



Apuntes de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Antonio Cañada Villar

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN ¹

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios.**

En la página web

<http://www.ugr.es/~acanada/>

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS

1. Ley de Newton sobre el potencial gravitacional de distribuciones de masas discretas y continuas (no imprescindible).
2. Teorema fundamental del cálculo y teorema de derivación de una integral paramétrica.
3. Cálculo de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

Estos conocimientos se pueden consultar, por ejemplo, en las referencias siguientes:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1960.
2. I. Peral : Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.
3. J.J. Quesada: Ecuaciones diferenciales, análisis numérico y métodos matemáticos. Editorial Santa Rita, Granada, 1996.
4. <http://mathworld.wolfram.com/>
5. <http://scienceworld.wolfram.com/physics/>

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo básico de este capítulo es que el alumno conozca el origen de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP), tanto en su relación con otras disciplinas matemáticas como en el importante papel que juegan en las aplicaciones a diversas

¹A. Cañada, Septiembre 2006, EDPICCP

materias, especialmente ingeniería, física, etc. Se pretende de manera especial que el alumno reconozca adecuadamente los tres tipos básicos de EDP: la ecuación de ondas, la ecuación del calor y la ecuación del potencial. Asimismo, el alumno debe prestar una atención especial a los párrafos en letra negrita que le informan de problemas que aparecen en ingeniería, física, etc., relacionados con EDP.

El problema de la cuerda vibrante y la ecuación de ondas

El primer problema que presentamos en este capítulo es el problema de la cuerda vibrante. Puede describirse de la siguiente forma: supongamos que una cuerda flexible se estira hasta quedar tensa y que sus extremos se fijan, por conveniencia, en los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$ del eje de abscisas. Entonces se tira de la cuerda hasta que ésta adopte la forma de una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ y se suelta. La cuestión es: ¿Cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Si los desplazamientos de ésta se hallan siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular, en cualquier momento, al eje de abscisas, dicho movimiento vendrá dado por una función $u(x,t)$, donde $u(x,t)$ representará el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x ($0 \leq x \leq \pi$) y el tiempo t ($t \geq 0$). El problema que se plantea es obtener $u(x,t)$ a partir de $f(x)$.

El primer matemático que elaboró un modelo apropiado para el anterior problema fue Jean Le Rond D'Alembert. Bajo diversas hipótesis (referentes fundamentalmente a que las vibraciones sean "pequeñas"), D'Alembert demostró en 1747 (Hist. de l'Acad. de Berlin, 3, 1747, 214-219) que la función u debe satisfacer las condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(1) es un **problema de tipo mixto**. La primera condición en (1) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **ecuación de ondas**. La segunda relación representa la posición inicial de la cuerda, mientras que la tercera significa que la velocidad inicial de la misma es cero. La última relación expresa el hecho de que, para cualquier tiempo, la cuerda se mantiene fija en sus extremos. En definitiva, además de la ecuación se consideran dos tipos de condiciones:

condiciones en el tiempo inicial y condiciones en la frontera de la cuerda (de ahí el nombre de problemas de tipo mixto).

D'Alembert demostró también que la solución de (1) viene dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x + t) + \tilde{f}(x - t)] \quad (2)$$

donde \tilde{f} es “una extensión conveniente de la función f .” De manera más precisa, \tilde{f} se obtiene, a partir de f , realizando una extensión a \mathbb{R} , impar y 2π -periódica. Esto se verá con detalle en el capítulo II.

La fórmula (2) fue también demostrada por Euler (Mora Acta Erud., 1749, 512-527), quien difería fundamentalmente de D'Alembert en el tipo de funciones iniciales f que podían tenerse en cuenta. De hecho, estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de función.

Otra manera de obtener la solución del problema (1) completamente distinta de la vista anteriormente fue propuesta por Daniel Bernouilli en 1753 (Hist. de l'Acad. de Berlin, 9, 1753, 147-172; 173-195). La idea clave es obtener la solución de (1) como superposición de ondas sencillas. Estas ondas sencillas pueden obtenerse usando el método de separación de variables, obteniéndose las funciones

$$u_n(x, t) = \text{sen}(nx) \cos(nt), \quad \forall n \in \mathbf{IN}, \quad (3)$$

donde \mathbf{IN} es el conjunto de los números naturales. Para cada tiempo t fijo, la anterior función es un múltiplo de la función $\text{sen}(nx)$, que se anula exactamente en $n - 1$ puntos del intervalo $(0, \pi)$. Así, si pudiésemos observar la vibración de la cuerda correspondiente a las ondas u_n , tendríamos $n - 1$ puntos, llamados nodos, en los que la cuerda se mantendría constantemente fija en el eje de abscisas (como en los extremos del intervalo $[0, \pi]$). Entre dichos nodos, la cuerda oscilaría de acuerdo con (3).

D. Bernouilli afirmó que la solución de (1) se representa de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx) \cos(nt), \quad (4)$$

donde los coeficientes a_n han de elegirse adecuadamente para que se satisfagan todas las relaciones de (1). Si la solución propuesta por Bernouilli es correcta, ello obligaría a que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx)$$

y por tanto a que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx), \quad \forall x \in [0, \pi], \quad (5)$$

para una adecuada elección de los coeficientes a_n . Las ideas expuestas por Bernoulli en el trabajo mencionado, no tuvieron aceptación en su tiempo. En particular, recibió duras contestaciones por parte de D'Alembert y Euler quienes no admitían que cualquier función con una expresión analítica pudiera representarse en la forma (5) (D'Alembert) ni menos aún cualquier función (Euler). Representativo de esto que decimos puede ser el artículo de D'Alembert titulado "*Fundamental*" contenido en el volumen séptimo de la famosa "*Encyclopédie*".

Las condiciones sobre el problema de la cuerda vibrante original pueden ser más generales. Por ejemplo, la velocidad inicial de la cuerda no tiene que ser necesariamente cero. También la posición de los extremos de la misma puede variar con el tiempo. Esto origina problemas de tipo mixto más generales que (1) de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + h(x, t), & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= g(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= m_1(t), \quad u(\pi, t) = m_2(t), & t \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

También, problemas de vibraciones en dimensiones superiores a uno (por ejemplo, el problema de la membrana vibrante) conducen a la ecuación de ondas n -dimensional

$$\frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial x_i^2} \quad (7)$$

Ecuaciones similares a la de ondas aparecen, además, en otras muchas situaciones de interés para los estudiantes de ingeniería. Por ejemplo:

1. **En el estudio de los desplazamientos longitudinales de una viga, de sección constante S , en las hipótesis de la Resistencia de Materiales, la función $u(x, t)$ que define dichos desplazamientos longitudinales, verifica la ecuación**

$$\rho u_{tt} = ESu_{xx} + h(x, t)$$

donde ρ es la masa por unidad de longitud del medio, E es el módulo de Young y $h(x, t)$ la fuerza por unidad de longitud actuando en el punto x y en el instante t .

2. La ecuación anterior aparece también en el estudio de los desplazamientos en profundidad de un terreno y en el estudio de la torsión de una barra.
3. Ecuaciones de Maxwell en Electromagnetismo.

La ecuación del calor y el nacimiento de las series de Fourier

Jean Baptiste-Joseph Fourier, matemático y físico francés, envió en 1807 un artículo a la Academia de Ciencias de París, que trataba sobre el tema de la propagación del calor. Más concretamente, **Fourier consideró una varilla delgada de longitud dada, digamos π , cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura en la varilla viene dada por una función $f(x)$ (se supone que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante), Fourier se planteó la siguiente cuestión: ¿cuál será la temperatura de cualquier punto x de la varilla en el tiempo t ?**

Suponiendo que la varilla satisface condiciones físicas apropiadas, demostró que si $u(x, t)$ representa la temperatura en la sección x y en el tiempo t , entonces la función u debe satisfacer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & 0 < x < \pi, & 0 < t < T, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & 0 &\leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 &\leq x \leq \pi. \end{aligned} \tag{8}$$

De nuevo estamos ante un **problema de tipo mixto**. La primera condición en (8) es la **ecuación del calor**. La segunda significa que la temperatura en los extremos de la varilla se mantiene a 0° centígrados en cualquier tiempo, mientras que la última relación representa la distribución inicial de temperatura en la varilla considerada.

Partiendo de las ideas de Bernoulli para la ecuación de ondas (soluciones con variables separadas), Fourier buscó las soluciones más sencillas que puede presentar la ecuación del calor: aquellas que son de la forma $u(x, t) = X(x)P(t)$. Imponiendo la condición de que tales funciones satisfagan formalmente dicha ecuación, obtenemos los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{9}$$

$$P'(t) + \mu P(t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (10)$$

En la expresión anterior, μ hace el papel de parámetro real. Es fácil ver que (9) tiene solución no trivial si y solamente si $\mu \in \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$. Además, si $\mu = n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (9) es un espacio vectorial real de dimensión uno generado por la función $\text{sen}(nx)$. Análogamente, para $\mu = n^2$, el conjunto de soluciones de (10) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base la constituye la función $\exp(-n^2t)$. Así, disponemos de un procedimiento que nos permite calcular infinitas soluciones elementales de la ecuación del calor, a saber, las funciones de la forma $a_n v_n$, donde $a_n \in \mathbb{R}$ y v_n se define como

$$v_n(x, t) = \exp(-n^2t) \text{sen}(nx). \quad (11)$$

Es trivial que si la distribución inicial de temperatura f , es algún múltiplo de $\text{sen}(nx)$ (o una combinación lineal finita de funciones de este tipo), entonces la solución buscada de (8) es un múltiplo adecuado de v_n

Ahora bien, f no es, en general de la forma justo mencionada, pero, y aquí demostró Fourier, como Bernouilli, una enorme intuición, ¿será posible obtener la solución u de (8), para cualquier f dada, como superposición de las anteriores soluciones sencillas v_n ? Es decir, ¿será posible elegir adecuadamente los coeficientes a_n tal que la única solución de (8) sea de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2t) \text{sen}(nx). \quad (12)$$

como en el caso de la ecuación de ondas? Fourier afirmó en su artículo que esto era así, obteniéndose de nuevo la relación (5). Las ideas expuestas por Fourier en el libro citado plantearon de manera inmediata innumerables interrogantes que han originado, a lo largo de casi dos siglos, gran cantidad de investigación y han sido muchas las partes de la Matemática que se han desarrollado a partir de ellas.

Otras situaciones dan lugar a problemas distintos. Por ejemplo, si se trata de estudiar la temperatura de una varilla delgada, pero donde se sustituye el hecho de que los extremos de la misma estén a cero grados centígrados, por el de que tales extremos se mantengan aislados, tenemos el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi, t)}{\partial x} = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned} \quad (C2)$$

Problemas relacionados con la propagación del calor en cuerpos tridimensionales originan la ecuación del calor en dimensión tres. En general, la ecuación del calor n -dimensional se expresa de la forma:

$$\frac{\partial u(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial x_i^2} \quad (13)$$

Otras situaciones de interés para los estudiantes de ingeniería, donde aparecen ecuaciones similares a la ecuación del calor son las siguientes:

1. Difusión de sustancias químicas en otro medio.
2. En el estudio del flujo de agua en acuíferos en un medio no homogéneo se obtiene, suponiendo un flujo bidimensional, una ecuación de la forma

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_j} \right) = f(x_1, x_2, t)$$

Obsérvese que si $a_{ij} = \delta_{ij}$ (la delta de Kronecker), entonces tenemos la ecuación del calor bidimensional.

La ecuación del potencial y el cálculo de variaciones

La ecuación del potencial tiene su origen en la teoría de Newton de la gravitación universal. Posteriormente, Gauss, Green y Kelvin, en el siglo XIX, realizaron aportaciones importantes dentro del marco del llamado análisis vectorial, no sólo en el tema del potencial gravitacional sino también en temas relacionados con electrostática e hidrodinámica.

