard*, ($f(B_f)$ es de interior vacío), garantiza que en $B_{\mathbb{R}^n}(y;r)$, donde $r = dist\ (y, f(\partial\Omega))$, $(r > 0)$, existe al menos un elemento z tal que (f,Ω,z) está en las condiciones del apartado anterior. Se prueba entonces que $d_B(f,\Omega,z)$ es independiente del elemento z elegido, con lo que éste último grado se puede tomar como definición de $d_B(f,\Omega,y)$.

c) Sea ahora $(f,\Omega,y) \in \Sigma$ y $r = dist\ (y, f(\partial\Omega))$. El **teorema de aproximación de** *Weierstrass* garantiza la existencia de $g \in C^1(\overline{\Omega})$, tal que

$$|f(x) - g(x)| < r,\ \forall\ x \in \overline{\Omega}. \tag{1.5}$$

Puede probarse que $d_B(g,\Omega,y)$ es independiente de la función g elegida, satisfaciendo (1.5), de tal manera que cualquiera de estos grados puede tomarse como definición de $d_B(f,\Omega,y)$.

La comprobación de que la aplicación d_B así definida satisface las propiedades d1), d2) y d3), se hace de manera sucesiva en cada paso a), b) y c), de los señalados con anterioridad.

Pasemos a continuación a tratar la unicidad de la aplicación d_B. Esto consiste en ver que si existe d_B satisfaciendo d1), d2) y d3), entonces $d_B(f,\Omega,y)$ está unívocamente determinado por sus valores sobre un subconjunto especial de Σ, en el que el grado puede calcularse explícitamente a partir de las propiedades indicadas. Las técnicas utilizadas son, curiosamente, las mismas que en el proceso de contruccción del grado. Comentemos las principales ideas: supongamos que existe una aplicación d_B satisfaciendo d1), d2) y d3). Entonces:

1) Sea $(f,\Omega,y)\in\Sigma$. Si $r = dist\ (y, f(\partial\Omega))$, existe
$g\in C^\infty(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ tal que $|f(x)-g(x)|<r$, $\forall\ x\in\overline{\Omega}$ (teorema de aproximación de *Weierstrass*).
Si $h:[0,1]\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$, se define como $h(t,x)=(1-t)f(x)+tg(x)$, y la función $y(t)$ se toma como la constante y, entonces estamos en las condiciones expresadas en d3) y por tanto,

$$d_B(f,\Omega,y)=d_B(g,\Omega,y).$$

2) Sea $(f,\Omega,y)\in\Sigma$ con $f\in C^\infty(\Omega)$ y r como en 1). El lema de *Sard* garantiza la existencia de $z\in B_{\mathbb{R}^n}(y;r)$ tal que (f,Ω,z) está en las condiciones del apartado a) de construcción del grado. Tomando $h(t,x)\equiv f(x)$, $y:[0,1]\to\mathbb{R}^n$, definida como $y(t)=tz+(1-t)y$, de nuevo por d3), obtenemos

$$d(f,\Omega,y)=d(f,\Omega,z).$$

3) Sea (f,Ω,y) en las condiciones de a). Entonces $f^{-1}(y)\cap\Omega$ es un conjunto finito. Consideremos dos casos:
3.1) $f^{-1}(y)\cap\Omega=\emptyset$.
Tomando en d2), $\Omega_1=\Omega,\ \Omega_2=\emptyset$, se obtiene

$$d_B(f,\emptyset,y)=0.$$

Si ahora se elige $\Omega_1=\Omega_2=\emptyset$, nuevamente de d2) deducimos

$$d_B(f,\Omega,y)=0.$$

3.2) $f^{-1}(y)=\{\ x^1,...,x^n\}$.
Las hipótesis sobre f implican que cada $x^i, 1\le i\le n$, es una solución aislada

de la ecuación (1.2). Es posible por tanto, elegir, para cada $i, 1 \leq i \leq n$, un entorno abierto de x^i, $U^i \subset \Omega$ tal que la única solución de (1.2), en U^i, es x^i. De d2) se concluye

$$d_B(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^{n} d_B(f, U^i, y).$$

4) Sea $(f, \Omega, y) \in \Sigma$, en las condiciones de a), donde además suponemos que la ecuación (1.2) tiene una única solución x^0, en Ω.
Si $A = f'(x^0)$, tomando $h : [0,1] \times \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x^0; \delta)} \to \mathbb{R}^n$, $h(t,x) = tf(x) + (1-t)A(x - x^0)$, $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $y(t) = ty$, en d2), para δ suficientemente pequeño obtenemos

$$d_B(f, B_{\mathbb{R}^n}(x^0; \delta), y) = d_B(A - Ax^0, B_{\mathbb{R}^n}(x^0; \delta), 0).$$

Si s es suficientemente grande, eligiendo $h : [0,1] \times \overline{B_{\mathbb{R}^n}(0; s)} \to \mathbb{R}^n$, $h(t,x) = A - tAx^0$, $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $y(t) = 0$, se tiene

$$d_B(f, \Omega, y) = d_B(A, B_{\mathbb{R}^n}(0; s), 0).$$

5) Finalmente, si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, es una aplicación lineal regular ($det\ A \neq 0$), entonces de d1), d2) y d3) se concluye

$$d_B(A, B_{\mathbb{R}^n}(0; s), 0) = sign\ det\ A,$$

para cualquier $s > 0$.

En realidad, el mayor interés de la teoría del grado topológico no se centra en las demostraciones sobre su definición y unicidad, sino en sus propiedades. Estas lo convierten en una herramienta muy potente para abordar numerosos problemas en disciplinas muy diversas. Vamos a exponer a continuación algunas de las más importantes que se derivan de d1), d2) y d3).

TEOREMA 1.2. *Se cumplen:*
d4) Si $d_B(f, \Omega, y) \neq 0$, la ecuación (1.2) tiene al menos una solución en Ω.
d5) Sea $(f, \Omega, y) \in \Sigma$ y $r = dist\ (y, f(\partial\Omega))$. Entonces si $(g, \Omega, z) \in \Sigma$ es tal que

$$|g(x) - f(x)| < r, \ \forall\ x \in \overline{\Omega},$$
$$|z - y| < r,$$

se tiene

$$d_B(f, \Omega, y) = d_B(g, \Omega, z).$$

d6) Sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$*, continua. Entonces si* y*,* z *están en la misma componente conexa de* $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$*, se tiene*

$$d_B(f, \Omega, y) = d_B(f, \Omega, z).$$

d7) Si $(f, \Omega, y), (g, \Omega, y) \in \Sigma$*, son tales que* $f(x) = g(x)$*,* $\forall\, x \in \partial\Omega$*, entonces*

$$d_B(f, \Omega, y) = d_B(g, \Omega, y).$$

d8) Si $(f, \Omega, y) \in \Sigma$ *y* Ω_1 *es cualquier subconjunto abierto de* Ω *tal que* $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$*, entonces*

$$d_B(f, \Omega, y) = d_B(f, \Omega_1, y).$$

La demostración de las anteriores propiedades es una consecuencia inmediata de d1), d2) y d3).

La propiedad d4) es quizás la más útil de la teoría del grado. Nos dice que una condición suficiente para la existencia de soluciones de la ecuación (1.2), en Ω, es que el grado $d_B(f, \Omega, y)$ no sea cero. Desgraciadamente, como se muestra en ejemplos elementales, el recíproco no es cierto, de tal manera que si el anterior grado es cero, no tenemos, en general, información sobre las soluciones de (1.2).
d5) significa la continuidad de la aplicación $d_B(f, \Omega, y)$, respecto de las variables f e y. Es muy útil cuando se usa en "problemas de perturbación". Por su parte, d6) afirma que aunque y y z estén lejos, la igualdad del grado se mantiene, siempre que ambos elementos estén en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.
La propiedad d7) muestra que, para calcular $d_B(f, \Omega, y)$, sólo son importantes los valores de f en $\partial\Omega$. Esto, que es muy útil en las aplicaciones, pone de manifiesto al mismo tiempo las limitaciones de la teoría del grado, cuando se usa para estudiar la ecuación (1.2). Pensemos, por ejemplo, en el caso más simple posible: dos aplicaciones continuas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, que coincidan en los puntos $x = a$ y $x = b$; es claro que sólo esto, no proporciona ninguna información precisa sobre las soluciones de (1.2) en (a, b).
Por último, d8) es muy interesante en las aplicaciones para "localizar" las soluciones de (1.2) en Ω.

La teoría de grado de *Brouwer* tiene un uso muy diverso. He seleccionado tres tipos de aplicaciones, donde voy a mostrar algunos resultados concretos (teoremas de punto fijo, existencia de soluciones periódicas de e.d.o. periódicas no lineales y sobreyectividad de aplicaciones). Comenzamos con la exposición de varios **teoremas de punto fijo,** de los que el más famoso es el **teorema**

del punto fijo de *Brouwer*, que para el caso $n = 1$ se reduce al **teorema de** *Bolzano.*

TEOREMA 1.3. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$, homeomorfo a $D \subset \mathbb{R}^n$, tal que D es cerrado, acotado, convexo y no vacío. Si $f : K \to K$, es continua, la ecuación*

$$x = f(x) \tag{1.6}$$

tiene al menos una solución.

Demostración: Se realiza en varias etapas:

1) $K = B_{\mathbb{R}^n}(0; r)$.
Si existe $x \in \partial K$ tal que (1.6) se cumple, se tiene la conclusión del teorema. Si no es así, considérese la homotopía $h : [0,1] \times K \to \mathbb{R}^n$, definida como $h(t,x) = x - tf(x)$, y aplíquense d1), d3) y d4).

2) K es cerrado, acotado, convexo y no vacío. Entonces existe $r > 0$, tal que $K \subset \overline{B_{\mathbb{R}^n}(0;r)}$. Por el teorema de extensión de *Dugundji*, existe $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to K$, extensión continua de f. Aplíquese ahora el apartado 1) a la aplicación $\overline{f}$ restringida a $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(0;r)}$.

3) Caso general: Sea $h : K \to D$ el homeomorfismo indicado. La aplicación $g = hfh^{-1} : D \to D$, está en las condiciones de 2). Si $x \in D$ es un punto fijo para g, entonces $h^{-1}(x) \in K$, es un punto fijo para f.

Conviene insistir en dos aspectos: en primer lugar, a pesar de que el teorema anterior no proporciona una condición necesaria y suficiente, para la existencia de puntos fijos, es fácil ver, mediante ejemplos sencillos, que no se puede prescindir de ninguna de las hipótesis, si se quiere tener la conclusión. En segundo lugar, el teorema no dice nada sobre la unicidad o no de soluciones, puesto que es claro que respecto de esto puede ocurrir cualquier cosa.

A continuación mostramos otro teorema de punto fijo donde aparecen implicados el comportamiento de f en $\partial\Omega$, así como las propiedades geométricas de Ω.

TEOREMA 1.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y acotado y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, continua. Supongamos que existe $x_0 \in \Omega$, con la propiedad siguiente:*

$$f(x) - x_0 = \lambda(x - x_0), x \in \partial\Omega \;\Rightarrow\; \lambda \leq 1. \tag{1.7}$$

Entonces f tiene al menos un punto fijo.

Demostración: Si existe $x \in \partial\Omega$, tal que $x = f(x)$, se tiene la conclusión del teorema. Si no es así, considérese la homotopía $h : [0,1]\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, definida por $h(t,x) = (x - x_0) - t(f(x) - x_0)$.

Dos condiciones suficientes para (1.7) son:
i) $0 \in \Omega$ y $|x - f(x)|^2 \geq |f(x)|^2 - |x|^2, \ \forall\ x \in \partial\Omega$.
ii) $0 \in \Omega$, $\lambda\overline{\Omega} \subset \Omega, \ \forall\ \lambda \in (0,1)$ y $f(\partial\Omega) \subset \overline{\Omega}$.

Seguidamente planteamos la existencia de soluciones periódicas de e.d.o. periódicas no lineales. La idea básica de la demostración del resultado que exponemos, es la aplicación del Teorema del punto fijo de *Brouwer* al operador de *Poincaré* (definido en (0.26)). Resultados previos sobre existencia, unicidad, prolongación y dependencia continua respecto de los datos iniciales, de las soluciones de p.v.i., son importantes para entender adecuadamente la demostración.

TEOREMA 1.5. *Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t,x) \to f(t,x)$, una función de clase C^1, $\omega-$periódica respecto de la variable t y acotada. Supongamos que existe $r > 0$ verificando*

$$< f(t,x), x > < 0, \ \forall\ (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad con \ \ |x| = r. \tag{1.8}$$

Entonces la e.d.o.

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{1.9}$$

tiene al menos una solución ω-periódica.

Demostración: Considérese el p.v.i.

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= p, \ p \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Las hipótesis implican que este problema tiene, para cada $p \in \mathbb{R}^n$, una única solución definida en $\mathbb{R}$. Sea $x(t,p)$ dicha solución.
La aplicación $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $H(p) = x(\omega,p), \ \forall\ p \in \mathbb{R}^n$, es continua. Además, de (1.8) se deduce que $H(\overline{B_{\mathbb{R}^n}(0;r)}) \subset \overline{B_{\mathbb{R}^n}(0;r)}$. Por el Teorema 1.3, H tiene al menos un punto fijo x_0. Entonces, $x(t,x_0)$ es una solución ω-periódica de (1.9).

Pensemos que en el caso autónomo, la condición (1.8) para $n = 1$, significa que f cambia de signo en el intervalo $(-r, r)$. Esto proporciona automáticamente una solución periódica (constante).

Si f no es acotada, la conclusión del teorema anterior no se sigue necesariamente. De hecho, el estudio de la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones como (1.9), con f no acotada, es objeto de investigación en la actualidad.

A continuación mostramos dos resultados sobre sobreyectividad de funciones definidas en $\mathbf{R}^n$. El primero de ellos es una generalización del siguiente hecho elemental:
Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continua, tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Entonces $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.
Con la ayuda del grado topológico, vamos a exponer una generalización del resultado anterior, que no es en absoluto trivial.

TEOREMA 1.6. *Sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, continua y satisfaciendo*

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{< f(x), x >}{|x|} = +\infty. \tag{1.10}$$

Entonces $f(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$.

Demostración: Para $y \in \mathbf{R}^n$, considérese la ecuación

$$f(x) = y$$

Si r es suficientemente grande, (1.10) implica que la aplicación $h : [0,1] \times \overline{B_{\mathbf{R}^n}(0;r)} \to \mathbf{R}^n$, definida como $h(t,x) = tx + (1-t)f(x)$, es una homotopía válida.
De d3) y d1), se deduce $d_B(f, B_{\mathbf{R}^n}(0;r), y) \neq 0$; luego la ecuación anterior tiene solución.

La condición (1.10) implica

$$\lim_{|x|\to+\infty} |f(x)| = +\infty. \tag{1.11}$$

Sin embargo, esto no es suficiente para que $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, continua, sea además sobreyectiva ($f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ es un ejemplo de ello). Vamos a ver que añadiendo la inyectividad local, sí es posible probar el resultado. Para ello necesitamos un lema previo, llamado **lema de** *Borsuk*, que nos informa sobre el grado de aplicaciones impares, definidas en dominios simétricos.

LEMA 1.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, simétrico, acotado y conteniendo al origen. Si $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, es continua e impar y $0 \notin f(\partial\Omega)$, entonces $d_B(f, \Omega, 0)$ es impar (y por tanto no nulo).*

Demostración: No hay pérdida de generalidad en suponer que estamos en las condiciones del apartado a) del Teorema 1.1. Entonces

$$d_B(f, \Omega, 0) = sign\ J_f(0) + \sum_{x \in f^{-1}(0),\ x \neq 0} sign\ J_f(x).$$

De las hipótesis se deduce fácilmente que la suma anterior es impar.

Enunciemos y probemos, con la ayuda del lema anterior, el resultado anunciado.

TEOREMA 1.8. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, continua tal que satisface* (1.11). *Si además f es localmente inyectiva, se tiene que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.*

Demostración: Consiste en probar que $f(\mathbb{R}^n)$ es abierto y cerrado.
Que $f(\mathbb{R}^n)$ es cerrado se obtiene fácilmente usando la continuidad de f y (1.11).
Para demostrar que $f(\mathbb{R}^n)$ es abierto, sea $f(x_0) \in f(\mathbb{R}^n)$. Se trata de probar la existencia de $r > 0$, tal que

$$B_{\mathbb{R}^n}(f(x_0); r) \subset f(\mathbb{R}^n). \tag{1.12}$$

Para ésto, no es restricitivo suponer que $x_0 = f(x_0) = 0$. En esta situación, tomemos $s > 0$, verificando que f, restringida a $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(0; s)}$ es inyectiva. Entonces, la aplicación $h : [0, 1] \times \overline{B_{\mathbb{R}^n}(0; s)} \to \mathbb{R}^n$, definida como

$$h(t, x) = f\left(\frac{x}{1+t}\right) - f\left(\frac{-tx}{1+t}\right),$$

es una homotopía válida, lo que implica, por d3) y el lema anterior que

$$d_B(f, B_{\mathbb{R}^n}(0; s), 0) \neq 0.$$

Finalmente, de d4) y d5) se concluye (1.12).

Pasamos seguidamente al estudio del **grado topológico en dimensión infinita, que constituye la segunda parte de este Capítulo.**

La primera observación importante que hacemos se refiere al hecho de que no es posible la extensión de la noción de grado de *Brouwer* a dimensión infinita. Esta afirmación la precisamos inmediatamente:

Sea X un espacio de *Banach* real de dimensión infinita y Σ' el conjunto formado por las ternas (f, Ω, y) que cumplen la propiedad P_2 siguiente:

P_2: Ω es un abierto acotado de X, $f : \overline{\Omega} \to X$ es continua y además $y \in X$ es tal que $y \notin f(\partial\Omega)$.

Entonces, podemos afirmar que no existe ninguna aplicación $d_B : \Sigma' \to \mathbb{Z}$, satisfaciendo las propiedades d1), d2) y d3) del grado de *Brouwer* (con X en lugar de $\mathbb{R}^n$, en d3)).
En efecto, si existiese tal aplicación, el teorema del punto fijo de *Brouwer* (Teorema 1.3), sería válido, cuando se sustituye $\mathbb{R}^n$ por X. Sin embargo, esto no es así, como se muestra en el ejemplo siguiente:

Sea $X = c_0$, el espacio normado formado por las sucesiones de números reales con límite cero. Recordemos que si $x = \{x_n\} \in X$, entonces $\|x\| = sup_{\, n \in \mathbb{N}} \, \{ \, |x_n| \, \}$.
Si $f : X \to X$, se define como

$$f(x) = \left\{ \frac{1 + \|x\|}{2}, x_1, x_2, \ldots \right\},$$

entonces f es claramente continua y $f(\overline{B_X(0;1)}) \subset \overline{B_X(0;1)}$. Sin embargo f no tiene ningún punto fijo.

Motivados por las aplicaciones (véanse los problemas expuestos en la introducción), estamos interesados en la definición de un grado análogo al de *Brouwer*, que nos permita estudiar ecuaciones del tipo

$$x = Tx,$$

donde $T : \overline{\Omega} \to X$, siendo X un espacio de *Banach* real (de dimensión arbitraria) y $\Omega \subset X$, un subconjunto abierto y acotado. Además, T va a ser una aplicación que, en general, tiene propiedades topológicas adicionales a la continuidad relacionadas con la compacidad. De hecho, vamos a considerar que T es **compacta** (continua y tal que $T(\overline{\Omega})$ es relativamente compacto), un concepto que en el caso de dimensión finita, se reduce a la continuidad. La propiedad de aproximación uniforme de aplicaciones compactas, por aplicaciones compactas cuyo rango está contenido en subespacios de X de dimensión finita, hace posible definir, a partir del grado de *Brouwer*, un grado para

aplicaciones del tipo $I-T$, con T compacta, denominado **grado de** *Leray-Schauder*. Este grado no es sino el de *Brouwer* cuando la dimensión de X es finita.
Lo anterior queda claramente recogido en el siguiente teorema.

Teorema 1.9. *Sea X un espacio de Banach real y Γ el conjunto formado por las ternas $(I-T,\Omega,y)$ que cumplen la propiedad P_3 siguiente:*
P_3: Ω es un abierto acotado de X, $T:\overline{\Omega}\to X$ es compacta y además, $y\in X$ es tal que $y\notin(I-T)(\partial\Omega)$.
Entonces existe una única aplicación $d_{LS}:\Gamma\to\mathbb{Z}$, verificando las propiedades siguientes:
D1) $d_{LS}(I,\Omega,y)=1$, si $y\in\Omega$.
D2) Si Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos y disjuntos de Ω tales que $y\notin(I-T)(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$, entonces

$$d_{LS}(I-T,\Omega,y)=d_{LS}(I-T,\Omega_1,y)+d_{LS}(I-T,\Omega_2,y).$$

D3) Si $h:[0,1]\times\overline{\Omega}\to X$, es compacta, $y:[0,1]\to X$ es continua, son tales que $y(t)\notin(I-h(t,\partial\Omega))$, entonces

$$d_{LS}(I-h(t,.),\Omega,y(t))$$

es independiente de $t\in[0,1]$.
A $d_{LS}(I-T,\Omega,y)$ se le llama grado topológico de Leray-Schauder de $I-T$, relativo a Ω y a y.

Demostración: Hablemos primero de la existencia de la aplicación d_{LS}. Para ello, sea $(I-T,\Omega,y)\in\Gamma$. Como $T:\overline{\Omega}\to X$, es compacta, se tiene que $r=dist\ (y,(I-T)(\partial\Omega))>0$. Tomemos $0<\epsilon<r$, y $T_\epsilon:\overline{\Omega}\to X$, cualquier aplicación compacta tal que $|T(x)-T_\epsilon(x)|\leq\epsilon$, $\forall\ x\in\overline{\Omega}$, y además $T_\epsilon(\overline{\Omega})\subset X_\epsilon$, subespacio de dimensión finita de X. No hay ninguna pérdida de generalidad en suponer que $y\in X_\epsilon$.
Si $\Omega_\epsilon=\Omega\cap X_\epsilon$, la terna $(I-T_\epsilon,\Omega_\epsilon,y)\in\Sigma$, y por tanto tiene sentido hablar de $d_B(I-T_\epsilon,\Omega_\epsilon,y)$. Utilizando las propiedades d1), d2) y d3), puede probarse que éste último grado es independiente de ϵ, T_ϵ y X_ϵ.
Lo anterior permite definir

$$d_{LS}(I-T,\Omega,y)=d_B(I-T_\epsilon,\Omega_\epsilon,y). \tag{1.13}$$

que, a partir de d1), d2) y d3), puede comprobarse que satisface D1), D2) y D3).

Respecto de la unicidad de d_{LS}, satisfaciendo D1), D2) y D3), ésta se lleva a cabo, usando dichas propiedades para, progresivamente, probar que d_{LS} necesariamente ha de ser la aplicación definida en (1.13).

De manera análoga al grado de *Brouwer*, usando D1), D2) y D3), puede demostrarse el teorema que enuncio a continuación. Todas las propiedades que en él aparecen, se usan para mostrar posteriormente la potencia y utilidad de la noción definida.

TEOREMA 1.10. *Se cumplen:*
D4) Si $d_{LS}(I-T,\Omega,y)\neq 0$, *la ecuación*

$$x - Tx = y$$

tiene al menos una solución en Ω.
D5) Sea $(I-T,\Omega,y)\in\Gamma$ *y* $r = dist\,(y,(I-T)(\partial\Omega))$. *Entonces si* $(I-T_1,\Omega,z)\in\Gamma$ *es tal que*

$$|T(x)-T_1(x)|<r,\ \forall\ x\in\overline{\Omega},$$
$$|z-y|<r,$$

se cumple que

$$d_{LS}(I-T,\Omega,y) = d_{LS}(I-T_1,\Omega,z).$$

D6) Sea $T:\overline{\Omega}\to X$, *compacta. Entonces si* y, z *están en la misma componente conexa de* $X\setminus(I-T)(\partial\Omega)$, *se tiene*

$$d_{LS}(I-T,\Omega,y) = d_{LS}(I-T,\Omega,z).$$

D7) Si $(I-T,\Omega,y),(I-T_1,\Omega,y)\in\Gamma$, *son tales que* $T(x)=T_1(x)$, $\forall\ x\in\partial\Omega$, *entonces*

$$d_{LS}(I-T,\Omega,y) = d_{LS}(I-T_1,\Omega,y).$$

D8) Si $(I-T,\Omega,y)\in\Gamma$ *y* Ω_1 *es cualquier subconjunto abierto de* Ω *tal que* $y\notin(I-T)(\overline{\Omega}\setminus\Omega_1)$, *entonces*

$$d_{LS}(I-T,\Omega,y) = d_{LS}(I-T,\Omega_1,y).$$

Los comentarios que podemos hacer sobre el interés y utilidad de las propiedades D1) a D8), son los mismos que los que hicimos en su momento para el grado de *Brouwer*, de manera que a ellos me remito.

Como el grado de *Brouwer*, la teoría del grado de *Leray-Schauder*, es una herramienta poderosísima y útil para probar numerosos teoremas de punto fijo. Quizás, el más famoso de ellos es el **teorema del punto fijo de** *Schauder*, que enunciamos y probamos a continuación. Este teorema no es sino el teorema del punto fijo de *Brouwer* si la dimensión del espacio X es finita.