El potencial gravitacional $V(x)$ originado en el punto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ por una masa m localizada en un punto $\xi \in \mathbb{R}^3$ viene dado por

$$V(x) = -G \frac{m}{\|x - \xi\|}$$

donde G es la constante de gravitación universal y $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea. La fuerza gravitacional $g(x)$ viene dada por $g(x) = -\nabla V(x)$, donde ∇V indica el gradiente de la función V . Trivialmente se comprueba que el potencial es una función armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\}$, esto es, que verifica la **ecuación de Laplace**

$$\Delta V(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\} \quad (14)$$

Aquí, ΔV es el laplaciano de la función V , dado por

$$\Delta V(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i^2} \quad (15)$$

El potencial gravitacional $V(x)$ originado por un número finito de masas m_1, \dots, m_k localizadas en los puntos ξ_1, \dots, ξ_k de \mathbb{R}^3 se define de manera análoga como

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{\|x - \xi_i\|}$$

Trivialmente V es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$.

Lo anterior se refiere a “distribuciones discretas finitas de masas”. Un salto cualitativo importante se da cuando se trata de definir el potencial gravitacional de una “distribución continua de masa” que se encuentra en el espacio euclídeo. Aquí la suma finita se transforma en una “suma continua”, dando lugar a una integral en el correspondiente subconjunto de \mathbb{R}^3 . **Más concretamente si tenemos un cuerpo (subconjunto abierto y acotado) de \mathbb{R}^3 con una distribución de masa dada por la función de densidad $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, el potencial gravitacional se define como**

$$V(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} d\xi \quad (16)$$

Trivialmente $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$. Bajo condiciones muy amplias (ρ medible y acotada) se demostrará en el capítulo IV que $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Sin embargo, se mencionarán también ejemplos en este capítulo que ponen de manifiesto que aunque ρ sea continua, V no tiene que ser necesariamente de clase C^2 en Ω . Trivialmente

$$\Delta V(x) = 0, \quad \forall x \notin \overline{\Omega} \quad (17)$$

Demostraremos en el capítulo IV que si $\rho \in C^1(\Omega)$ y además es acotada, entonces

$$\Delta V(x) = 4\pi G \rho(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (18)$$

Como curiosidad, puede demostrarse fácilmente que

$$\Delta_x \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} = 0, \quad \forall x \neq \xi$$

con lo que, para obtener las derivadas de segundo orden de V en Ω , no puede intercambiarse la derivación con la integración en la fórmula (16). *Esto le suele llamar la atención a los alumnos. No porque crean que siempre se pueden intercambiar ambas operaciones (ya nos encargamos los matemáticos de ponerles suficientes ejemplos patológicos al respecto) sino porque este es un ejemplo muy natural que surge en*

ingeniería y física donde se pone de manifiesto que el rigor matemático es crucial si se quieren hacer las cosas bien.

Las disquisiciones anteriores motivan el estudio de la existencia de soluciones radiales no triviales de la ecuación de Laplace (14): soluciones de la forma $V(x) = v(\|x - \xi\|)$. Esto origina la ecuación diferencial ordinaria

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0, \quad \forall r \in (0, +\infty). \quad (19)$$

Integrando esta ecuación se obtiene lo que se llama solución fundamental de la ecuación de Laplace

$$E(x, \xi) = \begin{cases} \ln \|x - \xi\|, & \text{si } n = 2, \\ \frac{1}{2-n} \|x - \xi\|^{2-n}, & \text{si } n > 2. \end{cases} \quad (20)$$

que, como su nombre indica, desempeñará un papel importante en el estudio de ecuaciones elípticas en el capítulo IV.

El principio del máximo-mínimo para funciones armónicas, que se demostrará en el capítulo IV, motiva el tipo de problemas que “de una manera lógica” se pueden asociar a la ecuación del potencial: **los problemas de contorno**. Este hecho se ve corroborado en las aplicaciones de la teoría de ecuaciones elípticas a la Ciencia, donde tales problemas de contorno se presentan con frecuencia. Por ejemplo, en electrostática, los problemas de contorno usuales (problema de Dirichlet) responden al planteamiento

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= g(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= f(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (21)$$

donde Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^n , $\partial\Omega$ indica su frontera topológica y las funciones f y g son dadas. En cambio, en hidrodinámica lo usual son problemas de contorno del tipo

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= g(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} &= f(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (22)$$

donde n indica el vector normal exterior a $\partial\Omega$ y $\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \langle \nabla u(x), n(x) \rangle$, $\forall x \in \partial\Omega$. Estos se conocen con el nombre de problemas de contorno tipo Neumann.

La ecuación de laplace n -dimensional se escribe de la forma

$$\Delta V(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i^2} = 0$$

y se cumple para soluciones estacionarias (soluciones que no dependen de la variable tiempo t) de las ecuaciones n -dimensionales de ondas (7) y del calor (13).

Hablemos a continuación del llamado cálculo de variaciones.

La primera publicación de Leibnitz sobre cálculo diferencial apareció en 1.684, con el título "Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus". Esto muestra el interés de los matemáticos, ya desde finales del siglo XVII, por los problemas de máximos y mínimos. Los problemas que trata el cálculo de Variaciones se formularon desde el origen del cálculo diferencial. El nombre de cálculo de variaciones se debe a que así se llamaba a la derivación (variación $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, y posterior paso al límite) al comienzo. Usando algo más el lenguaje matemático, diremos que el cálculo de variaciones trata sobre problemas de máximos, mínimos y puntos críticos de funciones (¿funcionales?)

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

donde, según motivan las aplicaciones, M puede ser un conjunto de números, de funciones, de curvas, de superficies, etc.

Quizás una de las frases más acertadas sobre el método variacional y que puede dar idea de su importancia, sea la siguiente, atribuida a Euler: "*Puesto que el Universo es perfecto y fue creado por el Creador más sabio, nada ocurre en él, sin que esté presente alguna ley de máximo o mínimo.*"

Suele considerarse que lo que se entiende hoy en día por cálculo variacional, nació con la proposición de Johann Bernouillien 1.696 del problema de la braquistocrona: una masa puntual se desliza, por acción de la gravedad, desde un punto A, hasta otro punto B, a través de alguna curva. Claramente, el tiempo empleado para ir desde A hasta B, depende de la curva elegida. ¿Para qué curva se tendrá que tal tiempo es mínimo? Esto exige el estudio de funcionales de la forma

$$\int_a^b \left(\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)} \right)^{1/2} dx$$

La solución no es ni el segmento rectilíneo que une A con B, ni ningún arco de circunferencia que pase por A y B. La solución, un arco de cicloide, fue encontrada por diferentes matemáticos: Jakob Bernouilli, Newton, Leibnitz, L'Hopital, etc.

Otro problema significativo del cálculo de variaciones es el que se conoce con el nombre de problema isoperimétrico: "Dado un número real positivo L , se trata de estudiar la cuestión siguiente: de todas las curvas cerradas del plano de longitud dada $L > 0$, ¿cuál es la que encierra mayor área?"

En problemas variacionales relacionados con EDP, el principio de Dirichlet suele considerarse el punto de partida. Para ello, sea Ω un dominio (subconjunto abierto y conexo) acotado de \mathbb{R}^n . Consideremos el problema de contorno

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(x) = 0 \quad x \in \Omega \\ u(x) = f(x) \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (23)$$

Lo que se trata es del estudio de la existencia de funciones armónicas en Ω que tomen valores prefijados, dados por la función f , en la frontera de Ω .

En el estudio de este problema desde el punto de vista variacional, se considera el llamado funcional de energía:

$$F(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)^2 \right] dx \quad (24)$$

que está definido sobre el conjunto de funciones:

$$\mathcal{A} = \left\{ u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = f \right\} \quad (25)$$

(o un conjunto más amplio que se precisará en su momento). En electrostática, u es el potencial eléctrico y $F(u)$ la energía.

Los puntos estacionarios de F son, en algún sentido que se precisará, soluciones del problema (23) (principio de Dirichlet). En particular es de interés el estudio de la existencia de $\min_{\mathcal{A}} F$. Se pensó durante mucho tiempo que este problema siempre tenía solución, ya que F está acotado inferiormente. No obstante, matemáticos como Weierstrass encontraron contraejemplos interesantes.

Los problemas del cálculo de variaciones son de una gran importancia en la actualidad. Por ejemplo, diseñar la forma de un avión o un automóvil para que su resistencia al aire sea mínima. Problemas donde se trata de controlar un determinado sistema para obtener un rendimiento óptimo, problemas sobre la mejor estrategia en determinados juegos, etc.

Los ejemplos detallados que se presentan en este capítulo surgieron en los siglos XVIII y XIX. No obstante, siguen representando un papel fundamental en la teoría moderna de EDP y en torno a ellos, o a variaciones de ellos, existen numerosos interrogantes que se comentarán en el curso. La teoría moderna de EDP surgió a finales del siglo XIX y principios del XX con contribuciones importantes de Poincaré y Hilbert, alcanzando un grado notable de contenido con el desarrollo en la primera mitad del siglo XX del análisis funcional. Desde mediados de los años cincuenta del siglo pasado el uso de funciones generalizadas (distribuciones, espacios de Sobolev, etc.) y de la teoría de espacios de Hilbert, ha permitido avances muy importantes.

Por último, diremos que en la actualidad hay un interés especial (debido a las aplicaciones) por el estudio de EDP no lineales así como por los métodos numéricos de aproximación a las soluciones de las mismas.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A. Cañada, Series de Fourier y Aplicaciones. Ediciones Pirámide, Madrid, 2002.
2. I. Peral, Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.
3. A.N.Tijonov y A.A. Samarsky, Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

Es muy recomendable que el alumno complete la información histórica que se proporciona en el capítulo con las referencias siguientes:

1. A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Pirámide, Madrid, 2002. En la Introducción de este libro se pueden consultar algunos hechos relevantes de los métodos de Fourier y su relación con las EDP.
2. M. Kline. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press, New York, 1972. Traducido al castellano: Alianza Editorial, Madrid, 1992. Muy recomendable para la historia de las EDP en los siglos XVIII y XIX.
3. Página web:
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/index.html>

EJERCICIOS

El objetivo fundamental de esta primera relación de ejercicios es que el alumno se familiarice con los tres tipos básicos de EDP (ecuación de ondas, ecuación del calor y ecuación de Laplace) así como con soluciones fundamentales de las mismas. Se pretende, además, que el alumno recuerde algunos hechos básicos sobre cambios de variables así como sobre series de funciones que serán importantes en los capítulos siguientes.

1. Considérese la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (26)$$

- a) Demuéstrese que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x + t$, $\mu = x - t$, la ecuación anterior se transforma en

$$u_{\xi\mu}(\xi, \mu) = 0, \quad (\xi, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (27)$$

- b) Usando esto, calcular el conjunto de soluciones $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de (27) y usando el cambio de variable indicado, calcúlese el conjunto de soluciones de (26).
- c) Demuéstrese que el conjunto de soluciones de (26) y de (27) es un espacio vectorial real de dimensión infinita (se pueden encontrar infinitas soluciones linealmente independientes).
- d) Compárense los resultados anteriores con los que el alumno conoce para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y homogéneas de segundo orden, es decir, ecuaciones de la forma $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$, $t \in [a, b]$. ¿Cuál es la diferencia fundamental que observa el alumno?.
- e) Extiéndanse los resultados anteriores para una ecuación de ondas de la forma

$$u_{xx}(x, t) = a^2 u_{tt}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (28)$$

donde a es una constante no nula.

2. **(Propuesto en el examen realizado el 03/02/06)** Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, demuéstrese que la función

$$v(x, t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy \right) ds$$

verifica

$$v_{tt}(x, t) - v_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (29)$$

Teniendo en cuenta el ejercicio previo, encontrar una fórmula que proporcione todas las soluciones de (29).

(Sugerencia: recuérdese que $\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t H(x, t, s) ds \right) = H(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial H(x, t, s)}{\partial t} ds$).

3. **(Propuesto en el examen de Matemáticas del 25/06/05)** Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden

$$u_{xy}(x, y) + a u_x(x, y) + b u_y(x, y) + ab u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (30)$$

donde a y b son constantes reales y $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

- a) Mediante el cambio de variable $u(x, y) = v(x, y)e^{-ay-bx}$, encuéntrase una fórmula que proporcione todas las soluciones de (30).

4. Demuéstrese que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $u_n(x, t) \equiv \text{sen}(nx) \cos(nt)$ es solución de la ecuación de ondas (26).

Demuéstrese que cualquier combinación lineal finita de funciones del tipo anterior es asimismo solución de (26).

Dar condiciones suficientes sobre la sucesión de números reales $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ para que la función $u(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t)$ sea de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ y verifique la ecuación de ondas.

5. El núcleo (o solución fundamental) de la ecuación del calor se define como

$$K(x, \xi, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-(x-\xi)^2/4t}.$$

en dimensión uno y como

$$K(x, \xi, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\|x-\xi\|^2/4t},$$

para dimensión n arbitraria. Aquí, $\|x-\xi\|^2$ representa el cuadrado de la norma euclídea del vector $x-\xi$, es decir, si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, entonces

$$\|x-\xi\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2$$

Pruébese que para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo, el núcleo $K(x, \xi, t)$, como función de las variables (x, t) es solución de la ecuación del calor para $t > 0$, es decir que se verifica

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) K(x, \xi, t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

6. Demuéstrese que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $u_n(x, t) \equiv \text{sen}(nx) \exp(-n^2 t)$ es solución de la ecuación del calor. Asimismo, pruébese que cualquier combinación lineal finita de funciones del tipo anterior es solución de la ecuación del calor.

Dar condiciones suficientes sobre la sucesión de números reales $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ para que la función $u(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t)$ sea de clase C^2 y verifique la ecuación del calor para $t > 0$.

7. **(Propuesto en el examen del 03/02/05)**

a) Considérese la ecuación de Laplace

$$\Delta u(x) = 0 \tag{31}$$

y sea $\xi \in \mathbb{R}^n$ dado. Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \xi)$ es solución de (31) de la forma $u(x) = v(\|x - \xi\|)$, con $v : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0, \quad \forall r \in (0, +\infty). \quad (32)$$

Recíprocamente, si v verifica (32) entonces $u(x) = v(\|x - \xi\|)$ verifica (31) en $\mathbb{R}^n \setminus \xi$. Encuéntrese el conjunto de todas las soluciones de (32).

- b) Usando el apartado anterior, pruébese que la solución fundamental de la ecuación de Laplace

$$E(x, \xi) = \begin{cases} \ln \|x - \xi\|, & \text{si } n = 2, \\ \frac{1}{2-n} \|x - \xi\|^{2-n}, & \text{si } n > 2. \end{cases} \quad (33)$$

es una función armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$.

8. a) El potencial gravitacional $V(x)$ que se origina por un número finito de masas puntuales m_1, \dots, m_k localizadas en los puntos ξ_1, \dots, ξ_k de \mathbb{R}^3 se define como

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{\|x - \xi_i\|}$$

donde G es la constante de gravitación universal y $\|\cdot\|$ es la norma euclídea en \mathbb{R}^3 . Demuéstrese que V es una función armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$.

- b) Sea $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, una función dada (medible y acotada), donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y acotado. Demuéstrese que el potencial gravitacional

$$V(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} d\xi \quad (34)$$

está bien definido para cualquier $x \in \mathbb{R}^3$. Pruébese que $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ y que $\Delta V(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.

CAPÍTULO II: LA ECUACIÓN DE ONDAS¹

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios.**

En la página web

<http://www.ugr.es/~acanada/>

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Noción de problema de Cauchy (o problema de valores iniciales, p.v.i.) para una ecuación diferencial ordinaria, e.d.o.
2. Convergencia uniforme de series de funciones
3. Problemas de valores propios para e.d.o. lineales de segundo orden con coeficientes constantes
4. Derivación de integrales paramétricas
5. Fórmula de Green en el plano.

Se pueden consultar las referencias:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1.960.
2. J.J. Quesada: Ecuaciones diferenciales, análisis numérico y métodos matemáticos. Editorial Santa Rita, Granada, 1996.
3. <http://mathworld.wolfram.com/>

¹A. Cañada, Octubre 2006, EDPICCP

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se estudian diferentes problemas asociados a la ecuación de ondas, comenzando por el llamado problema de Cauchy. En dimensión uno este problema se escribe como

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= \beta(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Observemos que para el tiempo inicial $t = 0$ se dan dos datos: la solución u y el valor de la derivada u_t .

Indicaremos por Ω al conjunto

$$\Omega = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0 \}.$$

Una solución de (1) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, que verifica (1) en todo punto.

El próximo resultado (fórmula de D'Alembert) se refiere a la existencia y unicidad de soluciones de (1).

Teorema 1. Si $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$ y $\beta \in C^1(\mathbb{R})$, (1) tiene una única solución dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\alpha(x+t) + \alpha(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \beta(s) ds, \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega}. \quad (2)$$

En la demostración se usa en primer lugar el cambio de variables $\xi = x+t$, $\mu = x-t$, que transforma la ecuación $u_{tt} - u_{xx} = 0$ en $u_{\xi\mu} = 0$. De aquí se deduce que la solución de (1) debe ser de la forma

$$u(x, t) = H(x+t) + G(x-t),$$

donde $H \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $G \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Imponiendo las condiciones dadas en el tiempo inicial se llega fácilmente a la conclusión de que

$$H(x) = \frac{1}{2} \alpha(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \beta(s) ds + c_1,$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \alpha(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \beta(s) ds + c_2,$$

donde c_1, c_2 son constantes que satisfacen $c_1 + c_2 = 0$. De aquí se obtiene (2).

Notas de interés sobre la fórmula de D'Alembert

1. La solución dada por (2) se puede escribir de la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\alpha(x+t) + \int_0^{x+t} \beta(s) ds \right] + \frac{1}{2} \left[\alpha(x-t) - \int_0^{x-t} \beta(s) ds \right],$$

o lo que es lo mismo,

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

donde

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} \left[\alpha(x+t) + \int_0^{x+t} \beta(s) ds \right] = H(x+t),$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2} \left[\alpha(x-t) - \int_0^{x-t} \beta(s) ds \right] = G(x-t).$$

Así, u es “suma o superposición de dos ondas” u_1 y u_2 , que se desplazan, respectivamente, a la izquierda y a la derecha, con velocidad uno. De aquí, que al método utilizado en la demostración del teorema 1, se le llame método de propagación de las ondas.

2. Notemos en segundo lugar que la ecuación de ondas no tiene efecto regularizante (para tiempos positivos) sobre los datos iniciales, puesto que de (2) se deduce que u (para t fijo) tiene la misma regularidad que α .
3. De (2), se obtiene que el valor de u en un punto (x_0, t_0) de Ω , depende de los valores de α en los puntos $x_0 + t_0$ y $x_0 - t_0$ así como de los valores de β en el intervalo $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$; de aquí que al intervalo $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ se le llame **dominio de dependencia** del punto (x_0, t_0) . Al triángulo determinado por los puntos (x_0, t_0) , $(x_0 - t_0, 0)$ y $(x_0 + t_0, 0)$ se le denomina **triángulo característico del punto** (x_0, t_0) .

4) Los efectos de las perturbaciones no son instantáneos, sino que éstas se propagan con velocidad finita. Tal afirmación se puede comprender fácilmente si se considera el caso en que las funciones α y β son ambas idénticamente nulas; entonces la única solución de (1) es la función $u \equiv 0$. Si mantenemos $\beta \equiv 0$ y tomamos una función α que sea no nula y positiva solamente “cerca” de un punto dado $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces si x_1 es cualquier otro punto diferente de x_0 , el valor $u(x_1, t)$ será cero para pequeños valores de t , (aunque no para valores “grandes” de t).

4. Dado $(x_0, 0)$, el dominio de influencia de éste punto será el conjunto de todos aquellos puntos de Ω tales que su dominio de dependencia incluya al punto x_0 .

Pasamos a continuación a considerar el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= \beta(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

Como en (1), una solución de (3) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ que cumple (3) puntualmente.

El estudio del problema anterior se va a realizar usando la fórmula de Green.

Lema 2. Sea $(x_0, t_0) \in \Omega$ y T su triángulo característico. Entonces si u es cualquier función real perteneciente a $C^2(\bar{T})$, se tiene

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \frac{1}{2} [u(x_0 + t_0, 0) + u(x_0 - t_0, 0)] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} u_t(x, 0) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_T (u_{tt} - u_{xx})(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Para la demostración se procede como sigue: la fórmula de Green en el plano, afirma que

$$\int_D [Q_x(x, t) - P_t(x, t)] dx dt = \int_{\partial D} [P(x, t) dx + Q(x, t) dt] \quad (5)$$

para dominios convenientes D del plano y funciones P, Q que sean $C^1(D) \cap C(\bar{D})$. Aplicando (5) para el caso $D = T, P = -u_t, Q = -u_x$, se obtiene

$$\int_T (u_{tt} - u_{xx})(x, t) dx dt = \int_{\partial T} (-u_t(x, t) dx - u_x(x, t)) dt,$$

donde ∂T está orientada positivamente.

La integral de línea anterior se descompone en tres sumandos, correspondientes, respectivamente, a los lados del triángulo T . Parametrizando cada uno de estos lados, se pueden calcular de manera explícita las integrales resultantes, obteniéndose

$$\int_T (u_{tt} - u_{xx})(x, t) dx dt = 2u(x_0, t_0) - u(x_0 + t_0, 0) - u(x_0 - t_0, 0) - \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} u_t(x, 0) dx$$

De aquí se deduce (4).

Por último, escribiendo la integral

$$\int_T (u_{tt} - u_{xx})(x, t) \, dxdt$$

de la forma

$$\int_0^{t_0} \int_{t+x_0-t_0}^{-t+x_0+t_0} (u_{tt} - u_{xx})(x, t) \, dxdt,$$

se dispone de una fórmula que proporciona la posible solución de (3). Esto se confirma en el siguiente teorema:

Teorema 3. Sean $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$, $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ y $f, \frac{\partial f}{\partial x} \in C(\bar{\Omega})$.

Entonces la única solución de (3) es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}[\alpha(x+t) + \alpha(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \beta(s) \, ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) \, d\xi d\tau, \forall (x, t) \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (6)$$

Para llevar a cabo la demostración, conviene que introduzcamos la función

$$H(x, t, \tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) \, d\xi d\tau \quad (7)$$

con lo que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\alpha(x+t) + \alpha(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \beta(s) \, ds + \frac{1}{2} \int_0^t H(x, t, \tau) \, d\tau, \forall (x, t) \in \bar{\Omega}. \quad (8)$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) &= \frac{1}{2}[\alpha'(x+t) - \alpha'(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta(x+t) + \beta(x-t)] + \frac{1}{2}[H(x, t, t) + \int_0^t H_t(x, t, \tau) d\tau] = \\
&\frac{1}{2}[\alpha'(x+t) - \alpha'(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta(x+t) + \beta(x-t)] + \frac{1}{2} \int_0^t (f(x+t-\tau, \tau) + f(x-t+\tau, \tau)) d\tau, \\
u_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2}[\alpha''(x+t) + \alpha''(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta'(x+t) - \beta'(x-t)] + \\
&\frac{1}{2}[f(x, t) + \int_0^t f_x(x+t-\tau, \tau) d\tau + f(x, t) - \int_0^t f_x(x-t+\tau, \tau) d\tau], \\
u_x(x, t) &= \frac{1}{2}[\alpha'(x+t) + \alpha'(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta(x+t) - \beta(x-t)] + \frac{1}{2} \int_0^t H_x(x, t, \tau) d\tau = \\
&\frac{1}{2}[\alpha'(x+t) + \alpha'(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta(x+t) - \beta(x-t)] + \frac{1}{2} \int_0^t (f(x+t-\tau, \tau) - f(x-t+\tau, \tau)) d\tau, \\
u_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2}[\alpha''(x+t) + \alpha''(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta'(x+t) - \beta'(x-t)] + \\
&\frac{1}{2} \int_0^t (f_x(x+t-\tau, \tau) - f_x(x-t+\tau, \tau)) d\tau
\end{aligned} \tag{9}$$

A partir de las expresiones anteriores, es trivial comprobar que la función u definida en (6) es la única solución de (3).