Teorema 1.11. *Sea X un espacio de Banach real y $D \subset X$, cerrado, acotado, convexo y no vacío. Si $T : D \to D$, es compacta, la ecuación*

$$x = Tx \tag{1.14}$$

tiene al menos una solución.

Demostración: Como en el Teorema del punto fijo de *Brouwer*, se realiza en varias etapas:
a) $D = \overline{B_X(0;r)}, r > 0$.
Si existe $x \in \partial D$, tal que $x = Tx$, se tiene la conclusión del teorema. Si no es así, defínase la homotopía compacta $h : [0,1] \times D \to D$, como $h(t,x) = tT(x)$. De D1) y D3) se deduce

$$d_{LS}(I - T, D, 0) = 1.$$

Ahora, de D4) se concluye la demostración.
b) D general.
Tomamos $\overline{T} : X \to D$, extensión de T, tal que $\overline{T}$ es compacta, cuando se restringe a cualquier subconjunto acotado de X. Además, si r se elige suficientemente grande como para que $D \subset \overline{B_X(0;r)}$, por a) se tiene la existencia de $x \in \overline{B_X(0;r)}$ tal que $\overline{T}x = x$. Como $\overline{T}(X) \subset D$, x es un punto fijo de T.

A continuación enunciamos un corolario que es útil en las aplicaciones, donde en numerosas ocasiones, es difícil probar directamente la compacidad del operador T.

Corolario 1.12 . *Sea X un espacio de Banach real, $D \subset X$, compacto, convexo y no vacío, y $T : D \to D$, continua. Entonces la ecuación* (1.14) *tiene al menos una solución.*

Demostración: Basta observar que, en realidad, T es compacta.

Llegados a este punto, merece la pena comentar algunos pormenores sobre las aplicaciones a problemas concretos del teorema del punto fijo de *Schauder* y en general, de la teoría del grado topológico de *Leray-Schauder*. En muchas situaciones, usualmente uno se encuentra un problema de puntos fijos como (1.14), donde $T : X \to X$, es una aplicación **completamente continua**, es decir, T es compacta cuando se restringe a cualquier subconjunto acotado de X. El problema en estos casos es encontrar un subconjunto apropiado D de X, al que aplicar el teorema del punto fijo de *Schauder*, o algún criterio más general.
Un camino que ha mostrado ser muy apropiado en numerosas ocasiones, consiste en probar la siguiente afirmación:
(A): Existe $r > 0$, tal que, cualquier solución $x \in X$, de la familia de ecuaciones

$$x = \lambda T x, \ \lambda \in [0, 1],$$

satisface

$$|x| < r.$$

Puede comprobarse fácilmente, usando las propiedades D1) y D3), que si **(A)** se cumple, entonces (1.14) tiene al menos una solución.

Así pues, el problema de puntos fijos (1.14) se reduce al de encontrar **cotas a priori** sobre una cierta familia uniparamétrica de ecuaciones relacionada con el operador T. De ahí que muchas veces se diga que el problema está resuelto si las posibles soluciones están acotadas a priori. Ahora bien, éste es un problema difícil, en general, y para el que se utilizan técnicas muy diversas, dependiendo del tipo de ecuación considerada. En particular, si $T(X)$ es acotado, claramente se cumple **(A)**.

Tenemos la oportunidad de familiarizarnos con la condición **(A)** en los dos ejemplos que siguen. El primero trata sobre **ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de** *Banach*; el segundo sobre **problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.**

Sea X un espacio de *Banach* real, Ω un abierto de $\mathbf{R} \times X$ y $f : \Omega \to X$, una aplicación dada.
Consideremos la e.d.o.

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{1.15}$$

Una solución de (1.15) es cualquier función $x : J \to X$, (J es un intervalo de $\mathbf{R}$), derivable y que satisface (1.15) en cualquier punto de J.

De la teoría básica de e.d.o. es conocido que si X es de dimensión finita y f continua, entonces, el p.v.i.

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.16}$$

tiene al menos una solución, para cualquier $(t_0, x_0) \in \Omega$.
Sorprendentemente, esto no es necesariamente verdad si la dimensión de X no es finita. Un ejemplo sencillo es el siguiente:

Sea $X = c_0$ y $f : \mathbb{R} \times X \to X$, definida como

$$f(t,x) = f(t, \{x_n\}) = \left\{ |x_n|^{1/2} + \frac{1}{n} \right\}.$$

Entonces el p.v.i.

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= 0, \end{aligned} \tag{1.17}$$

no tiene solución.

En efecto, si (1.17) tuviese solución $x : [0, \epsilon] \to X$, entonces

$$\begin{gathered} x_n'(t) = |x_n(t)|^{1/2} + \frac{1}{n}, \ \forall\, t \in [0, \epsilon], \\ x_n(0) = 0, \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{1.18}$$

donde $x(t) = \{x_n(t)\}, \ \forall\, t \in [0, \epsilon]$.
Comparando las soluciones de (1.18) con las del p.v.i.

$$\begin{aligned} z'(t) &= |z(t)|^{1/2}, \ t \in [0, \epsilon], \\ z(0) &= 0, \end{aligned}$$

se obtiene

$$x_n(t) \geq \frac{t^2}{4}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, t \in [0, \epsilon].$$

La expresión anterior prueba que $x(t) \notin X, \ \forall\, t \in (0, \epsilon]$.

Este ejemplo muestra que si la dimensión de X es no finita, se necesitan condiciones adicionales a la continuidad de f, para que el p.v.i. (1.16) tenga solución. Las hay de muchos tipos y la que presento a continuación quizás sea una de las más fáciles de entender por los alumnos.

TEOREMA 1.13. *Sea X un espacio de Banach real y $f : [0,a] \times X \to X$, con $a > 0$, verificando:*
1) f es completamente continua.
2) f es uniformemente continua en subconjuntos acotados de $[0,a] \times X$.
3) Existen constantes positivas c, d, tales que

$$|f(t,x)| \leq c + d|x|, \ \forall \ (t,x) \in [0,a] \times X.$$

Entonces, el p.v.i.

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.19}$$

tiene (para cada $x_0 \in X$), al menos una solución definida en $[0,a]$.

Demostración: Consta de dos ideas básicas: transformación de (1.19) en un problema de puntos fijos y uso de la teoría del grado de *Leray-Schauder* para probar que éste último problema tiene solución.
Es claro que $x : [0,a] \to X$, es solución de (1.19) si y solamente si $x \in C([0,a], X)$ y se satisface la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \, ds, \ \forall \ t \in [0,a].$$

Si $Y = C([0,a], X)$, con la norma uniforme y $T : Y \to Y$, se define como

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \, ds, \ \forall \ x \in Y, \ \forall \ t \in [0,a],$$

entonces (1.19) tiene solución si y solamente si la ecuación

$$x = Tx,$$

la tiene.
Ahora bien, la hipótesis 2) implica que T es continua. Además, si $B \subset Y$, es acotado, vamos a ver que $T(B)$ es relativamente compacto en Y. Para ello, el Teorema de *Ascolí-Arzelá* nos dice que es suficiente comprobar las dos propiedades siguientes:
i) $T(B)$ es equicontinuo.
ii) Para cada $\xi \in [0,a]$, el conjunto $\{(Tb)(\xi), b \in B\}$, es relativamente compacto en X.
i) es una consecuencia trivial del hecho de que f aplica subconjuntos acotados en subconjuntos acotados. Por su parte, para probar ii), basta tener en cuenta que, para cualquier $b \in B$, se tiene

$$\int_0^\xi f(s, b(s)) \, ds \ \in \ \xi \ \overline{co} M,$$

donde $M = \{ f(s, b(s)),\ s \in [0, \xi], b \in B \}$ y $\overline{co}M$ indica la envolvente cerrado convexa de M.
Ahora, la relación previa y la hipótesis 1) implican ii).

Por último, comprobemos que la afirmación **(A)** se verifica en este caso. Para ello, si $x \in Y$, satisface

$$x = \lambda T x,\ \lambda \in [0,1],$$

se tiene

$$x(t) = \lambda \left(x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds \right),\ \forall\, t \in [0, a].$$

De la hipótesis 3) se obtiene

$$|x(t)| \leq c_1 + c_1 \int_0^t |x(s)|\, ds,\ \forall\, t \in [0, t].$$

Un procedimiento estándar (como en la desigualdad de *Gronwall*) prueba la existencia de cotas a priori para x.

Observemos que si el teorema anterior se aplica en el caso en que la dimensión de X es finita, las hipótesis 1) y 2) se reducen a la continuidad de f, mientras que 3) es superflua para probar la existencia de soluciones de (1.19) (Teorema de *Cauchy-Peano*, sobre existencia de solusiones del problema de valores iniciales). Esto es una constante en los teoremas que se conocen sobre la existencia de soluciones de (1.19): al considerarlos en dimensión finita aparecen condiciones suplementarias que no son necesarias para tener la existencia de soluciones del p.v.i. considerado. De hecho, a pesar de que se ha realizado bastante, sigue siendo tema de investigación en la actualidad, el establecimiento de condiciones suficientes para la existencia de soluciones de (1.19).

La segunda aplicación del grado de *Leray-Schauder* que vamos a presentar, se refiere al estudio de problemas de contorno no lineales para e.d.o., no resonantes y con no linealidades acotadas. El caso resonante, mucho más complicado en general, se tratará en el Capítulo 3.

Sea el problema de contorno

$$\begin{gathered} -x''(t) = f(t, x(t)),\ t \in [0, \pi], \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{gathered} \tag{1.20}$$

donde $f : [0, \pi] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, es continua.

El problema lineal a considerar, que nos ayuda a tener alguna idea sobre el tipo de resultados que podemos esperar, es

$$\begin{aligned} -x''(t) = ax(t) + b(t),\ t \in [0,\pi], \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

donde $a \in \mathrm{R}$ y $b : [0,\pi] \to \mathbf{R}$, es continua.

El **Teorema de la alternativa de** *Fredholm* da una respuesta teórica completa y satisfactoria sobre (1.21):
a) Si $a \notin \{ n^2, n \in \mathrm{N} \}$, entonces (1.21) tiene, para cada $b \in C[0,\pi]$, solución única $x \in C^2[0,\pi]$.
b) Si $a \in \{ n^2, n \in \mathrm{N} \}$, entonces (1.21) tiene solución si y solamente si

$$\int_0^\pi b(t) sen\ nt\ dt = 0.$$

Además, si la relación anterior se cumple, (1.21) tiene infinitas soluciones.

El caso no lineal (1.20) es bastante más complicado, siendo objeto de investigación actualmente. De los resultados para el caso lineal, parece intuirse que si estamos en la situación a) (caso no resonante), el problema debe ser más fácil que en la situación b). Efectivamente esto es así en general. La razón para ello es la siguiente:
Un problema no lineal se escribe de manera abstracta como una ecuación de operadores de la forma

$$Lx = Nx, \tag{1.22}$$

siendo L un operador diferencial lineal (usualmente cerrado y no continuo) y N no lineal.
En el caso no resonante, el operador L tiene inverso, de tal manera que (1.22) se transforma en el problema de puntos fijos

$$x = L^{-1}Nx.$$

Generalmente, L^{-1} es compacto y N continuo; así $L^{-1}N$ es un operador compacto al que se puede aplicar la teoría del grado de *Leray-Schauder*. Esto es lo que a continuación haremos nosotros con detalle, para el problema (1.20). Sin embargo, si el problema es resonante, el operador L no tiene inverso, así que (1.22) no se transforma de manera directa en un problema de puntos fijos; esto hace que su estudio sea más complicado (Capítulo 3).

Aquí vamos a considerar la situación más simple posible: el problema (1.20) (que es no resonante) con no linealidad f acotada. El tratamiento que hacemos se puede aplicar, prácticamente sin cambio alguno, al problema

$$-x''(t) + \lambda x(t) = f(t, x(t)),\ t \in [0, \pi],$$
$$x(0) = x(\pi) = 0,$$

con $\lambda \notin \{ n^2, n \in \mathrm{N} \}$.

TEOREMA 1.14. *Si f es continua y acotada,* (1.20) *tiene al menos una solución.*

Demostración: Resumámosla, poniendo de manifiesto las ideas fundamentales:

1) Transformación de (1.20) en una ecuación integral equivalente.
Sabemos que existe una función (la llamada función de *Green*)$G : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbf{R}$, continua, tal que $x \in C^2[0, \pi]$ es solución de (1.20) si y solamente si $x \in C[0, \pi]$ y

$$x(t) = \int_0^\pi G(t, s) f(s, x(s))\, ds,\ \forall\ t \in [0, \pi]. \tag{1.23}$$

G no es sino la función de *Green* del problema lineal homogéneo asociado.

2) Transformación de (1.23) en un problema de punto fijo.
Es obvio: si $X = C([0, \pi], \mathbf{R})$, con la norma uniforme y $T : X \to X$, se define como

$$(Tx)(t) = \int_0^\pi G(t, s) f(s, x(s))\, ds,\ \forall\ x \in X,\ \forall\ t \in [0, \pi],$$

(1.23) es equivalente a

$$x = Tx$$

3) Estudio de las propiedades topológicas del operador T.
3.1) T es continuo.
Es una consecuencia inmediata de la continuidad uniforme de f en subconjuntos acotados de $[0, \pi] \times \mathbf{R}$.
3.2) Si $B \subset X$, es acotado, $T(B)$ es relativamente compacto.
En efecto, por el Teorema de *Ascolí-Arzelá,* basta ver que $T(B)$ es equiacotado y equicontinuo. La equiacotación de $T(B)$ es inmediata, pues f es acotada; por otra parte, el hecho de que G sea continua garantiza que $T(B)$ es equicontinuo.

4) Aplicación del Teorema del punto fijo de *Schauder.*
Como f es acotada, existe $r > 0$, tal que $T(X) \subset \overline{B_X(0; r)} \equiv D$. Entonces

$T : D \to D$, está en las condiciones de dicho teorema. Así, T tiene al menos un punto fijo x, solución de (1.20).

La tercera y última parte de este Capítulo la vamos a dedicar a exponer los hechos básicos de la **teoría del grado topológico en conos.** La motivación para introducir esta teoría es la siguiente: hay muchos problemas de ecuaciones diferenciales e integrales, donde el interés se centra en la existencia de soluciones, cuya imagen esté contenida en un conjunto determinado de antemano.Por ejemplo, pensemos en los problemas expuestos en la introducción, relacionados con Dinámica de poblaciones; en ellos, sólo interesan las soluciones no negativas.
Cuando esto ocurre, en general no es aplicable la teoría del grado de *Leray-Schauder*, puesto que puede suceder que el conjunto de funciones no negativas tenga interior vacío dentro del conjunto total de funciones considerado. No obstante, aprovechando el hecho de que cualquier cono en un espacio de *Banach*, es un retracto del mismo, va a ser posible contruir un análogo de la teoría del grado de *Leray-Schauder*, relativa a conos, muy útil para el tratamiento de problemas como los que hemos mencionado y similares.
Previo a ello, es preciso decir algo sobre el grado topológico de aplicaciones definidas en conjuntos no acotados.

Sea X un espacio de *Banach* real, $\Omega \subset X$, abierto y $T : \overline{\Omega} \to X$, localmente compacta; es decir, para cada $x \in \Omega$ existe un entorno $U = U(x)$, tal que T, restringida a U, es compacta. Sea un elemento $y \in X \setminus (I - T)(\partial\Omega)$, tal que $(I - T)^{-1}(y)$ es compacto. Entonces se puede definir $d_{LS}(I - T, \Omega, y)$ como $d_{LS}(I - T, V, y)$, siendo $V \subset \Omega$, cualquier abierto acotado conteniendo a $(I - T)^{-1}(y)$, tal que T, restringida a $\overline{V}$, es compacta.

Sea ahora X un espacio de *Banach* real y K un retracto de X. Es decir, existe una aplicación continua $R : X \to K$, tal que $Rx = x$, $\forall\ x \in K$.
Sea $\Omega \subset K$, abierto (en adelante, cuando nos refiramos a nociones topológicas de subconjuntos de K, entendemos que lo hacemos respecto de la topología relativa a K), y $F : \overline{\Omega} \to K$, compacta (es decir, continua y $F(\overline{\Omega})$ relativamente compacto), tal que

$$Fx \neq x, \ \forall\ x \in \partial\Omega.$$

Entonces

$$d_{LS}(I - FR, R^{-1}(\Omega), 0)$$

está bien definido y es independiente del retracto R. A este número entero se le llama **índice de punto fijo de F, sobre Ω, relativo a K,** y se nota por

$$i(F, \Omega, K)$$

o simplemente $i(F,\Omega)$, si no hay posibilidad de confusión respecto de quién ha de ser K.

Usando la definición de $i(F,\Omega,K)$ y las propiedades del grado de *Leray-Schauder*, ya estudiadas, puede probarse el siguiente teorema.

Teorema 1.15. *Se cumplen las propiedades siguientes:*
K1) Si $F:\overline{\Omega}\to\Omega$, *es contante,*

$$i(F,\Omega,K)=1.$$

K2) Si Ω_1,Ω_2 *son subconjuntos abiertos disjuntos de* Ω *tales que* F *no tiene puntos fijos en* $\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)$, *entonces*

$$i(F,\Omega,K)=i(F,\Omega_1,K)+i(F,\Omega_2,K).$$

K3) Si $I=[a,b]\subset\mathrm{R}$ *y* $H:I\times\overline{\Omega}\to K$, *es compacta tal que* $H(\lambda,x)\neq x,\ \forall\ (\lambda,x)\in I\times\partial\Omega$, *entonces*

$$i(H(\lambda,.),\Omega,K)$$

es independiente de $\lambda\in I$.
K4) Si K_1 *es un retracto de* K *y* $F(\overline{\Omega})\subset K_1$, *entonces*

$$i(F,\Omega,K)=i(F,\Omega\cap K_1,K_1).$$

K5) Si Ω_1 *es un subconjunto abierto de* Ω *tal que* F *no tiene puntos fijos en* $\overline{\Omega}\setminus\Omega_1$, *entonces*

$$i(F,\Omega,K)=i(F,\Omega_1,K).$$

K6) Si $i(F,\Omega,K)\neq 0$, F *tiene al menos un punto fijo en* Ω.

Las nociones anteriores son en particular aplicables cuando K es un cono.

Definición 1.16. *Un subconjunto* C *de un espacio de Banach real, diremos que es un cono si se cumplen las propiedades siguientes:*
1) C *es cerrado y convexo.*
2) $\lambda C\subset C,\ \forall\ \lambda\geq 0$.
3) $C\cap(-C)=\{0\}$.

En adelante, supondremos que C no se reduce al elemento 0.
Debido a que C es cerrado y convexo, el teorema de extensión de *Dugundji* garantiza que C es un retracto de X, con lo que, si Ω es cualquier abierto de C y $F : \overline{\Omega} \to C$ es compacta, sin puntos fijos en $\partial\Omega$, podemos hablar de $i(F, \Omega, C)$, que en adelante se indicará simplemente por $i(F, \Omega)$.

La primera aplicación del concepto recién definido es el siguiente teorema de punto fijo, del que se obtendrán como una consecuencia, otros famosos y conocidos. Hemos de resaltar que en el teorema se obtiene un punto fijo no trivial del cono C. Esto es muy importante en las aplicaciones, pues se tienen de esta forma soluciones no negativas y no triviales.

TEOREMA 1.17. *Sea X un espacio de Banach real, $C \subset X$ un cono y $f : \overline{C_r} \to C$, compacta, donde*

$$C_r = \{ x \in C : |x| < r \}.$$

Supongamos:
1) Si $x \in C$ verifica $|x| = r$ y $\lambda > 1$, entonces

$$Fx \neq \lambda x.$$

2) Existen $\rho \in (0, r)$ y $e \in C \setminus \{0\}$, tales que si $x \in C$ satisface $|x| = \rho$ y $\lambda > 0$, se tiene

$$x - Fx \neq \lambda e.$$

Entonces F tiene al menos un punto fijo x verificando

$$\rho \leq |x| \leq r. \tag{1.24}$$

Demostración: Sean $\Omega_1 = C_\rho$, $\Omega_2 = C_r \setminus \overline{C_\rho}$. Entonces, si existe algún punto fijo de F en $\overline{C_r} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, se tiene la conclusión del teorema. Si no es así, por K2),

$$i(F, C_r \setminus \overline{C_\rho}) = i(F, C_r) - i(F, C_\rho). \tag{1.25}$$

Ahora bien, si $H : [0,1] \times \overline{C_r} \to C$, se define como $H(\lambda, x) = \lambda F x$, de la hipótesis 1) y K1), K3), obtenemos

$$i(F, C_r) = 1.$$

Definiendo $H : [0, +\infty) \times \overline{C_\rho} \to C$, como $H(\lambda, x) = Fx + \lambda e$, deducimos de la hipótesis 2) y de K1), K3), que, para λ suficientemente grande,

$$i(F, C_\rho) = 0.$$

Por último, (1.25) y las dos igualdades anteriores, implican la conclusión deseada.

Del teorema anterior se deducen dos corolarios, conocidos, respectivamente, con los nombres de **teorema de la compresión y extensión del cono.**

Corolario 1.18. *Sea $F : \overline{C_r} \to C$, compacta, tal que para algún $\rho \in (0, r)$, se tiene:*
1) $Fx - x \notin C$, si $|x| = r$.
2) $x - Fx \notin C$, si $|x| = \rho$.
Entonces F tiene al menos un punto fijo x satisfaciendo (1.24)

Corolario 1.19. *Sea $F : \overline{C_r} \to C$, compacta, tal que para algún $\rho \in (0, r)$ se tiene:*
1) $x - Fx \notin C$, si $|x| = r$.
2) $Fx - x \notin C$, si $|x| = \rho$.
Entonces F tiene al menos un punto fijo x satisfaciendo (1.24)

Una aplicación muy bonita de los resultados anteriores consiste en el estudio de la existencia de soluciones positivas de ciertos tipos de **ecuaciones integrales** que surgen en **Dinámica de poblaciones y teoría de epidemias.** Concretamente, nos referimos a la ecuación integral

$$x(t) = \int_{t-\tau}^{t} f(s, x(s))\, ds, \tag{1.26}$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$, $(t, x) \to f(t, x)$, es continua, $f(t, 0) = 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, f es ω-periódica con respecto a la variable t y $\tau > 0$.

(1.26) es un modelo matemático para estudiar la evolución en el tiempo de algunas epidemias cuando se tienen en cuenta las condiciones ambientales periódicas. También se ha utilizado como modelo de crecimiento de algunas poblaciones.

Observemos que (1.26) tiene siempre la solución trivial. Por ello, el interés se centra en el estudio de la existencia de soluciones positivas y ω-periódicas. Por su parte, la constante positiva τ, que hace el papel de parámetro, tiene una interpretación biológica clara en teoría de epidemias: es el intervalo de tiempo que un individuo permanece infectado.

Seguidamente probamos que si la función $\dfrac{f(t,x)}{x}$, satisface condiciones apropiadas "cerca de cero y en infinito", entonces existe un valor del parámetro, τ_0, tal que si $\tau > \tau_0$, (1.26) tiene soluciones periódicas no negativas y no triviales.

TEOREMA 1.20. *Supongamos:*
i)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(t,x)}{x} = 0,$$

de manera uniforme en $t \in \mathbf{R}$.
ii) Existe una función $\phi : \mathbf{R} \to (0,+\infty)$, *continua y* ω*-periódica y un número real* $\rho > 0$, *tal que*

$$\frac{f(t,x)}{x} \geq \phi(t), \ \forall\, t \in \mathbf{R}, \ \forall\, x \in [0,\rho].$$

Entonces, existe $\tau_0 > 0$, *tal que si* $\tau > \tau_0$, (1.26) *tiene al menos una solución* $x : \mathbf{R} \to [0,+\infty)$, *continua, no trivial y* ω*-periódica.*

Demostración: Consiste en ver que se satisfacen todas las hipótesis del Teorema (1.17). Para ello, tomemos

$$X = \ \{\, x \in C(\mathbf{R},\mathbf{R}) : x(t+\omega) = x(t), \ \forall\, t \in \mathbf{R} \,\},$$

$$|x| = max \ \{\, |x(t)| : \ t \in \mathbf{R} \,\},$$

$$C = \ \{\, x \in X : x(t) \geq 0, \ \forall\, t \in \mathbf{R} \,\},$$

$$F : C \to C, \ (Fx)(t) = \int_{t-\tau}^{t} f(s,x(s))\, ds.$$

Fácilmente puede probarse, usando el teorema de *Ascolí-Arzelá,* que F es compacta en subconjuntos acotados de C. Además, τ_0 puede elegirse de la forma siguiente:
Para $\tau \in \mathbf{R}^+$, tomemos $c(\tau) > 0$ tal que $\tau f(t,x) \leq x, \forall\, x \geq c(\tau), \ \forall\, t \in \mathbf{R}$. Sea $M(\tau) = max \ \{|f(t,x)| : t \in \mathbf{R}, 0 \leq x \leq c(\tau) \,\}$.
Por otra parte, si $\alpha(\tau) = inf_{\ t\in\mathbf{R}} \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} \phi(s)\, ds$, se cumple que
$\alpha(\tau) \to +\infty$ si $\tau \to +\infty$.
Si elegimos $e \equiv 1$, τ_0 puede tomarse tal que

$$M(\tau)\tau > \rho, \ \alpha(\tau) > 1,$$

para cualquier $\tau > \tau_0$.