El capítulo sigue con el estudio de dos problemas de tipo mixto asociados a la ecuación de ondas (unidimensional)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

El primero de ellos responde a la formulación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, & 0 \leq x \leq \pi, t > 0 \\
u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\
\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= g(x), & 0 \leq x \leq \pi \\
u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

y modela las vibraciones pequeñas de una cuerda flexible, con extremos fijos en los puntos $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$, estando la posición inicial de la misma dada por la función f y la velocidad inicial por g .

Si $\Omega = (0, \pi) \times (0, +\infty)$, una solución de (10) es cualquier función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (10) puntualmente.

Demostremos en primer lugar que (10) puede tener, a lo sumo, una solución, usando el método de la energía. Para ello, si u es la diferencia entre dos soluciones de (10), entonces u satisface un problema como (10), con $f = g = 0$. Si consideramos la función de energía $I(t) = \int_0^\pi \left((u_x(x, t))^2 + (u_t(x, t))^2 \right) dx$, entonces puede probarse que $I'(t) = 0$, $\forall t > 0$. Por tanto, la función I es constante en $[0, +\infty)$. Como $I(0) = 0$, se obtiene $I(t) = 0$, $\forall t \geq 0$. Ello obliga a que $u_x(x, t) = u_t(x, t) = 0$, $\forall (x, t) \in \overline{\Omega}$. Así pues, u debe ser constante en $\overline{\Omega}$. Como $u(x, 0) = 0$, $\forall x \in [0, \pi]$, se obtiene $u \equiv 0$, en $\overline{\Omega}$.

Una vez que hemos demostrado que (10) puede tener como mucho una solución, habrá que ver que, por lo menos, hay una. Para tratar de intuir cuál puede ser la forma de la solución buscada, pensemos que u es una función de dos variables y que las funciones de dos variables más sencillas que se pueden presentar son las que vienen dadas por el producto de dos funciones de una variable. Entonces, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Tendrá (10) soluciones de la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (11)$$

para funciones convenientes $X : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, y $T : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$? Esto origina las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (12)$$

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty). \quad (13)$$

Además, puesto que la solución buscada u debe ser continua en $\overline{\Omega}$, se ha de cumplir

$$u(0, t) = X(0)T(t) = u(\pi, t) = X(\pi)T(t) = 0, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Esto nos conduce a la “condición natural” que ha de satisfacer la función X en los extremos del intervalo : $X(0) = X(\pi) = 0$. Todo ello origina el siguiente problema de contorno para $X(x)$:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad X(0) = X(\pi) = 0. \quad (14)$$

Obviamente, los únicos valores interesantes del parámetro real λ son aquellos para los que (14) tiene solución no trivial. Así, diremos que λ es valor propio de (14) si (14) admite alguna solución no trivial.

La manera de calcular los valores propios de los problemas anteriores es sencilla,

puesto que las ecuaciones consideradas son lineales y tienen coeficientes constantes. Para ello, recordemos que, fijado λ , el conjunto de soluciones (reales) de la ecuación $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, $x \in [0, \pi]$, es un espacio vectorial real de dimensión dos. Además:

- Si $\lambda = 0$, una base de tal espacio vectorial está constituida por las funciones $X^1(x) = 1$, $X^2(x) = x$, $\forall x \in [0, \pi]$.
- Si $\lambda > 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = \exp(\sqrt{\lambda}x)$, $X^2(x) = \exp(-\sqrt{\lambda}x)$, $\forall x \in [0, \pi]$.
- Si $\lambda < 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, $X^2(x) = \text{sen}(\sqrt{-\lambda}x)$, $\forall x \in [0, \pi]$.

Cualquier solución de (14) es de la forma $X(x) = c_1 X^1(x) + c_2 X^2(x)$, $\forall x \in [0, \pi]$, donde c_1, c_2 son números reales cualesquiera. Imponiendo las condiciones de contorno llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

- Si $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 + c_2\pi &= 0, \end{aligned}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto, $\lambda = 0$, no es valor propio de (14).

- Si $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 \exp(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2 \exp(-\sqrt{\lambda}\pi) &= 0. \end{aligned}$$

El determinante de los coeficientes de este sistema es $\exp(-\sqrt{\lambda}\pi) - \exp(\sqrt{\lambda}\pi)$, que es distinto de cero. Por tanto la única solución del sistema es la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Consecuentemente, no existe ningún valor propio positivo de (14).

- Si $\lambda < 0$,

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + c_2 \text{sen}(\sqrt{-\lambda}\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema tiene solución no trivial si y solamente si $\text{sen}(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$; o lo que es lo mismo, si y solamente si $\lambda = -n^2$, para algún $n \in \mathbf{IN}$. En este caso, es decir $\lambda = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (14) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $X_n(x) = \text{sen}(nx)$, $\forall x \in [0, \pi]$.

En resumen, el conjunto de valores propios de (14) es el conjunto $\{-n^2, n \in \mathbf{IN}\}$. Si $\lambda = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (14) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base está formada por la función $X_n(x) = \text{sen}(nx)$, $\forall x \in [0, \pi]$.

Por otra parte, la constante λ ha de ser la misma en (12) y (13). Para $\lambda = -n^2, n \in \mathbf{IN}$, el conjunto de soluciones reales de (13) es un espacio vectorial real de dimensión dos engendrado por las funciones $T_n^1(t) = \cos(nt), T_n^2(t) = \text{sen}(nt)$.

Por tanto, cuando $\lambda = -n^2, n \in \mathbf{IN}$, cualquier solución de (13) es de la forma $Z_n(t) = A_n \cos(nt) + B_n \text{sen}(nt)$, con A_n, B_n números reales arbitrarios.

El procedimiento anterior permite calcular la única solución de (10) en casos sencillos. En efecto, si las funciones f y g son de la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^p a_i \operatorname{sen}(n_i x),$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^q b_j \operatorname{sen}(m_j x),$$

siendo a_i , $1 \leq i \leq p$, b_j , $1 \leq j \leq q$, números reales dados y n_i , $1 \leq i \leq p$, m_j , $1 \leq j \leq q$, números naturales distintos, entonces (10) tiene una única solución dada por

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^p a_i \cos(n_i t) \operatorname{sen}(n_i x) + \sum_{j=1}^q \frac{b_j}{m_j} \operatorname{sen}(m_j t) \operatorname{sen}(m_j x)$$

Usando Series de Fourier, extendemos las ideas anteriores a casos más generales, obteniendo el resultado siguiente:

Teorema 4. *Si f y g satisfacen las condiciones*

$$f \in C^3[0, \pi], \quad f(0) = f(\pi) = 0, \quad f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0,$$

$$g \in C^2[0, \pi], \quad g(0) = g(\pi) = 0,$$

entonces (10) tiene una única solución u dada por la fórmula

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \sin(nx),$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

El otro problema de tipo mixto que estudiamos responde a la formulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, & 0 \leq x \leq \pi, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= g(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \end{aligned} \tag{15}$$

que se corresponde con el caso en que los extremos de la cuerda están libres. Estudiamos la existencia (método de separación de variables) y unicidad (método de la energía) de las soluciones de (15) de forma análoga a como hemos hecho para (10), obteniendo el resultado siguiente.

Teorema 5. *si f y g satisfacen las condiciones*

$$\begin{aligned} f &\in C^3[0, \pi], \quad f'(0^+) = f'(\pi^-) = 0, \\ g &\in C^2[0, \pi], \quad g'(0^+) = g'(\pi^-) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

entonces (15) tiene una única solución u dada por la fórmula

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \cos(nx) \quad (17)$$

donde

$$\begin{aligned} A_n = f_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ B_0 = g_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \, dx, \quad B_n = \frac{g_n}{n} = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos(nx) \, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (18)$$

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Madrid, Pirámide, 2002. Capítulo IV
2. A.N. Tijonov y A.A. Samarsky. Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. Es de gran interés el estudio del problema de Cauchy para la ecuación de ondas en dimensiones superiores a uno. Comentemos detalladamente los casos $n = 2$ y $n = 3$, representativos de lo que ocurre, respectivamente, para n par e impar, generales.

Sea el problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= u_{tt}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x, y, z, 0) &= \phi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, y, z, 0) &= \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (19)$$

Si $\Omega = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t > 0 \}$, una solución de (19) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ que satisface (19) en todo punto.

El método que vamos a utilizar para solucionar (19) se denomina método de las medias esféricas y sus ideas fundamentales son las siguientes:

1) Si u es cualquier solución de (19) y $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es un punto dado, se puede definir la función

$$I(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x, y, z); r)} u(y_1, y_2, y_3, t) ds,$$

donde $S((x, y, z); r)$ es la esfera centrada en (x, y, z) , de radio r , y la integral anterior es una integral de superficie en las variables (y_1, y_2, y_3) .

Claramente, la función anterior, llamada media esférica de u , está definida para cualquier $r > 0$ y cualquier $t \geq 0$. Además, los valores $I(r, 0)$, $I_t(r, 0)$, se calculan a partir de los datos iniciales de (19); en efecto,

$$I(r, 0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x, y, z); r)} \phi(y_1, y_2, y_3) ds \equiv F(r),$$

$$I_t(r, 0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x, y, z); r)} \psi(y_1, y_2, y_3) ds \equiv G(r).$$

2) El objetivo es, a partir de las funciones F y G , calcular $I(r, t)$. Posteriormente, observando que la continuidad de u , implica

$$u(x, y, z, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} I(r, t),$$

llegaríamos a una expresión para la función u , que tendríamos que demostrar que define una solución de (19).

La anterior discusión permite enunciar y probar el siguiente teorema sobre existencia y unicidad de soluciones de (19):

Teorema 6. Si $\phi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, el problema de Cauchy (19) tiene una única solución u dada, para $t > 0$, por

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi t} \int_{S((x,y,z); t)} \phi(Y) ds_Y \right] + \frac{1}{4\pi t} \int_{S((x,y,z); t)} \psi(Y) ds_Y, \quad (20)$$

Merece la pena realizar algunos comentarios sobre la conclusión del teorema anterior, y compararlos con los que hicimos sobre la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas homogénea en dimensión uno. Por ejemplo, el valor $u(X, t)$ depende de los valores de ψ , ϕ y de los de las derivadas parciales de primer orden de la función ϕ en la esfera centrada en X y de radio t (principio de Huygens). Así, este conjunto puede considerarse ahora como el dominio de dependencia de un punto (X, t) . Recíprocamente, los datos iniciales ϕ y ψ cerca de un punto X_0 del hiperplano $t = 0$, sólo tienen influencia en los valores $u(X, t)$ para aquellos puntos (X, t) que están “cerca” del cono $|X - X_0| = t$. Por tanto, si ϕ y ψ tienen soporte contenido en algún subconjunto D de \mathbb{R}^3 , para que $u(X, t)$ no sea cero, el punto X debe pertenecer a alguna esfera de radio t con centro en algún punto $Y \in D$. La unión de todas estas esferas contiene al soporte de la función u en el tiempo t . Esto es típico de las soluciones de la ecuación de ondas en dimensiones impares.

Seguidamente se pueden aprovechar los resultados obtenidos sobre el problema (19), para estudiar el problema de Cauchy en dimensión dos:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= u_{tt}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) &= \phi(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u_t(x, y, 0) &= \psi(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Si $\Omega = \{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0 \}$, una solución de (21) es cualquier función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ que satisfaga (21) en todo punto.

A partir de la fórmula que proporciona la única solución de (19), aplicaremos el llamado **método del descenso** para encontrar la fórmula de la solución de (21).

Teorema 7. Si $\phi \in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, el problema (21) tiene una única

solución dada por

$$u(x, y, t) = \frac{t}{2\pi} \int_{|\xi| \leq 1} \frac{\psi(x + t\xi_1, y + t\xi_2)}{(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^{1/2}} d\xi_1 d\xi_2 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{2\pi} \int_{|\xi| \leq 1} \frac{\phi(x + t\xi_1, y + t\xi_2)}{(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2)^{1/2}} d\xi_1 d\xi_2 \right]. \quad (22)$$

Quizás la novedad más importante sea lo que es ahora el dominio de dependencia de un punto (x, y, t) de Ω . Claramente se observa, a partir de las dos fórmulas anteriores, que éste debe ser la bola euclídea cerrada de centro (x, y) y radio t . Esto marca una profunda diferencia entre los casos $n = 3$ (donde es válido el principio de Huygens) y $n = 2$ (donde tal principio no se verifica). Se puede consultar para estos aspectos: A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

2. La solución del problema (10) puede escribirse de una manera más conveniente, usando el método de propagación de las ondas. Con esto puede probarse que se pueden rebajar las condiciones de regularidad sobre f y g . Más concretamente, si f y g satisfacen las condiciones

$$f \in C^2[0, \pi], \quad f(0) = f(\pi) = 0, \quad f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0, \\ g \in C^1[0, \pi], \quad g(0) = g(\pi) = 0,$$

entonces la única solución u de (10) está dada por la fórmula (llamada fórmula de d'Alembert)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[F_1(x+t) + F_1(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} G_1(z) dz,$$

donde F_1 y G_1 son, respectivamente, las extensiones impares y 2π -periódicas de f y g , a \mathbb{R} . Para este aspecto puede consultarse: A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Pirámide, 2002 (capítulo IV, ejercicio 9).

3. Puede demostrarse la equivalencia entre la ecuación de ondas y una cierta ecuación en diferencias, que ayuda a la aproximación numérica de las soluciones de dicha ecuación, así como al cálculo efectivo de la solución de ciertos problemas de tipo mixto. En efecto, si $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, entonces son equivalentes:
 - 1) $u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$.
 - 2) $u(P_1) + u(P_4) = u(P_2) + u(P_3)$, para cualquier cuaterna de puntos P_1, P_2, P_3, P_4 , de \mathbb{R}^2 , que sean vértices de paralelogramos característicos (sus lados son rectas características) arbitrarios, situados de tal forma que P_1 y P_4 sean vértices opuestos (y por tanto, P_2 y P_3).

No deja de llamar la atención de los alumnos el hecho de que en 2) no aparezca ninguna expresión diferencial. Para este aspecto puede consultarse: F. John. Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1982.

- Es muy recomendable que el alumno consulte la bibliografía recomendada para estudiar los principales hechos de las series de Fourier en varias variables (especialmente en dos y tres variables), así como sus aplicaciones al estudio de problemas de tipo mixto para la ecuación de ondas en dimensiones superiores a uno. Hay nociones que son similares (por ejemplo la noción de base del espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$, donde Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^n). Otras en cambio, se van complicando a medida que la dimensión aumenta, como por ejemplo los criterios de convergencia puntual de la serie de Fourier. En general, al aplicar el **método de separación de variables** a estos problemas se llegaría a problema de valores propios del tipo

$$\begin{aligned}\Delta X(x) + \lambda X(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ X(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega,\end{aligned}$$

donde Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^n . Se puede consultar para este tema: A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

EJERCICIOS

En esta relación de ejercicios se plantean al alumno diversos problemas asociados a la ecuación de ondas, tanto homogénea como no homogénea. Se pretende que el alumno adquiera suficiente destreza como para poder resolver diferentes problemas de valores iniciales y problemas de tipo mixto. La interpretación física de estos problemas se ha detallado en el resumen teórico anterior y es muy conveniente que el alumno conozca de manera adecuada dicha interpretación para su posible aplicación en otras asignaturas.

- Calcular la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned}u_{tt} - c^2 u_{xx} &= x^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

donde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sugerencia: resuélvase en primer lugar el caso en el que $c = 1$ y a continuación hágase un cambio de variable adecuado para resolver el caso de c general.

- (Propuesto en el examen del 03/02/06)** Encuéntrese la única solución del problema de Cauchy

$$u_{tt} - u_{xx} = \text{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad u_t(x, 0) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si u es la función solución del problema anterior, ¿cuánto vale $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$?

3. Calcúlese la única solución de

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

cuando $f(x) = \sin^3(x)$, $g(x) = x(\pi - x)$, $\forall x \in [0, \pi]$.

4. Demuéstrese que el problema

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = 2 \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0$$

tiene una única solución u . Defínase la energía de la onda u , en el tiempo t . Demuéstrese que dicha energía no es constante.

5. Calcúlese la única solución de

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

cuando tomamos las funciones $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = 2x - \sin(2x)$, $\forall x \in [0, \pi]$.

6. (Examen del 21/12/2004)

- a) Escríbase de manera precisa la formulación del **primer problema de tipo mixto para la ecuación de ondas unidimensional**, así como el concepto de solución del mismo.
- b) Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de tipo mixto anterior, proporcionando además la fórmula que da la única solución .
- c) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{aligned} \quad (23)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ (\pi - x), & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

7. (Examen del 03/02/2005) Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Sugerencia: búsquese la solución u de (1) de la forma $u(x, t) = v(x, t) + s(x)$.

8. (Examen del 07/09/2005) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (25)$$

CAPÍTULO III: LA ECUACIÓN DEL CALOR ¹

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios.**

En la página web

<http://www.ugr.es/~acanada/>

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Noción de problema de Cauchy (o problema de valores iniciales, p.v.i.) para una e.d.o.
2. Problemas de valores propios para e.d.o. lineales de segundo orden con coeficientes constantes.
3. Teorema de derivación de integrales paramétricas.
4. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es $C^1[a, b]$ y alcanza el máximo en un punto $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$. Si $x_0 = b$, entonces $f'(x_0) \geq 0$.
5. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es $C^2[a, b]$ y alcanza el máximo en un punto $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \leq 0$.

Se pueden consultar las referencias:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1.960.
2. A. Cañada. Series de Fourier y aplicaciones: un tratado elemental con notas históricas y ejercicios resueltos. Pirámide, Madrid, 2002.
3. J.J. Quesada: Ecuaciones diferenciales, análisis numérico y métodos matemáticos. Editorial Santa Rita, Granada, 1996.
4. <http://mathworld.wolfram.com/>

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El capítulo comienza con el estudio del problema de Cauchy, o problema de valores iniciales, para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \Delta_x u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

¹A. Cañada, Noviembre 2006, EDPICCP

Aquí,

$$\Delta_x u(x, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2}$$

Si $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > 0\}$, una solución de (1) es una función $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ que verifica (1) puntualmente. En consonancia con esto, suponemos $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$.

Usando el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor puede probarse que (1) tiene, a lo sumo, una solución acotada. Una versión de este principio es el objeto del próximo teorema.

Teorema 1. *Sea ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n y $T > 0$. Notemos $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega, 0 < t < T\}$. Entonces si $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ verifica*

$$u_t(x, t) - \Delta_x u(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in \Omega, \quad (2)$$

se tiene que

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial_1 \Omega} u, \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial_1 \Omega} u, \quad (3)$$

donde $\partial_1 \Omega$ es la denominada frontera parabólica de Ω que se define como

$$\partial_1(\Omega) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \partial\omega, 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega, t = 0\}.$$

Demostremos, por ejemplo, el principio del máximo (se recomienda encarecidamente al alumno que pinte las situaciones que se describen a continuación cuando $n = 1$). Consiste en varias etapas:

1. Primero se considera la situación donde se tiene una desigualdad estricta negativa en (2) y el dominio es

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega, 0 < t \leq T - \varepsilon\}.$$

Es decir,

$$u_t(x, t) - \Delta_x u(x, t) < 0, \quad \forall (x, t) \in \Omega_\varepsilon$$

En este caso, sea $(x_0, t_0) \in \bar{\Omega}_\varepsilon$ tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\bar{\Omega}_\varepsilon} u$. Entonces necesariamente $(x_0, t_0) \in \partial_1 \Omega_\varepsilon$. En efecto, si no fuese así, entonces caben dos posibilidades

- a) $(x_0, t_0) \in \Omega_\varepsilon$. Entonces se tiene

$$u_t(x_0, t_0) = 0, \quad u_{x_i x_i}(x_0, t_0) \leq 0, \quad \forall i, 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto,

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta_x u(x_0, t_0) \geq 0$$

lo que contradice que tengamos una desigualdad estricta negativa en (2).

b) (x_0, t_0) es tal que $x_0 \in \omega$ y $t_0 = T - \varepsilon$. Entonces se tiene

$$u_t(x_0, t_0) \geq 0, \quad u_{x_i x_i}(x_0, t_0) \leq 0, \quad \forall i \ 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto, de nuevo tenemos

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta_x u(x_0, t_0) \geq 0$$

lo que contradice que tengamos una desigualdad estricta negativa en (2).

En resumen, en esta primera etapa hemos probado que si tenemos una desigualdad estricta negativa en (2), entonces

$$\max_{\bar{\Omega}_\varepsilon} u = \max_{\partial_1 \Omega_\varepsilon} u.$$

2. En una segunda etapa, hacemos tender ε a cero por la derecha, obteniendo que, si tenemos una desigualdad estricta negativa en (2), entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \max_{\bar{\Omega}_\varepsilon} u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \max_{\partial_1 \Omega_\varepsilon} u = \max_{\partial_1 \Omega} u$$

3. Para el caso en el que en (2) se tiene una igualdad, se considera la función auxiliar $v^k(x, t) = u(x, t) - kt$, con k positivo. Entonces

$$v_t^k - \Delta_x v^k = u_t - \Delta_x u - k = -k < 0.$$

Por lo anterior, tendremos que

$$\max_{\bar{\Omega}} v^k = \max_{\partial_1 \Omega} v^k.$$

Si ahora se hace tender k a cero por la derecha, tendremos (3).

Usando el principio del máximo-mínimo en dominios de la forma $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0; R) \times (0, T)$, puede probarse la unicidad de soluciones acotadas de (1). En efecto, tenemos el resultado siguiente.

Lema 2. *El problema de Cauchy (1) tiene, a lo sumo, una solución acotada.*

Si (1) tuviese dos soluciones acotadas, entonces la diferencia de ambas verifica un problema como (1) con $\varphi \equiv 0$. Así pues, el lema estaría demostrado si probamos que, en el caso $\varphi \equiv 0$, la única solución acotada de (1) es la función idénticamente cero.

Estas son las principales ideas para el caso $n = 1$ (la modificación para el caso n general es obvia). Sea u una solución acotada de (1). Entonces existe alguna

constante positiva M tal que $|u(x, t)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \geq 0$. Consideremos ahora el dominio $A = (-l, l) \times (0, T)$ con $l > 0$ y la función

$$v(x, t) = \frac{2M}{l^2} \left(\frac{x^2}{2} + t \right).$$

Es fácil comprobar que v es solución del calor en el dominio A y que en la frontera parabólica de A se tienen las desigualdades $-v \leq u \leq v$, o lo que es lo mismo, $|u| \leq v$. Por el principio del máximo-mínimo tendríamos que $|u| \leq v$ en \bar{A} . Si ahora hacemos $l \rightarrow +\infty$, tendríamos que $u \equiv 0$.

La existencia de soluciones acotadas de (1) es cosa aparte. Por cierto, que para motivar la fórmula que define la solución se usan algunas nociones elementales de la transformada de Fourier. De hecho, esta es una de las motivaciones más bonitas que conozco de la noción de transformada de Fourier, donde se pone de manifiesto el paso del caso discreto (series), al caso continuo (transformada integral). Las ideas fundamentales son las siguientes:

En primer lugar, simplificamos la situación suponiendo que $n = 1$ y que para φ acotada, buscamos soluciones u acotadas. La búsqueda de soluciones de la forma particular $u(x, t) = X(x)T(t)$, da lugar a las e.d.o.