El estudio de problemas como (1.26), tanto en la versión escalar, como en la de sistemas, es objeto de investigación actual. Ésta se centra en la búsqueda de propiedades cualitativas de las soluciones (estabilidad, comportamiento asintótico), multiplicidad, etc.

Ejercicios y actividades complementarias recomendadas

La teoría del grado topológico tiene muchas más aplicaciones que las vistas aquí, así como multitud de variantes para distintas clases de operadores. En esta línea van los comentarios y sugerencias que siguen:

- Proponer algunos ejemplos de aplicaciones concretas, donde el alumno deba calcular el grado de *Brouwer*. Asímismo, considérense diversos ejemplos de ecuaciones no lineales para probar existencia de solución. También, con la ayuda de la bibliografía recomendada, pueden plantearse otros resultados acerca de la sobreyectividad de aplicaciones y sobre teoremas de punto fijo.

- Aplicar la teoría del grado de *Brouwer* para probar algunos resultados como los siguientes, con los que se pretende mostrar la utilidad que tiene en campos diversos de la Matemática y en algunas de sus aplicaciones:

1) Sea $A = (a_{ij})$, una matriz real cuadrada, de orden n, tal que $a_{ij} \geq 0$, $\forall\, i,j, 1 \leq i,j \leq n$. Entonces existen un número real $\lambda \geq 0$ y un vector x, no nulo y con todas las componentes no negativas, tales que $Ax = \lambda x$. (teorema de *Perron-Frobenius,* con aplicaciones en **Economía**).

2) La frontera de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$, no es un retracto de la bola cerrada unidad.

3) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, conteniendo al origen y $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, continua. Entonces, si n es impar, deben existir $x \in \partial\Omega$ y $\lambda \neq 0$, tales que $f(x) = \lambda x$ (teorema del erizo).

4) Dados $A_1, ..., A_n$, n subconjuntos acotados y medibles de $\mathbb{R}^n$, existe un hiperplano que separa, a cada uno de los subconjuntos dados, en dos partes con medidas iguales (problema del sandwich).

5) Sean Ω_1 y Ω_2, dos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, homeomorfos. Entonces $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1$ y $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_2$ tienen el mismo número de componentes conexas

(teorema de separación de *Jordan*).

- El Teorema del punto fijo de *Schauder* puede aplicarse a otros muchos problemas no lineales. Por ejemplo, en el Capítulo hemos presentado algunos problemas de contorno para e.d.o. de segundo orden. Otros ejemplos pueden ser de e.d.p. como el siguiente problema de *Goursat* no lineal (problema de valores iniciales):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x\, \partial y} &= f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \ (x, y) \in [0, a] \times [0, b], \\ u(x, 0) = \phi(x),\ x &\in [0, a],\ u(0, y) = \psi(y),\ y \in [0, b]. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Es posible transformar (de manera obvia) (1.27) en una ecuación integral equivalente, de tal forma, que imponiendo hipótesis apropiadas a las condiciones iniciales ϕ y ψ, y a la no linealidad f, se puede probar la existencia de soluciones de (1.27).

- La teoría del grado topológico en conos, puede aplicarse a numerosos ejemplos, para probar la existencia de soluciones positivas. Entre ellos, destacamos los siguientes:

1) Sistemas de ecuaciones de tipo elíptico que surgen en **Dinámica de poblaciones**, como los mencionados en la introducción.

2) Otras ecuaciones integrales, distintas de la considerada en el Capítulo, que también surgen en **Dinámica de poblaciones**.

3) Problemas de contorno para e.d.o., que surgen en **Ingeniería química**. Un ejemplo podría ser

$$\begin{aligned} \beta x''(t) - x'(t) + f(x(t)) = 0,\ t \in [0, 1], \\ \beta x'(0) - x(0) = 0,\ x'(1) = 0. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Mediante el uso de una función de *Green* apropiada, (1.28) puede transformarse en una ecuación integral conveniente, a la que aplicar la teoría del grado topológico en conos.

- Algunos aspectos complementarios de interés sobre el grado topológico de *Brouwer*, que el alumno puede estudiar con ayuda de la bibliografía recomendada, son los siguientes:

1) Definición del grado para subconjuntos abiertos Ω de $\mathbb{R}^n$ no necesariamente acotados. Esto es posible si se exige a la aplicación f una "condición de crecimiento" adicional.

2) Para $n = 2$, relación entre el grado topológico de *Brouwer* y la noción de índice de una curva respecto de un punto.

- En lo que respecta al grado topológico de *Leray-Schauder*, conviene destacar los siguientes complementos de interés:

1) El grado de *Leray-Schauder* se ha definido para perturbaciones compactas de la aplicación identidad. Hay muchos ejemplos que no pueden estudiarse con esta herramienta; por ejemplo, muchas ecuaciones diferenciales se plantean de manera abstracta como una ecuación de operadores donde la parte no lineal no es necesariamente compacta, pero sí Lipschitziana.
Usando la noción de **α-contracción** (basada a su vez en la medida de no compacidad de *Kuratowski*), puede definirse un grado para perturbaciones α-contractivas de la identidad, que incluye los casos en que éstas son compactas o contráctiles.
Los diversos teoremas de puntos fijo que se obtienen con esta teoría constituyen generalizaciones muy útiles del teorema del punto fijo de *Schauder* o del teorema del punto fijo de la contracción. Por ejemplo, con ellos pueden estudiarse problemas de contorno para e.d.o. con término no lineal no compacto (esto sucede si la no linealidad depende de la derivada de orden superior).

2) Definición del grado en espacios vectoriales topológicos localmente convexos.

3) Estudio del problema de *Cauchy* para e.d.o. en espacios de *Banach* con condiciones basadas en la medida de no compacidad.

Bibliografía recomendada

[7], [14], [15], [32], [33], [42], [44], [49], [51], [56], [61].

2. EL MÉTODO VARIACIONAL.

Es frecuente encontrarse con diferentes problemas que conducen a la siguiente cuestión: sea A un subconjunto no vacío de $\mathbf{R}$ y $f : A \to \mathbf{R}$ una función. ¿Qué condiciones sobre A y f garantizan la existencia de máximo y mínimo de f en A ?. Además, si A es abierto y f derivable, aquellos puntos $x \in A$ donde f alcanza sus valores extremos, han de satisfacer la ecuación

$$f'(x) = 0. \tag{2.1}$$

Si $x \in A$ satisface (2.1), se dice que x es un punto crítico (o estacionario) de f y a su correspondiente valor $f(x)$, se le llama valor crítico (o valor estacionario) de f.

La anterior cuestión también se plantea para funciones reales de varias variables reales siendo uno de los temas más atractivos del Análisis Matemático, debido a su gran variedad de aplicaciones.

Nos podemos plantear la cuestión anterior en un ambiente más general : Sea X un espacio normado real, $A \subset X$ y $f : A \to \mathbf{R}$. ¿Qué condiciones sobre A y f garantizan la existencia de máximo y mínimo de f en A ?. Como anteriormente, si A es abierto y f es derivable Fréchet, tal pregunta está íntimamente relacionada con la ecuación (2.1) y eligiendo adecuadamente X, A y f, surge en cualquier problema relacionado con el llamado **Cálculo de Variaciones.** Tal disciplina es tan antigua como el **Cálculo Diferencial e Integral,** y ha constituido desde entonces uno de los campos de la Matemática más atractivo e interesante. Su rango de aplicabilidad es amplísimo y materias tan distintas como Matemática (Ecuaciones Diferenciales, Geometría Diferencial,...), Física (Mecánica, Astronomía, Elasticidad,...), Ingeniería, Economía, Biología, etc., lo incluyen como un método muy potente para abordar algunos de los problemas que se les plantean. Quizás una de las frases más acertadas sobre el método variacional y que puede dar idea de su importancia, sea la siguiente, atribuida a *Euler*: "*Puesto que el Universo es perfecto y fué creado por el Creador más sabio, nada ocurre en él, sin que esté presente alguna ley de máximo o mínimo*".

Pienso que para introducir a los alumnos en el tema, un ejemplo sencillo como el que sigue, puede valer. Supongamos una partícula de masa m que se mueve por el espacio bajo la acción de una fuerza F. La posición de la partícula viene descrita por una función vectorial $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ que nos indica, para cada tiempo t, el punto del espacio donde se encuentra dicha partícula. Por su parte, la fuerza F, se expresa por una función vectorial $F(X) = (F_1(X), F_2(X), F_3(X))$ $(X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3)$, que depende del punto X del espacio $\mathbf{R}^3$ donde actúa y suponemos que es conservativa (el trabajo que realiza para desplazar la partícula de un punto a otro es independiente de la trayectoria seguida). Matemáticamente esto significa que existe una función real $U(X)$ tal que $\dfrac{\partial U(X)}{\partial x_i} = F_i(X)$, $1 \leq i \leq 3$, $\forall X \in \mathbf{R}^3$ (La energía potencial es por lo tanto $-U$).

Si la partícula que estamos considerando se encuentra en el tiempo t_1 en un punto P_1 del espacio y, siguiendo la trayectoria X, en el tiempo t_2 en otro punto P_2 , la **acción integral de** *Hamilton* se define como

$$\Phi(X) = \int_{t_1}^{t_2} (T(X)(t) + U(X(t))\, dt, \tag{2.2}$$

donde $T(X)(t) = \frac{1}{2}m(|x_1'(t)|^2 + |x_2'(t)|^2 + |x_3'(t)|^2)$ es la energía cinética en el tiempo t.
Como podemos observar, la acción integral depende de la trayectoria a lo largo de la cual la partícula se desplaza de P_1 a P_2.

La pregunta que podemos hacernos es la siguiente: ¿Qué relación tendrá la acción integral con la trayectoria X_0 que seguirá la partícula para pasar de P_1 a P_2, bajo la acción de la fuerza F ?. El **Principio de** *Hamilton* establece que en dicha trayectoria, la acción integral toma un valor estacionario (recuérdese la definición de valor estacionario para funciones reales de variable real). En términos abstractos, si A representa el conjunto de trayectorias "posibles" de P_1 a P_2 y $\Phi : A \to \mathbf{R}$ se define por (2.2), entonces debe cumplirse $\Phi'(X_0) = 0$ (en un sentido que se ha de precisar). De esta última ecuación puede obtenerse de manera fácil la **segunda ley de** *Newton*

$$mX_0''(t) = F(X_0(t)), \forall t \in [t_1, t_2].$$

Lo anterior, que es la formulación de la segunda ley de *Newton* (para un caso particular) en términos variacionales, es un ejemplo muy simple, pero no por ello deja de ser significativo. Son muchas las leyes de la Física y de otras disciplinas que pueden expresarse en forma variacional. La idea fundamental consiste en asociarle al fenómeno que estemos considerando, un funcional $\Phi : A \to \mathbf{R}$, donde A es un "conjunto de funciones apropiado" y tratar de optimizar Φ, o al menos tratar de probar que Φ tiene valores estacionarios.

El método variacional es especialmente útil para el estudio de soluciones débiles de problemas de contorno no lineales, pues permite el uso de herramientas muy potentes del Análisis Funcional. Incluso, cuando se quiere probar existencia de soluciones clásicas de algunos problemas, el planteo débil del mismo puede ayudar a ello.

En este tema, considerado como de introducción al Cálculo de Variaciones y Teoría de puntos críticos, se van a exponer algunos resultados importantes referentes tanto al llamado método directo (en el que se trata de probar la existencia de mínimo global del funcional dado), como a los métodos min-max, de desarrollo reciente. Los funcionales que estudiaremos en la parte dedicada al método directo, satisfacen básicamente o una condición de coercividad o una condición de compacidad (tipo *Palais-Smale*). En lo que respecta a los métodos min-max, centramos nuestra atención en dos teoremas modernos, pero ya clásicos: el **Teorema del paso de montaña de** *Ambrosetti y Rabinowitz* **y el Teorema del punto de silla de** *Rabinowitz.*
Según mi opinión, los resultados seleccionados son ejemplos muy representativos de las diferentes posibilidades del método variacional, pudiéndose, con la ayuda de la bibliografía recomendada, estudiar otros de los muchos que se conocen en la actualidad.

En una primera etapa se debe aprender a aplicar tales métodos a problemas relacionados con e.d.o., donde las dificultades técnicas son más fácilmente superables, para pasar después al caso de e.d.p. Se necesita conocer los espacios de *Sobolev* para entender adecuadamente el desarrollo que hacemos seguidamente, así como tener unas nociones mínimas de Cálculo diferencial e integral en espacios de *Banach.*

El problema de contorno que vamos a tener de referencia en este capítulo es el siguiente:

$$\begin{aligned} -u''(x) = g(x, u(x)),\ x \in [0, \pi], \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $g : [0, \pi] \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, es continua.

DEFINICIÓN 2.1. *Una función u es solución débil de (2.3) si $u \in H_0^1(0, \pi)$ y*

$$\int_0^\pi u'(x)v'(x)\, dx = \int_0^\pi g(x, u(x))v(x)\, dx,\ \forall\ v \in H_0^1(0, \pi),$$

donde $H_0^1(0, \pi)$ es el espacio de Sobolev usual, con la norma

$$|v| = \left(\int_0^\pi |v'(x)|^2\, dx\right)^{1/2},\ \forall\ v \in H_0^1(0, \pi),$$

proveniente del producto escalar

$$< u, v > = \int_0^\pi u'(x)v'(x)\, dx,\ \forall\ u, v \in H_0^1(0, \pi).$$

Uno de los resultados más importantes de este capítulo es el siguiente, donde se relaciona el concepto de solución débil de (2.3) con el de la existencia de puntos críticos de un funcional adecuado, definido de $H_0^1(0,\pi)$ en $\mathbf{R}$.

TEOREMA 2.2. *Sea*

$$G(x,u) = \int_0^u g(x,s)\, ds, \ \forall\ (x,u) \in [0,\pi]\times \mathrm{R} \tag{2.4}$$

y $\Phi : H_0^1(0,\pi) \to \mathrm{R}$, *el funcional definido como*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'(x)|^2\, dx - \int_0^\pi G(x,u(x))\, dx, \ \forall\ u \in H_0^1(0,\pi). \tag{2.5}$$

Entonces $\Phi \in C^1(H_0^1(0,\pi),\mathrm{R})$ *y*

$$\begin{aligned} \Phi'(u)(v) \ &= \int_0^\pi u'(x)v'(x)\, dx - \\ &- \int_0^\pi g(x,u(x))v(x)\, dx, \ \forall\ u,v \in H_0^1(0,\pi). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Como consecuencia, se tiene que $u \in H_0^1(0,\pi)$ *es solución débil de* (2.3) *si y solamente si*

$$\Phi'(u) = 0. \tag{2.7}$$

Demostración: Para demostrar que $\Phi \in C^1(H_0^1(0,\pi),\mathrm{R})$, observemos en primer lugar que, para cada $u \in H_0^1(0,\pi)$, la aplicación $H_0^1(0,\pi) \to \mathrm{R}$, $v \to F(u)(v) \equiv \int_0^\pi u'(x)v'(x)\, dx - \int_0^\pi g(x,u(x))v(x)\, dx$, es lineal y continua (la continuidad es consecuencia de la desigualdad de *Poincaré*). Además,

$$\begin{aligned} \Phi(u+h) - \Phi(u) - F(u)(h) = \frac{1}{2}\int_0^\pi (h'(x))^2\, dx + \\ + \int_0^\pi [G(x,u(x)) - G(x,u(x)+h(x)) + g(x,u(x))h(x)]\, dx. \end{aligned}$$

Usando el Teorema del valor medio (en forma integral), de la expresión anterior se deduce

$$\begin{aligned} |\Phi(u+h) - \Phi(u) - F(u)(h)| \le \frac{1}{2}|h|^2 + \\ + \int_0^1 \left(\int_0^\pi (g(x,u(x)) - g(x,u(x)+(1-t)h(x))^2\, dx \right)^{1/2} dt\ |h|, \end{aligned}$$

lo que implica, usando la continuidad de g, (2.6).
Veamos que la función $\Phi' : H_0^1(0,\pi) \to L(H_0^1(0,\pi),\mathrm{R})$, es continua, donde $L(H_0^1(0,\pi),\mathrm{R})$ es el espacio vectorial normado de las aplicaciones lineales y continuas de $H_0^1(0,\pi)$ en R, con la norma usual. Para ello, notemos que si $u_1, u_2 \in H_0^1(0,\pi)$, entonces:

$$|\Phi'(u_1) - \Phi'(u_2)| = sup_{\ |v|\leq 1}|(\Phi'(u_1) - \Phi'(u_2))(v)| \leq$$

$$\leq |u_1 - u_2| + \left(\int_0^\pi (g(x,u_1(x)) - g(x,u_2(x))^2\, dx\right)^{1/2}$$

De esta expresión y de la continuidad de g se deduce la de Φ'.

El Teorema anterior pone de manifiesto el interés por el estudio de la ecuación abstracta (2.7) donde $\Phi : H \to \mathrm{R}$, es un funcional de clase C^1, siendo H un espacio de *Hilbert* real.
Existen numerosos resultados que prueban la existencia de solución de ecuaciones como (2.7). Sin embargo, nosotros estaremos interesados sólo en aquellos que, al aplicarlos al funcional Φ dado en (2.5), proporcionen condiciones suficientes útiles y razonables para la existencia de soluciones de (2.3). Así que, a la hora de estudiar (2.7), tendremos siempre presente (2.3), de tal manera que cualquier resultado abstracto que obtengamos sobre (2.7) lo concretaremos para (2.3). De hecho, es este último problema el que motiva en la mayoría de las ocasiones, el tipo de resultados abstractos que obtendremos.

Una manera fácil de conseguir la existencia de soluciones de (2.7) es demostrando que Φ tiene mínimo (global) (el caso de máximo global se reduce al de mínimo, estudiando $-\Phi$ en lugar de Φ). Establecer condiciones suficientes para que esto ocurra es el objetivo de lo que sigue, que se puede considerar parte del llamado **método directo en el Cálculo de Variaciones.**

En lo que queda de capítulo, salvo que explícitamente se suponga otra cosa, H es un espacio de *Hilbert* real y $\Phi : H \to \mathrm{R}$, es un funcional de clase C^1. Recordemos que Φ se dice **débilmente semicontinuo inferiormente** si para cualquier sucesión $\{u_n\} \subset H$, cumpliendo $\{u_n\} \rightharpoonup u \in H$, se tiene $\Phi(u) \leq lim\ inf\ \Phi(u_n)$.

TEOREMA 2.3. *Sea $\Phi : H \to \mathrm{R}$, débilmente semicontinuo inferiormente, tal que existe una sucesión minimizante acotada. Entonces Φ tiene mínimo global.*

Demostración: Sea $\{u_n\}$ una sucesión minimizante acotada. Entonces, existe una subsucesión, a la que notamos nuevamente por $\{u_n\}$ y $u \in H$, tal que $\{u_n\} \rightharpoonup u$. Así,

$$\Phi(u) \leq lim\ inf\ \Phi(u_n) = inf\ _H\ \Phi,$$

lo que prueba que $\Phi(u) = inf\ _H\ \Phi$.

Condiciones adicionales sobre el funcional Φ garantizan la existencia de sucesiones minimizantes acotadas. Por ejemplo, si Φ es coercivo.

COROLARIO 2.4. *Sea $\Phi : H \to \mathbf{R}$, débilmente semicontinuo inferiormente y coercivo, es decir,*

$$\lim_{|u| \to +\infty} \Phi(u) = +\infty.$$

Entonces Φ tiene mínimo global.

Como se puede ver en ejemplos triviales (funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$), no todos los funcionales que tienen sucesiones minimizantes acotadas son coercivos. Si queremos un ejemplo relacionado con (2.3), basta tomar el funcional Φ dado por (2.5) con $g(x,u) \equiv u$.

Una aplicación del corolario anterior al problema (2.3) da lugar al siguiente resultado.

TEOREMA 2.5. *Si existen constantes $a \in [0,1)$, $b \in \mathbf{R}$, tales que*

$$|g(x,u)| \leq a|u| + b,\ \forall\ (x,u) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}, \tag{2.8}$$

entonces el funcional Φ definido en (2.5) tiene mínimo global. Como consecuencia, (2.3) tiene al menos una solución $u \in H_0^1(0,\pi)$.

Demostración: Consiste en comprobar las condiciones del corolario anterior. Para ello, observemos que

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\,|u|^2 - \int_0^\pi G(x,u(x))\,dx.$$

De esta forma, la inclusión compacta de $H_0^1(0,\pi)$ en $C[0,\pi]$, así como el carácter de semicontinuidad inferior débil de la función $|.|$, implican que Φ es débilmente semicontinuo inferiormente.

Respecto de la coercividad, tenemos lo siguiente:
De (2.8) se deduce la existencia de $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ y $b' \in \mathbf{R}$, tales que

$$|G(x,u)| \leq \lambda |u|^2 + b', \ \forall \ (x,u) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}. \tag{2.9}$$

También, la desigualdad de *Wirtinger* (que se puede probar fácilmente usando series de *Fourier*), afirma

$$\int_0^\pi |u(x)|^2 \ dx \leq \int_0^\pi |u'(x)|^2 \ dx, \ \forall \ u \in H_0^1(0,\pi). \tag{2.10}$$

Usando (2.9) y (2.10), se obtiene

$$\Phi(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) |u|^2 - b'\pi, \ \forall \ u \in H_0^1(0,\pi), \tag{2.11}$$

que prueba que Φ es coercivo.

Notas.
1) La conclusión del Teorema anterior no es necesariamente verdadera si $a = 1$. Piénsese por ejemplo en el caso en que $g(x,u) = u + h(x)$, con h una función continua satisfaciendo la condición

$$\int_0^\pi h(x) \ sen \ x \ dx \neq 0.$$

No se verifica pues, el Teorema de la alternativa de *Fredhom.*
Por lo tanto, una cuestión puede ser la siguiente: si $a = 1$, ¿qué condiciones adicionales sobre g garantizan la existencia de solución de (2.3)?. Esto es objeto de investigación hoy en día.

2) 1, el coeficiente de $|u|$ en (2.8), no es sino el valor propio principal del problema de valores propios

$$\begin{aligned} -u''(x) = \lambda u(x), \ x \in [0,\pi], \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

con lo que se pone de manifiesto la clara influencia que, sobre el problema no lineal considerado (2.3), puede tener su parte lineal. De hecho, esto es una constante en el **Análisis no lineal**: en primer lugar se realiza un estudio profundo y exhaustivo de la parte lineal correspondiente (en este caso (2.12)), en orden a poder intuir qué tipo de resultados cabe esperar para el problema no lineal. Más concretamente, refiriéndonos al problema (2.3), la forma en que se comporta la no linealidad g, respecto de los valores propios del problema (2.12), es muy importante para tener condiciones suficientes que garanticen la existencia de soluciones de (2.3). Aunque se han realizado muchos estudios en este sentido, existen muchas situaciones donde no se sabe exactamente lo que ocurre, siendo por tanto un tema de investigación actual.

En el siguiente resultado, el papel de la coercividad es reemplazado por el de una cierta condición de compacidad, llamada condición de compacidad de *Palais-Smale*, que será muy importante tanto aquí como en los métodos min-max. Esta condición proporciona una herramienta tremendamente útil para probar resultados sobre la existencia de soluciones de (2.7): el Lema de deformación, que veremos a continuación. Previamente a ello, necesitamos algunas definiciones.

Sea $\Phi : H \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Notaremos

$$\begin{aligned} A_c = &\ \{ \ u \in H : \Phi(u) \leq c \ \}, \\ K_c = &\ \{ \ u \in H : \Phi(u) = c, \ \Phi'(u) = 0 \ \}. \end{aligned}$$

Si $K_c \neq \emptyset$, diremos que c es un **nivel crítico** del funcional Φ.

Dado $c \in \mathbb{R}$, Φ satisface la condición de *Palais-Smale* $(P-S)_c$, si cualquier sucesión $\{u_n\} \subset H$, cumpliendo las dos hipótesis:
i) $\{\Phi(u_n)\} \to c$,
ii) $\{\Phi'(u_n)\} \to 0$,
tiene alguna subsucesión convergente.
Como puede observarse, la condición anterior es de compacidad relativa de ciertos subconjuntos de H.

LEMA 2.6. *Sean $\Phi : H \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, tales que $K_c = \emptyset$ y Φ satisface $(P-S)_c$. Entonces*

$$\forall \ \overline{\epsilon} > 0, \ \exists \ \epsilon \in (0, \overline{\epsilon}), \ \eta \in C([0,1] \times H, H),$$

tales que
1) $\eta(0,u) = u, \ \forall \ u \in H$.
2) $\eta(1,u) = u, \ \forall \ u \in H : \ \Phi(u) \notin [c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}]$.
3) $\eta(1, A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}$.

Notas. En realidad, para cada $t \in [0,1]$ fijo, la aplicación $\eta(t,.)$ es un homeomorfismo de H en H, de tal manera que podemos ver esto como una familia de aplicaciones, $\eta(t,.)$, que, partiendo de la identidad, deforman el espacio H en sí mismo. La propiedad 2) nos dice que permanecen invariantes por la deformación los puntos con nivel "lejano"a c. La propiedad 3) expresa el hecho de que $\eta(1,.)$ deforma $A_{c+\epsilon}$ en un conjunto contenido en $A_{c-\epsilon}$ (de menor nivel). Esta propiedad será clave cuando queramos probar la existencia de niveles críticos de funcionales, tanto para el caso del mínimo global como para los obtenidos por procedimientos min-max.