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0, \quad t > 0.$$

Es elemental probar que la primera ecuación tiene soluciones no triviales acotadas si y solamente si $\lambda \leq 0$, de tal manera que, en adelante, sólo nos interesarán estos valores del parámetro λ . Así pues, las anteriores ecuaciones pueden escribirse de la forma

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \quad t > 0.$$

Esto permite afirmar que, para λ un número real cualquiera, la función

$$A(\lambda)e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}$$

con $A(\lambda)$ una constante (que depende de λ), es una solución (compleja) acotada de la ecuación del calor.

Si la función $\varphi(x)$ fuese de la forma $\varphi(x) = c e^{i\lambda x}$ para algún λ y c reales, el problema estaría resuelto; ahora bien, esto no es así en general, de tal forma que la pregunta básica puede ser la siguiente:

¿Será posible calcular la (única) solución acotada de (1) teniendo en cuenta de

alguna manera todas las soluciones acotadas anteriores?. Una manera intuitiva de hacer esto es “sumar” todas las soluciones, es decir, considerar la función

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda,$$

donde $A(\lambda)$ se debe escoger para que

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

De la teoría de Transformada de Fourier se sabe que, cuando φ y A cumplen algunas condiciones adicionales (por ejemplo, $\varphi, A \in L^1(\mathbb{R})$), entonces

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-i\lambda y} dy.$$

Sustituyendo la anterior expresión, agrupando convenientemente y teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-i\alpha)^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = (\pi)^{1/2}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

llegamos finalmente a que la única solución acotada de (1) puede ser la función

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad \text{para } t > 0,$$

donde

$$K(x, \xi, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-(x-\xi)^2/4t}.$$

Para n arbitrario, la función que se obtiene en el proceso anterior, es

$$K(x, \xi, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\|x-\xi\|^2/4t},$$

a la que se llama núcleo (o solución fundamental) de la ecuación del calor. El teorema de existencia de soluciones acotadas de (1) queda como sigue.

Teorema 3. Si $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y acotada, la única solución acotada de (1) viene dada por la fórmula

$$u(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x - \xi\|^2/4t) \varphi(\xi) d\xi, & t > 0, \\ \varphi(x), & t = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Además, u es de clase C^∞ para $t > 0$.

La demostración usa las siguientes propiedades (de comprobación inmediata) del núcleo K :

- 1) $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.
- 2) $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) K(x, \xi, t) = 0, \forall t > 0$.
- 3) $K(x, \xi, t) > 0, \forall t > 0$ y $\int_{\mathbb{R}^n} K(x, \xi, t) d\xi = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0$.
- 4) Para cualquier $\delta > 0$, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\|\xi - x\| > \delta} K(x, \xi, t) = 0,$$

de manera uniforme para $x \in \mathbb{R}^n$.

Una vez puestas de manifiesto las propiedades básicas de K , la comprobación de que $u \in C^\infty(\Omega)$ es trivial así como que u satisface el problema (1). La continuidad de u en $\bar{\Omega}$ puede probarse teniendo en cuenta la igualdad

$$u(x, t) - \varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t)(\varphi(y) - \varphi(\xi)) dy$$

y a continuación expresando la integral anterior como suma de dos sumandos, donde en el primero de ellos, ξ está “cerca” de x ; por último, teniendo en cuenta la continuidad de φ se prueba que $u \in C(\bar{\Omega})$.

El capítulo continua con el estudio de dos problemas de tipo mixto asociados a la ecuación del calor. Más concretamente, dedicamos nuestra atención a los problemas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, & 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \tag{C1}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, & 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi, t)}{\partial x} = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned} \tag{C2}$$

El interés por estos problemas proviene de la Física. En términos elementales, el problema (C1) modela la siguiente situación: Tenemos una varilla delgada de

longitud π , cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura está dada por la función $f(x)$, entonces la función $u(x, t)$ representa la temperatura de la varilla en la sección transversal de abscisa x y en el tiempo t .

Por su parte, el problema (C2) modela una situación parecida, donde se sustituye el hecho de que la varilla se mantenga en sus extremos a cero grados centígrados, por el de que tales extremos se mantengan aislados.

La ecuación en derivadas parciales que aparece en ambos problemas,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (C)$$

es una de las más importantes de la Física Matemática y se conoce con el nombre de **ecuación del calor**. Aparece con generalidad en fenómenos de difusión y es el ejemplo más elemental de ecuación parabólica.

La interpretación física de (C1) y (C2) sugiere que la solución de ambos problemas debe existir y ser única. Esto lo probamos con detalle en este capítulo. No obstante, también se puede intuir desde el principio alguna diferencia cualitativa importante en lo que se refiere al comportamiento asintótico (cuando el tiempo tiende a $+\infty$) de las soluciones de ambos problemas: mientras que para (C1) se tendrá $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0$, para (C2) se cumple $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = b$, constante que, en general, no es cero.

Designemos por Ω al conjunto

$$\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T\}.$$

Una solución de (C1) es cualquier función $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$u \in C(\bar{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$$

y que satisface (C1) puntualmente. Usando el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor puede probarse fácilmente que (C1) tiene, a lo sumo, una solución.

Pasemos a continuación a comentar el tema de la existencia de soluciones de (C1). El proceso es similar al que se realiza para la ecuación de ondas. En una primera etapa, usaremos el método de separación de variables para encontrar soluciones de (C1) de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Así obtenemos el problema de valores propios

$$X''(x) - \mu X(x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad (PVP1)$$

y la familia uniparamétrica de e.d.o.

$$T'(t) - \mu T(t) = 0, \quad t \in (0, T].$$

Obviamente, los únicos valores interesantes del parámetro real μ son aquellos para los que (PVP1) tiene solución no trivial. Así, diremos que μ es valor propio de (PVP1) si (PVP1) admite alguna solución no trivial.

La manera de calcular los valores propios de los problemas anteriores es sencilla, puesto que las ecuaciones consideradas son lineales y tienen coeficientes constantes. Para ello, recordemos que, fijado μ , el conjunto de soluciones (reales) de la ecuación $X''(x) - \mu X(x) = 0$, $x \in [0, \pi]$, es un espacio vectorial real de dimensión dos. Además:

- Si $\mu = 0$, una base de tal espacio vectorial está constituida por las funciones $X^1(x) = 1$, $X^2(x) = x$, $\forall x \in [0, \pi]$.
- Si $\mu > 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = \exp(\sqrt{\mu}x)$, $X^2(x) = \exp(-\sqrt{\mu}x)$, $\forall x \in [0, \pi]$.
- Si $\mu < 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = \cos(\sqrt{-\mu}x)$, $X^2(x) = \text{sen}(\sqrt{-\mu}x)$, $\forall x \in [0, \pi]$.

Cualquier solución de (PVP1) es de la forma $X(x) = c_1 X^1(x) + c_2 X^2(x)$, $\forall x \in [0, \pi]$, donde c_1, c_2 son números reales cualesquiera. Imponiendo las condiciones de contorno llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

- Si $\mu = 0$,

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 + c_2 \pi &= 0, \end{aligned}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto, $\mu = 0$, no es valor propio de (PVP1).

- Si $\mu > 0$,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 \exp(\sqrt{\mu}\pi) + c_2 \exp(-\sqrt{\mu}\pi) &= 0. \end{aligned}$$

El determinante de los coeficientes de este sistema es $\exp(-\sqrt{\mu}\pi) - \exp(\sqrt{\mu}\pi)$, que es distinto de cero. Por tanto la única solución del sistema es la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Consecuentemente, no existe ningún valor propio positivo de (PVP1).

- Si $\mu < 0$,

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 \cos(\sqrt{-\mu}\pi) + c_2 \text{sen}(\sqrt{-\mu}\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema tiene solución no trivial si y solamente si $\text{sen}(\sqrt{-\mu}\pi) = 0$; o lo que es lo mismo, si y solamente si $\mu = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, es decir $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $X_n(x) = \text{sen}(nx)$, $\forall x \in [0, \pi]$.

En resumen, el conjunto de valores propios de (PVP1) es el conjunto $\{-n^2, n \in \mathbb{N}\}$. Si $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base está formada por la función $X_n(x) = \text{sen}(nx)$, $\forall x \in [0, \pi]$.

El método de separación de variables permite calcular la única solución de (C1) en casos sencillos que son aquellos en los que la función f de (C1) es de la forma $f(x) = \sum_{i=1}^m a_i X_{n_i}(x)$, siendo $m \in \mathbf{IN}$, a_1, \dots, a_m números reales cualesquiera y n_1, \dots, n_m , números naturales distintos. En estos casos, la única solución de (C1) es la función

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m a_i \sin(n_i x) \exp(-n_i^2 t), \quad \forall (x, t) \in \Omega.$$

En una segunda etapa, usando tales casos previos y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f , respecto de la base

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(n(\cdot)), \quad n \in \mathbf{IN} \right\}$$

probamos un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C1):

Teorema 4. Si $f \in C[0, \pi]$ es C^1 a trozos en $[0, \pi]$ y $f(0) = f(\pi) = 0$, entonces la única solución de (C1) viene dada por la fórmula:

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \exp(-n^2 t), & \text{si } t > 0, \\ f(x), & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, \quad \forall n \in \mathbf{IN}.$$

A continuación mostramos algunas propiedades referentes al comportamiento cualitativo de la solución: dependencia continua de la única solución de (C1) respecto de la temperatura inicial f , regularidad C^∞ de tal solución para cualquier tiempo positivo y el hecho de que, sea cual sea la temperatura inicial, la única solución de (C1) tiende a cero cuando el tiempo diverge a $+\infty$.

En lo que respecta al problema (C2), una solución es cualquier función $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ que satisface (C2) puntualmente. Respecto de la unicidad de soluciones, el principio del máximo-mínimo no parece ahora directamente aplicable, puesto que las condiciones de contorno, para $x = 0$ y $x = \pi$, son distintas de las consideradas en (C1). La idea básica para demostrar la unicidad de soluciones de (C2) es considerar una cierta integral de energía, definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} u^2(x, t) \, dx + \int_0^t \left[\int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u(x, s)}{\partial x} \right)^2 \, dx \right] \, ds$$

Puede demostrarse que si u es cualquier solución de (C2), entonces $E(t)$ es constante. Como consecuencia se obtiene trivialmente que (C2) puede tener, a lo más, una solución.

Nuevamente, aplicando el método de separación de variables, encontramos la única solución de (C2) en casos sencillos, y usando éstos y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f , respecto de la base

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \cdot), n \in \mathbf{IN} \right\},$$

mostramos un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C2):

Teorema 5. Si $f \in C[0, \pi]$ es C^1 a trozos en $[0, \pi]$, entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx) \exp(-n^2 t), & \text{si } t > 0, \\ f(x), & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \forall n \in \mathbf{IN} \cup \{0\}.$$

Probamos, además, algunas propiedades sobre la dependencia continua de la única solución de (C2), respecto de la temperatura inicial f . Asimismo, se cumple en este caso la regularidad C^∞ de las soluciones, para cualquier tiempo positivo. En cambio, el comportamiento asintótico de las soluciones es ahora distinto del mostrado para el problema (C1). Para (C2) demostramos que, cuando el tiempo diverge a $+\infty$, las soluciones convergen a una constante, en general no nula. Esto se corresponde con el hecho de que, al estar en (C2) los extremos y la superficie lateral de la varilla aislada, entonces no puede entrar ni salir calor de la misma, con lo que éste no se pierde; lo que sí tiende es a difundirse el calor, de manera homogénea, por la varilla.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Madrid, Pirámide, 2002.
2. H.F. Weinberger. Curso de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Reverté, 1986.
3. A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. En este capítulo se han estudiado dos problemas de tipo mixto para la ecuación del calor. En ambos se daba como dato inicial una determinada temperatura f . Además, en el primero de ellos se suponía conocida la temperatura en los extremos de $[0, \pi]$, mientras que en el segundo se daba como dato el flujo de calor a través de tales extremos. La clave para poderlos resolver, usando la teoría de Series de Fourier, se ha encontrado en el hecho de que, en ambos casos, la temperatura inicial admitía un desarrollo en serie, usando precisamente como sumandos de tal desarrollo las funciones propias de los problemas de valores propios correspondientes.

Es claro que, desde el punto de vista físico, pueden plantearse otros tipos de problemas. Por ejemplo, en un extremo de la varilla puede darse como dato la temperatura en cualquier tiempo, y en el otro, el flujo de calor, o incluso una combinación de ambos. Además, se puede suponer que la superficie lateral de la varilla no está aislada, de tal forma que puede entrar o salir calor. La intuición física sugiere que tales problemas han de tener solución única. Otra cosa es demostrarlo rigurosamente.

Desde el punto de vista matemático, los problemas citados se pueden plantear de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + g(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 < t \leq T, \\ \alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) &= a(t), \quad 0 < t \leq T, \\ \beta_1 u(\pi, t) + \beta_2 u_x(\pi, t) &= b(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \tag{sl1}$$

donde f representa la temperatura inicial y la presencia de g significa que hay una fuente externa de calor, mientras que las otras dos condiciones en (sl1) son condiciones de contorno que combinan la temperatura y el flujo de calor en los extremos de la varilla (u_x indica la función derivada parcial de u , respecto de la variable x).

Bajo ciertas restricciones de regularidad sobre las funciones f , g , a y b , y sobre el signo de los coeficientes α_i, β_i , $1 \leq i \leq 2$, puede demostrarse, bien usando el método de la energía, bien usando principios del máximo adecuados, que (sl1) tiene, a lo más, una solución. Ya sabemos que a continuación viene la siguiente pregunta: ¿también a lo menos? Esto es harina de otro costal. No todos los problemas de la forma (sl1) pueden resolverse por el método de separación de variables; pero combinando éste con otros métodos (como aquellos

que buscan la solución como suma de dos más elementales, una de ellas estacionaria), puede resolverse un buen número de problemas similares a (sl1). Se puede consultar para ello la bibliografía recomendada (especialmente H.F. Weinberger o A.N. Tijonov-A.A. Samarsky).

En general, la aplicación del método de separación de variables a aquellos problemas como (sl1) que sean adecuados conduce a la posibilidad del desarrollo en serie de una cierta función h , definida en $[0, \pi]$, usando como sumandos de tal desarrollo las funciones propias (soluciones no triviales) de problemas de contorno de la forma:

$$\begin{aligned} Z''(x) - \lambda Z(x) &= 0, \quad x \in [0, \pi], \\ \gamma_1 Z(0) + \gamma_2 Z'(0) &= 0, \\ \delta_1 Z(\pi) + \delta_2 Z'(\pi) &= 0, \end{aligned} \tag{sl2}$$

donde γ_i, δ_i , $1 \leq i \leq n$, son constantes dadas.

Los problemas de contorno como (sl2), donde las condiciones de contorno aparecen por separado, en los dos puntos extremos de $[0, \pi]$, se llaman problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville. Sorprendentemente, el conjunto de funciones propias de (sl2), convenientemente ortonormalizado, forma siempre (con ciertas restricciones sobre los coeficientes γ_i, δ_i , $1 \leq i \leq n$) una base del espacio $L^2[0, \pi]$.

EJERCICIOS

1. Encontrar la única solución acotada de los problemas siguientes:

- $u_t = u_{x_1 x_1}$, $u(x_1, 0) = \cos x_1$, $t \geq 0$.
- $u_t = \Delta_{(x_1 x_2)} u$, $u(x_1, x_2, 0) = \cos(x_1 + x_2)$, $t \geq 0$.
- $u_t = \Delta_{(x_1 \dots x_n)} u$, $u(x_1, \dots, x_n, 0) = \cos(x_1 + \dots + x_n)$, $t \geq 0$.
- $u_t = u_{x_1 x_1}$, $u(x_1, 0) = \cos x_1 - 5 \sin(8x_1) + 3 \cos(\sqrt[4]{5}x_1)$, $t \geq 0$. Intenta generalizar este resultado para datos $u(x_1, 0)$ más generales.
- $u_t = u_{xx}$, $u(x, 0) = \exp(-\lambda x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $\lambda > 0$. Intenta generalizar este resultado para datos $u(x, 0)$ más generales.

2. (Examen del 21/12/2005)

- Escríbase de manera precisa la formulación de **problema de Cauchy para la ecuación del calor n -dimensional**, así como el concepto de solución del mismo.
- Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy anterior, proporcionando además la fórmula que da la única solución.

c) Calcúlese la única solución acotada del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \exp(-3x^2), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{si } f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi}.$$

4. Calcúlese la única solución de (6) si

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin(2x), & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

5. (**Propuesto en Matemáticas el 28/06/06**) Considérese el problema de tipo mixto (6). Si $f \equiv 0$, la única solución de (6) es $u \equiv 0$. Si $f(x) = \sin(2x)$, la única solución de (6) es $u(x, t) = \sin(2x)e^{-4t}$.

Si, como en el ejercicio previo,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin(2x), & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

¿Es la función

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin(2x)e^{-4t}, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

solución de (6)? Si la respuesta es negativa, razónese adecuadamente cuál (o cuáles) de las condiciones en (6) no se cumplen.

6. Considérese el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= c_1, \quad u(\pi, t) = c_2, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned} \quad (7)$$

Demuéstrese que si $f \in C^1([0, \pi])$ satisface $f(0) = c_1$, $f(\pi) = c_2$, entonces (7) tiene una única solución.

7. Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi, t)}{\partial x} = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \quad (8)$$

si $f(x) = \sin(x)$.

8. Encuéntrese la única solución de (8) cuando $f(x) = ax + b$, $\forall x \in [0, \pi]$, siendo a y b números reales dados.

9. **(Propuesto en el examen del 03/02/06)**

- a) Enúnciese de manera precisa el segundo problema de tipo mixto asociado a la ecuación del calor, así como la fórmula que proporciona la única solución del mismo.
- b) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}; & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi, t)}{\partial x} = 0; & 0 < t \leq T \\ u(x, 0) &= \text{sen}^3(x); & 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

(Sugerencia: demuéstrese previamente que $\text{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\text{sen}(x) - \frac{1}{4}\text{sen}(3x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

10. **(Examen del 03/02/2005)** Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= \sin^3 x, & 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

11. **(Examen del 07/09/2005)**

- a) Enúnciese el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor.
b) Calcular la única solución del problema de tipo mixto

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin(4x), & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

CAPÍTULO IV: LA ECUACIÓN DEL POTENCIAL. CÁLCULO DE VARIACIONES¹

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios.**

En la página web

<http://www.ugr.es/~acanada/>

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Extremos relativos para funciones de varias variables.
2. Teorema de la divergencia.

Se pueden consultar las referencias:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático, Barcelona, Reverté, 1960.
2. I. Peral : Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.
3. J.J. Quesada: Ecuaciones diferenciales, análisis numérico y métodos matemáticos. Editorial Santa Rita, Granada, 1996.
4. <http://mathworld.wolfram.com/>

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se estudian las propiedades básicas de la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad (1)$$

Las soluciones de la ecuación de Laplace (funciones de clase C^2 que satisfacen (1)) se denominan funciones armónicas. El primer resultado de interés es el siguiente principio.

¹A. Cañada, Diciembre 2006, EDPICCP

Teorema 1 Principio del máximo-mínimo para funciones armónicas

Sea Ω un dominio (conjunto abierto y conexo) acotado de \mathbb{R}^n y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $\Delta(u) = 0$ en Ω . Entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u,$$

Además, si u no es constante, ni el máximo ni el mínimo de u en $\bar{\Omega}$ se alcanzan en Ω .

El principio anterior motiva el estudio del problema de contorno (llamado problema de Dirichlet)

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= f(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

donde, en lo que sigue y salvo que explícitamente se indique otra cosa, Ω será un dominio acotado de \mathbb{R}^n . (2) tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

El uso del método de separación de variables para (2) cuando $\Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0;1)$, es decir para el problema

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Omega \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

es especialmente interesante si se quiere hacer énfasis en los métodos de Fourier clásicos (suponemos f continua). Para ello, realizando un cambio a coordenadas polares (ρ, ϕ) , llegamos a un problema del tipo

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad \phi \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$u(1, \phi) = g(\phi), \quad \phi \in \mathbb{R},$$

donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función continua y 2π -periódica $g(\phi) = f(\cos\phi, \sin\phi)$.

Buscando soluciones de (4) de la forma $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$, llegamos a los dos problemas siguientes de e.d.o.

$$\rho R'(\rho) + \rho^2 R''(\rho) - \lambda R(\rho) = 0, \quad (5)$$

$$\Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0, \quad \Phi \text{ } 2\pi\text{-periódica}$$

Los valores propios son ahora $\lambda_n = n \cup \{0\}$. Así se calculan las llamadas soluciones elementales de (4) que son de la forma

$$u(\rho, \phi) = \rho^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi),$$

donde $\{A_n, B_n\}$ son números reales arbitrarios. En una etapa posterior se concluye que cuando $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, (4) tiene una solución dada por

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi), \quad (6)$$

donde A_n, B_n son los coeficientes de Fourier de g , respecto de la base trigonométrica usual en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Es decir

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) d\phi,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) \cos n\phi d\phi, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) \sin n\phi d\phi, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La fórmula (6) tiene la ventaja de que la solución viene dada por una serie, lo que puede utilizarse para procedimientos de aproximación. Además, dicha fórmula puede usarse para calcular la solución del problema de Dirichlet para diversas funciones g concretas (fundamentalmente del tipo $\sin^n \phi, \cos^m \phi$, o productos y combinaciones lineales finitas de ellas).

La serie (6) se puede sumar, llegándose al final a la fórmula de Poisson en dimensión dos:

$$u(\rho, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \rho^2}{\rho^2 - 2\rho \cos(\phi - \psi) + 1} g(\psi) d\psi, & \rho < 1, \\ g(\phi), & \rho = 1. \end{cases}$$

Usando el concepto de integral de línea puede probarse que la fórmula anterior se transforma en

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{|s|=1} \frac{1 - |x|^2}{|s - x|^2} f(s) ds, & x \in \Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0;1), \\ f(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

que proporciona la única solución del problema de Dirichlet en coordenadas euclídeas en dimensión dos.

El problema de Dirichlet cuando $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0;1)$ y $n \geq 3$, es mucho más complicado.

Teorema 2 Sea $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0; 1)$ y f una función continua en $\partial\Omega$. Entonces, la única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ de (2) es

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n} \int_{|s|=1} \frac{1 - |x|^2}{|s - x|^n} f(s) ds, & x \in \Omega, \\ f(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (8)$$

Nota. La esfera $n - 1$ dimensional, S^{n-1} , se define como

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

y ω_n es el área de la misma (longitud si $n = 2$.) Por tanto

$$\omega_n = \int_{S^{n-1}} 1 ds$$

Puede probarse que $\omega_n = nv_n$, donde v_n es el volumen de la bola unidad de \mathbb{R}^n . La fórmula explícita que proporciona v_n es

$$v_n = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{2^{(n+1)/2} \pi^{(n-1)/2}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Nota. A la función

$$K(x, s) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{|s - x|^n}$$

se le llama **núcleo de Poisson**.

Mediante un cambio de variable trivial, se puede resolver (2) en cualquier $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(a; R)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$.