Comentario sobre la demostración del Lema 2.6: Una manera usual de obtener la deformación $\eta(t,.)$, consiste en tomarla como la solución del p.v.i.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(t,u)}{\partial t} &= -\nabla\Phi(\eta(t,u)), \\ \eta(0,u) &= u, \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde $\nabla\ \Phi$ indica el gradiente de Φ. Sin embargo, para poder tener garantía de la existencia, unicidad y prolongabilidad de las soluciones de (2.13), necesitaríamos más regularidad que la impuesta ($\Phi \in C^1(H)$), sobre el funcional Φ, así como alguna limitación de su crecimiento. Esta dificultad puede salvarse usando la noción de **vector pseudogradiente:** Un elemento $v \in H$ se dice que es un vector pseudogradiente de Φ en $u \in H$, si verifica las dos condiciones siguientes:
i) $|v| \leq 2|\Phi'(u)|$.
ii) $< v, \Phi'(u) > \geq\ |\Phi'(u)|^2$.

El concepto anterior permite construir en un subconjunto apropiado de H, (aquél en el que se puede tener alguna libertad para elegir el pseudogradiente, a saber, el subconjunto formado por los elementos de H donde el gradiente de Φ no es nulo), un campo de vectores pseudogradientes, que además es localmente lipschitziano (a pesar de que Φ sea sólo de clase C^1). Esto permite la formulación de un p.v.i. similar a (2.13), de donde se obtiene la deformación. Los detalles son muy técnicos, así que a no ser que se tengan alumnos realmente interesados en conocer los pormenores del Lema de deformación (porque por ejemplo, se vayan a dedicar a la investigación en este campo en el futuro), no conviene insistir demasiado en ellos.

Una primera consecuencia de Lema anterior es el siguiente Teorema, sobre la existencia de mínimo global de un funcional dado.

TEOREMA 2.7. *Sea $\Phi : H \to \mathbb{R}$, acotado inferiormente, tal que Φ satisface $(P-S)_m$, $m = inf_H\ \Phi$. Entonces m es mínimo global de Φ.*

Demostración: Si K_m fuese vacío, una aplicación del Lema (2.6), con $\bar{\epsilon} \in \mathbb{R}^+$ cualquiera, proporciona inmediatamente una contradicción, usando la propiedad 3) de la deformación.

El Teorema 2.7 puede aplicarse al estudio de (2.3), obteniéndose un resultado idéntico al proporcionado por el Teorema 2.5. No obstante, conviene hacerles a los alumnos la demostración de este último, basándose en el Teorema anterior, para que vayan familiarizándose con la comprobación de la condición de *Palais-Smale.*

Demostración del Teorema 2.5 a partir del Teorema 2.7: sólo es necesario verificar la condición $(P-S)_m$. Para ello, sea $\{u_n\}$ cualquier sucesión de elementos de $H_0^1(0,\pi)$, tal que:
i) $\{\Phi(u_n)\} \to m$,
ii) $\{\Phi'(u_n)\} \to 0$.
Entonces, de i) y (2.11) se deduce la acotación de $\{u_n\}$. Por tanto, debe existir una subsucesión, a la que notamos también por $\{u_n\}$ y $u \in H_0^1(0,\pi)$, satisfaciendo $\{u_n\} \rightharpoonup u$. Además,

$$\Phi'(u_n) = J(u_n) - N(u_n),$$

donde

$$J : H_0^1(0,\pi) \to (H_0^1(0,\pi))^*, \ J(u)(v) =< u, v >,$$

$$N : H_0^1(0,\pi) \to (H_0^1(0,\pi))^*, \ N(u)(v) = \int_0^\pi g(x,u(x))v(x)\ dx,$$

$$\forall\ u, v \in H_0^1(0,\pi).$$

Usando de nuevo el hecho de que la inclusión de $H_0^1(0,\pi)$ en $C[0,\pi]$, es compacta, se obtiene $\{N(u_n)\} \to N(u)$; luego $\{J(u_n)\}$ es convergente, de donde se deduce inmediatamente la convergencia de $\{u_n\}$.

Los Teoremas 2.3 y 2.7 proporcionan condiciones suficientes para que el funcional Φ tenga mínimo global. No obstante, en numerosos problemas no son útiles, debido a que el funcional Φ no es acotado ni inferior ni superiormente; un ejemplo elemental lo constituye el problema de contorno

$$\begin{aligned} -u''(x) = u^3(x),\ x \in [0,\pi], \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

cuyo funcional asociado es $\Phi : H_0^1(0,\pi) \to \mathrm{R}$, definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'(x)|^2\ dx - \frac{1}{4}\int_0^\pi u^4(x)\ dx.$$

No obstante, estamos interesados en el estudio de este tipo de problemas, lo que nos conduce a la cuestión de cómo podemos probar existencia de soluciones

de (2.7) cuando Φ no es acotado inferiormente. Aquí entran en escena los métodos min-max.
Para motivarlos, volvamos al Teorema (2.7). Una demostración alternativa puede ser la siguiente: Sea $\mathbb{A}$ el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos unitarios de H. Entonces

$$m = inf_{\ F \in \mathbb{A}}\ sup_{\ u \in F}\ \Phi(u). \tag{2.15}$$

Si m es valor crítico de Φ, es decir, $K_m \neq \emptyset$, se tiene la conclusión del Teorema. Si $K_m = \emptyset$, se puede razonar del modo siguiente para tener una contradicción: Sea $\overline{\epsilon} \in \mathrm{R}^+$ cualquiera y $\epsilon \in \mathrm{R}^+$, el dado por el Lema 2.6. De (2.15) se deduce la existencia de $F \in \mathbb{A}$, tal que

$$sup_{\ u \in F}\ \Phi(u) \leq m + \epsilon.$$

Luego $F \subset A_{m+\epsilon}$. Por la propiedad 3) de dicho Lema, $\eta(1, F) \subset A_{m-\epsilon}$. Pero esto es una contradicción con (2.15), puesto que $\eta(1, F) \in \mathbb{A}$.

La demostración que acabamos de hacer contiene las ideas básicas de los métodos min-max:
1) Se trata, en primer lugar, de **demostrar la existencia de niveles críticos,** en lugar de puntos críticos (ésto último es una consecuencia de lo primero, evidentemente).
2) Los niveles críticos se construyen de la forma (2.15), eligiendo el conjunto $\mathbb{A}$ adecuadamente. Dicho conjunto ha de ser invariante por la aplicación $\eta(1, .)$.

En general, la elección del conjunto $\mathbb{A}$ viene determinada por la "geometría" del funcional Φ. Esto vamos a tener la oportunidad de comprobarlo en los dos teoremas abstractos que siguen: el Teorema del paso de montaña de *Ambrosetti y Rabinowitz* (Teorema 2.8) y el Teorema del punto de silla de *Rabinowitz* (Teorema 2.10), ejemplos relativamente recientes pero ya clásicos, de los Teoremas min-max.

Teorema 2.8. *Sea $\Phi : H \to \mathrm{R}$, satisfaciendo:*
1) $\Phi(0) = 0$ y existen constantes positivas ρ y α tales que

$$\Phi(u) \geq \alpha, \ \forall \ u \in H : |u| = \rho.$$

2) $\exists \ e \in H : |e| > \rho$, cumpliendo

$$\Phi(e) \leq 0.$$

3) Φ *verifica* $(P-S)_d$, $\forall\ d \in \mathbb{R}$.
Entonces, si

$$\Gamma = \{\ g : [0,1] \to H,\ g \ \ continua\ ,\ g(0) = 0, g(1) = e\ \}$$

y

$$c = inf_{\ g\ \in\ \Gamma}\ sup_{\ w\ \in\ g[0,1]}\ \Phi(w),$$

se tiene que c *es un valor crítico de* Φ*, mayor o igual que* α*.*

Demostración: Sea

$$\mathbb{A} = \{g[0,1] : g \in \Gamma\}.$$

Entonces

$$c = inf_{\ F\ \in\ \mathbb{A}}\ sup_{\ u\ \in\ F}\ \Phi(u). \tag{2.16}$$

Claramente $\Gamma \neq \emptyset$ (tómese $g(t) = te$), lo que implica $\mathbb{A} \neq \emptyset$. Como los elementos de $\mathbb{A}$ son subconjuntos compactos de H, para cada $F \in \mathbb{A}$, existe $sup_{\ u\ \in\ F}\ \Phi(u)$. Además, para cada $F \in \mathbb{A}$, existe al menos un elemento $u \in F : |u| = \rho$. Esto prueba que $c \geq \alpha$.
Finalmente, si $K_c = \emptyset$, tomemos $\bar{\epsilon} = \dfrac{\alpha}{2}$, en el Lema de deformación 2.6, de donde se obtienen los correspondientes ϵ y η. Por (2.16), debe existir $F \in \mathbb{A}$, tal que

$$sup_{\ u\ \in\ F}\ \Phi(u) \leq c + \epsilon.$$

Ahora bien, $\eta(1, F) \in \mathbb{A}$ y

$$sup_{\ u\ \in\ \eta(1,F)}\ \Phi(u) \leq c - \epsilon,$$

lo que contradice (2.16).

Notas.
a) El nombre de Teorema del paso de montaña se justifica en base a la siguiente interpretación geométrica: supongamos que la Tierra viene modelada por $\mathbb{R}^2$ y que $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \to \Phi(u)$, expresa, en cada punto $u \in \mathbb{R}^2$, la altura sobre el nivel del mar. Entonces las hipótesis 1) y 2) se cumplen si el origen se encuentra en un valle rodeado de montañas, tal que lejos del valle y las montañas, existe otro punto e con altitud no positiva.
La interpretación del conjunto $\mathbb{A}$ y de c es asímismo clara: $\mathbb{A}$ representa el conjunto de todos los caminos que van desde 0 hasta e. Por tanto, si existiese uno de estos caminos con altitud mínima, tal altitud sería el valor de c.

b) Como veremos en las aplicaciones, en general, la hipótesis 1) se corresponde con el hecho de que el origen es un mínimo local estricto del funcional Φ. Esto se conseguirá, para aquellos funcionales Φ que provienen de problemas de contorno como (2.3), imponiendo restricciones adecuadas a la función $g(x,u)$, cerca de $u=0$. En esta situaciones, usualmente se tiene la solución trivial (como en (2.14)) y se trata de probar la existencia de otra no trivial.
Por su parte, la hipótesis 2) suele comprobarse estudiando el comportamiento del funcional a través de rayos que emanan del origen; es decir, dado $u \in H \setminus \{0\}$, se estudia $\Phi(\lambda u), \lambda \geq 0$.
En definitiva, hipótesis apropiadas sobre la función g, cerca de $u=0$ y "en infinito", son las que determinan la aplicación del Teorema previo a problemas como (2.3).

c) En el Teorema se afirma no sólo que c es un nivel crítico de Φ sino que además $c \geq \alpha$. Esto es importante cuando se desea probar resultados de multiplicidad de soluciones.

Apliquemos el Teorema anterior al estudio de (2.3). Vamos a ver que si g es de tipo sublineal cerca del origen y de tipo superlineal en el ∞, entonces (2.3) tiene al menos una solución no trivial.

Teorema 2.9. *Consideremos* (2.3) *y* G *dada en* (2.4). *Supongamos las hipótesis:*
1) $g(x,u) = o(|u|)$, *cuando* $u \to 0$, *uniformemente en* $[0,\pi]$; *es decir*

$$\lim_{u \to 0} \frac{g(x,u)}{u} = 0, \tag{2.17}$$

uniformemente en $x \in [0,\pi]$.
2) $\exists \mu > 2, r > 0$, *tales que*

$$0 < \mu G(x,\xi) \leq \xi g(x,\xi), \ \forall (x,\xi) \in [0,\pi] \times \mathrm{R} : |\xi| \geq r. \tag{2.18}$$

Entonces (2.3) *tiene al menos una solución no trivial.*

Demostración: Como $g(x,0) = 0, \ \forall \ x \in [0,\pi]$, la función idénticamente cero es solución de (2.3). Se trata de ver que existe al menos una solución no trivial, lo que se conseguirá aplicando el Teorema anterior; éste proporcionará un nivel crítico positivo, de donde se tiene la existencia de solución no trivial.
En primer lugar, de (2.18) se obtiene la existencia de constantes positivas a y b tales que

$$G(x,\xi) \geq a|\xi|^{\mu} - b, \ \forall \ (x,\xi) \in [0,\pi] \times \mathrm{R}. \tag{2.19}$$

También, por (2.17), se tiene que $\forall\ \epsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists\ \delta \in \mathbb{R}^+ :\ |u| \leq \delta$, implica

$$|G(x,u)| \leq \frac{\epsilon}{2}\ |u|^2,\ \forall\ x \in [0,\pi].$$

Tomemos $\epsilon < 1$ y el δ correspondiente. Como la inclusión de $H_0^1(0,\pi)$ en $C[0,\pi]$, es continua, $\exists\ \delta' \in \mathbb{R}^+$, tal que $|u| \leq \delta'$, en $H_0^1(0,\pi)$, implica $|u(x)| \leq \delta,\ \forall\ x \in [0,\pi]$.
Una vez hechas las consideraciones anteriores, basta tomar $\rho = \delta'$ y $\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right) d'^2$, en la hipótesis 1) del Teorema 2.8.
Sea ahora $u \in H_0^1(0,\pi) \setminus \{0\}$. De (2.19) se obtiene fácilmente

$$\lim_{t\to+\infty}\ \Phi(tu) = -\infty,$$

lo que implica la existencia de e satisfaciendo la hipótesis 2).

Comprobemos por último la propiedad $(P-S)_d$. Sea $\{u_n\}$ cualquier sucesión de elementos de $H_0^1(0,\pi)$, tal que:
i) $\{\Phi(u_n)\} \to d$,
ii) $\{\Phi'(u_n)\} \to 0$.
Es suficiente comprobar que la sucesión $\{u_n\}$ es acotada, pues si esto es así, se seguiría de forma análoga a lo realizado en la demostración que, a partir del Teorema 2.7, hicimos del Teorema 2.5.
La acotación de $\{u_n\}$, puede probarse como se indica:
Si $\phi(u_n) = \int_0^\pi G(x,u_n(x))\ dx$, entonces, usando (2.18), se tiene la existencia de alguna constante $a_1 > 0$, tal que

$$\phi(u_n) \leq a_1 + \frac{1}{\mu}\ \phi'(u_n)(u_n),\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Luego

$$\Phi(u_n) \geq \frac{1}{2}|u_n|^2 - a_1 - \frac{1}{\mu}\ \phi'(u_n)(u_n),\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\{\Phi(u_n)\}$ es acotada, existe alguna constante $b_1 > 0$, tal que

$$\frac{1}{2}|u_n|^2 - a_1 - \frac{1}{\mu}\ \phi'(u_n)(u_n) \leq b_1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.20}$$

También, de ii) obtenemos que para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned} &|\Phi'(u_n)(u_n)| = \\ &= |\ |u_n|^2 - \phi'(u_n)(u_n)| \leq \epsilon|u_n|. \end{aligned} \tag{2.21}$$

De (2.20) y (2.21), deducimos:

$$\frac{\mu}{2}\,|u_n|^2 - \mu a_1 - \mu b_1 \leq |u_n|^2 + \epsilon |u_n|,$$

para $n \geq n_0$. Como $\mu > 2$, la sucesión $\{u_n\}$ debe estar acotada.

El Teorema del paso de montaña visto con anterioridad es muy útil cuando, conocida la existencia de una solución de la ecuación (2.7) (por ejemplo, la solución trivial), que se corresponde con un mínimo local estricto del correspondiente funcional Φ, se quiere probar la existencia de otra. Sin embargo, hay muchos problemas donde no es posible conocer de antemano la existencia de una solución; en estos casos, es muy útil el siguiente Teorema conocido con el nombre de Teorema del punto de silla, por la geometría del funcional Φ.

Teorema 2.10 . *Supongamos que es posible descomponer H de la forma $H = V \oplus X$, suma topológico-directa, tal que V es un subespacio no trivial de H, de dimensión finita, verificándose las siguientes hipótesis:*
1)

$$\exists \; inf_{\;u \,\in\, X}\; \Phi(u) \equiv \;\beta \in \mathrm{R}. \tag{2.22}$$

2) Existe un entorno de 0 en V, D, abierto (relativo) y acotado, tal que

$$sup_{\;u \,\in\, \partial D}\; \Phi(u) \leq \alpha < \beta.$$

3) Φ satisface $(P-S)_d, \forall\, d \in \mathrm{R}$.
Entonces, si

$$\Gamma = \{\; h \in C(\overline{D}, H) : h(u) = u, \;\forall\; u \in \partial D\; \}$$

y

$$c = inf_{\;h \,\in\, \Gamma}\; sup_{\;u \,\in\, \overline{D}}\; \Phi(h(u)),$$

se tiene que c es un valor crítico de Φ, mayor o igual que β.

Demostración: Sea

$$\mathbb{A} = \{h(\overline{D}) : h \in \Gamma\}. \tag{2.23}$$

Entonces

$$c = inf_{\;F \,\in\, \mathbb{A}}\; sup_{\;u \,\in\, F}\; \Phi(u).$$

Claramente $\Gamma \neq \emptyset$ (la aplicación identidad, restringida a $\overline{D}$, pertenece a Γ), lo que implica $\mathbb{A} \neq \emptyset$. Como los elementos de $\mathbb{A}$ son subconjuntos compactos de H, para cada $F \in \mathbb{A}$, existe $sup_{\;u \,\in\, F}\; \Phi(u)$. Además, para cada $F \in \mathbb{A}$, existe

al menos un elemento $u \in F : u \in X$. En efecto, esto puede probarse con ayuda del **grado topológico de** *Brouwer*. Para ello, sea $h \in \Gamma$ y $P : H \to V$, la correspondiente proyección proveniente de la descomposición anterior. La aplicación $Ph : \overline{D} \to V$ es continua y no se anula sobre la frontera de $\overline{D}$, puesto que, $Ph(u) = u$, $\forall\ u \in \partial D$. Así, $d_B(Ph, D, 0) = 1$, por lo que existe al menos un elemento $u \in D$ con $Ph(u) = 0$; es decir, $h(u) \in X$.
Lo anterior muestra que $c \geq \beta$.
Finalmente, si $K_c = \emptyset$, tomemos $\overline{\epsilon} = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, en el Lema de deformación (2.6), de donde se obtienen los correspondientes ϵ y η. Por (2.23), debe existir $F \in \mathbb{A}$, tal que

$$sup_{\ u\ \in\ F}\ \Phi(u) \leq c + \epsilon.$$

Ahora bien, $\eta(1, F) \in \mathbb{A}$ y

$$sup_{\ u\ \in\ \eta(1,F)}\ \Phi(u) \leq c - \epsilon,$$

lo que contradice (2.23).

Notas.
1) En las aplicaciones del Teorema anterior, suele darse la situación siguiente: el funcional Φ, restringido a X, está acotado inferiormente, mientras que $\Phi(u) \to -\infty$, cuando $u \in V$ y $|u| \to +\infty$. En estos casos, se toma $D = B_V(0; r)$, con r suficientemente grande.
2) El tipo general de funcionales a los que se puede aplicar el Teorema anterior responden a la geometría siguiente: Φ es cóncavo en V, convexo en X y satisface una adecuada condición de coercividad en el infinito. De ahí el nombre de Teorema del punto de silla.
3) Si se repasan detalladamente las demostraciones de los Teoremas (2.8) y (2.10), se puede observar fácilmente la enorme analogía que hay entre ellas. Esta es la filosofía general de los métodos min-max. De hecho, pueden probarse teoremas abstractos que generalizan a ambos (en la bibliografía recomendada se encuentran algunos de ellos) y que son útiles en las aplicaciones. Conviene pues insistir al alumno en el método de demostración empleado, que es el mismo en la mayoría de los casos.
4) Es típico aplicar el Teorema anterior a **problema resonantes,** donde la elección de los espacios V y X viene automáticamente sugerida, como vamos a ver en el ejemplo siguiente.

Consideremos el problema de contorno

$$\begin{gathered} -u''(x) - u(x) = g(x, u(x)),\ x \in [0, \pi], \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{gathered} \tag{2.24}$$

donde $g : [0, \pi] \times R \to R$, es una función continua.
Observemos que el "problema lineal asociado"

$$-u''(x) - u(x) = 0, \ x \in [0, \pi],$$
$$u(0) = u(\pi) = 0,$$

tiene como conjunto de soluciones al espacio vectorial real, de dimensión uno, engendrado por la función *sen* x, así que (2.24) no tiene necesariamente solución, aunque g sea acotada (piénsese en el caso $g(x, u) = f(x)$ y el Teorema de la alternativa de *Fredhom*). Veamos que añadiendo una condición sobre la primitiva de g, G, se tiene la existencia de soluciones de (2.24).

Teorema 2.11. *Supongamos:*
i) g es acotada.
ii) Si G es cualquier primitiva de g, respecto de u, se cumple que

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} G(x, \xi) = +\infty. \qquad (2.25)$$

Entonces, (2.24) *tiene al menos una solución.*

Demostración: Veamos que se verifican todas las hipótesis del Teorema 2.10. Para ello, tomemos $H = H_0^1(0, \pi)$ y los subespacios V y X como

$$V = \{ \ asenx, \ a \in R \ \},$$

$$X = \left\{ \ u \in H_0^1(0, \pi) : \int_0^\pi u(x) senx \ dx = 0 \right\}.$$

De esta forma, cada $u \in H_0^1(0, \pi)$, puede escribirse (de manera única) como $u = u_1 + u_2$, donde $u_1 \in V$ y $u_2 \in X$, vienen dados por

$$u_1(x) = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x) senx \ dx \right) senx,$$

$$u_2 = u - u_1.$$

Comprobemos que $\Phi : H_0^1(0, \pi) \to R$, definido como

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (u'(x))^2 \ dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi (u(x))^2 \ dx - \int_0^\pi G(x, u(x)) \ dx,$$

satisface (2.22).
Usando la acotación de g, el Teorema del valor medio y realizando algunas operaciones elementales se prueba que para cualquier $u_2 \in X$,

$$\Phi(u_2) \geq \frac{1}{2} \int_0^\pi (u_2'(x))^2 \ dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi (u_2(x))^2 \ dx - a|u_2|, \qquad (2.26)$$

para alguna constante $a > 0$.
Por otra parte, teniendo en cuenta el desarrollo en serie de *Fourier* de las funciones de X, se tiene la existencia de una constante positiva $\lambda < 1$, tal que

$$\int_0^{\pi} (u_2(x))^2 \, dx \leq \lambda \int_0^{\pi} (u_2'(x))^2 \, dx, \ \forall \ u_2 \in X. \tag{2.27}$$

Así, de (2.26) y (2.27), se deduce

$$\Phi(u_2) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) |u_2|^2 - a|u_2|,$$
$$\forall \ u_2 \in X.$$

Luego Φ, restringido a X, tiene ínfimo, al que llamamos β.
De (2.25) se obtiene

$$\lim_{|a| \to +\infty} - \int_0^{\pi} G(x, asenx) \, dx = -\infty,$$

lo que prueba la hipótesis 2) del Teorema (2.10).
Comprobemos por último la condición $(P - S)_d$: sea $\{u_n\}$ una sucesión de elementos de $H_0^1(0, \pi)$, cumpliendo las dos condiciones:

$$i)\{\Phi(u_n)\} \to d,$$
$$ii)\{\Phi'(u_n)\} \to 0.$$

Como en los casos anteriores, es suficiente con verificar que $\{u_n\}$ es acotada, lo que se hará viendo que tanto $\{(u_n)_1\}$ como $\{(u_n)_2\}$ lo son.
De ii) se obtiene la existencia de $r_1 > 0$, tal que

$$| \int_0^{\pi} u_n'(x) v'(x) \, dx - \int_0^{\pi} u_n(x) v(x) \, dx| \leq r_1,$$

$$\forall \ v \in H_0^1(0, \pi) : |v| = 1,$$

que realizando operaciones elementales proporciona

$$| \int_0^{\pi} (u_n)_2'(x) v'(x) \, dx - \int_0^{\pi} (u_n)_2(x) v(x) \, dx| \leq r_1,$$

$$\forall \ v \in H_0^1(0, \pi) : |v| = 1,$$

Tomando $v = \dfrac{(u_n)_2}{|(u_n)_2|}$, para aquellos $n \in \mathrm{N}$, tales que $(u_n)_2 \neq 0$, de la desigualdad (2.27) se deduce

$$|(u_n)_2| \leq \frac{r_1}{1 - \lambda}, \ \forall \ n \in \mathrm{N}. \tag{2.28}$$

Por otra parte, por i), la sucesión $\{\Phi(u_n)\}$ es acotada y como

$$\Phi(u_n) = \frac{1}{2}\int_0^\pi (u_n')_2^2(x)\,dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\pi (u_n)_2^2(x)\,dx - \int_0^\pi G(x,u_n(x))\,dx,$$

(2.28) implica que la sucesión

$$\left\{\int_0^\pi G(x,u_n(x))\,dx\right\},$$

es acotada. Finalmente, por (2.25), la sucesión $\{(u_n)_1\}$ debe estar acotada.