Corolario 3 Si $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(a; R)$ y f es continua en $\partial\Omega$, la única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ de (2) es

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{R\omega_n} \int_{|s-a|=R} \frac{R^2 - |x - a|^2}{|s - x|^n} f(s) ds, & x \in \Omega, \\ f(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

El capítulo continúa con el estudio de la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x) = g(x), \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

donde, salvo que explícitamente se indique otra cosa, Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^n y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible. Conviene en primer lugar, con el objeto de conseguir la máxima simplicidad en las expresiones, definir la función Γ (llamada solución fundamental normalizada), como

$$\Gamma(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x - y|, & n = 2, \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x - y|^{n-2}}, & n \geq 3. \end{cases} \quad (10)$$

Definición 4 Si g es acotada en Ω , se llama **potencial Newtoniano (o potencial de volumen) de densidad g** , a la función $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$w(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x, y)g(y) \, dy. \quad (11)$$

Lema 5 Sea w el potencial de volumen definido por (11). Entonces $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$,

$$D_i w(x) = \int_{\Omega} D_i \Gamma(x, y)g(y) \, dy, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Sorprendentemente la continuidad de g no es suficiente para conseguir que el potencial (11) sea de clase $C^2(\Omega)$. De hecho, si se intenta como en el lema previo probar que, dada g acotada, el potencial (11) es $C^2(\Omega)$ y que

$$D_{ij} w(x) = \int_{\Omega} D_{ij} \Gamma(x, y)g(y) \, dy,$$

donde $D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, el primer problema que surge es la existencia de las integrales anteriores; es más, dichas integrales no tienen que existir necesariamente, exigiendo sólo que g sea acotada.

Así pues, para poder demostrar que el potencial Newtoniano es $C^2(\Omega)$, es necesario exigir “algo más de regularidad” a la función densidad g .

Lema 6 Sea g acotada y $C^1(\Omega)$. Si w es el potencial (11), se tiene que $w \in C^2(\Omega)$. Además,

$$\Delta w(x) = g(x), \quad \forall x \in \Omega$$

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. I. Peral: Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, 1995.
2. A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. El método de separación de variables puede usarse para estudiar una amplia clase de problemas: el problema de Dirichlet en el exterior de una bola, el problema de Dirichlet en un rectángulo, el problema de Dirichlet para un anillo circular, etc. Se puede consultar para ello la referencia: A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.
2. Recordemos que cuando se buscan soluciones radiales de la ecuación de Laplace, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) = 0 \quad (12)$$

donde $r = [(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2]^{1/2}$. De manera más precisa, si $\xi \in \mathbb{R}^n$ es dado y $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\})$ es solución de (1) de la forma $u(x) = v(|x - \xi|)$, con $v : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o. (12). Recíprocamente, si v verifica (12) entonces $u(x) = v(|x - \xi|)$ verifica (1) en $\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$. Aquí, $|\cdot|$ indica la norma euclídea en \mathbb{R}^n .

Es claro que cualquier función constante es solución de (12). Además de éstas, las funciones $\ln r$ y r^{2-n} (o cualquier múltiplo de ellas) son, para $n = 2$ y $n \geq 3$ respectivamente, solución de (12). Estas últimas soluciones son las que definen la solución fundamental de (1).

Definición 7 La solución fundamental de (1) es la función

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \ln \frac{1}{|x - y|}, & n = 2, \\ \frac{1}{n-2} \frac{1}{|x - y|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \quad (13)$$

Observemos que la solución fundamental es una función simétrica y que, fijado $y \in \mathbb{R}^n$, la función $\Phi(x, y)$ es armónica en $\mathbb{R}^n - \{y\}$.

A continuación vamos a enunciar las **fórmulas de Green** para el operador laplaciano Δ . En adelante, Ω denotará un dominio acotado y regular (es decir, con frontera regular) de \mathbb{R}^n ; denotaremos por $n(s)$ al vector normal exterior a Ω en cada punto $s \in \partial\Omega$.

Teorema 8 Si $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, se tiene

a) (primera fórmula de Green)

$$\int_{\Omega} [u(x)\Delta v(x) + \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle] dx = \int_{\partial\Omega} u(s) \frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} ds, \quad (14)$$

donde

$$\frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} = \langle \nabla v(s), n(s) \rangle$$

y \langle, \rangle indica el producto escalar usual en \mathbb{R}^n .

b) (segunda fórmula de Green).

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)] dx = \\ & = \int_{\partial\Omega} \left[u(s) \frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} - v(s) \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} \right] ds \end{aligned} \quad (15)$$

Para la demostración de la parte a), considérese el campo vectorial $A : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A(x) = u(x)\nabla v(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Por el Teorema de la divergencia se tiene que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A(x) dx = \int_{\partial\Omega} \langle n(s), A(s) \rangle ds$$

lo que da (14). Para la parte b), simplemente aplíquese a) intercambiando los papeles de u y v y réstense después ambas expresiones.

Las fórmulas de *Green* permiten probar uno de los principales resultados de este tema: **la fórmula fundamental integral de Green**. En ella se va a representar cualquier función $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ y armónica en Ω , como suma

de dos términos en los que aparecen la solución fundamental (13) y los valores de u y de $\frac{\partial u}{\partial n}$ en $\partial\Omega$.

Teorema 9 Si $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ es una función armónica en Ω , entonces:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \quad (16)$$

para cualquier $x \in \Omega$, donde ω_n es el área de S^{n-1} , esfera $n - 1$ dimensional de radio 1 en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n .

La fórmula (16) permite probar la **propiedad del valor medio para funciones armónicas**. Previamente conviene tener en cuenta las relaciones siguientes:

- a) El volumen en \mathbb{R}^n de cualquier bola de radio R está dado por $R^n v_n$, donde v_n es el volumen de cualquier bola de radio 1.
- b) El área en \mathbb{R}^n de cualquier esfera de radio R está dado por $R^{n-1} \omega_n$, donde ω_n es el área de cualquier esfera de radio 1.

Recordemos además que

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{R}^n}(x; R) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq R\} \\ S_{\mathbb{R}^n}(x; R) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = R\} \end{aligned}$$

Teorema 10 Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, y u cualquier función armónica en $B_{\mathbb{R}^n}(x; R)$ y continua en $\bar{B}_{\mathbb{R}^n}(x; R)$. Entonces

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\text{volumen}(B_{\mathbb{R}^n}(x; R))} \int_{B_{\mathbb{R}^n}(x; R)} u(y) dy = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{|y-x| \leq R} u(y) dy \\ u(x) &= \frac{1}{\text{área}(S_{\mathbb{R}^n}(x; R))} \int_{S_{\mathbb{R}^n}(x; R)} u(s) ds = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y-x|=R} u(s) ds \end{aligned} \quad (17)$$

Demostración: Sea $\rho \in (0, R)$. Utilizando (16) deducimos

$$u(x) = \frac{c}{\omega_n} \int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} ds + \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-y|=\rho} u(s) ds,$$

donde c es una constante real. Ahora bien, de la segunda fórmula de *Green* se obtiene fácilmente que

$$\int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} ds = 0.$$

Luego

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|y-x|=\rho} u(s) ds.$$

Ahora tenemos una doble opción:

a) Tomar límites en la expresión anterior cuando $\rho \rightarrow R$, obteniéndose

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y-x|=R} u(s) ds$$

que es la segunda igualdad de (17).

b) Multiplicar por ρ^{n-1} e integrar, respecto de ρ , entre 0 y R , llegándose en este caso a la primera igualdad de (17).

De las fórmulas previas se deduce inmediatamente el principio del máximo-mínimo para funciones armónicas.

3. En problemas variacionales relacionados con EDP, el principio de Dirichlet suele considerarse el punto de partida. Para ello, sea Ω un dominio (subconjunto abierto y conexo) acotado de \mathbb{R}^n . Consideremos el problema de contorno

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(x) = 0 \quad x \in \Omega \\ u(x) = f(x) \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (18)$$

Lo que se trata es del estudio de la existencia de funciones armónicas en Ω que tomen valores prefijados, dados por la función f , en la frontera de Ω .

En el estudio de este problema desde el punto de vista variacional, se considera el llamado funcional de energía:

$$F(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)^2 \right] dx \quad (19)$$

que está definido sobre el conjunto de funciones:

$$\mathcal{A} = \left\{ u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = f \right\} \quad (20)$$

(o un conjunto más amplio que se precisará en su momento). En electrostática, u es el potencial eléctrico y $F(u)$ la energía.

Los puntos estacionarios de F son, en algún sentido que se ha de precisar, soluciones del problema (18) (principio de Dirichlet).

EJERCICIOS

1. Encontrar la única solución del problema de Dirichlet

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1; \quad u(x, y) = f(x, y), \quad x^2 + y^2 = 1,$$

para las siguientes condiciones de contorno:

a) $f(x, y) = a + by, \quad a, b \in \mathbb{R}$

b) $f(x, y) = axy, \quad a \in \mathbb{R}$

c) $f(x, y) = x^2$

d) $f(x, y) = x^2 - y^2$

Las condiciones frontera que siguen se dan en coordenadas polares

e) $f(\cos \varphi, \sin \varphi) = c \cos \varphi$

f) $f(\cos \varphi, \sin \varphi) = a + b \sin \varphi$

g) $f(\cos \varphi, \sin \varphi) = a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi$

h) $f(\cos \varphi, \sin \varphi) = \sin^3 \varphi.$

i) $f(\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos^4 \varphi.$

j) $f(\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi.$

2. Escribir la ecuación de Laplace tridimensional en coordenadas cilíndricas.
3. Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = f(x)$$

4. Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = y(\pi - y), \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = 0$$

5. Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1,$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(\pi, y) = 0, \quad u(x, 0) = \cos x, \quad u(x, 1) = \sin^2 x.$$

6. Calcúlese la única solución del problema de contorno para la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega; \quad u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \partial\Omega,$$

para los casos siguientes:

- a) $g(x, y, z) = 1$, $\Omega = B_{\mathbb{R}^3}(0; a)$, $a > 0$.
 b) $g(x, y, z) = Ar + B$, $A, B \in \mathbb{R}$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $\Omega = B_{\mathbb{R}^3}(0; a)$, $a > 0$.
 c) $g(x, y, z) = 1$, $\Omega = B_{\mathbb{R}^3}(0; a) \setminus B_{\mathbb{R}^3}(0; b)$, $a > b > 0$.
7. **(Examen del 03/02/2005)**

- a) Considérese la ecuación de Laplace n -dimensional

$$\Delta u(x) = 0 \tag{21}$$

Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es solución de (21) de la forma $u(x) = v(\|x\|)$, con $v : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0, \quad \forall r \in (0, +\infty). \tag{22}$$

Recíprocamente, si v verifica (22) entonces $u(x) = v(\|x\|)$ verifica (21) en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- b) Teniendo en cuenta el apartado anterior, calcúlese la única solución del problema

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 1, \quad b^2 < x^2 + y^2 < a^2, \\ u(x, y) &= 0, \quad \text{si } x^2 + y^2 = b^2 \text{ ó } x^2 + y^2 = a^2 \end{aligned}$$

8. **(Examen del 07/09/2005)** Considérese el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad (x, y) \in \Omega \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{23}$$

Demuéstrese que mediante un cambio a coordenadas polares $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, el problema anterior se transforma en

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad \phi \in \mathbb{R}, \tag{24}$$

$$u(1, \phi) = g(\phi), \quad \phi \in \mathbb{R},$$

donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como $g(\phi) = f(\cos \phi, \sin \phi)$.

9. **(Examen del 07/09/2005)** Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(1, y) = f(y), \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = 0 \end{aligned}$$

10. **(Propuesto en el examen del 03/02/06)**

- a) Enúnciese de manera precisa el Principio del Máximo-Mínimo para funciones armónicas (o para la ecuación de Laplace).
- b) Demuéstrese que si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y las funciones $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfacen

$$\begin{aligned} \Delta u_1(x) &= \Delta u_2(x), & \text{si } x \in \Omega \\ u_1(x) &\leq u_2(x), & \text{si } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

entonces se verifica $u_1(x) \leq u_2(x)$, $\forall x \in \bar{\Omega}$.

- c) Sea Ω el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Usando el apartado anterior, demuéstrese que

$$xy^3 + x^2 + y \leq x^3y + y^2 + x, \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}.$$