Actividades complementarias recomendadas

- Uno de los objetivos de este capítulo debe ser que el alumno se familiarice con los operadores que usualmente aparecen en el tratamiento variacional de problemas de contorno, tanto para e.d.o. como para e.d.p. El estudio de las propiedades de regularidad de ellos, debe ser profundo y detalloso. Quizás, el más importante sea el operador de *Nemytskii,* asociado a una función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}$.
Dicho operador está definido de la forma siguiente: a cualquier función $u : \Omega \to \mathbb{R}$, se le hace corresponder la función $N_f u$, donde $(N_f u)(x) = f(x,u(x))$, $\forall x \in \Omega$.
Así, $N_f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, donde $\mathbb{F}$ es el conjunto de funciones reales definidas en Ω. Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{F}$, se trataría de encontrar condiciones suficientes sobre f que garanticen $N_f(A) \subset B$, así como propiedades de regularidad de N_f. Especialmente, como A o B, pueden tomarse el subconjunto de las funciones medibles, funciones continuas en $\overline{\Omega}$, espacios $L^p(\Omega)$, etc.
En particular, los alumnos suelen mostrar extrañeza y admiración al estudiar las condiciones para que

$$N_f(L^p(\Omega)) \subset L^q(\Omega),$$

con $p, q \geq 1$, pues basta que se cumpla la inclusión anterior, para que el operador $N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$, sea continuo.

- Aquellos que piensen dedicarse a la investigación en e.d.p., deberían extender a este tipo de ecuaciones, los resultados que aquí hemos presentado para e.d.o. En este sentido es conveniente la consulta de la bibliografía recomendada.
La relación general existente entre el estudio de las soluciones débiles de problemas de contorno para e.d.p y la ecuación (2.7) puede establecerse con el

siguiente ejemplo concreto: sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un dominio acotado con frontera regular y $p : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada. Consideremos el problema de contorno

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= p(x, u(x)), \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \quad\quad\quad\quad\quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Una solución débil de (2.29) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ (donde $H_0^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev usual) tal que

$$\int_\Omega < \nabla u(x), \nabla v(x) > dx = \int_\Omega p(x, u(x))v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

($< .,. >$ indica el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$ y ∇u el gradiente de la función u).

Como hemos mencionado con anterioridad, el planteamiento del problema de contorno (2.29) en "forma débil" es necesario cuando p no es lo suficientemente regular como para poder estudiar soluciones clásicas del mismo, pero incluso en muchos casos en que p es lo suficientemente regular como para poder estudiar (2.29) desde el punto de vista clásico, el planteamiento débil del problema puede facilitar enormemente su estudio.

Si se satisfacen las hipótesis:
i) $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
ii) $\exists\, a_1, a_2 \geq 0$ / $|p(x, u)| \leq a_1 + a_2|u|^s, \forall (x, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, 0 \leq s < \dfrac{n+2}{n-2}$, para $n > 2$
(cuando $n = 1$, la hipótesis ii) no es necesaria y si $n = 2$, esta hipótesis puede sustituirse por la acotación $|p(x, u)| \leq a_1 e^{\varphi(u)} / \lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{\varphi(u)}{u^2} = 0$),
y $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, se define como

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega P(x, u(x))dx \tag{2.30}$$

(donde $P(x, u) = \displaystyle\int_0^u p(x, s)ds$), entonces $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de (2.29) si y solamente si

$$\Phi'(u) = 0$$

De hecho

$$\Phi'(u)(v) = \int_\Omega < \nabla u(x), \nabla v(x) > dx - \int_\Omega p(x, u(x))v(x)dx$$

$\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$.
A la ecuación anterior se le llama ecuación de *Euler* del funcional Φ y en

particular dicha ecuación se cumple para los puntos u de $H_0^1(\Omega)$ donde Φ tiene un extremo global (caso de que lo tenga).

Los teoremas que se han probado en el capítulo para el problema de contorno (2.3), tienen su correspondiente versión en e.d.p., prácticamente sin cambios. A título de ejemplo, el Teorema 2.5 quedaría así:

Teorema 2.12. *Si existen constantes* $a \in [0, \lambda_1)$, $b \in \mathbb{R}$, *tales que*

$$|p(x,u)| \leq a|u| + b, \ \forall\ (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

entonces el funcional Φ *definido en* (2.30) *tiene mínimo global. Como consecuencia,* (2.29) *tiene al menos una solución* $u \in H_0^1(\Omega)$.

Obviamente, λ_1 indica el valor propio principal del problema de valores propios

$$\begin{gathered} -\Delta u(x) = \lambda u(x), \ x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega. \end{gathered}$$

- Una herramienta básica usada en el capítulo, para demostrar, tanto teoremas que prueban la existencia de mínimo global del funcional Φ, como teoremas min-max, ha sido el Lema de deformación 2.6. Una alternativa a esto lo constituye el **principio variacional de** *Ekeland*, cuyo enunciado (no ciertamente el más general) es el siguiente:

Teorema 2.13. *Sea* (X,d) *un espacio métrico completo y* $\Phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *un funcional semicontinuo inferiormente. Entonces, si existe* $\inf_X \Phi \equiv m \in \mathbb{R}$, *se tiene que para cualquier* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, *existe al menos un elemento* $u_\epsilon \in X$, *tal que*

$$\begin{gathered} \Phi(u_\epsilon) \leq m + \epsilon, \\ \Phi(u_\epsilon) < \Phi(u) + \epsilon\, d(u, u_\epsilon), \ \forall\ u \in X, u \neq u_\epsilon. \end{gathered}$$

Para funcionales Φ que son además derivables (según *Gateaux*), se tiene la siguiente consecuencia:

COROLARIO 2.14. *Si además de las hipótesis del Teorema 2.13, con X un espacio de Banach, Φ es derivable Gateaux en X, entonces para cualquier $\epsilon \in \mathrm{R}^+$, existe al menos un elemento $u_\epsilon \in X$, tal que*

$$\Phi(u_\epsilon) \leq m + \epsilon,$$

$$|\Phi'(u_\epsilon)| \leq \epsilon.$$

El anterior corolario permite tomar sucesiones minimizantes que verifican las hipótesis de la condición de *Palais-Smale*, $(P-S)_d$, pudiéndose por tanto dar otras demostraciones de las aquí expuestas, sobre los teoremas del método directo del Cálculo de Variaciones. También puede usarse el principio variacional de *Ekeland* para demostrar teoremas min-max como el Teorema 2.8. La utilidad de tal principio rebasa las fronteras de las ecuaciones diferenciales y se puede usar, por ejemplo, en el estudio de algunos problemas de **geometría de los espacios de** *Banach*.

- En lo que respecta a la multiplicidad de puntos críticos, dos de las teorías clásicas más potentes son la **teoría de** *Lusternik-Schnirelman* y la **teoría de** *Morse*. En la primera, la noción de **categoría** de un subconjunto de un espacio topológico, puede usarse para encontrar distintos niveles críticos de tipo min-max. En cuanto a la segunda, los puntos críticos se distinguen atendiendo a su índice de *Morse*.
Realmente, profundizar en ambas es una apasionante y agradable tarea, para aquellos alumnos que se quieran especializar en este campo de la investigación. Consúltese para ello la bibliografía recomendada.

- Otros temas complementarios de gran interés en el Cálculo de Variaciones y la teoría de puntos críticos, lo constituyen el **Análisis convexo** y el **método de los multiplicadores de** *Lagrange* **en dimensión infinita.**
Particularmente, el estudio de problemas de minimización de funcionales convexos, así como el papel desempeñado por los funcionales conjugados, proporciona numerosos ejemplos elementales (**líneas geodésicas sobre un cilindro, el problema de la braquistocrona, problemas de Economía, el cable colgante**, etc.), donde el alumno puede ver claramente la utilidad de los métodos variacionales. En cuanto a lo segundo, es evidentemente más especializado y muestra su utilidad cuando se está interesado en soluciones del problema de contorno planteado, que verifican algunas restricciones adicionales (por ejemplo, soluciones de sistemas Hamiltonianos con energía determinada de antemano).

Bibliografía recomendada

[3], [5], [7], [13], [15], [17], [18], [19], [22], [28], [43], [46], [50], [54], [62], [67], [68], [71].

3. PROBLEMAS SEMILINEALES EN RESONANCIA.

Los capítulos anteriores se han dedicado a exponer dos de las técnicas más generales y útiles de **Análisis no lineal: la teoría del grado topológico y el método variacional**. Ellas proporcionan unos conocimientos básicos, aunque amplios, para abordar numerosos problemas que se plantean en el estudio de las **ecuaciones diferenciales e integrales no lineales**. No obstante, conviene introducir algunas técnicas y problemas más específicos, que permitan llegar hasta las puertas de algunos problemas de investigación actuales. Este es el objetivo de este capítulo, donde se estudian los llamados **problemas semilineales (fundamentalmente de tipo elíptico) en resonancia.**

La formulación abstracta general responde a una ecuación de operadores de la forma

$$Lx = Nx \tag{3.1}$$

donde L y N están definidos de un subconjunto de un espacio de *Banach* real X en un espacio de *Banach* real Z. Usualmente L corresponde a la parte lineal de la ecuación (diferencial o integral) original dada, por lo que L es lineal, mientras que N corresponde a la parte no lineal. En los problemas resonantes, el núcleo del operador L, $ker\ L$, no es trivial, así que (3.1) no puede transformarse de manera directa en un problema de puntos fijos. Esta es la característica principal de los llamados problemas en resonancia y la causa principal de la dificultad de su estudio, además, claro está de la naturaleza de los elementos de $ker\ L$ y el carácter del término no lineal N.

El estudio de los anteriores tipos de problemas fué iniciado por *Poincaré, Liapunov* y *Schmidt* a principios de este siglo, siguiendo la línea del llamado **método alternativa.** Básicamente, éste consiste en transformar el problema (3.1) en un problema alternativo que debe ser más fácil de estudiar. Para ello, bajo determinadas hipótesis sobre la parte lineal L, relacionadas con $ker\ L$ y $coker\ L = Z/Im\ L$, ($Im\ L$ es la imagen de L), se transforma el problema (3.1) en un problema equivalente

$$x - Px = K_{P,Q}Nx, \quad QNx = 0, \tag{3.2}$$

donde P y Q son proyecciones (operadores lineales idempotentes) continuas en X y Z, respectivamente, tales que $ker\ L = Im\ P$, $ker\ Q = Im\ L$ y $K_{P,Q}$ es la inversa generalizada de L.

Las ecuaciones de (3.2) se conocen con los nombres respectivos de **ecuación auxiliar y de bifurcación.**

Llamando $y = Px$, $x - Px = z$, (3.2) es

$$z = K_{P,Q}N(y+z), \quad QN(y+z) = 0. \tag{3.3}$$

Una posibilidad para resolver (3.3) es usar la reducción de *Liapunov-Schmidt*. Bajo determinadas condiciones sobre la no linealidad N, (por ejemplo, el carácter lipschitziano, con constante de *Lipschitz* pequeña), para cada $y \in P(X)$, fijo, la primera ecuación de (3.3) tiene solución única $z(y)$. Así pues, el sistema (3.3) es equivalente a la ecuación

$$QN(y + z(y)) = 0. \tag{3.4}$$

Esto constituye un problema alternativo a (3.1). ¿Qué ventajas tiene?. Observando (3.4), vemos que se trata de encontrar las soluciones de una ecuación, cuya incógnita y pertenece a $ker\ L = Im\ P$, tal que el operador que define la ecuación, QN, tiene imagen contenida en $Im\ Q$. Si, como suele suceder en la práctica, $Im\ P$ e $Im\ Q$ son subespacios de dimensión finita, se consigue transformar un problema de dimensión infinita ((3.1)), en uno de dimensión finita; como, en general, los métodos para estudiar este último tipo de problemas están más desarrollados que aquellos de dimensión infinita (por ejemplo, si $dim\ Im\ P = dim\ Im\ Q$, podemos usar la teoría del grado topológico), la ventaja que se obtiene al considerar el problema alternativo (3.4) es notoria.

Otra posibilidad, menos utilizada que la anterior, pero también útil en algunos tipos de problemas, consiste en resolver primero la segunda ecuación en (3.3) y llegar a un problema alternativo del tipo

$$z = K_{P,Q}N(y(z) + z),$$

que en lugar de (3.4), es un problema de puntos fijos.

En el caso de que exista una aplicación lineal biyectiva $\Gamma : coker L \to ker\ L$, hay un tercer camino para estudiar (3.1), que consiste en su transformación en un problema de puntos fijos

$$x = Px + (\Gamma\pi + K_{P,Q})Nx, \tag{3.5}$$

donde $\pi : Z \to coker\ L$, es la sobreyección canónica. Esta forma de abordar (3.1) se diferencia de las dos anteriores fundamentalmente en el hecho de que (3.1) no se transforma en un sistema como (3.2), sino directamente en un problema de puntos fijos. Usando (3.5) y la **teoría del grado topológico de** ***Leray-Schauder***, el matemático belga *J. Mawhin* ha desarrollado una teoría de existencia de soluciones para ecuaciones del tipo (3.1), llamada **teoría del**

grado de coincidencia, para el caso en que L es una **aplicación lineal de** *Fredholm* **de índice cero** y N satisface ciertas condiciones de compacidad. Tal teoría generaliza las clásicas del **grado de** *Brouwer* y de *Leray-Schauder* y muestra claramente su ventaja cuando $ker\ L$ no es trivial.

En este capítulo exponemos los principales hechos de la teoría del grado de coincidencia y la aplicamos al estudio de diversos problemas en resonancia; entre ellos destacamos el **problema de** *Dirichlet* para e.d.o. y el problema de la **existencia de soluciones periódicas** de e.d.o. no lineales periódicas. Claramente, con algunas complicaciones de tipo técnico, pueden estudiarse problemas semejantes planteados para e.d.p. Sin embargo, mi recomendación es que se detallen las demostraciones en e.d.o., para que el alumno comprenda las principales dificultades de aplicación del método; en otro caso, si se abordan desde el comienzo las aplicaciones a e.d.p., las complicaciones de tipo técnico que surgen al plantear los problemas para este tipo de ecuaciones, pueden oscurecer las principales ideas, ventajas e inconvenientes de la aplicación del grado de coincidencia.

En todo el capítulo, $X, Y, Z, ...$ denotarán espacios de *Banach* reales.
Si $domL$ es un subespacio vectorial de X y $L : dom\ L \to Z$, una aplicación lineal, diremos que L es una **aplicación lineal de** *Fredholm* **de índice cero** si:
i) $dim\ ker\ L = codim\ Im\ L$ y ambas son finitas.
ii) ImL es cerrado en Z.

Las condiciones i) y ii) garantizan la existencia de proyecciones continuas $P : X \to X$, $Q : Z \to Z$, tales que $Im\ P = ker\ L$, $Im\ L = ker\ Q$. Así,

$$X = ker\ L \oplus kerP, \quad Z = Im\ L \oplus\ Im\ Q.$$

Es inmediato comprobar que la aplicación

$$L_P : dom\ L \cap ker\ P \to Im\ L,\ x \to Lx,$$

es biyectiva. Notemos por K_P a su inversa. Podemos definir entonces la aplicación $K_{P,Q} : Z \to dom\ L \cap ker\ P$, mediante $K_{P,Q} = K_P(I - Q)$. A $K_{P,Q}$ la llamaremos **inversa generalizada de** L (pues si L tiene inversa, ésta coincide con $K_{P,Q}$).

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de X, tal que $dom\ L \cap \Omega \neq \emptyset$ y $N : \overline{\Omega} \to Z$, un aplicación cualquiera. Para poder definir el grado de coincidencia, es fundamental el siguiente resultado, que transforma (3.1) en un problema de puntos fijos.

TEOREMA 3.1 . *Sea* $x \in dom\ L \cap \overline{\Omega}$. *Entonces* x *es solución de* (3.1) *si y solamente si*

$$x = Px + JQNx + K_{P,Q}Nx, \tag{3.6}$$

donde J *es cualquier isomorfismo lineal de* ImQ *en* $ker\ L$.

Demostración: Supongamos que $x \in dom\ L \cap \Omega$, es solución de (3.1). Entonces $QLx = QNx$ y como $Im\ L = ker\ Q$, se tiene

$$QNx = 0,$$

lo que implica

$$JQNx = 0. \tag{3.7}$$

Por otra parte, $(I - Q)Lx = (I - Q)Nx$; luego $Lx = (I - Q)Nx$. Así pues, $K_PLx = K_P(I - Q)Nx$, y como $K_PL = I - P$, se deduce

$$x = Px + K_{P,Q}Nx,$$

lo que, juntamente con (3.7), implica (3.6).
Recíprocamente, si $x \in dom\ L \cap \overline{\Omega}$, es solución de (3.6), entonces $Lx = LPx + LJQNx + LK_{P,Q}Nx$. Como $Im\ P = ker\ L$, $Im\ J = ker\ L$ y $LK_P = I$, tendremos que

$$Lx = (I - Q)Nx. \tag{3.8}$$

Ahora bién, aplicando P a ambos miembros de (3.6) y teniendo en cuenta que $P^2 = P$, $Im\ J = Im\ P$, $PK_{P,Q} = 0$, tendremos que

$$Px = Px + JQNx,$$

que con ((3.8)), da lugar a (3.1).

La importancia del Teorema anterior se pone de manifiesto en la siguiente observación: el conjunto de puntos de coincidencia de L y N en $\overline{\Omega}$, es decir, el conjunto de puntos $x \in \overline{\Omega}$, que satisfacen (3.1), es igual al conjunto de puntos fijos en $\overline{\Omega}$, del operador $T : \overline{\Omega} \to X$, definido por

$$Tx = Px + JQNx + K_{P,Q}Nx.$$

Si T es compacta en $\overline{\Omega}$ y $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$, es posible definir $d_{LS}(I - T, \Omega, 0)$ (véase el Capítulo I), que puede aportar una gran información sobre la existencia de soluciones de (3.6) (y por tanto sobre (3.1)). Efectivamente, esto es así, cuando N satisface condiciones de compacidad adecuadas, como vemos a continuación.

DEFINICIÓN 3.2. *N es L-compacta en $\overline{\Omega}$, si las aplicaciones $QN : \overline{\Omega} \to Z$, $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \to X$, son compactas.*

No es difícil ver que la anterior definición no depende de la elección de las proyeccciones P y Q.

Notas.
1) Si X y Z son de la misma dimensión finita y $L \equiv 0$, entonces L es una aplicación lineal de *Fredholm* de índice cero. Tomando $P = I$, en X y $Q = I$, en Z, entonces N es 0-compacta en $\overline{\Omega}$ si y solamente si N es continua en $\overline{\Omega}$.
2) Si $X = Z$ y $L = I$, entonces L es una aplicación lineal de *Fredholm* de índice cero. Tomando $P = Q \equiv 0$, entonces N es I-compacta en $\overline{\Omega}$ si y solamente si N es compacta en $\overline{\Omega}$.

Es inmediata la demostración de la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.3. *Si N es L-compacta en $\overline{\Omega}$, T es compacta en $\overline{\Omega}$.*

Demostración: basta tener en cuenta que $P : \overline{\Omega} \to X$ es compacta y que la suma de aplicaciones compactas también lo es.

Si, además de las condiciones de la proposición anterior, se cumple que $0 \notin (I-T)(\partial\Omega)$, entonces se puede definir $d_{LS}(I-T, \Omega, 0)$. No es difícil probar que este grado no depende ni de P ni de Q. Además, si $J' : Im\ Q \to ker\ L$, es cualquier otro isomorfismo lineal y

$$T' = P + J'QN + K_{P,Q}N,$$

entonces

$$d_{LS}(I - T', \Omega, 0) = sign\ det\ (J'J^{-1})\ d_{LS}(I - T, \Omega, 0).$$

Por tanto, si fijamos orientaciones sobre $ker\ L$ e $Im\ Q$ y J se elige preservando dichas orientaciones, se puede definir lo que se llama el **grado de coincidencia de L y N, relativo a Ω y a 0**, de la forma

$$D_L[(L, N), \Omega, 0] = d_{LS}(I - T, \Omega, 0),$$

que se suele notar simplemente por $D_L[(L, N), \Omega]$.

Notas.

1) Teniendo en cuenta las notas posteriores a la definición 3.2, si X y Z son ambos de la misma dimensión finita y $L \equiv 0$, entonces

$$D_0[(0, N), \Omega] = d_B(N, \Omega, 0)$$

2) Si $X = Z$, $L = I$, entonces

$$D_I[(I, N), \Omega] = d_{LS}(I - N, \Omega, 0).$$

(véase el Capítulo I).

Usando las correspondientes propiedades del grado de *Leray-Schauder*, probadas en el Capítulo I, se pueden demostrar las propiedades básicas del grado recién definido, a partir de las cuales pueden obtenerse otras, como en el caso de los grados de *Brouwer* y *Leray-Schauder*, que son útiles para el estudio de (3.1). Para ello, si $L : dom\ L \subset X \to Z$, es una aplicación lineal de *Fredhom* de índice cero, notaremos por $C_L(\Omega)$ al conjunto de aplicaciones $F : dom\ L \cap \overline{\Omega} \to Z$, las cuales son de la forma $F = L - N$, con $N : \overline{\Omega} \to Z$, L-compacta en $\overline{\Omega}$, (Ω es un subconjunto abierto y acotado de X), tal que $0 \notin F(dom\ L \cap \partial\Omega)$.

TEOREMA 3.4. *La aplicación*

$$D_L : C_L(\Omega) \to \mathbb{Z},\ F = L - N \to D_L(F, \Omega) \equiv D_L[(L, N), \Omega],$$

satisface las propiedades siguientes:
D1) Propiedad de aditividad-excisión: Si $F \in C_L(\Omega)$ *y* Ω_1, Ω_2, *son dos subconjuntos abiertos y disjuntos de* Ω, *tales que*
$0 \notin F((dom\ L \cap \overline{\Omega}) \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, *entonces*

$$D_L(F, \Omega) = D_L(F, \Omega_1) + D_L(F, \Omega_2).$$

D2) Propiedad de invarianza por homotopía: Sea $H : (dom\ L \cap \overline{\Omega}) \times [0, 1] \to Z$, *de la forma* $H(x, \lambda) = Lx - N(x, \lambda)$, *con* L *una aplicación lineal de Fredholm de índice cero y* $N : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to Z$, *L-compacta en* $\overline{\Omega} \times [0, 1]$ *(es decir, las aplicaciones* QN *y* $K_{P,Q}N$ *son compactas), tal que* $0 \notin H((dom\ L \cap \partial\Omega) \times [0, 1])$. *Entonces,* $D_L(H(., \lambda), \Omega)$ *es independiente de* $\lambda \in [0, 1]$.
D3) Propiedad de existencia de soluciones: si $F \in C_L(\Omega)$ *y* $D_L(F, \Omega) \neq 0$, *entonces la ecuación* $Fx = 0$ *tiene al menos una solución en* $dom\ L \cap \Omega$.

Las propiedades anteriores permiten establecer diversos teoremas de existencia de soluciones para ecuaciones de la forma (3.1), que a su vez pueden aplicarse al estudio de problemas resonantes. Mostramos a continuación dos de ellos, que indican claramente cómo pueden obtenerse otros de similares características. En el que sigue, partiendo de que el grado de coincidencia para una ecuación de operadores de la forma

$$Lx = \Phi x, \tag{3.9}$$

es no nulo, y usando la propiedad de homotopía, se consigue probar la existencia de soluciones de ecuaciones como (3.1), "homotópicas"a (3.9).

TEOREMA 3.5. *Sea Ω un abierto acotado de X y $L : dom\ L \subset X \to Z$, una aplicación lineal de Fredholm de índice cero.*
Supongamos la existencia de aplicaciones $H = L - \Phi \in C_L(\Omega)$ y $F = L - N$ con $N : \overline{\Omega} \to Z$, L-compacta en $\overline{\Omega}$, tales que:
1) $\lambda Fx + (1-\lambda)Hx \neq 0,\ \forall\ (x,\lambda) \in (dom\ L \cap \partial\Omega) \times (0,1)$.
2) $D_L[(L,\Phi),\Omega] \neq 0$.
Entonces, la ecuación (3.1) tiene al menos una solución en $dom\ L \cap \overline{\Omega}$.

Demostración: Si existe algún $x \in dom\ L \cap \partial\Omega$, tal que $Lx = Nx$, se tiene la conclusión del Teorema. Si no es así, definamos la aplicación $M : \overline{\Omega} \times [0,1] \to Z,\ (x,\lambda) \to\ \lambda Nx + (1-\lambda)\Phi(x)$.
Como N y Φ son L-compactas en Ω, M es L-compacta en $\overline{\Omega} \times [0,1]$. Aplicando la propiedad D2) a la aplicación

$$H : (dom\ L \cap \overline{\Omega}) \times [0,1] \to Z,\ (x,\lambda) \to Lx - M(x,\lambda),$$

se deduce que

$$D_L[(L,N),\Omega] = D_L(H(.,1),\Omega) = D_L(H(.,0),\Omega) = D_L[(L,\Phi),\Omega] \neq 0.$$

Luego, por D3), se obtiene la conclusión del Teorema.

El siguiente resultado es de un interés especial, porque en él aparece el grado topológico de *Brouwer*, lo que le confiere una gran aplicabilidad.

TEOREMA 3.6. *Sea Ω un abierto acotado de X, $L : dom\ L \subset X \to Z$, una aplicación lineal de Fredholm de índice cero y $N : \overline{\Omega} \to Z$, L-compacta en $\overline{\Omega}$, tal que se cumplen las condiciones siguientes:*
1) $Lx \neq \lambda Nx,\ \forall\ (x,\lambda) \in (dom\ L \cap \partial\Omega) \times (0,1)$.
2) $QNx \neq 0,\ \forall x \in ker\ L \cap \partial\Omega$.
3) $d_B(QN|_{ker\ L}, \Omega \cap ker\ L, 0) \neq 0$.
Entonces, la ecuación (3.1) tiene al menos una solución en $domL \cap \overline{\Omega}$.

Demostración: Si existe algún $x \in dom\ L \cap \partial\Omega$, tal que $Lx = Nx$, se tiene la conclusión del Teorema. Si no es así, tómese $\Phi = QN$ en el Teorema anterior. Trivialmente Φ es L-compacta en $\overline{\Omega}$ y si $Lx = \Phi x$, entonces $QNx = 0$. Por tanto, $Lx = 0$, lo que implica $x \in ker\ L$. Luego por 2), $x \notin \partial\Omega$ y así, $L - \Phi \in C_L(\Omega)$.
La comprobación de la propiedad 1) del Teorema anterior, es directa. Por último, teniendo en cuenta la definición del grado de coincidencia y las propiedades del grado topológico de *Brouwer* y *Leray-Schauder,* si $H = L - \Phi$, entonces

$$|D_L(H,\Omega)| = |d_B(QN|_{ker\ L}, \Omega \cap ker\ L, 0)| \neq 0.$$

Así pues, se cumplen todas las hipótesis del Teorema anterior y por tanto la ecuación (3.1) tiene al menos una solución.

Notas. Los dos Teoremas anteriores son muy generales, pero es precisamente esta generalidad la que les confiere algunas limitaciones para aplicarlos a ejemplos concretos. Observemos, por ejemplo, la hipótesis 1) del Teorema (3.5). ¿Cómo debe ser Ω para que dicha hipótesis se satisfaga?. Una forma clásica de resolver esta cuestión es hallando **cotas a priori** para las soluciones de la familia de ecuaciones

$$\lambda Fx + (1-\lambda)Hx = 0,\ \lambda \in (0,1). \tag{3.10}$$

Esto consiste en demostrar la existencia de $r_1 > 0$, tal que si x es cualquier solución de (3.10), entonces $|x| < r_1$. En este caso puede tomarse $\Omega = B_X(0; r_1)$.

La manera en que se pueden calcular las cotas a priori es muy diversa. Por ejemplo, si estamos aplicando el Teorema a problemas de contorno para e.d.o., ello dependerá del orden de la ecuación, tipo de no linealidad, forma de las condiciones de contorno, etc. Ciertamente, no hay una regla general para llevar a cabo este propósito. En este capítulo se mostrará cómo hacerlo en el caso de algunos problemas de contorno relativamente sencillos, tales como el problema de **Dirichlet** y el problema periódico.
Si nos referimos a la ecuación abstracta (3.1), el cálculo de cotas a priori depende básicamente de dos factores: $ker\ L$ y de la clase de crecimiento de la no linealidad N (sublineal, lineal o superlineal).
Por su parte, hipótesis como la 2) del Teorema 3.5, se comprobarán combinando la propiedad de homotopía del grado con las propiedades ya vistas del grado de *Brouwer* y *Leray-Schauder.*

Veamos a continuación cómo se aplican los Teoremas abstractos anteriores a ejemplos concretos. He seleccionado un problema de contorno de tipo resonante muy significativo, puesto que en él aparecen las llamadas condiciones de *Landesman y Lazer*, que han originado una ingente investigación en torno al capítulo, a partir de principios de los años setenta.

Consideremos el problema de contorno

$$\begin{aligned} -x''(t) - n^2 x(t) = f(t, x(t)),\ t \in [0,\pi], \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde $n \in \mathrm{N}$ y $f : [0,\pi] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, es una aplicación continua.
(3.11) es un caso particular de problemas de contorno de la forma

$$\begin{aligned} -x''(t) - \lambda x(t) = f(t, x(t)),\ t \in [0,\pi], \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{aligned}$$

con λ un parámetro real.
El caso en que $\lambda \notin \{n^2,\ n \in \mathrm{N}\}$, ha sido estudiado en el Capítulo I, cuando la no linealidad f es acotada, demostrándose, mediante el uso del **Teorema del punto fijo de** *Schauder*, la existencia de soluciones. Esta es precisamente la llamada **situación no resonante**, puesto que el conjunto $\{\ n^2,\ n \in \mathrm{N}\}$, coincide con el de los valores propios del problema

$$-x''(t) - \lambda x(t) = 0,\ t \in [0,\pi], x(0) = x(\pi) = 0. \tag{3.12}$$

Cuando estamos en la **situación resonante**, es decir, el parámetro λ coincide con algún n^2, $n \in \mathrm{N}$, la acotación de f no es suficiente para tener existencia de soluciones (**Teorema de la alternativa de** *Fredholm*). Así pues, es necesaria alguna hipótesis adicional a la acotación para tener existencia de las mismas. Aquí veremos una de naturaleza asintótica, llamada condición de *Landesman-Lazer*, en honor a estos autores, que fueron los que primero las introdujeron en este tipo de problemas.

Cuando (3.11) se plantea de la manera abstracta (3.1), el caso no resonante se corresponde con aquél donde $ker\ L$ es trivial y por tanto existe L^{-1}, mientras que en el caso resonante, $ker\ L$ no es trivial.

Enunciemos y demostremos seguidamente un teorema sobre existencia de soluciones de (3.11), cuando $n = 1$, (resonancia en el primer valor propio, o valor propio principal del problema de valores propios (3.12)). Después de ello, no se debe tener ninguna dificultad, en extender el teorema al caso de n general.

TEOREMA 3.7. *Supongamos que $n = 1$, en (3.11) y que f satisface las dos condiciones siguientes:*

1) f es acotada.
2)

$$\int_0^{\pi} f(t,+\infty) sen\ t\ dt > 0 > \int_0^{\pi} f(t,-\infty) sen\ t\ dt, \tag{3.13}$$

donde

$$f(t, \pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty} f(t,x).$$

Entonces, (3.11) *tiene al menos una solución.*

Demostración: Consiste en ver que se satisfacen las condiciones del Teorema 3.6. Para ello, tómense los espacios de *Banach*

$$\begin{gathered} X = \{\ x \in C([0,\pi],\mathrm{R}),\ x(0) = x(\pi) = 0\ \},\\ |x|_0 = \ max\ _{t\in[0,\pi]}\ |x(t)|,\\ Z = \{\ z \in C([0,\pi],\mathrm{R})\},\\ |z|_0 = \ max\ _{t\in[0,\pi]}\ |z(t)|, \end{gathered}$$

y los operadores

$$\begin{gathered} L : D(L) \to Z,\ D(L) = \{\ x \in X : x \in C^2[0,\pi]\},\\ Lx = -x'' - x,\\ N : X \to Z,\ (Nx)(t) = f(t,x(t)). \end{gathered}$$

Se deducen fácilmente los hechos siguientes:

$$\begin{gathered} ker\ L = \{\ asen\ t,\ a \in \mathbf{R}\ \},\\ Im\ L = \left\{\ z \in Z : \int_0^{\pi} z(t) sen\ t\ dt = 0\ \right\}. \end{gathered}$$

Así que $dim\ ker\ L = codim\ Im\ L = 1$ y además, $Im\ L$ es cerrado en Z. L es, por tanto, una aplicación lineal de *Fredholm* de índice cero.
En este caso, es posible calcular las proyecciones P y Q de manera explícita. De hecho

$$P : X \to X,\ (Px)(t) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x(t) sen\ t\ dt\right) sen\ t,$$

$$Q : Z \to Z,\ (Qz)(t) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} z(t) sen\ t\ dt\right) sen\ t.$$

Además, la inversa generalizada de L, $K_{P,Q} : Z \to dom\ L \cap kerP$, viene dada por

$$
\begin{aligned}
(K_{P,Q}z)(t) &= \left(\int_0^t z(\tau)cos\tau\, d\tau\right) sen\ t- \\
&- \left(\int_0^t z(\tau)sen\tau\, d\tau\right) cos\ t - \\
&-\frac{2}{\pi}\left[\int_0^\pi \left(\int_0^\tau z(s)cos\ s\ ds\ sen^2\ \tau - \right.\right. \\
&\left.\left. - \int_0^\tau z(s)sen\ s\ ds\ cos\tau sen\tau\right)\, d\tau\right] sen\ t.
\end{aligned}
$$

Con ayuda de las expresiones anteriores y el Teorema de *Ascolí-Arzelá*, se prueba sin dificultad que N es L-compacta, en subconjuntos acotados de X. La comprobación de las hipótesis 1) y 2) del Teorema (3.6), se hace, como ya hemos indicado, mediante el cálculo de cotas a priori. Para ello, sean $x \in dom\ L$, $\lambda \in (0,1]$, tales que

$$Lx = \lambda Nx.$$

Del Teorema (3.1) se deduce que

$$x - Px - JQNx - \lambda K_{P,Q}Nx = 0,$$

que, juntamente con la acotación de N (f es acotada), implica la acotación de $|x - Px|$ (independiente de x y λ).
Además,

$$QNx = 0.$$

Ahora bién, si no fuese posible encontrar una cota, independiente de x y λ, para $|Px|$, usando que $X = ker\ P \oplus Im\ P$ y la forma concreta de P, llegaríamos a una contradicción con (3.13).
El razonamiento anterior prueba que 1) y 2), del Teorema (3.6), se cumplen cuando $\Omega = B_X(0;r)$, para $r > 0$, suficientemente grande.
Respecto de la hipótesis 3) de este Teorema, pensemos que

$$d_B(QN|_{ker\ L}, \Omega \cap ker\ L, 0) = d_B(F, (-r,r), 0),$$

donde $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, se define como

$$F(a) = \int_0^\pi f(t, asen\ t)\ dt.$$

Por último, notemos que F es una función continua tal que, para r suficientemente grande, cumple, (por (3.13)), $F(r)F(-r) < 0$. Por tanto, su grado de *Brouwer* no es cero.

Notas.
1) Si f es acotada y satisface apropiadas condiciones de monotonía respecto de x, la condición dada en (3.13) es no sólo suficiente, sino también necesaria, para la existencia de soluciones de (3.11).

2) De la demostración se deduce que se pueden imponer otros tipos de condiciones asintóticas, en lugar de (3.13), y seguir teniendo la conclusión del Teorema.

3) En el Teorema hay básicamente tres tipos de hipótesis:
3.1) Resonancia en el primer valor propio, es decir, $n = 1$.
3.2) Acotación del término no lineal f.
3.3) Condición de naturaleza asintótica (3.13).
Desde principios de los años setenta, en que apareció el trabajo de *Landesman* y *Lazer*, se ha realizado una enorme cantidad de investigación, tratando de debilitar alguna (o algunas) de las hipótesis precedentes, no sólo para problemas de contorno en e.d.o., sino también en e.d.p. y otros tipos de ecuaciones (por ejemplo, usando el Teorema 3.5, más general que el 3.6), pueden darse condiciones análogas a (3.13) pero con desigualdades no estrictas). Es realmente bonito ver cómo pueden debilitarse algunas de las hipótesis mencionadas, a costa de fortalecer otras, para seguir teniendo existencia de soluciones de (3.11). Esta clase de investigación entra dentro de un tema general actual que se conoce con el nombre de "problemas resonantes sin condiciones de *Landesman-Lazer*."

Seguidamente presentamos otro ejemplo significativo de aplicación de los Teoremas abstractos 3.5 y 3.6: el problema de la existencia de soluciones periódicas de e.d.o. periódicas no lineales. La ventaja respecto del problema anteriormente estudiado es que, cuando planteemos el problema periódico de la forma abstracta (3.1), el núcleo del operador L va a estar formado por las funciones constantes, lo que facilita la obtención de algunos resultados, respecto de (3.11); de hecho, consideraremos sistemas de e.d.o. de orden arbitrario.
Para conseguir nuestro objetivo, es conveniente la obtención de Teoremas abstractos adaptados al caso periódico. El que sigue es un ejemplo de ello. En él se permite al término no lineal N tener alguna clase de crecimiento superlineal, como se verá claramente en los ejemplos de aplicación.

TEOREMA 3.8. *Sean X y Z espacios de Banach reales, $L : dom\ L \subset X \to Z$, una aplicación lineal de Fredholm de índice cero con K_P continua y $N : X \to$*

Z, L-compacta en subconjuntos acotados de X. Supongamos las siguientes hipótesis:
1) Existe un funcional lineal $\gamma : Z \to \mathbf{R}$, con $Im\ L \subset ker\ \gamma$ y constantes $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, tales que

$$|Nx| \leq \gamma(Nx) + \alpha|x| + \beta, \ \forall\ x \in X. \tag{3.14}$$

2) Existen $\mu \geq 0$ y $r > 0$, tales que

$$QNx = 0 \ \Rightarrow \ |Px| < \mu|(I-P)x| + r. \tag{3.15}$$

3) $d_B(QN|_{ker\ L}, B_X(0;s) \cap ker\ L, 0) \neq 0$, $\forall\ s \geq r$.
Entonces existe $\alpha_0 > 0$, tal que si $\alpha \leq \alpha_0$, la ecuación (3.1) tiene al menos una solución.

Demostración: Veamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.6, para Ω adecuado. Para ello, si

$$Lx = \lambda Nx, \tag{3.16}$$

con $x \in dom\ L$, $\lambda \in (0,1]$, entonces

$$\begin{gathered} x - Px = K_{P,Q}(\lambda Nx), \\ QNx = 0. \end{gathered}$$

De la primera ecuación y de la hipótesis 1), obtenemos

$$|x - Px| \ \leq \ k\alpha|x| + k\beta,$$

siendo $k = |K_{P,Q}|$.
Esto y la hipótesis 2) proporcionan

$$|x| \ \leq \ k(1+\mu)\alpha|x| + k_1,$$

para alguna constante $k_1 > 0$.
Si

$$k(1+\mu)\alpha < 1,$$

se obtienen las cotas a priori para las soluciones de ((3.16)).
Por lo tanto, las hipótesis 1) y 2) del Teorema 3.6 se cumplirían si $\Omega = B_X(0;s)$, con s suficientemente grande. Por otra parte, es claro que la hipótesis 3) de este Teorema se obtiene de 3) del Teorema que estamos demostrando.

Cuando $X = Z$ y L la aplicación identidad, se tiene el siguiente corolario, conocido con el nombre de **Teorema del punto fijo de** *Granas*:

COROLARIO 3.9 . *Sea X un espacio de Banach real y $N : X \to X$, una aplicación completamente continua (es decir, continua y aplicando conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos). Si existen constantes positivas $\alpha < 1$ y β tales que*

$$|Nx| \leq \alpha|x| + \beta, \ \forall\, x \in X,$$

entonces N tiene al menos un punto fijo.

Acabamos el capítulo aplicando el Teorema 3.8 al problema de la existencia de soluciones periódicas de e.d.o. periódicas no lineales de la forma

$$x^{(m)}(t) + A_{m-1}x^{(m-1)}(t) + ... + A_1x'(t) = g(t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t)), \qquad (3.17)$$

donde $m \geq 1$, A_i, $1 \leq i \leq m-1$, son matrices reales constantes, de orden $n \times n$ y $g : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^m \to \mathbb{R}^n$, es continua. Es decir, estamos considerando un sistema de e.d.o. de n ecuaciones y de orden m.

Suponemos que la ecuación ((3.17)) es T-periódica ($T > 0$), lo que significa que g es T-periódica respecto de la variable t y estamos interesados en la existencia de soluciones T-periódicas.

Lo primero que hacemos es el planteo abstracto del problema. Para ello, notemos por Z al espacio normado siguiente:

$$Z = \{\ z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ z \text{ es continua y } T- \text{ periódica } \},$$

$$|z| = \int_0^T |z(t)|\, dt,\ \forall\, z \in Z.$$

Por su parte, X denotará al espacio de *Banach*

$$X = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, x \in C^{m-1}(\mathbb{R}), x \text{ es } T- \text{ periódica } \},$$
$$|x|_{m-1} = max\{\ |x^{(i)}|_0, 0 \leq i \leq m-1\ \},$$

donde $|.|_0$ indica la norma uniforme en $[0, T]$.

Si definimos los operadores:

$$L : dom\ L \to Z,\ dom\ L = \{x \in X : x \in C^m(\mathbb{R})\},$$
$$Lx = x^{(m)} + A_{m-1}x^{(m-1)} + ... + A_1x',$$
$$N : X \to Z,\ (Nx)(t) = g(t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t)),$$

entonces el problema de la existencia de soluciones T-periódicas de ((3.17)) es equivalente al de la existencia de soluciones de la ecuación de operadores (3.1) con L y N definidos anteriormente. El hecho de que Z no sea un espacio de *Banach* no es importante, puesto que lo realmente necesario es que X lo sea (véase la definición 3.2).

TEOREMA 3.10. *Supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:*
i) La ecuación det $(\lambda^m I + \lambda^{m-1}A_{m-1} + ... + \lambda A_1) = 0$, *no tiene raíces de la forma* $\frac{2k\pi i}{T}$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *k no nulo.*
ii) Existen constantes $a \in \mathbb{R}^n, a_i \in [0, +\infty)$, $1 \leq i \leq m, \beta \geq 0$, *tales que*

$$\begin{gathered} |g(t, x_1, ..., x_m)| \leq \, < a, g(t, x_1, ..., x_m) > + \sum_{i=1}^{m} a_i |x_i| + \beta, \\ \forall (t, x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^m. \end{gathered} \tag{3.18}$$

donde $< .,. >$ *es el producto escalar usual en* $\mathbb{R}^n$.
iii) Existe $r > 0$ *tal que para cualquier* $x \in$ *dom* L, $x = (x_1, ..., x_n)$, *con* $min_{\,t\in\mathbb{R}}\, |x_j(t)| \geq r$, *para algún* $j, 1 \leq j \leq n$, *se tiene*

$$\int_0^T g(t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t))\, dt \neq 0. \tag{3.19}$$

iv) $d_B(\Phi, B_X(0; s) \cap ker\ L, 0) \neq 0, \forall\, s \geq r$, *donde*

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \; c \to \frac{1}{T} \int_0^T g(t, c, 0, ..., 0)\, dt.$$

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$, *tal que si max* $\{ a_i, 1 \leq i \leq m \} \leq \alpha_0$, *la ecuación* ((3.17)) *tiene al menos una solución* T*-periódica.*

Demostración: Consiste en ver que se satisfacen todas las hipótesis del Teorema 3.8 (con la salvedad, ya mencionada de que Z puede ser un espacio normado no completo). Para ello, la hipótesis i) garantiza que

$$ker\ L = \{x \in X : x \;\text{ es constante }\}$$

$$Im\ L = \left\{ z \in Z : \int_0^T z(t)\, dt = 0 \right\}.$$

Así, L es una aplicación lineal de *Fredholm* de índice cero y las proyecciones P y Q pueden tomarse como

$$P : X \to X, \; Px = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt,$$

$$Q : Z \to Z, \; Qz = \frac{1}{T} \int_0^T z(t)\, dt.$$

El hecho de que K_P es continua, se sigue de la fórmula de variación de constantes para e.d.o., previa transformación de la ecuación ((3.17)) en un sistema de primer orden. Las mismas ideas valen para comprobar el carácter de L-compacidad de N en subconjuntos acotados de X.

Para verificar la hipótesis 1) del Teorema 3.8, basta tomar

$$\gamma : Z \to \mathbf{R},\ \gamma(z) = \int_0^T \ < a, z(t) > \ dt.$$

Entonces, ((3.14)) es consecuencia de (3.18). Por último, (3.19) y la hipótesis iv), implican ((3.15)) y la hipótesis 3) del Teorema 3.8.

Notas.

1) Observemos que para el estudio de ((3.17)) se imponen condiciones de naturaleza análoga a las del estudio de (3.11): una condición que limita el crecimiento del término no lineal y una condición de naturaleza asintótica. Sin embargo, en el caso de ((3.17)) se admite un crecimiento de tipo más amplio, pues, por ejemplo, se permiten no linealidades de tipo exponencial (corresponden a los casos en que las componentes del vector a son ± 1). Esto es debido básicamente a que, en dicho caso, el núcleo del operador L es "menos complicado"que en el del problema (3.11).

2) La condición de crecimiento (3.18) es muy amplia, puesto que incluye términos no lineales acotados, asintóticos a cero (sublineales), e incluso algunos superlineales, como los de tipo exponencial. Por su parte, la condición asintótica (3.19) es bastante adecuada para sistemas de ecuaciones, al poner de manifiesto la influencia de las componentes de la función x e incluye las famosas condiciones del tipo *Landesman-Lazer*. Por ejemplo, para $n = 1$, puede demostrarse fácilmente sl siguiente corolario:

COROLARIO 3.11. *Consideremos la ecuación diferencial ordinaria escalar*

$$x^{(m)} + a_{m-1}x^{(m-1)} + ... + a_1 x' = g(t, x, ..., x^{(m-1)}) + f(t), \tag{3.20}$$

donde $m \geq 1$, $a_i, 1 \leq i \leq m-1$, *son constantes reales y las funciones* $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *son continuas y* T*-periódicas respecto de la variable* t.

Supongamos:

i) La ecuación

$$\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + a_1\lambda = 0,$$

no tiene raíces de la forma $\frac{2k\pi i}{T}$, *con* k *un entero no nulo.*
ii) Existen constantes $\alpha_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, $\beta \geq 0$, *tales que*

$$|g(t, x_1, ..., x_m)| \leq g(t, x_1, ..., x_m) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i |x_i| + \beta,$$
$$\forall \ (t, x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

iii) Si

$$\mu^+(t) = lim \ inf_{\ x_1 \to +\infty} \ g(t, x_1, ..., x_m),$$
$$\mu^-(t) = lim \ sup_{\ x_1 \to -\infty} \ g(t, x_1, ..., x_m),$$

uniformemente en $x_2, ..., x_m$, *se cumple que*

$$\int_0^T \mu^-(t) \ dt < \int_0^T f(t) \ dt < \int_0^T \mu^+(t) \ dt.$$

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$, *tal que si max* $\{\alpha_i, \ 1 \leq i \leq m \} \leq \alpha_0$, *la ecuación* (3.20) *tiene al menos una solución* T*-periódica.*

Ejercicios y actividades complementarias recomendadas

- Las técnicas teóricas expuestas en el capítulo se pueden aplicar a otros muchos problemas de contorno no lineales distintos de los aquí considerados. Se pueden proponer los siguientes:

1) Problemas de contorno para e.d.o. con condiciones frontera tipo *Neumann.*

2) Problemas de contorno más generales con condiciones frontera del tipo *Sturm-Liouville.*

3) Problemas de contorno de tipo *Dirichlet* o periódicos, pero con resonancia en valores propios de orden superior.

4) Problemas de contorno periódicos para ecuaciones diferenciales funcionales con retraso.

5) Problemas de contorno tipo *Dirichlet* o *Neumann* para ecuaciones en derivadas parciales no lineales de tipo elíptico.

- Muchos problemas en resonancia pueden abordarse también mediante el método variacional (en este caso, el término no lineal no puede depender de

las derivadas de la función incógnita). Propóngase la prueba del Teorema 3.7 mediante los métodos del capítulo anterior.
De hecho, la combinación del método alternativa con los métodos variacionales es muy útil en numerosas ocasiones.

- Han sido muchas las técnicas empleadas en el estudio de las ecuaciones auxiliar y de bifurcación del método alternativa. Ello depende básicamente del tipo de problema de contorno considerado y del carácter del término no lineal. Consultando la bibliografía recomendada el alumno tendrá la oportunidad de familiarizarse con las siguientes, que permiten una bonita excursión por diferentes métodos del Análisis no lineal:
a) Teoremas de punto fijo como los de *Brouwer* y *Schauder*.
b) Teoremas de punto fijo para aplicaciones contractivas.
c) Argumentos de grado topológico (Capítulo I).
d) Operadores monótonos y maximales monótonos en espacios de *Banach*.
e) Teoremas como el de la función inversa o implícita en dimensión infinita.

Bibliografía recomendada

[4], [7], [10], [12], [15], [23], [26], [27], [40], [44], [45], [51], [52], [56].

4. APÉNDICE.

La teoría de funciones generalizadas (o distribuciones), vino motivada por los trabajos de diversos investigadores, entre ellos *Dirac* y *Heaviside,* en Mecánica Cuántica y Electromagnetismo, que manejaron con profusión las llamadas hoy en día función δ de *Dirac* y función de *Heaviside.* Al estudiar diversas leyes de la Física, expresadas por ecuaciones en derivadas parciales, trabajaron con funciones que no eran derivables, pero que sí eran soluciones, en un cierto sentido, de las ecuaciones consideradas. Por ejemplo, se intuía (y de hecho se daba por cierto) que, de alguna forma, la "función" δ era la derivada de la función de *Heaviside* $\theta(x)$, que es igual a 1 para $x \geq 0$ y 0 para $x < 0$.

Tales investigaciones crearon la necesidad de rigorizar los desarrollos formales que en ellas aparecían. Surge así una doble posibilidad: o bien se expresan las leyes de la Física de una manera más general donde aparezcan identidades integrales en lugar de diferenciales, o bien se generaliza el concepto de derivada, ampliándolo para que se pueda aplicar a funciones que no son derivables en el sentido clásico. Como los científicos prefieren, en general, conservar la expresión diferencial en lugar de la integral, se impuso el segundo punto de vista, motivando así la generalización de la noción de derivada clásica.

La fundamentación matemática de la teoría de funciones generalizadas fue hecha, de manera independiente, por *Sobolev* y *Schwartz.* Ésto proporcionó no sólo rigor matemático para una serie de métodos que llevaban tiempo usándose en Física, sino también una herramienta útil y potente para la teoría de ecuaciones diferenciales y de transformada de *Fourier.* Posteriormente, ha habido un gran desarrollo de este tema, debido fundamentalmente a los problemas planteados en Física matemática y ecuaciones diferenciales, siendo muchos los matemáticos de prestigio que tienen importantes contribuciones en este campo.

En la actualidad, la teoría de funciones generalizadas ha llegado a ser una herramienta esencial para los matemáticos, físicos e ingenieros, aplicándose no sólo a ecuaciones diferenciales sino también a numerosas disciplinas, como teoría de representación de grupos localmente compactos, teoría de la probabilidad, homología en variedades, etc.

Este apéndice comienza con la exposición de algunos de los principales hechos de la teoría de funciones generalizadas, en orden a su aplicación a problemas de contorno planteados para ecuaciones en derivadas parciales.

La segunda parte la dedicamos a los espacios de *Sobolev.* Los espacios de funciones regulares clásicos, esto es, los espacios $C^m(\Omega)$, $C^m(\overline{\Omega})$, etc., donde Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$, no son adecuados para el estudio de muchos problemas de contorno. En este sentido, los **espacios de** *Sobolev*, introducidos por éste en los años treinta, proporcionan un marco adecuado para el tratamiento de tales problemas, por dos motivos fundamentales: en primer lugar, porque en su definición entra en juego la noción de **derivada débil**, concepto más restringido que el de **derivada distribucional**, definida con anterioridad, pero suficientemente amplio como para permitir el estudio de numerosos e interesantes problemas; en segundo lugar, las propiedades analítico-topológicas satisfechas por los espacios de **Sobolev**, permiten el uso de muchas técnicas de **Análisis Funcional,** que facilitan enormemente el estudio de los problemas planteados y arrojan luz sobre muchos aspectos que, aunque importantísimos, son un caso particular de resultados establecidos en un marco general.

La introducción de los espacios de *Sobolev* puede hacerse desde diferentes puntos de vista: usando la noción de derivada distribucional; como la completación, con normas adecuadas, de algunos espacios clásicos de funciones; mediante la tranformada de *Fourier*, etc. Yo he preferido el primer punto de vista.

Numerosas generalizaciones existen en la actualidad de los espacios de *Sobolev*, muy útiles para el estudio de diferentes problemas en e.d.o. y en e.d.p.: los espacios de *Orlicz-Sobolev*, los espacios de *Sobolev* con peso, etc. No obstante, un alumno que entienda los hechos fundamentales que aquí exponemos, estará en buena disposición para, en caso necesario, profundizar en el conocimiento y uso de los espacios de funciones mencionados.

En lo que sigue, $D = D(\mathbb{R}^n)$, denotará al **conjunto de las funciones test**: funciones complejas, definidas en $\mathbb{R}^n$, de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y con soporte compacto.

Si $K \subset \mathbb{R}^n$, es compacto, $D(K)$ denotará al subconjunto de funciones de D, cuyo soporte está incluido en K.
En $D(K)$ se puede considerar la sucesión de seminormas

$$p_m(\phi) = sup_{\, x \in K, \, |\alpha| \leq m} \;\; |D^\alpha \, \phi(x)|, \;\; m \in \mathbb{N},$$

donde usamos la notación de multiíndices.

$D(K)$, con la topología derivada de la anterior sucesión de seminormas, es un espacio localmente convexo metrizable.

Sea ahora $\{K_j\}$ una sucesión de compactos tal que

$$\begin{array}{c} K_j \subset K_{j+1}, \ \forall\, j \in \mathbf{N}, \\ \mathbf{R}^n = \cup_{j\in\mathbf{N}} K_j. \end{array} \tag{4.1}$$

Es claro que la aplicación inclusión $i_j : D(K_j) \to D(K_{j+1})$, es continua y que

$$D = \cup_{j\in\mathbf{N}} D(K_j),$$

con lo que se puede considerar en D la topología límite inductivo de los espacios $D(K_j)$. Esta topología no depende de la sucesión particular de compactos tomada satisfaciendo (4.1).

La convergencia en D, derivada de la anterior topología, se expresa de la forma siguiente: si $\{\phi_k\}$ es una sucesión de elementos de D y $\phi \in D$, se tiene $\phi_k \to \phi$ si y solamente si, existe algún compacto K tal que se cumplen las dos condiciones siguientes:
i) $sop\ \phi_k \subset K, \ \forall\, k \in \mathbf{N}$,
ii) Para cualquier multiíndice α, se tiene $D^\alpha\phi_k \to D^\alpha\phi$, uniformemente en K.

DEFINICIÓN 4.1. *Una* **función generalizada (o distribución)** *(en el sentido de Sobolev-Schwartz), es un funcional lineal y continuo de D en $\mathbf{C}$.*

Al espacio vectorial complejo de funciones generalizadas, lo notaremos por D'. Si $f \in D'$ y $\phi \in D$, escribiremos (f, ϕ) en lugar de $f(\phi)$.

En D' consideraremos la topología $\sigma(D', D)$, que es la topología localmente convexa generada por la familia de seminormas $\{p_\phi, \ \phi \in D\}$, donde

$$p_\phi : D' \to \mathbf{R}, \ p_\phi(f) = |(f, \phi)|, \ \forall\, f \in D'.$$

De esta topología deriva la siguiente convergencia: si $\{f_k\}$ es una sucesión de elementos de D' y $f \in D'$, entonces $f_k \to f$, si y solamente si, para cualquier $\phi \in D$ se tiene $(f_k, \phi) \to (f, \phi)$.

Ejemplos de funciones generalizadas.
1) El ejemplo más simple de función generalizada lo constituye la generada por una función localmente integrable, de la manera siguiente: si $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ es

una función localmente integrable, definimos la distribución (a la que notamos también por f)

$$(f,\phi) = \int f(x)\phi(x)\,dx,\ \forall\ \phi \in D. \tag{4.2}$$

Las funciones generalizadas que se definen de la manera anterior, a partir de funciones localmente integrables, se llamarán **regulares**. En otro caso, diremos que son **singulares**.
Cada función localmente integrable, define, de acuerdo con (4.2), una función generalizada. Se sigue del lema de *Du Bois Reymond* que cada función generalizada regular está definida a partir de una única función localmente integrable. Así pues, existe una correspondencia biyectiva entre las funciones generalizadas regulares y las funciones localmente integrables, lo que lleva a identificarlas, hablándose de propiedades de tal función localmente integrable (como por ejemplo la diferenciabilidad), cuando en realidad lo son de la función generalizada regular asociada.

Las funciones localmente integrables suelen describir las **distribuciones** (o densidades) de masas, cargas, fuerzas, etc. De ahí que a las funciones generalizadas (*Sobolev*) se les llame también distribuciones (*Schwarz*).

2) El ejemplo más simple de función generalizada singular lo constituye la función δ de *Dirac:*

$$(\delta,\phi) = \phi(0),\ \forall\ \phi \in D.$$

A pesar de que las funciones generalizadas son funcionales lineales y continuos de D en $\mathbb{C}$, y que no tiene sentido, rigurosamente hablando, la expresión $f(x)$, para $f \in D'$ y $x \in \mathbb{R}^n$, es posible definir una noción sumamente útil, la de soporte de una distribución. Esto lo hacemos a continuación.

Si Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$, $D(\Omega)$ es el subconjunto de D formado por aquellas funciones test cuyo soporte está contenido en Ω.
Si $f \in D'$ y Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$, se dice que f es cero en Ω si $(f,\phi) = 0,\ \forall\ \phi \in D(\Omega)$. En este caso escribiremos $f(x) = 0,\ \forall x \in \Omega$. Como una consecuencia lógica, si $f_1, f_2 \in D'$, diremos que $f_1 = f_2$ en Ω si $f_1 - f_2 = 0$ en Ω.
- Si $f \in D'$, $f \in C^p(\Omega)$ significa que existe alguna función $f_0 \in C^p(\Omega)$ tal que

$$(f,\phi) = \int f_0(x)\phi(x)\,dx,\ \forall\ \phi \in D(\Omega).$$

DEFINICIÓN 4.2. *Si $f \in D'$, el conjunto de todos aquellos puntos de $\mathbb{R}^n$ tales que f no es nula en ningún entorno de tales puntos, es el* **soporte** *de f, que se denotará por sop f.*

Se deduce de la definición anterior que

$$(f, \phi) = 0, \ \forall\ f \in D', \ \forall\ \phi \in D, \ t.q. \ sop\ f \cap sop\ \phi = \emptyset.$$

Hablemos a continuación de la derivación de funciones generalizadas. Para ello, pensemos que si $f \in C^p(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in D$, entonces para cada multiíndice α, con $|\alpha| \leq p$, la fórmula de integración por partes proporciona

$$(D^\alpha f, \phi) = \int (D^\alpha f(x))\phi(x)\ dx =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \int f(x)(D^\alpha \phi(x))\ dx = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \phi).$$

La anterior relación puede aprovecharse para definir la derivada, de cualquier orden, de cualquier función generalizada.

DEFINICIÓN 4.3. *Si $f \in D'$ y α es un multiíndice cualquiera, se define $D^\alpha f \in D'$, como*

$$(D^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \phi), \ \forall\ \phi \in D.$$

Si notamos por $\{D^\alpha f(x)\}$ a la derivada clásica de la función f, cuando exista, entonces si $f \in D'$, satisface $f \in C^p(\Omega)$, se cumple que

$$D^\alpha f(x) = \{D^\alpha f(x)\}, \ \forall\ x \in \Omega, \ |\alpha| \leq p.$$

Las principales propiedades de la derivación de funciones generalizadas están en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.4. *Se cumplen:*
1) Cualquier función generalizada admite derivadas de cualquier orden. En particular, la función generalizada definida a través de una función localmente integrable, admite derivadas de todos los órdenes (de ahí que se diga que, en el sentido de las distribuciones, cualquier función localmente integrable puede derivarse indefinidamente).
Además, para cualquier $f \in D'$ y cualquier par de multiíndices α, β, se tiene

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta(D^\alpha f).$$

2) Si $f \in D'$ y $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, entonces la función generalizada af se define como

$$(af, \phi) = (f, a\phi),\ \forall\ \phi \in D.$$

Pues bien, la fórmula de Leibnitz para la derivación del producto af es válida. Así, por ejemplo

$$\frac{\partial(af)}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{\partial x_1}\, f + a\, \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

3) Para cada $f \in D'$ y cada multiíndice α, se tiene sop $D^\alpha f \subset$ sop f.
4) Si $f_k \to f$, en D', entonces $D^\alpha f_k \to D^\alpha f$, en D', para cualquier multiíndice α.

Usando las anteriores propiedades, se tienen los siguientes ejemplos significativos, relacionados con la derivación de funciones generalizadas.

1) Si $f \in D'(\mathrm{R})$ es tal que $f \in C^1(-\infty, x_0]$ y $f \in C^1[x_0, +\infty)$, entonces

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x - x_0),$$

donde

$$[f]_{x_0} = f(x_0+) - f(x_0-)$$

y

$$(\delta(x - x_0), \phi) = (\delta, \phi(x + x_0)),\ \forall\ \phi \in D.$$

Como caso particular, obtenemos

$$\theta'(x) = \delta(x),$$

donde θ es la función de *Heaviside:*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Más generalmente, si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, es tal que f y f' son continuas, excepto en un conjunto finito de puntos $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, donde f tiene una discontinuidad de salto h_j, $1 \leq j \leq k$, y f' es localmente integrable, entonces, en el sentido de las funciones generalizadas, se obtiene

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_{j=1}^{k} h_j\delta(x - x_j),$$

2) Si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \, cos \; nx,$$

entonces, en el sentido de las funciones generalizadas, se tiene

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \, sen \; nx,$$

$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} cos \; nx,$$

$$\cdots\cdots$$

3) La solución general de la ecuación

$$x^m u = 0$$

en $D'(\mathbf{R})$, está dada por la fórmula

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x)$$

donde c_k, $0 \leq k \leq m-1$, son constantes arbitrarias.

4) La solución general de la ecuación diferencial ordinaria

$$u^{(m)} = 0$$

en $D'(\mathbf{R})$, es un polinomio arbitrario de grado $m-1$.

5) $\dfrac{d}{dx} \, ln \, |x| = P(\dfrac{1}{x})$, donde

$$(P(\frac{1}{x}), \phi) = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \right) \frac{\phi(x)}{x} \, dx, \; \forall \; \phi \in D.$$

6) Para $n = 2$,

$$\Delta \; ln \; |x| = 2\pi\delta(x).$$

7) Si $n \geq 3$, entonces

$$\Delta \, \frac{1}{|x|^{n-2}} = -(n-2)\sigma_n \delta(x),$$

donde σ_n es el área de la superficie dada por la esfera unidad en $\mathbf{R}^n$.

8) Cuando $n = 3$, las funciones

$$E(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \ \overline{E}(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|},$$

satisfacen la ecuación

$$\Delta E + k^2 E = \delta(x).$$

9) Si

$$E_1(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a(\pi t)^{1/2})^n} \ exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right),$$

entonces

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} - a^2 \Delta E_1 = \delta(x,t).$$

10) Si

$$E_2(x,t) = \frac{1}{2a} \ \theta(at - |x|),$$

entonces

$$L_a E_1 = \delta(x,t),$$

donde L_a es el operador de ondas, $L_a = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$.

Nos ocupamos a continuación de la noción de **producto directo** de funciones generalizadas.

Si $f(x)$ y $g(y)$ son funciones localmente integrables en $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{R}^m$, respectivamente, la función $f(x)g(y)$ es también localmente integrable en $\mathbf{R}^{n+m}$. Por tanto, define una función generalizada regular perteneciente a $D'(\mathbf{R}^{n+m})$, mediante la fórmula

$$\begin{aligned}(f(x)g(y),\phi) &= \int f(x)g(y)\phi(x,y)\,dy\,dx = \\ &= (f(x),(g(y),\phi(x,y))).\end{aligned}$$

para cualquier $\phi \in D(\mathbf{R}^{n+m})$. La fórmula anterior puede aprovecharse para definir el producto directo de dos funciones generalizadas de la forma siguiente:

DEFINICIÓN 4.5. *Si $f(x) \in D'(\mathbf{R}^n)$ y $g(y) \in D'(\mathbf{R}^m)$, se define el* **producto directo** *de f y g, $f(x).g(y) \in D'(\mathbf{R}^{n+m})$, como*

$$(f(x).g(y),\phi) = (f(x),(g(y),\phi(x,y))), \ \forall\ \phi \in D(\mathbf{R}^{n+m}).$$

Las propiedades del producto directo quedan reflejadas en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.6.
1) **Conmutatividad:** *Si* $f(x) \in D'(\mathbf{R}^n)$ *y* $g(y) \in D'(\mathbf{R}^m)$, *entonces*

$$f(x).g(y) = g(y).f(x)$$

2) **Continuidad:** *Si* $f_k \to f$, *en* $D'(\mathbf{R}^n)$, *entonces*

$$f_k(x).g(y) \to f(x).g(y),$$

en $D'(\mathbf{R}^{n+m})$.
3) **Asociatividad:** *Si* $f \in D'(\mathbf{R}^n)$, $g \in D'(\mathbf{R}^m), h \in D'(\mathbf{R}^k)$, *entonces*

$$f(x).(g(y).h(z)) = (f(x).g(y)).h(z)$$

4) **Derivación del producto directo:**

$$D_x^\alpha(f(x).g(y)) = D^\alpha f(x).g(y)$$

5) **Multiplicación por funciones regulares:** *Si* $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, *entonces*

$$a(x)(f(x).g(y)) = (a(x)f(x)).g(y).$$

6) **Traslación de la variable independiente:**

$$(f.g)(x+h,y) = f(x+h).g(y)$$

Tratamos seguidamente la noción y principales propiedades de la **convolución de funciones generalizadas.** Como hemos hecho previamente en más de una ocasión, partimos del caso de funciones generalizadas regulares, para posteriormente considerar la situación general.

Sean f y g funciones localmente integrables definidas en $\mathbf{R}^n$, tal que la función

$$h(x) = \int |g(y)f(x-y)|\, dy,$$

es también localmente integrable en $\mathbf{R}^n$. En este caso, a la función

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int f(y)g(x-y)\, dy = \\ &= \int g(y)f(x-y)\, dy = (g*f)(x),\end{aligned} \tag{4.3}$$

se le llama **convolución** de f por g.

Algunas condiciones suficientes para que la función h anterior, sea localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, son:

1) Una de las funciones f o g tiene soporte compacto.
2) Si $n = 1$, las funciones f y g son nulas cuando $x < 0$.
3) Las funciones f y g son integrables en $\mathbb{R}^n$. Además, en este caso, la convolución de f por g, es también integrable en $\mathbb{R}^n$.

Como la función (4.3) es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, define una función generalizada regular, de la forma usual. Utilizando el Teorema de *Fubini*, puede probarse:

$$(f * g, \phi) = \int\int f(x)g(y)\phi(x+y)\, dx\, dy, \ \forall\ \phi \in D. \tag{4.4}$$

Usando sucesiones que en D converjan a 1, noción que vamos a definir inmediatamente, se puede expresar la convolución de una forma más conveniente. En efecto, diremos que la sucesión $\{\eta_k\}$, de elementos de D, converge a 1 en $\mathbb{R}^n$, si para cualquier compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, existe un natural n_0, tal que $\eta_k(x) = 1$, $\forall\ k \geq n_0$, $\forall\ x \in K$, y para cualquier multiíndice α, existe una constante c_α, tal que $|D^\alpha \eta_k(x)| < c_\alpha$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.
Es fácil probar que siempre existen sucesiones del tipo anterior. Además, si $\{\eta_k\}$, es cualquier sucesión convergente a 1 en $\mathbb{R}^{2n}$, entonces la expresión (4.4) se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}(f * g, \phi) = \lim_{k\to\infty} &(f(x)g(y), \eta_k(x;y)\phi(x+y)),\\ &\forall\ \phi \in D.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ahora, pueden aprovecharse las expresiones (4.4) y (4.5), para dar la siguiente definición, así como para el teorema que enunciamos a continuación:

DEFINICIÓN 4.7. *Sean $f, g \in D'$, teniendo g soporte compacto. Se define la* **convolución** *de f por g, $f * g \in D'$, como*

$$(f * g, \phi) = (f(x).g(y), \phi(x+y)), \ \forall\ \phi \in D.$$

TEOREMA 4.8. *En las condiciones de la definición anterior, se tiene*

$$(f * g, \phi) = (f(x).g(y), \eta(y)\phi(x+y)), \ \forall \ \phi \in D,$$

donde η es cualquier elemento de D, que sea igual a 1, en un entorno del soporte de g.

Nota. La convolución puede definirse en situaciones más generales que las contempladas en la definición (4.7). Por ejemplo, sean $f, g \in D'$, tales que cumplen lo siguiente: para cualquier sucesión $\{\eta_k\}$, de elementos de $D(\mathbf{R}^{2n})$, convergente a 1 en $\mathbf{R}^{2n}$, se tiene la existencia del límite

$$\lim_{k\to\infty} (f(x).g(y), \eta_k(x;y)\phi(x+y))$$

y este límite es independiente de la sucesión $\{\eta_k\}$ considerada. En este caso, al funcional (lineal)

$$\begin{gathered}(f * g, \phi) = (f(x).g(y), \phi(x+y)) = \\ = \lim_{k\to\infty} (f(x).g(y), \eta_k(x;y)\phi(x+y)), \\ \forall \ \phi \in D,\end{gathered}$$

se le llama convolución de f por g, si dicho funcional es continuo en D.
Es fácil probar que si la convolución $f * g$ existe, también existe la convolución $g * f$ y

$$f * g = g * f.$$

Además, de la continuidad del producto directo, respecto de f y g, se sigue la continuidad de la convolución $f * g$, respecto de f y g.

En particular, se tiene la siguiente fórmula, de gran interés en la resolución de problemas no homogéneos:

$$f * \delta = \delta * f = f, \ \forall \ f \in D'.$$

La relación entre la convolución y diferenciación de funciones generalizadas, es la siguiente:

TEOREMA 4.9. *Si la convolución $f * g$ existe, entonces, para cualquier multi-índice α, existen las convoluciones $D^\alpha f * g$, $f * D^\alpha g$ y*

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g.$$

Una de las utilidades del producto de convolución es la "regularización de funciones generalizadas", que precisamos a continuación.

Sea $f \in D'$ y $\phi \in D$. Como ϕ tiene soporte compacto, la convolución $f * \phi$ existe y además,

$$f * \phi = (f(y), \phi(x - y)) \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n).$$

Tomemos ahora las funciones test siguientes: para cada $\epsilon \in \mathbf{R}^+$, defínase

$$\omega_\epsilon(x) = \begin{cases} c_\epsilon exp\left(-\dfrac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |x|^2}\right), & |x| < \epsilon, \\ 0, \ |x| \geq \epsilon, & \end{cases}$$

donde la constante c_ϵ se elige para que

$$\int \omega_\epsilon(x)\ dx = 1.$$

A las funciones

$$f_\epsilon(x) = f * \omega_\epsilon \tag{4.6}$$

se les llama "regularizantes" de la función generalizada f. El nombre se justifica en base a que son funciones pertenecientes a $C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ y al siguiente resultado:

TEOREMA 4.10 . *Sea $f \in D'$ y para cada $\epsilon \in \mathbf{R}^+$, f_ϵ, definida en (4.6). Entonces*

$$\lim_{\epsilon \to 0+} f_\epsilon(x) = f(x), \quad en \quad D'.$$

Usando el resultado anterior, puede probarse que D es denso en D', en el sentido de que cada función generalizada $f \in D'$, es límite débil de funciones test. En efecto, sea $f \in D'$ y f_ϵ los regularizantes de f. Si tomamos, para $\epsilon \in \mathbf{R}^+$, $\eta_\epsilon(x)$, una función test que sea igual a 1 en la esfera de centro 0 y radio $\dfrac{1}{\epsilon}$, entonces se puede demostrar que

$$\lim_{\epsilon \to 0+} (\eta_\epsilon f_\epsilon, \phi) = (f, \phi), \ \forall \ \phi \in D.$$

Uno de los métodos más efectivos que existen para demostrar la existencia de soluciones de problemas muy diversos que se plantean en ecuaciones en derivadas parciales, es el método de las transformadas. Éstas, al relacionar de manera directa la derivación y la multiplicación (véanse las propiedades 2) y

3) de los Teoremas 4.14 y 4.16, reducen muchos problemas de e.d.p. lineales con coeficientes constantes, a problemas algebraicos o bien a problemas de e.d.o. con parámetros.
Seguidamente describimos la noción de **transformada de *Fourier* de funciones generalizadas de crecimiento lento,** especialmente apropiadas para el uso de dicha transformada, por las propiedades que se verán posteriormente.

DEFINICIÓN 4.11. *Una función $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, se dice* **rápidamente decreciente en infinito,** *si*

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| = 0,$$

para cualquier par de multiíndices α, β.

El subconjunto de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, formado por aquellas funciones rápidamente decrecientes en infinito, es un espacio vectorial complejo al que denotamos por $S(\mathbb{R}^n)$ o simplemente por S.

Si α, β, son multiíndices cualesquiera, podemos considerar, en S, las seminormas

$$p_{\alpha,\beta}\ \phi = sup_{\ x\in\mathbb{R}^n}\ |x^\alpha D^\beta\ \phi(x)|.$$

Tenemos así una familia numerable de seminormas en S, que define una topología localmente convexa metrizable.
La convergencia en S, derivada de la topología anterior, puede expresarse de la forma siguiente: si $\{\phi_k\}$ es una sucesión de elementos de S y $\phi \in S$, entonces $\phi_k \to \phi$, si y solamente si, para cualquier par de multiíndices α, β, se tiene

$$x^\alpha D^\beta \phi_k(x) \to x^\alpha D^\beta \phi(x),$$

de manera uniforme en $\mathbb{R}^n$.

Es claro que $D \subset S$, de manera continua. Además, puede mostrarse fácilmente que la anterior inclusión es estricta (la función $exp\ (-|x|^2)$ pertenece a S pero no a D). No obstante, D es denso en S.

DEFINICIÓN 4.12. **Una función generalizada de crecimiento lento** *es un funcional lineal y continuo de S en $\mathbb{C}$.*

Al espacio vectorial complejo de funciones generalizadas de crecimiento lento lo notamos por S'. En S', consideraremos la topología débil $\sigma(S', S)$, de la que deriva la convergencia siguiente: si $\{f_k\}$ es una sucesión de elementos de S' y $f \in S'$, entonces $f_k \to f$ si y solamente si
$(f_k, \phi) \to (f, \phi)$, $\forall\ \phi \in S$.
De lo anterior se sigue que $S' \subset D'$, de manera continua.

Ejemplos de funciones generalizadas de crecimiento lento.
a) Si f es una función localmente integrable en R^n, tal que, para algún $m \geq 0$, se tiene que

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-m}\ dx \ < \ +\infty \tag{4.7}$$

entonces f define un elemento de S', de la manera usual, es decir,

$$(f, \phi) = \int f(x)\phi(x)\ dx,\ \forall\ \phi \in S. \tag{4.8}$$

A tales elementos de S', se les llama **funciones generalizadas regulares de crecimiento lento.** Sin embargo, conviene recalcar que no toda función localmente integrable define, a través de (4.8), un elemento de S' (por ejemplo $f(x) = e^x$, en R). También, no toda función localmente integrable perteneciente a S', satisface (4.7).
Es posible (pero no elemental), probar que cualquier elemento de S' es una derivada (distribucional) de una función continua satisfaciendo (4.7). Esta es la razón por la que a los elementos de S' se les llama funciones generalizadas de crecimiento lento.

b) Si $f \in S'$, entonces $D^\alpha f \in S'$, para cada multiíndice α.

c) Cada función $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$, define una función generalizada de crecimiento lento a través de la fórmula usual

$$(f, \phi) = \int f(x)\phi(x)\ dx,\ \forall\ \phi \in S.$$

También, de la misma manera, cualquier polinomio con coeficientes constantes, define un elemento de S'.

El producto directo y el producto de convolución de los elementos de S', se define de manera análoga al caso de D'. De hecho, si $f \in S'(\mathrm{R}^n)$, $g \in S'(\mathrm{R}^m)$, entonces, puesto que $S' \subset D'$, se tiene que $f(x).g(y) \in D'(\mathrm{R}^{n+m})$, y puede demostrarse que $f(x).g(y) \in S'(\mathrm{R}^{n+m})$.
El producto directo de funciones generalizadas de crecimiento lento es conmutativo, asociativo y continuo en $S'(\mathrm{R}^{n+m})$, con respecto de f o g. Por ejemplo,

esto significa que si $f_k \to f$ en $S'(\mathbf{R}^n)$, entonces $f_k(x).g(y) \to f(x).g(y)$, en $S'(\mathbf{R}^{n+m})$.

Si $f \in S'$ y $g \in D'$, con soporte compacto, entonces $f * g \in S'$ y se puede escribir de la forma

$$(f * g, \phi) = (f(x).g(y), \eta(y)\phi(x+y)),\ \forall\ \phi \in S,$$

donde η es cualquier elemento de D, que sea igual a 1, en un entorno del soporte de g.

Dedicamos la parte que sigue de este apéndice al tema de la transformada de *Fourier*. Comenzamos con dicho concepto en el espacio S.

DEFINICIÓN 4.13. *Si $\phi \in S$, se define su transformada de Fourier, $F(\phi)$, como la función*

$$F(\phi)(\xi) = \int \phi(x) e^{i<\xi,x>}\ dx,$$

donde $<\xi, x>$ es el producto escalar usual en $\mathbf{R}^n$.

Las principales propiedades se ponen de manifiesto en el Teorema siguiente:

TEOREMA 4.14. *Se cumplen:*
1) Para cada $\phi \in S$, su transformada de Fourier, $F(\phi)$, es una función acotada y continua.
2) $D^\alpha F(\phi)(\xi) = F((ix)^\alpha \phi)(\xi)$, para cada multiíndice α y cada $\phi \in S$.
3) $F(D^\alpha \phi)(\xi) = (-i\xi)^\alpha F(\phi)(\xi)$, para cada multiíndice α y cada $\phi \in S$.
4) $F(\phi) \in S,\ \forall\ \phi \in S$.
5) $F : S \to S$, es biyectiva y continua. Además, para cada $\phi \in S$, se cumple

$$\phi = F^{-1}(F(\phi)) = F(F^{-1}(\phi)),$$

donde, para cada $\psi \in S$,

$$F^{-1}(\psi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{-i<\xi,x>}\ d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\ F(\psi)(-x).$$

Sea ahora $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Su transformada de *Fourier*, $F(f)$, es una función acotada y continua en $\mathbf{R}^n$ y por tanto define un elemento de S', a través de la fórmula

$$(F(f), \phi) = \int F(f)(\xi)\phi(\xi)\ d\xi,\ \forall\ \phi \in S.$$

Mediante el Teorema de *Fubini*, se prueba que

$$(F(f),\phi) = (f, F(\phi)),$$

que puede usarse para dar la definición de transformada de *Fourier* de un elemento de S'.

DEFINICIÓN 4.15. *Si $f \in S'$, se define $F(f) \in S'$, como*

$$(F(f),\phi) = (f, F(\phi)),\ \forall\ \phi \in S.$$

Enunciamos el Teorema siguiente, sobre las propiedades más importantes de F.

TEOREMA 4.16.
1) $F : S' \to S'$ es biyectiva y continua. Además,

$$F^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^n}\ F(f(-x)),\ \forall\ f \in S'.$$

2) Si $f \in S'$, entonces

$$D^\alpha F(f) = F((ix)^\alpha f),$$

para cada multiíndice α.
3)

$$F(D^\alpha f) = (-i\xi)^\alpha F(f),$$

para cada $f \in S'$ y cada multiíndice α.
4)

$$F(f(x-x_0)) = exp\ (i < \xi, x_0 >)F(f),$$

para cada $f \in S'$ y $x_0 \in \mathbf{R}^n$.
5) Si $f \in S'$ y $\xi_0 \in \mathbf{R}^n$, entonces

$$F(f)(\xi + \xi_0) = F(e^{i<\xi_0,x>} f)(\xi).$$

6) Si $f \in S'(\mathbf{R}^n)$ y $g \in S'(\mathbf{R}^m)$, entonces

$$F(f(x).g(y)) = F(f)(\xi).F(g)(\eta).$$

7) Si $f \in D'$ tiene soporte compacto, entonces su transformada de Fourier se puede expresar de la forma

$$F(f)(\xi) = (f(x), \eta(x)e^{i<\xi,x>}),$$

donde η es cualquier elemento de D, que sea igual a 1, en un entorno del soporte de f.
8) Si $f \in S'$ y $g \in D'$ tiene soporte compacto, entonces

$$F(f * g) = F(f)F(g).$$

Seguidamente, consideramos los espacios de *Sobolev.* En lo que sigue, Ω denotará un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y las funciones que aparezcan se considerarán con valores reales.

Comenzamos con la definición del espacio de *Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$, que es el conjunto de funciones de $L^p(\Omega)$ tales que todas las derivadas, en el sentido distribucional, hasta el orden m, pertenecen también a $L^p(\Omega)$.

DEFINICIÓN 4.17. *Sean $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y p tal que $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define como*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \forall \ \alpha \ / \ |\alpha| \leq m\},$$

donde $D^\alpha u$ se entiende en el sentido distribucional, es decir,

$$\int_\Omega u(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha u)\phi, \ \forall \ \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

($C_0^\infty(\Omega)$ denota al subconjunto de funciones de $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto).

Claramente $W^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $L^p(\Omega)$.
En $W^{m,p}(\Omega)$ consideraremos la norma

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{4.9}$$

o, cuando $1 \leq p < \infty$, la norma equivalente (a la que notamos igual)

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}. \tag{4.10}$$

A veces se usará la seminorma

$$|u|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Un caso especialmente significativo es cuando $p = 2$. Denotaremos por $H^m(\Omega)$ al espacio $W^{m,2}(\Omega)$ y por $\|.\|_{m,\Omega}$ la correspondiente norma $\|.\|_{m,2,\Omega}$. Ésta deriva del producto escalar

$$(u,v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v, \ \forall\ u,v \in H^m(\Omega). \tag{4.11}$$

Las propiedades algebraico-topológicas de los espacios definidos, las enunciamos en el siguiente Teorema.

TEOREMA 4.18. *El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach real, con la norma* (4.9) *(o* (4.10)*). Si $1 < p < \infty$, es además reflexivo y si $1 \leq p < \infty$, separable. Tambien, $H^m(\Omega)$, con el producto escalar* (4.11)*, es un espacio de Hilbert separable.*

Introducimos a continuación un subespacio importante de $W^{m,p}(\Omega)$.

DEFINICIÓN 4.19. *$W_0^{m,p}(\Omega)$ denotará la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.*

En general, $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio (cerrado) estricto de $W^{m,p}(\Omega)$, salvo cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$, en cuyo caso, ambos espacios coinciden. Además, si $1 \leq p < \infty$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de *Banach* separable, con la norma (4.9) (o (4.10)), reflexivo si $1 < p < \infty$. También, $W_0^{m,2}(\Omega)$, con el producto escalar (4.11) es un espacio de *Hilbert* separable, al que notaremos por $H_0^m(\Omega)$.

Cuando $n = 1$ y $\Omega = (a,b)$, un intervalo acotado, se tienen caracterizaciones muy útiles de los espacios anteriormente definidos, que ayudan a entender la naturaleza de sus elementos. Por ejemplo, para los espacios de *Hilbert* $H^m(a,b)$, se tendría:

$H^m(a,b)$ está formado por aquellas funciones tales que ellas y sus derivadas (en el sentido clásico), hasta el orden $m-1$, son absolutamente continuas, perteneciendo además la derivada de orden m al espacio $L^2(a,b)$. Son este tipo de caracterizaciones las que facilitan el estudio de los problemas de contorno en dimensión uno.

Muchas veces, cuando se quiera probar un resultado determinado, se prueba éste para funciones suficientemente regulares y después se trata de extender el mismo para funciones del espacio de *Sobolev* correspondiente. Para ello es muy importante conocer las posibles propiedades de aproximación de éstas, por funciones regulares. En este sentido, el siguiente Teorema es de gran utilidad:

TEOREMA 4.20. *Si* $1 \leq p < \infty$, $C^{\infty}(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ *es denso en* $W^{m,p}(\Omega)$.

Se ha de destacar que la conclusión del Teorema anterior es falsa si $p = \infty$.

Resultados como el anterior permiten demostrar otros muy interesantes tales como los siguientes:
a) Sea $1 \leq p < \infty$ y $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tal que u es nula en $\Omega \setminus K$, con $K \subset \Omega$, compacto. Entonces $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.
b) Sea $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitziana tal que $G(0) = 0$. Entonces, si Ω es acotado, $1 < p < \infty$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, se tiene que $G \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como consecuencia, si Ω es acotado y $u \in H_0^1(\Omega)$, se tiene que las funciones $|u|$, u^+ y u^- pertenecen a $H_0^1(\Omega)$, donde

$$u^+(x) = max\ \{u(x), 0\},$$
$$u^-(x) = max\ \{-u(x), 0\}.$$

c) Sea $1 \leq p < \infty$ y $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, tal que $u = 0$ en $\partial\Omega$. Entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Otro resultado básico en el estudio de problemas de contorno de tipo elíptico es la siguiente desigualdad, conocida con el nombre de desigualdad de *Poincaré.* Hay otras muchas desiguadades importantes, como las de *Poincaré-Wirtinger*, de *Hardy,* o las de *Gagliardo-Nirenberg.* Son muy útiles en el estudio de problemas no lineales.

TEOREMA 4.21. *Sea* Ω *acotado y* $1 \leq p < \infty$. *Entonces existe una constante positiva* $C(\Omega, p)$, *tal que*

$$|u|_{0,p,\Omega} \leq C(\Omega, p)\ |u|_{1,p,\Omega},\ \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.12}$$

Como consecuencia, la aplicación $u \to |u|_{1,p,\Omega}$, define una norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a $\|u\|_{1,p,\Omega}$. Por tanto, sobre $H_0^1(\Omega)$, la forma bilineal

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

define un producto escalar que da lugar a la norma $|.|_{1,\Omega}$, equivalente a $||.||_{1,\Omega}$.

Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in W_0^{m-1,p}(\Omega)$. Usando este hecho, puede probarse una desigualdad de *Poincaré,* más general que (4.12), obteniéndose que, en $W_0^{m,p}(\Omega)$, $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ es una norma equivalente a $||\cdot||_{m,p,\Omega}$.

En la definición que se da de espacio de *Sobolev* no se pone de manifiesto, de manera explícita, si sus elementos han de satisfacer condiciones de regularidad. Sin embargo, ya hemos comentado que en dimensión uno, existen caracterizaciones muy útiles de ellos, donde se ve que las funciones pertenecientes a dichos espacios han de satisfacer condiciones de regularidad apropiadas. No existen resultados tan claros en dimensiones superiores, pero sí que se puede probar la existencia de inclusiones continuas de los espacios de *Sobolev* en espacios del tipo $L^q(\Omega)$, e incluso a veces en espacios de funciones regulares, lo que es muy importante a la hora de establecer resultados de regularidad de las soluciones débiles. Tales inclusiones serán a veces compactas, facilitando enormemente el uso de técnicas del Análisis Funcional.

Dados espacios normados X e Y, diremos que X está inmerso en Y, si existe una aplicación $I : X \to Y$, lineal, inyectiva y continua. En este caso, escribiremos

$$X \hookrightarrow Y.$$

Si, además, I es compacta, es decir, I aplica subconjuntos acotados de X en subconjuntos relativamente compactos de Y, se dice que X está inmerso de manera compacta en Y y se notará

$$X \hookrightarrow \hookrightarrow Y.$$

En los teoremas que siguen aparecen los siguientes espacios:
- $C_B^j(\Omega)$. Es el espacios de funciones de clase $C^j(\Omega)$, tales que todas sus derivadas parciales, hasta el orden j, están acotadas en Ω. Es un espacio de *Banach* con la norma

$$||u||_{C_B^j(\Omega)} = max_{\,|\alpha| \leq j}\ sup_{\,x \in \Omega}\ |D^\alpha u(x)|.$$

- $C^j(\overline{\Omega})$. Es el espacio de funciones de clase $C^j(\Omega)$, tales que todas sus derivadas parciales, hasta el orden j, están acotadas y son uniformemente continuas en Ω. Es un espacio de *Banach* con la norma

$$||u||_{C^j(\overline{\Omega})} = max_{\,|\alpha|\leq j}\ \ sup_{\,x \in \Omega}\ |D^\alpha \phi(x)|$$

- Si $0 < \lambda \leq 1$, $C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$ es el espacio de funciones de clase $C^j(\overline{\Omega})$, tales que todas sus derivadas parciales, hasta el orden j, son *Hölder*-continuas, con exponente λ. Es decir, para cada α, $|\alpha| \leq j$, la cantidad

$$sup_{\ x,y\ \in\ \Omega,\ x\neq y}\ \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

es finita. Es un espacio de *Banach* con la norma

$$\|u\|_{C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^j(\overline{\Omega})} +$$

$$+\ max_{\ |\alpha|\leq j}\ sup_{\ x,y\ \in\Omega,\ x\neq y}\ \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

Los teoremas de inmersión necesitan además una condición de tipo geométrico sobre el dominio Ω. Esta condición puede ser muy variada; por ejemplo, se puede suponer que la frontera de Ω es Lipschitziana, o que se verifica la propiedad del cono. Aquí asumiremos en adelante, salvo que explícitamente se diga otra cosa, que Ω es acotado y con frontera de clase C^1; equivalentemente, diremos que Ω es un dominio regular.

TEOREMA 4.22 . *Sea Ω un abierto acotado y regular de $\mathbf{R}^n$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces se tienen las siguientes inmersiones:*
1) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, si $k < \frac{n}{p}$, $q \in [p, \frac{np}{n-kp}]$.
2) Si $k = \frac{n}{p}$, entonces $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, para cualquier $q \in [p, +\infty)$.
Además, si $p = 1$, entonces $W^{m+n,1} \hookrightarrow C^j_B(\Omega)$.
3) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega)$, si $k > \frac{n}{p}$.
4) Si $\frac{n}{p} < k < 1 + \frac{n}{p}$, entonces $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, para $\lambda \in (0, k - \frac{n}{p}]$.
5) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, si $k = 1 + \frac{n}{p}$ y $\lambda \in (0,1)$.

TEOREMA 4.23. *Sea Ω un abierto acotado y regular de $\mathbf{R}^n$, $k \in \mathrm{N}$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces se tienen las siguientes inmersiones compactas:*
1) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, si $k < \frac{n}{p}$ y $q \in [1, \frac{np}{n-kp})$.

2) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, *si* $k = \dfrac{n}{p}$ *y* $q \in [1, +\infty)$.

3) $W^{m+k,p}(\Omega) \hookrightarrow \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$, *si* $k > \dfrac{n}{p}$.

Si además, $\dfrac{n}{p} > k - 1$, *entonces* $W^{m+k,p} \hookrightarrow \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, *para cualquier* $\lambda \in (0, k - \dfrac{n}{p})$.

Respecto de las inmersiones satisfechas por los espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$, se tiene que son válidas todas las de los dos teoremas anteriores, reemplazando los correspondientes espacios $W^{m+k,p}(\Omega)$ por $W_0^{m+k,p}(\Omega)$, sin necesidad de suponer regularidad del abierto y acotado Ω. Además, la acotación de Ω no es necesaria para las inmersiones continuas (Teorema (4.22)); en cambio, es imprescindible para las inmersiones compactas, como se puede comprobar con ejemplos fáciles en dimensión uno. Para el caso de dominios no acotados, son necesarias condiciones adicionales a las de tipo geométrico aquí impuestas, para tener inmersiones compactas; por ejemplo, la llamada "casiacotación" del dominio Ω.

Bibliografía recomendada

[1], [2], [6], [9], [20], [21], [24], [25], [29], [30], [31], [32], [35], [36], [38], [39], [41], [47], [48], [55], [57], [58], [59], [65], [66], [69], [70].

BIBLIOGRAFIA

[1] ADAMS, R., *Sobolev spaces*, Academic Press, 1.975.

[2] AGMON, S., *Elliptic boundary value problems*, Van Nostrand, 1.965.

[3] AMBROSETTI, A., *Critical points and nonlinear variational problems*, Bulletin de la Société Mathématique de France; Mémoire (nouvelle série), n§ 49, 1.992.

[4] AMBROSETTI, A. Y PRODI, G., *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge University Press, 1.993.

[5] AUBIN, J.P. Y EKELAND, I., *Applied nonlinear analysis*, John Wiley and Sons, 1.984.

[6] BARROS-NETO, J., *An introduction to the theory of distributions*, Marcel Dekker, 1.973.

[7] BERGER, M., *Nonlinearity and functional analysis*, Academic Press, 1.977.

[8] BRAUN, M., *Differential equations and their applications*, Springer-Verlag, 1.983.

[9] BREZIS, H., *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, 1.984.

[10] BREZIS, H., *Operateurs Maximaus monotones et semigroups de contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, 1.973.

[11] BURGHES, D.N. Y BORRIE,M.S., *Modelling with differential equations*, John Wiley and Sons, 1.981.

[12] CESARI, L.; KANNAN, R. Y SCHUUR, J.D. (EDITORES), *Nonlinear Functional Analysis and differential equations*, Marcel Dekker, 1.976.

[13] CHANG, K.C., *Infinite dimensional Morse theory and its applications*, Les Presses de L'Université de Montreal, 1.985.

[14] DEIMLING, K., *Ordinary differential equations in Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics, n§ 596, Springer-Verlag, 1.977.

[15] DEIMLING, K., *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, 1.985.

[16] DIEUDONNÉ, J., *History of functional analysis*, North-Holland, 1.981.

[17] EKELAND, I., *Convexity methods in hamiltonian mechanics*, Springer-Verlag, 1.990.

[18] EKELAND, I. Y TEMAN, R., *Convex analysis and variational problems*, North-Holland Publishing Company, 1.976.

[19] DE FIGUEIREDO, D.G., *The Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of fundamental research, Springer-Verlag, 1.989.

[20] FOLLAND, G., *Introduction to partial differential equations*, Princenton University Press, 1.976.

[21] FRIEDMAN, A., *Partial differential equations*, Holt, Rinehart and Winston, 1.969.

[22] FUCIK, S., *Solvability of nonlinear equations and boundary value problems*, D. Reidel Publishing Company, 1.980.

[23] GAINES, R.E. Y MAWHIN, J., *Coincidence degree and nonlinear differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, n§ 568, Springer-Verlag, 1.977.

[24] GELFAND, I.M. Y SHILOV, G.E., *Generalized functions, varios volúmenes*, Academic Press, 1.964.

[25] GILBARG, D. Y TRUDINGER, N.S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 1.983.

[26] HALE, J.K., *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, 1.977.

[27] HALE, J.K., *Applications of alternative problems*, Brown University Lecture Notes, 71-1, 1.971.

[28] HILDEBRANDT, S. Y TROMBA, A., *Matemáticas y formas óptimas*, Prensa científica, 1.990.

[29] HORMANDER, L., *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1.969.

[30] HORMANDER, L., *The analysis of linear partial differential operators, Vol. I y II*, Springer-Verlag, 1.983.

[31] HORVATH, J., *Topological vector spaces and distributions*, Addison-Wesley, 1.966.

[32] HUTSON, V. Y PYM, J.S., *Applications of functional analysis and operator theory*, Academic Press, 1.980.

[33] ISTRATESCU, V.I., *Fixed point theory*, D. Reidel Publishing company, 1.981.

[34] JERRI, A.J., *Introduction to integral equations with applications*, Marcel Dekker, Inc., 1.985.

[35] JOHN, F., *Partial differential equations*, Springer-Verlag, 1.980.

[36] JOHN, F., *Partial differential equations*, Springer-Verlag, 1.971.

[37] KLINE, M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1.972.

[38] KRALL; A.M., *Applied Analysis*, D. Reidel Publishing Company, 1.986.

[39] KUFNER, A.; JOHN, O. Y FUCIK, S., *Function spaces*, Noordhoff International Publishing, 1.977.

[40] LANDESMAN, E.M. Y LAZER, A.C., *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. Math. Mech., 19, 1.979, 609-623.

[41] LIONS. J.L. Y MAGENES, E., *Problémes aux limites non homogénes (3 volúmenes)*, Dunod, 1.968.

[42] LLOYD, N.G., *Degree theory*, Cambridge University Press, 1.978.

[43] LUSTERNIK, L. Y SCHNIRELMAN, L., *Méthode topologique dans les problémes variationelles*, Hermann, 1.934.

[44] MAWHIN, J., *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems*, CBMS Regional Conferences Series Math., n§ 40, American Mathematical Society, 1.977.

[45] MAWHIN, J., *Equivalence theorems for nonlinear operators equations an coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces*, J. Diff. Eqns., 12, 1.972, 610-636.

[46] MAWHIN, J. Y WILLEM, M., *Critical point theory and hamiltonian systems*, Springer-Verlag, 1.989.

[47] MAZJA, V.G., *Sobolev spaces*, Springer-Verlag, 1.985.

[48] MIKHLIN, S.G., *Mathematical Phisics, an advanced course*, North-Holland, 1.970.

[49] MILNOR, J., *Topology from a differential viewpoint*, University Press of Virginia, 1.965.

[50] MORSE, M., *The calculus of variations in the large*, American Mathematical Society, 1.934.

[51] NIRENBERG,L., *Topics in Nonlinear Analysis*, Courant Institute, Lec. Not. Math., 1.973.

[52] PASCALI, D. Y SBURLAN, S., *Nonlinear mappings of monotone type*, Sijthoff and Noordhoff, 1.978.

[53] POINCARÉ, H., *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, 3 volúmenes. Libraire Albert Blanchard, 1.987.

[54] RABINOWITZ, P., *minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, American Mathematical Society, 1.986.

[55] RUDIN, W., *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1.973.

[56] SCHWARTZ, J.T., *Nonlinear functional analysis*, Gordon and Breach, 1.969.

[57] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions*, Hermann, 1.973.

[58] SCHECHTER, M., *Modern methods in partial differential equations*, Mcgraw-Hill, 1.977.

[59] SHOWALTER, R., *Hilbert space methods for partial differential equations*, Pitman, 1.977.

[60] SIMMONS, F., *Ecuaciones diferenciales*, McGraw-Hill, 1.977.

[61] SIEGBERG, H.W., *Some historial remarks concerning degree theory*, Amer. Math. Month., 88, 1.981, 125-139.

[62] STRUWE, M., *Variational methods*, Springer-Verlag, 1.990.

[63] TEMPLE, G., *100 years of Mathematics*, Gerald Duckwoth and Co., Ltd., 1.981.

[64] TIJONOV, A.N. Y SMARSKY, A.A., *Ecuaciones de la Física matemática*, Mir, 1.980.

[65] TREVES, F., *Linear partial differential equations with constant coefficients*, Gordon and Breach, 1.966.

[66] TREVES, F., *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, 1.975.

[67] TROUTMAN, J.L., *Variational calculus with elementary convexity*, Springer-Verlag, 1.983.

[68] VAINBERG, M.M., *Variational methods in the study of nonlinear operators*, Holden Day, 1.964.

[69] VLADIMIROV, V.S., *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, Inc., 1.971.

[70] VLADIMIROV, V.S. Y OTROS, *A collection of problems on the equations of Mathematical Physics*, Mir, 1.986.

[71] ZEIDLER, E., *Nonlinear functional analysis and its applications: III, Variational methods and optimization*, Springer-Verlag, 1.985.